కర్నాటక ప్రభుత్వం

గణితం

Mathematics

తెలుగు మాధ్యమం

Telugu Medium

9

తొమ్మిదవ తరగతి

భాగం – 1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विद्ययाऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

National Council For Education and Research

Sri Arbindo Marg New Delhi - 110016

Karnataka Textbook Society (R.)

6th Cross, Malleshwaram,

Bengaluru - 560 003

FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ತೆಲುಗು ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದ ಮಾಡಿ 2017–18ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ಎನ್. ಮಂಜುಶ್ರೀ ಭಾ.ಆ.ಸೇ.,
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು.

Telugu Translation Committee

Sri. G. Ravindra Reddy Assistant Teacher, Government Telugu and Kannada Higher Primary School, OPH Road, Shivajinagar, Bengaluru - 01.

Smt. R.S UshaRani, Head Mistress, Government Telugu and Kannada Higher Primary School, Shivajinagar, Bengaluru - 01.

Smt. B. Sharmila Reddy, Assistant Teacher, Government Telugu Higher Primary School, Vivekanagar, Bengaluru - 047.

Smt. Jyothirmayi, Assistant Teacher, Government Telugu Higher Primary School, Yelahanka, Bengaluru - 064

Smt. Subhashini, Assistant Teacher, Government Telugu High School, Shivajinagar, Bengaluru.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Advice and Guidance

Sri M. P. Madegowda, Managing Director, Karnataka Textbook Society, Bengaluru.

Smt Usha, Deputy Director, Karnataka Textbook Society, Bengaluru.

Program Co-ordinators

Smt. Bhagyalakshmi, Assistant director, Karnataka Text Book Society, Bengaluru.

విషయ సూచిత

భాగం – I

³#r Ü…QÀ

1.	**సంఖ్యావ్యవస్థ**	**1 - 26**
1.1	పరిచయం	1
1.2	కరణీయ సంఖ్యలు	5
1.3	వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు	9
1.4	వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రమలు	20
1.5	వాస్తవ సంఖ్యలపై ఘాతాంక న్యాయాలు	26
1.6	సారాంశం	29
2.	**బహుపదులు**	**27 - 48**
2.1	పరిచయం	70
2.2	ఏక చరరాశిలో బహుపదులు	70
2.3	బహుపది శూన్య విలువలు.	75
2.4	బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన	85
2.5	బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు	89
2.6	సారాంశం	96
3.	**నిరూపక జ్యామితి**	**49 - 62**
3.1	పరిచయం	14

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ 18

3.3 సారాంశం 30

4. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలు 63 - 68

4.1 పరిచయం 32

4.2 సరళ సమీకరణాలు 32

4.3 సరళసమీకరణము యొక్క సాధన 35

4.4 సారాంశం 46

5. యూక్లిడ్ రేఖాగణిత పరిచయం 69 - 80

5.1 పరిచయం 31

5.2 యూక్లిడ్ నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు 33

5.3 సారాంశం 43

6. రేఖలు మరియు కోణాలు 81 - 95

6.1 పరిచయం 46

6.2 మూల పదాలు మరియు నిర్వచనాలు 47

6.3 ఖండించు రేఖలు మరియు ఖండించుకోని రేఖలు 49

6.4 కోణాల జతలు 50

6.5 ఒకే రేఖకు సమాంతరంగావున్న రేఖలు 60

6.6 సారాంశం 68

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అనుబంధ – 1 **96 - 117**

A1 - 1 పరిచయం

A1 - 2 గణిత ప్రవచనములు

A1 - 3 నిగమన నిరూపణ విధానము

A1 - 4 సిద్ధాంతాలు, పరికల్పనలు మరియు స్వీకృతములు

A1 - 5 గణిత నిరూపణ అనగానేమి?

A1 - 6 సారాంశం

జవాబులు / సూచనలు **118 - 128**

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

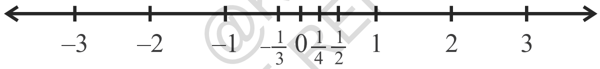
అధ్యాయం – 1

G1D5V4

సంఖ్యా వ్యవస్థ

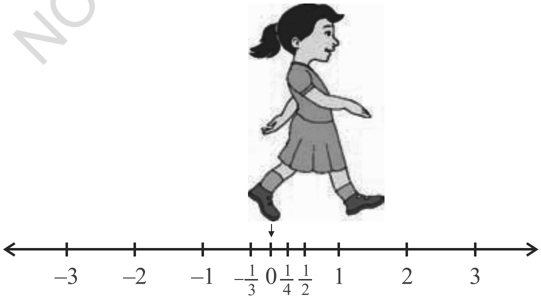
1.1 పరిచయం

వెనుకటితరగతులలోసంఖ్యా రేఖ గురించి మరియు సంఖ్యలను ఎలా రాసి ఉంటారో నేర్చుకున్నారు కదా! కావాలంటే, అవి ఎలా అమరి ఉంటాయో (పటం 1.1 ను చూద్దాం) నేర్చుకున్నారు.



చిత్రం 1.1 : సంఖ్యారేఖ

మీరు ఒక సారి ఊహించండి. సున్నా దగ్గర నుండి నడక మొదలుపెట్టి సంఖ్యారేఖపై ధన సంఖ్యల దిశవైపు ప్రయాణం చేస్తూ వెళితే మీరు అనేకమైన ధన సంఖ్యలను చూస్తారు కదా!

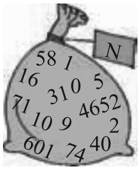


చిత్రం 1.2

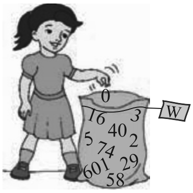
ఇప్పుడు మీరు సంఖ్యారేఖపై నడుస్తూ కొన్ని సంఖ్యలను సేకరించి, వాటిని నింపడానికి ఒక సంచిలో తీసుకోండి.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

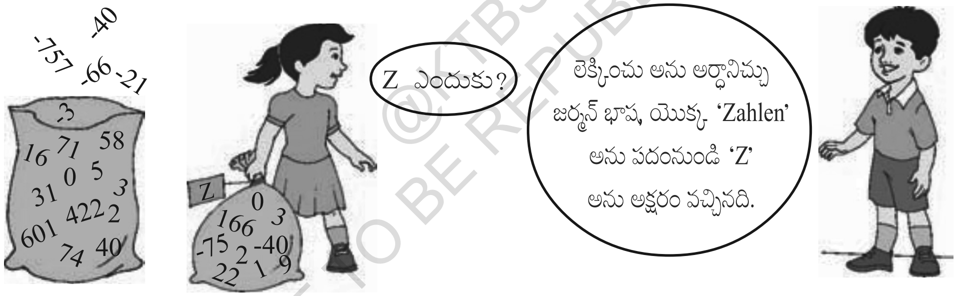
మీరు 1, 2, 3,.......... ఈ విధమైన సహజ సంఖ్యలను మాత్రం సేకరించండి ఎన్నుకోవడం ప్రారంభించవచ్చు. ఇలా చేస్తూ వెళితే అనంత సంఖ్యలో ఉంటాయి (ఇది నిజం ఎందుకు) కాబట్టి గుర్తు చెసుకోండి ఒకసారి. సహజసంఖ్యలను 'N' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో సూచిస్తాం.



ఇప్పుడు వెనుకకు తిరిగి నడవండి. సున్నను ఇప్పుడు ఆ సంఖ్యవున్న సంఖ్యలను అన్నింటిని కలిపి పూర్ణంకాలు (whole numbers) అంటారు దానిని 'W' అనే ఆంగ్ల అక్షరంతో చూపిస్తారు.



అలాగే ముందుకు నడుస్తూ చూస్తే మనకు చాలా ఋణ సంఖ్యలు కనిపిస్తాయి వాటిని సేకరించి, సంచిలో వేయండి ఇప్పుడు మీరు సేకరించిన కొత్త సంఖ్యలను ఏమంటారు? ఒకసారి గుర్తుకు చేసుకోండి. వాటిని **పూర్ణసంఖ్యలు** (Integers) అంటారు. మరియు వాటిని ఆంగ్ల అక్షరంలోవి 'Z' తో చూచిస్తారు.



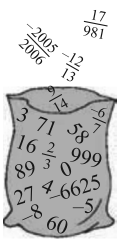
NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

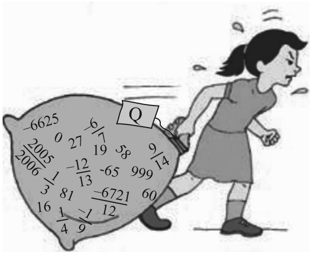
ఇంకా కొన్ని సంఖ్యలను మనం సంఖ్యారేఖపై వదిలేసి ఉండటం గమనించవచ్చు ? ఒక వేళ! అవి $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ లేదా $-\frac{2005}{2006}$ ఒక వేళ మనం వీటిని కూడా సంచిలో దింపాలి అనుకోండి. అప్పుడు అ సంఖ్యా సమితిని కరణీయ **సంఖ్యా సమితి** (Rational numbers) అని అంటారు.

మరియు ఆ సమితిని 'Q' అనే అక్షరంతో చూచిస్తారు ఒక్కసారి కరణీయ (Rational) అనేపదం నిష్పత్తి (Ratio) అను పదం నుండి వచ్చింది. 'Q' అనే సంకేతాక్షరం భాగలబ్ధం (Quatient) అనుపదంతో వచ్చింది.

ఏదైనా సంఖ్య r కరణీయ సంఖ్య అయితే, వాటి రూపం $\frac{p}{q}$ ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు అయితే మరియు $q \neq 0$ ($q \neq 0$ ఎందుకు?) అవుతుంది.

ఒక్కసారి గమనించండి సంచిలో ఉన్న అన్ని సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలమా. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$





ఉదాహరణకు – 25 ను $-\frac{25}{1}$ గా రాస్తే ఇక్కడ $p = -25$ మరియు $q = 1$.

(కాబట్టి కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సహసంఖ్యా సమితిలో ఉంటాయి మరియు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాలు కూడా ఉంటాయి.

మీకు ఇప్పటికే అర్థమై ఉంటుంది. కరణీయ సంఖ్యలు అంటే అవి $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉంటాయి అవి ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$

ఉదాహరణకు $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ సరి అయిన కరణీయ సంఖ్యలు ఎలాగైనా. $\frac{p}{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అయితే లేదా $\frac{p}{q}$ సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యఅయితే $q \neq 0$ మరియు p మరియు q లకు నమాన్య కారణాంకాలు లేకపోతే 1 తప్పా వేరే సామాన్యకారణాంకాలు లేకపోతే. (అంటే p మరియు q లు సహపూర్ణాంకాలు) అప్పుడు

సంఖ్యారేఖపై అనంతమైన భిన్నాలు సంఖ్యారేఖమీద చూపునప్పుడు $\frac{1}{2}$ ఎంచుకోబడుతాయి.

ఇప్పుడు మీరు వెనుకటి తరగతులలో ఏం చదువుకున్నారో కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం

ఉదాహరణ 1 : కింది వాక్యాలు సరినా లేదా తప్పా అనే దానిని కారణ సహితంగా తెల్పండి?

(i) ప్రతి పూర్ణాంకం కూడా ఒక సహజ సంఖ్య.

(ii) ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య కూడా ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(iii) ప్రతి కరణీయ సంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణ సంఖ్య.

సాధన:– (i) తప్పు ఎందుకంటే సున్న అనేది పూర్ణసంఖ్య కాని సంఖ్యకాదు.

(ii) సరి ఎందుకంటే ప్రతి పూర్ణాంకం m' ఆయితే $\frac{m}{1}$ రూపంలో రాయవచ్చు మరియు ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య

(iii) తప్పు ఎందుకంటే $\frac{3}{5}$ అనేది పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణ 2 : 1 మరియు 2 ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను కనుక్కోండి కనీసం రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఈ ప్రశ్నకు సమాధానం రాయండి.

సాధన : r మరియు s ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తిస్తారు ఒకసారి జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి r మరియు s ల ను కూడి వాటి మొత్తాన్ని 2తో భాగించాలి అంటే $\frac{r+s}{2}$ ఇది r మరియు s ల మధ్య ఉంది కాబట్టి $\frac{3}{2}$ అనేది ఒక సంఖ్య ఇది 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిని అనుసరించి మీరు 1 మరియు 2 ల మధ్య కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు వాటిలో ఈ నాలుగు సంఖ్యలు $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ మరియు $\frac{7}{4}$.

సాధన 2 : వేరొక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక్క సారిగా అన్ని ఐదు కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు మనకు కావలసిన ఐదు సంఖ్యలను, 1 మరియు 2 లు కరణీయ సంఖ్యలుగా హారం 5 + 1, అయితే $1 = \frac{6}{6}$

మరియు $2 = \frac{12}{6}$. ఇప్పుడు పరీక్షించండి $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ మరియు $\frac{11}{6}$ అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు ఇవి కేవలం 1 మరియు 2ల మధ్య గలవు

కావున ఆ ఐదు సంఖ్యలు కూడా $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ మరియు $\frac{11}{6}$.

గమనించండి :- ఉదాహరణ 2 ను గమనించండి. 1 మరియు 2ల మధ్య ఉన్న కరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి. కాని 1 మరియు 2 ల మధ్య అనంతమైన కరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయి సాధారణంగా ఏ రెండు కరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన సంఖ్యలో కరణీయ సంఖ్యలు వ్యవస్థితమవుతాయి అని చెప్పవచ్చు.

మళ్ళీ ఒకసారి సంఖ్యారేఖను పరిశీలిస్తే, సంఖ్యా రేఖపై ఉన్న అన్ని అంకెలను మనం తీసి సంచిలో వేశామా? లేదు. ఇక్కడ నిజం ఏమిటంటే అనంత సంఖ్యలో సంఖ్యారేఖపై ఉన్న సంఖ్యలను వదిలేశాం కదా! రెండు సంఖ్యల మధ్యగల ఖాళీలలో ఉన్న చాలా సంఖ్యలను తీసుకునే ప్రయత్నం చేయండి. కేవలం 1 లేదా 2 కాదు అనంత సంఖ్యలో ఉన్నవి ఆశ్చర్యకర విషయం ఏమిటంటే ఏరెండు సంఖ్యల మధ్య ఉన్న సంఖ్యలను చూసినా, అవి అనంత సంఖ్యలో సంఖ్యలను కలిగి వున్నాయి. కాబట్టి క్రింద ప్రశ్నలు మనలోనే మిగిలి పోయాయి :

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

1. సంఖ్యారేఖపై మనం వదిలేసిన సంఖ్యలు ఏవి, వాటిని ఏమని పిలుస్తాం?
2. వాటిని గుర్తించడం ఎలా? అనగా కరణీయ సంఖ్యలనుండి వాటి వైవిధ్యతను తెలుసుకోవడం ఎలా?

ఈ ప్రశ్నలన్నింటికి సమాధానాలను తరువాతి అధ్యాయం లో తెలుసుకుంటారు.

అభ్యాసం 1.1

1. సున్న అనునది అకరణీయ సంఖ్యనా? మీరు దానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలదా? $(p, q \in z \;\; p \neq 0)$?

2. 3 మరియు 4 మధ్యగల ఐదు కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

3. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{5}$ ల మధ్యగల ఐదు కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

4. అయితే క్రింది వాక్యాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా మీ మాటలో సమాధానాలు మరియు కారణాలు చెప్పండి?.

(i) ప్రతి సహజసంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణాంకం.

(ii) ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణాంకం.

(iii) ప్రతి కరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణాంకం.

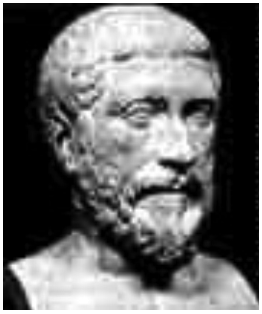
1.2 అకరణీయ సంఖ్యలు

సంఖ్యారేఖన మీద కరణీయ సంఖ్యలుకాని సంఖ్యలు ఉంటాయని మనం వెనుకటి విభాగంలో చూశాం. అలాంటి సంఖ్యలను మనం ఈ విభాగంలో కనుగొంటాం ఇంతవరకు మీకు కనబడిన సంఖ్యలన్నీ $\frac{p}{q}$ $(p, q \in z, \;\; q \neq 0)$ రూపంలో ఉన్నాయి. అందువలన ఈ రూపంలోగల సంఖ్యలు ఉన్నాయా? అని మీరు ప్రశ్నించవచ్చు? ఖచ్చితంగా అలాంటి సంఖ్యలు ఉన్నాయి.

ఇప్పుడు మనం ఈ సంఖ్యలను ఔపచారికంగా వ్యాఖ్యానిద్దాం.

ఒక సంఖ్య '5 ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో $(p, q \in z, \;\; q \neq 0)$ వ్యక్తపరచడానికి సాధ్యంకానిచో వాటిని అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



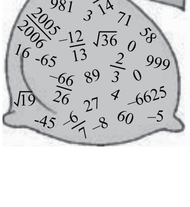
పైథాగరస్
(క్రి.పూ 569 క్రి.పూ 479)
చిత్రం 1.3

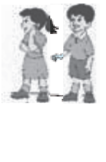
గ్రీసు దేశంలోని పైథాగొరియన్‌లు చాలామంది గొప్పగణితశాస్త్రవేత్త మరియు తత్వవేత్త అయినటువంటి పైథాగరస్‌కు అనుచరులు ఉన్నారు ఈయన క్రి. పూ. 400 లలో అన్ని సంఖ్యలను కనుగొని, వాటిని అవి అకరణీయసంఖ్యలు కావు అని మాత్రం చెప్పారు. తర్వాత కాలంలో ఈ సంఖ్యలనే కరణీయసంఖ్యలు అని పిలుస్తున్నాం. కాని వాటిని కరణీయ సంఖ్యలరూపం, భిన్న రూపంలో రాయడం వారికి తెలియదు. పైథాగొరియన్‌లలో చాలామంది ఈ కరణీయసంఖ్యను ఒక కల్పిత సంఖ్యగా, పైథాగరియస్‌లలో ఒకరైన హిప్పొస్ కనుగొన్నారు అన్ని కల్పిత సంఖ్యలపై హిప్పొక్రొటస్ సరైన ముగింపును ఇవ్వలేదు. $\sqrt{2}$ అనేది కనుగొని కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పారు లేదా $\sqrt{2}$ ను తర్వాతికాలంలో వీరు కరణీయసంఖ్యల గుట్టును కనుగొనడం జరిగింది.

గమనించండి : ఒకసారి గుర్తుచేసుకోండి . $\sqrt{\ }$ ఈ గుర్తును ఎప్పుడు వాడతాం, ఒకవేళ ఇది ఒక ధన సంఖ్యయొక్క వర్గమూలం అనుకుంటే. అయితే $\sqrt{4}=2$ అయినట్లైతే 2 మరియు −2 లుకూడా 4 యొక్క వర్గమూలాలు.

$\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని పైథాగొరియన్‌లు నిరూపించారు తర్వాత సిరీస్‌కు చెందిన ఢియోడరస్ క్రి .శ. 425 లో $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{10},\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13},\sqrt{14},\sqrt{15}$ మరియు $\sqrt{17}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలు అని నిరూపించాడు $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$........ మొదలైన కరణీయసంఖ్యల యొక్క నిరూపణలు గురించి మీరు 10వ తరగతిలో చదువు కుంటారు అలాగే. π గురించి చాలా వేల సంవత్సరాల నుంచి ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించారు లాంబర్ట్ మరియు లెజెండ్రె 17 వశతాబ్దంలో కరణీయ సంఖ్యలు సాధించారు. తర్వాత మనం 0.10110111011110....... మరియు π గురించి చర్చించాలి. మళ్ళీ మనకు కొన్ని ప్రశ్నలు ఉత్పన్నం అవుతున్నాయి.

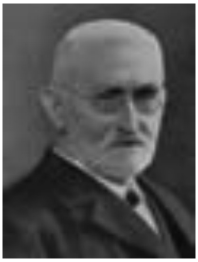
కావున వెనుకటి అధ్యాయంలోకి వెళ్దాం అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్న సంచిని ఒకసారి గుర్తుకుతెచ్చుకోండి ఒకవేళ ఆసంచిలో ఉన్న కరణీయ సంఖ్యలను ఉంచాం అనుకోండి. సంఖ్యారేఖపై ఇంకా ఏదైనా సంఖ్య మిగిలిపోయి ఉంటుందా? లేదు! కాబట్టి ఆ సంచిలో ఉన్న లేదా సేకరించిన అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యలను కలిపి **వాస్తవ సంఖ్యలు** **(Real**





NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

numbers) అంటారు దానిని R తో సూచిస్తాం, కాబట్టి వాస్తవసంఖ్య అనేది అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు లేదా కరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు. కావున ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను మనం ఖచ్చితంగా ఒక బిందువు దగ్గర సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవచ్చును. మరి ఎందుకు సంఖ్యారేఖ అని పిలుస్తున్నాం? వాస్తవ సంఖ్యారేఖ అని పిలవవచ్చుకదా!



ఆర్. డెడెకైండ్
(1831-1916)
చిత్రం: 1.4

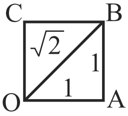
1870 సం|| లో ఇద్దరు జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు. కాంటర్ మరియు డెడెకైండ్ సంఖ్యారేఖపైన ఉండే ప్రతి బిందువు ఏకైక వాస్తవసంఖ్యను సూచిస్తుంది ఆదేవిధంగా సంఖ్యారేఖపై ఏ వాస్తవసంఖ్యలోనైనా సూచించే బిందువు ఏకైకంగా ఉంటుంది అని వీరు చూపించారు.

జి. కాంటర్
(1845-1918)
చిత్రం : 1.5

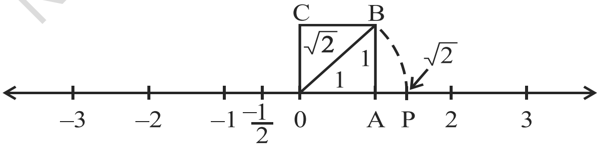
ఇప్పుడు మనం కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలు సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ ఉన్నాయో చూద్దాం:

ఉదాహరణ 3 : $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సాధన : ఒక యూనిట్ భుజముగాగల చతురస్రం OABC ని సంఖ్యారేఖపై 'O' వద్ద గీయండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం, ప్రకారం OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ సూచించాలి? (చిత్రం 1.6 ను నుండి) OB = $\sqrt{2}$ అని మనకు తెలుసు ఒక వృత్తలేఖిని ఉపయోగించండి. (చిత్రం 1.7ను గమనించండి)



చిత్రం 1.6



చిత్రం 1.7

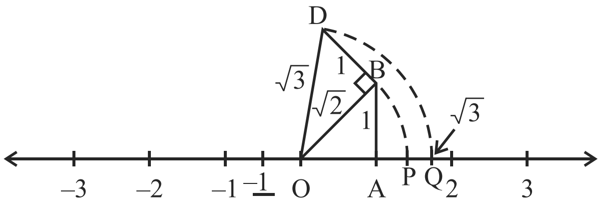
OB = $\sqrt{2}$ అని ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం.

'O' కేంద్రంగా OB వ్యాసార్థంలో నంఖ్యారేఖపై కుడివైపున 'P' వద్ద ఖండించునట్లుగా ఒక చాపాన్ని గీయండి. 'P' అనునది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{2}$ ను సూచిస్తుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణ 4 : $\sqrt{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి

సాధన : చిత్రం 1.7 ను పరిశీలించండి.



చిత్రం 1.8

చిత్రం 1.8 లో చూపిన విధంగా 1 యూనిట్ ప్రమాణంలో BD ని OB కి లంబంగా ఉండేవిధంగా గీయండి O,D లను కలపండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, ఒక వృత్తలేఖినిని ఉపయోగించి 'O' కేంద్రంగా OD వ్యాసార్థంలో సంఖ్యా రేఖపై Q' కు కుడివైపున Q' వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపాన్ని గీయండి అది సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{3}$ ను సూచిస్తుంది.

ఇదే విధంగా ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య ను n కు $\sqrt{n-1}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించిన తరువాత $\sqrt{n}$ ను సూచించవచ్చు.

అభ్యాసం 1.2

1. **ఈ క్రింద వాక్యాలను పరిశీలించి సరినా లేదా తప్పా అనే దానిని సమర్థించండి.**

   (i) ప్రతి కరణీయ సంఖ్య ఒక వాస్తవసంఖ్య అవుతుంది.

   (ii) సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువు వద్ద వున్న సంఖ్యా రూపం $\sqrt{m}$ ఇక్కడ 'm' ఒక వాస్తవసంఖ్య

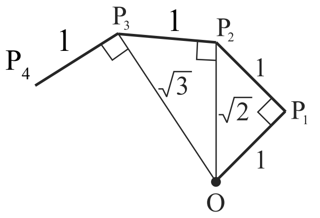
   (iii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.

2. అన్ని ధన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాలు కరణీయసంఖ్యలా ? ఒకవేళ అలా కాకపోతే ఒక ఉదాహరణలో ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. $\sqrt{5}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తిస్తారు?.

4. తరగతిలో చేయాల్సిన కృత్యం ('వర్గమూల సర్పలం' నిర్మించుట.) వర్గమూల సర్పలాన్ని నిర్మించుటకు పెద్దసైజుకాగితాన్నితీసుకొనికిందసూచించినసోపానాలు అనుసరించండి.



చిత్రం 1.9

వర్గమూల సర్పలం నిర్మాణం

'O'బిందువు నుంచి ప్రారంభించి 1 సెం. మీ. పొడవుగల రేఖాఖండం OP మని గీయండి. OP కి లాబంగా 1 సెం.మీ. పొడవులో PP_1 నుగీయండి (ఇక్కడ $OP=PP_1=1$ 1 సెం మీ) O,P లను కలపండి ($OP_1=P_1P_2=1$ సేం. మీ) పొడవులో OP_1కు లంబంగా రేఖాఖంఢాన్ని గీయండి. O_1P_2 లను కలపండి. సెం. మీ పొడవు కు లంబంగా P_2P_3 రేఖాఖండాన్ని గీయండి. ఇదే పద్ధతిలో మరికొన్ని విధానలు కొనసాగించండి అప్పుడు $P_{n-1}P_n$ రేఖాఖండాలు OP_{n-1} యూనిట్ లో వున్న లంబాలు ఏర్పడును ఇదే విధంగా కొనసాగిస్తే P_2P_3..... P_n బిందువు ల వద్ద ఒక అందమైన సర్పలాకారం ఏర్పడుటను చూడవచ్చు ఇక్కడ $\overline{OP}, \overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$..... లు వరుసగా $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\right)$ .... సూచిస్తాయి.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

1.3 వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ విస్తరణ

ఈ భాగంలో, మనం వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యల వివిధ రూపాలు గమనిస్తాం. వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వివిధ దశాంశరూపాల విస్తరణ గురించి చూస్తాం మరియు వాస్తవసంఖ్యల మరియు కరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఉన్న ఈ విస్తరణారూపాల మధ్య తేడాలు గమనిస్తాం అంతేకాకుండా మనం వాస్తవసంఖ్యల దశాంశరూపాలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తిస్తాం అనేదికూడా గమనిద్దాం. భిన్నాలు మన నిత్య జీవితానికి దగ్గరగా ఉంటాయి ఈ క్రింద 3 ఉదాహరణల ద్వారా వాటిని గమద్దాం $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$

జాగ్రత్తగా పై భాగహారాలలో శేషాలను గమనించండి.

ఉదాహరణ 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ మరియు $\frac{1}{7}$ ల యొక్క దశాంశ విస్తరణలను రాయండి.

సాధన :

```
    3.333...           0.875            0.142857...
 3 | 10             8 | 7.0          7 | 1.0
     9                  64                7
    ---                ---              ---
    10                  60               30
     9                  56               28
    ---                ---              ---
    10                  40                20
     9                  40                14
    ---                ---              ---
     10                  0                 60
      9                                    56
    ---                                   ---
      1                                    40
                                           35
                                          ---
                                            50
                                            49
                                          ---
                                             1
```

శేషాలు 1, 1, 1, 1, 1....

విభాజకం : 3

శేషాలు: 6, 4, 0

విభాజకం : 8

శేషాలు 3, 2, 6, 4, 5,1,3, 2, 6, 4, 5, 1..........

విభాజకం : 7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఏమి గమనించారు? మీరు ఇక్కడ కనీసం మూడు విషయాలు గమనించి, ఉండాలి:

(i) ఒకానొక దశలో శేషాలు '0' అయివుంటాయి. లేదా తిరిగి అదేశేషం పునరావర్తనం కావడం ప్రారంభమవుతుంది.

(ii) అనేక సార్లు పునరావృతమైన శేషాలు విభాజకం విలువకంటే తక్కువగా ఉన్నాయి. ($\frac{1}{3}$ ఒకటి అనే అంకె అనేక సార్లు పునరావృతం కాగా, అందులో విభాజకం 3, $\frac{1}{7}$ లో ఆరు సార్లు శేషాలు 326451 లు పునావృత అవుతాయి కాని ఇందులో భాజకం 7

(iii) శేషం ఒకవేళ పునరావృతం అయితే, భాగఫలంలో మనకు ఒకే అంకె పునరావృత్తం వస్తుంది. ($\frac{10}{3}$ 3 లో లెక్కించి చూడండి మరియు $\frac{1}{7}$ లో 142857 అనేవి భాగఫలంలో పునరావృతంగా వస్తాయి.

పైన గమనించిన ఉదాహరణలన్నీ కూడా $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ రూపం లో ఉన్న అకరణీయ సం ఖ్యలకు ఉదాహరణలు. $\frac{p}{q}$ భాగహారంలో రెండు ముఖ్య మైన విషయాలను గమనిం చకోవాలి శేషం గనుక సున్న అవుతుంది. సున్న కాకపోతే. మనకు వివిధరకాల పునరావృ తం అయ్యేశేషాలు వస్తాయి ప్రతి సందర్భాన్ని ఇప్పుడు గమనిద్దాం.

సందర్భం (i) : శేషం సున్న అయి వుంటుంది.

ఉదాహరణకు $\frac{7}{8}$ లో మనకు శేషం సున్నరావడం మనం గమనించాం కొన్ని దశల తర్వాత మరియు దశాంశ విస్తరణలో $\frac{7}{8} = 0.875$ మరికొన్ని ఉదాహరణలో $\frac{1}{2} = 0.5; \frac{639}{250} = 2.556$ ఈ అన్ని సందర్భాలలో దశాంశం తర్వాత ఉన్న విలువను వదిలివేస్తాం. లేదా అనంత సంకెలతో ఆ దశాంశంలో రాస్తాం. అందుకోసం మనం దశాంశ విస్తరణలో దశాంశం తర్వాత ఉన్న అంకెలను తొలగించి రాస్తాం.

సందర్భం (ii) : శేషం సున్న అయివుండదు.

ఉదాహరణలు $\frac{10}{3}$ మరియు $\frac{1}{7}$ లో శేషాలు అనేవి పునరావృతంగా రావడం మరియు ఒకదశలో దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రావడం గమనించాం మరోలా చెప్పాలంటే విభాజకంలో కొన్ని అంకెల శ్రేణులు పునరావృతం అవుతాయి. దశాంశం తర్వాత. ఈ విధమైన దశాంశ శ్రేణిని ఆంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశశ్రేణి అని అంటాం ఉదాహరణకు $\frac{10}{3} = 0.3333.......$వ ంరియు $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857......$

సాధారణంగా మనం మూడు సార్లు ఒకే అంకె విభాజకలో పునరావృతం అయితే, దానిని $\frac{10}{3}$ యొక్క విభాజకాలను $0.\bar{3}$ అని రాస్తాం

అదేవిధంగా భాగఫలంలో కొన్ని అంకెల గుంపు పునరావృతం అయితే, $\frac{1}{7}$ లో భాజకం విలువ 142857 ను $\frac{1}{7}$ కు $0.\overline{142857}$ అని రాస్తాం, బార్ (–) కింద దన్ని అంకెల సమూహం అని బార్ సూచిస్తుంది అలాగే 3.57272........ రు $3.5\overline{72}$ గా రాస్తాం. ఈ ఉదాహరణలన్నీ కూడా

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంత సంఖ్యలకు ఉదహరణగా చెప్పవచ్చు. కాబట్టి దశాంశ విస్తరణలో వాస్తవసంఖ్యలకు ముఖ్యంగా రెండురకాల రూపాలు ఉంటాయి. అవి ఒకటి అంతమయ్యే దశాంశం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం.

ఇప్పుడు ఒకవేళ సంఖ్యారేఖపై మరొక చేతి వైపు నడుచుకుంటూ వెళితే. 3.142678 అనేది దశాంశ విస్తరణలో ఇది అంతం అయ్యే దశాంశమా లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశమా: అయితే ఇది అకరణీయ సంఖ్యానా? సమాధానం అవును!

దీనిని మనం నిరూపించం కాని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరిస్తాం అంతమయ్యే దశాంశం చాలా సులభం.

ఉదాహరణ 6 : 3.142678 అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి ? లేదా3 142678 ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసి p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు అయిన $q \neq 0$ అని చూపండి.

సాధన : $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$. మరియు ఇది అకరణీయ సంఖ్య

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఇప్పుడు సందర్భం (ii) లో చెప్పిన విధంగా అంతంకాని ఆవర్తితం.

ఉదాహరణ 7: $0.3333..... = 0.\bar{3}$ అని చూపండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచుతుంది ఇక్కడ p మరియు q లు అకరణీయసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

సాధన: $0.\bar{3}$ ని x అని అనుకుంటే.

$$x = 0.3333....$$

$$10 = 10 \times (0.333...) = 3.333.....$$

ఇప్పుడు $3.3333..... = 3 + x$ ($\because$ $x = 0.3333.........$నుండి

కాబట్టి $\therefore\ 10x = 3 + x$ సాధించిన x విలువ వస్తుంది

$$9x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

ఉదాహరణ 8 : 1.272727........ = $1.\overline{27}$; అని చూపండి దీనిని $\frac{p}{q}$ రూపం లో వ్యక్తపరచిన

ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$

సాధన : $x = 1.272727......$ అనుకొనిన, దీనినుండి రెండు స్థానాలు పునరావృతం అవుతున్నాయి. కావున x ను 100 లో గుణించాలి.

$$100 \times x = 100 \times (1.272727..........)$$
$$100\,x = 127.2727......$$
$$100\,x = 126 + 1.2727........$$

కావున $100\,x = 126 + x \; (\because x = 1.272727 ....)$

$\therefore \quad 100\,x - x = 126$

కాబట్టి $99\,x = 126$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

భాగహారంచేయగా $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

ఉదాహరణ 9 : 0.2353535 = $0.2\overline{35}$ అని చూపండి దానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్త పరచిన ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు $q \neq 0$ అగును.

సాధన : $x = 0.2\overline{35}$ కావున 2 ఇక్కడ పునరావృతం కాలేదు కావున గమనించండి కాని బార్ లో 35 లు పునరావృతం. అయ్యాయి. రెండు స్తానాలు పునరావృతం అయ్యాయి.

కావున x ని 100 లో గుణకారం చెయ్యాలి

$$100\,x = 23.53535.....$$
$$100\,x = 23.3 + 0.23535.......... = 23.3 + x$$
$$\therefore \quad 99\,x = 23.3$$
$$99\,x = \frac{233}{10}$$
$$x = \frac{233}{990}$$

సరిచూడగా $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

కావున ప్రతి సంఖ్య కూడా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని చూపిస్తుంది. $\frac{p}{q}$ రూపంలో $q \neq 0$ ఇక్కడ p మరియు q లు అకరణీయ సంఖ్యలు మన సమాధానాలను క్రింది రూపంలో సేకరించారు దశాంశ విస్తరణ రూపంలో అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలూ అవుతాయి అంతేకాకుండా ఏ సంఖ్య అయితే దశాంశరూపంలో అంతం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుందో అది అకరణీయ సంఖ్య.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కావున ఇప్పుడు మనకు అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపంతెలుసు. మరి కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం ఏంటి?

అంతం మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశ మాన ప్రధానం ఇది అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం విస్తరణను పరిశీలించాం, అలాగే కరణీయ సంఖ్యలకుకూడా అకరణీయ సంఖ్యల ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి

కరణీయసంఖ్యలుదశాంశవిస్తరణరూపంలో కరణీయసంఖ్యలుఅంతమయ్యే దశాంశంలేదా అంతంకాని ఆవర్థిత దశాంశం అవుతాయో ఏ సంఖ్య అయితే అంతం అయ్యే దశాంశ మానం లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుందో అది కరణీయ సంఖ్య గుర్తుచేసుకోండి S = 0.10110111011110........... ముందుభాగంలో రాశాం. ఇది అంతం అయ్యే సంఖ్య నా. అంతం కాని ఆవర్తిత సంఖ్యనా. పైలక్షణాలను బట్టి ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనంతసంఖ్యలో కరణీయ సంఖ్యలు S కు ఉద్భవిస్తున్నాయి.

కావున $\sqrt{2}$ మరియు π కు కరణీయ సంఖ్యల రాయండి? ఇక్కడ దశాంశ విస్తరణ రూపం ఒక దశవరకు మాత్రమే గుర్తిస్తాం.

$\sqrt{2}$ = 1.4142135623730950488016887242096.........

π = 3.14159265358979323846264338327950.............

