कर्नाटक सरकार

गणित प्रकाश

इयत्ता 6 वी साठी गणित पाठ्यपुस्तक

MARATHI MEDIUM



SIXTH STANDARD

मराठी माध्यम

भाग - 2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विद्यया ऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003

अनुक्रमणिका

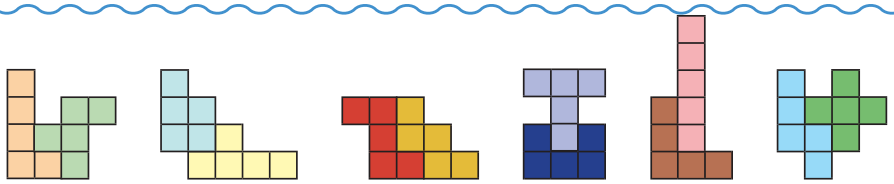
H7N4G8

भाग - 2

अ.नं.	प्रकरण	पृष्ठ क्रमांक
6	परिमिती आणि क्षेत्रफळ	01
7	अपूर्णांक	22
8	रचनेसह खेळ	56
9	सममिती	85
10	शून्याची दुसरी बाजू	108
	अध्ययन साहित्यासाठी पाने	136

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रकरण - 6



परिमिती आणि क्षेत्रफळ
(PERIMETER AND AREA)

L1L5N7

6.1 परिमिती

एका बंदिस्त समतल आकृतीची परिमिती तुम्हाला आठवत आहे का? चला आपले आकलन जागृत करुया.

जेव्हा तुम्ही कोणत्याही बंदिस्त समतल आकृतीभोवती चालत एक फेरी पूर्ण करता तेव्हा तिच्या सीमा रेषेवरून तुम्ही आक्रमिलेले अंतर म्हणजेच त्या आकृतीची परिमिती होय. रेषाखंडानी बनलेल्या एका समतल बंदिस्त आकृतीची म्हणजेच **बहुभुजाकृती**ची परिमिती ही तिच्या सर्व बाजूंच्या लांबीची बेरीज होय. म्हणजेच तिच्या परिसीमेचे एकूण अंतर होय.

एका बहुभुजाकृतीची परिमिती = तिच्या सर्व बाजूंच्या लांबीची बेरीज

चला, आपण आता आयतांच्या, चौरसांच्या आणि त्रिकोणांच्या परिमितीच्या सूत्रांची उजळणी करुया.

आयताची परिमिती

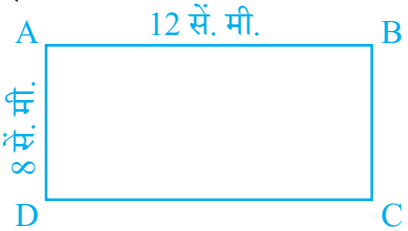
लांबी आणि रुंदी ही अनुक्रमे 12 सें. मी. आणि 8 सें. मी. असणाऱ्या एका ABCD आयताचा विचार करु. त्याची परिमिती किती आहे?

आयताची परिमिती = त्याच्या चार बाजूंच्या लांबीची बेरीज

= AB + BC + CD + DA

= AB + BC + AB + BC

= 2 × AB + 2 × BC



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$= 2 \times (AB + BC)$

$= 2 \times (12 \text{ सें.मी.} + 8 \text{ सें. मी.})$

$= 2 \times 20 \text{ सें. मी.}$

$= 40 \text{ सें. मी.}$

आयताच्या संमुख बाजू नेहमी समान असतात. म्हणून AB = CD आणि AD = BC

या उदाहरणावरुन आम्हाला असे दिसून येते की

आयताची परिमिती = लांबी + रुंदी + लांबी + रुंदी

आयताची परिमिती = 2 × (लांबी + रुंदी) आयताची परिमिती ही त्यांच्या लांबी आणि रुंदीच्या बेरजेच्या दुप्पट असते.

चौरसाची परिमिती

1 मी.



दिबोजीतला 1 मी. बाजू असणाऱ्या एका चौरसाकार फोटोच्या फ्रेमला सभोवताली रंगीत टेप लावायची आहे. त्याला आवश्यक असणाऱ्या रंगीत टेपची लांबी किती असेल? म्हणून दिबोजीतला चौरसाकार फोटोच्या फ्रेमला सभोवताली रंगीत टेप लावण्यासाठी त्या फोटो फ्रेमची परिमिती काढणे गरजेचे आहे.

अशाप्रकारे लागणाऱ्या टेपची लांबी = चौरसाची परिमिती

= चौरसाच्या सर्व चार बाजूंच्या लांबीची बेरीज

= 1 मी. + 1 मी. + 1 मी. + 1 मी.

= 4 मी.

आता आपल्याला माहित आहे की, चौरसाच्या सर्व चार बाजू समान लांबीच्या आहेत. म्हणून प्रत्येक बाजूची लांबी मिळविण्याऐवजी आम्ही एका बाजूच्या लांबीला 4 ने गुणू शकतो.

अशाप्रकारे आवश्यक असलेल्या टेपची लांबी = 4 x 1 मी. = 4 मी.

या उदाहरणावरुन आम्हाला असे दिसून येते की,

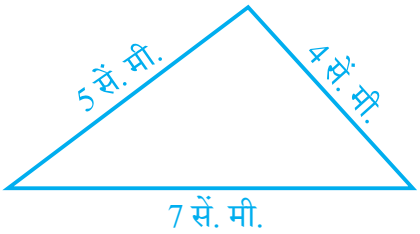
चौरसाची परिमिती = 4 x एका बाजूची लांबी

चौरसाची परिमिती ही त्याच्या बाजूच्या लांबीच्या चारपट असते.

© KSTB NOT TO BE REPUBLISHED

त्रिकोणाची परिमिती

दिलेल्या तीन बाजूंची लांबी 4 सें. मी., 5 सें. मी. आणि 7 सें.मी. असणाऱ्या एका त्रिकोणाचा विचार करु.



त्रिकोणाची परिमिती = 4 सें. मी. + 5 सें. मी. + 7 सें. मी.

= 16 सें. मी.

त्रिकोणाची परिमिती = त्याच्या तीन बाजूंच्या लांबीची बेरीज

उदाहरण : अक्षीला 3 मी. लांब आणि 2 मी. रुंदी असलेल्या एका आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाला सभोवताली नक्षीची झालर लावायची आहे. तर आवश्यक असलेल्या नक्षीदार झालरची लांबी काढा.

उकल : आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाची लांबी = 3 मी.

आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाची रुंदी = 2 मी.



अक्षीला टेबलाच्या आच्छादनाच्या सभोवताली नक्षीची झालर लावायची आहे.

म्हणून आवश्यक असणाऱ्या नक्षीदार झालरची लांबी ही आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाची परिमिती असू शकते.

आता आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाची परिमिती = 2 x (लांबी + रुंदी)

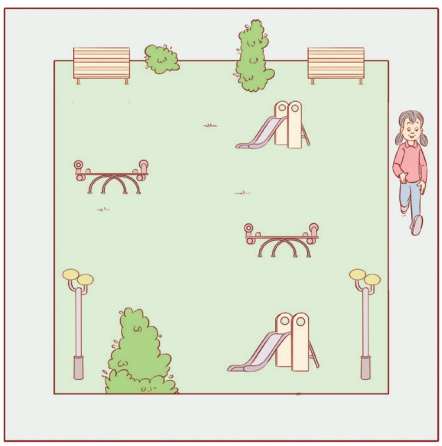
= 2 x (3 मी. +2 मी.)

= 2 x 5 मी.

= 10 मी.

म्हणून आवश्यक असलेल्या नक्षीदार झालरची लांबी 10 मी. आहे.

उदाहरण: जर उषाला 75 मी. लांबी असलेल्या एका चौरसाकृती उद्यानाला सभोवताली तीन फेरे मारायचे असतील तर तिने आक्रमिलेले अंतर काढा.



उकल :

चौरसाकृती उद्यानाची परिमिती = 4 x एका बाजूची लांबी

= 4 x 75 मी.

= 300 मी.

उषाने एका फेरीत आक्रमिलेले अंतर = 300 मी.

म्हणून उषाने तीन फेऱ्यांमध्ये आक्रमिलेले एकूण अंतर

3 x 300 मी. = 900 मी.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

1) गाळलेली पदे शोधा.

   a) आयताची परिमिती = 14 सें.मी., रुंदी = 2 सें.मी., लांबी =?

   b) चौरसाची परिमिती = 20 सें.मी., एका बाजूची लांबी =?

   c) आयताची परिमिती = 12 मी., लांबी = 3 मी., रुंदी =?

2) 5 सें. मी. आणि 3 सें. मी. बाजूंची लांबी असलेला एक आयत एका तारेच्या तुकड्याचा उपयोग करून बनविला आहे. जर ती तार सरळ केली आणि नंतर वाकवून चौरस रुप देण्यात आले तर चौरसाच्या एका बाजूची लांबी किती असेल?

3) परिमिती 55 सें. मी. असणाऱ्या आणि दोन बाजूंची लांबी ही अनुक्रमे 20 सें.मी. आणि 14 सें.मी. असलेल्या एका त्रिकोणाची तिसरी बाजू काढा.

4) लांबी 150 मी. आणि 120 मी. रुंदी असणाऱ्या एका आयताकार उद्यानाला ₹40 दर मीटर प्रमाणे कुंपण घालण्यासाठी कुंपणाचा किती खर्च होईल?

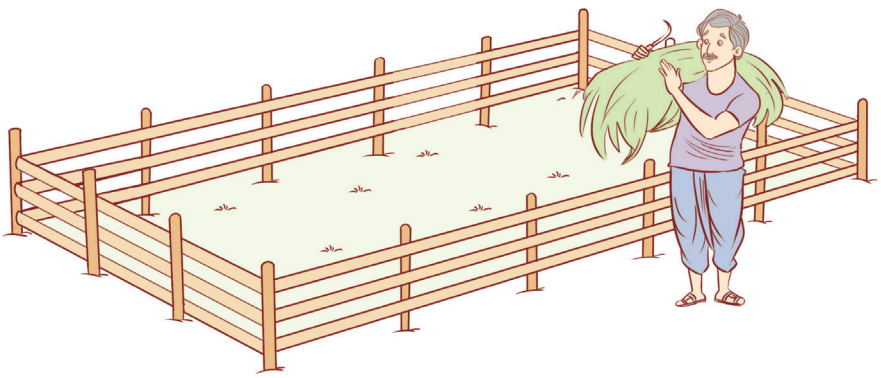
5) तारेचा एक तुकडा 36 सें.मी. लांबीचा आहे. जर तारेचा तुकडा खालील रुपात वापरला तर प्रत्येक बाजूची लांबी किती होईल?

   a) चौरस

   b) सर्व बाजू समान लांबीच्या असलेला त्रिकोण.

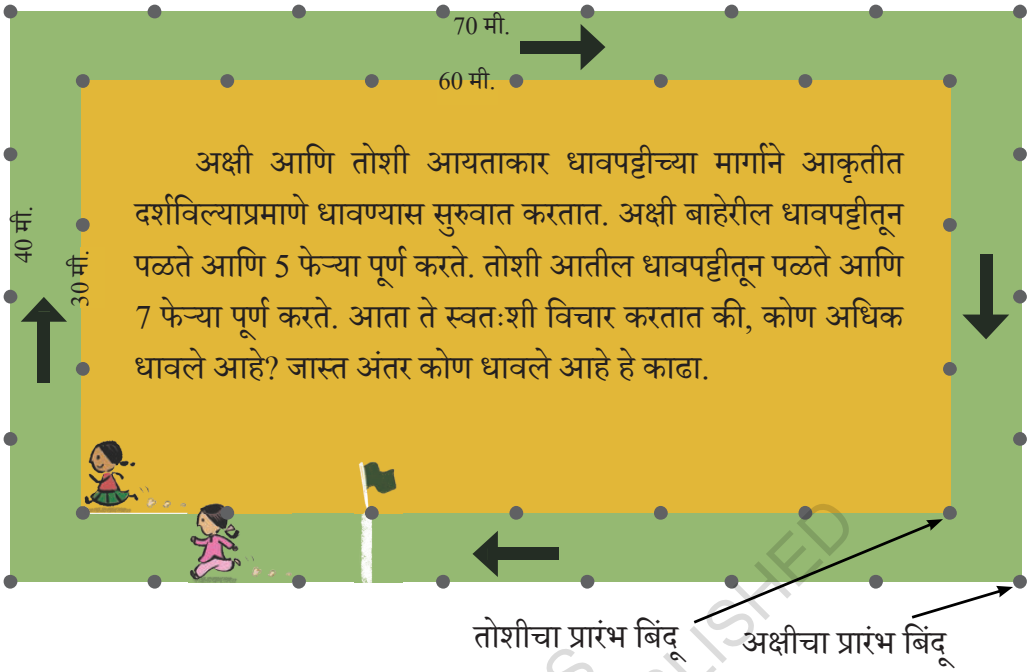
   c) समान लांबीच्या बाजू असलेला एक षटकोन. (सहा बाजूनी बंदिस्त असलेली आकृती)

6) लांबी 230 मी. आणि रुंदी 160 मी. असलेले एका शेतकऱ्याचे आयताकार शेत आहे. आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे दोरीच्या तीन फेऱ्यांनी त्याला शेताला कुंपण करावयाचे आहे. तर एकूण किती लांबीची दोरी आवश्यक आहे?



@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

गणिती कोडे



प्रत्येक धावपट्टी ही आयताकार आहे. अक्षीच्या धावपट्टीची लांबी 70 मी. आणि रुंदी 40 मी. आहे. या धावपट्टीवर एक पूर्ण फेरी धावल्यास 220 मी. अंतर आक्रमिले जाते. म्हणजेच 2 x (70+40) मी. = 220 मी. हे अक्षीने एका फेरीत आक्रमिलेले अंतर आहे.

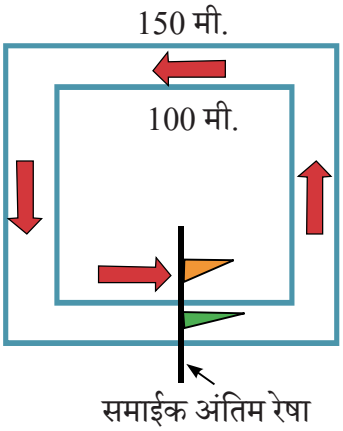
© IITRS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

1) अक्षीने 5 फेऱ्यांमध्ये आक्रमिलेले एकूण अंतर काढा.
2) तोशीने 5 फेऱ्यांमध्ये आक्रमिलेले एकूण अंतर काढा. अधिक अंतर कोण धावते?
3) विचार करा आणि सुचनेप्रमाणे स्थितीनुसार खुणा करा.
   a) अक्षीने 250 मी. धावल्यानंतर ती असलेल्या बिंदूला 'A' अशी खुण करा.
   b) अक्षीने 500 मी. धावल्यानंतर ती असलेल्या बिंदूला 'B' अशी खुण करा.
   c) आता अक्षीने 1000 मी. अंतर धावले आहे. तिने तिच्या धावपट्टीभोवती किती फेऱ्या पूर्ण केल्या आहेत? तिचे स्थान 'C' असे चिन्हांकीत करा.
   d) तोशीने 250 मी. धावल्यानंतर ती असलेल्या बिंदूला 'X' अशी खुण करा.
   e) तोशीने 500 मी. धावल्यानंतर ती असलेल्या बिंदूला 'Y' अशी खुण करा.
   f) आता तोशीने 1000 मी. अंतर धावले आहे. तिने तिच्या धावपट्टीभोवती किती फेऱ्या पूर्ण केल्या आहेत? तिचे स्थान 'Z' असे चिन्हांकीत करा.

* सखोल विचार

सामान्यपणे शर्यतीमध्ये सर्व धावपट्टूंसाठी एक समाईक अंतिम रेषा असते. येथे दोन चौरसाकृती धावण्याच्या धावपट्टया असून आतील धावपट्टीची प्रत्येक बाजू 100 मी. आणि बाहेरील धावपट्टीची प्रत्येक बाजू 150 मी. आहे. दोन्ही धावपट्टूंची समाईक अंतिम रेषा ही धावपट्टीच्या एका बाजूच्या मध्यभागी ध्वजाने आकृतीत दर्शविली आहे.



जर एकूण शर्यत 350 मी. असेल तर आपल्याला सुरुवातीची स्थिती कोठे आहे हे शोधावे लागेल. दोन्ही धावपट्टू या दोन धावपट्ट्यांवर असावेत जेणेकरून ते 350 मी. धावल्यानंतर दोघांची अंतिम रेषा समान असेल. आतील धावपट्टीवरील धावपट्टूचा सुरुवातीचा बिंदू 'A' आणि बाहेरील धावपट्टीवरील धावपट्टूचा सुरुवातीचा बिंदू 'B' असे चिन्हांकीत करा.

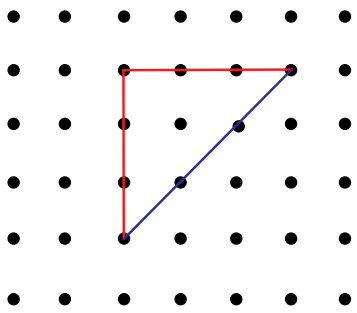
* अंदाज करा आणि पडताळा

एक कागदाचा किंवा वर्तमानपत्राचा तुकडा घ्या. कागद वेगवेगळ्या प्रकारे कापून कांही यादृच्छिक आकार बनवा. प्रत्येक आकाराच्या सीमांच्या एकूण लांबीचा अंदाज लावा. नंतर प्रत्येक आकाराची परिमिती मोजण्यासाठी आणि पडताळा करण्यासाठी मोजपट्टीचा उपयोग करा.



* अक्षी म्हणते की, या त्रिकोणाच्या आकाराची परिमिती 9 एकके आहे. तोशी म्हणते की, परिमिती 9 एकके असू शकत नाही आणि परिमिती ही 9 एककापेक्षा जास्त असेल. तुम्ही काय विचार कराल?



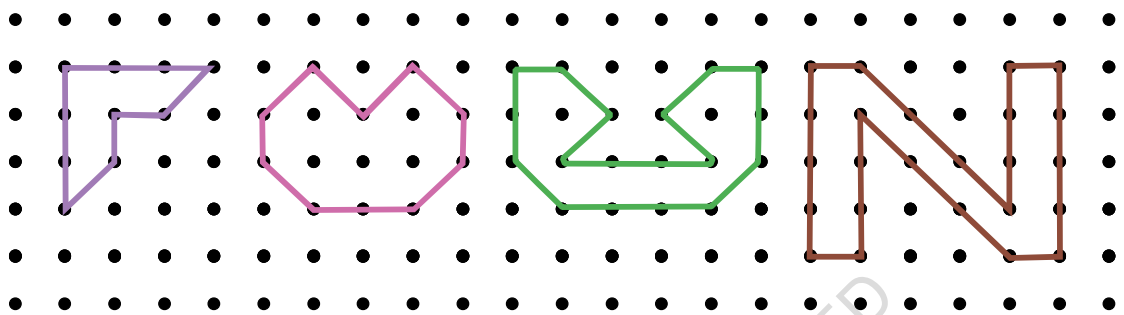




©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या आकृतीमध्ये दोन वेगवेगळ्या एकक लांबीच्या रेषा आहेत. लाल रेषेची आणि निळ्या रेषेची लांबी मोजा. त्या समान आहे का? आम्ही लाल रेषांना - सरळ रेषा आणि निळ्या रेषेला - कर्ण रेषा म्हणू शकतो. म्हणून या त्रिकोणाची परिमिती 6 सरळ एकके + 3 कर्ण एकके आहे. हे आम्ही संक्षिप्त स्वरुपात 6s + 3d एकके असे लिहू शकतो.

* खालील आकृत्यांची परिमिती ही सरळ आणि कर्ण एककांच्या स्वरुपात लिहा.



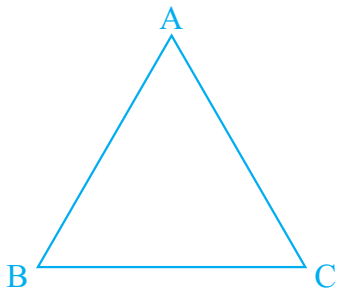
नियमित बहुभुजाकृतीची परिमिती

चौरसाप्रमाणे सर्व बाजू आणि सर्व कोन समान असणाऱ्या बंदिस्त आकृतीला नियमित बहुभुजाकृती असे म्हणतात. आम्ही प्रकरण 1 मध्ये **नियमित बहुभुजाकृती**चा क्रम हा 'आकार क्रम' असे अभ्यासलेले आहे. समभुज त्रिकोण ही नियमित बहुभुजाकृतीची उदाहरणे आहेत. (जेथे सर्व तीन बाजू आणि सर्व तीन कोन समान असतात) नियमित पंचभुजाकृती (जेथे सर्व पाच बाजू आणि सर्व पाच कोन समान असतात) इत्यादी.

समभुज त्रिकोणाची परिमिती

आपल्याला माहित आहे की, कोणत्याही त्रिकोणाची परिमिती ही त्याच्या सर्व तीन बाजूंची बेरीज होय.

या आकलनाचा उपयोग करून आम्ही समभुज त्रिकोणाची परिमिती काढू शकतो.



समभुज त्रिकोणाची परिमिती = AB + BC + AC

= AB + AB + AB

= एका बाजूच्या लांबीची तिप्पट

समभुज त्रिकोणाची परिमिती = 3x एका बाजूची लांबी.

चौरस आणि समभुज त्रिकोण यामध्ये काय साम्य आहे?

* तुमच्या सभोवतालच्या नियमित आकार असणाऱ्या विविध वस्तू शोधा आणि त्यांची परिमिती काढा. त्याचप्रमाणे इतर नियमित बहुभुजाकृतींच्या परिमितीसाठी तुमच्या आकलनाने सामान्यीकरण करा.

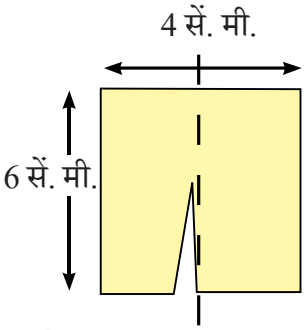
© MAHARASHTRA STATE BOARD OF VOCATIONAL EDUCATION AND TRAINING NOT TO BE REPUBLISHED

शिक्षकांसाठी सूचना

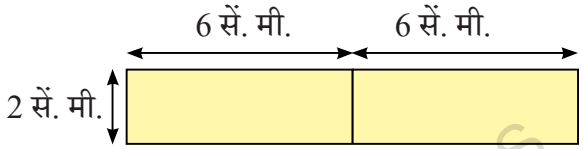
नियमित बहुभुजाकृती विषयी अधिक चर्चा करा आणि एका नियमित बहुभुजाकृतीची परिमिती काढण्यासाठी सामान्य सूत्राच्या निष्कर्षाप्रत येण्यासाठी विद्यार्थ्यांना प्रोत्साहन द्या.

विभाजन करणे आणि पुन्हा जोडणे

6 सें. मी. x 4 सें. मी. मापाचा एक आयताकार कागद आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे दोन समान भागात कापला आहे. हे दोन्ही कापलेले तुकडे वेगवेगळ्या पध्दतीने पुन्हा जोडले आहेत.



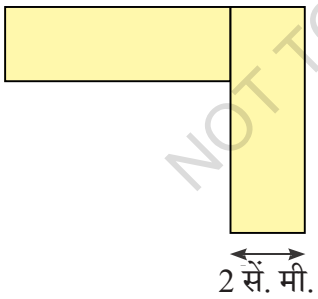
a)



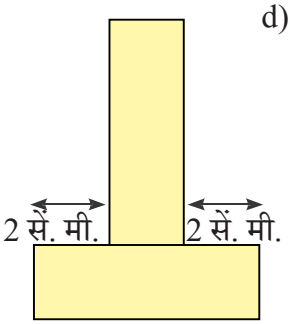
उदाहरणार्थ a) रचनेची परिमिती 28 सें. मी. आहे.

* खाली दिलेल्या प्रत्येक इतर रचनेच्या सीमेची लांबी (म्हणजेच परिमिती) काढा.

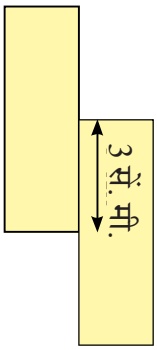
b)



c)



d)



* परिमिती 22 सें. मी. होईल असे दोन तुकडे जोडून एक आकृती तयार करा.

6.2 क्षेत्रफळ

मागील इयत्तेत आम्ही बंदिस्त आकृत्यांच्या क्षेत्रफळांचा (नियमित आणि अनियमित) अभ्यास केलेला आहे. कांही मुद्यांचे स्मरण करुया.

© MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एका बंदिस्त आकृतीने व्यापलेल्या भागाला **क्षेत्रफळ** असे म्हणतात.

मागील इयत्तेत आम्ही आयताचे आणि चौरसाचे क्षेत्रफळ हे चौरस (आलेख) कागदाचा उपयोग करुन सूत्राच्या निष्कर्षापर्यंत आलो आहे. तुम्हाला आठवते का?

चौरसाचे क्षेत्रफळ = _____

आयताचे क्षेत्रफळ = _____

शिक्षकांसाठी सूचना

आलेख (चौरस) कागदाचा उपयोग करून विद्यार्थ्यांना आयताचे आणि चौरसाचे क्षेत्रफळ काढण्याच्या पध्दतीचे स्मरण करण्यासाठी मदत करा. विद्यार्थ्यांना आलेख (चौरस) कागद पुरवा आणि स्वतः त्यांना सूत्रापर्यंत येऊ द्या.

वास्तव जीवनातील समस्यांशी संबंधित कांही कल्पना पाहूया.

उदाहरण : एका खोलीतील जमीन 5 मी. लांब आणि 4 मी. रुंद आहे. 3 मी. बाजू असणारा एक चौरसाकार गालीचा जमिनीवर घातलेला आहे. तर गालीचा न घातलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल: जमिनीची लांबी = 5 मी.

जमिनीची रुंदी = 4 मी.

जमिनीचे क्षेत्रफळ = लांबी x रुंदी = 5 मी. x 4 मी.

= 20 चौ. मी.

चौरसाकार गालीच्याची लांबी = 3 मी.

गालीच्याचे क्षेत्रफळ = लांबी x लांबी = 3 मी. x 3 मी.

= 9 चौ. मी.

म्हणून गालीचा घातलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ 9 चौ.मी. आहे.

म्हणून गालीचा न घातलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ = एकूण जमिनीचे क्षेत्रफळ - गालीचा घातलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ

= 20 चौ.मी. - 9 चौ. मी.