(**గమనిక :** $\frac{22}{7}$ యొక్క విలువ దాదాపుగా π విలువకు సమానం కాని $\pi \neq \frac{22}{7}$) తరువాత

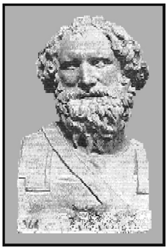
కాలంలో గణిత శాస్త్రంలో కరణీయ సంఖ్యలపైన వివిధరకాలైన టెక్నిక్‌ల ద్వారా దశాంశ రూపంలో విస్తరించి రాయడం మొదలు పెట్టారు. ఉదాహరణకు $\sqrt{2}$ భాగహారపద్ధతిని ఉపయోగించి, దశాంశ రూపంలో రాయడం. ఆసక్తికర విషయం ఏమిటంటే సులభసూత్రాలు గణిత వేదిక్ శాస్త్రంలో (క్రీ.పూ.800 – క్రీ.పూ 500) ను $\sqrt{2}$ విలువను ఈ క్రింది విధంగా సూచించారు.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే పైవాటిలో ఏవైనా మొదటి 5 దశాంశ స్థానాలు ఒక్కటే చరిత్రలో π విలువను కనుగొనడానికి వేసిన ప్రయోగాలు చాలా ఆసక్తి కలిగివున్నవి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

π విలువను గుణించటంలో మేధాని గ్రీక్‌కు చెందిన ఆర్కిమిడీస్. దీనివిలువ సుమారుగా 3.140845 మరియు 3.142857 ల మధ్య ఉంటుంది ($3.140845 < \pi < 3.142857$) అని అతడు నిరూపించాడు π విలువను నాలుగవ దశాంశ స్థానం వరకు కనుగొన్న భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త ఆర్యభట్టు(476 – 550 (క్రీ.శ.) ప్రస్తుతం అత్యంత వేగం గా పనిచేసే కంప్యూటర్లను ఉపయోగించి π విలువను 1.24 ట్రిలియన్ దశాంశ స్థానాల వరకు కనుగొన్నారు. (1 ట్రిలియన్ = 1000000000000)



ఆర్కిమిడీస్
క్రీ.పూ 287 క్రీ.పూ. 212
చిత్రం 1.10

ఇప్పుడు కరణీయ సంఖ్యలను పొందడం ఎలాగో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 10 : $\frac{1}{7}$ మరియు $-\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యలను కనుగోనండి.

సాధన: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అంటాం కావున $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ అని సులభంగా లెక్కించవచ్చు. $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయసంఖ్యలను గుర్తించగా, అంతమయ్యే మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత కరణీయ సంఖ్యలో అనంత సంఖ్యలో ఉంటాయి. ఉదాహరణకు 0.150150015000150000.................

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 1.3

1. క్రింది వాటిని దశాంశ రూపంలో రాయండి మరి అవి ఏ రకమైన దశాంశ రూపాలో తెలియచేయండి.

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అయిన $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ల దశాంశ రూపాలు రాయండి. భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించకుండా చేయండి? అది ఎలా? (సూచన: $\frac{1}{7}$ లో శేషాలను జాగ్రత్తగా గమనించండి)

3. ఈ క్రిందివాటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణాంకాలు మరియు $q \neq 0$.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999...... $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. జవాబును చూసి, మీరు ఆశ్చర్యపోయారా? మీ తరగతి ఉపాధ్యాయునితోనూ మి స్నేహితులతోనూ దీని గురించి చర్చించి, చూడండి.

5. $\frac{1}{17}$ ను దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా, ఎన్ని స్థానాలు పునరావృతం అవుతాయి? గమనించి సమాధానం రాయండి.

6. అకరణీయ సంఖ్యలలో చాలా ఉదాహరణలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాసిన $(q \neq 0)$, ఇక్కడ p మరియ $-q$' లు పూర్ణాంకాలు ఆయిన వాటికి 1తప్ప మీరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేకపోతే అటువంటివాటికి అంతం ఇక్కడ q విలువ ఏది ఆయితే ఇది సత్యం అవుతుంది చూడండి?

7. ఏ మూడు సంఖ్యలు దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అంతంకాని ఆవర్తితం కాని దశాంశం అగునో, వాటిని రాయండి?

8. $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{9}{11}$ మరియు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల 3 వేర్వేరు కరణీయ సంఖ్యలన ు రాయండి.

9. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు అకరణీయసంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు అగునో చెప్పండి.
   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796
   (iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.4 వాస్తవ సంఖ్యలపై పరిక్రమలు

మనం వెనుకటి తరగతుల్లో అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలనం మరియు గుణకారం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మము, సహచరధర్మం మరియు విభాగ న్యాయాలు పాటిస్తాయని తెలుసుకున్నాం. అదేవిధంగా సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం దృష్ట్యా కరణీయ సంఖ్యలు కూడా సంవృతా ధర్మాన్ని పాటిస్తాయని నీవు చెప్పగలవా?

ఉదాహరణకు $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)$ మరియు $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఒక కరణీయ మరియు గుణకారం చేసిన ఏమి జరుగునో పరిశీలిద్దాం

ఉదాహరణకు $\sqrt{3}$ అనేది కరణీయం అయితే. $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ఏమవుతాయి? $\sqrt{3}$ అనేది అంతంకాని మరియు ఆవర్థితంకాని దశాంశం, $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ల విషయంలో కూడా ఇది సత్యం. $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలే.

ఉదాహరణ 11: $7\sqrt{5}, \dfrac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ లు కరణీయ సంఖ్యలు అవునో, కాదో చూడండి.

సాధన: $\sqrt{5} = 2.236....,\ \sqrt{2} = 1.4142....,$

$\pi = 3.1415....$

$$\therefore \quad 7\sqrt{5} = 7 \times 2.236......... = 15.652............,$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304..........$$

$$\sqrt{2}+21 = 22.4142..........., \pi - 2 = 1.1415.......$$

అన్నికూడా అంతంకాని మరియు అంతంకాని ఆవర్థితంకాని దశాంశాలు. కావున ఇవి అన్నీ కరణీయసంఖ్యలే.

ఇప్పుడు సాధారణంగా కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగహారాలు వర్గమూలాలపై మరియు 'n' వ వర్గమూలంలో చేస్తే కరణులు అగునా ఇక్కడ 'n' ఒక సహజసంఖ్య. కొన్ని ఉదాహరణాలు చూడండి.

ఉదాహరణ 12: $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ లను కూడండి.

సాధన:– $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

ఉదాహరణ 13: $6\sqrt{5}$ ను $2\sqrt{5}$ లో గుణించండి.

సాధన:– $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times \sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = 60$

ఉదాహరణ 14: $8\sqrt{15}$ ను $2\sqrt{3}$ లో భాగహారం చేయండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన:– $8\sqrt{15} \surd 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

కింది ఉదాహరణలను చదివి ఏవి సత్యమో తెలియచేయండి.

(i) సంకలనం మరియు వ్యవకలనం దృష్ట్యా అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలలో ఏర్పడేవి కరణీయ సంఖ్యలు

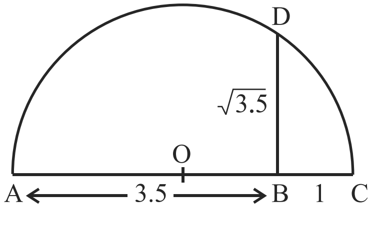
(ii) గుణకార దృష్ట్యా లేదా అకరణీయ సంఖ్యకు 2 సున్న కాని కారణాంకాలు వుంటే అది ఆకరణీయ సంఖ్యల దృష్ట్యా, కరణీయ సంఖ్య.

(iii) ఒకవేళకూడికలదృష్ట్యా,వ్యవకలనం,గుణకారం,మరియుభాగహారందృష్ట్యా,రెండుకరణీయ సంఖ్యల మధ్య వచ్చు ఫలితం అకరణీయ లేదా కరణీయ సంఖ్య అగును.

వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాలగురించి. చర్చిద్దాం ఒకసారి గుర్తుచేసుకోండి 'a' ఒక సహజ సంఖ్య అయితే $\sqrt{a} = b$ అంటె $b^2 = a$ మరియు $b > 0$ అదే నిర్వచనం ధన వాస్తవ సంఖ్యలకు కూడా వర్ధించును.

$a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\sqrt{a} = b$ అంటే $b^2 = a$ మరియు $b > 0$

'n' ఏదెనైా ధన పూర్ణాంకమెనైప్పుడు, $\sqrt{n}$ ను సంఖ్యా రేఖమీద ఎలా గుర్తించాలో విభాగం 1.2లో చూశాం. ఇప్పుడు మనం ఏదెనైా దత్త ధనవాస్తవ సంఖ్య 'x' కు $\sqrt{x}$ ను రేఖాగణితంగా ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం ఉదాహరణకు, $\sqrt{3.5}$ ను రేఖా గణిత పరంగా కనుగొందాం.



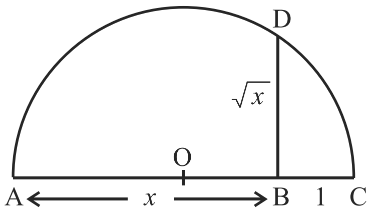
చిత్రం 1.11

దత్త రేఖ మీదగల స్థిర (నిర్దిష్ట) బిందువు 'A' నుండి 3.5 మూలమానాల దూరంలో AB = 3.5 మూలమానాలు (ప్రమాణాలు) అగునట్లు 'B' బిందువును గుర్తించండి. (చిత్రం 1.11ను గమనించండి) B బిందువు నుండె ఏకమాన దూరంలో 'C' బిందువును గుర్తించండి. AC మధ్య బిందువును గుర్తించండి. 'O' గా పేర్కొనండి. 'O' బిందువును

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కేంద్రంగా పెట్టుకొని OC వ్యాసార్ధంగా ఉండునట్లు ఒక అర్ధ వృత్తాన్ని గీయండి. 'B' ద్వారా సాగిపోవునట్లుమరియు అర్ధవృత్తాన్ని 'D' బిందువులో ఖండించు నట్లు AC కి ఒక లంబరేఖ గీయండి. అప్పుడు BD = $\sqrt{3.5}$

సాధారణంగా, ఏదైనా ధనవాస్తవ సంఖ్య 'x' కు $\sqrt{x}$ ను కనుగొనండిదేనికి, AB = x మూల మానం అగునట్లు 'B' ని గుర్తించండి. మరియు చిత్రం 1.12లో ఉన్నట్లు BC = 1 మూలమానం అగునట్లు 'C' బిందువును గుర్తించండి. తరువాత $x = 3.5$ ప్రకరణంలో చేసినట్లుగా, BD = $\sqrt{x}$ అయివుండుటను మనం చూస్తాం. (చిత్రం 1.16ను గమనించండి). మనం ఈ ఫలితాన్ని పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ఉపయోగించి సాధించవచ్చు. చిత్రం 1.12లో Δ OBD లంబకోణ త్రిభుజం అయివుండుటను గమనించండి. వృత్త వ్యాసార్ధం $\frac{x+1}{2}$ మూలమానాలు.



చిత్రం 1.12

అందువలన, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ మూలమానాలు.

ఇప్పుడు OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

అందువలన పైథాగరస్ సిద్ధాంతంనుండి,

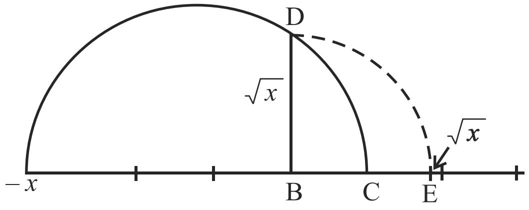
$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

అది BD = $\sqrt{x}$ అని చూపుతుంది.

సున్నాకంటే పెద్దదైన ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య 'x'$(x > 0)$ కు $\sqrt{x}$ రూపంలో సంఖ్యను రేఖాగణిత పరంగా చూపించవచ్చని ఈ రచన వలన తెలుపు సంఖ్యారేఖ మీద $\sqrt{x}$ స్తానాన్ని మీరు తెలుసుకోవడానికి కోరుకున్నచో 'B'సున్నాను మరియు 'C' 1 ని సూచించునట్లు BC ని సంఖ్యా రేఖగా పరిగణించండి.B' బిందువును కేంద్రంగా పెట్టుకొని, BD వాస్తవంగ ఉండునట్లు మరియు సంఖ్యారేఖను E' బిందువులో ఖండించునట్లు ఒక బావం గీయండి (చిత్రం 1.13 ను గమనించండి). అప్పుడు E' $\sqrt{x}$ ను చూపుతుంది

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 1.13

వర్గమూలం, కనుగొను ఈ విధానాన్ని ఘనమూలం, నాల్గవమూలం మరియు సాధారణం గా n'వ మూలలకు (n'ధన పూర్ణాంకం) విస్తరించవచ్చు. వెనుకటి తరగతిలోని వర్గమూలం మరియు ఘనమూలాల అర్ధాన్ని జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి. $\sqrt[3]{8}$ అనగానేమి? అది దేని ఘనం 8 అవుతుందో, అలాంటి ఒక ధనసంఖ్యగా మనం తెలుసుకున్నాం $\sqrt[3]{8} = 2$ అని మీరు ఊహించుకోవచ్చు. ఇప్పుడు $\sqrt[5]{243}$ ను ప్రయత్నిద్దాం. $b^5 = 243$ అగునటువంటి ఏదైనా సంఖ్య b'ని మీరు తెలుసు కున్నారా? దీనికి జవాబు 3 అందువలన $\sqrt[5]{243} = 3$ ఉదాహరణలనుండి 'a' సున్నా కంటే పెద్దదైన వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు మరియు n ఒక ధనసంఖ్య అయినప్పుడు మీరు $\sqrt[n]{a}$ ని వ్యాఖ్యానించగలరా? ఇప్పుడు, $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయివుండనీయండి మరియు n ఒక ధన పూర్ణాంకం అయివుండనీయండి. $b^n = a$ మరియు $b > 0$ అయినప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ ముందుగా వాటిలో ఉపయోగించిన '$\sqrt{\ }$' సంకేతాన్ని కరణీయ చిహ్నం అంటారు అని గమనించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

వర్గమూలాలకు సంబంధించిన చాలాచోట్ల ఉపయోగించు కొన్ని నిత్య సమీకరణాలను మనం ఇప్పుడు పట్టీ చేద్దాం వాటిలో కొన్నింటిని వెనుకటి తరగతిలో మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్నారు. వాస్తవ సంఖ్యల సంకలనం మీదగల గుణాకార విభాజక నియమం నుండి మరియు $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ $(x, y \in R)$ అను నిత్య సమీకరణం నుండి మిగిలిన వాటిని పొందవచ్చు.

అభ్యాసం- 1.2 లో $\sqrt{n}$ అదే ఒక ధన కరణీయ సంఖ్య అయితే సంఖ్యారేఖపై n' ఉంటుంది.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో వీటిని గుర్తిస్తాం.

ఉదాహరణ 15 : ఈ క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

సాధన : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right) = 10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right) = 5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2 = 25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2 = 3+2\sqrt{21}+7 = 10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2 = 11-7=4$

గమనించండి : పై ఉదాహరణలను సాధించడానికి కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను కూడడం జరిగింది. తర్వాత ఏర్పడిన సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అయినా కావచ్చు కరణీయ సంఖ్యా అయినా కావచ్చును. ఈ క్రింది సమస్యను సాధించడం ద్వారా భాగాన్ని పూర్తిచేద్దాం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడ గుర్తిస్తారు. ఇది కరణీయ సంఖ్యనా చెప్పండి హోంలో ఉన్న సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావున $\frac{1}{\sqrt{2}}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్య.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 16 **:** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి

సాధన : ఇప్పుడు $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయ రూపంలోకి మార్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయుటకు దాని లవహారాలను గుణిద్దాం.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ చెస్తే $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ కావున

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ అని రాయవచ్చు.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ రూపంలో ఉంటే సంఖ్యారేఖపై గుర్తించటం చాలా సులభం ఇది 0 కు $\sqrt{2}$ సరిగ్గా మధ్యలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 17: $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన: (iv) సూత్రం నుండి గుణకారం మరియు భాగహారం $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ ను $2-\sqrt{3}$ లో హారాన్ని గుణించాలి.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

ఉదాహరణ 18 : $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : (iii) సూత్రం నుండి.

$$\therefore \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ఉదాహరణ 19 : $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ను హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

కావున హారంలో ఒక వర్గమూలం ఉంటే దాన్ని గుర్తును మార్చి తిరిగి లవంగానూ, హారంగానూ రాస్తే ఎర్పడేదే హారాన్ని అకరణీయం చేయడం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అభ్యాసం 1.4

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి అకరణీయ సంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. కింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. ఒక వృత్త పరిధికి మరియు దాని వ్యాసానికి గల నిష్పత్తిని π అని నిర్వచిస్తే (c) దాని వృత్తం మరియు వ్యాసం (d) అయిన $\pi = \dfrac{c}{d}$. అయిన π కరణీయ సంఖ్య అగునా? దానిని ఎలా సాధిస్తాం.

4. $\sqrt{9.3}$ ని సంఖ్యారేఖపై చూపండి.

5. ఈ క్రింది వాటి హారాలను అకరణీయం చేయండి.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 వాస్తవ సంఖ్యలకు ఘాతాంక నియమాలు.

ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సాధిస్తారో ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

మీకు సమాధానాలు యు లభించాయా? అవి కింది విధంగా ఉంటాయి.

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

ఈ సమాధానాలు వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకున్న ఘాతాంక నియయాలు ఉపయోగించి సాధించాం, (ఇక్కడ *a, n* మరియు *m* లు సహజ సంఖ్యలు గుర్తుంచుకోండి *a* ఆధారం లేదా భూమి అంటాం *m* మరియు *n* లను ఘాతాలు అంటాం)

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m > n)$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

అయితే $(a)^0$ ఎంత? అవును దీని విలువ 1 $(a)^0 = 1$ అని నేర్చుకున్నాం ఘాతాంక నియమం (iii) నుండి $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ఘాతాంక నియమాలలో ఋణ ఘాత సంఖ్యలను ఎలా విస్తరించి రాయాలో తెలుసుకోండి.

ఉదాహరణలు:

(i) $17^2 . 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} . (9)^{-3} = (63)^{-3}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక వేళ ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సాధించాలి?

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

పై వాటిని ఎలా సాధించాలి? వాటిని సాధించాలంటే ముందుగా ఘాతాంక నియమాలను మరింతగా విస్తరించి రాయాలి. అది వెనుకటి తరగతుల్లో నేర్చుకున్నా, అధారం అనేది ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య. అయితే వాటి ఘాతాలు అకరణీయ సంఖ్యలు (తర్వాత పాఠాలలో మీరు ఈ ఘాతాంకాలలో ఉన్న ఘాత సంఖ్యలను గురించే వాస్తవ సంఖ్యసమితిలో నేర్చుకుంటారు) ఈ ఘాతాంక నియమాల ద్వారా ఉదాహరణకు $4^{\frac{3}{2}}$ ను అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం. ఇందుకు మనం కొద్దిగా ఇక్కడ పనిచేయాలి:

అధ్యాయం 1.4 $\sqrt[n]{a}$ ను ఒక వాస్తవసంఖ్య అయితే $a > 0$ అగును అను నిర్వచించాం. కావున $a > 0$ అయితే వాస్తవ సంఖ్యలలో మరియు 'n' అనేది ధనకరణీయ సంఖ్య అగును. అప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$ ఎందుకంటే $b^n = a$ మరియు $b > 0$ ఘాతాంక రూపంలో చెప్పాలంటే $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ అని నిర్వచిస్తాం ఈవిధంగా. ఇక్కడ $4^{3/2}$ ను రెండు విధాలుగా చెయవచ్చు.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

పై నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి $a > 0$ మరియు a ఒక వాస్తవ సంఖ్య కావున m మరియు n లు కరణీయ సంఖ్యలు అవుతూ వాటికి 1 తప్ప మరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకం లేదు ఆంటే $n > 0$

కాబట్టి $$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

ఈ క్రింది ఘాతాంక నియమాలను పరిశీలించండి $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య p మరియు q లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన

(i) $a^p . a^q = q^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ఈ సూత్రాలను ఉపయోగించి, పైన అడిగిన ప్రశ్నల ను సాధించండి

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 20: సాధించండి:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

సాధన

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13\times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

అభ్యాసం1.5

1. **సాధించండి:** (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. **సాధించండి:** (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. **సూక్ష్మీకరించండి:** (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

1.6 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో ఈ క్రింద అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. $\dfrac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయసంఖ్యలు ఆంటాం ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$
2. $\dfrac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేని సంఖ్యలను కరణీయసంఖ్యలు అంటాం ఇక్కడ p, q పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$

3. అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అవి అంతం అయ్యే దశాంశ అంతంకాని ఆవర్ధితంకాని దశాంశం అగును లేదా ఒక దశాంశ విస్తరణరూపంలో అంతం అయ్యే దశాంశ రూపం లేదా అంతంకాని, ఆవర్ధిత దశాంశం అయిన అది అకరణీయం.

4. కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణ రూపంలో రాయగా అవి అంతంకాని దశాంశం అంతం కాని ఆవర్ధితంకాని దశాంశంలో ఉంటాయి అలాగే. ఒక సంఖ్యయొక్క దశాంశ విస్తరణ రూపం అంతంకాని ఆవర్ధితంకాని దశాంశం అయితే అది కరణీయ సంఖ్య

5. కరణీయ సంఖ్యలను మరియు అకరణీయ సంఖ్యల సముదాయాన్ని వాస్తవసంఖ్యలు అని అంటాం.

6. r ఒక అకరణీయసంఖ్య మరియు s ఒక కరణీయ సంఖ్య అయితే $r+s$ మరియు $r-s$ కరణీయ సంఖ్యలు, మరియు rs మరియు $\frac{r}{s}$ లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలే $r \neq 0$.

7. a మరియు b ఏవైనా రెండు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు అయి నప్పుడు, ఈ కింది నిత్యసమీకరణాలూ సరిపోతాయి.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

8. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ చిన్నహారాన్ని అకరణీయం చేయడానికి దీనినిలను $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ చే గుణించాలి ఇక్కడ a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు $(a, b \in z)$.

9. $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు p మరియు qలు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే అప్పుడు.

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

C7F4N5

అధ్యాయం – 2

బహుపదులు

2.1 పరిచయం

మీరు బీజోక్తులు వాటి సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగహారాల గురించి వెనుకటి తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. మీరు కొన్ని బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన ఎలా చేయాలో కూడా నేర్చుకున్నారు. మీరు ఈ క్రింద బీజీయ సరళ సమీకరణాలను జ్ఞాపకం చేసుకోండి.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

మరియు $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

మరియు కారణాంక విభజనలో వాటి ఉపయోగాన్ని జ్ఞాపకం చేసుకోండి. ఈ అధ్యాయంలో మీరు బహుపదోక్తి అనబడే ఒక నిర్ధిష్ట బీజీయ పదాలలో మరియు దానికి సంబంధించిన పదాలను మన అభ్యాసాన్ని ప్రారంభిద్దాం. ఇప్పుడు బహుపదుల యొక్క వివిధ రూపాలను నేర్చుకోవడం. ఇదేవిధంగా శేష సిద్ధాంతం మరియు కారణాంక సిద్ధాంతాల ఆధారంగా బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడం తెలుసుకొందాం.

2.2. ఏక చరరాశిలో బహుపదులు

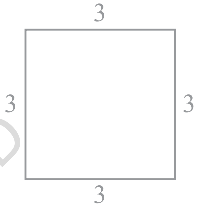
ప్రతి చరరాశిని సూచించడానికి ఒక గుర్తు (అక్షరం) వాడతామని, చరరాశి ఏ వాస్తవ విలువనైనా తీసుకుంటుందని మనకు తెలుసు.

మనం సాధారణంగా చరరాశులను సూచించడానికి $x, y, z...$ మొదలగు అక్షరాలు వాడతాం. అందుచేత $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ వంటి వాటిని చరరాశి x లో గల బీజీయ సమాసాలు అంటాం.

ఈ సమాసాలన్నీ ఒక స్థిరరాశి × రూపంలో ఉంటాయి. ఇప్పుడు మనం ఒక బీజీయ సమాసాన్ని (ఒక స్థిరరాశి) × (ఘాతరూపంలో గల ఒక చరరాశి) రూపంలో రాయాలనుకుంటే మరియు స్థిరాంకం ఏదేని తెలియకుంటే స్థిరాంకాలను *a,b,c*.... మొదలైన అక్షరాలలో రాస్తాం. కావున బీజీయ సమాసాలను సాధారణంగా *ax, by, cz* .... మొదలగు విధంగా రాస్తాం.

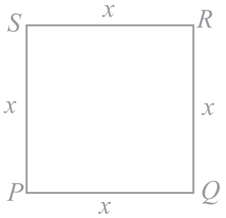
అలాగే ఒక స్థిరాంకాన్ని సూచించే అక్షరం మరియు ఒక చరరాశి సూచించే అక్షరాల మధ్య వ్యత్యాసం కలదు. స్థిరాంకాల విలువ ఒక నిర్థిష్ట సందర్భాలకు ఒక విధంగా ఉంటుంది. అంటే ఇచ్చి నటువంటి సమస్యలో స్థిరాంకాల విలువ మారదు అయితే చరరాశి విలువ మారవచ్చు.

ఇప్పుడు చతురస్ర భుజం కొలత '3' యూనిట్లు అనుకొందాం (చిత్రం 2.2) చూడండి. దాని చుట్టుకొలత ఎంత? ఒక చతురస్రపు చుట్టుకొలత దాని నాలుగు భుజాల పొడవుల మొత్తం అని మీకు తెలుసు. ప్రతి ఒక భుజం మూడు యూనిట్లు కలదు కావున దాని చుట్టుకొలత $4 \times 3 = 12$ యూనిట్లు చతురస్రపు ప్రతి బుజం కొలత 10 యూనిట్లు అయితే దాని చుట్టుకొలత ఎంత? చుట్టుకొలత $4 \times 10 = 40$ యూనిట్లు. ఒక చతురస్రపు త్రిభుజం పొడవు 'x' యూనిట్లు (చిత్రం 2.2 చూడండి) చుట్టుకొలత $4x$ యూనిట్లు అవుతుంది. ఇలా భుజాల పొడవులు మారుతున్న కొద్దీ చుట్టుకొలత కూడా మారుతుంది.



చిత్రం 2.1

PQRS చతురస్రపు వైశాల్యాన్ని మీరు కనుగొనగలరా? అది $x \times x = x^2$ చ॥యూ॥ x^2 క బీజీయ సమాసం. మీరు ఇదేవిధంగా $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఇలాంటి బీజీయ సమాసాల గురించి తెలుసుకొని ఉన్నారు. ఇంతవరకు మీరు తీసుకొన్న బీజీయ సమాసాలలో చరరాశుల ఘాతసూచ్యాంకాలన్నీ పూర్ణసంఖ్యలని గమనించండి. ఈ రూపంలో బీజీయ సమాసంకు ఒక చరరాశి గల బహుపదులు అంటారు. పై ఉదాహరణంలలో 'x' చరరాశి ఉదాహణరకు $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఇది x చరరాశి గల బహుపది. అదేవిధంగా, $3y^2 + 5y$ ఇది y చరారాశి గల బహుపది $t^2 + 4$ ఇది t చరరాశి గల బహుపది.



చిత్రం 2.2

$x^2 + 2x$ ఈ బహుపదిలో బీజీయపదాలైన x^2 మరియు $2x$ వాటిని బహుపదిలోని పదాలు అంటారు. ఇదేవిధంగా $3y^2 + 5y + 7$ ఈ బహుపది $3y^2$, $5y$ మరియు 7 ఈ మూడు పదాలను కలిగి ఉన్నది. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ఈ బహుపదిలోని పదాలను మీరు రాయగలరా? ఈ బహుపదిలోని పదాలు $-x^3$, $4x^2$, $7x$ మరియు 2.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక బహుపదిలోని ప్రతి పదం సహగుణకాలను కలిగి ఉన్నది. కావున $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ఇందులో x^3 యొక్క సహగుణకం -1, x^2 యొక్క 4, x యొక్క సహగుణకం 7 మరియు -2 x^0 యొక్క సహగుణకం దీనిలో $(x^0 = 1)$ అని గుర్తుంచుకోండి $x^2 - x + 7$ లో x యొక్క సహగుణకం తెలుసా? అది -1.

2 కూడా ఒక బహుపది నిజానికి 2, – 5, 7 మొదలైనవి స్థిర బహుపదులకు ఉదాహరణలు స్థిరబహుపదిని '0' శూన్యబహుపది అంటారు. ఇది అన్ని బహుపదులలో ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తుం దని పై తరగతులలో తెలుసుకొంటారు.

ఇప్పుడు, $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ మరియు $3\sqrt{y}+y^2$ ఈ విధమైన బీజీయ సమాసాలను తీసుకోండి. $x+\frac{1}{x} = x+x^{-1}$ అని రాయవచ్చు అని మీకు తెలుసా? ఇక్కడ రెండవ పదం x^{-1} యొక్క ఘాత సూచి -1 అది పూర్ణసంఖ్య కాదు. కావున ఈ బీజీయ సమాసం బహుపదికాదు. మరల $\sqrt{x}+3$ ని $x^{\frac{1}{2}}+3$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ x యొక్క ఘాతసూచి $\frac{1}{2}$ ఇది పూర్ణ సంఖ్యకాదు. కావును $\sqrt{x}+3$ ఒక బహుపదా? బహుపదికాదు. (ఎందుకు)

ఒక బహుపదిలో చరరాశి 'x' అయితే మనం అ బహుపదిని $p(x)$ లేదా $q(x)$ లేదా $r(x)$ మొదట వాటిలో సూచించవచ్చు. ఉదాహరణకు మనం క్రింది విధమగా రాయవచ్చు.

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ఒక బహుపది ఎన్ని పదాలైనా (పరిమిత) కలిగి ఉండవచ్చు. ఉదా।। $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ ఇది 151 పదాలు గల బహుపది.

$2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ మరియు u^4 ఈ బహుపదులను తీసుకోండి. ఈ బహుపదులన్నీ కేవలం ఒక బహుపదాన్నేకలిగిఉన్నాయనిచూశారు?కేవలంఒకేపదంమాత్రమేకలిగిఉన్నబహుపదులనుఏకపది అంటాం (ఏక అంటే ఒకటి) ఇప్పుడు క్రింది బహుపదు లన్నింటిని గమనించిండి.

$p(x) = x + 1$ $\quad$ $q(x) = x^2 - x$ $\quad$ $r(y) = y^{30} + 1$ $\quad$ $t(u) = u^{43} - u^2$

పై బహుపదులలో ఎన్ని పదాలు ఉన్నాయి. ఈ ప్రతి బహుపదలలో కేవలం రెండు పదాలను కలిగి ఉన్నాయి. కేవలం రెండు పదాలను మాత్రమే కలిగి ఉన్న బహుపదులను ద్విపదులు అంటారు. (ద్వి అంటే '2') ఉదా।। $q(x) = x^2 - x$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అధేవిధంగా మూడు పదాలను కలిగిన బహుపదులను త్రిపదులు అంటారు (త్రి అంటే '3')

ఉదా॥ $p(x) = x + x^2 + \pi$ $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$ $r(u) = u + u^2 - 2$ $t(y) = y^4 + y + 5$

ఇప్పుడు $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ఈ బహుపదిని చూడండి. గరిష్ట ఘాతసూచిని కలిగిన పదం ఏదో అంటే $3x^7$ ఈ పదంలో x యొక్క ఘాతసూచి '7' $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$, ఈ బహుపదిలో y యొక్క గరిష్ఠ ఘాత సూచిక కలిగిన పదం $5y^6$ మరియు ఈ పదంలో y యొక్క '6' మనం ఒక బహుపదిలో చరరాశి యొక్క గరిష్ట ఘాతసూచిని ఆ బహుపది యొక్క "బహుపది పరిమాణం" అంటాం.

కావున $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ఈ బహుపదుల పరిమాణం (డిగ్రి) '7' మరియు $5y^6 - 4y^2 - 6$ ఈ బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '6' శూన్యంకాని ఒక స్థిరబహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '0' అవుతుంది.

ఉదా 1 : క్రింది బహుపదుల పరిమాణం(డిగ్రి)ను కనుగొనండి.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

సాధన : (i) చరరాశి గరిష్ఠ ఘాత సూచి '5' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '5'

$x^5 - x^4 + 3$

(ii) చరరాశి గరిష్ఠ ఘాతసూచి '8' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '8'

$2 - 4^2 - 4^3 + 2y^8$

(iii) 2 ఇక్కడ ఒకే ఒక పదం '2' దీనిని $2x^0$ అని రాయవచ్చు. కావున x యొక్క ఘాతసూచి '0' కావున ఈ బహుపది పరిమాణం '0'.

ఇప్పుడు $p(x) = 4x + 5$ $q(y) = 2y$ $r(t) = t + \sqrt{2}$ మరియు $s(u) = 3u$

ఈ బహుపదులను గమనించండి. మీరు వీటిలో ఏదైనా సామాన్య అంశాన్ని గమనించారా? ప్రతి బహుపదిలో బహుపది పరిమాణం ఒకటి అయింది. బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి)1 అయిన బహుపదులను 'రేఖీయ బహుపదులు' అంటారు. ఒక చరరాశిగల మరికొన్ని బహుపదులు అంటే $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$. ఇప్పుడు మూడు పదాలు గల 'x' చరరాశులను కలిగిన రేఖీయ బహుపదులను రాయడానికి ప్రయత్నించండి. మీరు వాటిని రాయడానికి సాధ్యంకాదు. ఎందుకంటే ఒకచరరాశితో కూడిన రేఖీయ బహుపది ఒక ఏకపది అయినను ఒక ద్విపది కలిగి

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉండడానికి సాధ్యం కావున 'x' చరరాశి ఏక రేఖీయ బహుపది యొక్క $ax + b$ రూపంలో ఉంటుంది (ఇక్కడ, a మరియు b లు స్థిరాంకాలు మరియు $a \neq 0$ (ఎందుకు) అలాగే $ay + b$ ఇది 'y' చరరాశి గల ఒక రేఖీయ బహుపది.

ఇప్పుడు $2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 మరియు $x^2 + \frac{2}{5}x$ ఈ బహుపదులను తీసుకోండి.

వాటి బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) '2' అని మీరు ఒప్పుకుంటారా? బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) 2 అయిన ఒక బహుపదికి వర్గబహుపది అంటారు. వర్గ బహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు అంటే $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ మరియు $6 - y - y^2$. ఒక చరరాశిగల నాలుగు వేర్వేరు పదాలను కలిగిన ఒక వర్గ బహుపదిని మీరు రాయగలరా? ఒక చరరాశి గల ఒక వర్గ బహుపది గరిష్ఠం మూడు పదాలను కలిగి ఉండడాన్నే మీరు చూస్తారు. మీరు మరికొన్ని వర్గబహుపదులను పట్టీచేస్తే x చరరాశి గల వర్గబహుపదులు $ax^2 + bx + c$ రూపంలో ఉంటాయి. (ఇక్కడ a,b,c లు స్థిరాంకాలు) అలాగే $a \neq 0$ అనుటను తెలుసుకోండి. ఇదేవిధంగా y చరరాశిగల వర్గ బహుపది $ay^2 + by + c$ రూపంలో ఉంటుంది. (ఇక్కడ a,b,c లు స్థిరాంకాలు) అలాగే $a \neq 0$.

డిగ్రి 3 అయిన ఒక బహుపదిని మనం ఒక ఘన బహుపది అంటాం.'x' చరరాశిగల ఘనబహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలు :

$4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. ఒక చరరాశి గల ఘన బహుపదిలో ఎన్ని పదాలు ఉండవచ్చు అని మీరు అనుకొంటున్నారు? అవి గరిష్ఠంగా నాలుగు పదాలను కలిగి ఉండవచ్చు. దీనిని $ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d$ లు స్థిరాంకాలు మరియు $a \neq 0)$ రూపంలో రాయవచ్చు. ఒకటవ పరిమాణం, రెండవ పరిమాణం, మూడవ పరిమాణం గల బహుపదులు ఎలా ఉంటాయని మీరు చూశారు. ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య 'n' అయినపుడు 'n' వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక చరరాశి గల బహుపదిని రాయగలరా? ఒక చరరాశిగల 'n' వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక బహుపది సమాసాన్ని రాయవచ్చు.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ఇందులో $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ లు స్థిరరరాశులు మరియు $a_n \neq 0$ రూపంలో రాయవచ్చు.

ప్రత్యేక సందర్భంలో, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ (అంటే అన్ని గుణకాలు సున్నాలు) అయితే మనకి 'శూన్య బహుపది' వస్తుంది. దీనిని '0' గా సూచిస్తారు.

'సున్న' యొక్క పరిమాణాన్ని చెప్పగలరా? దీనిని నిర్వచించలేము. ఎందుకనగా సున్నను చరరాశి యొక్క ఏ ఘాతాంకానికి హెచ్చించి లబ్ధంగా రాయలేము.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇంతవరకు మనం ఒక చరరాశి కలిగిన బహుపదుల గురించి వివరించాము. అంతకంటే $x^2 + y^2 + xyz$ (x,y,z లు చరరాశులు) ఉండి మూడు చరరాశులు గల బహుపది. అదేవిధంగా $p^2 + q^{10} + r$ (p, q మరియు r లు చరరాశులు), $u^3 + v^2$ (u మరియు v లు చరరాశులు) ఇది క్రమం గా మూడు మరియు రెండు చరరాశులగల బహుపదులు. మీరు అలాంటి బహుపదులను వివరం గా తరువాత నేర్చుకుంటారు.

అభ్యాసం 2.1

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి ఏక చరరాశిగల బహుపదులు మరియు ఏవి కాదు. మీ జవాబుకు కారణాలను తెలపండి.

   (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

   (iv) $y + \dfrac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. ఈ కింది వాటిలో x^2 యొక్క సహగుణకాలను రాయండి.

   (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\dfrac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35వ పరిమాణం (డిగ్రి) కరిగిన ఒక ద్విపది మరియు 100వ పరిమాణం (డిగ్రి) కలిగిన ఒక ఏక పదులకు ఒక్కొక్క ఉదాహరణ రాయండి.

4. క్రింది బహుపదులకు పరిమాణం (డిగ్రి) రాయండి.

   (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. క్రింది వాటిని రేఖీయ, వర్గమరియు ఘన బహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

   (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

   (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 బహుపది శూన్య విలువలు.