= 11 चौ. मी.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण : 12 मी. लांबी आणि 10 मी. रुंदी असलेल्या जमिनीच्या तुकड्यावर चार कोपऱ्यात प्रत्येकी 4 मी. बाजू असणारे चार चौरसाकृती फुलांचे गालीचे आहेत. तर राहिलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : जमिनीची लांबी (l) = 12 मी.

जमिनीची रूंदी (w) = 10 मी.

संपूर्ण जमिनीचे क्षेत्रफळ = l x w

= 12 मी. x 10 मी.

= 120 चौ. मी.

चार चौरसाकृती फुलांच्या गालीच्याच्या प्रत्येक बाजूची लांबी (S) = 4 मी.

एका फुलांच्या गालीच्याचे क्षेत्रफळ = S x S = 4 मी. x 4 मी. = 16 चौ. मी.

म्हणून चार फुलांच्या गालिच्यांचे क्षेत्रफळ = 4 x 16 चौ. मी. = 64 चौ. मी.

म्हणून जमिनीच्या शिल्लक भागाचे क्षेत्रफळ = संपूर्ण जमिनीचे क्षेत्रफळ - सर्व चार फुलांच्या गालीच्यांचे क्षेत्रफळ

= 120 चौ. मी - 64 चौ. मी. = 56 चौ. मी.

* शोधा पाहू.

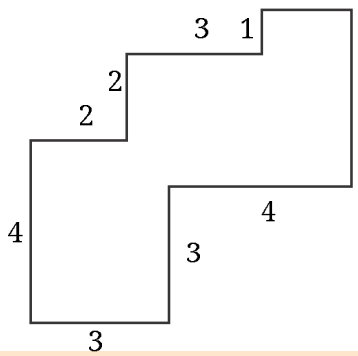
1) एका 25 मी. लांबीच्या आयताकार उद्यानाचे क्षेत्रफळ 300 चौ. मी. आहे. तर उद्यानाची रुंदी काढा.

2) 500 मी. लांबी आणि 200 मी. रुंदी असणाऱ्या एका आयताकार जागेवर (प्लॉट) प्रति चौ. मी. ₹8 प्रमाणे फरशी घालण्यासाठी येणारा खर्च काढा.

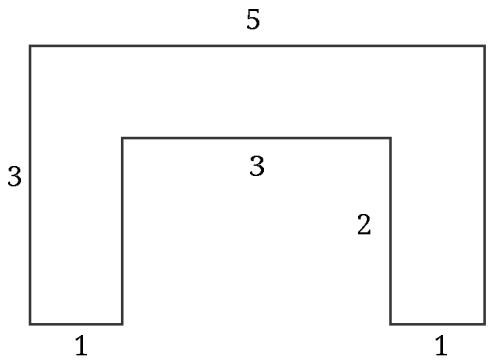
3) एक आयताकार नारळाची राई 100 मी. लांब आणि 50 मी. रुंद आहे. जर प्रत्येक नारळाच्या झाडाला 25 चौ. मी. जागा लागत असेल तर या राईमध्ये जास्तीत जास्त किती झाडे लावता येतील?

4) खालील आकृत्यांचे आयतामध्ये विभाजन करून त्यांचे क्षेत्रफळ काढा. (सर्व मापे मीटरमध्ये दिलेली आहेत.)

a)



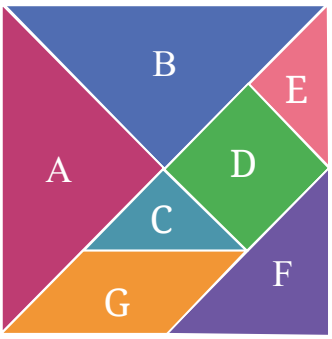
b)



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

तुमच्या पाठ्यपुस्तकाच्या शेवटी दिलेल्या आकृतीचे भाग कापा.



1) किती भागांचे क्षेत्रफळ समान आहे त्याचा शोध घ्या आणि आकृती काढा.

2) आकार 'C' ची आकार 'D' शी तुलना केल्यास किती पटीने मोठा आहे? C, D आणि E च्या आकारामधील संबंध काय आहे?

3) आकार 'D' किंवा 'F' यापैकी कोणत्या आकाराचे क्षेत्रफळ अधिक आहे? तुमच्या उत्तराची कारणे द्या.

4) आकार 'F' किंवा 'G' यापैकी कोणत्या आकाराचे क्षेत्रफळ अधिक आहे? तुमच्या उत्तराची कारणे द्या.

5) आकार 'G' शी तुलना केल्यास आकार 'A' चे क्षेत्रफळ किती आहे? ते दुप्पट आहे का? किंवा चारपट मोठे आहे का?

सूचना : आकृतीच्या तुकड्यामध्ये आकार एकमेकांवर ठेऊन आपण शोधू शकतो की आकार A आणि B चे क्षेत्रफळ समान आहे. आकार C आणि E चे क्षेत्रफळ समान आहे. तुम्ही हे देखील शोधून काढले असेल की, आकार C आणि E वापरून आकार D तंतोतंत व्यापला आहे. याचा अर्थ असा की, आकार D चे क्षेत्रफळ C किंवा आकार E इत्यादीच्या दुप्पट आहे.

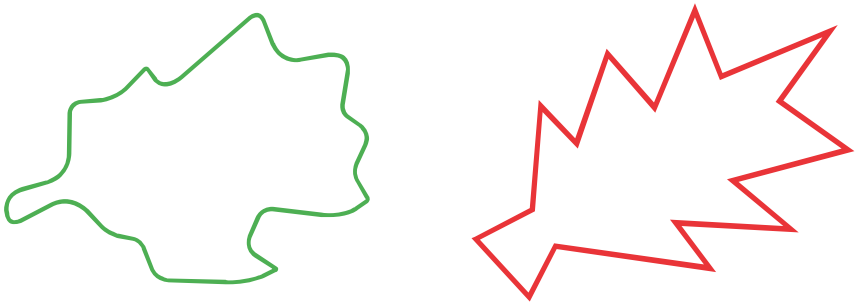
6) आकार C च्या क्षेत्रफळाच्या दृष्टीने सर्व सात तुकड्यांपासून तयार झालेल्या मोठ्या चौरसाचे क्षेत्रफळ आता तुम्ही काढू शकता का?

7) एक आयत तयार करण्यासाठी 7 तुकड्यांची रचना करा. आकार C च्या क्षेत्रफळाच्या दृष्टीने या आयताचे क्षेत्रफळ किती असेल? तुमच्या उत्तराची कारणे द्या.

8) या सात तुकड्यांपासून तयार झालेल्या चौरस आणि आयताची परिमिती वेगवेगळी किंवा सारखीच आहे का? तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण करा.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

* **खालील आकृत्यांकडे पहा आणि कोणत्या आकृतीचे क्षेत्रफळ अधिक आहे ते ओळखा.**



a) b)

आम्ही चौरस कागद किंवा आलेख कागदाच्या वापराने कोणत्याही साध्या बंदिस्त आकाराच्या क्षेत्रफळाचा अंदाज करु शकतो जिथे प्रत्येक चौरस 1 एकक X 1 एकक किंवा 1 चौ. एकक इतका असतो.

क्षेत्रफळाचा अंदाज लावण्यासाठी आम्ही पारदर्शक कागदाच्या तुकड्यावर दाब देऊन रचना करतो आणि तो चौरस किंवा आलेखाच्या तुकड्यावर ठेवू शकतो आणि नंतर खालील नियमांचे पालन करतो.

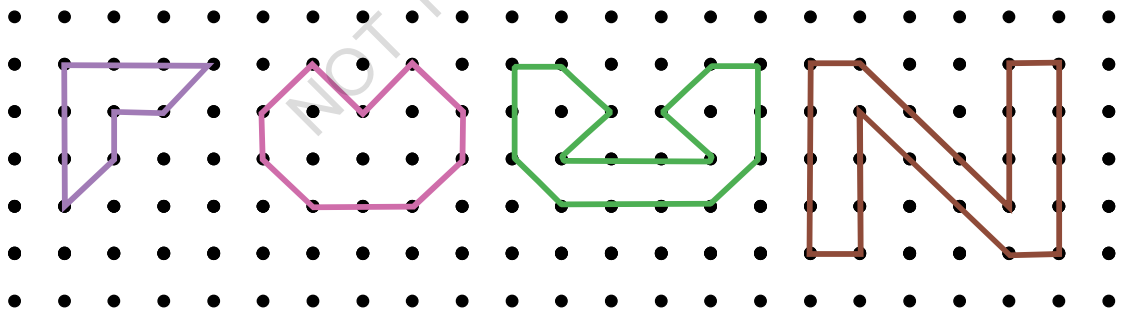
1) चौरस किंवा आलेख कागदावरील एका पूर्ण लहान चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौ. एकक म्हणून घेतले जाते.

2) अर्ध्या चौरसापेक्षा कमी क्षेत्रफळ असलेल्या भागांकडे दुर्लक्ष करा.

3) चौरसाच्या अर्ध्यापेक्षा जास्त भागात असल्यास केवळ 1 चौ. एकक म्हणून मोजा.

4) जर फक्त अर्धा चौरस मोजला तर त्याचे क्षेत्रफळ ½ चौ. एकक असे घ्या.

* **खालील आकृतींचे क्षेत्रफळ काढा.**



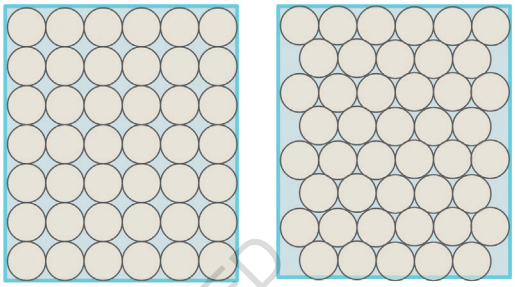
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

चला शोध घेऊया.



सामान्यपणे क्षेत्रफळ चौरसाचा उपयोग करून का मोजले जाते?

आलेखाच्या कागदावर 3 लांबीच्या व्यासाचे (रुंदी) एक वर्तुळ काढा. चौरस मोजा आणि वर्तुळाकार भागाच्या क्षेत्रफळाचा अंदाज घेण्यासाठी त्याचा वापर करा.



तुम्ही बघू शकता की, मधल्या पोकळीशिवाय वर्तुळे घट्टपणे जोडली जाऊ शकत नाहीत. त्यामुळे वर्तुळांचा एकक म्हणून वापर करून क्षेत्रफळांचे अचूक मोजमाप मिळविणे कठीण आहे. येथे समान आयत दोन वेगवेगळ्या प्रकारे वर्तुळांसह जोडले आहेत. पहिल्यामध्ये 42 वर्तुळे आहेत आणि दुसऱ्यामध्ये 44 वर्तुळे आहेत.

* दिलेली जागा भरण्यासाठी वेगवेगळे आकार (त्रिकोण आणि आयत) वापरुन प्रयत्न करा आणि दुसऱ्या आकारापेक्षा क्षेत्रफळ काढण्यासाठी चौरस आकार वापरणे फायदेशीर का आहे हे शोधून काढा. क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी चौरस हा एक उत्तम आकार आहे हे दर्शविणाऱ्या मुद्यांची यादी करा.

1) व्हरांड्याच्या बाहेरील जमिनीचे क्षेत्रफळ काढा. (चौ. मीटरमध्ये)

2) तुमच्या शाळेच्या मैदानाने व्यापलेले क्षेत्रफळ काढा. (चौ. मीटरमध्ये)

चला शोध घेऊया.

* एका चौरस कागदावर (1 चौरस = 1 चौरस एकक) असणारे तुम्हाला शक्य तितके आयत बनवा ज्यांची लांबी आणि रुंदी ही पूर्ण संख्या एकके असून आयताचे क्षेत्रफळ हे 24 चौ. एकके असेल

a) कोणत्या आयताची परिमिती सर्वात जास्त आहे?

b) कोणत्या आयताची परिमिती सर्वात कमी आहे?

c) जर तुम्ही 32 चौ. सें. मी. क्षेत्रफळ असणारा आयत घेतला तर तुमची उत्तरे काय असतील? कोणतेही क्षेत्रफळ दिल्यास जास्तीत जास्त परिमिती तसेच कमीत कमी परिमिती असलेल्या आयताच्या आकाराचा अंदाज लावणे शक्य आहे का? तुमच्या उत्तराची उदाहरणे आणि कारणे द्या.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.3 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

कागदाच्या एका तुकड्यावर एक आयत काढा आणि त्याचा एक कर्ण काढा. आयताला कर्णामधून कापा आणि दोन त्रिकोण मिळवा.

* तपासा ! दोन्ही त्रिकोण एकमेकांवर तंतोतंत जुळतात की नाही. त्यांचे क्षेत्रफळ समान आहे का?

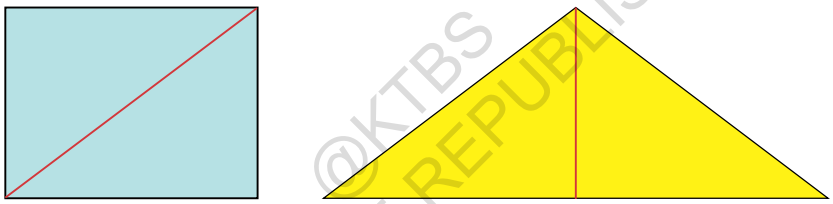
  वेगवेगळ्या मापाच्या अधिकाधिक आयतांसाठी हा प्रयत्न करा. तुम्ही हे चौरसासाठी सुध्दा तपासू शकता.

* या अभ्यासापासून तुम्ही कांही निष्कर्ष काढू शकाल का? कृपया ते येथे लिहा.

_____

_____

आता खालील आकृत्या पहा. निळ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे पिवळ्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळापेक्षा जास्त आहे की कमी आहे? की ते समान आहे? का?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* निळा आयत आणि पिवळा त्रिकोण यामध्ये तुम्ही कांही संबंध आणि त्यांची क्षेत्रफळे पाहू शकाल का? येथे संबंध लिहा.

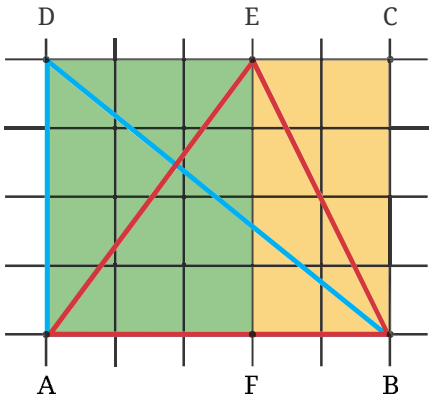
_____

शिक्षकांसाठी सूचना

विद्यार्थ्यांना त्यांचे निष्कर्ष स्पष्ट करण्यासाठी आणि त्यांनी निरीक्षण केलेल्या संबंधामधील निरीक्षणे त्यांच्या शब्दात मांडण्यासाठी मदत करा. हळूहळू संपूर्ण वर्गासाठी एक समाईक विधान बनवा. वर्गामध्ये कर्णाच्या व्याख्येचे स्मरण करा.

चौरस कागदावर वरील स्वाध्यायातील तुमच्या निष्कर्षांचा पडताळा आणि निरीक्षणांचा संबंध नोंद करण्यासाठी योग्य त्रिकोण काढा.

* मागील इयत्तेमधील तुमच्या आकलनाचा उपयोग करून कोणत्याही बंदिस्त आकृतीचे क्षेत्रफळ चौरस कागदाचा उपयोग करून काढा आणि



1) BAD या निळ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

_____

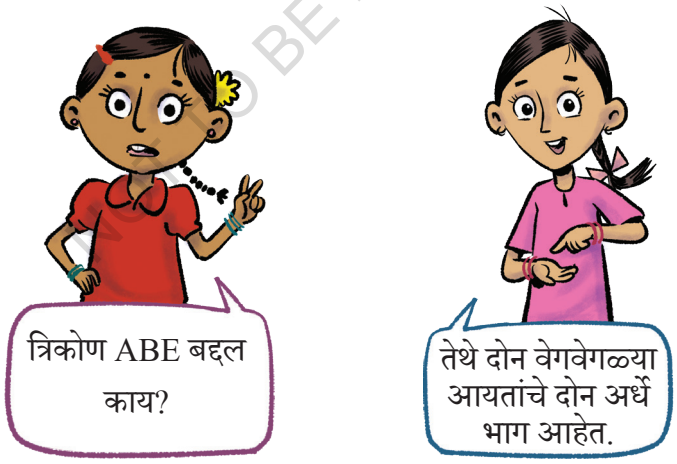
2) ABE या लाल त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

_____



ABCD आयतचे क्षेत्रफळ = _____

म्हणून BAD त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे ABCD आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे आहे.



ABE त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = AEF त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ + BEF त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ.

येथे AEF त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = AFED आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे.

त्याचप्रमाणे BEF त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = BFEC आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अशाप्रकारे ABE त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = AFED आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे + BFEC आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे.

= AFED आणि BFEC या आयतांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेच्या निम्मे.

= ABCD आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे.

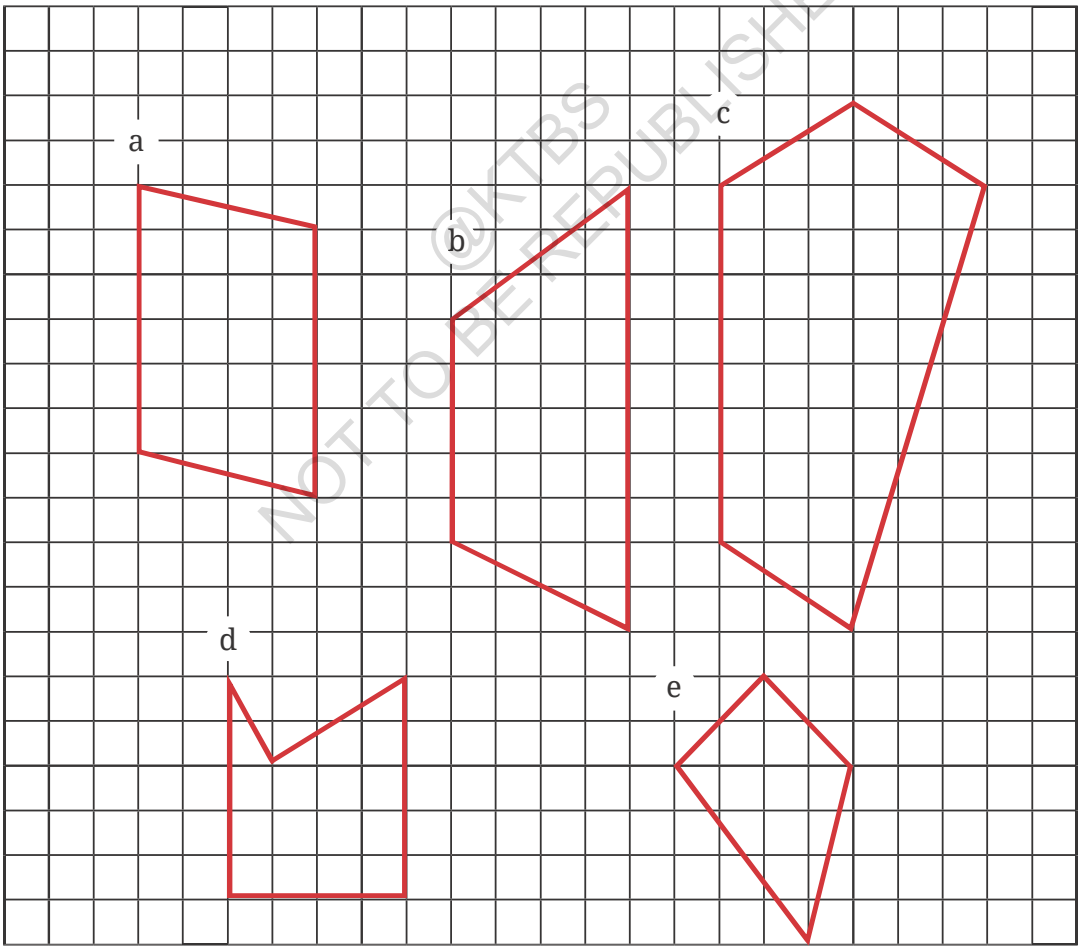
निष्कर्ष _____

_____

_____

* शोधा पाहू.

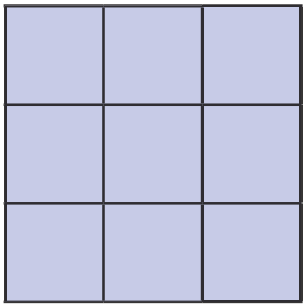
1) खालील आकृत्यांचे क्षेत्रफळ हे आयतामध्ये आणि त्रिकोणामध्ये विभागून काढा.

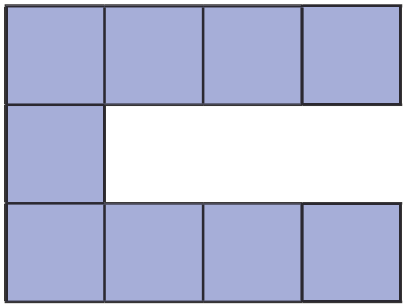


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

'जास्त' किंवा 'कमी' बनविणे

या दोन आकृत्यांचे निरीक्षण करा. या दोन्हीमध्ये कोणते साम्य किंवा फरक आहे काय?





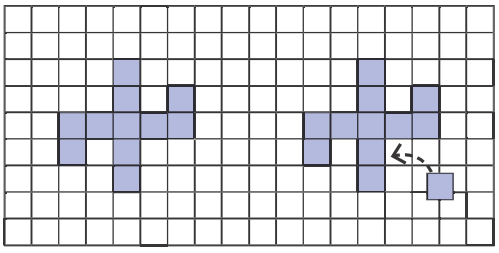
9 एकक चौरसांचा वापर करून (क्षेत्रफळ 9 चौ. एकके असणाऱ्या) दोन वेगवेगळ्या परिमितीच्या आकृत्या आम्ही बनविल्या आहेत. पहिल्या आकृतीची परिमिती 12 एकके आणि दुसऱ्या आकृतीची परिमिती 20 एकके आहे.

9 चौ. एकके घेऊन इतर वेगळी परिमिती मिळविण्यासाठी वेगवेगळ्या आकृत्यांची रचना करा किंवा आकृत्या काढा. प्रत्येक चौरसाची किमान एक बाजू कमीत कमी एका दुसऱ्या चौरसासह पूर्णपणे संरेखित केली पाहिजे आणि सर्व चौरस एकत्रितपणे जोडून छिद्र नसलेली एक आकृती तयार केली पाहिजे.

* **9 एकक चौरसाचा वापर करून खालील उदाहरणे सोडवा.**

1) सर्वात लहान परिमिती किती शक्य आहे?
2) जास्तीत जास्त परिमिती किती शक्य आहे?
3) 18 एकके परिमिती असलेली एक आकृती बनवा.
4) वरील तीन परिमितीच्या इतर आकारांच्या आकृत्या तुम्ही बनवू शकाल का? किंवा त्या परिमितीचा फक्त एकच आकार तेथे आहे का? तुमचा तर्क काय आहे?

* **चला आता कांहीतरी युक्ती करुया. खालीलप्रमाणे 24 एकके परिमिती असलेली आपल्याकडे एक आकृती आहे.**

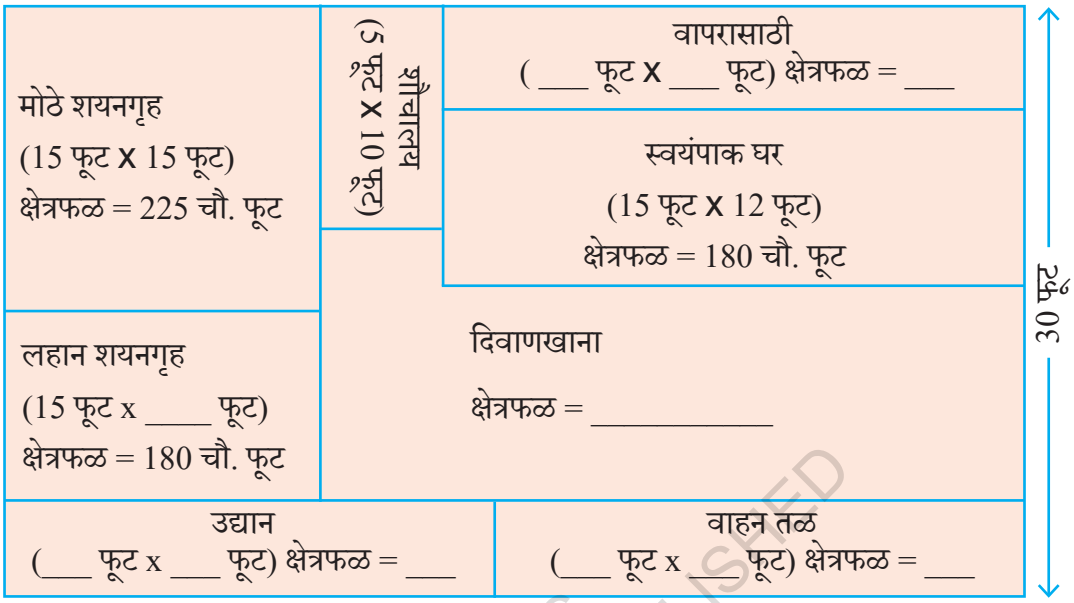


पुन्हा सर्व हिशेब न करता निरीक्षण करा, विचार करा आणि उजवीकडे दर्शविल्याप्रमाणे नवीन चौरस जोडल्यास परिमितीत काय बदल होईल ते शोधून काढा.

हा नवीन चौरस वेगवेगळ्या ठिकाणी ठेवण्याचा प्रयोग करा आणि परिमितीत काय बदल होईल याचा विचार करा. चौरस ठेवल्याने परिमिती a) वाढते b) कमी होते c) सारखीच राहू शकते का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

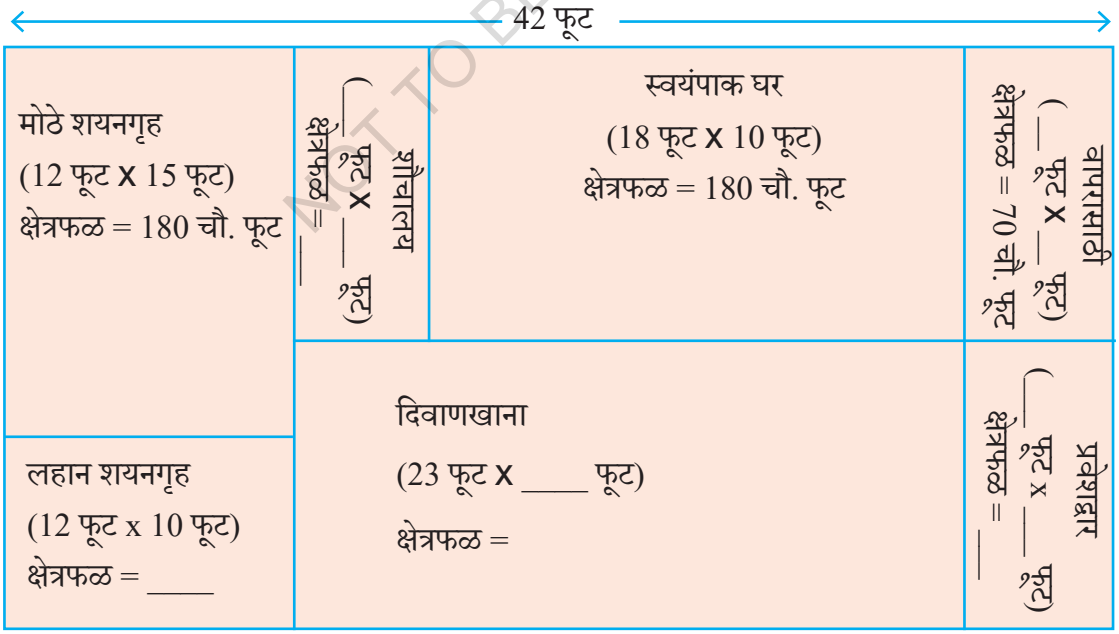
* **चरणच्या घराची खालीलप्रमाणे योजना आहे. ती आयताकृती जागा आहे. योजनेकडे पहा. तुमच्या काय लक्षात येते?**



कांही मापे दिलेली आहेत.

a) गाळलेली मापे काढा. b) त्याच्या घराचे क्षेत्रफळ काढा.

आता गाळलेली मापे आणि शरणच्या घराचे क्षेत्रफळ काढा. खाली आराखडा आहे.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कांही मापे दिलेली आहेत.

a) गाळलेली मापे काढा.

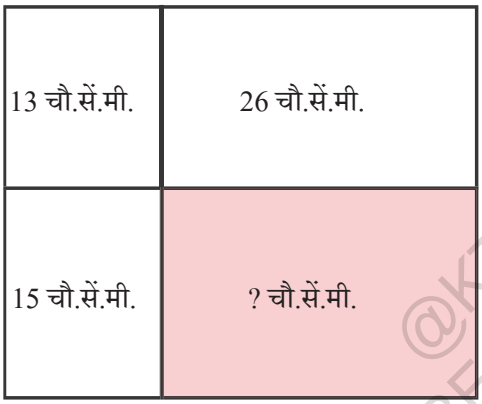
b) त्याच्या घराचे क्षेत्रफळ काढा.

शरणच्या घरातील वेगवेगळ्या सर्व खोलींची मापे किती आहेत? शरण आणि चरणच्या घराच्या क्षेत्रफळांची आणि परिमितीची तुलना करा.

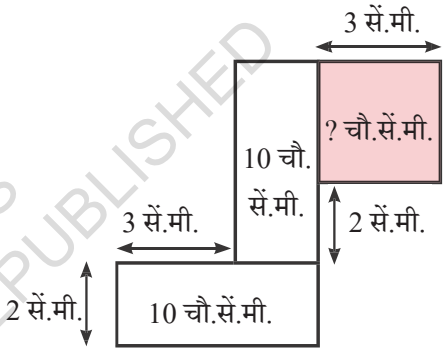
क्षेत्रफळाच्या गुंतागुंतीची कोडी.

प्रत्येक आकृतीमधील बाजूच्या लांबीची किंवा भागाच्या क्षेत्रफळाची गाळलेली किंमत काढा.

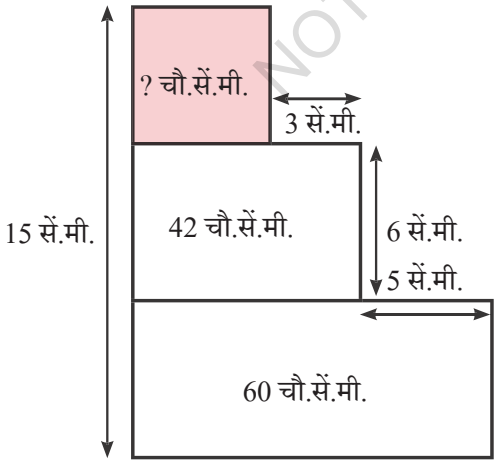
a)



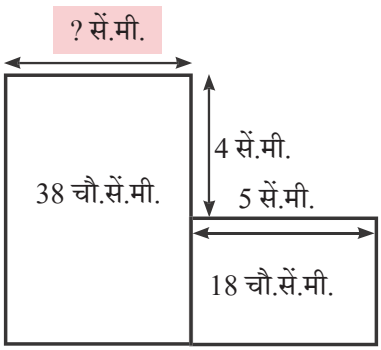
b)



c)



d)



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

1) 5 मी. x 10 मी. आणि 2 मी. x 7 मी. मापे असणाऱ्या दोन आयतांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके क्षेत्रफळ असणाऱ्या एका आयताची मापे लिहा.

2) 50 मी. लांबी असलेल्या एका आयताकार उद्यानाचे क्षेत्रफळ 1000 चौ. मी. आहे तर उद्यानाची रुंदी काढा.

3) एका खोलीची जमीन 5 मी. लांब आणि 4 मी. रुंद आहे. 3 मी. बाजूची लांबी असणारा एक चौरसाकृती गालीचा जमिनीवर घातलेला आहे. तर गालीचा न घातलेल्या जागेचे क्षेत्रफळ काढा.

4) 15 मी. लांब आणि 12 मी. रुंद असणाऱ्या एका उद्यानाच्या चार कोपऱ्यात 2 मी. लांबी आणि 1 मी. रुंदी असणारे चार फुलांचे खड्डे खोदले आहेत. तर गवती गालीचा घालण्यासाठी आता किती क्षेत्रफळ उपलब्ध आहे?

5) आकार 'A' चे क्षेत्रफळ 18 चौ. एकके आणि आकार 'B' चे क्षेत्रफळ 20 चौ. एकके आहे. आकार A ची परिमिती आकार B च्या परिमितीपेक्षा जास्त आहे. दिलेल्या अटीची पूर्तता करणारे असे दोन आकार रचा.

6) तुमच्या पुस्तकातील एका पानावर एक आयताकार सीमा अशी काढा की, माथ्यापासून 1 सें. मी. आणि तळ आणि डाव्या व उजव्या बाजूपासून लांबी 1.5 सें. मी. असेल. तर सीमेची परिमिती काढा.

7) 12 एकके x 8 एकके आकाराचा एक आयत काढा. बाहेरील आयताला स्पर्श न करता अचूक अर्धे क्षेत्रफळ असणारा दुसरा आयत आतील बाजूला काढा.

8) एका चौरसाकृती कागदाच्या तुकड्याची अर्ध्या भागातून घडी घातलेली आहे. घडीमधून चौरस हा दोन आयतामध्ये विभागाला जातो. चौरसाचा आकार कितीही असला तरी खालीलपैकी एक विधान नेहमी सत्य आहे. येथे कोणते विधान सत्य आहे?

   a) प्रत्येक आयताचे क्षेत्रफळ हे चौरसाच्या क्षेत्रफळापेक्षा जास्त आहे.

   b) चौरसाची परिमिती ही दोन आयत जोडल्याने तयार होणाऱ्या आयताच्या परिमितीपेक्षा अधिक आहे.

   c) दोन आयतांच्या परिमितीची बेरीज ही नेहमी चौरसाच्या परिमितीच्या 1½ पट असते.

   d) दोन आयत जोडल्याने तयार होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे नेहमी चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या तिप्पटीपेक्षा मोठे आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

* बहुभुजाकृतीची परिमिती ही त्यांच्या सर्व बाजूंच्या लांबीची बेरीज होय.

  a) आयताची परिमिती ही त्याच्या लांबी आणि रुंदी यांच्या बेरजेच्या दुप्पट असते.

  b) चौरसाची परिमिती ही त्याच्या कोणत्याही एका बाजूच्या लांबीच्या चार पट (चौपट) असते.

* एका बंदिस्त आकृतीने व्यापलेल्या भागाला क्षेत्रफळ असे म्हणतात.

* क्षेत्रफळ हे सामान्यपणे चौरस एककामध्ये मोजतात.

* आयताचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या लांबीच्या पटीत रुंदी इतके म्हणजेच लांबी व रुंदीच्या गुणाकाराइतके असते.

* चौरसाचे क्षेत्रफळ म्हणजे त्याच्या कोणत्याही एका बाजूच्या लांबीला त्याच बाजूने गुणणे होय.

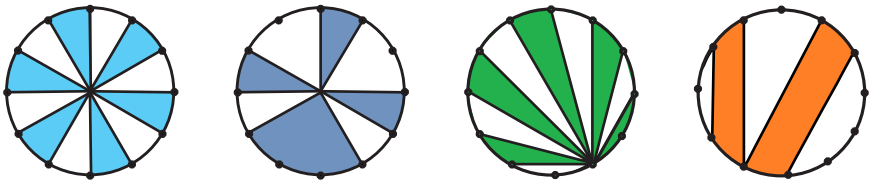
* वेगवेगळ्या परिमिती असणाऱ्या दोन बंदिस्त आकृत्यांचे क्षेत्रफळ समान असू शकते किंवा समान परिमिती असून क्षेत्रफळ वेगवेगळे असू शकते.

* एकक चौरसामध्ये भागांचे विलगीकरण करून दिलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ मोजले जाऊ शकते. (किंवा अगदी अचूकपणे निर्धारीत केले जाते) किंवा अधिक सामान्य आकाराचे आयत आणि त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ मोजले जाऊ शकते.

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

*****

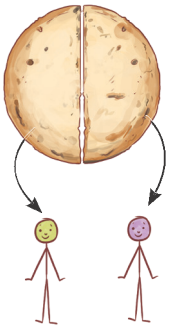
प्रकरण - 7



अपूर्णांक
(FRACTIONS)

तुम्हाला आठवत असेल की, जेव्हा एखादी पूर्ण वस्तू कांही लोकांमध्ये समान प्रमाणात वाटली जाते तेव्हा प्रत्येकाचा वाटा किती आहे ते अपूर्णांक आपणास सांगतात.

शबनम : तुम्हाला आठवतयं का, जर एक भारी दोन मुलांमध्ये समान वाटली तर प्रत्येक मुलाला किती भाकरी मिळेल?



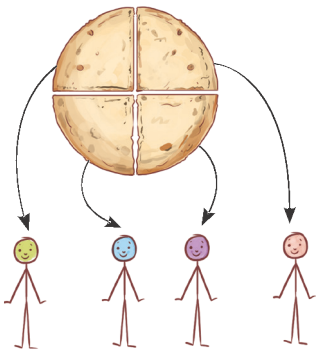
मुक्ता : प्रत्येक मुलाला अर्धी भाकरी मिळेल?

शबनम : अपूर्णांक अर्धा हा $\frac{1}{2}$ असे लिहीतात. कांही वेळा आम्ही 'एक छेद दोन (एक द्वितीयांश)' असे वाचतो.

मुक्ता : जर एक भाकरी 4 मुलांमध्ये समान वाटली तर एका मुलाला किती भाकरी मिळेल?

शबनम : प्रत्येक मुलाचा वाटा $\frac{1}{4}$ भाकरी आहे.

मुक्ता : $\frac{1}{2}$ भाकरी किंवा $\frac{1}{4}$ भाकरी यापैकी कोणते अधिक आहे?



शबनम : जर 2 मुलांना 1 भाकरी समान वाटली तर प्रत्येक मुलाला $\frac{1}{2}$ भाकरी मिळते. जर 4 मुलांना 1 भाकरी समान वाटली तर प्रत्येक मुलाला $\frac{1}{4}$ भाकरी मिळते. म्हणून दुसऱ्या गटामध्ये तीच भाकरी अधिक मुलांमध्ये वाटली जाते. त्यामुळे प्रत्येक मुलाला लहान वाटा मिळतो. म्हणून $\frac{1}{2}$ भाकरी ही $\frac{1}{4}$ भाकरीपेक्षा अधिक आहे. $\boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{4}}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.1 अपूर्णांकीय एकके आणि समान वाटणी

बेनी : कोणता अपूर्णांक मोठा आहे? $\frac{1}{5}$ किंवा $\frac{1}{9}$?

अर्विन : 9 हे 5 पेक्षा मोठे आहेत. म्हणून मी असे म्हणतो की $\frac{1}{9}$ हे $\frac{1}{5}$ पेक्षा मोठे आहेत. माझे बरोबर आहे का?

बेनी : नाही! ती सामान्य चूक आहे. या अपूर्णांकाचा वाटणी असा विचार करा.

अर्विन : जर एक भाकरी 5 मुलांमध्ये वाटली तर प्रत्येकाला भाकरीचा $\frac{1}{5}$ वाटा मिळतो. जर एक भाकरी 9 मुलांमध्ये वाटली तर प्रत्येकाला भाकरीचा $\frac{1}{9}$ वाटा मिळतो?

बेनी : अचूकपणे आता पुन्हा विचार करा, कोणता वाटा मोठा आहे?

अर्विन : जर मी अधिक लोकांना वाटल्यास मला कमी वाटा मिळेल म्हणून $\frac{1}{9} < \frac{1}{5}$

बेनी : तुम्हाला उत्तर मिळाले!

अरे ! म्हणून $\frac{1}{100}$ हे $\frac{1}{200}$ पेक्षा मोठे आहे.

जेव्हा एक एकक हे बऱ्याच समान भागात विभागले जाते तेंव्हा प्रत्येक भागाला **अपूर्णांकीय एकक** असे म्हणतात. ही सर्व अपूर्णांकीय एकके आहेत.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots\ldots, \frac{1}{50}\ldots\ldots, \frac{1}{100}$ इत्यादी.

आम्ही कांही वेळेला अपूर्णांकीय एककांना **'एकक अपूर्णांक'** असे सुद्धा संबोधतो.

* शोधा पाहू.

अपूर्णांकांचा वापर करून रिकाम्या जागा भरा.

1) तीन पेरुंचे एकत्रितपणे वजन 1 कि. ग्रॅ. आहे. जर त्यांचा आकार अंदाजे सारखाच असेल, तर प्रत्येक पेरुचे वजन _____ कि. ग्रॅ. होईल.

2) एक घाऊक व्यापारी 1 कि. ग्रॅ. इतका तांदूळ 4 समान वजनाच्या पाकिटात भरतो. प्रत्येक पाकिटाचे वजन _____ कि. ग्रॅ. आहे.

3) चार मित्रांनी 3 ग्लास ऊसाचा रस मागविला आहे आणि त्यांच्यामध्ये समान वाटला आहे. तर प्रत्येकाने _____ ग्लास ऊसाचा रस पिलेला आहे.



NOT TO BE REPUBLISHED @KIRS

4) मोठ्या माशाचे वजन $\frac{1}{2}$ कि. ग्रॅ. आहे. लहान माशाचे वजन $\frac{1}{4}$ कि. ग्रॅ. आहे.
एकत्रितपणे त्याचे वजन _____ कि. ग्रॅ. होईल.



भूतकाळापासूनचे ज्ञान!

प्राचीन काळापासून भारतामध्ये अपूर्णांकांचा वापर करून नांवे देण्यात आली आहेत. ऋग्वेदात $\frac{3}{4}$ अपूर्णांकाला त्रिपद असे संबोधले आहे. याचा अर्थ आज अनेक भारतीय भाषामधील शब्दांसारखाच आहे. उदा: हिंदीमध्ये 'तीन पाव' आणि तामिळमध्ये 'मुक्काल' आहे. आज अनेक भारतीय भाषांमध्ये वापरले जाणारे अपूर्णांकांसाठीचे शब्द प्राचीन काळापासूनचे आहेत.

तुमच्या घरात, शहरात किंवा राज्यात बोलल्या जाणाऱ्या वेगवेगळ्या भाषांमध्ये अपूर्णांकांसाठी वापरले जाणारे शब्द शोधा आणि चर्चा करा. तुमच्या आजी आजोबा, पालक, शिक्षक आणि वर्गमित्रांना विचारा की, ते वेगवेगळ्या अपूर्णांकांसाठी कोणते शब्द वापरतात. जसे की एक आणि अर्धा, तीन चतुर्थांश, एक आणि एक चतुर्थांश, एक द्वितीयांश, चतुर्थांश आणि दोन आणि अर्धे ते खाली लिहा.

_____

5) खालील अपूर्णांक शब्द दिलेल्या चौकोनात लहानापासून मोठ्या आकाराच्या क्रमाने मांडणी करा.

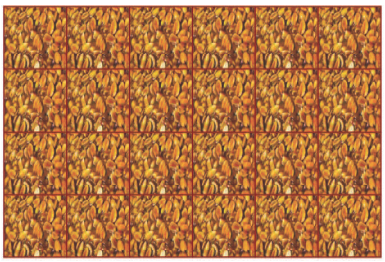
एक आणि अर्धा, तीन चतुर्थांश, एक आणि एक चतुर्थांश, एक द्वितीयांश, चतुर्थांश आणि दोन आणि अर्धे

तुमचे उत्तर येथे लिहा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.2 संपूर्ण भाग म्हणून अपूर्णांकीय एकके

चित्रामध्ये एक पूर्ण चिक्की दर्शविलेली आहे.



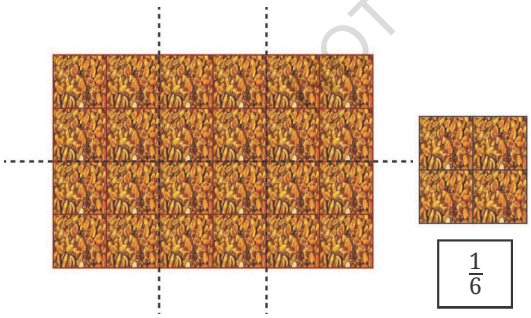
एक पूर्ण चिक्की

खालील चित्रामध्ये चिक्की ही दोन तुकड्यांमध्ये मोडलेली दर्शविली आहे. प्रत्येक तुकडा हा मूळ चिक्कीच्या किती आहे?

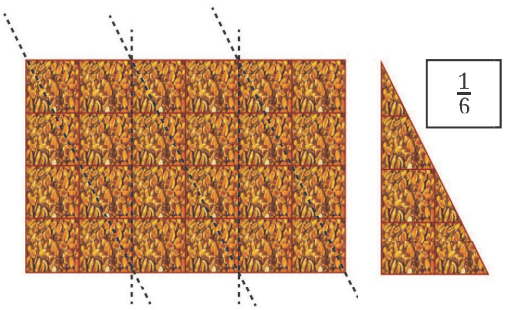


@KSTB NOT TO BE REPUBLISHED

आम्हाला असे दिसून येते की, मोठा तुकडा हा $\frac{1}{4}$ चिक्कीचे तीन तुकडे आहेत. म्हणून आम्ही मोठा तुकडा हा अपूर्णांकीय एकक $\frac{1}{4}$ चा उपयोग करून मोजू शकतो. आम्हाला असे दिसून येते की, मोठा तुकडा हा चिक्कीच्या $\frac{3}{4}$ आहे.



एक संपूर्ण चिक्की 6 समान तुकड्यामध्ये मोडली आहे.

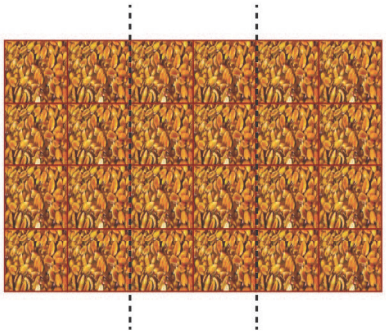


एक संपूर्ण चिक्की 6 समान तुकड्यामध्ये वेगवेगळ्या प्रकारे मोडली आहे.

* संपूर्ण चिक्कीची 6 समान भागात विभागणी वेगवेगळ्या प्रकारे केल्यास आम्हाला चिक्कीचे $\frac{1}{6}$ भाग वेगवेगळ्या आकाराचे मिळतात. ते सारख्याच मापाचे आहेत का?

गणिती बोल

खाली दर्शविलेल्या चिक्कीचा अपूर्णांकीय एकक किती आहे?



संपूर्ण चिक्की



$\frac{1}{3}$

चिक्कीचे मोडून 3 समान भाग केल्याने आम्हाला हा तुकडा मिळतो. म्हणून ही $\frac{1}{3}$ चिक्की आहे.

* शोधा पाहू.

एका संपूर्ण चिक्कीची वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके खालील आकृत्या दर्शवितात. प्रत्येक तुकडा हा संपूर्ण चिक्कीचा कितवा भाग आहे?

a.



b.



c.



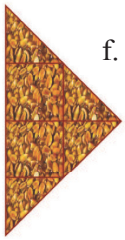
d.



e.



f.



g.



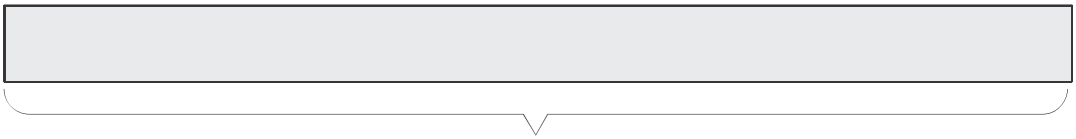
h.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

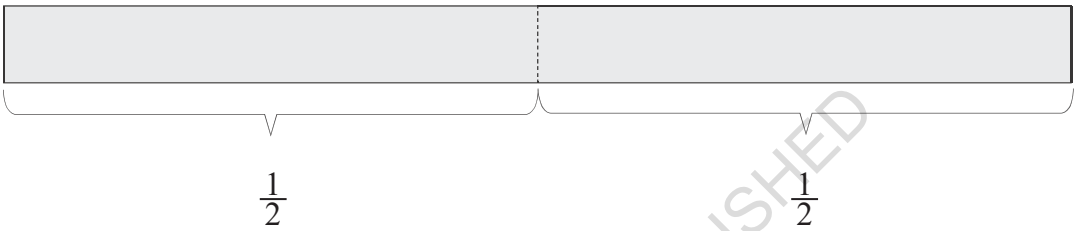
7.3 अपूर्णांकीय एककांचा उपयोग करून मोजणे

एक कागदाची पट्टी घ्या. ही कागदाची पट्टी एक एकक लांब आहे असे आम्ही विचारात घेऊ.



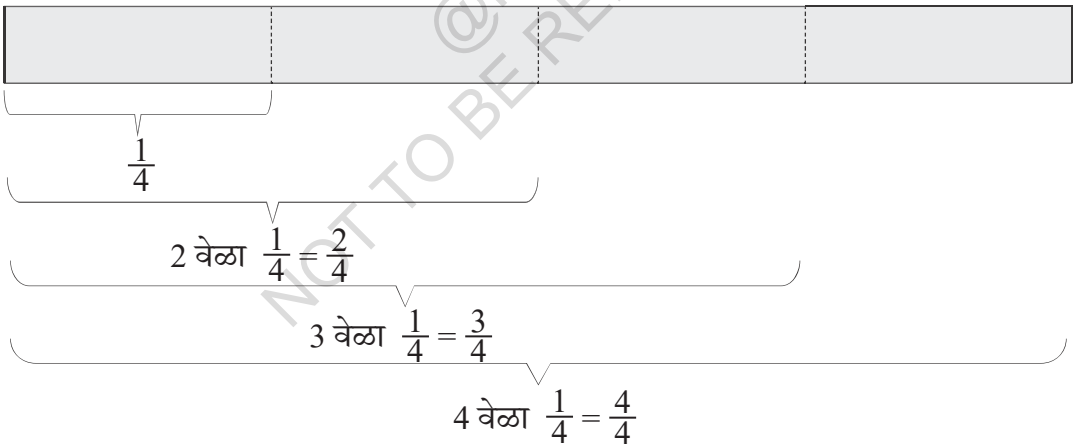
1 कागदी पट्टी

ती पट्टी दोन समान भागात दुमडा आणि पुन्हा ती पट्टी उघडा. ही पट्टी एक एकक लांबीची घेतल्यास दुमडून नवीन तयार झालेल्या पट्टीच्या 2 भागांची होणारी लांबी किती?



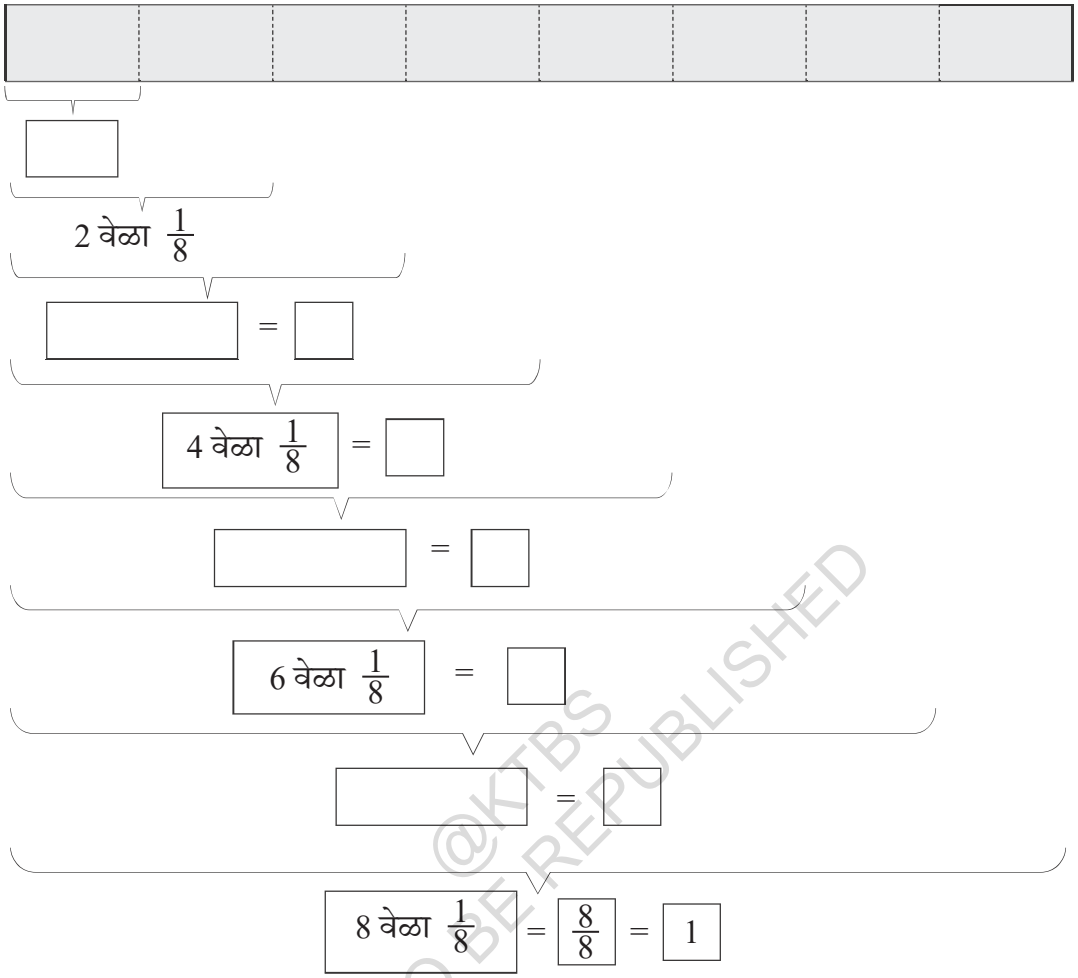
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

जर तुम्ही अगोदर घडी घातलेल्या पट्टीला पुन्हा दोन समान भागात घडी घातल्यास काय मिळेल? तुम्हाला आता चार समान भाग मिळतात.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ते पुन्हा एकदा करा. रिकाम्या चौकटी भरा.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अपूर्णांकीय समीकरण अपूर्णांकीय एककांचा वापर करून मोजता येतात.