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ అను బహూపదిని తీసుకొందాం

$p(x)$ లో అన్ని చోట్ల 'x' కు '1' ని సూక్ష్మీకరించినచో,

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$p = 8 - 4 = 4$$
$$\boxed{p = 4}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కావున $x = 1$ అయినప్పుడు $p(x)$ విలువ 4 అని చెబుతాము అలాగే,

$$p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$$

$$= -2$$

$p(-1)$ ను మీరు కనుగొనగలరా?

ఉదాహరణ 2: చరరాశులకు ఇచ్చిన విలువలలో ఈ క్రింది బహుపదుల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7,$ $x = 1$ అయినపుడు

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11},$ $y = 2$ అయినపుడు

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6,$ $t = a$ అయినపుడు

సాధన : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ అయినపుడు బహుపది $p(x)$ విలువ

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ అయినపుడు బహుపది $q(y)$ విలువ

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ అయిన బహుపది $p(t)$విలువ

$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

ఇప్పుడు $p(x) = x - 1$ అని బహుపదిని తీసుకోండి.

$p(1)$ విలువ ఎంత? $p(1) = 1 - 1 = 0$ గమనించండి

$p(1) = 0$ అయినందువలన '1'ని మనం $p(x)$ కు శూన్యవిలువ అంటాము

అదేవిధంగా $q(x) = x - 2$ అయినప్పుడు '2' ను $q(x)$ కు శూన్యవిలువ అంటారా? పరిశీలించండి. సామాన్యంగా $p(c) = 0$ అయితే బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ 'c' అవుతుంది.

బహుపది $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ దీనిని సున్నకు సమానం చేయుట ద్వారా వచ్చిందని పరిశీలించి ఉంటారు. అంటే $x - 1 = 0$, $x = 1$ కావున $p(x) = 0$ అనేది x చరరాశిలో గల బహుపది

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అయితే $f(x) = 0$ ను x లో బహుపది సమీకరణం అంటారు. పై ఉదాహరణలో $f(x) = 0$ అయిన సందర్భంలో '1' బహుపది $(x - 1)$ యొక్క మూలం అంటాము.

ఇప్పుడు ఒక స్థిర బహుపది 5ను పరిశీలిద్దాం. దీని యొక్క శూన్యవిలువ చెప్పగలరా? దీనికి శూన్యవిలువ లేదు. ఎందుకంటే $3 = 3x^o$ కావున x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువకు సున్న $3x^o$ కానేకాదు. అందుచే స్థిరబహుపదికి శూన్య విలువలు ఉండవు.

ఉదాహరణ 3 : $x + 2$ బహుపదికి -2 మరియు 2లు శూన్యవిలువలా? పరిశీలించండి.

సాధన : $p(x) = x + 2$ అనుకొంటే.

$p(2) = 2 + 2 = 4 \qquad p(-2) = -2 + 2 = 0$

కావున -2, $x + 2$ బహుపదికి శూన్యవిలువ అవుతుంది $+2$, శూన్యవిలువ కాదు.

ఉదాహరణ 4 : $p(x) = 2x + 1$ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనండి.

సాధన : $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువ కనుగొనడం అంటే బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ ను సాధన చేయడమే

అనగా, $2x + 1 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-1}{2}$$

కావున $2x + 1$ బహుపది శూన్యవిలువ $-\frac{1}{2}$ అయినది ఇప్పుడు $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ఒక రేఖీయ బహుపది. అయితే దీని యొక్క శూన్యవిలువను ఎలా కనుగొంటారు.

ఉదాహరణ 4 మీకు కొన్ని సూచనలు ఇచ్చి ఉండవచ్చు బహుపది $p(x)$ యొక్క శూన్యవిలువలను కనుగొనాలంటే, $p(x) = 0$ బహుపది సమీకరణాన్ని సాధించాలి అంటే

$ax + b = 0$, $a \neq 0$

కావున $ax = -b$

అనగా $x = \frac{-b}{a}$

అందుచే $x = \frac{-b}{a}$ అనేది $p(x) = ax + b$ యొక్క ఒకేఒక శూన్యవిలువ అయినది. "ఏక చరరాశిలో గల రేఖేయ బహుపదికి ఒకేఒక శూన్యవిలువ ఉంటుంది".

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు మనం '1' ని $x - 1$ యొక్క శూన్యవిలువ మరియు '–2', $x + 2$ యొక్క శూన్య విలువ అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 5: $x^2 - 2x$ అనే బహుపదికి '2' మరియు '0' విలువలు శూన్యాలు అవుతాయో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : $p(x) = x^2 - 2x$ అనుకొనుము

అప్పుడు $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$ అవుతుంది

మరియు $p(0) = 0^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

కావుని '2' మరియు '0' అనేవి రెండుకూడా $x^2 - 2x$ యొక్క శూన్య విలువలు అయినాయి. మనం ఇపుడు మన పరిశీలనలను పట్టీ చేద్దాం

(i) ఒక బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ సున్నా (0) కానవసరం లేదు.

(ii) సున్నా (0) ఒక బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ అయి ఉండవచ్చు.

(iii) ప్రతి రేఖీయ బహుపది కేవలం ఒకేఒక శూన్య విలువను కలిగి ఉంటుంది.

(iv) ఒక బహుపది ఒకటి కంటే ఎక్కువ శూన్యవిలువలు కలిగి ఉండటానికి సాధ్యం అవుతుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

అభ్యాసం 2.2

1. $5x + 4x^2 + 3$ అనేది బహుపది విలువలను x విలువల వద్ద కనుగొనండి.

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. క్రింది బహుపదులలో $p(0), p(1)$ మరియు $p(2)$విలువలను కనుగొనండి.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులలో x యొక్క ఏ విలువలకు బహుపది శూన్యం అగునో, లేదో పరిశీలించండి.

   (i) $p(x) = 3x + 1$; $x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi$; $x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1$; $x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$; $x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2 ; x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m ; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1 ; x = \frac{1}{2}$

4. క్రింది బహుపదులకు శూన్యవిలువలు కనుగొనండి.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

2.4 బహుపది యొక్క కారణాంక విభజన

ఇపుడు పై ఉదాహరణ 10 సందర్భాన్ని సూక్ష్మంగా గమనించండి. దానివల్ల శేషం $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ అయినందువల్ల, $(2t + 1)$, $q(t)$ యొక్క కారణాంక మైనది అని తెలుస్తున్నది. అంటే ఏదేని బహుపది $g(t)$ కి $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$. ఇది కింది సిద్ధాంతానికి ప్రత్యేక ప్రకరణం అవుతుంది.

కారణాంక సిద్ధాంతము : $p(x)$ అనునది n డిగ్రీల ఒక బహుపది అయివుండి.

బహుపది పరిమాణం $(n \geq 1)$ గాగల బహుపది $p(x)$ మరియు 'a' ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు.

(i) $p(a) = 0$ అయినప్పుడు $x - a$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకమవుతుంది మరియు

(ii) $x - a$ అనునది $p(x)$ యొక్క కారణాంకమైనచో అప్పుడు $p(a) = 0$ అవుతుంది.

సాధన : శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం, $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $p(x) = (x - a)\, q(x) + 0$ అగును $(x - a)\, q(x)$ దీనిని బట్టి $p(x)$ కు $(x - a)$ కారణాంకమని చెప్పవచ్చు.

(ii) ఇదే విధంగా $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం కావున $p(x) = (x - a)\, q(x)$ సత్యమవుతుంది. $q(x)$ అనేది మరొక బహుపది.

$\therefore\ p(a) = (a - a)\, q(a) = 0$

$\therefore\ (x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అయినది.

ఈ విధంగా సిద్ధాంతం నిరూపించబడినది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 6 : $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ మరియు $2x + 4$ ల కారణాంకం $x + 2$ అవుతుందా పరీక్షించండి.

సాధన : $x + 2$ యొక్క శూన్యవిలువ -2.

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 6$ మరియు $s(x) = 2x + 4$ అనుకొనుము.

అప్పుడు, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

$x + 2$ ఇది $x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది.

పునః $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

కావున $x + 2$ ఇది $2x+4$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది నిజంగా, $2x + 4 = 2(x + 2)$ అయినందువల్ల కారణాంక సిద్ధాంతం అన్వయించిందా లేదా పరిశీలించవచ్చు.

ఉదాహరణ 7 : $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ అను బహుపది సమాసానికి $x - 1$ కారణాంకమైతే k విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $x - 1$ అనేది $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ బహుపదికి కారణాంకం అయినందున $p(1) = 0$

ఇప్పుడు, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

కావున, $4 + 3 - 4 + k = 0$

అంటే $k = -3$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనం ఇప్పుడు రెండవ పరిమాణం (డిగ్రీ) మరియు 3వ పరిమాణం (డిగ్రీ) అయినకొన్ని బహుపదులను కారణాంకాలుగా విభజించడానికి కారణాంక సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగిస్తాము. మీరు ఇదివరకే $x^2 + lx + m$. ఈ విధమైన వర్గబహుపదిని కారణాంకాలుగా విభజన గురించి తెలుసుకున్నారు. మీరు మధ్యపదము 'lx' ను $ax + bx$ ($ab = m$ అగునట్లు) అని విభజించుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేశాము. అప్పుడు $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ఇప్పుడు మనం $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c లు స్థిరాంకాలు) రూపంలో గల వర్గ బహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడానికి ప్రయత్నిద్దాం మధ్యపదాన్ని విభజించుట ద్వారా బహుపది $ax^2 + bx + c$ ని కారణాంక విభజన ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

ఇప్పుడు దాని కారణాంకాలు $(px + q)$ మరియు $(rx + s)$ అనుకుందాం.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$

x^2 యొక్క సహగుణకాలను పోలిస్తే, $a = pr$.

అలాగే, x యొక్క సహగుణాలు పోలిస్తే, $b = ps + qr$ మరియు

స్థిరాంకాలను పోలిస్తే, $c = qs$.

దాని నుండి మనకు 'x' గుణకం 'b' అనేది ps మరియు qr ల మొత్తమని తెలుస్తున్నది. వీటి లబ్ధం $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ అని రాయవచ్చు.

దీనిని బట్టి, $ax^2 + bx + c$ వర్గబహుపది కారణాంక విభజనలో b అనేది రెండు సంఖ్యల మొత్తం అని, వాటి లబ్ధం 'ac' అని తెలుస్తున్నది. ఇది ఉదా 13నుండి స్పష్టమవుతుంది.

ఉదాహరణ 8 : $6x^2 + 17x + 5$ దీనిని మధ్యపదాన్ని విభజించుట ద్వారా మరియు కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి విభజించండి.

సాధన : (మధ్యపదాన్ని విభజించే విధానం ద్వారా) : $p + q = 17$ మరియు $pq = 6 \times 5 = 30$ అగునట్లు p మరియు q అనే రెండు సంఖ్యలు మనకు లభిస్తే అప్పుడు మనం కారణాంకాలు పొందవచ్చు. కావున ఇప్పుడు 31 కారణాంకాల జతలను చూద్దాం. 1 మరియు 30, 2 మరియు 15, 3 మరియు 10, 5 మరియు 6. వీటిలో 2 మరియు 15ను తీసుకున్నప్పుడు $p + q = 17$.

కావున, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)\,x + 5$

$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$

$= 2x(3x + 1) + 5\,(3x + 1)$

$= (3x + 1)\,(2x + 5)$

ఉదాహరణ 9 : కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి $y^2 - 5y + 6$ ను విభజించండి.

సాధన : ఇప్పుడు $p(y) = y^2 - 5y + 6$ అయివుండనీయండి. ఇప్పుడు, $p(y) = (y - a)\,(y - b)$ అయితే, స్థిరాంకం ab అయివుండుటనం మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇదేవిధంగా $ab = 6$. అందువలన $p(y)$ కారణాంకాలు తెలుసుకోవడానికి మనం 6 యొక్క కారణాంకాలు చూస్తాం.

6 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, మరియు 3

ఇప్పుడు, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

$\therefore$ $p(y)$ మరియు ఒక కారణాంకం $y - 2$ అవుతుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

$p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

$y^2 - 5y + 6 = 0$ యొక్క కారణాంకం $(y - 3)$ కూడా అవుతుంది.

కావున, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$.

$y^2 - 5y + 6$ ను మధ్యపదం $-5y$ ను విడదీయుట కారణాంకా విభజన చేయవచ్చు అని గమనించండి. ఇప్పుడు గణ బహుపదుల కారణాంక విభజనను తీసుకుందాం. ఇక్కడ విభజించే విధానంలో ప్రారంభించడం సరికాదు. మీరు ఈ క్రింది ఉదాహరణలలో చూపినట్టు మొదట కనీసం ఒక కారణాంకాన్ని కనుగొనవలసింది.

ఉదాహరణ 10 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ అనుకొనండి

వీటిలో ప్రయత్నిస్తే మనకు $p(x) = 0$ అవుతుంది (సరిచూడండి). కావున $p(x)$ కు $(x - 1)$ కారణాంకం అవుతుంది. తర్వాత $p(x)$ ను $(x - 1)$ చే భాగిస్తే మనకు $x^2 - 22x + 120$ వస్తుంది. దీని కారణాంక విభజన మరొక విధంగా చేసి చూద్దాం

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$

$$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(ఎలా ?)}$$

$$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)(x - 1)$$

ఇప్పుడు $x^2 - 22x + 120$ వర్గబహుపది కావున, మధ్యపదంను విడదీసి కారణాంకాలు కనుగొందాం.

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$
$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 10)$$

కావున, $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 2.3

1. కింది బహుపదులకు $(x+1)$కారణాంక మగునో; లేదో నిర్ధారించండి.

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి, కింది బహుపదులలో ప్రతి సందర్భంలోనూ $p(x)$ కు $g(x)$ కారణాంకముగునా ? నిర్ధారించండి.

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

3. క్రింది వాటిలో బహుపది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం $(x - 1)$ అయితే k విలువను కనుగొనండి.

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x + 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

5. కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$(iv)$2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.5 బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు :

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక బీజగణిత సమీకరణంలోగల చరరాశులకు ఏ విలువలు సూక్ష్మీకరించనమా, ఎల్లావేళలా సత్యమయ్యేదానిని సర్వసమీకరణమంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు వనకటి. తరగతులలో కింది బీజగణిత సర్వసమీకరణాలను నేర్చుకున్నారు.

సర్వసమీకరణం I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

సర్వసమీకరణం II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

సర్వసమీకరణం III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

సర్వసమీకరణం IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయుటలో సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇటువంటి ఉదాహరణలు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 11: సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి క్రిందివాటి గుణలబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

సాధన : (i) ఇచ్చట మనము మొదటి సర్వసమీకరణం $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ను ఉపయోగించవచ్చు. ఇందులో $y = 3$ ను సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(ii) IV సర్వసమీకరణం ఉపయోగించినప్పుడు.

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

దీనినుండి $(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(+5)$

$= x^2 + 2x - 15$

ఉదాహరణ 12 : 105 × 106 ను సర్వసమీకరణము ఉపయోగించి, గుణించండి.

సాధన : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$ [IV సర్వసమీకరణం ప్రకారం]

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ఇచ్చినటువంటి కొన్ని బీజీయ సమాసాల గుణలబ్దాన్ని కనుగొనుటలో పైన పట్టీ చేసిన సర్వసమీకరణాల కొన్ని ఉపయోగాలను మీరు చూశారు. ఈ క్రింది ఉదాహరణలలో చూపినట్టు బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజనలో కూడా ఈ సర్వసమీకరణాలు ఉపయుక్తమవుతాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 13 : కారణాంకాలుగా విభజించండి :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

సాధన : (i) ఇచ్చుట $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$,

$70ab + 2(7a)(5b)$ అయివుండుటను మీరు చూడవచ్చు. ఇచ్చిన బీజీయ సమాసాన్ని $x^2 + 2xy + y^2$ లో పోల్చినప్పుడు, $x = 7a$, $y = 5b$ అవుతుంది అని మనం గమనించవచ్చు.

I సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించినప్పుడు.

$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

ఇప్పుడు, దీనిని IIIవ సర్వసమీకరణంతో పోల్చినప్పుడు.

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

ఇదివరకు మనం అన్ని సర్వసమీకరణాలు ద్విపదుల గుణలబ్ధాలతో కూడివున్నవి. ఇప్పుడు మొదటి సర్వసమీకరణాన్ని త్రిపది $x + y + z$ విస్తరిద్దాం $(x + y + z)^2$ ను I వ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి లెక్కిస్తాం.

$x + y = t$ అయిన

$\therefore\ (x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ [I సర్వసమీకరణం ఆధారంగా]

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ [t విలువను సూక్ష్మీకరించగా]

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2zx + 2yz + z^2$

పదాలను క్రమం మార్చిరాయగా $= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ అయినది. కావున, సర్వసమీకరణం ను మనం ఇలా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

గమనించండి : కుడివైపు బీజీయ సమాసాన్ని ఎడమవైపు బీజీయ సమాసపు విస్తరణ రూపం అని మనం పిలుస్తాము. $(x + y + z)^2$ యొక్క విస్తరణ మూడు వర్గపదాలను మరియు మూడు గుణలబ్ధపదాలను కలిగివున్నదని గమనించండి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 14 : $(3a + 4b + 5c)^2$ ను సర్వసమీకరణం ద్వారా విస్తరించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసంను $(x + y + z)^2$ లో పోల్చగా, మనకు $x = 3a$, $y = 4b$ మరియు $z = 5c$ వస్తాయి. అందువలన సర్వసమీకరణం V, ద్వారామనం

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ca$$

ఉదాహరణ 15 : $(4a - 2b - 3c)^2$ ను విస్తరించండి.

సాధన : V వ సర్వసమీకరణం ఉపయోగించగా,

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

ఉదాహరణ 16 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : మనకు $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2\,(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ [సర్వసమీకరణం V నుండి.]

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)\,(2x - y + z)$

ఇంతవరకు రెండవ పరిమాణ పదాలను కలిగిన సర్వసమీకరణాల గురించి మనం చర్చించాం

ఇప్పుడు మనం సర్వసమీకరణం (i) ని వినియోగించి $(x + y)^3$ విస్తరణ చేద్దాం.

మనకు

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2$$
$$= (x + y)\,(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

కనుక మనం మరొక సర్వసమీకరణంను ఇలా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం VI **:** $\mathbf{(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)}$

సర్వసమీకరణం VI లో 'y' ని '$-y$' గా మార్చి రాసినప్పుడు

సర్వసమీకరణ VII **:** $\mathbf{(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}$

$$\mathbf{= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణ 17 : ఈ క్రింది ఘనాలను విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

సాధన : (i) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x + y)^3$ లో పోల్చగా, మనకు, $x = 3a$ మరియు $y = 4b$ అగును. కావున సర్వసమీకరణం VI వాటితో,

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)\,(4b)\,(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x - y)^3$ లో పోల్చగా, మనకు $x = 5p$ మరియు $y = 3q$ అగును

కావున సర్వసమీకరణం VII వాటితో

$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$

$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$

ఉదాహరణ 18 : కింది వానిని తగిన సర్వసమీకరణాలనుయోగించి గుణించండి:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

సాధన : $(104)^3 = (100+4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$ [సర్వసమీకరణం VI నుండి]

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$ [సర్వసమీకరణం VII నుండి]

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

ఉదాహరణ 19 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసాన్ని మనం దిగువ విధంగా రాస్తే.

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x+3y)^3$ [సర్వసమీకరణ VI నుండి.]

$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$

ఇప్పుడు $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ను తీసుకుందాం.

విస్తరించినప్పుడు ఈ కింది గుణలబ్ధాన్ని పొందుతాము.

$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (సూక్ష్మీ కరించినప్పుడు)

ఇలా మనం క్రింది సర్వసమీకరణాలను పొందుతాము.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సర్వసమీకరణం VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ఉదాహరణ 20 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$

$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$

అభ్యాసం 2.4

1. తగిన సమీకరణాలను ఉపయోగించి కింది లబ్ధాలు కనుగొనండి.

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$ (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. గుణకారం చేయకుండానే నేరుగా కింది లబ్ధాలను గుణించండి.

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. కింది బహుపదులను తగిన సర్వసమీకరణములను ఉపయోగించి కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. కింది వాటిని తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి, విస్తరించండి.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$ (iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. క్రింది ఘనాలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3$ (iv) $\left[x-\frac{2}{3}y\right]^3$

7. తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విలువలు కనుగొనండి.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. కింది వాటిని కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. కింది వాటిని సరిచూడండి:

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. క్రింది వాటిని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[సూచన : ప్రశ్న 9ని చూడండి.]

11. $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

12. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$ ని సరిచూడండి.

13. $x + y + z = 0$ అయితే $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ అని చూపండి.

14. కింది సమాసాలను ఘనాలను గుణించకుండానే ఫలితాలను కనుగొనండి.

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. కింది దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలకు ఇవ్వబడిన సమాసాలను బట్టి. పొడవు, వెడల్పులకు తగిన అనుకూల కొలతలు తెలుపండి.

(i)	(ii)
వైశాల్యం : $27a^2 - 35a + 12$	**వైశాల్యం :** $35y^2 + 13y - 12$

16. కింది దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణాలకు ఇవ్వబడిన సమాసాలను బట్టి దీర్ఘఘనం యొక్క అనుకూల కొలతలు తెలపండి.

(i)	(ii)
వైశాల్యం : $3x^2 - 12x$	**వైశాల్యం :** $12ky^2 + 8ky - 20k$

2.6 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు కింది విషయాలను నేర్చుకున్నారు.

1. ఏక చరరాశి 'x' లో n వ పరిమాణం (డిగ్రీ) బహుపద సమాసం $p(x)$ ను $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +$ ---- $+ a_2x^2 + a_1x + a_0$ అని చూపుతాం ఇందులో a_0, a_1, a_2 ------ a_n లను x^0, x^1, x^2 ----x^n ల యొక్క సహగుణకాలంటాం సమాసంలో $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}$,--- a_0 $(a_n \neq 0)$ పదాలు అంటాం.

2. ఒక పదం కలిగిన బహుపదిని ఏక పది అంటారు.

3. రెండు పదాల కలిగిన బహుపదిని ద్విపది అంటారు.

4. మూడు పదాలు కలిగిన బహుపదిని త్రిపది అంటారు.

5. గరిష్ఠ ఘాతం '1' అయిన బహుపదిని రేఖీయ బహుపది అంటారు.

6. గరిష్ఠ ఘాతం 2 గా గల బహుపదిని వర్గ బహుపది అంటారు.

7. గరిష్ఠ ఘాతం 3 గా గల బహుపదిని ఘన బహుపది అంటారు.

8. $p(x)$ అనే బహుపదిలో ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య 'a' కు $p(x) = 0$ అయితే 'a' ను బహుపది శూన్య విలువ అంటారు. ఈ సందర్భంలో 'a' ను బహుపది సమీకరణం $p(x) = 0$ కు మూలం అనికూడా అంటారు.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

9. ఏక చరరాశి కలిగిన ప్రతి రేఖీయ బహుపదికి శూన్య విలువ ఏకైకంగా ఉంటుంది. శూన్యేతర స్థిరరాశికి బహుపది శూన్య విలువ నిర్వచించ బడదు మరియు ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య కూడా శూన్య బహుపది యొక్క శూన్య విలువ అవుతుంది.

10. కారణాంకం : బహుపది పరిమాణం (డిగ్రి) $n \geq 1$ గాగల బహుపది (i) $p(a) = 0$ అయిన $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అగును మరియు (ii) $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అగును..

11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$

14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

C1M2W3

అధ్యాయం - 3

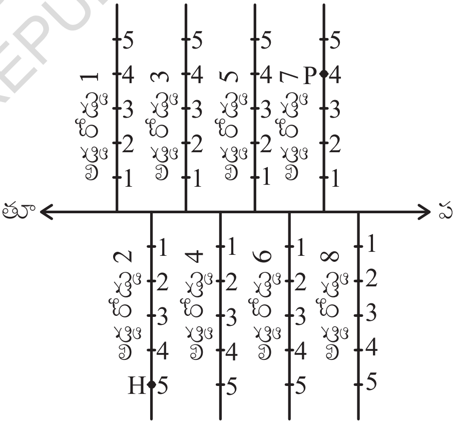
నిరూపక జ్యామితి

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?'
So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, ***The Hunting of the Snark***

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.1 పరిచయం



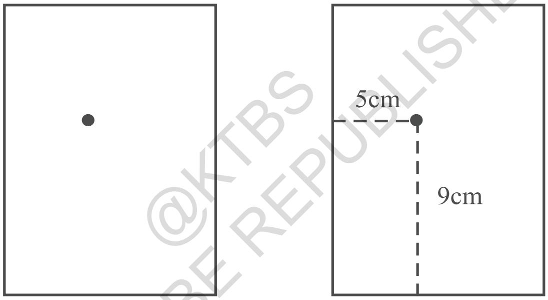
చిత్రం 3.1

ఒక సంఖ్యారేఖలో ఒక బిందువును ఎలా గుర్తించాలో మీరు ఇదివరకే నేర్చుకున్నారు. రేఖపై ఒక బిందువు స్థానాన్ని ఎలా వివరించాలో తెలుసుకొన్నారు. దీనితోపాటు ఒక బిందువును కనుగొనడానికి దాని స్థానాన్ని ఒకటి కంటే ఎక్కువ రేఖలకు సంబందించిన సూచనలు కావలసినన్ని సన్నివేశాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు క్రింది సందర్భాన్ని గమనించండి.

I. చిత్రం 3.1లో తూర్పు పడమర దిశలలో వెళ్లిన ఒక రహదారి మరియు పడమర నుండి తూర్పు వైపుకు ఉన్న క్రాస్ రోడ్‌లకు ఒక్కొక్కసంఖ్యను ఇచ్చారు. అంతేకాకుండా ప్రతి క్రాస్ రోడ్డులోను ఇంటింటికి సంఖ్యలను గుర్తించారు. మీ స్నేహితుల ఇంటిని కనుగొనడానికి ఒకే ఒక సూచన ఉంటే సరిపోతుందా? ఉదాహరణకు ఆమె రెండవ వీధిలో నివసిస్తూ ఉంటే ఆమె ఇంటిని సులభంగా కనుగొనవచ్చా? ఇంటి సంఖ్య లేకుండా ఎంత? ఇల్లు ఏ క్రాస్ రోడ్డులో ఉంది ఈ రెండు సమాచారాలు లభ్యమయితే ఇంటిని కనుగొనడం ఇంకా సులభం కదా! రెండవ క్రాస్

రోడ్డులోని ఐదవ నెంబరు ఇంటిని గుర్తిస్తాము. (చిత్రం 3.1)లో ఇంటి స్థానన్ని 'H' సూచిస్తున్నది. అదేవిధంగా 'P' ఏడవ క్రాస్ రోడ్డులో ఇంటి సంఖ్య '4' ను సూచిస్తుంది.

II. ఒక పేపరులో మీరు ఒక బిందువును గుర్తించారు అనుకొందాము. (చిత్రం 9.2(a)) పేపరుపై ఆ బిందువు గల స్థానాన్ని తెలియజేయమని చెబితే, మీరు దానిని ఎలా తెలుపుతారు? బిందువు పేపరుపై అర్థం లో లేదా అవి కాగితపు ఎడమ అంచు పక్కన ఉన్నది. లేదా అది పేపరు ఎడమ వైపు పై కొనకు చాలా సమీపంలో ఉన్నది. ఇలాంటి విధానాలలో బహుశా మీరు ప్రయత్నించవచ్చు. వీటిలో ఏ ఒక ప్రకటనా బిందువు ఖచ్చిత స్థానాన్ని దృఢ పరుస్తున్నదా? లేదు. అయితే బిందువు కాగితపు ఎడమ అంచునుండి సుమారు 5cm దూరంలో ఉన్నది అని మీరు చెబితే బిందువు స్థానం గురించి కొంచెం అందాజు చేయవచ్చు. అయితే ఖచ్చితంగా గుర్తించడానికి సాధ్యం కాదు. మీరు కొంచెం ఆలోచించండి. బిందువు కాగితపు కింది అంచు నుండి 9cm పై భాగంలో ఉన్నది. అనకుండా చెప్పివుంటే, అది ఖచ్చితంగా ఎక్కడ ఉన్నది అనికూడా మనం తెలుసుకొనవచ్చు.



చిత్రం 3.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

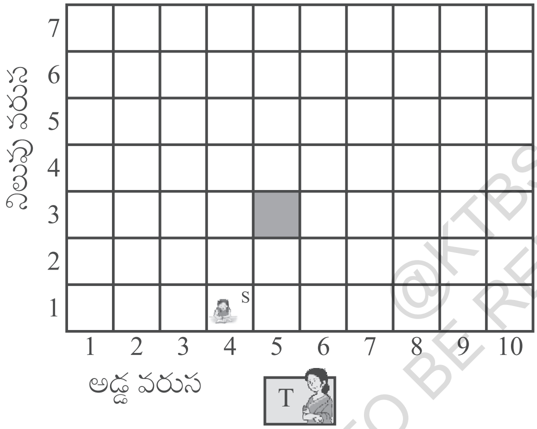
ఈ ఉద్దేశ్యానికి రెండు నిర్ధిష్ట రేఖలతో కాగితపు ఎడమ అంచు మరియు కింది అంచులనుండి బిందువు ఖచ్చితంగా ఎంత దూరంలో ఉన్నది అని తెలుసుకొనుట ద్వారా మనం దాని స్థానాన్ని నిర్దిష్టపరుస్తాం (చిత్రం 3.2(b)) మరొక విధంగా చెప్పాలంటే బిందువు స్థానాన్ని కనుగొనడానికి మనకు రెండు స్వతంత్ర సమాచారాల అవసరం ఉంది. ఇపుడు తరగతి గదిలో ఆసనాల వ్యవస్థ అనే కార్యాచరణాన్ని కింద చూపిన విధంగా నిర్వహించండి.

కార్యచరణం 1 (ఆసన వ్యవస్థ) : మీ తరగతిలో గల అన్ని బెంచీలను ప్రక్కప్రక్క చతురస్రాకారంలో జోడించండి. ప్రతి ఒక బెంచ్ చతురస్రంలో ఉపయోగించు విద్యార్థి పేరును రాయండి. రెండు స్వతంత్ర సమాచారాలను ఉపయోగించి, తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి స్థానాన్ని ఖచ్చితంగా వివరించవచ్చు.

(i) ఆమె/అతడు కూర్చొను నిలువ వరుస సంఖ్య.

(ii) ఆమె/అతడు కూర్చొను అడ్డువరుస సంఖ్య

మీరు ఐదవ నిలువ వరుస మరియు మూడవ అడ్డవరుసలోని బెంచ్‌లో కూర్చొన్న వారైతే (చిత్రం 3.3లో రంగువేసిన చతురస్రంలో సూచించునది.) మీస్థానాన్ని (5,3) అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ మొదట నిలువవరుస సంఖ్యను తరువాత అడ్డవరుస సంఖ్యను రాయాలి. (5,3) అనునది (3,5) కు సమానమా? మీ తరగతిలోని ఇతర విద్యార్థుల పేరు మరియు స్థానాన్ని రాయండి. ఉదాహరణకు నాల్గవ నిలువ వరుస మరియు ఒకటవ అడ్డువరుసలో సోనియా కూర్చొని ఉంటే. S(4,1) అని రాయండి. ఉపాధ్యాయులను బెంచ్ ఆసన వ్యవస్థలోని భాగం కాదు. మనం ఉపాధ్యాములను కేవలం ఒక ప్రేక్షకలుగా పరిగనిస్తాము.



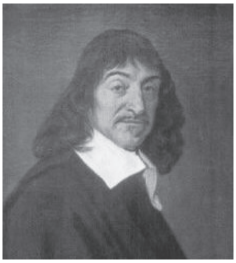
T ఉపాధ్యాయుల బెంచ్‌ను సూచిస్తుంది.
S సోనియా బెంచ్‌ను సూచిస్తుంది.

చిత్రం 3.3

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఒక సమతలంలో గల ఏదేని ఒక వస్తువు యొక్క స్థానాన్ని రెండు లంబరేఖల సహాయంతో సూచించవచ్చు అనుటను పై చర్చవల్ల మనం గమనించివచ్చు. బిందువు నిదర్శనంలో మనకు కాగితపు కింది అంచు మరియు ఎడమ అంచుల నుండి బిందువుకు గల దూరం తెలియ వలసి ఉంటుంది. ఆసన వ్యవస్థలో మనకు నిలువ వరుస మరియు అడ్డువరుసల సంఖ్యల అవసరం ఉం టుంది. ఈ సరళ సమాచారాలలో సుదూర పరిణామాలు ఉన్నాయి. అంటే ఇది నిరూపక జ్యామితి అను గణితపు ఒక ప్రముఖ శాఖకు కారణమైనది. ఈ అధ్యాయంలో నిరూపక జ్యామితి యొక్క కొన్న ప్రాథమిక పరికల్పనలను పరిచయం చేయడం ముఖ్య ఉద్దేశం పై తరగతు లలో మీరు వీటిగురించి ఇంకా ఎక్కువ నేర్చుకొంటారు. ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువును రెండు నిర్దేశాల అధారంగా స్థాపించటం అనే భావన గణితంలో **వైశ్లేషిక రేఖాగణితం** అనే కొత్త శాఖను సృష్ఠంచింది.

17 వ శతాబ్ధంలో ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్త **"రెనే డెకార్ట్"** పరుపుపై పడుకొని ఆలోచించడాన్ని ఇష్టపడేవారు. ఒకరోజు పరుపుపై విశ్రాంతి తీసుకొంటున్నాపుడు, ఒక సమతలంలో గల ఒక బిందువు స్థానాన్ని వివరించే సమస్యను అతను పరిహారం కనుగొన్నాడు. అతని విధానం అక్షాంశ-రేఖాంశాల పరికల్పనలలో కూడిన పురాతన మాదిరిని నవీకరించిన రూపం. ఒక సమతలంలో ఒక బిందువు స్థానాన్ని వివరించు పద్ధతిని **"డెస్కార్టెస్‌కు"** గౌరవ సూచకంగా **"కార్ఫీజియస్ వ్యవస్థ"** అని కూడాపిలువ బడినది.



రెనే డెకార్ట్ **(1596 -1650)**

చిత్రం 3.4

అభ్యాసం 3.1

1. మీ అధ్యయన బల్ల పై గల బల్లదీపం (study lamp) స్థానాన్ని మరొక వ్యక్తికి మీరు ఎలా వివరిస్తారు?

2. **రహదారి ప్రణాళిక :-** ఒక నగరంలో రెండు రహదారులున్నాయి. ఈ రెండు దారులలో ఒకటి ఉత్తర-దక్షిణ దిశలకు మరొకటి తూర్పు-పడమర దిశలకు ఉన్నాయి. ఇవి నగరానికి మధ్యలో ఉన్నాయి. పరస్పరం 200m అంతరంలో గల మిగతా అన్ని వీధులు ఈ రహదారికి సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ప్రతిదిశకు 5 దారులు ఉన్నాయి. 200m = 1cm అను ప్రమాణాన్ని ఉపయోగించి, మీ నోటుపుస్తకంలో నగరపు ఒక మాదిరి గ్రాఫ్‌ను నిర్మించండి. రహదారి వీధులను ఏకరేఖలలో సూచించండి.

మీ మాదిరిలో అనేక ఖండించు దారులు ఉన్నాయి. ఇలాంటి ఖండించు ప్రతి దారికి ఒక ఉత్తర-దక్షిణాలలో మరొకటి తూర్పు-పడమర దిశలలో రెండు దారులలో ఏర్పడినాయి. ప్రతి జత ఖండించు దారులను ముందు క్రమంలో సూచించవచ్చు. ఉత్తర - దక్షిణ దిశగా ఉన్న రెండవ వీధి మరియు తూర్పు-పడమరల దిశగా 5వ వీధి ఒకదానికొకటి సాగిపోవునప్పుడు మనం దానిని వీధి ఖండన (2,5) అని పిలుస్తాము.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి.

(i) (4,3) అను ఎన్ని వీధి ఖండనలను సూచించవచ్చు?

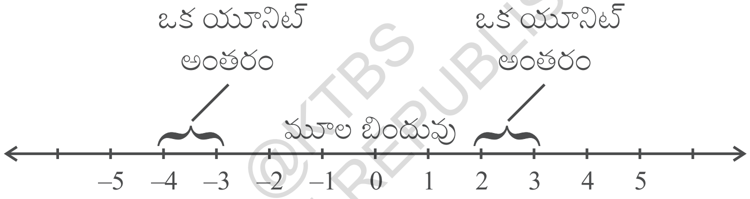
(ii) (3,4) అను ఎన్ని వీధి ఖండనలను సూచించవచ్చు అనుటను కనుగొనండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ :

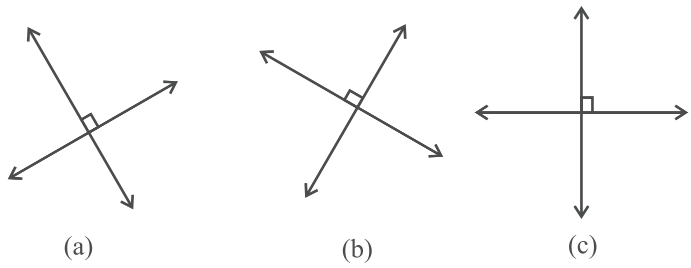
'సంఖ్యా వ్యవస్థ అను అధ్యాయంలో మీరు సంఖ్యారేఖ గురించి నేర్చుకొన్నారు. సంఖ్యారేఖపై ఒక స్థిరబిందువు '0' (సున్నా)కు ఇరువైపులా సమాన దూరాలలో బిందువులు గుర్తించబడి ఉంటాయి. ఈ స్థిరబిందువు '0' (సున్న)ను మూలబిందువు అంటారు. ధన సంఖ్యలు అన్ని సున్నాకు కుడివైపున మరియు ఋణ సంఖ్యలు అన్ని సున్నాకు ఎడమ వైపున సూచిస్తాము. ఒక సరళ రేఖలో సమాన అంతరంలో బిందువులను గుర్తించడం ద్వారా మనం సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యలను సూచిస్తాము. సున్న మూలబిందువు నుండి ఒక యూనిట్ దూరం '1'ని మూడు యూనిట్ల దూరం '3'ను సూచిస్తాయి. మూలబిందువు నుండి ధనాత్మక దిశలో 'r' దూరంలో గల బిందువు 'r' అను సంఖ్యను సూచిస్తాయి. ఋణాత్మక దిశలో మూల బిందువు నుండి 'r' దూరంలో గల బిందువు $-r$ అను బిందువును సూచిస్తాయి. చిత్రం 9.5లో సంఖ్యారేఖపై వివిధ సంఖ్యల స్థానాలను చూపించబడినది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



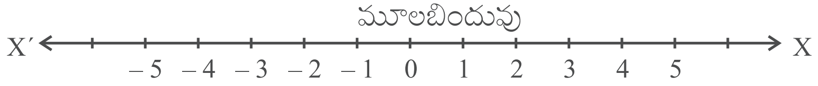
చిత్రం 3.5

డెకార్టె ఒక తలంలో పరస్పరం లంబంగా ఉన్న ఇలాంటి రెండు సంఖ్యారేఖలను తీసుకొన్నాడు. ఈ రేఖల ఆధారం చేసుకోని బిందువులను గుర్తించాలి. చిత్రం 3.6లో సూచించిన విధంగా లంబరేఖలు ఏ దిశలోనైనా ఉండవచ్చు. కానీ ఈ అధ్యాయంలో ఒక సమతలంపైన ఏదేని ఒక బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించడానికి ఒక రేఖను క్షితజ–సమాంతరంగాను, మరొక రేఖను క్షితిజ – లంబంగాను ఉండునట్లు ఈ రెండు రేఖలను తీసుకొంటాము.