आता दुसऱ्या उदाहरणाकडे पाहू.

 पूर्ण भाकरी दर्शविते. (संपूर्ण)

				
$\frac{1}{2}$ = 1 वेळ अर्धे	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 2 वेळा अर्धे	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 3 वेळा अर्धे	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 4 वेळा अर्धे	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 5 वेळा अर्धे

आम्ही अपूर्णांकीय एकके एकत्रित करून किती समीकरण संग्रहीत केली याचे वर्णन करू शकतो.

* शोधा पाहू.

1) हे $\frac{1}{2}$ चे कोष्टक 2 अधिक पायऱ्यांसाठी सुरु ठेवा.

2) तुम्ही $\frac{1}{4}$ साठी यासारखेच कोष्टक निर्माण करु शकता का?

3) कागदी पट्टीचा वापर करून $\frac{1}{3}$ बनवा. $\frac{1}{6}$ बनविण्यासाठी सुध्दा तुम्ही याचा उपयोग करू शकाल का?

4) एक चित्र काढा आणि हे दर्शविण्यासाठी वरीलप्रमाणे बेरजेचे विधान लिहा:

   a) $\frac{1}{4}$ भाकरी 5 वेळा (पाच पट)

   b) $\frac{1}{4}$ भाकरी 9 वेळा

5) प्रत्येक अपूर्णांकीय एककाची योग्य / बरोबर चित्राशी जोडी जुळवा.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अपूर्णांकांचे वाचन

सामान्यपणे आम्ही $\frac{3}{4}$ अपूर्णांक हा 'तीन चतुर्थांश' किंवा 'तीन छेद चार' असे वाचतो. परंतु हे '3 वेळा $\frac{1}{4}$' असे वाचल्यास आपल्याला त्या अपूर्णांकांचा आकार समजण्यास मदत होते. कारण ते स्पष्टपणे दर्शविते की, येथे $\frac{1}{4}$ हे अपूर्णांकीय एकक आहे आणि अशी 3 अपूर्णांकीय एकके आहेत.

अपूर्णांकाच्या वरील संख्येला आणि खालील संख्येला काय म्हणतो ते आम्ही आठवू. $\frac{5}{6}$ या अपूर्णांकामध्ये 5 हा **अंश** आणि 6 हा **छेद** आहे.

शिक्षकांसाठी सूचना

वर्तुळे, चौरस, आयत, त्रिकोण इत्यादी सारख्या वेगवेगळ्या आकारांसह अपूर्णांकीय एककांच्या कल्पनांचा शोध घेण्यासाठी मुलाना विविध संधी द्या.

7.4 संख्यारेषेवर अपूर्णांक दर्शविणे

संख्या रेषेवर 1, 2, 3, ... एकके या समान लांबीच्या खुणा आम्ही केलेल्या आहेत. आता संख्यारेषेवर अपूर्णांकाची समान लांबी दर्शविण्याचा प्रयत्न करुया.

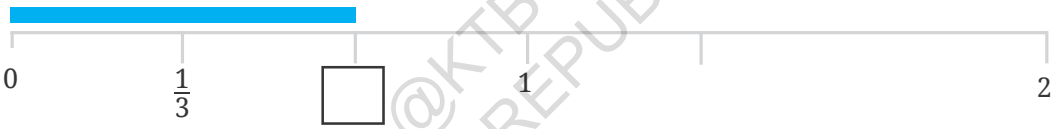
निळ्या रेषेची लांबी किती आहे? निळ्या रेषेची दिलेली अपूर्णांकीय लांबी चौकटीत लिहा.



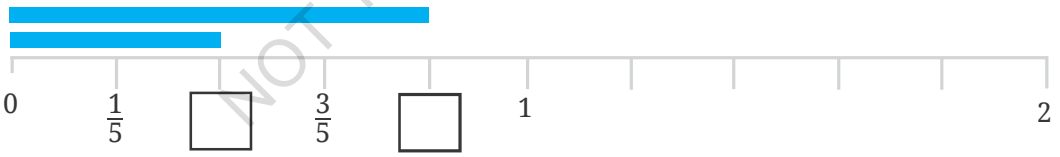
0 आणि 1 मधील अंतर हे 1 एकक लांब आहे. ते दोन समान भागात विभागले आहे. म्हणून प्रत्येक भागाची लांबी $\frac{1}{2}$ आहे. म्हणून ही निळी रेषा $\frac{1}{2}$ एकक लांब आहे.

* आता खाली दर्शविलेल्या विविध निळ्या रेषांची लांबी तुम्ही काढू शकाल काय? त्याचप्रमाणे चौकटीत भरा.

1) येथे 1 एकक लांबी ही अपूर्णांकीय एककाने तीन समान भागात विभागलेली आहे. तुमच्या वहीमध्ये किंवा चौकटीमध्ये निळ्या रेषेची मिळणारी अपूर्णांकीय लांबी लिहा.



2) येथे एक एकक हे 5 समान भागात विभागलेले आहे. तुमच्या वहीमध्ये किंवा चौकटीमध्ये निळ्या रेषेची मिळणारी संबंधित अपूर्णांकीय लांबी लिहा.



3) आता एक एकक हे 8 समान भागात विभागलेले आहे. तुमच्या वहीमध्ये योग्य अपूर्णांक लिहा.

* शोधा पाहू.

1) संख्या रेषेवर $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ आणि $\frac{4}{5}$ या लांबीच्या रेषा काढा.

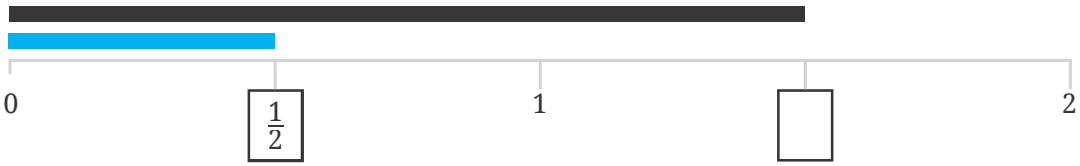


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

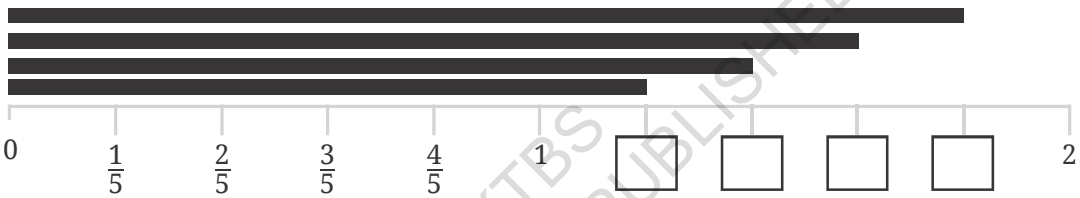
2) तुम्ही तुमच्या आवडीचे पाच अपूर्णांक निवडा आणि संख्या रेषेवर त्यांच्या खुणा करा.

3) 0 आणि 1 मध्ये किती अपूर्णांक आहेत? विचार करा तुमच्या वर्गमित्रांशी चर्चा करा आणि तुमचे उत्तर लिहा.

4) खाली दर्शविलेल्या निळ्या आणि काळ्या रेषेची लांबी किती? 0 आणि 1 यामधील अंतर हे 1 एकक लांब आहे आणि ते दोन समान भागात विभागलेले आहे. प्रत्येक भागाची लांबी $\frac{1}{2}$ आहे. म्हणून निळी रेषा $\frac{1}{2}$ एकके लांब आहे. काळ्या रेषेची दिलेली अपूर्णांकीय लांबी चौकटीत लिहा.



5) संबंधित चौकटीमध्ये काळ्या रेषेची दिलेली अपूर्णांकीय लांबी लिहा.



शिक्षकांसाठी सूचना

या रेषा फलकावर काढा आणि विद्यार्थ्यांना त्यांच्या वहीमध्ये त्याची उत्तरे लिहिण्यास सांगा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.5 मिश्र अपूर्णांक

एक (1) पेक्षा मोठे अपूर्णांक

तुम्ही यापूर्वी संख्या रेषेवर काही अपूर्णांकांच्या खुणा केलेल्या आहेत. तुमच्या लक्षात आले असेलच की, सर्व निळ्या रेषांची लांबी 1 पेक्षा कमी आहे आणि सर्व काळ्या रेषांची लांबी 1 पेक्षा अधिक आहे?

यापूर्वी संख्या रेषेवर तुम्ही खुणा केलेले सर्व अपूर्णांक लिहा.

आता यांचे दोन गटात आपण वर्गीकरण करुया.

लांबी 1 एककापेक्षा कमी	लांबी 1 एककापेक्षा जास्त

* 1 पेक्षा मोठ्या असणाऱ्या अपूर्णांकांमधील कोणती सामान्य गोष्ट तुमच्या लक्षात आली का?

1 एकक पेक्षा लहान असणाऱ्या सर्व अपूर्णांकांमध्ये अंश हा छेदापेक्षा लहान आहे. तर 1 एकक पेक्षा मोठा असणाऱ्या सर्व अपूर्णांकांमध्ये अंश हा छेदा पेक्षा मोठा आहे.

आम्हाला माहित आहे की $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ आणि $\frac{7}{2}$ हे सर्व 1 एकक पेक्षा मोठे आहेत. परंतु त्यामध्ये किती पूर्ण एकके आहेत हे आम्ही पाहू शकतो का?

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

मला माहित आहे की, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ जर मी अजून एक $\frac{1}{3}$ मिळविल्यास मला 1 एककापेक्षा मोठा अपूर्णांक मिळतो. म्हणून $\frac{4}{3} > 1$



* **शोधा पाहू.**

1) $\frac{7}{2}$ मध्ये किती पूर्ण एकके आहेत?

2) $\frac{4}{3}$ आणि $\frac{7}{3}$ मध्ये किती पूर्ण एकके आहेत?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एकपेक्षा मोठे असणारे अपूर्णांक हे मिश्र अपूर्णांकात लिहीणे

आम्ही पाहिले आहे की $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

त्याचप्रकारे इतर अपूर्णांक आम्ही लिहू शकतो.

उदाहरणार्थ : $\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

$3 \times \frac{1}{3} = 1$

* **शोधा पाहू.**

1) खालील प्रत्येक अपूर्णांकांच्या पूर्ण एककांच्या संख्येची आकृती काढा.

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{9}{4}$

आम्ही पाहिले आहे की,

$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

अपूर्णांक मिश्र संख्या

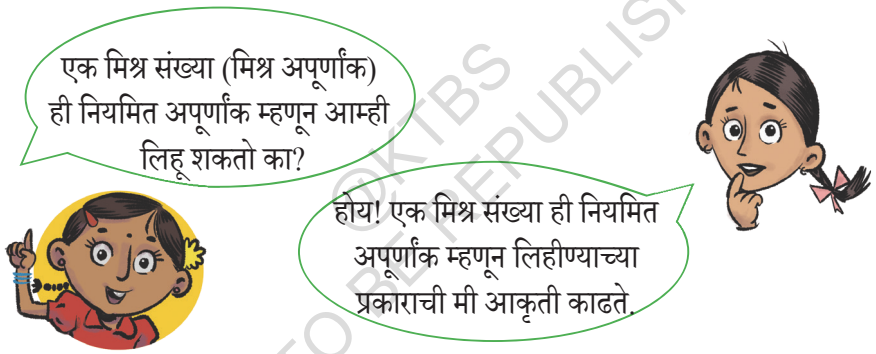
ही संख्या अशाप्रकारे 'दोन आणि दोन तृतीयांश' अशी सुध्दा म्हणू शकतो. आम्ही ती $2\ \frac{2}{3}$ अशी सुध्दा लिहीतो.

2) 1 पेक्षा मोठे असणारे सर्व अपूर्णांक अशाप्रकारे मिश्र अपूर्णांकात लिहीता येतात?

> मिश्र संख्येत / मिश्र अपूर्णांकांत एक पूर्ण संख्या (संपूर्ण भाग असे म्हणतात) आणि 1 पेक्षा लहान असणारा अपूर्णांक असतो. (अपूर्णांकीय भाग असे म्हणतात.)

3) खालील अपूर्णांक हे मिश्र अपूर्णांकात लिहा. (उदाहरणार्थ, $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$)

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{21}{19}$ d) $\frac{47}{9}$ e) $\frac{12}{11}$ f) $\frac{19}{6}$



© DKTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जया: जेव्हा माझ्याकडे $3 + \frac{3}{4}$ आहेत. याचा अर्थ, $1 + 1 + 1 + \frac{3}{4}$

मला माहित आहे की, $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

म्हणून मला मिळते,

$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$

म्हणून $(4 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) + (3 \times \frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$

* **शोधा पाहू.**

गणिती बोल

खालील मिश्र संख्या अपूर्णांकांत लिहा.

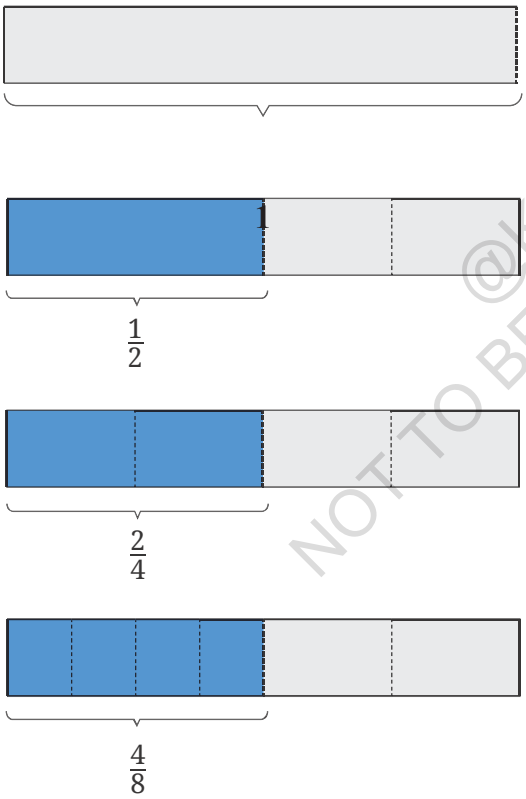
a) $3\frac{1}{4}$ b) $7\frac{2}{3}$ c) $9\frac{4}{9}$

d) $3\frac{1}{6}$ e) $2\frac{3}{11}$ f) $3\frac{9}{10}$

7.6 सममूल्य अपूर्णांक

अपूर्णांकीय भिंतीचा उपयोग करून समान अपूर्णांकीय लांबी काढणे.

मागील भागात तुम्ही कागदाच्या घडीचा उपयोग करून विविध अपूर्णांक हे अपूर्णांकीय एककाच्या सहाय्याने दर्शविले आहेत. त्याच कागदी पट्ट्यांच्या सहाय्याने कांही अधिक कृती करुया.



तुम्ही काय निरीक्षण केले आहे?

- $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{2}{4}$ यांची लांबी समान आहे का?
- $\frac{2}{4}$ आणि $\frac{4}{8}$ यांची लांबी समान आहे का?

आम्ही असे सांगतो की, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

हे 'सममूल्य' अपूर्णांक आहेत जे सारखीच लांबी दर्शवितात, परंतु ते वेगवेगळ्या अपूर्णांकीय एककांनी दर्शविले जातात.

आता कागदी पट्टीचा उपयोग करून $\frac{1}{3}$ किंवा $\frac{2}{6}$ हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत किंवा नाहीत ते तपासा.

खाली दिलेल्या चित्रांमधील अशा पट्ट्यांचा उपयोग करुन तुम्ही स्वतः अपूर्णांक भिंत तयार करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

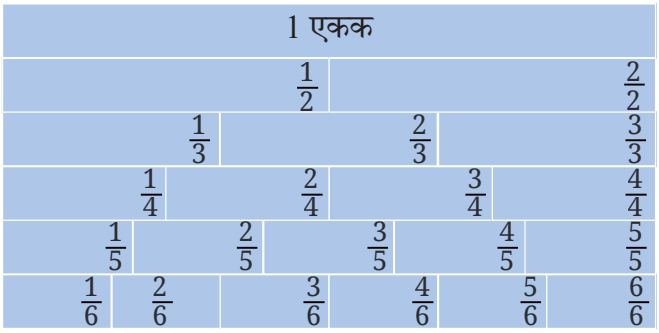
* अपूर्णांक भिंतीकडे पाहिल्यानंतर खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

1) $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{3}{6}$ यांची लांबी समान आहे का?

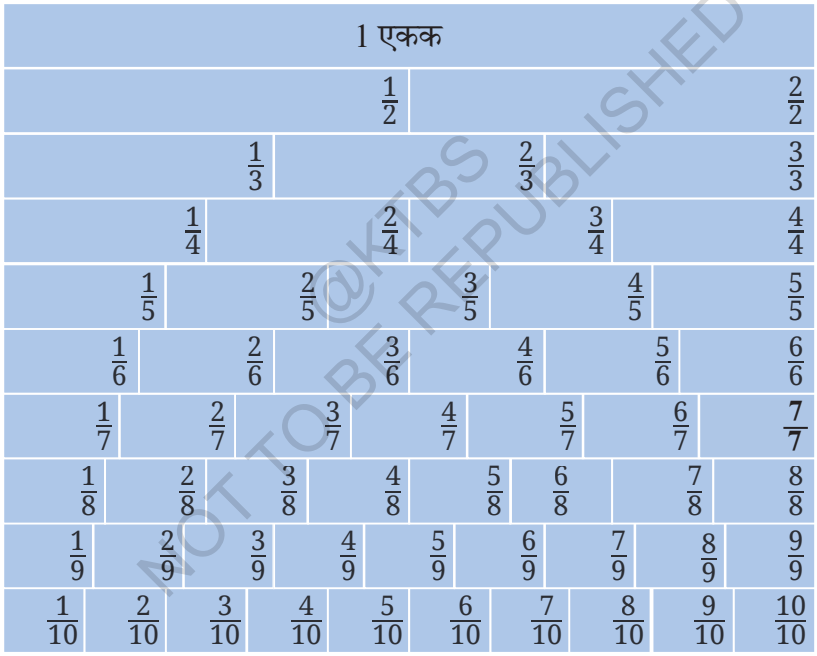
2) $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{4}{6}$ हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत काय? का?

3) $\frac{1}{6}$ लांबीच्या किती तुकड्यांपासून $\frac{1}{2}$ लांबी बनेल?

4) $\frac{1}{6}$ लांबीच्या किती पासून $\frac{1}{3}$ लांबी बनेल?



या कल्पनेचा उपयोग करून आम्ही एक अपूर्णांक भिंत $\frac{1}{10}$ अपूर्णांकीय एकक पर्यंत वाढवू शकतो. (ही अपूर्णांक भिंत पुस्तकाच्या शेवटी दिलेली आहे.)



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

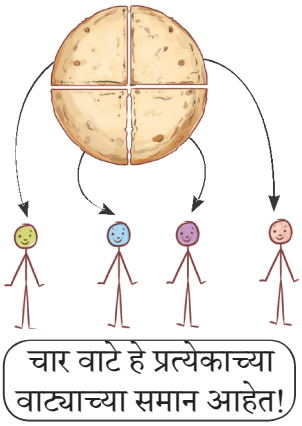
* शोधा पाहू.

1) $\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत? का?

2) $\frac{2}{6}$ साठी दोन सममूल्य अपूर्णांक लिहा.

3) $\frac{4}{6} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ = ... (शक्य तितके तुम्ही लिहा.)

समान वाटणीचा उपयोग करून सममूल्य अपूर्णांकाचे आकलन



एक भाकरी चार मुलांमध्ये समानरित्या वाटली आहे. प्रत्येक मुलाला संपूर्ण भाकरीचा कितवा भाग (अपूर्णांक) मिळेल? शेजारील आकृती ही एका भाकरीची चार मुलामध्ये होणारी विभागणी दर्शविते. प्रत्येक मुलाला मिळालेला भाकरीचा अपूर्णांक $\frac{1}{4}$ आहे.

ही घटना तुम्ही भागाकार, बेरीज आणि गुणाकार स्वरूपात सुध्दा दर्शवू शकता.

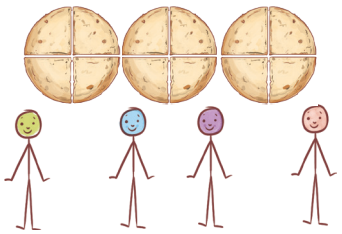
भागाकार स्वरूप $1 \div 4 = \frac{1}{4}$

बेरीज स्वरूप $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

गुणाकार स्वरूप $1 = 4 \times \frac{1}{4}$

* शोधा पाहू.

1) 4 मुलांमध्ये तीन भाकऱ्या समानरित्या वाटल्या आहेत. आकृतीमध्ये भागाकार दर्शवा आणि प्रत्येक मुलाला मिळणारा अपूर्णांक किती ते लिहा. संगत भागाकार, बेरीज आणि गुणाकार स्वरूपात सुध्दा लिहा.



प्रत्येक मुलाला मिळणारी भाकरी (अपूर्णांकात) _____

भागाकार स्वरूप :

बेरीज स्वरूप :

गुणाकार स्वरूप :

तुमच्या चित्राची तुलना करा आणि तुमच्या वर्गमित्राला उत्तरे द्या.

2) जर 2 भाकऱ्यांचे 4 मुलांमध्ये समानरित्या वाटप केले. तर प्रत्येक मुलाला मिळणारा वाटा दर्शविणारी आकृती काढा. संगत भागाकार, बेरीज आणि गुणाकार स्वरूपात सुद्धा लिहा.

3) अनिल हा एका 5 मुलांच्या गटामध्ये असून 2 केक त्यांच्यामध्ये समानरित्या वाटले आहेत. तर अनिलला किती केक मिळेल?

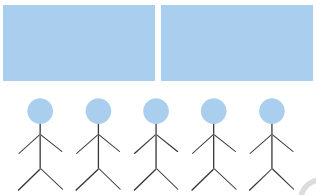
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता जर माझ्या गटात 10 मुले असतील तर अनिल इतकाच केक मिळण्यासाठी मला किती केक लागतील?

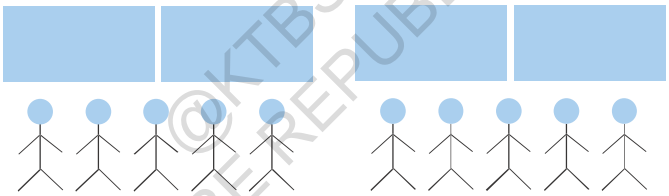
जर आम्ही दोन असे गट एकत्रित केले. एका गटात 2 केक 5 मुलांमध्ये समान वाटले आणि दुसऱ्या गटात पुन्हा 4 केक 10 मुलांमध्ये समान वाटले. तर काय होईल?



गट 1



गट 2



म्हणून या दोन्ही स्थितीमध्ये प्रत्येक मुलाचा वाटा समान आहे.



म्हणून $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$!

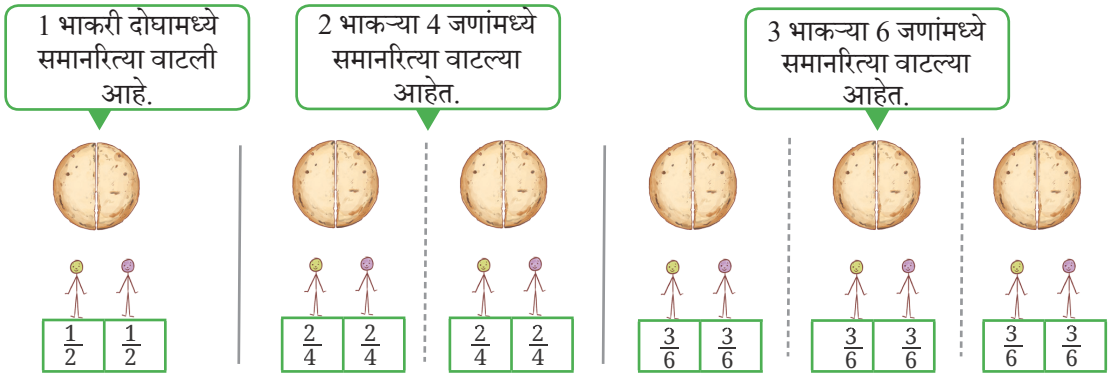
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

खालील संदर्भात प्रत्येक मुलाच्या वाट्याचे परीक्षण करूया.

- 1 भाकरी 2 मुलांमध्ये समान वाटली आहे.
- 2 भाकऱ्या 4 मुलांमध्ये समान वाटल्या आहेत.
- 3 भाकऱ्या 6 मुलांमध्ये समान वाटल्या आहेत.

चला चित्र काढून वाटूया!

प्रत्येक स्थितीमध्ये प्रत्येक मुलाचा वाटा सारखाच आहे हे तुमच्या लक्षात आले आहे का? म्हणून आम्ही असे सांगू की $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$



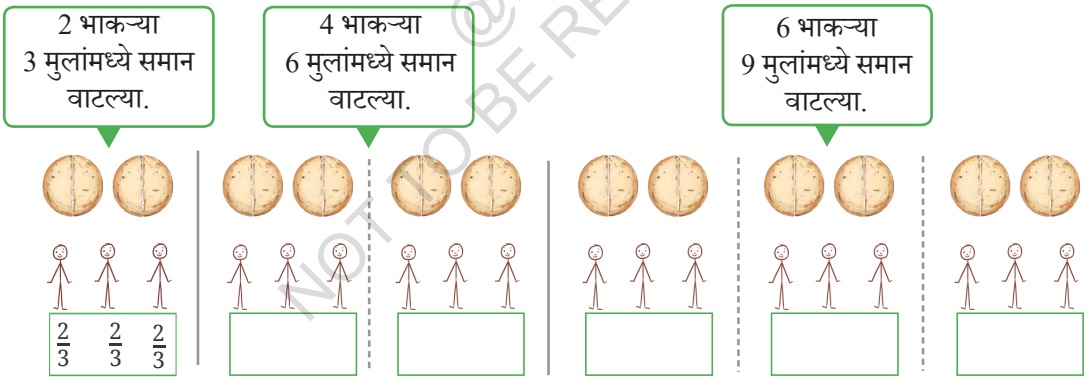
समान वाटा असणाऱ्या अपूर्णांकाना 'सममूल्य अपूर्णांक' असे म्हणतात.

म्हणून $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ आणि $\frac{5}{10}$ हे सर्व **सममूल्य अपूर्णांक** आहेत.

$\frac{1}{2}$ चे कांही अधिक सममूल्य अपूर्णांक काढा. येथे असलेल्या चौकटीत ते लिहा.

☐ ☐ ☐ ☐

खाली दाखविलेल्या संदर्भात भाकरीचे समान वाटप करा आणि प्रत्येक मूलाचा वाटा खाली लिहा. या प्रत्येक घटनेतील वाटणी सारखीच आहे काय? का?



$\frac{2}{3}$ ला $\frac{4}{6}$ चे साधे रूप असे सुध्दा म्हणतात. ते $\frac{6}{9}$ चे सुध्दा साधे रुप आहे.

या प्रत्येक अपूर्णांकांच्या अंश आणि छेदामधील संबंधाविषयी तुम्हाला कांहीतरी दिसून येते का?



@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

गाळलेल्या संख्या शोधा.

a) 5 रसाचे पेले 4 मित्रांमध्ये समान वाटले आहेत. हे _____ रसाचे पेले 8 मित्रांमध्ये समान वाटल्या प्रमाणेच आहे.

म्हणून $\frac{5}{4} = \frac{\square}{8}$



b) 4 कि. ग्रॅ. बटाटे हे 3 पिशव्यांमध्ये समान विभागले आहेत. हे 12 कि. ग्रॅ. बटाटे _____ पिशव्यांमध्ये समान विभागणी करण्याप्रमाणेच आहे.

म्हणून $\frac{4}{3} = \frac{12}{\square}$

c) 7 भाकऱ्यांचे 5 मुलांमध्ये वाटप करणे हे _____ भाकऱ्यांचे _____ मुलांमध्ये वाटप करण्याशी समान आहे.

* कोणत्या गटातील प्रत्येक मुलाला जास्त चिक्की मिळेल?1 चिक्की 2 मुलांमध्ये वाटणे की 5 चिक्क्या 8 मुलांमध्ये वाटप करणे.

मुक्ता : म्हणून आम्ही $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{5}{8}$ ची तुलना केली पाहिजे. कोणते अधिक आहे?

शबनम : ठीक आहे. आम्ही हे पाहिले आहे की $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ आणि स्पष्टपणे $\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$. म्हणून 5 चिक्क्यांचे 8 मुलांमध्ये समान केलेले वाटप हे 1 चिक्की 2 मुलांमध्ये समान केलेल्या वाटपापेक्षा अधिक आहे. म्हणून दुसऱ्या गटातील मुलांना प्रत्येकी अधिक चिक्की मिळेल.

* खालील गटाविषयी काय? कोणत्या गटातील प्रत्येक मुलाला अधिक चिक्की मिळेल? 1 चिक्की 2 मुलांमध्ये वाटणे की 4 चिक्क्या 7 मुलांमध्ये वाटणे?

शबनम : या वेळी कोणत्या गटातील मुलांना अधिक चिक्की मिळेल?

मुक्ता : आम्ही $\frac{1}{7}$ आणि $\frac{4}{7}$ ची तुलना केली पाहिजे.

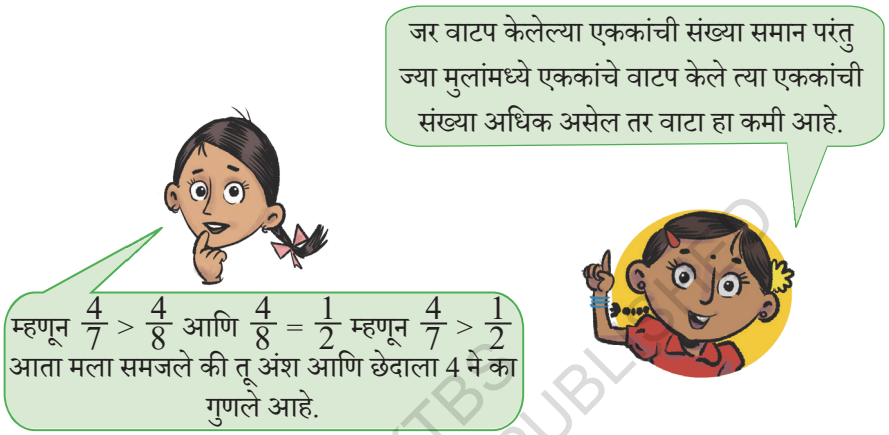
आता, $\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$ म्हणून $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

शबनम : परंतु तू अंश आणि छेदाला पुन्हा 4 ने का गुणले आहेस?

मुक्ता : तू पाहू शकतेस!

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED





© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* समजा मुलांची संख्या समान ठेवलेली आहे परंतु वाटप केलेल्या एककांची संख्या वाढविली आहे. तर आता तुम्ही प्रत्येक मुलाच्या वाटणी विषयी काय सांगू शकाल? का? तुमच्या तर्कांचे वर्णन कसे कराल? चर्चा करा.

$\frac{1}{5} < \frac{2}{5}$, $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ आणि $\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

* आता कोणत्या दोन गटातील प्रत्येक मुलाला मोठ्यात मोठा वाटा मिळेल हे ठरवा.

1) गट 1 : 3 ग्लास ऊसाचा रस 4 मुलांमध्ये समान प्रमाणात विभागला आहे.

   गट 2 : 7 ग्लास ऊसाचा रस 10 मुलांमध्ये समान प्रमाणात विभागला आहे.

2) गट 1 : 4 ग्लास ऊसाचा रस 7 मुलांमध्ये समान प्रमाणात विभागला आहे.

   गट 2 : 5 ग्लास ऊसाचा रस 7 मुलांमध्ये समान प्रमाणात विभागला आहे.

   कोणत्या गटाची तुलना करणे सोपे जाते? का?





शबनम : पहिल्या दोन गटांची तुलना करण्यासाठी आम्हाला $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{7}{10}$ या अपूर्णांकांचे सममूल्य अपूर्णांक काढावे लागतील.

मुक्ता : $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ आणि $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$ याविषयी कसे?

शबनम : तेथे एक अट आहे. दोन अपूर्णांकासाठी वापरलेले अपूर्णांकीय एकक सारखेच असणे आवश्यक आहे. $\frac{2}{6}$ आणि $\frac{3}{6}$ या दोन्हीमध्ये वापरलेला अपूर्णांकीय एकक सारखेच $\frac{1}{6}$ इतके आहे. (म्हणजेच छेद समान आहेत) परंतु $\frac{6}{8}$ आणि $\frac{21}{30}$ यामध्ये वापरलेली अपूर्णांकीय एकके सारखीच नाहीत (त्याना वेगवेगळे छेद आहेत).

मुक्ता : ठीक आहे, त्यासाठीच आपण सममूल्य अपूर्णांक बनविण्याची सुरुवात करुया.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$ परंतु केंव्हा मी थांबेन?

शबनम : समजले, $4 \times 10 = 40$ पर्यंत गेल्यास काय होईल?

मुक्ता : तुला दोन छेदांचा गुणाकार असे म्हणायचे आहे का? खूप छान!

आपल्याकडे $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{7}{10}$ आहेत. येथे दोन छेदांचा (4 आणि 10) गुणाकार 40 आहे.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{27}{36} = \frac{30}{40}$

$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40}$

छेद 40 मिळेपर्यंत आम्ही जाऊ.





© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

शबनम : म्हणून, $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{7}{10}$ चे सारखेच अपूर्णांकीय एकक (समान छेद) असणारे सममूल्य अपूर्णांक $\frac{30}{40}$ आणि $\frac{28}{40}$ किंवा $\frac{15}{20}$ आणि $\frac{14}{20}$ आहेत. म्हणून स्पष्टपणे $\frac{30}{40} > \frac{28}{40}$

आम्ही असा निष्कर्ष काढू की $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

* **दिलेल्या अपूर्णांकांच्या जोडीसाठीअसे सममूल्य अपूर्णांक काढा की ज्यांची अपूर्णांकीय एकके सारखीच आहेत.**

a) $\frac{7}{2}$ आणि $\frac{3}{5}$ b) $\frac{8}{3}$ आणि $\frac{5}{6}$

c) $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{3}{5}$ d) $\frac{6}{7}$ आणि $\frac{8}{5}$

e) $\frac{9}{4}$ आणि $\frac{5}{2}$ f) $\frac{1}{10}$ आणि $\frac{2}{9}$

g) $\frac{8}{3}$ आणि $\frac{11}{4}$ h) $\frac{13}{6}$ आणि $\frac{1}{9}$

अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात किंवा साध्या रुपात दर्शविणे

कोणत्याही अपूर्णांकांमध्ये जर त्यांच्या अंशाचा आणि छेदाचा 1 व्यतिरिक्त समाईक अवयव नसेल तर त्या अपूर्णांकाला **संक्षिप्त रुपात** आहे किंवा **साध्या रुपात** आहे असे म्हणतात. दुसऱ्या शब्दात जेव्हा अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद हे शक्य तितके लहान असतात. तेंव्हा तो अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात आहे असे म्हणतात.

अंश आणि छेद हे शक्य तितके लहान असणारे सममूल्य अपूर्णांक शोधून कोणतेही अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात दर्शविता येतात.

अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात कसे दर्शवितात ते पाहूया.

उदाहरण: $\frac{16}{20}$ हा अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात आहे का? नाही, 4 हा 16 आणि 20 चा समाईक अवयव आहे.

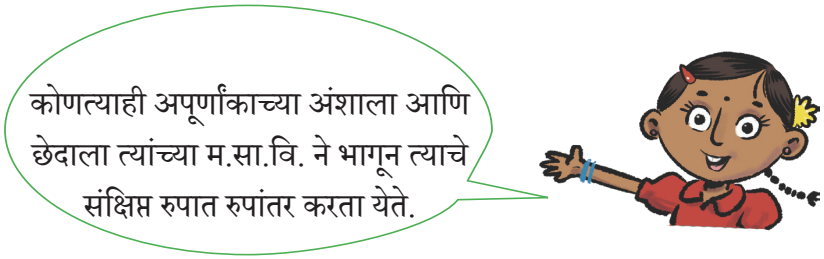
$\frac{16}{20}$ चे संक्षिप्त रुपात रुपांतर करुया.

आम्हाला माहित आहे की, 16 (अंश) आणि 20 (छेद) हे दोन्हीही 4 चे विभाज्य आहेत.

म्हणून $\frac{16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{4}{5}$

आता, 4 आणि 5 चा समाईक अवयव नाही. म्हणून $\frac{16}{20}$ हे $\frac{4}{5}$ असे संक्षिप्त रुपात दर्शविले आहे. म्हणून $\frac{4}{5}$ ला $\frac{16}{20}$ चे साधे रूप असेही म्हणतात. कारण 4 आणि 5 ला 1 व्यतिरिक्त समाईक अवयव नाही.

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED



विविध पायऱ्यांद्वारे सुद्धा अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात दर्शविले जाऊ शकतात.

समजा आम्हाला $\frac{36}{60}$ हे संक्षिप्त रुपात दर्शविले पाहिजे. प्रथम आम्हाला असे दिसून येते की, अंश आणि छेद या दोन्ही समसंख्या आहेत. म्हणून आम्ही दोन्हींना 2 ने भागू, आम्हाला $\frac{36}{60} = \frac{18}{30}$ असे मिळते.

पुन्हा अंश आणि छेद हे दोन्ही सम आहेत. म्हणून प्रत्येकाला आम्ही पुन्हा 2 ने भागू शकतो. आम्हाला $\frac{18}{30} = \frac{9}{15}$ मिळते.

आता आम्हाला असे दिसून येते की, 9 आणि 15 हे दोन्ही 3 चे गुणक आहेत. म्हणून आम्ही दोन्ही संख्याना 3 ने भागल्यास $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ मिळते.

आता 3 आणि 5 चे 1 व्यतिरिक्त समाईक अवयव नाहीत. म्हणून $\frac{3}{5}$ हे $\frac{36}{60}$ चे संक्षिप्त रुप आहे.

पर्यायाने आम्हाला $\frac{36}{60}$ मध्ये असे दिसून येते की, अंश आणि छेद हे दोन्ही 12 चे गुणक आहेत. त्यामुळे $36 = 3 \times 12$ आणि $60 = 5 \times 12$ असे मिळतात. म्हणून आम्ही असा सरळ निष्कर्ष काढू शकतो की $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

दोन्ही पध्दतीने केल्यास सारखेच उत्तर मिळते. परंतु कांही वेळा पायऱ्यांनी सोडविणे सोपे जाते.

©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

खालील अपूर्णांक संक्षिप्त रुपात दर्शवा.

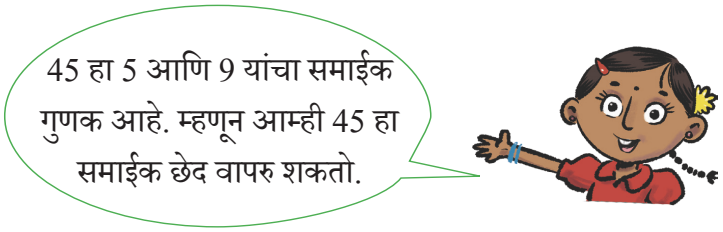
a) $\frac{17}{51}$ b) $\frac{64}{144}$ c) $\frac{126}{147}$ d) $\frac{525}{112}$

7.7 अपूर्णांकांची तुलना

$\frac{4}{5}$ किंवा $\frac{7}{9}$ यापैकी कोणता मोठा आहे? प्रत्यक्षपणे अशा दोन अपूर्णांकांची तुलना करणे कठीण जाते. तथापि आम्हाला सारखाच छेद असणारे दोन सममूल्य अपूर्णांक शोधणे माहित आहे. त्याचा कसा उपयोग करावा हे आता आपण पाहूया.

$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} = \frac{36}{45}$

$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{35}{45}$



स्पष्टपणे $\frac{36}{45} > \frac{35}{45}$

म्हणून $\frac{4}{5} > \frac{7}{9}$

दुसऱ्या जोडीसाठी हा प्रयत्न करूया. $\frac{7}{9}$ आणि $\frac{17}{21}$

63 हा 9 आणि 21 यांचा समाईक गुणक आहे. त्यामुळे आम्ही असे लिहू.

$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 7}{9 \times 7} = \frac{49}{63}$, $\frac{17}{21} = \frac{17 \times 3}{21 \times 3} = \frac{51}{63}$

स्पष्टपणे $\frac{49}{63} < \frac{51}{63}$ म्हणून $\frac{7}{9} < \frac{17}{21}$

सारांश घेऊया!

दिलेल्या दोन किंवा अधिक अपूर्णांकांच्या आकाराची तुलना करण्यासाठी पायऱ्या :

पायरी 1: दिलेल्या अपूर्णांकांना सममूल्य अपूर्णांकामध्ये असे बदला की ते सर्व सारखाच छेद किंवा सारख्याच अपूर्णांकीय एककात व्यक्त करता येतील.

पायरी 2: आता फक्त सहजपणे छेदांची तुलना करून प्रत्येक अपूर्णांकामध्ये असणाऱ्या अपूर्णांकीय एककाच्या संख्येने सममूल्य अपूर्णांकांची तुलना करा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू.

1) खालील अपूर्णांकाची तुलना करा आणि तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

a) $\frac{8}{3}, \frac{5}{2}$ b) $\frac{4}{9}, \frac{3}{7}$ c) $\frac{7}{10}, \frac{9}{14}$ d) $\frac{12}{5}, \frac{8}{5}$ e) $\frac{9}{4}, \frac{5}{2}$

2) खालील अपूर्णांक हे चढत्या क्रमाने लिहा.

a) $\frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{2}{5}$ b) $\frac{19}{24}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$

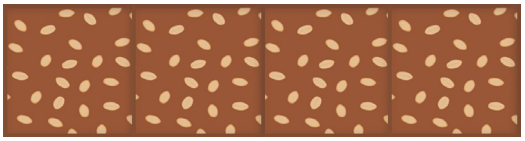
3) खालील अपूर्णांक हे उतरत्या क्रमात लिहा.

a) $\frac{25}{16}, \frac{7}{8}, \frac{13}{4}, \frac{17}{32}$ b) $\frac{3}{4}, \frac{12}{5}, \frac{7}{12}, \frac{5}{4}$

7.8 अपूर्णांकांची बेरीज आणि वजाबाकी

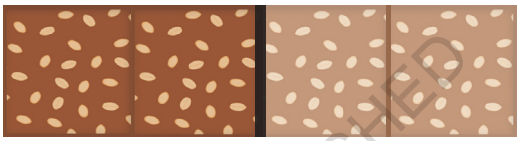


मीनाच्या वडीलांनी कांही चिक्क्या बनविल्या आहेत. मीना त्यातील $\frac{1}{2}$ खाते आणि तिच्या लहान भावाला $\frac{1}{4}$ चिक्की खाण्यास देते. मीना आणि तिच्या भावाने मिळून एकूण किती चिक्की खाल्ली आहे?



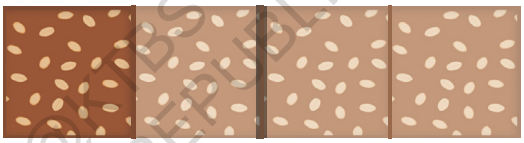
आम्ही हे चित्ररुपात दर्शवून उत्तराकडे येऊ शकतो. एक चिक्कीचा तुकडा घेऊ आणि दाखविल्याप्रमाणे प्रथम तिची दोन भागात विभागणी करु.

चित्रात दर्शविल्याप्रमाणे मीना त्यातील $\frac{1}{2}$ चिक्की खाते.



मीनाने खाल्ली

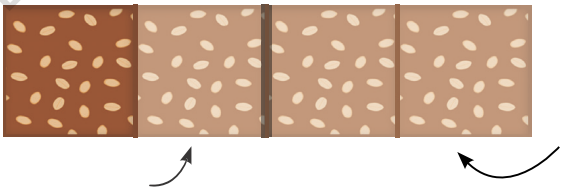
आता राहिलेल्या अर्ध्या चिक्कीचे दाखविल्याप्रमाणे पुढे दोन भाग करू. या तुकड्याचा प्रत्येक भाग हा संपूर्ण चिक्कीच्या $\frac{1}{4}$ आहे.



मीनाने खाल्ली

भावाने खाल्ली

चित्रात दाखविल्याप्रमाणे मीनाच्या भावाने संपूर्ण चिक्कीचा $\frac{1}{4}$ भाग खाल्ला.



खाल्लेली एकूण चिक्की

खाल्लेली एकूण चिक्की $\frac{1}{2}$ (मीनाने) आणि $\frac{1}{4}$ (तिच्या भावाने) आहे.

खाल्लेली एकूण चिक्की

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= 3 \times \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

एकूण चिक्कीपैकी किती चिक्की शिल्लक राहिली आहे?

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

समान अपूर्णांकीय एकक किंवा समान छेद असणाऱ्या अपूर्णांकांची बेरीज

उदाहरण : $\frac{2}{5}$ आणि $\frac{1}{5}$ ची बेरीज करा.

आयताकार पट्ट्यांचा उपयोग करून दोन्ही अपूर्णांक दर्शवू. दोन्ही अपूर्णांकांमध्ये सारखाच अपूर्णांकीय एकक $\frac{1}{5}$ आहे. म्हणून प्रत्येक पट्टी 5 समान भागात विभागता येईल.

म्हणून $\frac{2}{5}$ हे असे दर्शविता येईल.



आणि $\frac{1}{5}$ हे असे दर्शविता येईल.



दिलेल्या दोन अपूर्णांकांची बेरीज ही छायांकीत केलेल्या भागांच्या एकूण संख्येशी समान आहे. त्यापैकी प्रत्येकाचा सारखा अपूर्णांकीय एकक $\frac{1}{5}$ आहे.

या घटनेमध्ये छायांकीत केलेल्या भागांची एकूण संख्या 3 आहे. म्हणून प्रत्येक छायांकीत केलेला भाग अपूर्णांकीय भाग $\frac{1}{5}$ दर्शवितो. आम्हाला असे दिसून येते की, छायांकीत केलेले 3 भाग एकत्रितपणे $\frac{3}{5}$ हा अपूर्णांक दर्शवितात.

म्हणून $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$



उदाहरण : $\frac{4}{7}$ आणि $\frac{6}{7}$ ची बेरीज करा.

पुन्हा आयताकार पट्ट्यांच्या नमुन्याचा उपयोग करून दोन्ही अपूर्णांक दर्शवू. येथे दोन्ही अपूर्णांकांचे अपूर्णांकीय एकक समान म्हणजेच $\frac{1}{7}$ आहेत. म्हणून प्रत्येक पट्टी 7 समान भागात विभागता येईल.

त्यानंतर $\frac{4}{7}$ हे असे दर्शविता येईल.



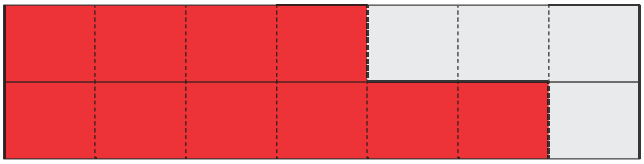
आणि $\frac{6}{7}$ हे असे दर्शविता येईल.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या घटनेमध्ये छायांकीत केलेल्या भागांची एकूण संख्या 10 आहे आणि प्रत्येक छायांकीत भाग हा अपूर्णांकीय एकक $\frac{1}{7}$ दर्शवितो. म्हणून छायांकीत केलेले भाग एकत्रितपणे $\frac{10}{7}$ अपूर्णांक येथे दाखविला आहे.

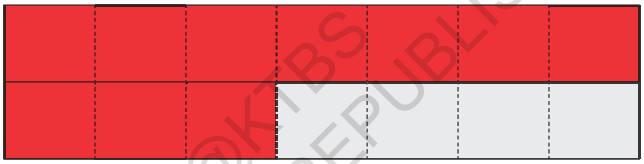
सारखेच अपूर्णांकीय एकक असलेल्या अपूर्णांकांची बेरीज करताना प्रत्येक अपूर्णांकामधील फक्त अपूर्णांकीय एककांची संख्या मिळविली पाहिजे.



म्हणून $\frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7}$

$= 1 + \frac{3}{7}$

$= 1\frac{3}{7}$



* संख्या रेषेचा उपयोग करून $\frac{4}{6} + \frac{6}{7}$ ची बेरीज करण्याचा प्रयत्न करा. तुम्हाला सारखेच उत्तर मिळते का?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके किंवा वेगवेगळे छेद असणाऱ्या अपूर्णांकांची बेरीज

उदाहरण: $\frac{1}{4}$ आणि $\frac{1}{3}$ ची बेरीज करा.

वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके असणाऱ्या अपूर्णांकांची बेरीज करताना प्रथम अपूर्णांकाचे समान छेद / अपूर्णांकीय एकक असणाऱ्या सममूल्य अपूर्णांकात रुपांतर करावे.

या घटनेमध्ये $3 \times 4 = 12$ असा समाईक छेद बनविला आहे. $\frac{1}{12}$ हे अपूर्णांकीय एकक असणारे सममूल्य अपूर्णांक आम्ही काढू शकतो.

दिलेल्या प्रत्येक अपूर्णांकासाठी आता आपण सममूल्य अपूर्णांक लिहूया.

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$, $\quad \frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$

आता $\frac{3}{12}$ आणि $\frac{4}{12}$ यांना सारखेच $\frac{1}{12}$ इतके अपूर्णांकीय एकक आहे.

म्हणून $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$

कितीही अपूर्णांक मिळविण्यासाठी कार्य करणारी ही बेरीज पध्दत प्रथम ब्रम्हगुप्तानी इसवीसन 628 मध्ये स्पष्टपणे वर्णन केली होती. आम्ही अपूर्णांकांच्या विकासाच्या इतिहासाचे वर्णन अधिक तपशीलाने पुढील पाठात करूया. त्यासाठी आता आम्ही अपूर्णांकाच्या बेरजेच्या ब्रम्हगुप्तांच्या पध्दतीतील पायऱ्यांचा फक्त सारांश घेऊया.

अपूर्णांकाच्या बेरजेची ब्रम्हगुप्तांची पध्दत

1) सर्व अपूर्णांकाचे समाईक अपूर्णांकीय एकक असणारे सममूल्य अपूर्णांक काढा. हे छेदाचे समाईक गुणक शोधून काढणे शक्य आहे. (म्हणजेच छेदांचा गुणाकार किंवा छेदांचा ल.सा.वि.)

2) सारखीच अपूर्णांकीय एकके असणारे सममूल्य अपूर्णांक मिळवा. छेद समान ठेवून अंशाची बेरीज केल्याने हे शक्य होते.

3) जर आवश्यकता असेल तर परिणाम संक्षिप्त रुपात दर्शवा.

ब्रम्हगुप्ताच्या पध्दतीचे आणखी उदाहरण घेऊ.

उदाहरण : $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{1}{5}$ ची बेरीज करा.

दिलेल्या अपूर्णांकाचे छेद 3 आणि 5 आहेत. 3 आणि 5 चा. ल. सा. वि. 15 आहे. नंतर आम्हाला दिसून येते की $\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$, $\frac{1}{5}=\frac{1\times3}{5\times3}=\frac{3}{15}$

म्हणून $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{13}{15}$

उदाहरण: $\frac{1}{6}$ आणि $\frac{1}{3}$ ची बेरीज करा.

6 आणि 3 चा ल. सा. वि. 6 आहे.