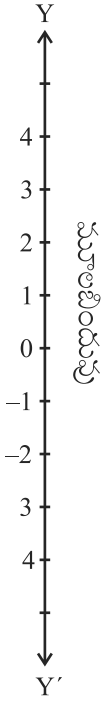


చిత్రం 3.6

వాస్తవానికి ఈ రేఖలు క్రింది విధంగా లభిస్తాయి. రెండు సంఖ్యారేఖలను తీసుకొని క్షితిజ సమాంతర రేఖ X'X ను X – అక్షం అని, క్షితిజ – లంబరేఖ Y'Y ను Y – అక్షం అని పిలవండి. (చిత్రం 9.7(a) చూపినట్లు) సంఖ్యారేఖపై రాసినట్లు దానిపై సంఖ్యలను రాయండి. YY' క్షితిజ – సమాంతరంకాదు క్షితిజ లంబం అనుటను గమనించండి Y'Y పైన కూడా మనం ఇదే విధంగా సంఖ్యలను రాస్తాము.



(a)

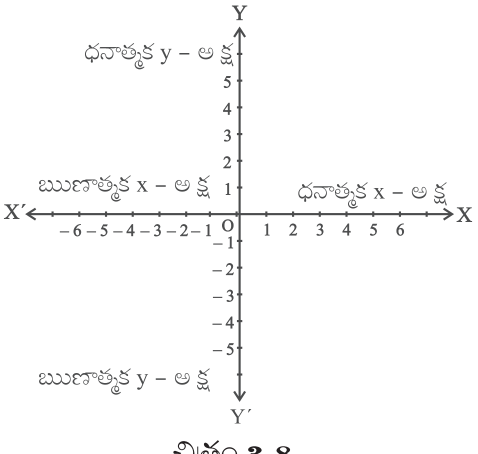


(b)

చిత్రం 3.7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

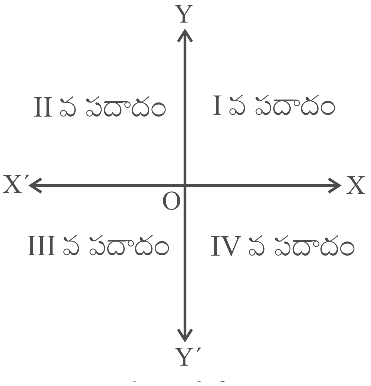
రెండు రేఖలు వాటి మూల బిందువు లేదా సున్నలో ఒకదానికొకటి ఖండించు కొన్నట్లు వాటిని గీయండి. చిత్రం 9.8 క్షితిజ – సమాంతర రేఖ X'X ను x – అక్షం అని, క్షితిజ లంబరేఖ Y'Y ను y – అక్షం అని అంటాము.



చిత్రం 3.8

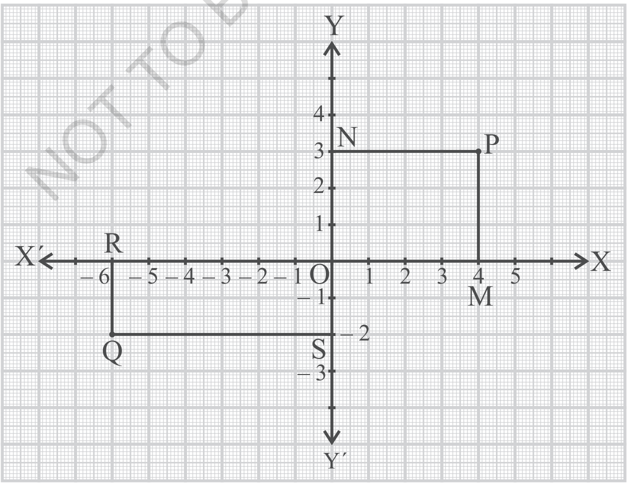
X'X మరియు Y'Y లు ఖండించు కొను బిందువును మూలబిందువు అని, దీనిని 'O' చే సూచిస్తారు. $\overrightarrow{OX}$ యొక్క దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి $\overrightarrow{OX}$ ను ధన X – అక్షం అని $\overrightarrow{OY}$ దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి OY ను ధన y – అక్షం అని అంటారు. $\overrightarrow{OX'}$ దిశలో $\overrightarrow{OY'}$ ల దిశలలో ఋణ సంఖ్యలు ఉంటాయి.

కాబట్టి $\overrightarrow{OX'}$ ను ఋణ X – అక్షంను $\overrightarrow{OY'}$ ను ఋణ y – అక్షం అని అంటాము. అక్షాల సమతలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా చేసి ఉండటాన్ని మీరు గమనించవచ్చు. ఈ నాలుగు భాగాలను చతుర్థక పాదాలు అని అంటారు. (4లో ఒక భాగం) వీటిని OX నుండి ప్రారంభించి, అపసవ్యదిశలో I, II, III, IV లలో సూచిస్తాము. చిత్రం 3.9 ఇలా సమతలం అక్షాలను మరియు చతుర్థక పాదాలను కలిగి ఉన్నది. ఈ సమతలాన్ని **"కార్టీజియన్ తలం"** లేదా **"నిరూపక తలం"** లేదా ***xy*–తలం** అని అంటాము. అలాగే X,Y అక్షాలను నిరూపక అక్షాలు అంటాము.



చిత్రం 3.9

ఇపుడు మనం ఈ వ్యవస్థ గణితానికి ఎందుకు ప్రాథమికమైనది మరియు ఎలా ఉపయోగమైనది అని చూద్దాం. గ్రాఫ్ పేపర్పై XY– అక్షాలను గుర్తించిన కింది చిత్రాన్ని గమనించండి. P మరియు Q బిందువులకు q మరియు p బిందువులకు అక్షాల గల దూరాలను చూద్దాం. దీనికోసం x – అక్షం పై PM మరియు y – అక్షం పై PN లంబాలను గీయండి. అదేవిధంగా చిత్రం 3.10 లో చూపినట్లు QS లంబాలను గీయండి.



చిత్రం 3.10

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

మీరు గమనించవలసిన అంశాలు :

(i) ధన x – అక్షం దిశలో P బిందువు నుంచి y – అక్షానికి గల లంబదూరం PN = OM = 4 యూనిట్లు.

(ii) ధన y – అక్షం దిశలో x – అక్షం నుండి P బిందువుకు గల లంబదూరం PM = ON– 3 యూనిట్లు.

(iii) ఋణ x – అక్షం దిశలో y – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల లంబదూరం OR = SQ = 6 యూనిట్లు.

(iv) ఋణ y – అక్షం దిశలో, x – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల లంబదూరం OS = RQ = 2 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు ఈ లంబదూరాలను ఉపయోగించి, ఏ ఖంగారు లేకుండా బిందువులను ఎలా వివరించవచ్చు. ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను ఈ కింది పద్ధతి ద్వారా రాస్తాము.

(i) ఒక బిందువుయొక్క ***x*** **నిరూపకము** y – అక్షం నుండి x – అక్షం వరకు కొలిచిన దాని లంబదూరం (ధన x – అక్షం దిశలో ధన మరియు ఋణ x – అక్షం దిశలో ఋణ). P బిందువుకు అది + 4 మరియు Q కు – 6. x – నిరూపకాన్ని ప్రథమ నిరూపకం అని కూడా పిలుస్తారు.

(ii) ఒక బిందువు యొక్క ***y*** **– నిరూపకము** x – అక్షం నుండి y – అక్షం వరకు కొలిబిన దానిలం బదూరం (ధన y – అక్షం దిశలో ధన ఋణ y – అక్షం దిశలో ఋణ). P బిందువుకు అది + 3 మరియు Q కు అది –2. y – నిరూపకాన్ని **ద్వితీయ నిరూపకం** అని కూడా పిలుస్తాము.

(iii) నిరూపకం సమతలంలో గల ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను చెప్పేటపుడు మొదట x – నిరూపకం ఆ తరువాత y – నిరూపకం వస్తాయి మనం ఆ నిరూపకాలను (ఆవరణం)లో రాస్తాము. కావున 'P' యొక్క నిరూపకంలు (4,3) మరియు 'Q' యొక్క నిరూపకాలు (–6, –2).

నిరూపకాలు సమతలంలో ఏ బిందువు నిరూపకాలైనా ఏకైకంగా ఉంటాయి. (3,4) అనునది (4,3) కు సమానం కాదు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

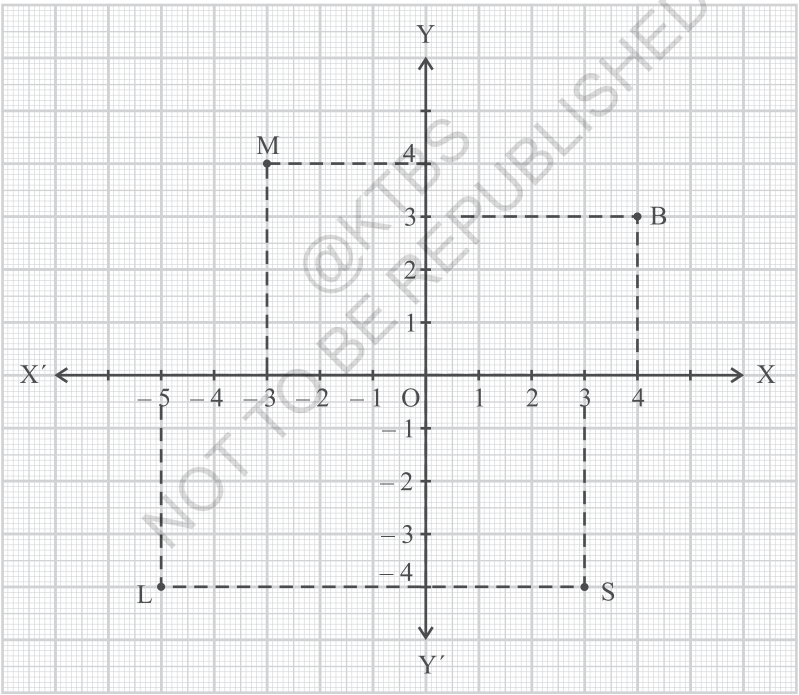
ఉదాహరణ 1 : చిత్రం 9.11 ను చూచి క్రింది వాక్యాలను పూరించండి.

(i) B బిందువు ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున B నిరూపకాలు (_______ , _______)

(ii) M బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున M నిరూపకాలు (_______ , _______).

(iii) L బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున L నిరూపకాలు (_______ , _______).

(iv) S బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకం క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున S నిరూపకాలు (_______ , _______).



చిత్రం 3.11

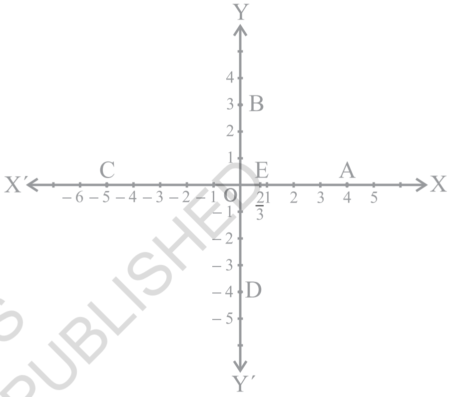
సాధన : (i) y అక్షం నుండి B బిందువు గల దూరం 4 యూనిట్లు అయినందు వల్ల B బిందువు x – నిరూపకము లేదా ప్రథమ నిరూపకం 4. x అక్షం నుండి B బిందువుకు గల దూరం 3 యూనిట్లు కావున B బిందువు యొక్క y నిరూపకం అంటే ద్వితీయ నిరూపకం 3 కావున B బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (4, 3).

(ii) M బిందువు యొక్క (పై (i)లో ఉన్నట్లు) x– నిరూపకాలు మరియు y– నిరూపకాలు క్రమంగా (–3 మరియు 4) కావున M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–3, 4).

(iii) L బిందువు యొక్క x – నిరూపకాలు మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా (–5 మరియు – 4) కావున L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–5, – 4).

(iv) S బిందువు యొక్క x – నిరూపకాలు మరియు y – నిరూపకాలు క్రమంగా (3 మరియు – 4) కావున S బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3, – 4).

ఉదాహరణ 2 : చిత్రం 3.12 లో అక్షాలపై గుర్తించిన బిందువుల నిరూపకాలను రాయండి.



చిత్రం 3.12

సాధన: మీరు చూడవలసిన దేమిటంటే

(i) A బిందువు y – అక్షం నుండి 4 యూనిట్ల దూరంలోను, y – అక్షం నుండి '0'(సున్నా) దూరంలో ఉన్నది. కావున A బిందువు యొక్క x – నిరూపకం 4, y – నిరూపకం '0' (సున్నా) 'A' యొక్క నిరూపకాలు (4,0) ఇలాగా

(ii) B యొక్క నిరూపకాలు (0, 3). ఎందుకు?

(iii) C యొక్క నిరూపకాలు (–5, 0). ఎందుకు?

(iv) D యొక్క నిరూపకాలు (0, –4). ఎందుకు?

(v) E యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{2}{3},0\right)$. ఎందుకు?

x అక్షంపై ఏదేని బిందువు x – అక్షంనుండి '0' (సున్న) దూరంలో ఉంటే ఆ బిందువు యొక్క y – నిరూపకం 0 (సున్న) అవుతుంది. ఇలాగా x – అక్షం పై ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (x, 0) రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ x అంటే y – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరం. అదేవిధంగా y – అక్షం పై ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0, y) రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ y అంటే x – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరం. ఎందుకు?

మూల బిందువు '**O**' యొక్క నిరూపకాలు ఏవి? ఇది రెండు అక్షాలనుండి (0)సున్న దూరంలో ఉంది. కావున దాని ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకం రెండు (0) సున్నా అయినాయి. కావున మూలబిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0,0).

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

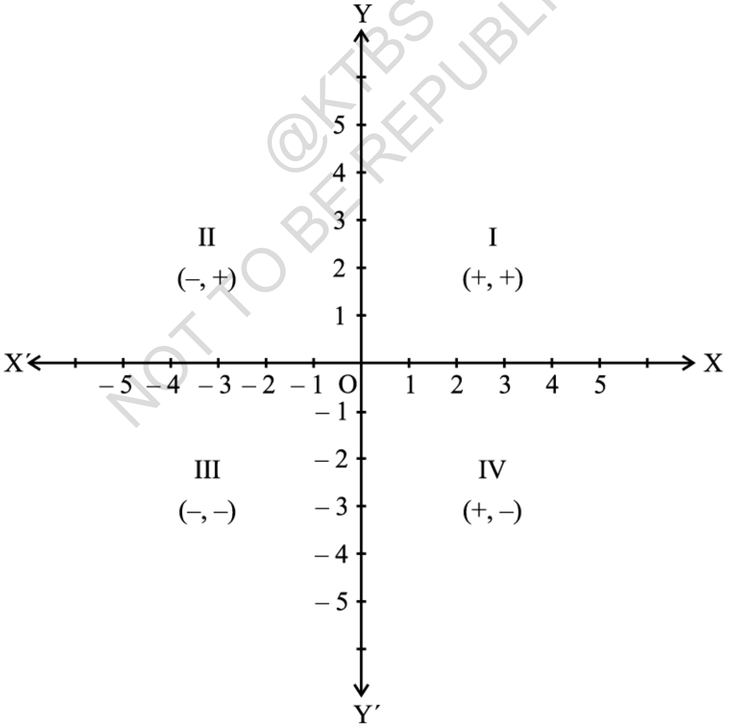
పై ఉదాహరణల నుండి ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాల చిహ్నాలకు ఆ బిందువు ఉండే చతుర్థక పాదానికి గల సంబంధాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు.

(i) ఒక బిందువు ఒకటవ పాదంలో ఉంటే అది (+, +) రూపంలో ఉంటుంది ఎందుకంటే ఒకటవ పాదం దన x – అక్షం, దన y – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(ii) ఒక బిందువు రెండవ పాదంలో ఉంటే అది (–, +) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే రెండవ పాదం ఋణ x – అక్షం, ధన y – అక్షం లో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(iii) ఒక బిందువు మూడవ పాదంలో ఉంటే అది (–, –) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే మూడవపాదం ఋణ x – అక్షం, ఋణ y – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(iv) ఒక బిందువు నాల్గవ పాదంలో ఉంటే అది (+, –) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకం టే నాల్గవపాదం ధన x – అక్షం, మరియు ఋణ y – అక్షంలలో ఆవృతమై ఉంటుంది. చిత్రం 9.13ను చూడండి.



చిత్రం 3.13

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించండి : సమతలంలోగల ఒక బిందువును వివరించడానికి మనం పైన చర్చించిన విధానం ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అంగీకరించ బడిన ఒక పద్ధతి. ఉదాహరణకు ప్రథమ మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు తర్వాత రావలసిన వ్యవస్థ కూడా ఉండి ఉండవచ్చు. అయితే ఏ గడిబిడి కలుగకూడదు అనే ఉద్దేశ్యంతో మనం మొదట వివరించిన పద్ధతికి మొత్తం ప్రపంచమే ఒప్పుకొన్నది.

అభ్యాసం 3.2

1. కింది ప్రతి ప్రశ్నకు జవాబు రాయండి.

(i) కార్టీజియన్ సమతలంలో ఒక బిందువును గుర్తించడానికి గీచిన క్షితిజ – సమాంతర మరియు క్షితిజ – లంబరేఖల పేర్లేమి?

(ii) ఈ రెండు రేఖల నుండి ఏర్పడిన సమతలం యొక్క భాగాల పేర్లు రాయండి?

(iii) ఈ రెండు రేఖలు ఖండించు బిందువు పేరు రాయండి?

2. చిత్రం 3.14ను చూసి క్రింది వాటిని రాయండి.

(i) B యొక్క నిరూపకాలు

(ii) C యొక్క నిరూపకాలు

(iii) (–3, –5) నిరూపకాలచే గుర్తించబడిన బిందువు

(iv) (2, –4) నిరూపకాలచే గుర్తించబడిన బిందువు

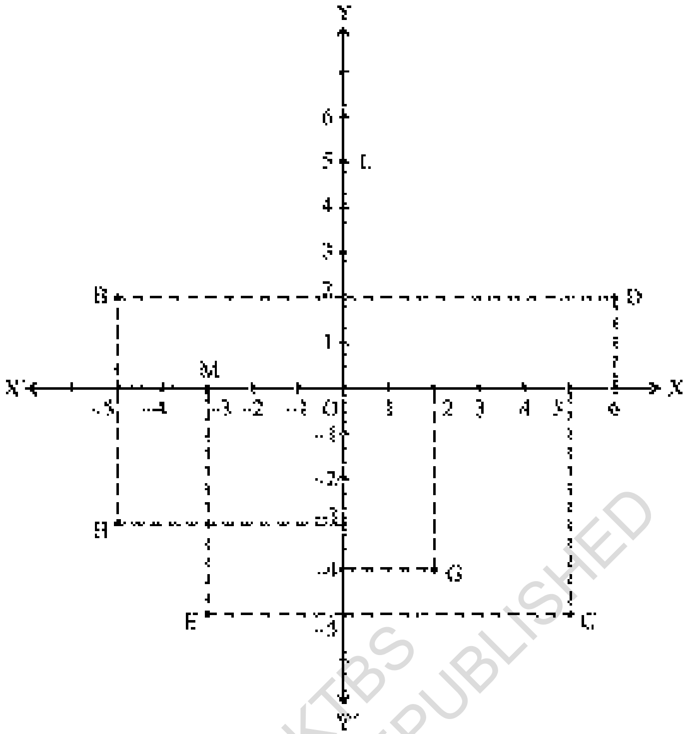
(v) D బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం

(vi) H బిందువు యొక్క ద్వితీయ నిరూపకం

(vii) L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

(viii) M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 3.14

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.3 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకొన్నారు.

1. ఒక సమతలంలో ఒక వస్తువు లేదా బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించడానికి రెండు లంబరేఖలు కావాలి. వాటిలో ఒకటి క్షితిజ – సమాంతరంగా మరొకటి క్షితిజ – లంబదిశలో ఉంటాయి.
2. సమతలాన్ని కార్టీజియన్ లేదా నిరూపకతలం అని పిలుస్తాము మరియు రేఖలను నిరూపక అక్షాలు అని అంటాం.
3. క్షితిజ – సమాంతర రేఖను x – అక్షం అని, క్షితిజ – లంబరేఖను y – అక్షం అని పిలుస్తాము.
4. నిరూపక అక్షాలు సమతలాన్ని నాలుగు పాదాలుగా విభజిస్తాము.
5. అక్షాల ఖండన బిందువును మూల బిందువు అని అంటాము.

6 y – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకుగల దూరాన్ని దాని x – నిరూపకం లేదా ప్రథమ నిరూపకం అని పిలుస్తాము మరియు x – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని దా y – నిరూపకం లేదా ద్వితీయ నిరూపకం అని పిలుస్తాము.

7. ఒక బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం x మరియు ద్వితీయ నిరూపకం y అయితే (x, y) లు ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు.

8. x – అక్షంలో గల ఒక బిందువు నిరూపకాలు $(x, 0)$ రూపంలో మరియు y అక్షంపై బిందువు నిరూపకాలు $(0, y)$ రూపంలో ఉంటాయి.

9. మూలబిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0,0).

10. ఒక బిందువు నిరూపకాలు I పాదంలో (+, +), II పాదంలో (–, +), III వ పాదంలో (–, –), IV వ పాదంలో (+, –) రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ '+' ధన వాస్తవ సంఖ్యను '–' ఋణ వాస్తవ సంఖ్యను కూడా సూచిస్తాయి.

11. $x \neq y$ అయితే, $(x, y) \neq (y, x)$ మరియు $x = y$ అయితే, $(x, y) = (y, x)$.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

L9Y6S9

అధ్యాయం- 4

రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలు

విశ్లేషణ విధానం యొక్క ముఖ్యమైన ఉపయోగమేమంటే గణిత సమస్యలను సమీకరణ రూపంలోకి మార్చి, ఆ సమీకరణాలను వీలైనంత సరళ పదాలలో చూపుట.

– ఎడ్మండ్ హ్యాలి

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.1 పరిచయం

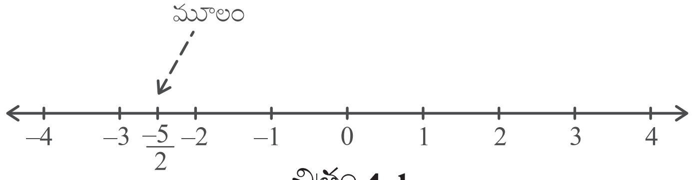
క్రిందటి తరగతులలో మీరు ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణాల గురించి నేర్చుకున్నారు. ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణమును రాయగలవా? నీవు ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణాలకు $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ మరియు $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ లను ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చు. ఇటువంటి సమీకరణాలకు ఒకే ఒక జవాబు ఉంటుందని కూడా మీకు తెలుసు. ఆ జవాబును సంఖ్యారేఖ మీద ఏ విధంగా సూచించవచ్చు అనేది కూడ మీకు గుర్తు ఉండి ఉంటుంది. ఈ అధ్యాయంలో ఒక చలరాశిగల సరళ సమీకరణాలను గుర్తుచేసుకొని, దానిని రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణాలకు పెంచవచ్చు. మీకు ఈ ప్రశ్నలు తలెత్తవచ్చు రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి సమాధానం ఉంటుందా? ఉంటే, అది ఒకే ఒక్కటా? ఆ సమాధానం కార్టీజియన్ సమతలం మీద ఎలా కనిపిస్తుంది? ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు చెప్పాలంటే అధ్యాయం 3లో మీరు చదివిన కొన్ని పరికల్పనలను ఉపయోగించవచ్చు.

4.2 సరళ సమీకరణాలు :

మీరు ఇప్పటి వరకు ఏమి చదివారో ముందు గుర్తు చేసుకుందాం. క్రింది సమీకరణమును చూడండి.

$$2x + 5 = 0$$

దాని సమాధానము, అంటే సమీకరణం యొక్క మూలం $-\frac{5}{2}$ దీనిని సంఖ్యారేఖ మీద క్రింది విధంగా సూచించ వచ్చు.



చిత్రం 4.1

ఏదైనా సమీకరణాన్ని సాధించేటపుడు, క్రింది అంశాలను మనసులో పెట్టుకోవాలి.

క్రింది చర్యల వలన సరళ సమీకరణం యొక్క సమాధానం మారదు.

(i) సమీకరణానికి రెండువైపుల ఒకే సంఖ్యను కూడినపుడు (లేదా దాని నుండి తీసివేసినప్పుడు)

(ii) సమీకరణాన్ని ఇరువైపుల సున్నకాని ఒకే సంఖ్యతో గుణించినపుడు లేదా భాగించినపుడు

క్రింది సందర్భమును చూద్దాం.

నాగపూర్‌లో ఇండియా, శ్రీలంకల మధ్య జరిగిన ఒకరోజు క్రికెట్ ఆటలో ఇద్దరు భారతీయ బాట్స్‌మెన్‌లు మొత్తం 176 పరుగులు చేశారు. ఈ సమాచారాన్ని సమీకరణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

ఇక్కడ ఏ ఒక్క ఆటగాడి పరుగులు ఇవ్వలేదు కాబట్టి రెండు అవ్యక్త రాశులు ఉన్నాయి. అవి x మరియు y అనుకుందాం. ఒక ఆటగాడి పరుగులు x మరియు మరొక ఆటగాడి పరుగులు y అవుతాయి.

$x + y = 176$ అని మనకు తెలుసు

అదే మనకు కావలసిన సమీకరణం.

ఇది రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణానికి ఉదాహరణ అవుతుంది.

ఇటువంటి సమీకరణాలలో x మరియు y లను చలరాశులుగా సూచించుట ఆనవాయితీ అయినది. వేరే అక్షరాలను కూడా ఉపయోగించవచ్చు. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు :

(1) $2s + 3t = 5$

(2) $p + 4q = 7$

(3) $\pi u + 5v = 9$ మరియు

(4) $3 = \sqrt{2}x - 7y$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ సమీకరణాలను క్రమంగా

(1) $2s + 3t - 5 = 0$ (2) $p + 4q - 7 = 0$ (3) $\pi u + 5v - 9 = 0$ మరియు

(4) $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ గా కూడ రాయవచ్చు.

a, b మరియు *c* లు వాస్తవ సంఖ్యలయి ఉండి, *a* మరియు *b* లు సున్న కానిచో $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉన్న ఏ సమీకరణమునైనా రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం అంటారు. ఇటువంటి సమీకరణాలను ఎన్నైనా రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 1 : క్రింది ప్రతి ఒక్క సమీకరణమును $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాసి *a, b* మరియు *c* విలువలను గుర్తించండి.

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$

(iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$.

సాధన :(i) $2x + 3y = 4.37$ ని $2x + 3y - 4.37 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 2$, $b = 3$, $c = -4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$ ని $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = -4$.

(iii) $4 = 5x - 3y$ సమీకరణమును $5x - 3y - 4 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 5, b = -3, c = -4$. ఈ సమీకరణమును $-5x + 3y + 4 = 0$ అని కూడి రాయవచ్చునని నీవు ఒప్పు కుంటావా? ఈ సందర్భంలో $a = -5, b = 3, c = 4$.

(iv) $2x = y$ సమీకరణమును $2x - y + 0 = 0$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 2, b = -1, c = 0$

$ax + b = 0$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాలు కూడా రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలవుతాయి. ఎందుకనగా వాటిని $ax + 0.y + b = 0$ అని రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు $4 - 3x = 0$ ని $-3x + 0.y + 4 = 0$ గా రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 2: క్రింది ప్రతి ఒక్క సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా రాయండి.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

సాధన (i) $x = -5$ ని $1.x + 0.y = -5$ లేక $1.x + 0.y + 5 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(ii) $y = 2$ ని $0.x + 1.y = 2$ లేక $0.x + 1.y - 2 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(iii) $2x = 3$ ని $2x + 0.y - 3 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(iv) $5y = 2$ ని $0.x + 5y - 2 = 0$ గా రాయవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 4.1

1. ఒక నోటు పుస్తకము యొక్క వెల ఒక పెన్ను వెలకు రెండు రెట్లున్నది. ఈ వాక్యమును సూచించు రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణమును రాయండి.

   (నోటు పుస్తకం వెల ₹x గాను, పెన్నువెల ₹y గాను తీసుకోండి)

2. క్రింది సరళ సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపంలో చూపి ప్రతి సందర్భంలో a, b మరియు c విలువలను గుర్తించండి.

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - y - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$

   (iv) $x = 3y$ (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$

   (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 సరళసమీకరణము యొక్క సాధన

ఒక చలరాశి గల ప్రతి సరళ సమీకరణానికి ఒకే ఒక సమాధానం ఉంటుందని మీరు చూశారు. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క జవాబు గురించి మీరేమి చేస్తారు. సమీకరణంలో రెండు చలరాశులు ఉన్నాయి. కాబట్టి జవాబు అంటే ఇచ్చిన సమీకరణమును తృప్తిపరచే రెండు విలువలు, ఒకటి x విలువ, మరొకటి y విలువ. $2x + 3y = 12$ సమీకరణమును తీసుకొందాం. ఇక్కడ $x = 3$, మరియు $y = 2$ అనేది ఒక జవాబు అవుతుంది. ఎందుకంటే మీరు $x = 3$, మరియు $y = 2$ విలువలను సమీకరణంలో సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$ అవుతుంది.

ఈ సమాధానమును ముందుగా x విలువ, తర్వాత y విలువలతో (3, 2) క్రమయుగ్మంగా రాస్తాం. ఇదేవిధంగా, పై సమీకరణానికి (0, 4) కూడా జవాబు అవుతుంది.

మరొక రకంగా చెప్పాలంటే (1,4) అనేది $2x + 3y = 12$ కి జవాబు కాదు. ఎందుకంటే $x = 1$, $y = 4$ విలువలు ఇచ్చినపుడు $2x + 3y = 14$ అవుతుంది కాని 12 కాదు. (0, 4) ఒక జవాబు అవుతుంది కాని (4, 0) కాదు.

$2x + 3y = 12$ సమీకరణానికి కనీసం రెండు జవాబులు మీరు చూశారు. అని (3, 2) మరియు (0, 4). ఇంకేదైనా సమాధానమును కనుగొనగలరా? (6, 0) మరొక సమాధానమని మీరు ఒప్పుకుంటారా? దానిని పరిశీలించండి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

నిజానికి మనము క్రింది విధంగా చేస్తే, అనేక సమాధానాలు పొందవచ్చు. $2x + 3y = 12$ లో మీ ఇష్ట ప్రకారం x కి ఒక విలువ తీసుకోండి. ($x = 2$ అనుకుందాం), అప్పుడు ఈ సమీకరణం ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణం $4 + 3y = 12$ గా అవుతుంది. దీనిని సాధిస్తే $y = \frac{8}{3}$ అవుతుంది. కాబట్టి $2x + 3y =12$ కి $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ మరొక జవాబు అవుతుంది. ఇదేవిధంగా $x = -5$ అనుకొనిన ఈ సమీకరణం $-10 + 3y = 12$ అవుతుంది. దానినుండి $y = \frac{22}{3}$ అని వస్తుంది. కాబట్టి $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ అనేది $2x + 3y = 12$ కి మరొక సమాధానం అవుతుంది. కాబట్టి రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క వివిధ జవాబులకు అంతం లేదు. అంటే రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 3 : $x + 2y = 6$ సమీకరణానికి నాలుగు విభిన్న సమాధానాలను కనుగొనండి.

సాధన : పరిశీలన ద్వారా $x = 2, y = 2$ ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఎందుకంటే $x = 2, y = 2$ విలువలకు, $x + 2y = 2 + 4 = 6$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు $x = 0$ అనుకుందాం. x కి ఈ విలువ ఇస్తే ఇచ్చిన సమీకరణం $2y = 6$ అవుతుంది. అప్పుడుదాని యొక్క ఒకే ఒక జవాబు $y = 3$ కాబట్టి $x = 0, y = 3$ కూడ $x + 2y = 6$ కి ఒక జవాబు అవుతుంది. ఇదే విధంగా $y = 0$ తీసుకుంటే సమీకరణం $x = 6$ అవుతుంది. కాబట్టి $x = 6, y = 0$ కూడా $x + 2y = 6$ కి సమాధానం అవుతుంది. చివరిగా $y = 1$ తీసుకుందాం. ఇచ్చిన సమీకరణం $x + 2 = 6$ అవుతుంది. దాని సమాధానం $x = 4$ కాబట్టి (4, 1) కూడా ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సమాధానం అవుతుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క అనంతమైన సమాధానాలలో నాలుగు ఏవనగా (2, 2), (0, 3), (6, 0) మరియు (4, 1).

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనిక : సమీకరణం యొక్క సమాధానమును పొందడానికి సులభమైన మార్గమేమంటే $x = 0$ తీసుకొని y విలువను కనుగొనుట. అదేవిధంగా, $y = 0$ తీసుకొని x విలువను కనుగొనుట.

ఉదాహరణ 4 : క్రింది ప్రతి సమీకరణానికి రెండు సమాధానాలు కనుగొనండి.

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

సాధన :

(i) $x = 0$ తీసుకొంటే, $3y = 12$ వస్తుంది అంటే $y = 4$. కాబట్టి (0, 4). ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సమాధానం అవుతుంది. అదేవిధంగా, $y = 0$ తీసుకొంటే $x = 3$ అవుతుంది కాబట్టి (3, 0) ఒక సమాధానం అవుతుంది.

(ii) $x = 0$ తీసుకుంటే, $5y = 0$ వస్తుంది. దాని నుండి $y = 0$ అవుతుంది కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణానికి, (0, 0) ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఇపుడు $y = 0$ తీసుకుంటే మరల (0, 0) సమాధానం వస్తుంది. మరల మొదటి సమాధానమే వచ్చింది. మరొక సమాధానం పొందటానికి $x = 1$ తీసుకుందాం. అపుడు y విలువ $-\frac{2}{5}$ అని పరిశీలించవచ్చు. కాబట్టి $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ మరొక సమాధానం అవుతుంది.

(iii) $3y + 4 = 0$ సమీకరణమును $0 . x + 3y + 4 = 0$ గా రాస్తే x యొక్క అన్ని విలువలకు $y = -\frac{4}{3}$ వస్తుంది. కాబట్టి $\left(0, -\frac{4}{3}\right), \left(1, -\frac{4}{3}\right)$ రెండు సమాధానాలు గా చెప్పవచ్చు.

అభ్యాసం 4.2

1. క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది? ఎందుకు?

   $y = 3x + 5$ సమీకరణానికి

   (i) ఒకే ఒక సమాధానం ఉన్నది (ii) రెండు సమాధానాలు మాత్రమే ఉన్నాయి.

   (iii) అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నాయి.

2. క్రింది ప్రతి సమీకరణానికి నాలుగు సమాధానాలు రాయండి.

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. క్రింది ఇవ్వబడిన వాటిలో $x - 2y = 4$ సమీకరణానికి ఏవి సమాధానాలు అవుతాయి? ఏవి కావు? పరిశీలించండి.

   (i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0) (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) (1, 1)

4. $2x + 3y = k$ సమీకరణానికి $x = 2, y = 1$ సమాధానమైతే k విలువ కనుగొనండి.

4.4 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు.

1. a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలయి ఉండి, a మరియు b రెండు కూడా సున్న కానప్పుడు, $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉండే సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం అంటారు.
2. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి.
3. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద ప్రతి బిందువు, ఆ సరళ సమీకరణానికి సమాధానం అవుతుంది. అంతేకాక సరళ సమీకరణం యొక్క ప్రతి సమాధానము, ఆ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద బిందువు అవుతుంది.

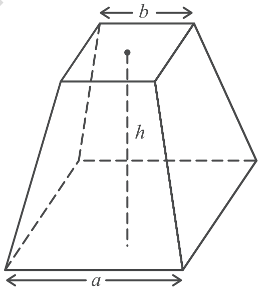
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అధ్యాయం – 5

యూక్లిడ్ రేఖాగణిత పరిచయం

5.1 పరిచయం

జామెట్రి అను పదం 'భూమి' ఆర్థము నిచ్చు 'జియో' మరియు కొలుచుట అను ఆర్థము నిచ్చు 'మెట్రీన్' అను రెండు గ్రీకు పదాల నుండి వచ్చినది. భూమిని కొలుచు అవసరం ఏర్పడినపుడు జామెట్రీ ఆవిర్భవించినట్లు అనిపిస్తుంది ఈజిప్టు, బాబిలోనియా, చైనా, భారతదేశం, గ్రీసు, ఇంకా మొదలగు ప్రతి పురాతన నాగరికతలోను వివిధ రూపాలలో ఈ గణిత విభాగాన్ని చదివారు. ఈ నాగరికతల ప్రజలు అనేక ప్రాయోగిక సమస్యలను ఎదుర్కొన్నారు. అందువలన జామెట్రీని అనేక విధాలుగా అభివృద్ధి చేయవలసి వచ్చింది.