$\frac{1}{6}$ हे $\frac{1}{6}$ असेच राहील.

$\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$

म्हणून $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$

हवे असल्यास $\frac{3}{6}$ अपूर्णांक हा आता संक्षिप्त रुपात दर्शविता येतो. अंशाला आणि छेदाला 3 ने भागून हे करता येते. (3 आणि 6 चा महत्तम साधारण विभाजक)

$$\frac{3}{6}=\frac{3\div3}{6\div3}=\frac{1}{2}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

* शोधा पाहू.

1) ब्रम्हगुप्तांच्या पध्दतीचा उपयोग करून खालील अपूर्णांकांची बेरीज करा.

a) $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$ b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

d) $\frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ f) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

g) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ h) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$ i) $\frac{9}{2} + \frac{5}{4}$

j) $\frac{8}{3} + \frac{2}{7}$ k) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ l) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}$

m) $\frac{9}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$

2) रहीम हिरवा रंग बनविण्यासाठी $\frac{3}{4}$ लिटर निळ्या रंगामध्ये $\frac{2}{3}$ लिटर पिवळा रंग मिसळतो. त्याने बनविलेल्या हिरव्या रंगाचे घनफळ किती आहे?

3) गीता 1 मी. परिमिती असणाऱ्या एका टेबलावरील कापडाच्या संपूर्ण काठाला लावण्यासाठी $\frac{2}{5}$ मीटर इतकी नक्षीदार झालर खरेदी करते आणि शामिम $\frac{3}{4}$ मीटर इतकी त्यासारखीच झालर खरेदी करते. दोघींनी खरेदी केलेल्या नक्षीदार झालरची एकूण लांबी काढा. संपूर्ण काठाला लावण्यासाठी ती झालर पुरेल का?

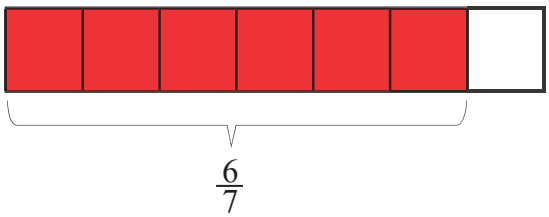
©KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

समान अपूर्णांकीय एकक किंवा समान छेद असणाऱ्या अपूर्णांकांची वजाबाकी

ब्रम्हगुप्तांची पध्दत अपूर्णांकांच्या वजाबाकीला सुध्दा लागू पडते.

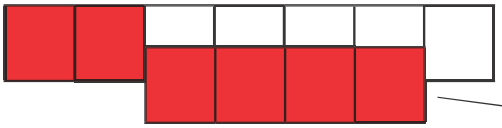
$\frac{6}{7}$ मधून $\frac{4}{7}$ वजा करण्याच्या समस्येपासून सुरुवात करुया. म्हणजेच $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$ हे किती आहे?

ही समस्या सोडविण्यासाठी आम्ही पुन्हा आयताकार पट्टयांचा उपयोग करु शकतो. दोन्ही अपूर्णांकामध्ये अपूर्णांकीय एकक समान आहे, म्हणजेच $\frac{1}{7}$ प्रथम मोठा अपूर्णांक हा एका आयताकार पट्टीच्या नमुन्याचा उपयोग करून खाली दाखविल्याप्रमाणे दर्शवूया.



$\frac{6}{7}$

प्रत्येक छायांकीत केलेला भाग $\frac{1}{7}$ दर्शवितो. आता आम्हाला $\frac{4}{7}$ वजा करावयाचे आहे. हे करण्यासाठी छायांकीत केलेले 4 भाग काढून टाकूया.





म्हणून आमच्याकडे 2 छायांकीत भाग शिल्लक राहिलेले आहेत. म्हणजेच $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

हा अभ्यास संख्यारेषेचा उपयोग करून करण्याचा प्रयत्न करा.

* **शोधा पाहू.**

1) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ 2) $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$ 3) $\frac{10}{27} - \frac{1}{27}$

वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके किंवा वेगवेगळे छेद असणाऱ्या अपूर्णांकांची वजाबाकी

उदाहरण: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ वजाबाकी करा.

सारखीच अपूर्णांकीय एकके असलेल्या अपूर्णांकांच्या वजाबाकीची पध्दत ही आपल्याला माहित आहे. दिलेल्या प्रत्येक अपूर्णांकाचे रुपांतर हे सारख्याच अपूर्णांकीय एकके असलेल्या सममूल्य अपूर्णांकामध्ये करुया.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

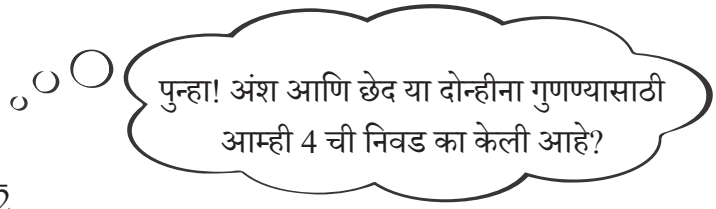
होय! हे केल्याने आम्ही दोन अपूर्णांक सहजपणे वजा करु शकतो.

विचार करा! अंश आणि छेद या दोन्हीना गुणण्यासाठी आम्ही 3 ची निवड का केली आहे?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आणि त्याचप्रमाणे

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$



म्हणून $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$

दोन अपूर्णांकांच्या वजाबाकीसाठी ब्रम्हगुप्तांची पध्दत

1) दिलेल्या अपूर्णांकाचे रुपांतर हे सारख्याच अपूर्णांकीय एककांमध्ये म्हणजेच समान छेद असणाऱ्या अपूर्णांकामध्ये करा.

2) सारखीच अपूर्णांकीय एकके असलेल्या अपूर्णांकांची वजाबाकी करा. अंशाची वजाबाकी आणि छेद सारखाच ठेऊन हे करु शकतो.

3) जर गरज असेल तर परिणाम हा सरळरुपात देऊन संक्षिप्त रुपात लिहा.

* शोधा पाहू.

1) ब्रम्हगुप्तांच्या पध्दतीचा उपयोग करून खालील अपूर्णांकांची वजाबाकी करा.

a) $\frac{8}{15} - \frac{3}{15}$ b) $\frac{2}{5} - \frac{4}{15}$ c) $\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$ d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

2) सूचविल्याप्रमाणे वजाबाकी करा.

a) $\frac{10}{3}$ मधून $\frac{13}{4}$

b) $\frac{23}{3}$ मधून $\frac{18}{5}$

b) $\frac{45}{7}$ मधून $\frac{29}{7}$

3) खालील उदाहरणे / समस्या सोडवा.

a) जयाची शाळा ही तिच्या घरापासून $\frac{7}{10}$ कि.मी. दूर आहे. ती दररोज तिच्या घरापासून $\frac{1}{2}$ कि. मी. रिक्षाने जाते आणि राहिलेले अंतर चालत जाऊन तिच्या शाळेला पोहोचते. शाळेला पोहोचण्यासाठी दररोज ती किती अंतर चालते?

b) जीविका $\frac{10}{3}$ मिनिटात उद्यानाला एक पूर्ण फेरी घालते आणि तिचा मित्र नमित तीच फेरी मिनिटात घालतो. कोणाला कमी वेळ लागतो आणि किती?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.9 ऐतिहासिक संदर्भ

प्राचीन भारतात अपूर्णांकाला काय म्हणतात हे तुम्हाला माहित आहे का? त्याला संस्कृतमध्ये 'भिन्न' असे म्हणतात म्हणजेच 'तुटलेला', त्याला 'भाग' किंवा 'अंश' म्हणजे 'भाग' किंवा 'तुकडा' असेही म्हणतात.

आज आपण ज्याप्रकारे अपूर्णांक लिहितो, जागतिक स्तरावर त्याचा उगम भारतात झाला आहे. प्राचीन भारतीय गणितीय ग्रंथांमध्ये जसे की बक्षाली हस्तलिखीत (सुमारे इ. स. 300 वर्षापासून) जेव्हा त्यांना $\frac{1}{2}$ लिहायचे होते तेव्हा त्यांनी ते $\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$ असे लिहीले. जे आज आपण ज्याप्रमाणे लिहितो त्याच्याशी जवळजवळ सारखेच आहे. अपूर्णांक लिहिण्याची आणि कार्य करण्याची ही पध्दत पुढील अनेक शतके भारतात वापरली गेली. ज्यात आर्यभट्ट (इ. स. 499), ब्रम्हपुत्र (इ. स. 628), श्रीधराचार्य (इ. स. 750) आणि महावीराचार्य (इ. स. 850) यांसह इतरांचा समावेश होता. त्यानंतर मोरोक्कन गणितज्ञ अल- हस्सार यांनी 12 व्या शतकामध्ये '$\frac{1}{2}$' आणि इतर अपूर्णांकांच्या अंश आणि छेद यामधील रेषाखंडाचा परिचय केलेला आहे. पुढील कांही शतकामध्ये हा संकेत युरोपसह जगभरात पसरला.

प्राचीन इजिप्शियन आणि बॅबिलोनियन संस्कृतीसारख्या इतर संस्कृत्यांमध्ये देखील अपूर्णांकांचा वापर केला गेला होता. परंतु त्यांनी प्रामुख्याने फक्त अपूर्णांकीय एककांचा वापर केला होता, म्हणजेच 1 हे अंशामध्ये असणारे अपूर्णांक होय. अधिक सामान्य अपूर्णांक हे अपूर्णांकीय एककांच्या बेरजेने दर्शवत असत.आता त्याना 'इजिप्शियन अपूर्णांक' असे म्हणतात. अपूर्णांकीय एककांची बेरीज म्हणून संख्या लिहिणे. म्हणजेच $\frac{19}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ ही एक कला असू शकते आणि ती आपणास सुंदर कोड्याकडे नेते. अशा एका कोडयाचा आम्ही खाली विचार करुया.

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि अगदी भागाकार यासारख्या अंकगणितीय क्रियांच्या नियमांसह सामान्य अपूर्णांकांचा (जेथे अंश 1 असणे गरजेचे नाही) परिचय प्रथमतः भारतात केला गेला. 'सुलबासूत्र' नावाच्या प्राचीन भारतीय ग्रंथांवरून असे दिसून येते की, वैदिक काळातही भारतीयांनी अपूर्णांकावरील क्रियांचे नियम शोधले होते. अपूर्णांकासह कार्य करण्यासाठी आणि गणना करण्यासाठी सामान्य नियम आणि कार्यपद्धती प्रथम औपचारिकरित्या आणि आधुनिक स्वरुपात ब्रम्हगुप्त यांनी संहिताबध्द केल्या.

ब्रम्हगुप्तांची अपूर्णांकासह कार्य करण्याची आणि मोजण्याची पध्दत आजही आम्ही वापरतो. उदाहरणार्थ, अपूर्णांकाची बेरीज आणि वजाबाकी कशी करावी याचे वर्णन ब्रम्हगुप्तानी खालीलप्रमाणे केले आहे:

"प्रत्येक अपूर्णांकाच्या अंशाला आणि छेदाला इतर अपुर्णांकाच्या छेदाने गुणल्यास अपूर्णांक हे सामान्य छेदात रुपांतरीत होतात. नंतर बेरजेच्या घटनेत अंश (रुपांतराने मिळाल्यानंतर) मिळवावेत. वजाबाकीच्या घटनेत त्याची वजाबाकी केली जाते." (ब्रम्हगुप्त, ब्रम्हस्फुत सिद्धांत श्लोक 12.2, इ. स. 628)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अपूर्णांकाचा समावेश असलेल्या भारतीय संकल्पना आणि पध्दती पुढील कांही शतकांमध्ये अरबाद्वारे युरोपमध्ये प्रसारीत केल्या गेल्या आणि 17 व्या शतकाच्या आसपास युरोपमध्ये सामान्यपणे वापरल्या गेल्या आणि त्यानंतर त्या जगभरात पसरल्या.

* कोडे

जर एखाद्याने सारखेच अपूर्णांकीय एकक वापरले तर अपूर्णांकीय एककांची बेरीज 1 येण्यासाठी ते मिळविणे सोपे आहे.

उदा. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ इत्यादी.

तथापि, जेथे सर्व वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके असतील तेथे 1 मिळविण्याच्या पद्धतीचा तुम्ही विचार करु शकाल काय?

1 मिळविण्यासाठी दोन वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके मिळविणे शक्य नाही. त्याचे कारण असे की, $\frac{1}{2}$ हा मोठ्यात मोठा अपूर्णांकीय एकक आहे आणि $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके मिळविण्यासाठी आम्हाला किमान एका $\frac{1}{2}$ ची जागा ही लहानात लहान अपूर्णांकीय एककाने घ्यावी लागेल; परंतु नंतर बेरीज 1 पेक्षा कमी असेल. त्यामुळे दोन वेगवेगळ्या अपूर्णांकीय एकाकांच्या बेरजेने 1 मिळविणे शक्य नाही.

त्याऐवजी आपण तीन वेगवेगळी अपूर्णांकीय एककांची बेरीज म्हणून 1 लिहीण्याची पद्धत शोधण्याचा प्रयत्न करु शकतो.



1) तीन वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके मिळविल्यास 1 बेरीज असणारी तुम्ही अपूर्णांकीय एकके तुम्ही शोधू शकाल काय?

या समस्येची फक्त एकच उकल आहे असे दिसून येते. (3 अपूर्णांकाचा क्रम बदलण्यापर्यंत) तुम्ही ते काढू शकाल का? पुढे वाचण्याअगोदर ते काढण्याचा प्रयत्न करा.

उकल शोधण्याचा येथे एक पध्दतशीर मार्ग आहे. आम्हाला माहित आहे की, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} =1$. वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके मिळविण्यासाठी आम्ही कमीत कमी एक $\frac{1}{3}$ वाढविले पाहिजे आणि राहिलेल्यांपैकी कमीत कमी एक $\frac{1}{3}$ कमी करून वाढविण्यासाठी संधी प्राप्त करून घेतली पाहिजे. दुसरे अपूर्णांकीय एकक $\frac{1}{3}$ ला वाढविण्यासाठी ते $\frac{1}{2}$ ने बदलणे हा फक्त एक मार्ग आहे.

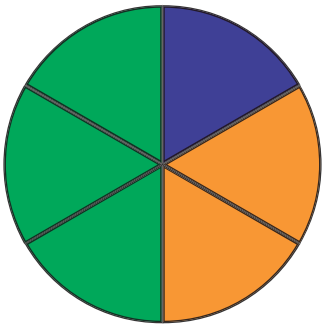
म्हणून $\frac{1}{2}$ हे एक अपूर्णांकीय एकक असले पाहिजे.

आता $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ अपूर्णांकीय एकके वेगवेगळी मिळविण्यासाठी आम्ही एक $\frac{1}{4}$ ने वाढविले पाहिजे आणि दुसरे $\frac{1}{4}$ ने कमी करून समतोल राखला पाहिजे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता दुसरा अपूर्णांकीय एकक $\frac{1}{4}$ ला वाढविण्याचा मार्ग म्हणजे तो $\frac{1}{2}$ पासून भिन्न असणारा म्हणजेच $\frac{1}{3}$ ने बदलला पाहिजे. म्हणून दोन अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{3}$ असले पाहिजेत. तीन अपूर्णांक मिळविल्यास 1 येत असेल तर तिसरा अपूर्णांक किती असला पाहिजे?

हे वरील समस्येला फक्त एकच उकल का आहे याचे वर्णन करते.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

1 बेरीज येण्यासाठी चार वेगवेगळ्या अपूर्णांकीय एककांचा शोध घेतला तर आम्हाला काय मिळेल?

2) 1 बेरीज येण्यासाठी चार वेगवेगळी अपूर्णांकीय एकके तुम्ही काढू शकाल काय?

असे दिसून येते की, या समस्येला सहा उकला आहेत. त्यापैकी कमीत कमी एक तुम्ही काढू शकाल का? तुम्ही सर्व काढू शकाल का? सारख्या कारणमिमांसा वापरून दोन किंवा तीन अपूर्णांकीय एकके असलेल्या घटनेसाठी तुम्ही प्रयत्न करू शकाल काय किंवा तुमच्या स्वतःच्या पध्दतीने काढा.

याचा प्रयत्न करा.

एकदा तुम्ही एक उकल काढली तर वरील आकृतीप्रमाणे एका वर्तुळाचे भाग करून दर्शविण्याचा प्रयत्न करा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

* **समान वाटा असणारे अपूर्णांक:** जेव्हा एककांची संपूर्ण संख्या समान भागांमध्ये विभागली जाते आणि समान रितीने वाटली जाते तेव्हा परिणामी **अपूर्णांक** मिळतात.

* **अपूर्णांकीय एकके:** जेव्हा एक संपूर्ण मुलभूत एकक समान भागांमध्ये विभागले जाते तेव्हा प्रत्येक भागाला **अपूर्णांकीय एकक** असे म्हणतात.

* **अपूर्णांक वाचणे :** $\frac{5}{6}$ अशा प्रकारच्या अपूर्णांकात 5 ला **अंश** आणि 6 ला **छेद** असे म्हणतात.

* **मिश्र अपूर्णांक :** मिश्र अपूर्णांकामध्ये एक पूर्ण संख्या आणि एक अपूर्णांकीय भाग असतो.

* **संख्यारेषा:** संख्यारेषेवर अपूर्णांक दर्शविता येतात. प्रत्येक अपूर्णांकाला संख्या रेषेवर त्यांच्याशी संबंधित एक बिंदू असतो.

* **सममूल्य अपूर्णांक :** जेव्हा दोन किंवा अधिक अपूर्णांक समान भाग / संख्या दर्शवितात तेव्हा त्याना **सममूल्य अपूर्णांक** असे म्हणतात.

* **संक्षिप्त रूप :** ज्या अपूर्णांकाच्या अंशाचा आणि छेदाचा 1 व्यतिरिक्त कोणताच समाईक अवयव नसतो तेव्हा त्याला **संक्षिप्त रूपात** किंवा त्याच्या **साध्या रुपात** आहे असे म्हटले जाते.

* **अपूर्णांक मिळविण्याची ब्रम्हगुप्तांची पध्दत :** अपूर्णांकांची बेरीज करताना त्याना सारखेच अपूर्णांकीय एकक असलेल्या सममूल्य अपूर्णांकामध्ये रुपांतरीत करावे. (म्हणजेच समान छेद) आणि नंतर बेरीज मिळविण्यासाठी प्रत्येक अपूर्णांकांतील अपूर्णांकीय एककांची संख्या मिळविली पाहिजे. समान छेद ठेऊन अंशाची बेरीज करून हे साध्य करता येते.

* **अपूर्णांकाच्या वजाबाकीसाठी ब्रम्हगुप्तांची पध्दत :** अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना त्याना सारखेच अपूर्णांकीय एकक असलेल्या सममूल्य अपूर्णांकामध्ये रुपांतरीत करावे. (म्हणजेच समान छेद) आणि नंतर अपूर्णांकीय एककांची संख्या वजा करा. समान छेद ठेऊन अंशाची वजाबाकी करून हे साध्य करता येते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

*****

प्रकरण - 8

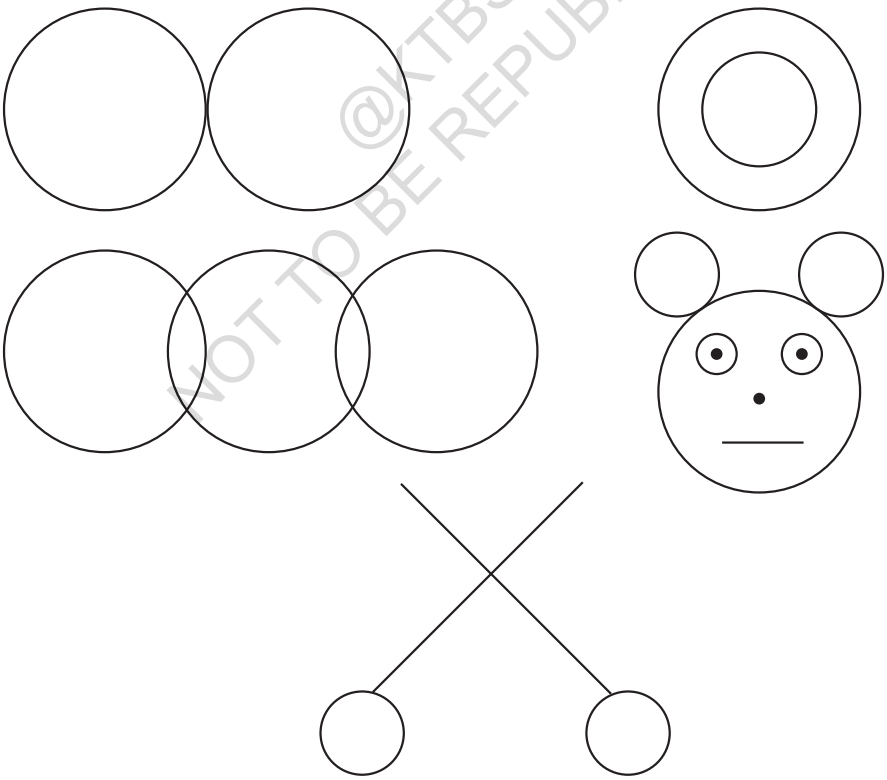
रचनेसह खेळ
(PLAY WITH STRUCTURE)

X3F6C3

8.1 कलाकृती

खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा आणि त्याना मुक्त हाताने काढण्याचा प्रयत्न करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

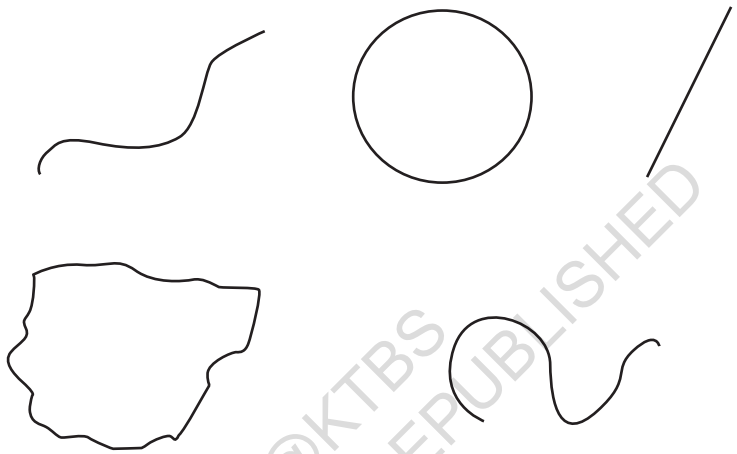


आकृती 8.1

आता स्वतःकडे कैवार (कंपास) आणि मोजपट्टी घेऊन सज्ज रहा. आपण या साधनांच्या सहाय्याने या आकृत्या काढू शकतो का हे शोधूया आणि कैवारचा परिचय करून घेऊया.

कैवार कसे बनवले जाते याचे निरीक्षण करा. कैवारचा वापर करून आपण कोणकोणत्या आकारांच्या रचना करू शकतो याचा शोध घ्या.

तुम्हाला वक्ररेषा किंवा वक्र म्हणजे काय हे माहित आहे का? खाली दाखविल्याप्रमाणे त्या कोणत्याही आकाराच्या असून कागदावर पेन्सिलने काढता येऊ शकतात. त्यामध्ये सरळरेषा, वर्तुळे आणि इतर आकृत्यांचा समावेश असू शकतो.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

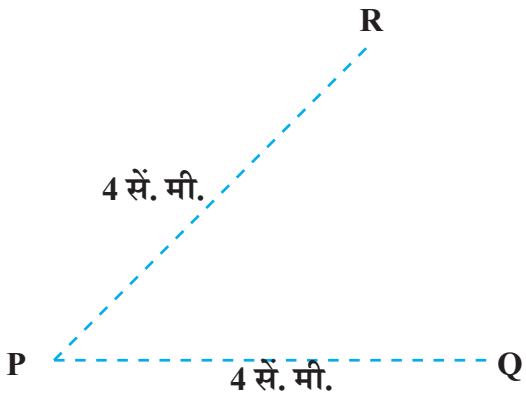
तुमच्या वहीमध्ये 'P' हा कोणताही एक बिंदू घ्या. नंतर 'P' पासून 4 सें.मी. अंतरावर वेगवेगळ्या दिशेने तुम्हाला शक्य तितक्या बिंदूच्या खुणा करा.

*** विचार करा :** 'P' पासून 4 सें.मी अंतरावर सभोवती खुणा केलेल्या सर्व बिंदूची कल्पना करा. ते कसे दिसतात?

ते काढण्याचा प्रयत्न करा आणि त्या वक्रावरील कांही बिंदू घेऊन ते 'P' पासून अचूकपणे 4 सें.मी. अंतरावर आहेत का ते तपासा.

जर तुम्ही यापूर्वी असे केले नसेल तर पहा की, यासाठी तुम्ही कैवारचा वापर करु शकता का ते शोधा.

तुम्ही कैवारचा वापर करून P पासून 4 सें.मी. अंतरावर कांही बिंदूच्या खुणा करून सुरुवात करु शकता. हे कसे केले जाऊ शकते?



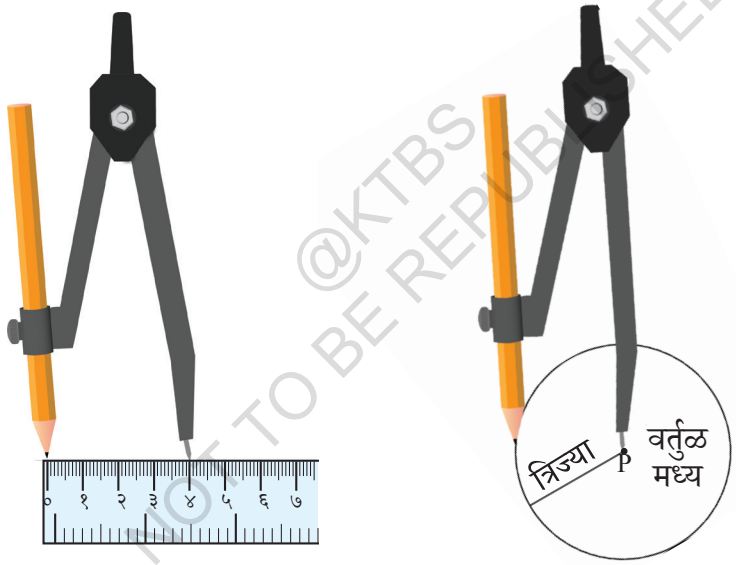
तुम्हाला कैवार मोजपट्टीच्या कडेवर अशारितीने उघडावा लागेल की,कैवाराचे टोक आणि पेन्सिल यामधील अंतर 4 सें.मी. होईल (आकृती 8.2 पहा).

* आता वक्र पूर्ण करण्याचा प्रयत्न करा.

सूचना: आता कैवारचे टोक स्थिर ठेऊन फक्त पेन्सिलचे टोक पूर्ण फिरवा. वक्राचा आकार कोणता असेल? ते एक वर्तुळ आहे!

वर्तुळावर एक बिंदू घ्या. त्याचे 'P' पासूनचे अंतर किती असेल? ते 4 सें.मी. असेल, 4 सें.मी. पेक्षा कमी असेल की 4 सें.मी. पेक्षा जास्त असेल? त्याचप्रमाणे वर्तुळावरील इतर कोणताही एक बिंदू आणि P यामधील अंतर किती असेल?

आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे P या बिंदूला **वर्तुळमध्य** म्हणतात तसेच वर्तुळमध्य आणि वर्तुळाच्या परिघावरील कोणताही एक बिंदू यामधील अंतराला वर्तुळाची **त्रिज्या** असे म्हणतात.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृती 8.2

कैवारचा वापर केल्यानंतर आकृती 8.1 मधील आकृत्या पुन्हा काढा.

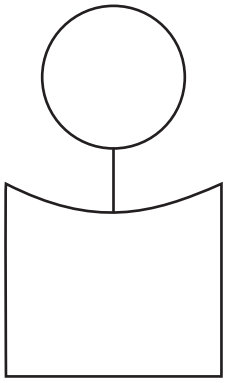
आकृत्यांमध्ये दाखविल्याप्रमाणे उत्तम अशा आकृत्यांची रचना तुम्ही करू शकाल का? हवे असेल तर पुन्हा प्रयत्न करा.

या साधनांचा वापर केल्यामुळे रचना करणे सोपे झाले आहे का? आता खालील आकृत्यांची रचना करण्याचा प्रयत्न करा.

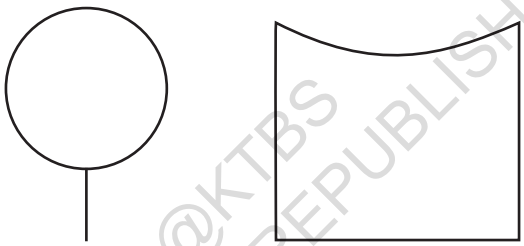
* रचना करा.

1. एक व्यक्ती

तुम्ही याची रचना कशी कराल?

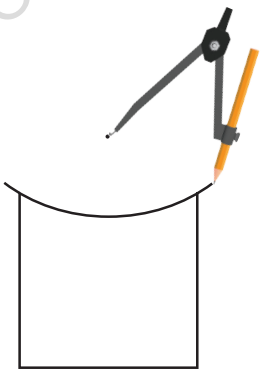


या आकृतीला दोन भाग आहेत.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

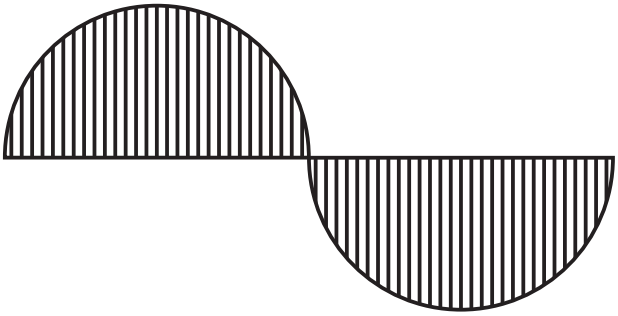
पहिल्या भागाची रचना कशी केली जाते हे तुम्हाला समजले असेलच. दुसऱ्या भागाची रचना करताना पुढील आकृतीचे निरीक्षण करा.



येथे कैवारचे टोक कुठे ठेवावे आणि वक्र काढताना त्रिज्या कोणती घ्यावी याचे आपल्यासमोर आव्हान आहे. तुम्ही कैवारमध्ये ठराविक त्रिज्या घ्या आणि कैवाराचे टोक वेगवेगळ्या ठिकाणी ठेऊन वक्र काढण्यासाठी निश्चित स्थान ठरवा. तुम्ही अंदाज करून कैवारचे टोक कुठे ठेवायचे ते निश्चित करा.

2. नागमोडी तरंग (लहर)

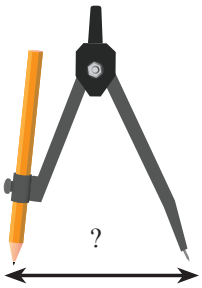
याची रचना करा.

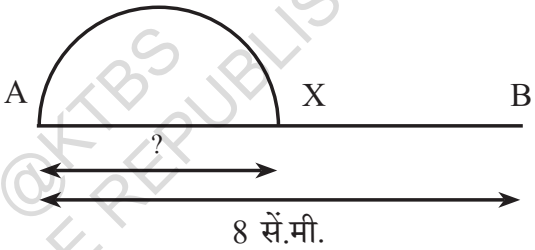


येथे मध्य रेषेची लांबी दिलेली नाही आम्ही त्याची लांबी कितीही घेऊ शकतो.

AB ही मध्य रेषा आहे असे समजू. AB ची लांबी 8 सें.मी. घेऊ. ते आपण AB = 8 सें.मी. असे लिहू.

येथे पहिला तरंग हा अर्धवर्तुळ स्वरुपात काढला आहे.

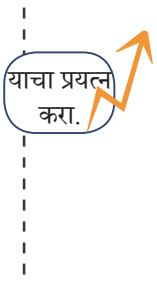




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

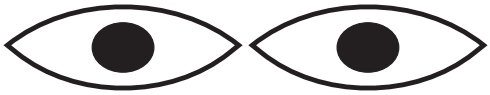
शोधा पाहू.

1. अर्धवर्तुळ काढण्यासाठी कैवारमध्ये कोणती त्रिज्या घ्यावी लागेल? AX ची लांबी किती असेल?
2. वेगवेगळ्या लांबीची मध्य रेषा घेऊन त्यावर तरंगाची रचना करा.
3. अर्धवर्तुळापेक्षा कमी असलेला तरंग घेऊन आकृती पुन्हा रचण्याचा प्रयत्न करा. (जशी व्यक्तीच्या चित्रातील मानेजवळ आहे) येथे एक आव्हान आहे की, दोन्ही तरंग तंतोतंत सारखेच असायला हवेत. हे थोडे अवघड असेल.



3. डोळे

कैवारच्या मदतीने हे डोळे तुम्ही कसे काढाल?

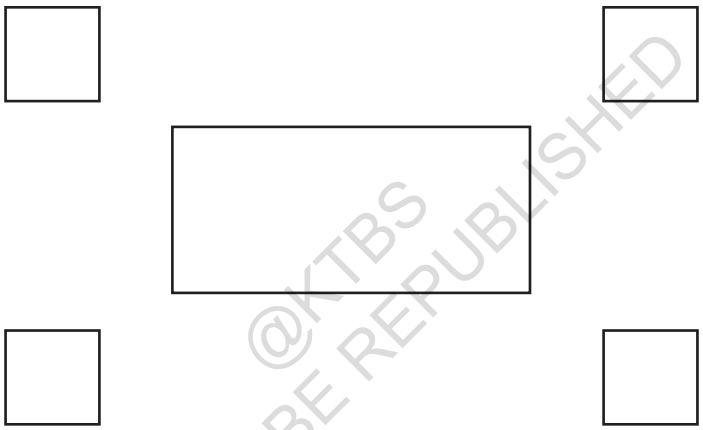


सूचनेसाठी या प्रकरणाच्या शेवटी पहा.

कैवार आणि पट्टीच्या मदतीने तुमच्या आवडीच्या इतर कलाकृती बनवा.

8.2 चौरस आणि आयत

आता कांही मुलभूत आकृत्या पहा ज्यांच्या सीमा सरळ रेषाखंडांनी दर्शविल्या आहेत.



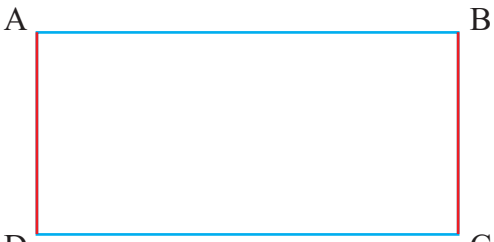
आकृती 8.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हे आकार कोणते आहेत? होय ते आमच्या परिचयाचे असून चौरस आणि आयत आहेत. परंतु हे चौरस आणि आयत कसे बनतात?

ABCD हा आयत विचारात घेऊ.

A, B, C आणि D हे बिंदू आयताचे शिरोबिंदू आहेत. AB, BC, CD आणि DA या रेषा त्याच्या बाजू आहेत. ∠A, ∠B, ∠C आणि ∠D हे त्याचे कोन आहेत.



आकृती 8.4

AB आणि CD या निळ्या बाजूंना **संमुख (समोरासमोरील) बाजू** म्हणतात. कारण त्या एकमेकाच्या विरुध्द आहेत. याचप्रमाणे AD आणि BC ही संमुख बाजूंची दुसरी जोडी आहे.

लक्षात ठेवा की, आयतामध्ये

R1) संमुख (विरुध्द) बाजू समान लांबीच्या असतात.

R2) सर्व कोन 90° असतात.

आयताप्रमाणेच चौरसाचे कोन आणि बाजू निश्चित केलेले असतात.

चौरसाला खालील दोन गुणधर्म लागू पडतात :

S1] सर्व बाजू समान असतात.

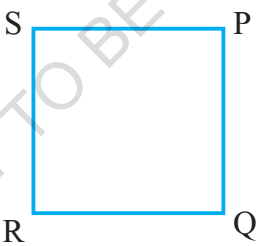
S2] सर्व कोन 90° चे असतात.

आकृती 8.4 मधील आयत पहा त्याला ABCD हे नांव दिलेले आहे. हा आयत BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD आणि BADC या इतर नांवानी सुध्दा दर्शविला जाऊ शकतो. असे असल्यास आयताला त्याच्या शिरोबिंदुवरील अक्षरांचा कसाही करून दर्शविला जाऊ शकते का? नाही. उदाहरणार्थ आयताला ABDC किंवा ACBD अशी नांवे दिली जाऊ शकत नाहीत. कोणती नांवे दिली जाऊ शकतात आणि कोणती दिली जाऊ शकत नाहीत ते तुम्ही पाहू शकाल का?

योग्य नांवात आयताभोवती फिरताना शिरोबिंदू ज्या क्रमाने येतात त्या क्रमाने ते असले पाहिजे. त्याची सुरुवात कोणत्याही एका कोपऱ्यापासून केली जाऊ शकते.

* बाजूला दिलेल्या चौरसाचे खालील पैकी कोणते नांव नाही.

1. PQSR
2. SPQR
3. RSPQ
4. QRSP



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

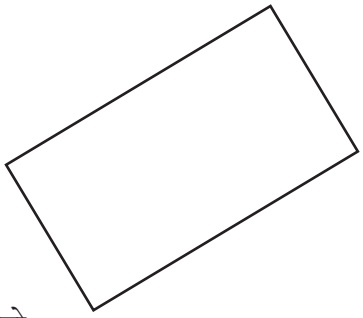
फिरविलेले चौरस आणि आयत

येथे सर्व बाजूंची लांबी समान आणि सर्व कोन 90° चे असलेला चौरसाकृती आकाराचा कागदाचा तुकडा आहे. तो आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे फिरविलेला आहे. तरी सुद्धा तो चौरस आहे का?

कागद फिरवल्यानंतरही चौरसाचे सर्व गुणधर्म दर्शवितो का हे पडताळून पाहूया.

* सर्व बाजू अजूनही समान आहेत का? होय.

* सर्व कोन अजूनही 90° चे आहेत का? होय.



चौरस फिरविल्यामुळे त्याची लांबी आणि कोन बदलत नाहीत. म्हणून फिरविलेल्या आकृतीला चौरसाचे दोन्ही गुणधर्म लागू पडतात. त्यामुळे तो चौरसच आहे.

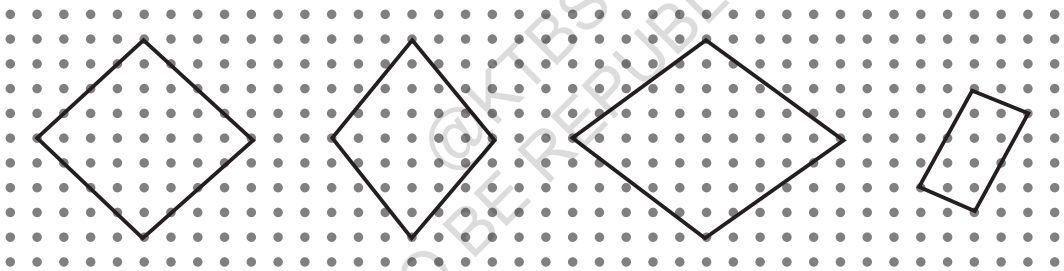
अशाच प्रकारे तर्क केल्यास फिरविलेला आयत सुद्धा आयतच असतो.

* शोधा पाहू.

1. ठिपक्यांच्या कागदावर (आकृती 8.3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे) आयत आणि चार चौरसांची रचना करा.

   आकृती पुन्हा तयार करण्यासाठी तुम्ही काय केले पाहिजेत की ज्यामुळे आयताभोवती चार चौरस सममितपणे ठेवता येतील? तुमच्या वर्गमित्रांशी याविषयी चर्चा करा.

2. या संग्रहात कोणकोणते चौरस आहेत ते ओळखा. गरज भासल्यास मोजमाप करा.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* **विचार करा:** वरील आकृतीमध्ये मोजमाप करण्याची कोणतीही उपकरणे न वापरता सर्व बाजू समान आहेत की नाहीत किंवा सर्व कोन काटकोन आहेत की नाहीत याचे कारण शोधणे शक्य आहे का? ठिपक्यांच्या कागदावरील कोपऱ्यांच्या स्थितीकडे पाहून आपणे हे सांगू शकतो का?

3. ठिपक्यांच्या कागदावर कमीतकमी तीन फिरविलेले चौरस आणि आयत रचा. रचना करत असताना त्यांचे कोपरे बिंदूवरच राहतील याची खात्री करून घ्या. तुम्ही रचलेले चौरस आणि आयत हे अनुक्रमे त्यांचे गुणधर्म दर्शवितात का ते पडताळा.

8.3 चौरस आणि आयत यांची रचना करणे

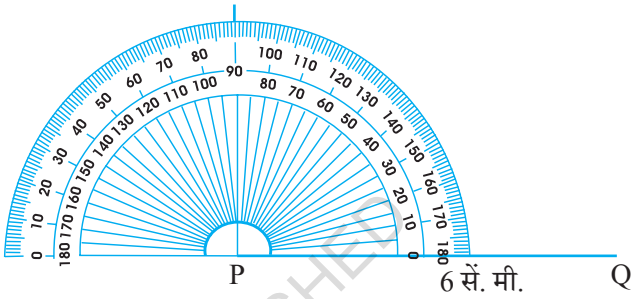
आता आपण चौरस आणि आयताची रचना करण्यास सुरुवात करुया. तुम्ही 6 सें.मी. बाजू असणारा चौरस कसा रचू शकाल?

तुमच्या मदतीकरीता तुम्ही खालील आकृत्या पाहू शकता. बाजूची लांबी 6 सें.मी. असणारा PQRS हा चौकोन रचलेला आहे.

पायरी 1



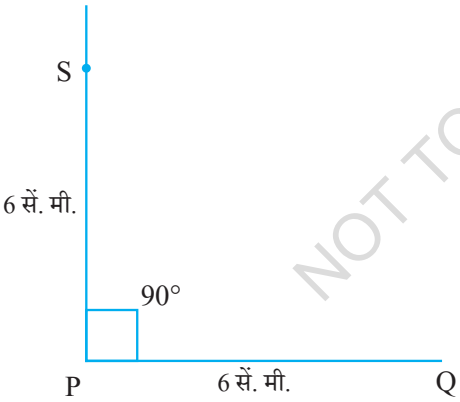
पायरी 2



PQ शी लंब असणाऱ्या बिंदूची P पासून खूण करा.

पायरी - 3

पध्दत - 1



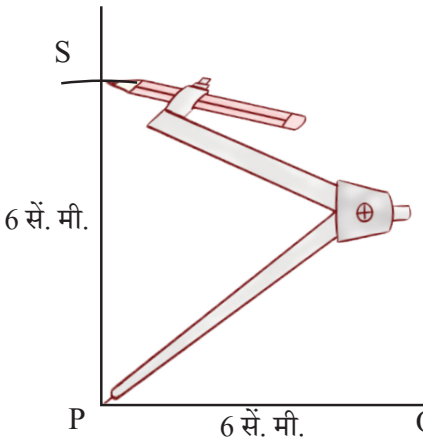
मोजपट्टीचा वापर करून PS = 6 सें.मी. होईल अशी लंबरेषेवर S या बिंदूमध्ये खुण करा.

पध्दत - 2

हे आपण कैवार वापर करून करू शकतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

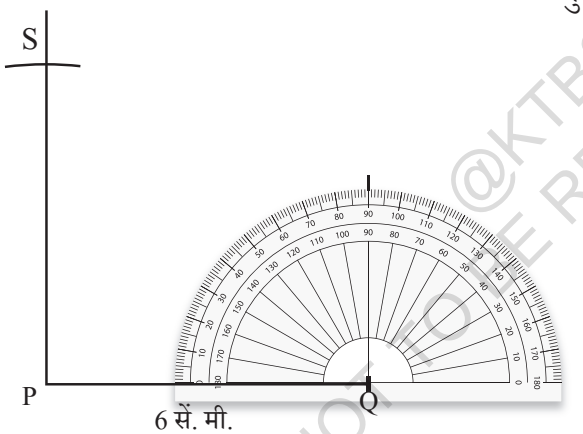




PS ही 6 सें.मी. लांब का असावी ते तुम्ही पाहिले आहे का?

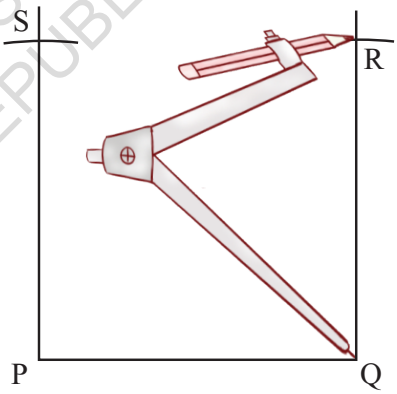
पायरी - 4

Q बिंदूतून PQ रेषाखंडाला लंब काढा.



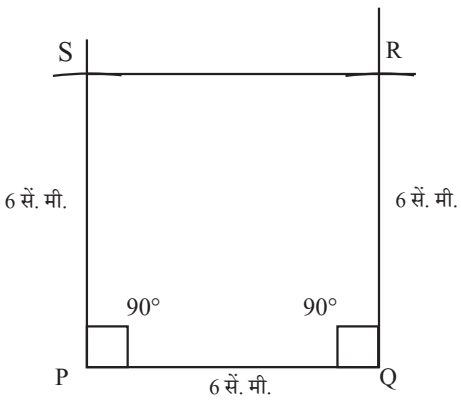
पायरी - 5

जर तुम्हीं कैवार वापरलेले असेल तर पुढील बिंदूची खुण तुम्ही सहजतेने करु शकाल.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

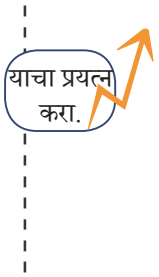
पायरी - 6



RS ची लांबी किती आणि ∠R आणि ∠S ची मापे कोणती?

रचना करा

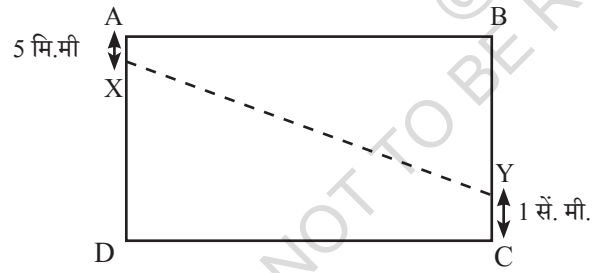
1. बाजूंची लांबी 4 सें.मी. आणि 6 सें. मी. असणारा आयत रचा. रचना केल्यानंतर आयताचे दोन्ही गुणधर्म लागू पडतात का ते तपासा.
2. 2 सें.मी. आणि 10 सें. मी. बाजू असणारा आयत रचा. रचना केल्यानंतर आयताचे दोन्ही गुणधर्म त्याला लागू पडतात का ते तपासा.
3. 4 बाजू असलेल्या आकृतीची रचना करणे शक्य आहे का? ज्यामध्ये
   * सर्व कोन प्रत्येकी 90° आहेत परंतु
   * विरुद्ध बाजू समान नाहीत?

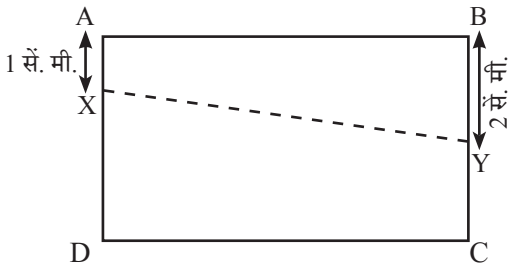


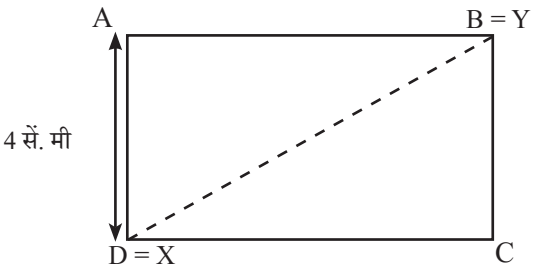
8.4 आयताबद्दल संशोधन

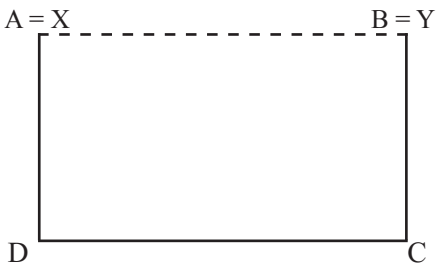
AB = 7 सें.मी. आणि BC = 4 सें.मी. असणारा ABCD हा आयत रचा. अशी कल्पना करा की 'X' हा असा एक बिंदू आहे की, जो AD बाजूवर कोठेही हलविला जातो. त्याचप्रमाणे 'Y' हा एक असा बिंदू आहे की, जो BC बाजूवर कोठेही हलविला जाऊ शकतो. लक्षात ठेवा की 'X' हा बिंदू 'A' किंवा D या शेवटच्या बिंदूंवर सुध्दा असू शकतो. त्याचप्रमाणे 'Y' हा बिंदू B व C च्या शेवटच्या बिंदूंवर सुद्धा असू शकतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED









X आणि Y बिंदू कोणत्या स्थानावर त्यांच्या सर्वात जवळ असतील?

हे बिंदू केव्हा सर्वात लांब असतील असे तुम्हाला वाटते? तुमचे तर्क तुम्हाला काय सांगतात? तुमच्या वर्गमित्रांशी चर्चा करा.



आता 'X' आणि 'Y' बिंदू बाजूवर घेऊन तुमचे अंदाजे ज्ञान पडताळून पहा आणि ते किती जवळ आणि किती लांब आहेत ते मोजा.

XY या रेषेची लांबी मोजून X आणि Y मधील अंतर मिळविले जाऊ शकते.

X आणि Y बिंदूमधील किमान अंतराची तुलना ही AB च्या लांबीशी कशी केली जाऊ शकते?

X आणि Y चे स्थान बदला आणि इतर ते सर्वात जवळ आणि सर्वात दूर आहेत असे इतर बिंदू तपासा. तुम्ही आयताची अनेक प्रकारे रचना करु शकता आणि X आणि Y च्या अनेक विविध स्थिती घेऊन प्रयत्न करु शकता.

X आणि Y च्या वेगवेगळ्या स्थानांसाठी तुम्ही XY च्या लांबीचा मार्ग कसा ठेवाल?

येथे ते करण्याचा एक मार्ग आहे. समजा, तुम्ही पूर्वी विचारात घेतलेल्या X आणि Y ची कांही ठिकाणे आहेत.

- जेव्हा X हे A पासून 5 मि.मी. अंतरावर आहे तेव्हा Y हे B पासून 3 सें.मी. अंतरावर आहे.

  XY = _____ सें.मी. _____ मि.मी.

- जेव्हा X हे A पासून 1 सें.मी. अंतरावर आहे तेव्हा Y हे B पासून 1 सें.मी. अंतरावर आहे.

  XY = सें.मी. ____ मि.मी. _____

- जेव्हा X हे A पासून 2 सें.मी. अंतरावर आहे आणि Y हे B पासून 4 सें.मी. अंतरावर आहे

  XY = ____ सें.मी. ____ मि.मी. आणि वगैरे.

हे लिहिण्याची लघुत्तम पध्दत आहे का? सर्व वाक्यामध्ये फक्त X व Y ची ठिकाणे आणि XY ची लांबी बदलते. म्हणून ते आपण असे लिहू शकतो.

A पासून X चे अंतर	B पासून Y चे अंतर	XY ची लांबी

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

जर X आणि Y हे अनुक्रमे A आणि B पासून समान अंतरावर ठेवले तर XY ची लांबी किती होते ते तुम्ही तपासले का? उदाहरणार्थ त्या घटनेमध्ये खालीलप्रमाणे दिसून येते.

A पासून X चे अंतर	B पासून Y चे अंतर	XY ची लांबी
5 मि.मी.	5 मि.मी.	
1 सें.मी.	1 सें.मी.	
1 सें.मी 5 मि.मी.	1 सें.मी 5 मि.मी.	

आणि इतर

* **या प्रत्येक घटनेचे निरीक्षण करा.**

I. XY च्या लांबीची AB शी तुलना कशी आहे आणि

II. ABYX या चार बाजूंच्या आकृतीचा आकार

* X आणि Y यांच्यामधील सर्वात जास्त अंतराची तुलना AC आणि BD च्या लांबीची कशी केली आहे?

* **रचना करा**

आयताचे तुकडे (भाग) करणे :

आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आयताची रचना 3 समान आकाराचे चौरस होतील याप्रमाणे करा.



उकल:

जर हे कठीण वाटत असेल तर ती आपण सोपी करूया.