చిత్రం 5.1
శిఖరం కోసివేయబడిన పిరమిడ్

ఉదాహరణకు, ఎప్పుడు నైలు నది ఉప్పొంగినా, అనేక భూస్వాముల ప్రక్క- ప్రక్క పొలాల మధ్య సరిహద్దులను తుడిచి పెట్టేది.అటువంటి ఉప్పెన వచ్చిన తర్వాత, ఈ సరిహద్దులను మరల గీయవలసి వచ్చేది. అందువలన ఈజిప్టువారు చిన్న చిన్న వైశాల్యాలు లెక్కించటానికి మరియు చిన్న చిన్న నిర్మాణాలు చేయటానికి అనేక రేఖాగణిత సంకేతాలను మరియు నియమాలను అభివృద్ధి పరిచారు. ధాన్యాగారాల ఘనపరిమాణాలు లెక్కించటానికి మరియు కాలువలు, పిరమిడ్లు నిర్మించటానికి వారు రేఖాగణిత పరిజ్ఞానాన్ని ఉపయోగించారు. శిఖరం కోసివేయబడిన పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం కనుగొను సూత్రం కూడ వారికి తెలిసియుండెను. (చిత్రం 5.1)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పిరమిడ్ ఒక ఘనాకృతి అనియు, దాని పాదం త్రిభుజం లేక చతురస్రం లేక ఏదైనా బహుభుజాకృతి అనియు దాని ప్రక్కతలాలు త్రిభుజాకారంలో ఉండి, పైన ఒక బిందువు వద్ద కేంద్రీకరించబడుననియు మీకు తెలుసు.

భారత ఉపఖండంలో సింధు నాగరికత (సుమారు క్రీ.పూ 3000) రేఖాగణితాన్ని విరివిగా ఉపయోగించుకొన్నట్లు హరప్ప మరియు మొహెంజొదారో త్రవ్వకాల వలన తెలుస్తున్నది. అది బాగా క్రమబద్ధీకరించబడిన సమాజము. నగరాలు ప్రణాళికా బద్ధంగా ఉండి, బాగా అభివృద్ధి చెందాయి. ఉదాహరణకు రహదారులు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉండి, భూగర్భ నీటి పారుదల వ్యవస్థ ఉంది. ఇళ్ళల్లో వివిధ రకాల గదులు చాలా ఉండేవి. పట్టణవాసుల క్షేత్రగణితం, ప్రాయోగిక అంకగణితాలలో ఆరితేరి ఉండేవారు. నిర్మాణాలకు ఉపయోగించే ఇటుకలు బట్టీలలో కాల్చబడి, పొడవు: వెడల్పు: మందం నిష్పత్తి 4: 2: 1 ఉండేదని తెలిసింది.

పురాతన కాలంలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలకు **సులభసూత్రాలు** (క్రీ.పూ 800 నుండి 500 క్రీ.పూ) కృత్రిమంగా తయారుచేయబడినవి. దైవ పీఠాలు మరియు వేదకర్మలు నిర్వహించటానికి హోమపీఠాలు నిర్మాణాలతో వేదకాల రేఖాగణితం ఆవిర్భవించింది. ఆ పరికరాలు పనికి రావాలంటే వాటి ఆకారాలు మరియు వైశాల్యాల గురించి ఇవ్వబడిన సూచనల కనుగుణంగా పవిత్రమైన మంటల స్థానం ఉండాలి. ఇళ్ళల్లో కర్మకాండలకు చతురస్రాకార మరియు వృత్తాకార దైవ పీఠాలు ఉపయోగించేవారు. ప్రజలు పూజలు చేసుకోవడానికి దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు మరియు ట్రెపీజియాల సమ్మేళనాల ఆకారాలుగల దైవపీఠాలు అవసరమయ్యేవి. (అధర్వణ వేదంలో ఇవ్వబడిన) శ్రీయంత్రంలో తొమ్మిది కలిసి పోయిన సమద్విబాహు త్రిభుజాలు ఉన్నాయి ఈ త్రిభుజాలను 43 సహకార త్రిభుజాలు ఏర్పడేటట్లు అమర్చారు. దైవ పీఠాలు నిర్మించటానికి ఖచ్చితమైన రేఖాగణిత పద్ధతులను ఉపయోగించినప్పటికీ, వాటివెనుక ఉన్న ముఖ్య సూత్రాలను చర్చించలేదు.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఈ ఉదాహరణలను బట్టి ప్రపంచమంతటా రేఖాగణితం అభివృద్ధి చెంది, ఉపయోగించబడింది అని తెలుస్తుంది. కాని ఇదంతా ఒక క్రమపద్ధతిలో జరుగలేదు. పురాతన ప్రపంచంలో రేఖాగణిత అభివృద్ధికి సంబంధించిన ఉత్సాహకరమైన విషయమేమంటే అవి ఒక తరం నుండి మరొకతరానికి మౌఖికంగా గాని, తాటాకు సందేశాల ద్వారా గాని ఇతర పద్ధతుల ద్వారా గాని పంపబడేవి. భారతదేశం మరియు రోమ్ దేశాలలో మాదిరిగా బాబిలోనియావంటి కొన్ని నాగరికతలలో కూడా రేఖాగణితం ప్రయోగాత్మక అంశంగా మిగిలి పోయింది. ఈజిప్టు వారు రూపొందించిన రేఖాగణితంలో కొన్ని ఫలితాల ప్రవచనాలుండేవి. వారి విధానానికి సాధారణ నియమాలేమి లేవు. నిజానికి బాబిలోనియా

మరియు ఈజిప్టు వారు రేఖాగణితాన్ని ప్రయోగ పూర్వక అవసరాలకే ఉపయోగించారు. వారు రేఖాగణితాన్ని క్రమానుగత విజ్ఞానంగా అభివృద్ధి చేయటానికి కొంత మాత్రమే కృషి చేశారు. కాని గ్రీసు వంటి కొన్ని నాగరికతలలో, కొన్ని నిర్మాణాలు ఎలా పని చేస్తాయనే దానికి కారణాలివ్వటంలో ప్రాముఖ్యత ఇవ్వబడింది. సాధనా పద్ధతిలో వారు కనుగొన్న ప్రచనాలు నిజమని నిరూపించుటలో గ్రీసు దేశస్థులు ఉత్సాహం చూపారు. (అనుబంధం – 1 చూడండి).

గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన థేల్స్‌కిమొదటిసారిగా ఒక వ్యాఖ్యానానికి నిరూపణ ఇచ్చినఘనత లభించింది. ఆ నిరూపణ ఏమంటే ఒక వృత్తమును దాని వ్యాసం సమద్విఖండన చేస్తుంది (అంటే రెండు సమాన భాగాలుగా ఖండిస్తుంది) థేల్స్ యొక్క ప్రసిద్ధి చెందిన విద్యార్థులలో మీకు తెలిసిన పైథాగరస్ (572క్రీ.పూ) ఒకడు. పైథాగరస్ మరియు అతని గుంపులోనివారు అనేక రేఖాగణిత ధర్మాలను కనుగొని అధిక స్థాయిలో రేఖాగణిత సిద్ధాంతాల అభివృద్ధికి దోహదపడ్డారు. ఈవిధానం 300 క్రీ.పూ వరకు అనుసరించబడింది. ఆ కాలంలో ఈజిప్టులోని అలెగ్జాం డ్రియాలో ఉపాధ్యాయుడైన యూక్లిడ్ తనకు తెలిసిన విషయాలన్నిం టినీ సేకరించి, తన యొక్క మూలకాలు అను ప్రసిద్ధ గ్రంధములో అమర్చాడు. అతడు తన "మూలకాలు" గ్రంథమును పదమూడు అధ్యాయాలుగా విభంజించాడు. ఒక్కొక్క అధ్యాయమును పుస్తకం అన్నారు. తువాత తరాలలో ప్రపంచం మొత్తం రేఖాగణితమును అర్థం చేసుకోవటానికి ఈ పుస్తకాలు దోహద పడ్డాయి.

థేల్స్ (Thales)
(640 BCE – 546 BCE)
చిత్రం 5.2

యూక్లిడ్ (Euclid)
క్రీ.పూ 352 – క్రీ.పూ 265
చిత్రం 5.3

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఈ అధ్యాయంలో మనం యూక్లిడ్ విధానంలో రేఖాగణితాన్ని చర్చించి, ప్రస్తుత రేఖాగణితం లో దానిని పోల్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

5.2 యూక్లిడ్ నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు.

యూక్లిడ్ కాలం నాటి గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్తలు రేఖాగణితాన్ని వారు జీవించిన ప్రపంచం యొక్క ప్రత్యేకమైన మాదిరిగా భావించారు. వారి చుట్టూ చూసే వాటి నుండి బిందువు, రేఖ, తలము మొదలగువాటి భావాలను రూపొందించారు. ఒక స్థలము మరియు ఆ స్థలములో వారి చుట్టూ ఉండే ఘనాకృతుల అధ్యయనం నుండి ఒక ఘనాకృతి యొక్క ప్రత్యేకమైన భావనను రూపొందించారు. ఒక ఘనాకృతికి ఆకారము, పరిమాణం, స్థానం ఉండి, ఒక ప్రదేశం

నుండి మరొక ప్రదేశానికి కదిలించటానికి వీలుగా ఉంటుంది. దాని యొక్క సరిహద్దులను ఉపరితలాలు అంటారు. అవి ఒక స్థలము యొక్క రెండు భాగాలను వేరు పరచును. వాటికి మందము ఉండదు. ఉపరితలాలు సరిహద్దులు వక్రరేఖలు లేక సరళరేఖలు అవుతాయి. ఈ రేఖలు బిందువుల వద్ద అంతమగును.

ఘనాకృతుల నుండి బిందువుల వరకు గల మూడు సోపానాలను (ఘనాకృతులు – ఉపరితలాలు – రేఖలు – బిందువులు) గమనిస్తే, ప్రతి సోపానంలో ఒక పరిమాణం తగ్గుతుంది. కాబట్టి ఒక ఘనాకృతికి మూడు పరిమాణాలు, ఉపరితలానికి రెండు పరిమాణాలు ఒక రేఖకు రెండు పరిమాణాలు ఉంటాయి. ఒక బిందువుకు ఏ పరిమాణం ఉండదు. యూక్లిడ్ ఈ వ్యాఖ్యలను నిర్వచనాలుగా సంగ్రహించారు. మూలకాలు గ్రంధములోని పుస్తకం 1లో 23 నిర్వచనాలను పట్టీ చేయుట ద్వారా అతని వ్యాఖ్యానాలను ప్రారంభించాడు. వాటిలో కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడినవి:

1. భాగాలేమీ లేనిది **బిందువు**
2. వెడల్పు లేని పొడవు **రేఖ**
3. ఒక రేఖ యొక్క చివరలు బిందువులు
4. ఒక రేఖ మీద బిందువులు సమానంగా ఒకేస్థాయిలో ఉంటే అది **సరళ రేఖ**
5. పొడవు మరియు వెడల్పు మాత్రమే గలది **ఉపరితలం**
6. ఒక ఉపరితలం యొక్క అంచులు రేఖలు.
7. ఒక ఉపరితలం మీద సరళరేఖలు సమానంగా ఒకస్థాయిలో ఉంటే ఆ ఉపరితలం **సమతలం** అవుతుంది.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఈ నిర్వచనాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే మనము చూసిన భాగము, వెడల్పు, పొడవు, సమంగా వంటి కొన్ని పదాలను ఇంకా స్పష్టంగా వివరించవలసి ఉన్నది. ఉదాహరణకు అతని యొక్క బిందువు నిర్వచనం తీసుకుందాం. ఈ నిర్వచనం లో 'భాగము' అను పదమును నిర్వచించ వలసి ఉంది. మనము భాగము అను పదమును కొంత వైశాల్యమును (స్థలమును) ఆక్రమించునదిగా నిర్వచిస్తే, మనము మరల వైశాల్యము అను పదమును నిర్వచించవలసి వస్తుంది. కాబట్టి ఒక పదాన్ని నిర్వచించాలంటే, మనము అనేక ఇతర పదాలను నిర్వచించవలసి వస్తుంది. అంతము లేకుండా పొడవైన నిర్వచనాల గొలుసు తయారవుతుంది. అందువలన గణితశాస్త్రవేత్తలు, కొన్ని రేఖాగణిత పదాలను అనిర్వచిత పదాలుగా వదలి వేయుటకు ఒప్పుకున్నారు. ఏది ఏమైనా పైన ఇవ్వబడిన నిర్వచనం కంటే, ఒక బిందువు యొక్క రేఖా గణిత పరికల్పన గురించి మనకు సహజ

జ్ఞానము వలన ఒక భావం కలుగుతుంది. కాబట్టి ఒక చుక్కకి కొంత పరిమాణం ఉన్నప్పటికీ మనము ఒక బిందువును ఒక చుక్కతో సూచిస్తాము.

పైన ఇవ్వబడిన రెండవ నిర్వచనంలో కూడా ఇదేరకమైన సమస్య ఉద్భవిస్తుంది. ఎందుకంటే అందులో పొడవు, వెడల్పులు ఇవ్వ బడ్డాయి. వాటిలో ఏదీ నిర్వచించబడలేదు. ఈ కారణంగా ఏదైనా ఒక అధ్యాయమును విశదీకరించునప్పుడు కొన్ని పదాలు అనిర్వచితంగా ఉంచబడ్డాయి. కాబట్టి రేఖాగణితంలో బిందువు, రేఖ, తలము (యూక్లిడ్ పదాలలో సమతలం) పదాలను అనిర్వచిత పదాలుగా తీసుకున్నాము. ఒకే ఒక విషయమేమంటే మనము వాటిని సహజ జ్ఞానంతో సూచిస్తాము. లేక భౌతిక నమూనాల సహాయంతో వాటిని వివరిస్తాము.

నిర్వచనాలతో మొదలుపెట్టి యూక్లిడ్ కొన్ని ధర్మాలను నిరూపించనవసరం లేకుండా ఊహించుకున్నాడు. నిజానికి ఇలా ఊహించినవన్నీ సర్వ సామాన్యమైన స్పష్టమైన నిజాలు. వాటిని అతడు రెండు రకాలుగా విభజించాడు. స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు. రేఖాగణితానికి పరిమితమైన ఉపకల్పనలకు అతడు 'స్వీకృత సిద్ధాంతాలు' అను పదమును ఉపయోగించాడు. సాధారణమైన అభిప్రాయాలు, స్వయంసిద్ధాలుగా పిలవబడునవి మరొకరకంగా చెప్పాలంటే రేఖా గణితానికి మాత్రమే కాకుండా గణితం మొత్తానికి ఉపయోగించబడే ఉపకల్పనలు. స్వయం సిద్ధాలు స్వీకృత సిద్ధాంతాల గురించిన వివరాల కోసం (అనుబంధం – 1 చూడండి). యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాంతాలలో కొన్ని అతని క్రమంలో లేనివి, క్రింద ఇవ్వబడినవి.

1. ఒకే అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం.
2. సమాన అంశాలకు సమాన అంశాలు కూడినప్పుడు వాటి మొత్తాలు సమానం
3. సమాన అంశాల నుండి సమాన అంశాలు తీసివేసినప్పుడు వాటి శేషములు సమానం.
4. ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించు అంశాలు ఒక దానికొకటి సమానం.
5. పూర్ణవస్తువు దాని భాగం కంటే పెద్దది.
6. సమాన అంశాల యొక్క రెట్టింపులు ఒకదాని కొకటి సమానం
7. సమాన అంశాల యొక్క అర్ధాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

ఈ సాధారణమైన అభిప్రాయాలు ఒక రకమైన పరిమాణాలను సూచిస్తాయి. మొదటి సాధారణ అభిప్రాయంను సమతల చిత్రాలకు అన్వయించవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం, ఒక దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమై, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమైతే త్రిభుజవైశాల్యం చతురస్ర వైశాల్యానికి కూడా సమానమవుతుంది.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒకే రకమైన అంశాల పరిమాణాలను పోల్చవచ్చు మరియు కూడవచ్చు కాని వేర్వేరు రకాల అంశాల పరిమాణాలను పోల్చలేము. ఉదాహరణకు ఒక రేఖను ఒక దీర్ఘచతురస్రానికి కూడలేము మరియు ఒక కోణమును ఒక పంచభుజితో పోల్చలేము.

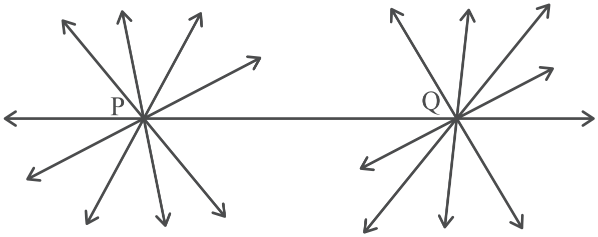
పైన ఇవ్వబడిన 4వ స్వయం సిద్ధం ప్రకారం రెండు వస్తువులు ఒకే రకంగా ఉంటే (అంటే అవి ఒకటే అయితే) అవి ఒకదానికొకటి సమానంగా ఉంటాయి. మరొక రకంగా చెప్పాలంటే ప్రతివస్తువు దానికదే సమానం. ఇది అధ్యారోపణ సూత్రానికి నిరూపణ అవుతుంది. 5వ స్వయం సిద్ధం, దానికంటే పెద్దది అనే పదానికి నిర్వచనాన్ని ఇస్తుంది. ఉదాహరణకు A అనేరాశిలో B రాశి ఒక భాగమైతే A ని B మరియు మరొక మూడవ రాశి C ల మొత్తంగా రాయవచ్చు. సాంకేతికంగా $A > B$ అంటే $A = B + C$ అగునట్లు మరొకరాశి C ఉంటుంది. ఇప్పుడు యూక్లిడ్ అయిదు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను చర్చిద్దాం. అవి:

స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 : ఏ బిందువు నుండైనా మరొక బిందువుకు సరళరేఖను గీయవచ్చు.

ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతం వలన రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా కనీసం ఒక సరళరేఖను గీయవచ్చని గమనించవచ్చు. కాని అటువంటి సరళరేఖలు ఒకటికంటే ఎక్కువ గీయలేమని ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతం చెప్పదు. ఏది ఏమైనా రెండు విభిన్న బిందువులను కలుపుతూ, ఒకే ఒక సరళ రేఖను గీయవచ్చని యూక్లిడ్ తన పుస్తకాలలో ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాన్ని మనం స్వయం సిద్ధం రూపంలో క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 5.1 : రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖను గీయవచ్చు.

P గుండా పోవు రేఖలలో ఎన్ని రేఖలు Q గుండా కూడా పోతాయి? (చిత్రం 5.4 చూడండి). PQ రేఖ ఒక్కటే పైన ఇవ్వబడిన వాక్యము దాని కదే సాక్ష్యమైనది. కాబట్టి దానిని స్వయం సిద్ధంగా తీసుకున్నారు.



చిత్రం 5.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 : ఒక అంతము చెందు రేఖను అనంతముగా పొడిగించవచ్చు.

మనము ఈ కాలంలో ఉపయోగించే రేఖాఖండం అనే పదానికి యూక్లిడ్ అంతము చెందు రేఖ అని ఉపయోగించారు. కాబట్టి ఈ కాలములోని పదాలకనుగుణంగా రెండవ స్వీకృత సిద్ధాంతమును ఈ క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

ఒక రేఖాఖండము నుండి సరళరేఖను పొందాలంటే, దానిని ఇరువైపుల పొడిగించవచ్చు.

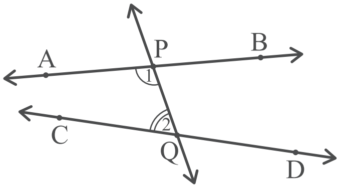
చిత్రం 5.5

స్వీకృత సిద్ధాంతం 3 : ఏదైనా కేంద్రము మరియు ఏదైనా వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 4 : అన్ని లంబకోణాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 5: రెండు సరళ రేఖల మీద పడు ఒక సరళరేఖ, దానికి ఒక వైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కంటే తక్కువ ఉండునట్లు ఉంటే, ఆ రెండు సరళరేఖలను అనంతంగా పొడిగిస్తే అవి అదే ప్రక్కన కలుసుకుంటాయి.

ఉదాహరణకు చిత్రం 5.6 లో PQ రేఖ AB మరియు CD రేఖల మీద పడి PQ కు ఎడమ వైపున గల అంతరకోణాలు 1 మరియు 2 ల మొత్తం 180° కంటే తక్కువ చేస్తుంది. కాబట్టి AB మరియు CD రేఖలు PQ కి ఎడమవైపున ఏదో ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు కుంటాయి.



చిత్రం 5.6

ఐదు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను క్లుప్తంగా చూస్తే, 5వ స్వీకృత సిద్ధాంతం మిగిలిన అన్ని స్వీకృత సిద్ధాంతాల కంటే క్లిష్టంగా అనిపిస్తుంది. మరొక రకంగా చూస్తే, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు 1 నుండి 4 వరకు సరళంగా ఉండి స్వయం సాక్ష్యాధారిత నిజాలుగా తీసుకొనబడినవి. ఏది ఏమైనా వాటిని నిరూపించుట సాధ్యం కాదు. అందు వలన ఈ వ్యాఖ్యలు ఏ నిరూపణ లేకుండా గ్రహించబడినవి (అనుబంధం – 1 చూడండి) 5వ స్వీకృత సిద్ధాంతం క్లిష్టంగా ఉడటం తర్వాత విభాగంలోపల దాని మీద ఎక్కువ దృష్టి పెడతాము.

ఈ రోజులలో స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలు అను పదాలను ఒకే అర్థంతో పరస్పరం మార్చుకొను విధంగా ఉపయోగిస్తున్నారు. స్వీకృత సిద్ధాంతం అనేది నిజానికి

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక క్రియాపదం. స్వీకృతం చేద్దాం అని మనం అంటే, దాని అర్థం 'విశ్వం లో మనకు గోచరించిన వాటిని పరిశీలించిన వాటి ఆధారంగా ఒక వ్యాఖ్యను రూపొందిద్దాం'. దానియొక్క వాస్తవికతను తర్వాత పరిశీలిస్తారు. అది నిజమైతే దానిని స్వీకృత సిద్ధాంతంగా తీసుకుంటారు.

ఒక స్వయం సిద్ధానికి గాని ముందే నిరూపించబడిన ఒక వ్యాఖ్యకు గాని వ్యతిరేఖంగా ఒక వ్యాఖ్యను ఈ స్వయం సిద్ధాల నుండి ఊహించుట అసాధ్యమైతే ఆ స్వయం సిద్ధాల సరళి పొందికగాఉంది ఆంటారు (అనుబంధం – 1 చూడండి) ఎప్పుడైనా ఒక స్వయం సిద్ధాల సరళి ఇవ్వబడినప్పుడు, అది పొందికగా ఉందని నిశ్చయించు కోవాలి.

యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు మరియు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను వివరించిన తర్వాత, ఇతర ఫలితాలను నిరూపించటానికి అతడు వాటిని ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాలనుపయోగించి నిగమన పద్ధతిలో మరికొన్ని ఫలితాలను నిరూపించాడు. ఈవిధంగా నిరూపించబడిన ప్రవచనాలను ప్రతిపాదనలు లేక సిద్ధాంతాలు అంటారు. యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలు, నిర్వచనాలు మరియు దీనికి ముందుగా నిరూపించబడిన సిద్ధాంతాల నుపయోగించి 465 ప్రతిపాదనలను రూపొందించాడు. రేఖాగణితంలో రాబోవు కొన్ని అధ్యాయాలలో కొన్ని సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి ఈ స్వయం సిద్ధాలను ఉపయోగిస్తారు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలలో కొన్ని ఫలితాలను నిరూపించటానికి యూక్లిడ్ తన స్వయం సిద్ధాలు, స్వీకృత సిద్ధాంతాలను ఏ విధంగా ఉపయోగించాడో చూద్దాం.

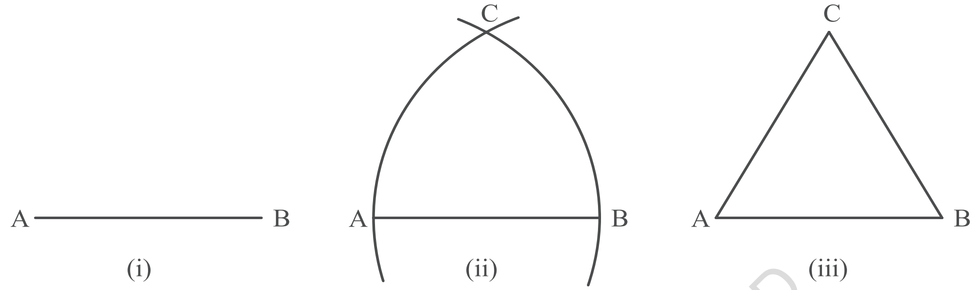
ఉదాహరణ 1 : A, Bమరియు Cలు ఒక రేఖ మీద మూడు బిందువులు మరియు B బిందువు A మరియు C ల మధ్యవుంటే (చిత్రం 5.7 చూడండి), AB + BC = AC అని నిరూపించండి.

చిత్రం 5.7

సాధన : పైన ఇవ్వబడిన చిత్రంలో AB + BC తోAC ఏకీభవించును. అంతేకాక యూక్లిడ్ 4 వ స్వయం సిద్ధం ప్రకారం ఒకదానితో ఒకటి ఏకభవించు అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం కాబట్టి AB + BC = AC ని ఊహించవచ్చు. ఈ సాధనలో రెండు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక సరళ రేఖ పోతుందని ఊహించబడినదని గమనించండి.

ఉదాహరణ 2 : ఏదైనా ఒక రేఖాఖండము మీద ఒక సమబాహు త్రిభుజమును నిర్మించవచ్చని నిరూపించండి

సాధన : పైన ఇవ్వబడిన వ్యాఖ్యలో కొంత పొడవుగల ఒక రేఖాఖండము ఇవ్వబడినది. అది AB అనుకోండి (చిత్రం 5.8(i) చూడండి)



చిత్రం 5.8

ఇక్కడ మీరు ఒక నిర్మాణం చేయవలసి ఉంది. యూక్లిడ్ 3వ స్వీకృత సిద్ధాంతము ఉపయోగించి A బిందువు కేంద్రంగా మరియు AB వ్యాసార్థంగా ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు (చిత్రం 5.8 (ii) చూడండి) అదే విధంగా B బిందువు కేంద్రంగా మరియు BA వ్యాసార్థంగా మరొక వృత్తమును గీయండి. ఈ రెండు వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి అనుకోండి. అవి C అనుకోండి ఇప్పుడు ΔABC ఏర్పడటానికి AC మరియు BC రేఖాఖండాలను గీయండి (చిత్రం 2.8 (iii)చూడండి).

ఇప్పుడు నీవు ఈ త్రిభుజం సమబాహుత్రిభుజమని నిరూపించాలి అంటే AB = AC = BC అని చూపాలి. ఇప్పుడు AB = AC (అవి ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు కాబట్టి) అదేవిధంగా AB = BC (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు) ఈ రెండు కారణాలు మరియు ఒక అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒక దానికొకటి సమానమను యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధం నుండి AB = BC = AC అని నిర్ధారించవచ్చు.

కావున ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజమవుతుంది ఎక్కడా ప్రస్తావించకుండానే యూక్లిడ్ A మరియు B లు కేంద్రాలుగా గీయబడిన రెండు వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించునవి ఊహించినట్లు గమనించండి. అనేక ఫలితాలలో మనము ఎక్కువగా ఉపయోగించే సిద్ధాంతమును ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం 2.1 : రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదాని కంటే ఎక్కువ సామాన్య బిందువును కలిగి ఉండవు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన : ఇక్కడ *l* మరియు *m* రెండు రేఖలున్నాయి వాటికి ఒకే ఒక సామాన్య బిందువు ఉందని మనం నిరూపించాలి.

ఇప్పుడు రెండు రేఖలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించునని అనుకుందాం. అవి P మరియు Q అనుకోండి. రెండు విభిన్న బిందువులు P మరియు Q గుండా పోవు రెండు రేఖలున్నాయి. కాని రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖ పోతుందన్న స్వయం సిద్ధానికి ఇది విరుద్ధంగా ఉంది. కాబట్టి రెండు రేఖలు రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించునని మనము అనుకున్న ఉప కల్పన తప్పు.

దాని నుండి మనం ఏమి నిర్ధారించవచ్చు? రెండు విభిన్న రేఖలు ఒకదానికంటే ఎక్కువ సామాన్య బిందువును కలిగి ఉండవని నిర్ధారణ అయినది.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అభ్యాసం 5.1

1. క్రింది వాటిలో ఏది సరి? ఏది తప్పు? కారణాలివ్వండి

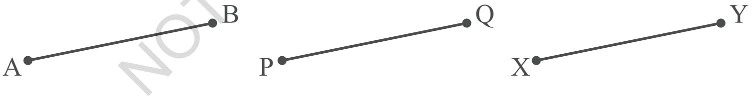
   (i) ఒక బిందువు ద్వారా ఒక సరళరేఖ మాత్రమే పోతుంది.

   (ii) రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా అనంతమైన సరళ రేఖలు పోతాయి.

   (iii) ఒక అంతము చెందు రేఖను ఇరువైపుల అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.

   (iv) రెండు వృత్తాలు సమానమైతే, వాటి వ్యాసార్థాలు సమానంగా ఉంటాయి.

   (v) చిత్రం 2.9లో AB = PQ మరియుPQ = XY అయినAB = XY అవుతుంది.



చిత్రం 5.9

2. క్రింద ఇవ్వబడిన పదాలలో ప్రతి దానికి నిర్వచనము ఇవ్వండి. దానికంటే ముందుగా నిర్వచించవలసిన వేరే పదాలు ఉన్నాయా? అవి ఏవి? వాటిని ఏవిధంగా నిర్వచిస్తావు?

   (i) సమాంతర రేఖలు (ii) లంబరేఖలు

   (iii) రేఖాఖండం (iv) వృత్త వ్యాసార్థం

   (v) చతురస్రం

3. క్రింద ఇవ్వ బడిన రెండు స్వీకృత సిద్ధాంతాలను తీసుకోండి

(i) Aమరియు B లు రెండు విభిన్న బిందువు లైన A మరియు B ల మధ్య మూడవ బిందువు C ఉంటుంది.

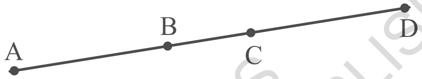
(ii) ఒకే సరళరేఖ మీద కనీసం మూడు బిందువులుంటాయి .

ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతాలలో ఏవైనా అనిర్వచిత పదాలు ఉన్నాయా? ఈ స్వీకృత సిద్ధాంతాలు పొందికగా ఉన్నాయా? అని యూక్లిడ్ స్వీకృత సిద్ధాంతాల నుండి వచ్చాయా? వివరించడి.

4. C అను బిందువు A మరియు B అను రెండు బిందువుల మధ్య AC = BC అగునట్లు ఉంటే $AC = \frac{1}{2}AB$ అని నిరూపించండి. చిత్రం గీచి వివరించండి.

5. 4వ ప్రశ్నలో C బిందువుని AB రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు అంటారు. ప్రతి రేఖాఖండము ఒకే ఒక మధ్య బిందువుని కలిగి ఉంటుందని నిరూపించండి.

6. చిత్రం 5.10 లో AC = BD అయితే AB = CD అని నిరూపించండి.



చిత్రం 5.10

7. యూక్లిడ్‌స్వయంసిద్ధాలలో 5వ దానిని సర్వసామాన్యమైన నిజంగా ఎందుకు పరిగణించారు? (ఈ ప్రశ్న 5 వ స్వీకృత సిద్ధాంతానికి సంబంధించినది కాదని గమనించండి.)

5.3 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో క్రింది అంశాలను నీవు అధ్యయనం చేశావు:

1. యూక్లిడ్ ఒక బిందువు, రేఖ మరియు ఒక తలములను నిర్వచించినప్పటికీ, ఆ నిర్వచనాలను గణిత శాస్త్ర వేత్తలు అంగీకరించలేదు. కాబట్టి అ పదాలను ఇప్పుడు అనిర్వచితాలుగా తీసుకొన్నారు.

2. స్వయం సిద్ధాలు లేక స్వీకృత సిద్దాంతాలు సర్వ సామాన్యమైన స్పష్టమైన నిజాలుగా ఊహించబడినవి అవి నిరూపించ బడలేదు.

3. సిద్ధాంతాలు అనేవి నిర్వచనాలు, స్వయం సిద్ధాలు, ముందుగా నిరూపించబడిన వ్యాఖ్యలు, నిగమన పద్ధతులను ఉపయోగించుకొని నిరూపించబడిన వ్యాఖ్యలు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. కొన్ని యూక్లిడ్ స్వయం సిద్ధాలు:

(i) ఒకే అంశానికి సమానమైన అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం

(ii) సమాన అంశాలకు సమాన అంశాలను కూడినపుడు వాటి మొత్తాలు సమానం

(iii) సమాన అంశాల నుండి సమాన అంశాలను తీసివేసినప్పుడు శేషములు సమానం

(iv) ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవించు అంశాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

(v) పూర్ణరాశి దాని భాగం కంటే పెద్దది.

(vi) సమాన అంశాల రెట్టింపులు ఒకదానికొకటి సమానం.

(vii) సమాన అంశాల అర్థాలు ఒకదానికొకటి సమానం.

5. యూక్లిడ్ స్వీకృత సిద్ధాంతాలు:

స్వీకృత సిద్ధాంతం 1 : ఒక బిందువు నుండి మరి ఏ ఇతర బిందువుకైనా ఒక సరళ రేఖను గీయవచ్చు.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 2 : ఒక అంతంచెందు రేఖను అనంతంగా పొడిగించవచ్చు.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 3 : ఏ కేంద్రతోనైనా ఏ వ్యాసార్థంతోనైనా ఒక వృత్తమును గీయవచ్చు.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 4 : అన్ని లంబకోణాలు ఒకదాని కొకటి సమానం.

స్వీకృత సిద్ధాంతం 5 : రెండు సరళ రేఖల మీద పడు ఒక సరళరేఖ, దానికి ఒకే వైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కంటే తక్కువ ఉండునట్లు ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలను అనంతంగా పొడిగిస్తే, అవి అదే వైపున కలుసుకుంటాయి.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

S5A8X6

అధ్యాయం – 6

రేఖలు మరియు కోణాలు

6.1 పరిచయం

అధ్యాయం2లో మీరు ఒక రేఖ గీయడానికి కనీసం రెండు బిందువులు అవసరమని చదివారు. అంతేగాక కొన్ని స్వయం సిద్ధాలు చదివారు. వాటి సహాయంతో మరి కొన్ని వ్యాఖ్యలను నిరూపించారు. ఈ అధ్యాయంలో రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాలు మరియు ఒక సరళరేఖ రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ సమాంతర రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాల గురించి నేర్చుకుంటారు. అంతేకాక నిగమన పద్ధతిలో కొన్ని వ్యాఖ్యలను నిరూపించడానికి ఈ ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు (అనుబంధం – 1 చూడండి) క్రిందటి తరగతులలో కొన్ని కార్యాచరణాల ద్వారా ఈ వ్యాఖ్యలను నిరూపించారు .

నిత్య జీవితంలో సమతలాల అంచుల మధ్య ఏర్పడే వివిధ రకాల కోణాలను చూస్తారు. సమతలాల నుపయోగించి అదేవిధమైన నమూనాను తయారు చేయాలంటే, మీకు కోణాల యొక్క పూర్తి జ్ఞానం ఉండాలి. ఇప్పుడు నీవు మీ పాఠశాల వస్తుప్రదర్శనశాలలో ఉంచడానికి వెదురు పుల్లలతో ఒక గుడిసె యొక్కనమూనాను తయారు చేయాలనుకున్నావు. నీవు దానిని ఎలా తయారు చేయాలో ఊహించు. నీవు కొన్ని పుల్లలను ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంచి, కొన్ని పుల్లలను ఏటవాలుగా ఉంచాలి. ఒక వాస్తు శిల్పి బహు అంతస్థుల కట్టడానికి నమూనా గీయటానికి ఖండించు రేఖలు మరియు విభిన్న కోణాల వద్ద సమాంతర రేఖలను గీయవలసి వస్తుంది. రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాల జ్ఞానం లేకపోతే ఆ వాస్తుశిల్పి, కట్టడం నమూనా గీయగలరా?

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

విజ్ఞానంలో కాంతిధర్మాలను మీరు కిరణ చిత్రాలను గీచి నేర్చుకుంటారు. ఉదాహరణకు కాంతి ఒక యానకం నుండి మరొక యానకం లోనికి ప్రసరించునపుడు దాని వక్రీభవన ధర్మమునకు అధ్యయనం చేయడానికి మీరు ఖండించు రేఖలు మరియు సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ఒక వస్తువు మీద రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బలాలు పని చేయునప్పుడు, ఫలిత బలాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి నీవు బలాలను రేఖాఖండాలలో సూచించి, చిత్రం గీస్తావు. ఆ సమయంలో కిరణాలు (రేఖా ఖండాలు) సమాంతరంగా లేక పరస్పరం ఖండించునప్పుడు కోణాల మధ్య సంబంధమును నీవు తెలుసుకోవాలి. ఒక గోపురం ఎత్తు కనుగొనటానికి లేదా లైట్ హౌస్ నుండి ఓడ యొక్క దూరం కనుగొనడానికి, ఎవరైనా క్షితిజ రేఖ మరియు దృష్టిరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణం గురించి తెలుసుకోవాలి. రేఖలు మరియు కోణాల నుపయోగించి అనేక ఉదాహరణలు ఇవ్వవచ్చు. రేఖాగణితంలోని రాబోవు అధ్యాయాలలో అనేక ముఖ్యమైన ధర్మాలను ఊహించుటకు రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ముందుగా క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకున్న రేఖలు మరియు కోణాలకు సంబంధిచిన పదాలు మరియు నిర్వచనాలను పునర్విమర్శ చేద్దాం.

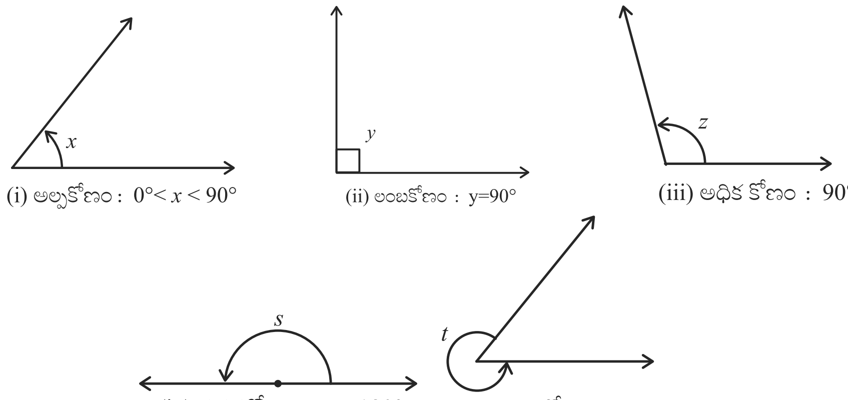
6.2 మూల పదాలు మరియు నిర్వచనాలు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

రెండు చివరి బిందువులు గల ఒక రేఖ యొక్క కొంత భాగమును రేఖాఖండము అనియు ఒక చివరి బిందువు గల రేఖ యొక్క కొంత భాగమును కిరణము అంటారని గుర్తు తెచ్చుకోండి. AB రేఖా ఖండమును $\overline{AB}$ లో సూచిస్తాము మరియు దాని పొడవునం AB లో కిరణమును $\overrightarrow{AB}$ లోను. రేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ లోను సూచిస్తాము. ఏది ఏమైనా మనము. ఈ సంకేతాలను ఉపయోగించము. AB రేఖాఖండము, AB కిరణము, AB పొడవు మరియు AB రేఖ అన్నింటికీ AB గుర్తునే ఉపయోగిస్తాము. సందర్భానుసారంగా అర్థం తెలుస్తుంది. కొన్నిసార్లు రేఖలను సూచించటానికి చిన్న అక్షరాలు l,m,n మొదలగు వాటిని ఉపయోగిస్తారు.

మూడు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉంటే వాటిని ఏకరేఖా స్థితములు అంటారు. ఆవిధంగా లేకపోతే వాటిని ఏకరేఖా స్థితములు కాని బిందువులు అంటారు.

రెండు రేఖలు ఒకే చివరి బిందువు నుండి ఆరంభమైనప్పుడు కోణం ఏర్పడుతుందని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఒక కోణమును ఏర్పరచు కిరణాలను ఆ కోణము యొక్క భుజాలు అనియు చివరిబిందువుని ఆ కోణము యొక్క శీర్షము అనియు అంటారు. క్రిందటి తరగతులలో మీరు అల్పకోణము, లంబకోణము, అధిక కోణము, సరళకోణం మరియు సరళాధిక కోణం వంటి వివిధ రకాల కోణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు. (చిత్రం 6.1చూడండి).



(i) అల్పకోణం : $0° < x < 90°$ (ii) లంబకోణం : $y=90°$ (iii) అధిక కోణం : $90° < z < 180°$

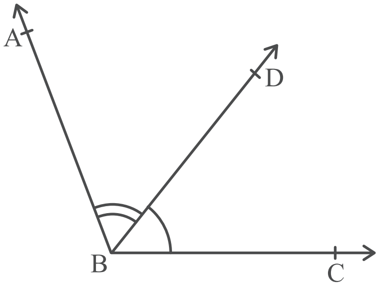
(iv) సరళ కోణం : $s = 180°$ (v) సరళాధిక కోణం: $180° < t < 360°$

చిత్రం : 6.1 కోణాల రకాలు.

ఒక అల్ప కోణం కొలత 0° మరియు 90° మధ్య ఉంటుంది. లంబకోణం ఖచ్చితంగా 90°కి సమానం. 90° కంటే ఎక్కువ మరియు 180° కంటే తక్కువ ఉన్న కోణమును అధిక కోణం అంటారు. ఒక సరళకోణం 180° కి సమానం. 180° కంటే ఎక్కువ మరియు 360° కంటే తక్కువ ఉన్న కోణమును సరళాధిక కోణం అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 90° అయితే, వాటిని పూరకకోణాలు అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 180° అయితే వాటిని పరిపూరక కోణాలు అంటారు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

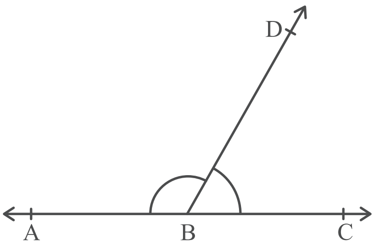
క్రిందటి తరగతులలో మీరు ఆసన్న కోణాల గురించి అధ్యయనం చేశారు (చిత్రం 6.2 చూడండి). రెండు కోణాలు సామాన్యశీర్షము, ఒక సామాన్య భుజము, సామాన్య భుజాలు కాని భుజాలు సామాన్య భుజానికి ఇరువైపుల ఉంటే వాటిని ఆసన్నకోణాలు అంటారు. చిత్రం 6.2లో $\angle ABD$ మరియు $\angle DBC$ లు ఆసన్నకోణాలు. BD కిరణం వాటి సామాన్య భుజం మరియు B బిందువు వాటి సామాన్య శీర్షము. BA మరియు BC కిరణాలు సామాన్యం కాని భుజాలు. అంతేకాక రెండు కోణాలు ఆసన్నకోణాలైతే వాటి మొత్తం, సామాన్యం కాని భుజాలతో ఏర్పడిన కోణానికి సమానం. అందువలన $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ అని రాయవచ్చు.



చిత్రం 6.2 : ఆసన్నకోణాలు

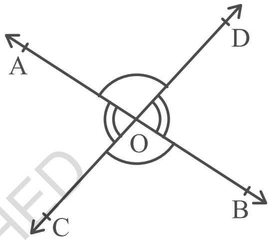
$\angle ABC$ మరియు $\angle ABD$ లు ఆసన్న కోణాలు కాదని గమనించండి. ఎందుకు? ఎందుకంటే సామాన్యం కాని భుజాలు BD మరియు BC లు సామాన్య భుజం BA కి ఒకే వైపున ఉన్నాయి.

చిత్రం 6.2 లో సామాన్యం కాని భుజాలు BA మరియు BC లు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరచిన, అప్పుడు అది చిత్రం 6.3 మాదిరిగా ఉంటుంది ఈ సందర్భంలో ∠ABD మరియు ∠DBC లను సరళయుగ్మం అంటారు.



చిత్రం 6.3 : సరళ యుగ్మాలు

రెండు రేఖలు AB మరియు CD లు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు శీర్షాభిముఖ కోణాలను గుర్తు తెచ్చుకోండి. (చిత్రం 6.4 చూడండి) ఇక్కడ రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలుంటాయి. ఒక జత ∠AOD మరియు ∠BOC. మరొక జతని నీవు కనుగొనగలవా?

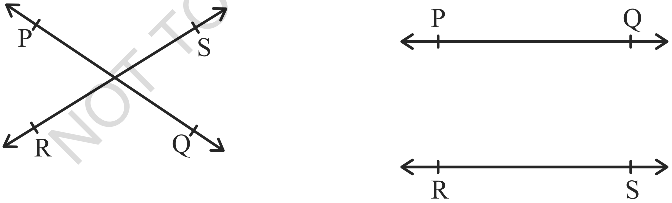


చిత్రం 6.4 : శీర్షాభిముఖ కోణాలు

NOT TO BE REPUBLISHED @KTRS

6.3 ఖండించు రేఖలు మరియు ఖండించుకోని రేఖలు

ఒక కాగితం మీద PQ మరియు RS అను రెండు విభిన్న రేఖలను గీయండి. చిత్రం 6.5 (i) మరియు చిత్రం 6.5 (ii) లలో చూపబడిన విధంగా వాటిని రెండు వేర్వేరు విధాలుగా గీయవచ్చునని తెలుసుకుంటారు.



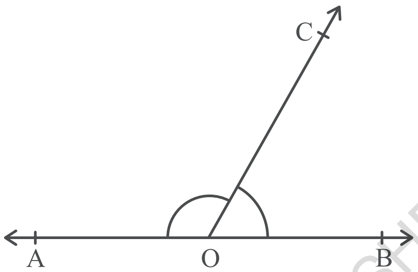
(i) ఖండిచు రేఖలు (ii) ఖండించుకోని (సమాంతర) రేఖలు

చిత్రం 6.5 : రెండు రేఖలను వేర్వేరు విధాలుగా గీయడం

ఒక సరళరేఖను ఇరువైపులా అనంతంగా పొడిగించవచ్చని గుర్తు చేసుకోండి. చిత్రం 6.5 (i) లో PQ మరియు RS లు ఖండించు రేఖలు మరియు చిత్రం 6.5 (ii) లో సమాంతర రేఖలు. ఈ సమాంతర రేఖల మీద విభిన్న బిందువుల వద్ద సామాన్య లంబరేఖల పొడవులు సమానమని గమనించండి ఈ సమాన పొడవును రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యదూరమని అంటారు.

6.4. కోణాల జతలు

6.2 విభాగంలో పూరకకోణాలు, పరిపూరక కోణాలు, ఆసన్నకోణాలు, సరళ యుగ్మం వంటి కొన్ని కోణాల జతల నిర్వచనాలు నేర్చుకున్నారు. ఈ కోణాల మధ్య సంబంధమును గమనించారా? ఇప్పుడు ఒక కిరణము, ఒక సరళరేఖ మీద నిలబడినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. చిత్రం 6.6 లో చూపిన విధంగా ఒక కిరణం, ఒక రేఖ మీద నిలబడినట్లు చిత్రం గీయండి. సరళరేఖను AB అని, కిరణమును OC అని పేర్కొనండి.



చిత్రం 6.6 : సరళయుగ్మాలు

NOT TO BE REPUBLISHED
©KTBS

O బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు ఏవి? అవి $\angle AOC$, $\angle BOC$ మరియు $\angle AOB$ మనము $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ .... (1) అని రాయవచ్చా? అవును! (ఎందుకు? 6.2 విభాగం లోని ఆసన్నకోణాల ను చూడండి) $\angle AOB$ కొలత ఎంత? అది 180° (2) ఉంటుంది. (ఎందుకు)?

పై చర్చ నుండి మనము క్రింది స్వయం సిద్ధమును చెప్పవచ్చు.

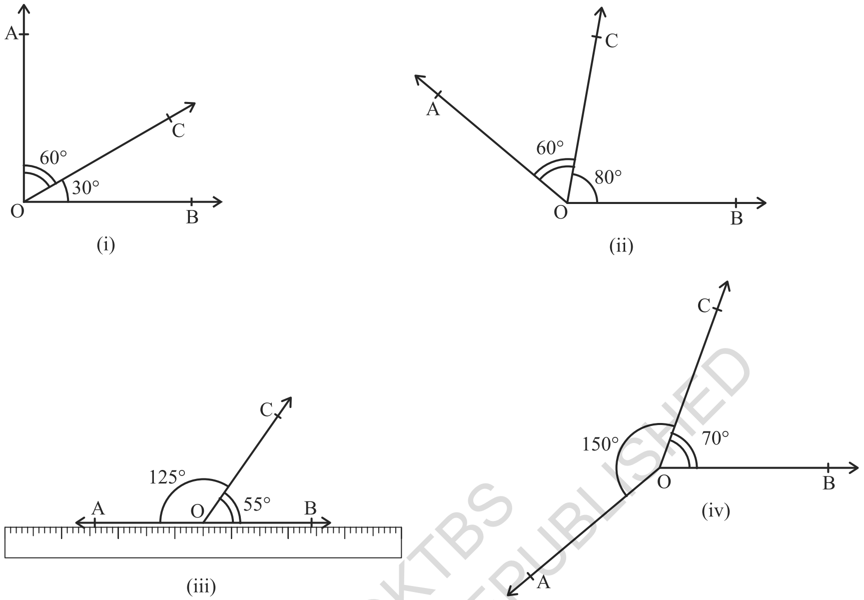
స్వయం సిద్ధం 6.1: ఒక సరళ రేఖ మీద ఒక కిరణం నిలబడితే ఏర్పడిన ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180°.

రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం 180° అయితే, వాటిని సరళ యుగ్మం అంటారని గుర్తు తెచ్చు కోండి. స్వయం సిద్ధ. 6.1 లో ఒక సరళరేఖ మీద ఒక కిరణం నిలబడుతుందని ఇవ్వబడింది. దీని నుండి ఏర్పడిన రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం 180° అని మనము నిర్ధారించాము. స్వయం సిద్ధం 6.1 ని మనం ఇంకొక రకంగా రాయవచ్చా? అంటే స్వయం సిద్ధం 6.1 యొక్క ''నిర్ధారణ''ని ''ఇవ్వబడినది'' గాను ''ఇవ్వబడిన'' దానిని ''నిర్ధారణ''గాను తీసుకుంటే అది క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

(A) రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తం 180° అయితే ఒక కిరణం ఒక సరళరేఖ మీద నిలబడుతుంది. (అంటే సామాన్యం కాని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును)

ఇప్పుడు స్వయం సిద్ధం 6.1 మరియు వ్యాఖ్య (A)లు పరస్పరం విలోమంగా కనిపిస్తున్నాయి. మనము వాటిని ఒకదానికొకటి విపర్యము అంటాము. వ్యాఖ్య (A) సరినా, కాదా అనేది పరీక్షిద్దాం

చిత్రం 6.7లో చూపబడిన విధంగా విభిన్న కొలతలతో ఆసన్న కోణాలను గీయండి. ప్రతి సందర్భంలో స్కేలును సామాన్యం కాని భుజాలలో ఒకదాని వెంబడి ఉంచండి. మరొక సామాన్యం కాని భుజం స్కేలు వెంబడి ఉంటుందా?



చిత్రం : 6.7 విభిన్న కొలతలుగల ఆసన్నకోణాలు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం: 6.7(iii) లో మాత్రమే సామాన్యంకాని భుజాలు రెండూ స్కేలు వెంబడి ఉన్నాయని తెలుస్తుంది. అంటే A, O మరియు B బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉండి OC కిరణం దాని మీద నిలబడింది. అంతేకాక $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ అవుతుంది. దీనినుండి వ్యాఖ్య (A) సరియైనదని నిర్ధారించవచ్చు. కాబట్టి దానిని ఒక స్వయం సిద్ధం రూపంలో క్రిందివిధంగా చెప్పవచ్చు.

స్వయం సిద్ధం 6.2 : రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° అయిన వాటి సామాన్యం కాని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును.

స్పష్టమైన కారణాల వలన పైన ఇవ్వబడిన రెండు స్వయం సిద్ధాలను కలిపి సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం అంటారు.

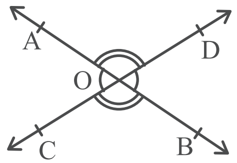
రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించునపుడు ఇది ఏవిధంగా ఉంటుందో పరీక్షిద్దాం.

క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకున్నదాని ప్రకారం రెండు సరళరేఖలు ఖండించినపుడు శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానమని గుర్తుతెచ్చుకోండి. ఈ ఫలితాన్ని మనం ఇపుడు నిరూపిద్దాం.

సాధనకు కావలసిన అంశాలను అనుబంధం – 1 లో చూచి, క్రింద ఇవ్వబడిన సాధనను అధ్యయనం చేసేటపుడు వాటిని మనసులో ఉంచుకోండి.

సిద్ధాంతం 6.1 : రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొంటే శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం

సాధన : పై వ్యాఖ్యలో రెండు సరళ రేఖలు పరస్పరం ఖండించు కొనునని ఇవ్వబడినది. కాబట్టి చిత్రం 6.8 లో చూపబడిన విధంగా AB మరియు CD రేఖలు 'O' వద్ద ఖండించు చున్నని అనుకొనుము. అవి రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలను ఏర్పరచును. అవి (i)$\angle AOC$ మరియు$\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ మరియు $\angle BOC$. మనము $\angle AOC = \angle BOD$ మరియు $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించాలి.



చిత్రం 6.8 : శీర్షాభిముఖ కోణాలు

ఇప్పుడు OA కిరణం CD రేఖ మీద నిలబడింది కాబట్టి

$\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం) .... (1)

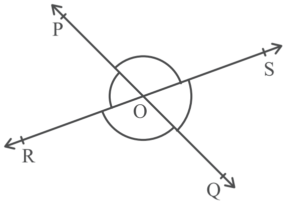
$\angle AOD + \angle BOD = 180°$ అని రాయవచ్చా? అవును! (ఎందుకు?) .... (2)

(1) మరియు (2)ల నుండి $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ అని రాయవచ్చు దాని నుండి $\angle AOC = \angle BOD$ (విభాగం 5.2 స్వయం సిద్ధం 3 చూడండి)

ఇదే విధంగా $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించవచ్చు. ఇప్పుడు సరళ స్వయం సిద్ధ యుగ్మం మరియు సిద్దాంతం 3.1 ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం

ఉదాహరణ 1 : చిత్రం 6.9 లో PQ మరియు RS రేఖలు పరస్పరం 'O' బిందువు వద్ద ఖండించుచున్నాయి.

$\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ అయిన అన్ని కోణాలను కనుగొనండి



చిత్రం 6.9 :

సాధన : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (సరళ యుగ్మం)

కాని $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (ఇవ్వబడినది)

కాబట్టి $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

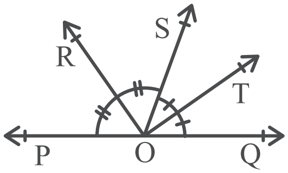
అదేవిధంగా $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఇప్పుడు $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

ఉదాహరణ 2 : చిత్రం 6.10 లో OS కిరణం, POQ రేఖ మీద నిలబడింది. OR కిరణం మరియు OT కిరణాలు క్రమంగా $\angle POS$ మరియు $\angle SOQ$ ల కోణసమద్విఖండన రేఖలు $\angle POS = x$ అయిన $\angle ROT$ ని కనుగొనండి.



చిత్రం 6.10

సాధన : OS కిరణం, POQ రేఖ మీద నిలబడింది

కాబట్టి $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

కాని $\angle POS = x$ కావున

$x + \angle SOQ = 180°$

$\angle SOQ = 180° - x$

OR కిరణం $\angle POS$ ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

కాబట్టి $\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x$

$= \frac{x}{2}$

అదేవిధంగా $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

$= 90° - \frac{x}{2}$

ఇప్పుడు $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

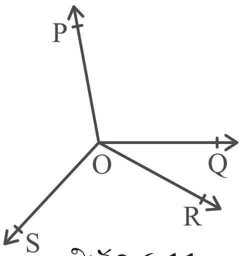
$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

$= 90°$

ఉదాహరణ 3 : చిత్రం 6.11 లో OP, OQ, OR మరియు OS లు నాలుగు కిరణాలు.

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

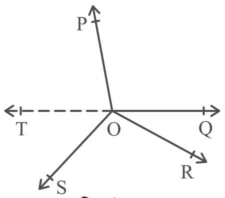
అని నిరూపించండి.



చిత్రం 6.11

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన : చిత్రం 6.11 లో OP, OQ, OR,లేక OS కిరణాలలో ఒకదానిని ఏదైనా ఒక బిందువు వరకు వెనుకకు పొడిగించాలి. OQ కిరణాన్ని T వరకు వెనుకకు పొడిగిద్దాం అప్పుడు TOQ ఒక రేఖ అవుతుంది (చిత్రం 6.12 చూడండి)



చిత్రం 6.12

ఇప్పుడు OP కిరణం TOQ రేఖ మీద నిలబడింది. కాబట్టి

కాబట్టి $\angle TOP + \angle POQ = 180^o$ (1) (సరళ స్వయం సిద్ధయుగ్మం)

ఇదేవిధంగా OS కిరణంTOQ రేఖ మీద నిలబడుతుంది.

కాబట్టి $\angle TOS + \angle SOQ = 180^o$ (2)

కాని $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

(2) నుండి $\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ (3)

(1) మరియు (3) లను కూడగా

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ (4)

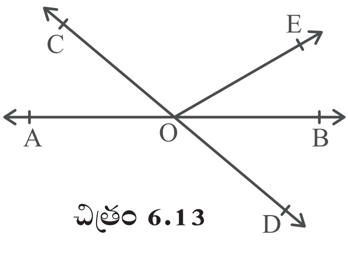
కాని $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

కాబట్టి (4) నుండి

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

అభ్యాసం 6.1

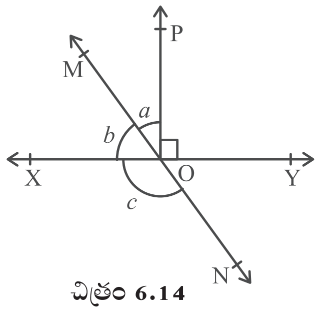
(1) చిత్రం 6.13 లో AB మరియు CD రేఖలు O వద్ద ఖండించి నవి. $\angle AOC + \angle BOE = 70^o$ మరియు $\angle BOD = 40°$ అయిన $\angle BOE$ మరియు సరళాధిక $\angle COE$ లను కనుగొనండి.



చిత్రం 6.13

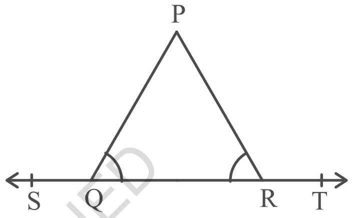
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(2) చిత్రం 6.14 లో XY మరియు MN రేఖలు O వద్ద ఖండించినవి. $\angle POY = 90^\circ$ మరియు $a : b = 2 : 3$ అయిన $\angle C$ ని కనుగొనండి.



చిత్రం 6.14

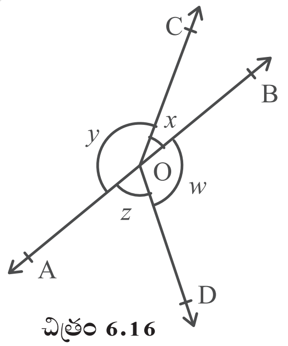
(3) చిత్రం 6.15 లో $\angle PQR = \angle PRQ$ అయిన $\angle PQS = \angle PRT$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం 6.15

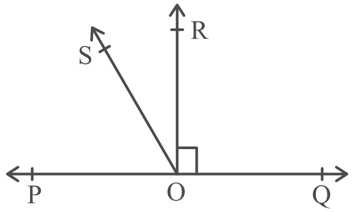
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(4) చిత్రం 6.16 లో $x + y = w + z$ అయిన AOB ఒక సరళరేఖ అని నిరూపించండి.



చిత్రం 6.16

(5) చిత్రం 6.17 లొ POQ ఒక సరళ రేఖ OR కిరణం PQ రేఖకు లంబంగా ఉంది OP మరియు OR కిరణాల మధ్య మరొక కిరణం OS కింది $\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$ అని నిరూపించండి.

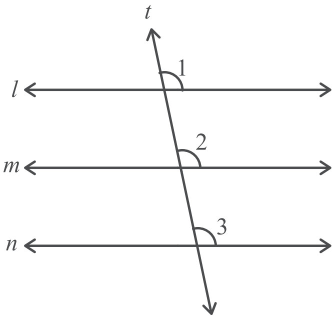


చిత్రం 6.17

(6) $\angle XYZ = 64^\circ$ మరియు XY రేఖ P బిందువు వరకు పొడిగించబడినది ఈ సమాచారానికి ఒక చిత్రం గీయండి YQ కిరణం. $\angle ZYP$ ని సమద్విఖండన చేస్తే $\angle XYQ$ మరియు సరళాధిక $\angle QYP$ లను కనుగొనండి.

6.5 ఒకే రేఖకు సమాంతరంగావున్న రేఖలు

రెండు రేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే అవి ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయా? దానిని పరిశీలిద్దాం చిత్రం 3.23చూడండి. చిత్రంలో రేఖ $m \parallel$ రేఖ l మరియు రేఖ $n \parallel$ రేఖ l



చిత్రం 6.18

l, m మరియు n రేఖలకు తిర్యగ్రేఖ t ని గీద్దాం. రేఖ $m \parallel$ రేఖ l మరియు రేఖ $n \parallel$ రేఖ l అని ఇవ్వబడినది

అందువలన $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 1 = \angle 3$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) అపుడు $\angle 2 = \angle 3$ (ఎందుకు?)

కాని $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం.

కాబట్టి రేఖ $m \parallel$ రేఖ n అని చెప్పవచ్చు

(సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం యొక్క విపర్యం)

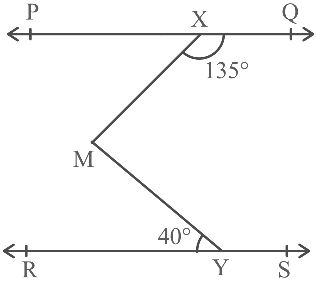
ఈ ఫలితాన్ని క్రింది సిద్దాంతం రూపంలో చెప్పవచ్చు

సిద్ధాంతం 6.5 : ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉండేరేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి

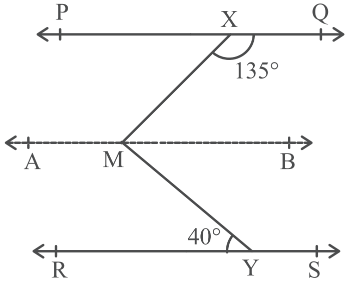
గమనిక : పైన చెప్పబడిన ధర్మం రెండు కంటే ఎక్కువ రేఖలకు కూడా అన్వయించవచ్చు

ఇపుడు సమాంతర రేఖలకు సంబంధిచిన కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం

ఉదాహరణ 4 :చిత్రం 3.24 లో $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135°$, $\angle MYR = 40°$ అయితే $\angle XMY$ ను కనుగొనండి.



చిత్రం 6.19



చిత్రం 6.20

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన : చిత్రం 6.20 లో చూపిన విధంగా M గుండా PQ కి సమాంతరంగా AB రేఖనుగీయండి. ఇప్పుడు AB || PQ మరియు PQ || RS

కాబట్టి AB || RS (ఎందుకు?)

ఇపుడు $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

(AB || PQ , XM తిర్యగ్రేఖకి ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు) **చిత్రం 3.19**

కాని $\angle QXM = 135°$

కావున $135° + \angle XMB = 180°$

$\angle XMB = 45°$ .... (1)

ఇపుడు $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, పర్యాయకోణాలు)

కాబట్టి $\angle BMY = 40°$ .... (2)

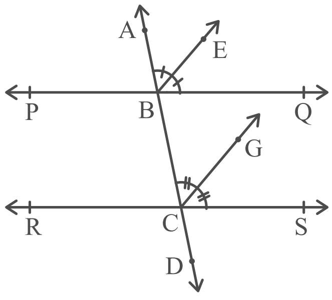
(1) మరియు (2) లను కూడగా

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$

$\angle XMY = 85°$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 5: రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు సదృశ కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు సమాంతరం గా ఉంటే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయని నిరూపించండి.



చిత్రం 6.21

సాధన : చిత్రం 6.21 లో AD తిర్యగ్రేఖ PQ మరియు RS అను రెండు రేఖలను క్రమంగా B మరియు C బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. BE రేఖ $\angle ABQ$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ మరియు CG రేఖ $\angle BCS$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ మరియు BE || CG.

మనము PQ || RS అని నిరూపించాలి.

BE కిరణం $\angle ABQ$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ అని ఇవ్వబడినది.

కాబట్టి $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

ఇదేవిధంగా CG కిరణం, $\angle BCS$ యొక్క సమద్విఖండనరేఖ.

కాబట్టి $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

కాని BE||CG మరియు AD తిర్యగ్రేఖ

కాబట్టి $\angle ABE = \angle BCG$ (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) (3)

(1) మరియు (2) లను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

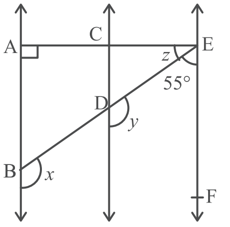
అంటే $\angle ABQ = \angle BCS$

కాని అవి AD తిర్యగ్రేఖ, PQ మరియు RS రేఖలతో ఏర్పడిన సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం కాబట్టి PQ || RS (సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం) విపర్యం

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 6 : చిత్రం 6.22 లో, AB || CD మరియు CD || EF అంతేకాక $EA \perp AB$.

$\angle BEF = 55^{o}$ అయిన x, y మరియు z విలువలు కనుగొనండి.



చిత్రం 6.22

సాధన: $y + 55° = 180°$ (ED తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు)

కాబట్టి $y = 180^{o} - 55^{o} = 125^{o}$

మరల $x = y$ (AB || CD సదృశ కోణాల స్వయం సిద్ధం)

కాబట్టి $x = 125°$

ఇపుడు AB || CD మరియు CD || EF . కాబట్టి AB || EF

కాబట్టి $\angle EAB + \angle FEA = 180°$

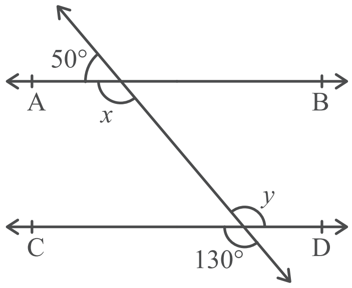
(EA తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు)

$$90° + Z + 55° = 180°$$

$$Z = 35°$$

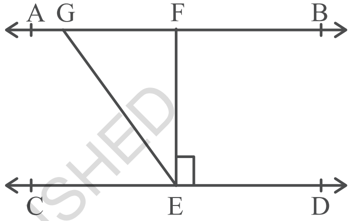
అభ్యాసం 6.2

(1) చిత్రం 6.23లో x మరియు y విలువలను కనుగొని AB || CD అని చూపండి.



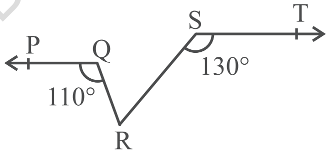
చిత్రం 6.23

(2) చిత్రం 6.24 లో AB || CD, EF ⊥ CD మరియు ∠GED = 126° అయిన ∠AGE, ∠GEF మరియు ∠FGE లను కనుగొనండి.



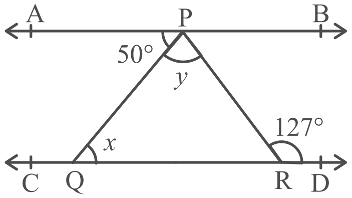
చిత్రం 6.24

(3) చిత్రం 6.25 లో PQ || ST, ∠PQR = 110° మరియు ∠RST = 130° అయిన ∠QRS ని కనుగొనండి (సూచన: ST కి సమాంతరంగా R బిందువు గుండా ఒక రేఖను గీయండి)



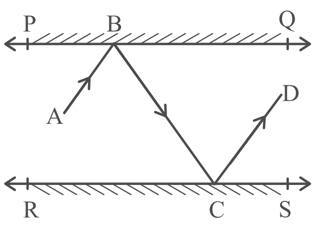
చిత్రం 6.25

(4) చిత్రం 6.26 లో AB || CD, ∠APQ = 50° మరియు ∠PRD = 127° అయిన x మరియు y లను కనుగొనండి.



చిత్రం 6.26

(5) చిత్రం 6.27 లో PQ మరియు RS అను రెండు దర్పణాలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ఒక పతన కిరణం AB , PQ దర్పణమును B వద్ద తాకితే, దాని పరావర్తన కిరణం BC మార్గంలో ప్రయాణించి RS దర్పణమును C వద్ద తాకి మరల CD మార్గంలో వెనుకకు పరావర్తనం చెందుతుంది: AB || CD అని నిరూపించండి.



చిత్రం 6.27

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

6.6 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. ఒక కిరణం, ఒక రేఖ మీద నిలబడితే ఏర్పడిన రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° ఉంటుంది మరియు దీనికి విపర్యంగా కూడా అవుతుంది ఈ ధర్మమును సరళయుగ్మ స్వయం సిద్ధం అంటారు.

2. రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు, శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం.

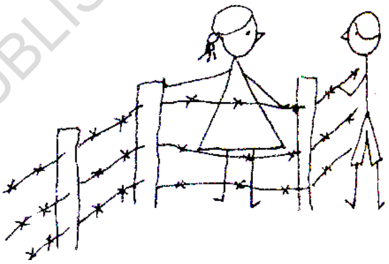
3. ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

అనుబంధం - 1

గణితంలో నిరూపణలు

A 1.1 పరిచయం



మీ స్వంత భూమికి కంచె లేదని అనుకుందాం. మీ ప్రక్కింటివారు ఉన్నట్టుండి ఒక రోజు వారి భూమికి కంచె వేసేస్తారు. వారు మీ భూమి సరిహద్దును దాటి (బౌండరీని) ఆక్రమించుకున్నారని మీకు అనిపిస్తుంది. దీనిని నిరూపించడానికి మీరు ఏం చేస్తారు? బహుశ ఇలా చేయవచ్చు. ఊరి పెద్దలకు మీ ఫిర్యాదు చెప్పి వారివల్ల పరిష్కారం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిస్తారు. అయితే ఊరి పెద్దలలో భిన్నాభిప్రాయాలతో కొందరు మీ పరంగా మరికొందరు మీ ప్రక్కింటివారి పరంగా సమర్థిస్తే మీరేం చేస్తారు.

అందరూ ఒప్పుకొనేటటువంటి సరైన ఆధారాన్ని (ఋజువులు) చూపాలి కదా? దానికోసం ప్రభుత్వం నుండి అధికారికంగా ప్రకటించబడిన సర్వేనక్షను చూపవచ్చు లేదా దానిని న్యాయాలయంలో సమర్పించి వ్యాజ్యంను సెటిల్మెంట్ చేసుకొనవచ్చు.

మరొక విషయం: మీ ఇంటి ఆగస్ట్ 2016 నెల విద్యుత్ బిల్లును మీ అమ్మగారు విద్యుత్ శాఖలో బిల్లు కట్టారు. అయితే వారు సెప్టెంబర్ 2016 బిల్లులో ఆగస్ట్ 2016 నెల బాకి ఉందని చేర్చారు. మీరేం చేస్తారు? ఆగస్ట్ 2016 కు కట్టిన రసీదును చూపించి. బిల్ సరి చేసుకుంటారు కదా? ఇలా కొన్ని విషయాలలో సాధించడానికి సమర్థించడానికి ఇష్టపడకుండా ఊరికే ఉండడం కూడా ఒక్కొక్క సారి జీవితంలో జరుగుతుంది. [దారి ప్రక్కన వస్తువులను కొన్నప్పుడు, అవి బాగా లేకపోవడం మొదలగు వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.]

వీటిని సాధించడానికి ఇబ్బందులు వద్దనిపిస్తుంది. అయితే, గణిత శాస్త్రంలో ఏదైనా ప్రకటన/ ఉక్తి, సత్యము లేదా అసత్యము అని అలాగే ఒప్పుకోలేము. వాటికి

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(Mathematical logic) గణిత తర్కంనకు ఆధారం (ఋజువులు) కావాలి. గణిత తర్కం ఆధారంపై ప్రకటనలను సమర్థించడం లేదా నిరాకరించడం గణితంలో ముఖ్యం. వాస్తవానికి శతాబ్ధాలనుండి గణిత తార్కిక సాధనలు ఉనికిలో ఉన్నాయి. అలాగే, గణితంలోని అన్ని శాఖలకు ఇవి ఆధారస్థంభాలు అయినాయి.

మెసపటోమియా, ఈజిప్ట్, చైనా భారతదేశాల ప్రాచీన నాగరికత అభివృద్ధికి గణితమే ఆధార స్థంభం అయిననూ, ఆకాలం వారు, ఇప్పుడు మనం ఉపయోగిస్తున్న విధానంలోనే నిరూపణలను ఉపయోగించే వారనుటకు ఖచ్చితమైన ఋజువులు లేవు. గణిత శాస్త్రంలో మొదటి 'గణన సాధన' ను ఇచ్చినవారు 'థేల్స్' (**THALES**) అని నమ్మడమేనది. థేల్స్‌గారు గ్రీక్ దేశపు వేదాంతి మరియు గణిత శాస్త్రవేత్త.

ఈ అధ్యాయంలో మనము గణిత ప్రవచనం అంటే ఏమి? వాటిని నిరూపించడానికి తర్కం ఏ విధంగా ఉంటుంది? గణిత సాధనలు ఏమేమి కలిగివుంటాయి అని గమనిస్తాము.

A 1.2. గణిత ప్రవచనములు (Mathematicaly Acceptable Statements)

ఈ అధ్యాయంలో గణతీయంగా స్వీకార్య ప్రవచనం అంటే ఏమిటి? అని వివరించడానికి ప్రయత్నిస్తుంది. ఒక ప్రవచనం అంటే అది ఆ దేశం కాదు, ఆశ్చర్య సూచకవాక్యము కాదు, లేదా ప్రశ్న కూడా కాదు.

ఉదాహరణకు.

(a) మీ వెంట్రుకల రంగు ఏమి? ఒక ప్రశ్నార్థక వాక్యం కాదు?