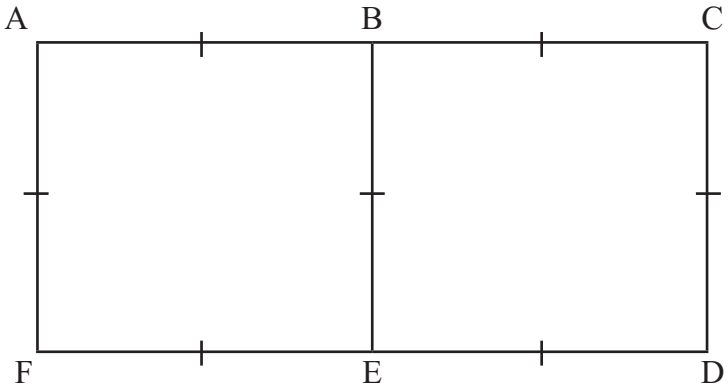
* **शोधा:**

दोन समान चौरसामध्ये विभागणे शक्य आहे अशा आयताची रचना करता येईल का? तुम्ही हा प्रयत्न करु शकता का?

प्रथम योजना करून त्याची रचना करणे हे उत्तम आहे. परंतु आपण याची योजना कशी करु शकतो? तुम्ही अशा पध्दतीचा विचार केलेला आहे का?

कच्ची आकृती काढून तयार होणाऱ्या पक्क्या आकृतीचे दृश्यीकरण करणे ही एक पध्दत येथे आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



या आकृतीवरून आपण कोणता निष्कर्ष काढू शकतो?

तुम्ही समान बाजू ओळखू शकाल का?

ज्याआर्थी दोन्ही चौरस समान आहेत,

त्याअर्थी AB = BC आणि FE = ED.

ABEF आणि BCDE हे चौरस आहेत. प्रत्येक चौरसाच्या सर्व बाजू समान आहेत. हे आपण असे लिहू की,

AF = AB = BE = FE

BE = BC = CD = ED

त्यामुळे सर्व लहान रेषा या समान आहेत.

समान रेषा दर्शविण्यासाठी रेषेवर '।' हा संकेत वापरून दर्शविले जाते. कच्च्या आकृतीचा संदर्भ घ्या.

हे विश्लेषण वापरुन तुम्ही रचना करण्याचा प्रयत्न करू शकता का? लक्षात ठेवा की, वरील सर्व अंशांशी संबंधित आकृती म्हणजे एक आयत आहे, ज्याला दोन समान चौरसामध्ये विभागले जाऊ शकते आणि यासाठी कोणतेही मोजमाप घेतलेले नाही. ACDF हा आयत काढण्यासाठी एखादी व्यक्ती AF ची लांबी कितीही घेऊ शकते. उदाहरणार्थ, जर आपण AF = 4 सें. मी. घेतले तर AC ची लांबी किती असेल?

* शोधा.

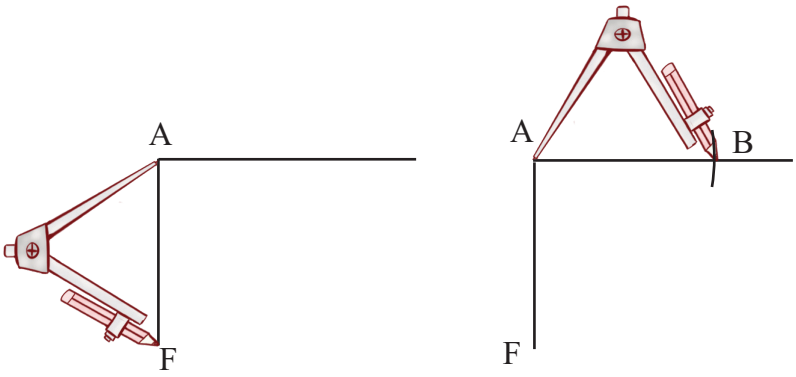
आता आयत पूर्ण करता येईल का?

प्रत्यक्षात मोजपट्टीने लांबी न मोजता AF ची रचना करून पुढे जाता येते. आपण AF ला लंब असणारी रेषा काढू शकतो जी दुसरी बाजू होईल इतकी लांब असेल. AB = AF असल्यामुळे AF ची लांबी विचारात घेऊन आपणास कसेही B हा बिंदू मिळविणे आवश्यक आहे. आपण पट्टीचा वापर न करता हे कसे करू

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शकतो? हे कैवारचा वापर करून केले जाऊ शकते का?

निरीक्षण करा की, कैवार वापरुन AF ची लांबी कशी मोजली जाते.



कैवारचा वापर करुन B आणि C बिंदुंच्या खुणा करा आणि आयत पूर्ण करा.

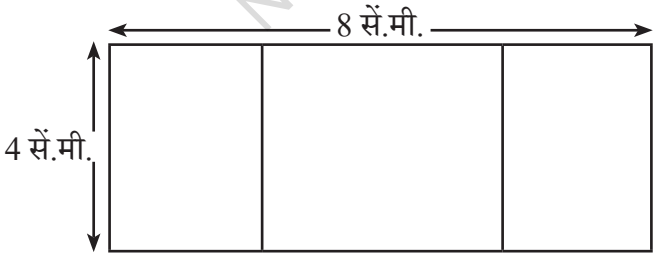
* या युक्तीसह एक आयत तयार करण्याचा प्रयत्न करा. जो तीन समान चौरसामध्ये विभागला जाऊ शकतो.
* एका आयताच्या बाजूची लांबी अशी घ्या, जी खालीलप्रमाणे विभागली जाऊ शकत नाही.
  ~ दोन समान चौरसात
  ~ तीन समान चौरसात

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* रचना करा

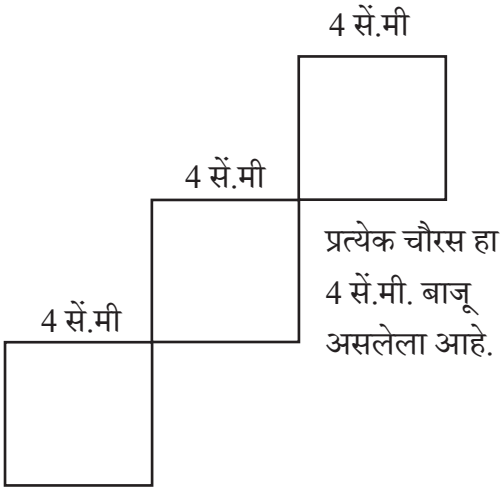
1. आयताच्या आत चौरस रचणे

8 सें. मी. आणि 4 सें. मी. बाजू असलेला आयत रचा. आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे चौरसाचा मध्य आणि आयताचा मध्य एकच असेल असा चौरस त्याच्या आत कसा रचू शकाल?



सूचना: प्रथम कच्ची आकृती काढून घ्या. चौरसाच्या बाजूची लांबी किती असेल? चौरसाचे कोन आणि बाह्य आयत यांच्या कोनामधील अंतर किती असेल?

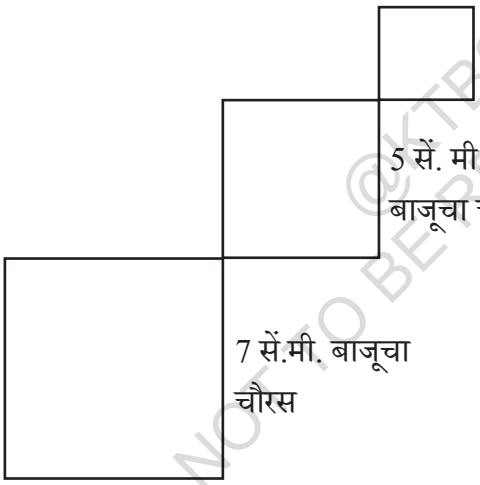
2. घसरणारे चौरस



प्रत्येक चौरस हा 4 सें.मी. बाजू असलेला आहे.

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणेच चौरसांची मांडणी केलेली आहे याची खात्री करून घ्या.

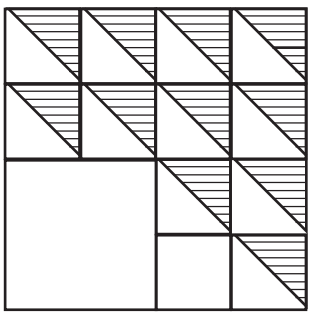
आता याचा प्रयत्न करा.



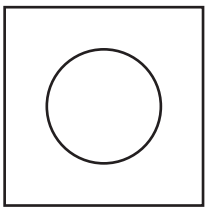
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. छायांकीत करणे

याची रचना करा. तुमच्या आवडीचे मोजमाप निवडा. लक्षात ठेवा की, मोठ्या 4 बाजू असलेली आकृती ही चौरस आहे आणि लहान आकृत्यासुध्दा चौरसच आहेत.



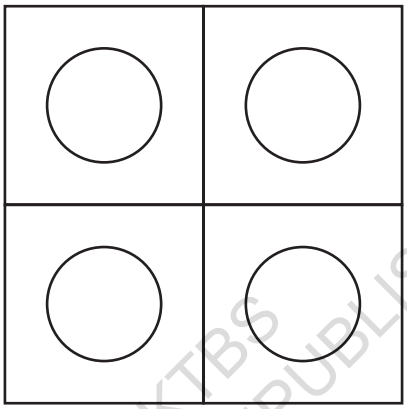
4. छिद्र असलेला चौरस



निरीक्षण करा की वर्तुळाकार छिद्र हे चौरसाचा मध्य असल्याप्रमाणे आहे.

सूचना: वर्तुळाचा मध्य कोठे असावा याचा विचार करा.

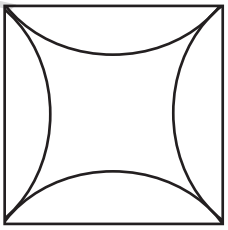
5. अधिक छिद्रे असलेला चौरस



6. वक्र असलेला चौरस

बाजूंची लांबी 8 सें.मी. असलेला हा चौरस आहे.

सूचना: सर्व चार कंस सारखेच फुगवल्याप्रमाणे दिसण्यासाठी कैवारचे टोक कुठे ठेवता येते याचा विचार करा. हे करून पहा.



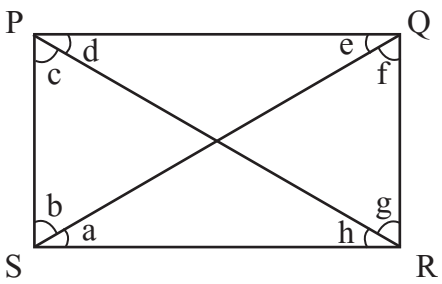


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.5 आयताच्या आणि चौरसाच्या कर्णांचा शोध घेणे

PQRS या आयताचा विचार करा. PR आणि QS जोडा. या दोन रेषांना आयताचे **कर्ण** असे म्हणतात.

कर्णांच्या लांबीची तुलना करा. पहिल्यांदा अंदाज करा व उत्तर द्या. त्यानंतर दाखविल्याप्रमाणे बिंदुंच्या खुणा करून आयताची रचना करा आणि कर्ण मोजा.



PQRS या आयतामध्ये, P आणि R बिंदुंवरील काटकोनांना विरुध्द कोन मानलेले आहेत. Q आणि S बिंदुंवरील काटकोन ही दुसऱ्या विरुध्द कोनांची जोडी आहे.

निरीक्षण करा की, प्रत्येक विरुद्ध कोनांच्या जोडीला कर्ण दोन लहान कोनामध्ये विभागतात. आकृतीमध्ये PR हा कर्ण कोन R ला दोन लहान कोनामध्ये दुभागतो त्यांना आपण g आणि h असे म्हणू. PR हा कर्ण कोन P ला सुद्धा c आणि d मध्ये दुभागतो. g आणि h हे समान आहेत का? c आणि d हे समान आहेत का?

प्रथम उत्तराचा अंदाज करा आणि नंतर सर्व कोन मोजा. तुम्ही कोणते निरीक्षण केले? समान असलेल्या कोनांच्या जोड्या ओळखा.

* शोधा.

विरुद्ध कोनांना कर्ण समान भागात दुभागतील अशा आयताची रचना तुम्ही कशी कराल?

तुमच्या निरीक्षणांची नोंद तुम्ही कशी कराल? यासाठी प्रथम आपल्याला कांही अंश ओळखणे गरजेचे आहे; ते म्हणजे आयताच्या बाजू आणि दोन कर्णामुळे तयार झालेले 8 कोन. असे आणखी कांही मापनांचे अंश आवश्यक आहेत का?

बाजू	A	B	C	D	E	F	G	H

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुमच्या निरीक्षणांमधून तुम्ही अशा घटनेचा विचार केला आहे का? ज्यामध्ये आयताच्या सर्व बाजू समान आहेत, ती म्हणजे तुम्ही चौरसाच्या बाबतीत विचार केलात का? या विशेष घटनेमध्ये काय घडते?
* कोन आणि बाजूशी संबंधित कोणते सर्व सामान्य नियम तुमच्या निरीक्षणात आले? ते तयार करण्याचा प्रयत्न करा. आणि तुमच्या वर्गमित्रांशी चर्चा करा.



तुम्ही निरीक्षण केलेले नियम नेहमी सत्य असतात याची

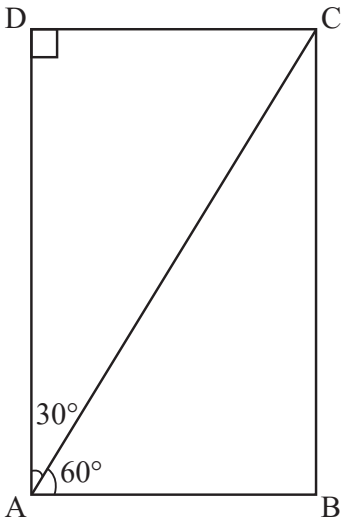
खात्री तुम्ही एखाद्याला कशी द्याल?

* रचना करा

1. आयतामधील एक कर्ण विरुध्द कोनांना 60° आणि 30° मध्ये विभागतो असा आयत रचा.

उकल :

कच्च्या आकृतीपासून सुरुवात करुया.



आयताचे भाग कोणत्या क्रमात रचता येतात?

आपण रचना करण्याच्या संभाव्य क्रमाचा आराखडा काढू.

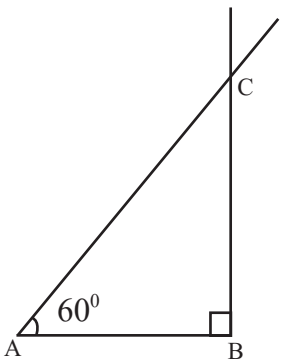
@KIRS
NOT TO BE REPUBLISHED

पायरी 1:



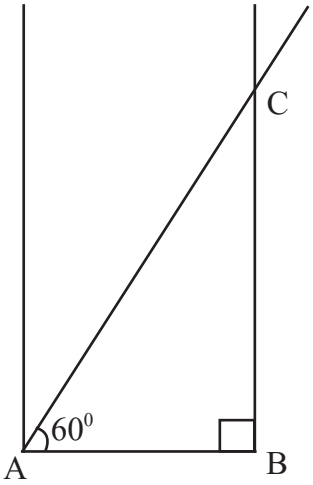
AB ही कोणत्याही लांबीची रेषा काढली. पुढील कोणता बिंदू निश्चित करावयाचा आहे?

पायरी 2:



पायरी 3:

D हे कोणत्या रेषेवर आहे हे आम्हाला माहित आहे. A बिंदूतून AB ला लंब असणारी रेषा काढा.



आता ∠A हा दोन कोनात दुभागलेला आहे. एकाचे माप 60° आहे. तर दुसऱ्या कोनाचे माप किती आहे? ते तपासून पहा.

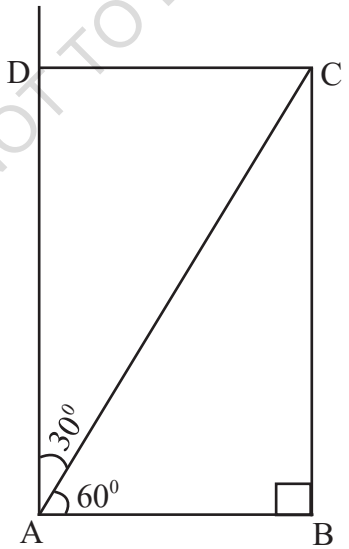
D हा बिंदू शोधण्यासाठी कमीतकमी दोन मुद्दे आहेत.

* पहिला मुद्दा आयताचे सर्व कोन काटकोन असतात.
* दुसरा मुद्दा आयताच्या संमुख बाजू समान असतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

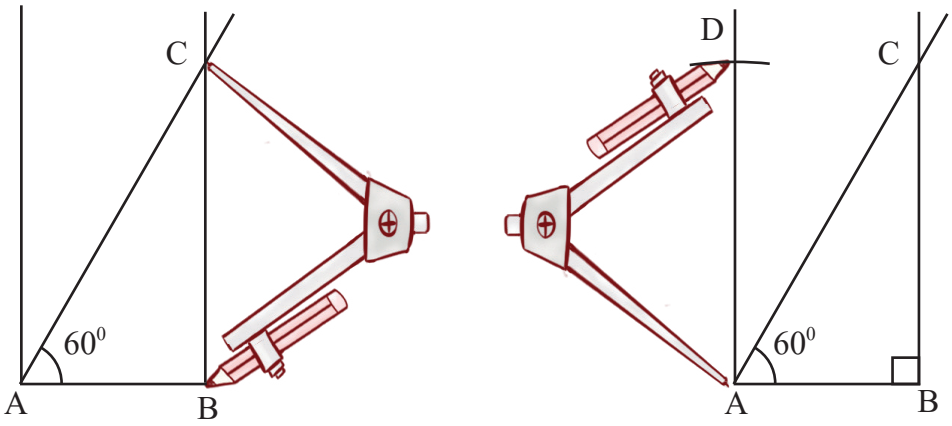
पायरी 4:

पध्दत 1:



D बिंदू मिळविण्यासाठी C बिंदुतून BC ला लंब असणारी रेषा काढा.

पध्दत 2:



कैवारचा वापर करून D या बिंदूची खूण अशारितीने करा की AD = BC होईल.

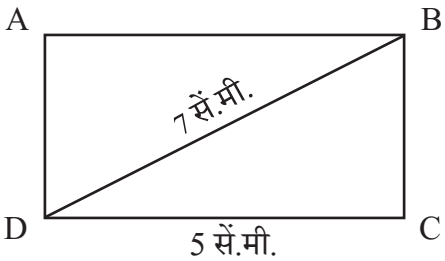
CD जोडले असता आपल्याला हवा असलेला आयत मिळतो.

आयताच्या बाजू दिल्या असता आयताची रचना कशी केली जाते हे आम्ही पाहिलेले आहे. परंतु बाजू आणि कर्ण दिला असता आम्ही काय करु शकतो?

2. बाजू 5 सें. मी. आणि कर्णाची लांबी 7 सें. मी. असणाऱ्या आयताची रचना करा.

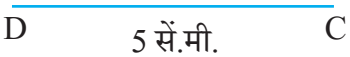
उकल:

प्रथम एक कच्ची आकृती काढा. रचना करण्याच्या पायऱ्या निश्चित करा. प्रथम कोणती रेषा काढली जाऊ शकते?



पायरी 1:

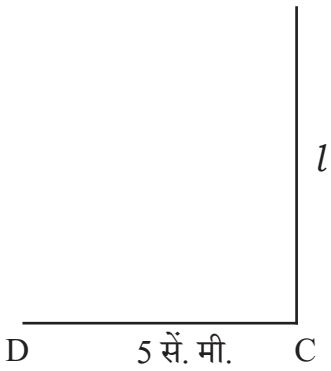
लांबी 5 सें.मी. मोजून घेऊन पाया CD सहजपणे रचला जाऊ शकतो.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पायरी 2:

C बिंदुतून DC रेषेला लंबरेषा काढा. या रेषेला आम्ही 'l' म्हणू.



हे सोपे आहे कारण आम्हाला माहित आहे की, ही रेषा पायाला लंब आहे. B हा बिंदू 'l' रेषेवर कुठेतरी आहे.

* आम्ही तो कसा निश्चित करेन? B च्या स्थानासंबंधित आपल्याला आणखी कोणती माहिती आहे? आम्हाला माहित आहे की D बिंदूपासून त्याचे अंतर 7 सें. मी. आहे.

B हा बिंदू निश्चित करण्याची एक पद्धत ही आहे की, पट्टी घेऊन 'l' रेषेवर 'D' बिंदूपासून 7 सें.मी. अंतर घेण्याचा प्रयत्न करणे. तथापि, येथे 'चूका आणि शिका' ची गरज आहे. तेथे आणखी एक प्रभावशाली पध्दत आहे ज्यामध्ये 'चूका आणि शिका'चा समावेश नाही.

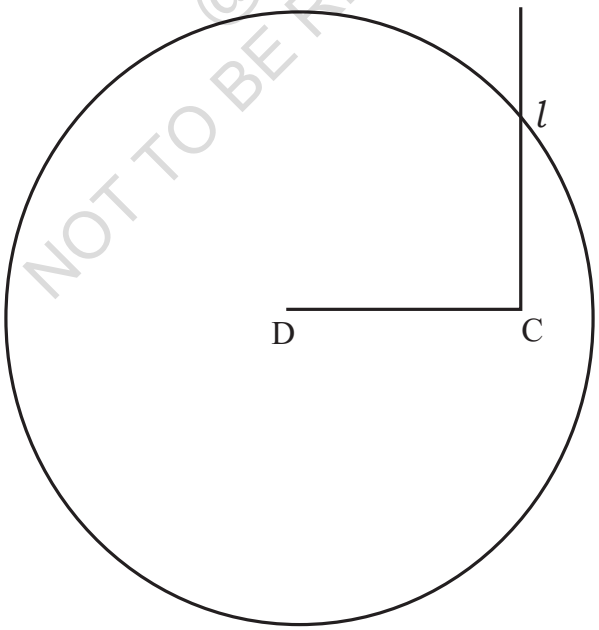
याकरिता तो घेण्याऐवजी एखाद्याला D पासून 7 सें. मी. अंतरावरील बिंदू हवा आहे. D पासून 7 सें. मी. अंतरावर येणाऱ्या सर्व बिंदूचा शोध घेण्याची पध्दत पाहूया.

हा आकार कोणता आहे हे आम्हाला माहित आहे!

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पायरी 3:

पध्दत 1



D हा मध्य घेऊन 7 सें.मी. त्रिज्येच्या वर्तुळाची रचना करा.

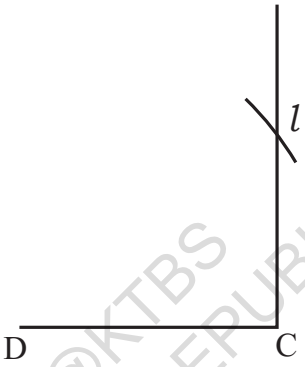
येथे तुम्ही D हा बिंदू शोधू शकाल का? लक्षात ठेवा की तो 'D' या बिंदूपासून l रेषेवर 7 सें.मी. अंतरावर आहे.

वर्तुळ आणि रेषा कुठे छेदतात तो बिंदू विचारात घ्या. तो D बिंदूपासून किती अंतरावर आहे? जर गरज भासली तर तुमची आकृती पहा. तुम्ही कोणते निरीक्षण केले?

जेथे वर्तुळ l रेषेला छेदते तो बिंदू म्हणजेच आवश्यक असलेला 'B' हा बिंदू आहे.

पध्दत 2

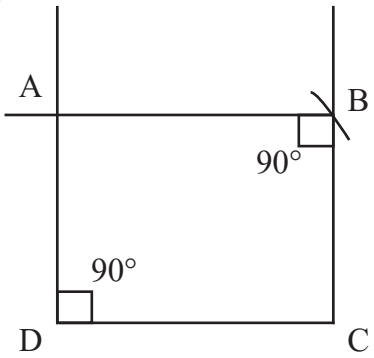
B बिंदूचे स्थान दर्शविताना संपूर्ण वर्तुळ काढणे आवश्यक आहे का? आपण पाहू शकतो की l रेषेवर फक्त एक कंस काढणे पुरेसे आहे. म्हणून खालील आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे सुद्धा तिसरी पायरी केली जाते.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आयताचे तीन बिंदू स्थापित केल्यानंतर आपल्याला फक्त आयत पूर्ण करायचा आहे. स्मरण करा की, मागील उदाहरणामध्ये देखील आपण अशाच परिस्थितीत होतो. येथून पुढे आयत पूर्ण करण्याच्या दोन पद्धती आपण पाहिल्या आहेत. आपण त्यापैकी कोणतीही एक पध्दत वापरु शकतो.

पायरी 4:



D आणि B बिंदुतून अनुक्रमे DC आणि BC ला लंब काढा. या रेषा ज्या बिंदूत छेदतात तो चौथा बिंदू A आहे.

R_1 आणि R_2 हे गुणधर्म आयत ABCD ला लागू पडतात का? ते तपासा.

*** रचना करा.**

1. एक कर्ण विरुद्ध कोनांना 50° आणि 40° मध्ये दुभागणाऱ्या आयताची रचना करा.
2. एक कर्ण विरुध्द कोनांना 45° आणि 45° मध्ये दुभागणारा आयत रचा. त्याच्या बाजूंबद्दल तुम्ही कोणते निरीक्षण केले?
3. एक बाजू 4 सें.मी. आणि त्याच्या कर्णाची लांबी 8 सें. मी. असणारा आयत रचा.
4. एक बाजू 3 सें. मी. आणि कर्णाची लांबी 7 सें. मी. असणारा आयत रचा.

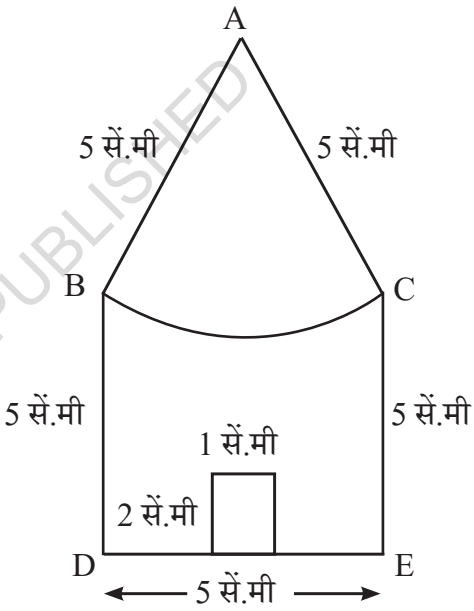
8.6 दिलेल्या दोन बिंदूपासून समान अंतरावर असणारा बिंदू

*** रचना करा :**

घर

ही आकृती पुन्हा रचा.

लक्षात ठेवा की, घराच्या सीमा तयार करणाऱ्या सर्व रेषा 5 सें.मी. लांबीच्या आहेत.