(b) దయచేసి, నాకు త్రాగడానికి ఒక గ్లాసు నీరు ఇవ్వండి. ఈ వాక్యం వేడుకోవడం లేదా ఆదేశించడమే కాని ప్రవచనం కాదు. అయితే మీ తల వెంట్రుకలు నల్లగా ఉన్నాయి. అనేది ప్రకటన. ఏదైనా ప్రవచనం సామాన్యంగా

- ఎప్పుడూ సత్యమై ఉంటుంది. (సత్యం / అసత్యం
- ఎప్పుడూ అసత్యమై ఉంటుంది (అసత్యం / తప్పు)
- అస్పష్టంగా లేదా సందిగ్ధంగా ఉంటుంది

అస్పష్టం/సందిగ్ధం : అనుటకు కొంచెం ఎక్కువ వివరణ అవసరం. ఒక ప్రవచనం అస్పష్ట/సందిగ్ధం అనిపించడానికి రెండు సన్నివేశాలు కారణమవుతాయి. మొదటి సన్నివేశం ప్రవచనం ఎల్లపుడూ సత్యమో లేక అసత్యమో మనకు నిర్ధారించడం కానప్పుడు, ఉదాహరణకు రేపు గురువారం ఒక సందిగ్ధ ప్రవచనం ఎందుకంటే ఈ ప్రవచనం సత్యమో అసత్యమో అని కావలసినంత సమాచారం లేదు.

రెండవ సన్నివేశం: ఒక ప్రవచనం అస్పష్ట/ సందిగ్ధం చేయడం వ్యక్తి కేంద్రిత అభిప్రాయం / అంశాలతో కూడి ఉంటుంది. ఉదా: "కుక్క బుద్ధివంత జంతువు" ఈ ప్రవచనం కొందరు ఒప్పుకోవచ్చు, కొందరు ఒప్పుకోక పోవచ్చు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 1 : క్రింది ప్రవచనాలను ఎల్లప్పుడూ సత్యం, ఎల్లప్పుడూ అసత్యం లేదా అస్పష్టం అని తెలిపి మీ జవాబును సమర్థించుకోండి.

(i) ఒక వారానికి 8 రోజులు.

(ii) ఇప్పుడు ఇక్కడ వర్షం వస్తూవుంది.

(iii) సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించి, పశ్చిమాన అస్తమిస్తాడు.

(iv) గౌరి కరుణామయి

(v) రెండు బేసి పూర్ణాంకాల గుణలబ్ధం సరి పూర్ణాంకము అవుతుంది.

(vi) రెండు సరిసంఖ్యల గుణలబ్ధం సరిసంఖ్య అవుతుంది.

సాధన :

(i) ఈ ప్రవచనలు ఎల్లప్పుడూ అసత్యం. ఎందుకంటే వారంలో 7 రోజులు ఉంటాయి.

(ii) ఈ ప్రవచన సందిగ్ధం ఎందుకంటే ఇక్కడ అనునది ఎక్కడ అని నిర్ధారితం కాలేదు.

(iii) ఏ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం, ఎందుకంటే దిశలను నిశ్చయించిన తర్వాత మనం ప్రపంచంలో ఎక్కడ ఉన్ననూ, సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించి, పశ్చిమాన అస్తమిస్తాడు.

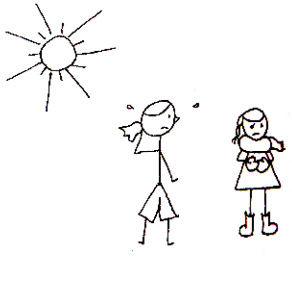
(iv) ఈ ప్రవచనం సందిగ్ధం. ఈ అభిప్రాయం వ్యక్తిగతం. గౌరి కొంతమందికి కరుణామయి. కొంతమందికి కాక పోవచ్చు.

(v) ఈ ప్రవచనం అసత్యం. ఎందుకంటే రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధం సరిసంఖ్యనే అవుతుంది.

(vi) ఈ ప్రవచనం ఎల్లపుడూ సత్యం, ఎందుకంటే సరిసంఖ్యల గుణలబ్ధం సరిసంఖ్యనే అవుతుంది. అయితే ఈ ప్రవచనం సమర్థించడం సదాకాలం సత్యమని నిర్ధారించుటకు కొంచెం పనిచేయవలసి ఉంటుంది. దానిని విభాగం A1.4 లో సమర్థించబడింది.

ప్రారంభంలో ప్రస్తావించినట్లు, నిత్య జీవితంలో ప్రవచనాల చెల్లుబాటు (Validity) గురించి మనం ఎక్కువ జాగ్రత్తతో ప్రవర్తించలేము. దానికి కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం. మనం మాట్లాడేటపుడు ఒకరికొక్కరు ఎలా చెబుతాం. అబ్బా! "ఈ రోజు చాలా ఉక్క పెడుతోంది. చాలా ఎండగా ఉంది"

ఈ ప్రవచనం సందిగ్ధం / అస్పష్టం అని మనకు అనిపించిననూ, సందర్భానుసారంగా దాని గురించి మనం వాదించం. అలాగే ఒప్పుకొనేస్తాం. మన దేశంలోని వేర్వేరు ప్రదేశాలలో నివసించువారికి ఒక నిర్దిష్ట ప్రదేశంలోని వేడి ఎక్కువ అనిపించవచ్చు. లేక అనిపించకపోవచ్చు. కుమావన్ లాంటి చలి ప్రదేశం వారికి అతి వేడి అనిపిస్తే చెన్నైలో నివసించే వారికి అలా అనిపించకుండా వుండవచ్చు. ఎందుకంటే ఇద్దరి వైయక్తిక అనుభవమే ముఖ్యం కదా?



KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అయితే గణిత నిరూపణలు అస్పష్టం / సందిగ్ధంగా ఉండుటకు అవకాశం లేదు. గణితంలో ఒక ప్రవచనం ఒప్పుకో తగినది. లేదా చెల్లుబాటు అగునది. అది సత్యం అయి ఉండవచ్చు. లేదా అసత్యమై ఉండవచ్చు. కాని సందిగ్ధం కానే కూడదు. ఒక ప్రవచనం సత్యం అని పిలవాలంటే అది ఎల్లప్పుడూ (సర్వకాలిక) సత్యమే అయి ఉండాలి. అలా కాకపోతే దానిని అసత్య ప్రవచనం అని అంటాం.

ఉదాహరణకు, $5 + 2 = 7$ అనునది ఎల్లప్పుడూ సత్యం అయితే $5 + 3 = 7$ అనునది అసత్య ప్రవచనం.

ఉదాహరణ 2: ఈ క్రింది ప్రవచనలు సత్యమో లేక అసత్యమో తెలపండి.

(i) త్రిభుజపు అంతరకోణాల మొత్తం $180°$.

(ii) 1' కంటె పెద్దవైన అన్ని బేసి సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు.

(iii) ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య (real number) x కు, $4x + x = 5x$.

(iv) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు, $2x > x$.

(v) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు; $x^2 \geq x$.

(vi) ఒక చతుర్భుజపు అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటే అది ఒక చతుర్భుజం.

సాధన :

(i) ఇది సత్యప్రవచనం, 6వ అధ్యాయంలో దీనిని సాధించారు.

(ii) ఇది అసత్య ప్రవచనం ఎందుకంటే 9 ప్రధాన సంఖ్యకాదు.

(iii) ఇది సత్య ప్రవచనం.

(iv) ఇది అసత్య ప్రవచనం. ఉదాహరణకు $x = -1$ ఐన $2 \times (-1) = -2$ అలాగే $-2 \not> -1$.

(v) ఇది అసత్య ప్రవచనం ఉదాహరణకు $x = \frac{1}{2}$ ఐతే $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ అలాగే $\frac{1}{4} \not> \frac{1}{2}$.

(vi) ఇది అసత్య ప్రవచనం ఎందుకంటే వజ్రాకృతిలో కూడా అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి

ఈ ఉదాహరణల నుండి మీకు అర్థమై ఉండవచ్చు. ఒక ప్రవచనాన్ని గణితంలో అసత్య ప్రవచనం అని చూపడానికి ఒకే ఒక సన్నివేశం / ప్రకరణలో అ ప్రవచనం సత్యావైఎతే చాలు. పై ఉదాహరణ(2)లో 9 ఒక ప్రధాన సంఖ్య కాదు కాబట్టి 1 కంటె పెద్దవైన అన్ని బేసి సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు అనే ప్రవచనం సత్యం కాదని చూపబడింది.

ఒక ప్రవచనాన్ని తిరస్కరించడానికి ఉపయోగపడు ఉదాహరణను ప్రత్యుదాహరణ (Counter-Example) విభాగం A1-5 లో ప్రత్యుదాహరణ గురించి వివరంగా చర్చిద్దాం. ప్రవచనాలు 4, 5, 6 ఇవి అసత్య ప్రవచనాలు, కొన్ని నిభందనలు ఉపయోగించి ఈ ప్రవచనాలను సత్య ప్రవచనాలు చేయవచ్చు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 3: క్రింది ప్రవచనాలు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు తగు నియమములు వినియోగించి, తిరిగి రాయండి.

(i) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు, $2x > x$.

(ii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు, $x^2 \geq x$.

(iii) ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్య చేత భాగిస్తే భాగలబ్ధం '1' అవుతుంది.

(iv) ఒక వృత్తములో ఒక జ్యా వృత్తము పై ఏదైన ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం $90°$

(v) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు సమానమైన అది ఒక చతురస్రం.

సాధన :

(i) $x > 0$ అయినప్పుడు $2x > x$.

(ii) $x \leq 0$ లేదా $x \geq 1$ అయినప్పుడు $x^2 \geq x$.

(iii) 0 (సున్న) తప్ప మిగిలిన సంఖ్యలను అదేసంఖ్యలతో భాగించినప్పుడు లభించు భాగలబ్ధం '1'.

(iv) ఒక వృత్తములో ఒక వృత్త వ్యాసం, వృత్తము పై ఏదైన ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం $90°$

(v) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు, కోణములు సమానమైన అది ఒక చతురస్రం.

అభ్యాసం A 1.1

1. క్రింది వాక్యములు సత్యమో లేక అసత్యమో లేక సందిగ్ధ వాక్యమో తెలియజేస్తూ వివరించండి.

   (i) ఒక సంవత్సరానికి 13 నెలలు

   (ii) దీపావళి పండుగ శుక్రవారం వస్తుంది.

   (iii) మాగడిలో ఉష్ణోగ్రత 26°C.

   (iv) భూమికి గల ఒక ఉపగ్రహం చంద్రుడు.

   (v) కుక్కలు ఎగుర గలవు.

   (vi) ఫిబ్రవరిలో 28 రోజులు మాత్రమే ఉంటాయి.

2. క్రింది ప్రవచనములు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు తగు నియమములు వినియోగించి, తిరిగి రాయండి.

   (i) చతుర్భుజంలో అంతరకోణాల మొత్తం $350°$.

   (ii) ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య x కు $x^2 \geq 0$.

   (iii) రాంబస్ (వజ్రాకృతి) ఒక సమాంతర చతురస్రం.

   (iv) రెండు సరిసంఖ్యల మొత్తం ఒక సరిసంఖ్య

   (v) రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం ఒక బేసి సంఖ్య.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. క్రింది ప్రవచనములు సత్య ప్రవచనములు అగునట్లు తగు నియమములు వినియోగించి, తిరిగి రాయండి.
   (i) అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలు.
   (ii) ఒక వాస్తవ సంఖ్యయొక్క రెండు రెట్లు ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య
   (iii) ఏదైనా x కు, $3x + 1 > 4$.
   (iv) ఏదైనా x కు $x^3 \geq 0$.
   (v) ప్రతి త్రిభుజంలోను మధ్యగతము కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ అగును.

A 1.3. నిగమన నిరూపణ విధానము (Deductive Reasoning)

సందిగ్ధం కానటువంటి ప్రవచనములు, సత్యవిలువలు తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగించు తార్కిక విధానమే నిగమన పద్ధతి. నిగమన పద్ధతి అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది ఫజల్‌ను పరిశీలించండి. మీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడినవి. దానిపై ఒక వైపు ఆంగ్ల అక్షరాలు, రెండవ వైపు అంకెలు కలవు.

A	V	6	5

ఈ కార్డు రచనలో ఒక వైపు సరిసంఖ్య ఉన్న, రెండవ వైపు అచ్చు కలదు. అనే నియమం అలవడించబడినది అనుకొందాం. దీనిని దృఢీకరించడానికి మీరు కనిష్ఠ ఎన్ని కార్డులు తిప్పివెనుక వైపు చూడాలి. మీరు అని కార్డులను మడచి చూడాలనేం లేదు. ఇది మీ ఇష్టం. అయితే, అతి తక్కువ కార్డుల వెనుకవైపు గమనించి తీర్మానించడం మీకు సాధ్యమా?

పై ప్రవచనంలో ఒక వైపు సరిసంఖ్య ఉన్న కార్డు, మరొక వైపు అచ్చు (vowel) ఉంది అనుకోండి. ఐతే కార్డు ఒక వైపు అచ్చు (vowel) , మరొక వైపు సరిసంఖ్య ఉండాలని ప్రవచనంలో లేదు. అందువల్ల అచ్చుగల కార్డు వెనుక వైపు సరిసంఖ్య అయి ఉండవచ్చు కాకపోయి ఉండవచ్చు. కార్డు ఒక వైపు బేసిసంఖ్య ఉంటే మరొక వైపు హల్లు ఉండాలని ప్రవచనములో లేదుకదా.

[A], [V], [6], [5] కనబడునట్టు ఉండే ఈ నాలుగు కార్డులో A గల కార్డు త్రిప్పి చూడాలా? ఖచ్చితంగా లేదు. ఈ కార్డు వెనుక వైపు సరి/బేసి ఏదేని సంఖ్య ఉండవచ్చు.5 ఉన్న కార్డును త్రిప్పి చూడాలా? అవసరం లేదు. ఎందుకంటే ఈ కార్డు వెనుక వైపు ఏదేని అచ్చు హల్లు ఉండవచ్చు.

మీరు [V] మరియు [6] ఈ కార్డుల వెనుక తప్పకుండా చూడాలి. [V] వెనుక సరిసంఖ్య ఉన్నచో ప్రవచన నియమం పాటించలేదా? అదే విధంగా [6] వెనుక హల్లు ఉన్ననూ నియమం పాటించబడినట్టే.

ఈ రకమైన తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా సమస్యను సాధించుటను **నిగమపద్ధతి** అంటారు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ నిగమనం అంటే ముందుగానే ఒప్పుకున్న / నిర్ధారణ చేయబడిన ప్రవచనాన్ని ఆధారం చేసుకొని, ఒక నిర్ధారణకు రావడం నిర్ధారణ/తత్వం ఉదాహరణల పరిశీలన - ఉదాహరణలకు పై కార్యాచరణంలో క్రమబద్ధమైన సిరీస్ నుండి మనం కేవలం V 6 ఈ కార్డుల వెనుక వైపు గమనించడానికి తీర్మానించాము.

నిగమన పద్ధతి కొన్ని ప్రవచనములు నిజమో, కాదో తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును ఎందువలన అంటే మనము సామాన్య నియమము ప్రత్యేక సందర్భములో కూడ సత్యమే. ఉదాహరణకు రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధము బేసి సంఖ్యే అవుతుంది. 70001×134563 ల గుణలబ్ధం బేసి సంఖ్య అని చెప్పినప్పుడు మనము ఆ సంఖ్యలను గుణించకుండానే ఆ వాక్యము నిజమని చెప్పగలము ఎందుకంటే 70001 మరియు 134563 ఈ రెండు బేసి సంఖ్యలు.

నిగమన పద్ధతి అనేక శతాబ్దాలనుండి మానవుని తార్కిక విధానంలో నిగమన పద్ధతి ఒక భాగమైనది. ఉదాహరణకు క్రింది ప్రవచనాలను గమనించండి. "సోలారిస్ విచ్చుకోవాలంటే, విచ్చుకొనే ముందు రోజు ఉష్ణోగ్రత 28°C కంటే ఎక్కువగా ఉండాలి." "2005 సెప్టెంబర్ 15 న కాల్పనిక లోయలో సోలారిస్ పుష్పం విచ్చుకున్నది." ఈ ప్రవచనాలు సత్యమైనవి.

ఇప్పుడు నిగమన పద్ధతిలో కాల్పనికలోయలో 2005 సెప్టెంబర్ 14 నందు ఉష్ణోగ్రత 28°C కంటే ఎక్కువగా ఉన్నదని నిర్ధారించవచ్చు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మన జీవితంలో కొన్ని సంఘటనల పై కూడా మనం సాధారణంగా ఎల్లపుడు హేతు బద్ధంగా ఆలోచించము. మన ఆలోచనలు ఒక్కొక్కసారి నిజం కావచ్చు. లేక తప్పు కూడా కావచ్చు నీ ఫ్రెండ్ నీతో ఒక రోజు మాట్లాడక పోతే, తనకు నీ పై కోపం వచ్చి ఉంటుందని భావిస్తావు. కాని ఆమె తన పని ఒత్తిడిలో ఉన్నందున నీతో మాట్లాడలేక పోవచ్చు. కావున రోజువారీ సంఘటనలపై నీవు వచ్చిన నిర్ధారణలు సరికాని కారణాలు కల్గియున్నాయో లేదా దోషపూరితమా ఎందుకని పరిశీలించరాదు.

అభ్యాసం A 1.2

1. క్రింది ప్రశ్నలను నిగమాను పద్ధతి ద్వారా ఆలోచించి సాధించండి.

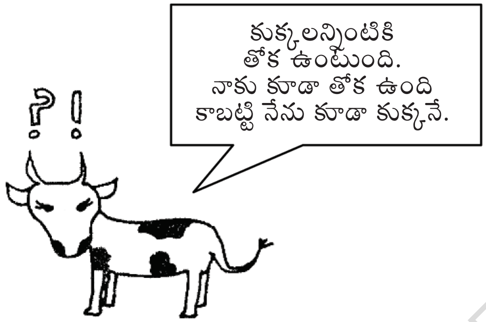
   (i) మానవులు క్షీరదాలు, క్షీరదాలన్నీ సకశేరుకాలు ఈ రెండు ప్రవచనాల నుండి మానవుల గురించి, ఏం చెప్పగలరు.

   (ii) ఆంథోని ఒక మంగలి, దినేశ్ క్షవరం చేయించుకున్నాడు. దినేశ్‌కు ఆంథోని క్షవరంచేశాడని మీరు అనుకుంటున్నారా?

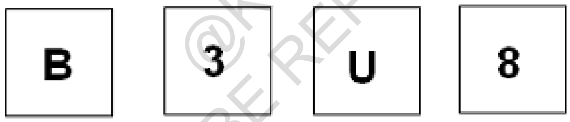
   (iii) అంగారక గ్రహవాసుల నాలుకలు ఎర్రగా ఉంటాయి. గులాగ్ (Gulag) అంగారక గ్రహవాసి. రెండు వాక్యముల నుండి గులాగ్ గురించి ఏమి చెప్పగలవు.

(iv) నాలుగు గంటల కంటే ఎక్కువ సేపు వర్షం పడిన మరుసటి రోజు మురికి కాలువలన్నీ శుభ్రం చేయాలి. ఈ రోజు 6 గంటల కాలం వర్షం కురిసింది. ఈ ప్రవచనాల నుండి మీరు మురికి కాలువల స్థితి గురించి మీరు ఏమంటారు.

(v) క్రింది కార్టూన్ నందు ఇచ్చిన ఆవుయొక్క వివేచన (ఆలోచన)లో గల తప్పును తెల్పండి.



2. మీకిప్పుడు B 3 U 8 అను నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడినవి B U మరొకవైపున సంఖ్యల మరొక వైపు అక్షరాలున్నాయి. అను నియమం కలదు. ఏ రెండు కార్డులను త్రిప్పిన మనం పై నియమము ఉన్నదో, లేదో సరిచూడగలము.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A 1.4. సిద్ధాంతాలు, పరికల్పనలు మరియు స్వీకృతములు

ఇంతవరకు మనం ప్రవచనంల సత్యవిలువలు పరిశీలించు విధానంలు తెలుసుకున్నాము. ఇప్పుడు సిద్ధాంతములు, పరికల్పనలు, భావనలు, స్వీకృతముల మధ్యగల బేదములు తెలుసుకుందాం.

ఇంతకు ముందు సిద్ధాంతంల గురించి మనం తెలుసుకుని ఉన్నాం? సిద్ధాంతం అంటే ఏమిటి? నిరూపించబడిన గణిత ప్రవచనమును సిద్ధాంతము అంటారు. విభాగం A1.5 లో మీరు గమనించినట్టు ఈ క్రింది సిద్ధాంతాలు ఉదాహరణలు అవుతాయి.

సిద్ధాంతము A 1.5 : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0

సిద్ధాంతము A 1.2: రెండు సహజ సరి సంఖ్యల గుణలబ్ధము సరిసంఖ్యయే అవుతుంది.

సిద్ధాంతము A 1.3: మూడు వరుస సహజ సరి సంఖ్యల లబ్ధము 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

పరికల్పనలు అనేవి మనం నిజం అని భావించే వాక్యములు, ఇవి గణిత ప్రవచనములు, అవగాహన, పూర్వానుభవం పై ఆధారపడి ఉన్నాయని చెప్పబడును. ఇవి సత్యాలు కావచ్చు. లేదా అసత్యాలు కావచ్చు. అవి సత్యం అని నిరూపించబడినపుడు వాటిని సిద్ధాంతములు అంటారు. ఇవి గణితంలోగల నమూనాల ద్వారా, ఊహల ద్వారా, భావనలు రూపొందింపబడును. అటువంటి ఉదాహరణలు కొన్ని గమనించండి. ఇపుడు కొన్ని విన్యాసాలను చూద్ధాం. అలాగే తెలివైన నిర్ణయాలను తీసుకోవచ్చు అని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 4: ఏవైనా మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల సంకలనం చేద్దాము.

$$2 + 4 + 6 = 12$$
$$4 + 6 + 8 = 18$$
$$6 + 8 + 10 = 24$$
$$8 + 10 + 12 = 30$$
$$20 + 22 + 24 = 66$$

ఈ మాదిరి లెక్కలలో ఏదైనా విన్యాసము కలదా? వీటి గురించి తీసుకోదగిన ప్రతిపాదన ఏమి?

సాధన : ప్రతిపాదనలు ఇలా ఉండవచ్చు.

(i) మూడు క్రమానుగత సరి సంఖ్యల మొత్తం సరి శంఖ్య అవుతుంది.

(ii) మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల మొత్తం 6 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడును.

ఉదాహరణ 5: పాస్కల్ త్రిభుజం అను పిలువబడు ఈ సంఖ్యల విన్యాసాన్ని తీసుకొందాం.

వరుస		సంఖ్యల మొత్తం
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

ఈ విన్యాసాన్ని గమనించి, ఏ ప్రతిపాదనను 7 మరియు 8 వరుసలలో సంఖ్యల మొత్తం గురించి తెలుపుతారు? 21 వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? 'x' వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తానికి ఒక సరళ సూత్రాన్ని కల్పించగలరా?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన:

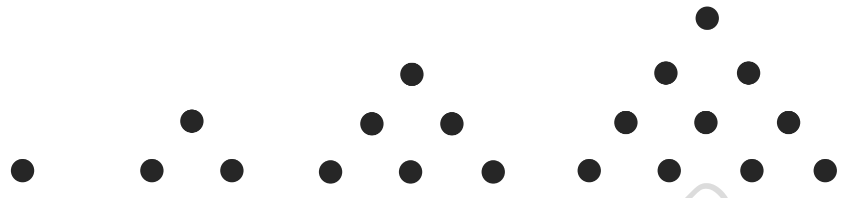
7 వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8 వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2^{21-1} = 2^{20}$

n వ వరుసలో గల సంఖ్యల మొత్తం $= 2^{x-1}$

ఉదాహరణ 6: త్రిభుజ సంఖ్యలు అను పిలువబడు సంఖ్యావిన్యాసంలో T_n ను రాయండి?



T_1 T_2 T_3 T_4

చిత్రం A 1.1

చుక్కలను చేర్చినపుడు త్రిభుజాకారం లభిస్తుంది.

ఇక్కడ $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ .... ఇలా కొనసాగుతుంది.

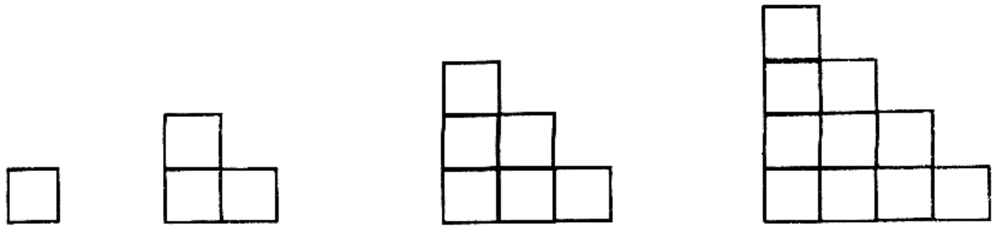
$T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ .... ఇలాగే సాగుతుంది.

$T_5 = ?$ వీటిని మీరు ఊహించగలరా?

$T_6 = ?$, $T_n = ?$

T_n గురించి ఒక ప్రతిపాదన చేయండి.

సమస్యను క్రింది విధ్యాంలో నిర్మిస్తే మీకు సహాయ పడగలదు.



T_1 T_2 T_3 T_4

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

చిత్రం A 1.2

సాధన :

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5\times 6}{2}$$

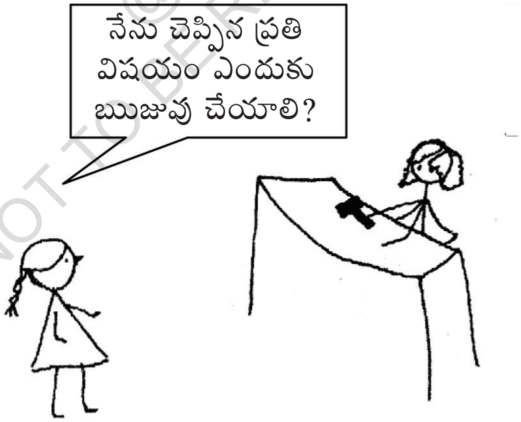
$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6\times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n\times(n+1)}{2}$$

జనప్రియమైన ఒక ప్రతిపాదన ఇప్పటికీ పరిహారం కోసం కాస్తోంది. ఈ ప్రతిపాదన సత్యమా? అసత్యమా? అని పరిపూర్ణంగా ఋజువు కాలేదు. దీనిని క్రిష్టియన్ గోల్డ్ బ్యాచ్ (1690 - 1764) గారు నిరూపించారు. ఈ ప్రతిపాదన ఇలా ఉన్నది. 4 కాని 4 కన్నా పెద్దదైనా ఏదైనా సంపూర్ణాంకము రెండు ప్రధాన సంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చు.

అతని ఈ భావన ఇప్పటివరకు సత్యము, అసత్యము అని ఋజువు కాలేదు. మీరు కనుక సత్యము లేక అసత్యము అని నిరూపించిన అది సిద్ధాంతము అవుతుంది. గణితంలో మనం ప్రతిపాదించే ప్రతిదానిని సాధించాలా? సాధించలేకపోతే ఎందుకు కాలేదు అని మీకు ఆశ్చర్యం కావచ్చు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



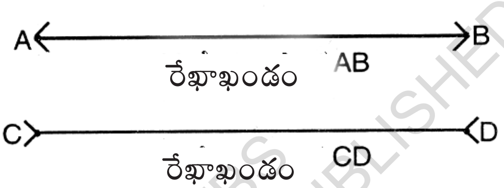
గణితంలో కొన్ని ప్రవచనంలు ఎల్లప్పుడు సత్యంలు అని భావింపబడును, కానీ నిరుపింపబడవు. అవి తమకు తామే సాటి. ఇటువంటి సత్యాలను స్వీకృతములు అంటారు. 5వ అధ్యాయం నందు యూక్లిడ్ స్వీకృతముల గురించి తెలుసుకొని ఉన్నారు.

యూక్లిడ్ యొక్క మొదటి స్వీకృతము : ''ఒక బిందువు నుండి మరొక బిందువుకు ఒకే ఒక సరళరేఖను గీయగలము.''

మూడవ స్వీకృతము : "ఒక బిందువు కేంద్రంగా ఏదైనా వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తంను గీయగలము."

ఇవి నిత్య సత్యాలుగా కనిపించుచున్నవి. వీటిని యూక్లిడ్ సత్యాలుగా గ్రహించాడు. ఎందువల్ల మనం ప్రతిదాన్ని నిరూపించలేము కావున కొన్ని స్వీకృతాలను సత్యాలుగా తీసుకొని వాటి ఆధారంగా మిగిలిన సిద్ధాంతములు, భావనలు నిరూపించవచ్చు. అన్ని ప్రవచనాలను సత్యాలుగా ఎందుకు గ్రహించము అని మీరు ఆశ్చర్య పోవచ్చు. కొన్ని భావనలు ఎల్లప్పుడూ నిజాలు కావు. మనం చూచే బొమ్మలు లేక వరుస క్రమం మనల్ని ఒక్కొక్కసారి మోసం చేస్తాయి. అందుకే మనం సత్యంగా భావించే వాటిని నిరూపించాలి.

"రెండు సంఖ్యలను గుణిస్తే వచ్చు సంఖ్య ఆ సంఖ్యలకన్నా పెద్దది" అను భావన ఎల్లప్పుడూ సత్యం కాదు. ఈ ఉదాహరణ చూడండి. $5 \times 0.2 = 1$ ఇది 5 కంటే చిన్న సంఖ్య



చిత్రం A 1.3

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ రెండు రేఖా ఖండాలలో ఏది పెద్దది.

AB పెద్దదా? అలా కన్పిస్తున్నది కదా అయితే AB, CD లు ఒకే కొలత కలిగినవి. మన దృష్టికి AB పెద్దదిగా కన్పిస్తున్నది. ఈ స్వీకృతాల గురించి మీకు ఇప్పుడు ఆశ్చర్యం కావచ్చు. మన భావనలు చిత్రముల ఆధారంగా కొన్ని మౌళిక సూత్రాలు స్వీకృతాలుగా భావిస్తాము. కానీ అది తప్పు అని కనుక్కొంటే మన స్వీకృతం పనికిరాకుండా పోతుంది మరియు స్వీకృతం తయారు చేయునపుడు తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు.

(i) స్వీకృతములు చిన్నగా ఉండేటట్లు తీసుకోవలెను యూక్లిడ్ ఐదు స్వీకృతాల నుండి కొన్ని వందల సిద్ధాంతాలు నిరూపించబడినవి.

(ii) స్వీకృతం ఎటువంటి విరుద్ధత లేనిదిగా ఉండాలి. ఒక స్వీకృతము ఉపయోగించి, వేరొక స్వీకృతము అసత్యము అని చెప్పినచో దానినివ్యతిరేకత అంటారు.

ప్రవచనము 1 : ఏదైనా పూర్ణాంకము దాని తరువాత వచ్చే పూర్ణాంకంనకు సమానము కాదు.

ప్రవచనము 2 : ఏదైనా పూర్ణాంకము (0) భాగించిన మరలా అదే సంఖ్య వచ్చును. (సున్నాతో భాగహారం సాధ్యం కాదని గుర్తించుకోండి. అది సాధ్యమైన ఏమి జరుగుతుందో గమనిద్ధాం.)

ప్రవచనం 2 లో $\frac{1}{0} = a$, అగునట్లు ఏదేని పూర్ణసంఖ్య 'a' కలదనుకొనిన $1 = 0$ అగును. కానీ ప్రవచనం 1 నుండి ఏ రెండు వరుస పూర్ణాంకములు సమానం కాదు అను ప్రవచనంనకు వ్యతిరికత అవుతుంది. కావున ప్రవచనం 2 తప్పు అగును.

(iii) ఒక అసత్య స్వీకృతం, విరుద్ధమైన భావనకు దారి తీస్తుంది. ఒక ప్రవచనం దాని వ్యతిరేఖ ప్రవచనం రెండు కనుక సత్యములు అయినా అవి విరుద్ధమైన భావన అంటారు.

పై ఉదాహరణలోని రెండు ప్రవచనాలను పరిశీలిద్దాం.

మొదటి ప్రవచనం నుండి మనం $2 \neq 1$ పరీక్షించి చూపవచ్చు. ఇప్పుడు $x^2 - x^2$ పరిశీలిద్దాం. $x^2 - x^2$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి. (రెండు విధాలుగా విభజించవచ్చు)

(i) $x^2 - x^2 = x(x-x)$

(ii) $(x^2 - x^2) = (x+x)(x-x)$ | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ సూత్రాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.

(i) మరియు (ii) ల నుండి $x(x-x) = (x+x)(x-x)$

L.H.S , R.H.S లో $(x-x)$ తీసివేసి రాసిన $x = x + x = 2x$ అంటే $1 = 2$ అని సూచిస్తుంది.

$1=2$ మరియు $1 \neq 2$ రెండూ సత్యములు అని చెప్పబడుచున్నవి. కనుక దీనిని ఒక 'విరోధాభాసం' అంటారు. ఈ విరోధాభాసానికి కారణం ఏమి? ప్రవచనం 2లో పూర్ణాంకాన్ని (0) సున్న చే భాగిస్తే పూర్ణాంకమే వస్తుంది అనుట ఒక స్వీకృతమును తయారు చేయుటకు అనేక భావనలు లోతైన సునిశిత దృష్టి అవసరము. అవి మరే ఇతర వ్యతిరేక భావాలకు దారి తీయకుండా జాగ్రత్త పడాలి. కొన్ని సందర్భాలలో ఈ స్వీకృతములు నూతన భావాలను కనుగొనుటకు ఉపయోగపడాలి. అధ్యాయం 5 లో యూక్లిడ్ 5 వ స్వీకృతము ఎలా యూక్లిడ్ కాని (నాన్ యూక్లిడియన్ జ్యామితి) రేఖా గణితము నవీన రేఖా గణిత మూలానికి కారణమైనది.

స్వీకృతము అనగా నిరూపన అవసరం లేని సత్యప్రవచనములు పరికల్పనలు నిరూపన కానటువంటి గణిత ప్రవచనాలను (అవి సత్యం అయినా కావచ్చు, అసత్యం అయినా కావచ్చు.) సిద్ధాంతముల తార్కికంగా నిరూపన అయినటువంటి ప్రవచనములు అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాం. సిద్ధాంతములు (Theorem), పరికల్పన, (Conjuctive) స్వీకృతములు (Axioms) అంటే ఏమిటి అని స్మరిస్తూ ఈ విభాగాన్ని పూర్తి చేద్దాం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) **స్వీకృతము (Axioms)** : నిరూపన లేకుండానే సత్యంలుగా భావించే గణిత ప్రవచనములను స్వీకృతములు అంటారు.

(ii) **పరికల్పన (Conjectures)** : సత్యంలుగా భావిస్తూ ఇంతవరకు నిరూపింపబడని గణిత ప్రవచనములను పరికల్పనలు అంటాము.

(iii) **సిద్ధాంతము (Theorem)** : నిరూపిపంబడిన గణిత ప్రవచనములను సిద్ధాంతము అంటారు.

అభ్యాసము A 1.3

1. ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరి సంఖ్యల గుణలబ్ధాన్ని కనుగొనండి. ఉదాహరణకు $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ఈ విధంగా ఈ గుణలబ్ధాల అధారంగా మూడు పరికల్పనలను రాయండి.

2. పాస్కల్ త్రిభుజాన్ని గమనించండి.

   వరుస 1 : I = 11^0

   వరుస 2 : I I = 11^1

   వరుస 3 : I 2 I = 11^2

   వీటి ఆధారంగా వరుస 4, వరుస 5 కు పరికల్పనలను రాయండి. ఈ పరికల్పనలు సమర్థనీయమా, పరిశీలించండి? అదే విధంగా వరుస 6 కు అన్వయం అవుతుందో లేదో చూడండి.

3. త్రిభుజ సంఖ్యలను గమనించి (చిత్రం A-1.2) ఏవైనా రెండు క్రమానుగత త్రిభుజ సంఖ్యల మొత్తాన్ని రాయండి?

   ఉదాహరణ: $T_1 + T_2 = 4, T_2 + T_3 = 9, T_3 + T_4 = 16$ అయితే $T_4 + T_5 = ?, T_{x-1} + T_n$కు ఒక పరికల్పన రాయండి.

4. ఈ క్రింది విన్యాసాన్ని గమనించండి.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$ దీని ఆధారంగా

   $\left.\begin{array}{l} 111111^2 \ldots\ldots \\ 1111111^2 \ldots\ldots \end{array}\right\}$ వీటికి పరికల్పన రచించి సరిచూడండి.

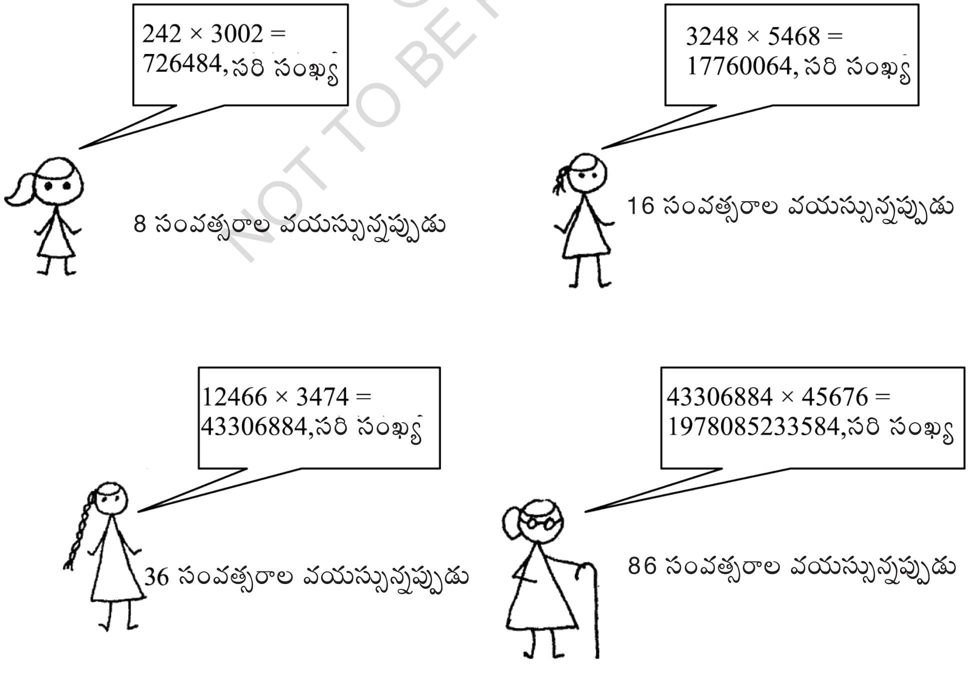
5. ఈ పుస్తకంలో గల ఐదు స్వీకృతాలను పట్టీ చేయండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.5 గణిత నిరూపన అనగానేమి?

గణిత నిరూపనలు తెలుసుకునే ముందు గణిత ప్రవచనములు పరిశీలించండి. ఉదాహరణ 1) రెండు సరి సంఖ్యల గుణలబ్ధం సరి సంఖ్య అవుతుంది అని చూపుటకు మీరు ఏమి చేస్తారు. ఏవైనా రెండు సరిసంఖ్యలు తీసుకొని (24 మరియు 2006 లను) గుణిస్తారు. 24 $\times 2006 = 48144$ జవాబు వస్తుంది. ఇది సరి సంఖ్య. ఇలా అనేక ఉదాహరణలలో సరిచూడవచ్చు.

ఉదాహరణ 2 : తరగతిలో మీకు వేర్వేరు కొలతలుగల వివిధ త్రిభుజాలను గీచి, వాటి కోణాలను కొలవమని చెప్పవచ్చు. పరికరంలో దోషం ఉన్నట్లయితే సుమారుగా మొత్తం 180^0 వచ్చును. అయితే త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° అని చెప్పుతాము. ఈ పద్ధతిలో గల దోషమేమి? సరిచుచుటలో ఎన్ని సమస్యలు ఉండవచ్చు. ఇవి నీవు సత్యం అనుకొని ప్రవచనం రాయుటకు ఉపయోగపడవచ్చు. నా ప్రవచనము అన్ని సందర్భాలలో సత్యం అని నీవు ఖచ్చితంగా చెప్పగలవా? ఉదాహరణకు కొన్ని జతల సరి సంఖ్యల లబ్ధంను కనుగొని, రెండు సరిసంఖ్యల లబ్ధం సరిసంఖ్య అని ఖచ్చితంగా చెప్పగలమా. సరిసంఖ్యలు అనంతాలు, వాటి నన్నింటిని పరీక్షించుట సాధ్యంకాదు. అదే విధంగా కోణాల మొత్తం 180^0 కానివి ఉండవచ్చు. అలా ఏమైనా మీరు చేయడానికి ప్రారంభిస్తే ఈ క్రింది వ్యంగ్య చిత్రంలోని అమ్మాయిలా మీరు కాగలరు.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక్కొక్క సారి సరిచూచుటలో తప్పుకావచ్చు.

ఉదాహరణకు పాస్కల్ త్రిభుజంలోని (అభ్యాసం-A1.3 లోని ప్రశ్న 2) సరి చూశారు. అది $11^5 \Rightarrow 15101051$ అయితే $11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 11^5 = 161051$ అవుతుంది.

కావున మరొక మార్గాన్ని అనుసరించవలసి ఉంటుంది. దీనికి గల వేరే విధానమే సిద్ధాంత నిరూపన. తక్కువ విధానంలో ఇచ్చిన అంశముల ఆధారంగా స్వీకృతముల ఆధారంగా నిరూపించు విధానమే గణితంలో నిరూపనలు.

గణిత ప్రవచనము అసత్యము అని చెప్పుటకు ఒక ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా చెప్పవచ్చు. కొన్ని వేల ఉదాహరణలలో సత్యం అని చెప్పుటకు సరిపోవు. కావున ఒక ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యం అని చెప్పగలము.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యప్రవచనం అని చూపడానికి $(7 + 5) = 12$ అనే ఒకే ఒక ప్రత్యుదాహరణ చాలు కదా!

ఒక గణిత నిరూపనకు కావలసిన అంశాలను పట్టీ చూద్దాము.

(i) ఒక ప్రవచనాన్ని సాధించడానికి ఎలా ముందుకు పోవాలి అనే స్థిరమైన కార్య విధానపు ఆలోచనను కలిగి వుండాలి.

(ii) ప్రతి సిద్ధాంతములోని ముందే ఇవ్వబడిన సమాచారాన్ని స్పష్టంగా అర్థం చేసుకొని ఉపయోగించాలి. ఉదాహరణకు సిద్ధాంతం A1.2 రెండు సరిసంఖ్యల గుణలబ్ధము సరిసంఖ్యనే అవుతుంది. దీనిని చూపడానికి రెండు సహజ సరిసంఖ్యలను తీసుకున్నాం. కావున మనం సరి సంఖ్యల లక్షణాలు ఉపయోగించుకోవాలి.

అధ్యాయం-2లో (బహుపదుల) కారణాంకాల విభజనను సిద్ధాంతములో $p(x)$ అను బహుపదిని ఇచ్చారు. మరియు $p(a) = 0$ అని తెలిపారు. దీనిని ఉపయోగించి మీరు $(x-a)$, $p(x)$ కు ఒక కారణాంకము అని చూపాలి. అలాగే సిద్ధాంతములోని పరికల్పనను ఉపయోగించి. మీరు కొన్ని రచనలను చేయవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° అని చూపడానికి ఏదైనా ఒక భుజానికి, దాని ఎదురు శీర్షము ద్వారా వెళ్ళునట్టు ఒక సమాంతర రేఖను గీయాలి. అలాగే సమాంతర రేఖల లక్షణాలను ఉపయోగించుకొనవలెను.

(iii) నిరూపణ అనేది ప్రవచనముల క్రమము, మనము వ్రాయు ప్రతి ప్రవచనము అంతకు మందు నిరూపించబడిన సిద్ధాంతములు, స్వీకృతములు, పరికల్పనల నుండి తార్కికంగా పొందినది.

(iv) మనం దేనిని నిరూపించాలో లేదా దానికి సంబంధించిన సిద్ధాంతాన్ని సరైన క్రమంలో తగిన పద్ధతిలో నిరూపించాలి. దీనిని అర్థం చేసుకొనుటకు సిద్ధాంతము A 1.1 ను మరియు దాని నిరూపణను విశ్లేషించి నిరూపణ పరిశీలిద్దాం.

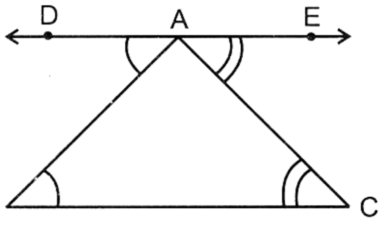
అధ్యాయం 6 లో ఈ సిద్ధాంతాన్ని అధ్యయనం చేశారు. మొదట రేఖా గణిత నిరూపణల గురించి కొన్ని విమర్శలనూ / అభిప్రాయాలను గమనిద్దాం. సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి మనం చిత్రాలపై అనేక సార్లు ఆధార పడతాము మరియు ఇది చాలా ముఖ్యము అయిననూ కూడా నిరూపణ యొక్క ప్రతి ఒక వాక్యము తర్కబద్ధంగా ఉండాలి. తరుచుగా, విద్యార్థులు ఈ విధంగా నిరూపణ చేస్తారు. ఆ రెండు కోణాలు సమానంగా ఉన్నాయి. ఎందుకంటే అవి (కొలతలో) చిత్రంలో సమానంగా ఉన్నట్టు కనబడుతాయి. లేదా రెండు రేఖలూ లంబంగా ఉన్నట్టు కనబడుటచేత వాటి మధ్య కోణము 90° కలదు. చూసినప్పుడు కనబడేది అసత్యం కావచ్చు (జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. చిత్రం A 1.3)

సిద్ధాంతము A 1.1 ను గమనిద్దాం.

సిద్ధాంతము A1.1: ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతరకోణాల మొత్తం 180°.

నిరూపణ : చిత్రం A 1.4 లో ఉన్నట్టు త్రిభుజం ABC ని పరిగణించండి.

మనం $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ అని నిరూపించవలెను .... (1)



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చిత్రం A1.4

A ద్వారా $\overline{BC}$ కి సమాంతరంగా DE రేఖను గీయండి.

DE కి BC సమాంతరంగా ఉన్నది. మరియు
$\overline{AB}$ ఒక తిర్యగ్రేఖ (Transversal) .... (2)

కావున $\angle DAB = \angle ABC$ (ఏకాంతర కోణాలు)

కావున సిద్ధాంతం 6.2, అధ్యాయం - 6 ప్రకారం అవి సమానం.

అంటే $\angle DAB = \angle ABC$ .... (3)

అదే విధంగా $\angle CAE = \angle ACB$ .... (4)

అందువలన $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ .... (5)

అయితే $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ .... (6)

ఎందుకంటే అది ఒక సరళరేఖను కలుగజేస్తాయి.

కావున $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

పై నిరూపణలోని ప్రతి వివరణవెనుక కారణాలు పరిశీలిద్దాం.

దశ 1 : పై సిద్ధాంతము త్రిభుజ ధర్మాలపై ఆధారపడి ఉన్నది. కావున త్రిభుజం ABC తో ప్రారంభిద్దాం.

దశ 2 : సిద్ధాంతములో BC కి సమాంతరంగా DE గీయాలి. నిరూపణకు ఇది చాలా ముఖ్యమైన దశ.

దశ 3 మరియు 4 : మనకు తెలిసిన పూర్వ సిద్ధాంతాల ఆధారంగా ఏకాంతర కోణాలు సదృశ కోణాల ధర్మాల ఆధారంగా $\angle DAE = \angle ABC$ మరియు $\angle CAE = \angle ACB$ అని చెప్పగలం.

దశ 5 : ఒక "సమీకరణమునకు రెండువైపులా సమాన అంశములు కలిపిన ఆ సమీకరణములో మార్పు ఉండదు." అను యూక్లిడ్ సామాన్య భావన ఆధారంగా $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ అని రాశాం.

దీనినుండి త్రిభుజము మూడు కోణాల మొత్తము రేఖీయ కోణముల మొత్తమునకు సమానమని చెప్పబడినది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దశ 6 : అధ్యాయం 6లో సరళ జత రేఖల సీకృతం అంటే సరళ రేఖపై ఒక బిందువులో ఏర్పడిన కోణాల మొత్తం 180° అవుతుంది. అన్వయించండి $D\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}E = 180°$ = అని చూపాం.

దశ 7 : ఏదైనా ఒకదానికి సమానమైన రెండు అంశాలు పరస్పరం సమానంగా ఉంటాయి. దీనిని అన్వయించండి.

కావున $\underline{|ABC} + \underline{|BAC} + \underline{|ACB} = \underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE} = 180°$ దశ-7 లో సిద్ధాంతములో మనం ఏమి నిరూపించాలని ప్రారంభించామో దానిని నిరూపించాం.

సిద్ధాంతము : A 1.2

రెండు సహజ సరి సంఖ్యల మొత్తం సరి సంఖ్యయే అవుతుంది.

నిరూపణ : x మరియు y లను రెండు సరిసంఖ్యలు అనుకుందాం.

xy (x మరియు y ల లబ్దం) సరి సంఖ్యయే అని నిరూపించాలి.

x మరియు y లు సరి సంఖ్యలు కావున అవి 2చే నిశేషంగా భాగించబడతాయి. మరియు వాటి భాగలబ్ధాలు సహజ సంఖ్యలు m మరియు n అనుకుందాం. $\frac{x}{2} = m, x = 2m,$ హాగూ $y/2 = n, y = 2n$ అని చూపాలి. అప్పుడు$xy = 4mn$ ను 2 చే

నిశ్శేషంగా భాగించవచ్చు కావున xy ని 2 చే నిశ్శేషంగా భాగించవచ్చు

$\therefore$ xy సరిసంఖ్య.

సిద్ధాంతం : A 1.3 ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణ లబ్ధం 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించ బడుతుంది.

నిరూపణ: 'n' అను సహజ సంఖ్యకు క్రమాను గత సరిసంఖ్యలు .

$2n, 2n + 2, 2n + 4$ అనుకుందాం..

ఇప్పుడు $(2n) \times (2n + 2) \times (2n + 4)$

$= 2n \times 2 (n + 1) \times 2 (n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n (n + 1) (n + 2)$

$8n (n + 1) (n + 2).$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇక్కడ రెండు అవకాశాలున్నాయి n - సరిసహజ సంఖ్య లేదా n - బేసి సంఖ్య అయి ఉండాలి. మొదట n సరిసంఖ్య అనుకుందాం m సహజ సంఖ్య అయిన $n = 2m$ అనుకుందాం.

(i) లో $n = 2m$ రాద్దాం.

$$2n \times (2n+2)\,(2n+4) = 8(2m)\,(2m+1)\,(2m+2)$$
$$= 16\,m\,(2m+1)\,(2m+2)$$

$2n\,(2n+2)\,(2n+4)$ 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

ఇప్పుడు n బేసి సంఖ్య అనుకుందాం.

n మరొక సహజ సంఖ్య అనుకుందాం.

n బేసి సంఖ్య

$\therefore$ $n+1$ సరిసంఖ్య $n+1 = 2r$ అనుకోందాం.

అప్పుడు $2n\,(2n+2)\,(2n+4) = 8n\,(n+1)\,(n+2)$

$$= 8(2r-1) \times 2r \times (2r+1)$$
$$= 16r\,(2r-1)\,(2r+1)$$

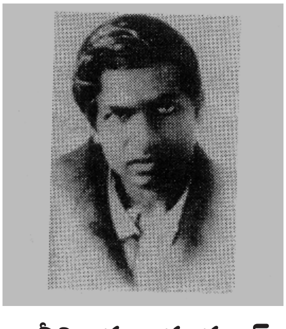
$\therefore$ $2n\,(2n+2)\,(2n+4)$ 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

పై రెండు వివరణల ద్వారా ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణలబ్ధం 16 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. అని నిరూపించబడినది.

గణిత శాస్త్రజ్ఞులు తమ ఫలితాలను ఎలా కనుగొంటారు మరియు వాటికి ఖచ్చితమైన నిరూపణలు ఎలా రాస్తారు వారికి అంతః జ్ఞానముతో ఊహించుట చాలా ముఖ్యము ఒకే విషయాన్ని పలుమార్గాలలో ఉదాహరణలతో తార్కికంగా ఆలోచించి సరైన నిరూపణకు వస్తారు. వారి సృజనాత్మక ఆలోచనలు అన్ని కలిసి నిరూపణలుగా పరిణమిస్తాయి.

మనము నిగమన పద్ధతి, ఆగమన పద్ధతి పై కూడా కొన్ని ఉదాహరణలతో చర్చించడం జరిగింది.

ఇక్కడ మనం ప్రత్యేకంగా చెప్పుకోవలసినది, భారత దేశ ప్రఖ్యాత గణిత మేధావి శ్రీనివాస రామానుజన్‌కు ఉన్నత శ్రేణి సృజనాత్మకమే అతని అనేక ప్రవచనాలు, ప్రవచిస్తే అందులో చాలా ప్రవచనాలు సత్యాలై, నిరూపించబడి ప్రఖ్యాత సిద్ధాంతాలుగా ప్రాచుర్యం పొందాయి..



శ్రీనివాస రామానుజన్

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం – A1.4

1. క్రింది ప్రవచనములను ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా అసత్యములని తెల్పండి.
   (i) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూపకోణాలు సమానమైన, ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు
   (ii) ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని భుజాలు సమానములైన అది చతురస్రం.
   (iii) ఒక చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాలు సమానమైతే అది చతురస్రం.
   (iv) a మరియు b పూర్ణాంకాలకు $\sqrt{a^2 + b^2} = a+b$
   (v) అన్ని పూర్ణాంకాలకు $2n^2 + 11$ ప్రధాన సంక్య అవుతుంది.
   (vi) n ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $n^2 - n + 41$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య
2 మీకిష్టమైన సిద్ధాంతాన్ని ఎన్నుకొని, దాని దత్తాంశాన్ని నిరూపణచేసి, ఉపయోగించుకొన్న స్వీకృతము, సిద్ధాంతము మొదలైన అంశాలను ఉల్లేకించి, A 1.5లో దశలు దశలుగా విశ్లేషించినట్లు విశ్లేషించండి
3. రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధం బేసి సంఖ్యనే అవుతుందని నిరూపించండి.
   (మరపదం : బేసి సంఖ్య $x, x+2$ కానీయండి. ఈ విధంగా)
4. రెండు బేసి సంఖ్యల గుణలబ్ధం బేసి సంఖ్యనే అవుతుందని నిరూపించండి.
5. మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల మొత్తము 6చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుందని నిరూపించండి.
6. $y = 2x$ ఒక సరళరేఖా సమీకరణం అయినప్పుయడు ఆ రేఖపై అసంఖ్యాత బిందువులు గుర్తించబడతాయి.
   [సూచన : n ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $(n, 2n)$ బిందువు అనుకొనుము]
7. మీ స్నేహితుడు ఒకడు అతను మీకు మనసులోని ఒక సంఖ్య అనుకోమని చెబుతాడు తర్వాత కూడు, గుణించు, భాగించు, తీసివేయి, గాలుగింతలు, మొదలగు క్రియలను చెబుతాడు. దానిని నీవు అనుసరించాలి. చివరకు నీవు మనసులో అనుకొన్న సంఖ్య చెబుతాడు ఎలా? అలాంటి ఉదాహరణలు ఇక్కడున్నాయి. అవి ఎలా సరి అని పరీక్షించండి..
   (i) ఒక సంఖ్య ఎన్నుకొనండి, దానిని రెండింతలు చేయండి. తర్వాత 9ని కలపండి మీ మొదటి సంఖ్య కలపండి. 3 చే భాగించి దానికి 4ను కలపండి. మీరు ఎన్నుకొన్న సంఖ్యచే దీనిని తీసివేయండి. మీ వద్ద మిగిలినది7. (మీ జవాబు 7)
   (ii) ఏదైనా మూడంకెల సంఖ్య రాయండి. ఉదాహరణకు 425, దీనినే మరలారాసి 6 అంకెల సంఖ్య చేయండి (425 425) మీ సంఖ్య 7,11,13 ల చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.6 సారాంశము

ఈ అనుబంధంలో క్రింది వాటిని మీరు నేర్చుకున్నారు.

1. గణితంలో ఒక ప్రవచనము ఒప్పుకోవాలంటే అది అన్ని సమయాలలో సత్యం అయి ఉండాలి. లేదా అసత్యం అయివుండాలి.
2. ఒక అసత్య ప్రవచనమును, కేవలం ఒక ప్రత్యుదాహరణతో అసత్యమని చూపవచ్చు.
3. నిరూపణ లేకుండానే సత్యములుగా భావించే గణిత ప్రవచనములను స్వీకృతములు అంటారు.
4. సత్యములుగా భావిస్తూ, ఇంతవరకు నిరూపింపబడని గణిత ప్రవచనములు పరికల్పనలు (ఊహలు) ప్రతిపాదన)
5. నిరూపింపబడిన గణిత ప్రవచనములను సిద్ధాంతములు అంటారు.
6. గణిత ప్రవచనములను తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా నిరూపించుటను నిగమన పద్ధతి అంటారు.
7. నిరూపణ అనేది వరుస క్రమంలో వ్రాయబడిన గణిత ప్రవచనాల సమూహం. ప్రతి గణిత నిరూపణ ఇదివరకే తార్కికంగా నిరూపించబడిన గణిత ప్రవచనం లేదా ఒక సిద్ధాంతం లేదా ఒక స్వీకృతం లేదా ఒక పరికల్పన అయివుంటుంది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

జవాబులు / సూచనలు

అభ్యాసం 1.1

1. అవును, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ మొదలగునవి., హారము q లో ఋణసంఖ్యలను తీసుకొనవచ్చు.
2. 3 మరియు 4 ల మధ్యలో అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. $3 = \frac{21}{6+1}$ అని = $4 = \frac{28}{6+1}$ అని తీసుకుంటే 6 అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$ వస్తాయి.
3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}$, $\frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ కావున. 5 అకరణీయ సంఖ్యలు : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$.
4. (i) అవును (సరి), పూర్ణసంఖ్యలలో అన్ని స్వాభావిక సంఖ్యలు వున్నాయి.
   (ii) తప్పు, ఉదాహరణకు 2 ఒక పూర్ణసంఖ్యకాదు.
   (iii) తప్పు , ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే, పూర్ణసంఖ్యకాదు.

అభ్యాసం 1.2

1. (i) సరి ఎందుకంటే వాస్తవ సంఖ్యలు, కరణీయ మరియు అకరణీయ సంఖ్యలతో కూడి ఉంటాయి.
   (ii) తప్పు, ఏ సహజ సంఖ్యకు ఋణసంఖ్య వర్గముగావుండదు.
   (iii) తప్పు, ఉదాహరణకు, 2 వాస్తవ సంఖ్య అయితే, కరణీయ సంఖ్యకాదు.
2. కాదు. ఉదాహరణకు, $\sqrt{4} = 2$, ఒక అకరణీయ సంఖ్య.
3. చిత్రం 1.8 లో ఇచ్చినట్లు దశలను పునరావర్తనం చేసి. మొదట $\sqrt{4}$, తరువాత $\sqrt{5}$ ల విలువలను కనుగొనండి.

అభ్యాసం 1.3

1. (i) 0.36 అంత్యమగు దశాంశము
   (ii) $0.\overline{09}$ అంత్యముకాని దశాంశము
   (iii) 4.125 అంత్యమగు దశాంశము
   (iv) $0.\overline{230769}$ అంత్యమగు దశాంశము
   (v) $0.\overline{18}$ అంత్యముకాని దశాంశము
   (vi) 0.8225 అంత్యమగు దశాంశము.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

2. $\frac{2}{7} = 2\times\frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3\times\frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4\times\frac{1}{7} = 0.\overline{5714258}$,

$\frac{5}{7} = 5\times\frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 6\times\frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [$x = 0.666......$ అనుకుమటే $10\,x = 6.666......$ లేదా $10\,x = 6 + x$ లేదా $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (ii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [$x = 0.9999......$ అనుకుంటే $10x + 9.9999........$ లేదా $10\,x = 9 + x$ లేదా $x = \frac{9}{9} = 1$

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు 2 యొక్క ఘాతాంకాలు లేదా , 5 యొక్క ఘాతాంకాలు లేదా రెండు..

7. 0.0100100010000 ...., 0.202002000200002.........., 0.003000300003........ .

8. 0.7507500750007500075......, 0.767076700767000767......, 0.80800800080008 ....

9. (i) కరణీయ సంఖ్య (ii) అకరణీయ సంఖ్య,

(iii) అకరణీయ సంఖ్య (iv) అకరణీయ సంఖ్య (v) కరణీయ సంఖ్య

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 1.4

1. (i) కరణీయ సంఖ్య (ii) అకరణీయ సంఖ్య

(iii) అకరణీయ సంఖ్య (iv) కరణీయ సంఖ్య

(v) కరణీయ సంఖ్య

2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6

(iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. వైవిధ్యం కాని మనం కొలతబద్దతో లేదా వేరే పరికరంతో పొడవును కొలిచినపుడు. మనకు సమీప అకరణీయ (బాగలబ్ద) విలువలను పొందుతావంని గమనించండి కావున c కరణీయ సంఖ్యనా లేదా d కరణీయ సంఖ్యనా అని అర్థం కాదు.

4. 1.7 చిత్రాన్ని చూడండి.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

అభ్యాసం 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[125^{-\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

అభ్యాసం 2.1

1. (i) మరియు (ii) ఒక అవ్యక్తపద బహుపది, (v) మూడు అవ్యక్తపదాలు బహుపది.
(iii), (iv) బహుపదులలో ఎందుకంటే అవ్యక్తపదాల ఘాతము పూర్ణ సంఖ్యకాదు.

2. (i) 1 (ii) −1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0.

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (వేర్వేరు సహగుణకాలు గల బహుపదాలను రాయవచ్చు)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) వర్గము (ii) ఘనం (iii) వర్గము (iv) సరళ
(v) సరళ (vi) వర్గము (vii) ఘనం

అభ్యాసం 2.2

1. (i) 3 (ii) −6 (iii) −3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4, (iii) 0, 1, 8 (iv) −1, 0, 3

3. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును (iv) అవును
(v) అవును (vi) అవును
(vi) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ శూన్యం, కాని $\frac{2}{\sqrt{3}}$ శూన్య బహుపదికాదు. (viii) కాదు.

4. (i) − 5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$
(v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-d}{c}$

అభ్యాసం 2.3

1. $(x + 1)$ (i) కారణాంకం (ii), (iii) మరియు (iv) ల కారణాంకం కాదు.

2. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును

3. (i) −2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$

5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$
(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

అభ్యాసం 2.4

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$
(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984.

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$.

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$ (ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12yz+12yz-8xz$ (iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$ (vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $\left(-\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z}\right)\left(-2\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z}\right)$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$

(iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$ (v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 52)\left(9y^2+25z^2-15yz\right)$ (ii) $(4m-7n)\left(16m^2+49m^2+28mn\right)$

11. $(3x + y + z)\left(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz\right)$.

12. కుడిభాగాన్ని సూక్ష్మీకరించండి?

13. $x+y+z=0$ సర్వసమీకరణం VIII లో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు.

14. (i) −1260. A = − 12, b = 7, c = 5 అనుకుందాం. ఇక్కడ $a + b + c = 0$ Q 13 లో జవాబును ఉపయోగించండి.

(ii) 16380

15. (i) ఒక సాధ్యమైన జవాబు: పొడవు = $5a - 3$, వెడల్పు = $5a - 4$

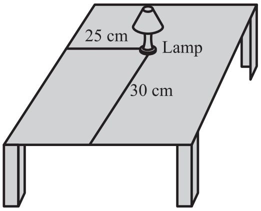
(ii) ఒక సాధ్యమైన జవాబు: పొడవు = $7y - 3$, వెడల్పు = $5y + 4$

16. (i) ఒక సాధ్యమగు జవాబు : 3, x, మరియు $x - 4$.

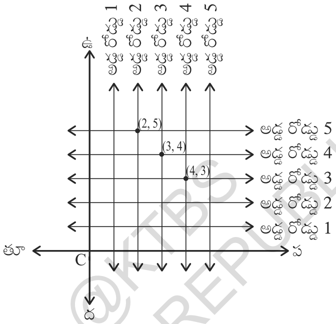
(ii) ఒక సాధ్యమగు జవాబు : $4k$, $3y + 5$. మరియు $y - 1$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 3.1



1. ఒక సమతల బల్లను మరియు ఒక దీపాన్ని తీసుకోండి బల్లపై ఏవైనా రెండు లంభంగావున్న కొనలను ఎన్నుకోండి పొడవైన కొననుండి పొడవును కొలవండి. అది 25 cm వుండాలి చిన్న కొన నుండి దీపం దూరాన్ని కొలవండి అది 30 cm వుండాలి ఇప్పుడు దీపపు నిర్దేశాంకము (25, 30) లేదా (30, 25) అవుతుంది ఇది మీరు ఏ బిందువును మూల బిందువుగా తీసుకుంటారో దానిపై ఆధారపడి వుంటుంది.
2. కింద ఇచ్చిన చిత్రంలో ఒక వీధి ప్రణాళిక (ప్లాన్) ను చూపించారు.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

క్రాస్ రోడ్డు మరియు రెండు వీధులను చిత్రంలో గుర్తించారు. రెండు రేఖలను ఆధారంగా చేసుకొని ప్రతి బిందువును ప్రత్యేకంగా గుర్తించడానికి సాధ్యమైనది.

అభ్యాసం 3.2

1. (i) x – అక్షం మరియు y – అక్షం (ii)చతుర్థాంశాలు (iii)మూల బింధువు.
2. (i) $(-5, 2)$ (ii) $(5, -5)$ (iii) E (iv) G
   (v) 6 (vi) -3 (vii) $(0, 5)$ (viii) $(-3, 0)$

అభ్యాసం 4.1

1. $x - 2y = 0$
2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0$; $a = 2$, $b = 3$, $c = -9.3\overline{5}$

   (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$; $a = 1$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = -10$

   (iii) $-2x + 3y - 6 = 0$; $a = -2$, $b = 3$, $c = -6$

   (iv) $1.x - 3y + 0 = 0$; $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$

   (v) $2x + 5y + 0 = 0$; $a = 2$, $b = 5$, $c = 0$.

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0$; $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$

(vii) $0 . x + 1.y - 2 = 0$; $a = 0$, $b = 1$, $c = -2$
(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0$; $a = -2$, $b = 0$, $c = 5$.

అభ్యాసం 4.2

1. (iii) ఎందుకంటే x యొక్క ఏదైనా విలువకు అనుగుణంగా y విలువ వుంటుంది మరియు ప్రతి క్రమంగా.

2. (i) (0,7), (1,5), (2,3), (4,–1). (ii) $(1, 9-\pi)$, $(0, 9)$, $(-1, 9+\pi)$, $\left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) (0, 0), (4, 1), (–4, 1), $(2, \frac{1}{2})$

3. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును (iv) కాదు (v) కాదు.

అభ్యాసం 5.1

1. (i) తప్పు. దీనిని విద్యార్థి చూసి గ్రహించవచ్చు

(ii) తప్పు 5.1 నిబంధనకు వైరుధ్యం కలిగినది.

(iii) సరి. (ఆధార ప్రతిజ్ఞ 2)

(iv) సరి. ఒక వృత్తాన్ని మరొక వృత్తంపై ఉంచినప్పుడు అవి చేరుకుంటాయి అలాగే వాటి కేంద్రం మరియు పరిధి ఒక దానికొకటి చేరుకుంటాయి. కావున వ్యాసార్థం కూడా చేరుకోవాలి.

(v) సరి యూక్లిడ్ మొదటి స్వీకృత సిద్ధాంతం

3. వీటిలో విద్యార్థులు పట్టీ చేయగల నిర్వచించని పదాలు చాలా ఉన్నాయి వాటిలో ఎక్కువ స్థిరతను కలిగి వున్నాయి ఎందుకంటే అవి రెండు వేర్వేరు సందర్భాలను తెలుపుతాయి.

(i) A మరియు B రెండూ ఇచ్చిన రేఖపై రెండు బిందువులు C బిందువు కూడా ఆ రేఖపై రెండు బిందువుల మధ్య ఉండాలి.

(ii) A మరియు B లు ఇచ్చిన రేఖపై రెండు బిందువులు C బిందువు AB ని చేర్చే సరళరేఖ పై లేని బిందువు. ఈ స్వీకృతులు యూక్లిడ్ స్వీకృతులను పాటించవు అయితే అవి స్వయం స్వీకృతాలు 5.1 ని పాటిస్తాయి.

4. AC = BC

AC + AC = BC + AC (సమాంతర ఉన్నవాటిని కలిపారు)

2 AC = AB [BC + AC ,AB సరళరేఖ] కావున $AC = \frac{1}{2} AB$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

5. AB సరల రేఖ మధ్యబిందువులు C మరియు D లు అనుకుందాం ఇపుడు మీరు C మరియు D రెండూ వేర్వేరు బిందువులు కాదని చూపవచ్చు.

6. AC = BD (దత్తాంశం) .... (1)

AC = AB + BC (B బిందువు A మరియు C బిందువుల మధ్య కలదు) .... (2)

BD = BC + CD (C బిందువు B మరియు D బిందువుల మధ్యకలదు) .... (3)

(2) మరియు (3) ను (1) ప్రతిక్షేపిస్తే,

AB + BC = BC + CD

AB = CD (సమానాలను రెండు వైపులా తీసివేయగా)

7. ఇది ప్రపంచంలోని ఏ భాగంలో నైనా సరైనది కాబట్టి ఇది విశ్వవ్యాప్తమైన సత్యం

అభ్యాసం 6.1

1. 30°, 250° 2. 126°

4. ఒక బిందువు యొక్క అన్ని కోణాలు = 360°

5. $\angle$ QOS = $\angle$ SOR + $\angle$ ROQ మరియు $\angle$ POS = $\angle$ POR – $\angle$ SOR.

6. 122°, 302°

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 6.2

1. 130°, 130° 2.126°, 36°, 54° 3.60° 4.50°, 77°

5. పతన కోణము పరావర్తన కోణానికి సమానం . B బిందువు వద్ద BE $\perp$ PQ ని గీయండి. మరియు C బింధువు వద్ద CF $\perp$ RS ను గీయండి

అభ్యాసం A 1.1

1. (i) తప్పు ఒక సంవత్సరానికి 12 నెలలు

(ii) సందిగ్ధం (దత్త సంవత్సరంలో దీపావళి శుక్రవారము రోజు రావచ్చు, రాకపోవచ్చు.

(iii) సందిగ్ధం సం లో ఒక్కోసారి మాగడిలో ఉష్ణోగ్రతా 26°c ఉండవచ్చు.

(iv) ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

(v) తప్పు కుక్కలు ఎగర లేవు.

(vi) సందిగ్ధం లేపు సంవత్సరం లో ఫిబ్రవరి 29 రోజులు ఉంటాయి.

2. (i) తప్పు. చతుర్భుజపు ఆంతర్ కోణాల మొత్తం 360.

(ii) సరి, (iii) సరి (iv) సరి (v) తప్పు ఉదాహరణకు 7 + 5 = 12 చేసి సంఖ్యకాదు.

3. (i)2 కంటే పెద్దవైన ప్రధాన సంఖ్యలన్ని తీసి సంఖ్యతో

(ii) రెండింతల స్వాభావిక సంఖ్య ఎల్లపుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది

(iii) ఏ $x > 1$ $3x + 1 > 4$

(iv) ఏ $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$.

(v) సమబాహు త్రిభుజంలో ఒక మద్యరేక కోణ సమద్విఖండన రేఖ అయి వుంటుంది.

అబ్యాసం A 1.2

1. (i) మనుషులు సకశేరుకాలు.

(ii) లేదు దినేశ్ వేరే ఎవరి చేతనైననూ క్షౌవరం చేయించుకొని ఉండవచ్చు.

(iii) గులాగ్ ఎర్రని నాలుకను కలిగి ఉన్నాడు.

(iv) మురికి కాలువలను రేపు శుభ్రపరచాలని నిర్ణయించుకున్నాము

(v) తోకలు కలిగిన జంతువులు కుక్కలే కానవసరం లేదు ఎనుము , కోతి, పిల్లి, మొదలగునవి. ప్రాణులకు తోక కలదు ఐతే అవన్ని కుక్కలు కాదు.

2. మీరు B మరియు 8 ని త్రిప్పిచూడాలి .'B' వెనుక పరిసంఖ్యవుంటే ఆప్పుడు నియమ భంగం అవుతుంది అదే విధంగా 8 వెనుక హల్లులు వుంటే ఆప్పుడు నియమ భంగం అవుతుంది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం A 1.3

3. సాధ్యమయ్యే ముందు అభిప్రాయాలు

(i) ఏ దేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణ లబ్ధం సరిసంఖ్యే అవుతుంది.

(ii) ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణలబ్దము ఆరు చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

(iii) ఏదేని మూడు క్రమానుగత సరిసంఖ్యల గుణలబ్దము ఆరు చే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది

2. ఫంక్తి4 : $1331 = 11^3$ ఫంక్తి 5 : $14\ 641 = 11^4$

ఫంక్తి 4 మరియు 5 ఫంక్తి కి ప్రదిపాదనలు మ్యాచ్ అవుతాయి.

6 = 15101051 $11^5 \neq 15101051$ ($11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 1500051$)

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$, $T_{n-1} + T_n = n^2$

4. $111111^2 = 12345654321$ $1111111^2 = 1234567654321$.

5. విద్యార్థుల చే జవాబులు ఉదాహరణకు యూక్లిడ్ యొక్కస్వీకృతాలు.

అభ్యాసం A 1.4

1. (i) సమానం కోణాలు కలిగిన ఏవైనారెండు త్రిభుజాల భుజాల కొలతలు వేర్వేరుగా ఉండవచ్చు.
   (ii) వజ్రాకృతి లోని భుజాల కొలతలు పరస్పరం. సమానంగా ఉంటాయి. అయితే, అది చతురస్రం కాదు.
   (iii) దీర్ఘచతురస్రపు అంతరకోణాలు సమానంగా ఉంటాయి అయితే అది చతురస్రం కాదు.
   (iv) $a = 3, b = 4$ అయినప్పుడు ప్రకటన సత్యం కాదు.
   (v) $n = 11$ అయినప్పుడు $2n^2 + 11 = 253$, ప్రధాన సంఖ్య కాదు.
   (vi) $n = 41$ అయితే $n^2 - n + 41$ ప్రధాన సంఖ్య కాదు.
2. విద్యార్థుల సొంత జవాబులు
3. x మరియు y లను వేసి సంఖ్యలు అనుకుందాం తరువాత.
   $x = 2m + 1$ కొన్ని స్వాభావిక m కు మరియు $y = 2n + 1$ కొన్ని సహజసంఖ్యలు n
   $x + y = 2 (m + n + 1)$ కావున అందువలన $x + y$ 2 చే విశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది. కావున అది సరిసంఖ్య
4. ప్రశ్న 3. చూడండి. $x = (2m + 1)$ $y = (2n + 1)$
   $xy = (2m + 1) (2n +1) = 2 (2mn + m + n) + 1$ అందువలన xy 2 చే భాగించబడదు మరియు అది బేసిసంఖ్య
5. $2n$, $2n + 2$ మరియు $2n + 4$ అను మూడు క్రమానుగత సంఖ్యలు ఆనుకుందాం వాటి మొత్తము $6 (n + 1)$ ఇది 6 చే భాగించబడుతుంది.
7. (i) మూల సంఖ్య 'n' అనుకుందాం ఇప్పుడు క్రింది క్రియలను చేద్దాము.

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow 2n+9+n = 3n+9$$

$$\rightarrow 3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n+3 \rightarrow$$

$$\rightarrow n+3+4 = 7 \rightarrow n+7-n = 7$$

   (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ను గమనించండి మూడంకెల సంఖ్య $a.b.c$ అనుకొండి అప్పుడు $1001 \times abc = abcabc$ అవుతుంది కావున ఆరెంకెల సంఖ్య $abcabc$ 7, 11, 13 చే విశేషంగా భాగించ బడుతుంది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED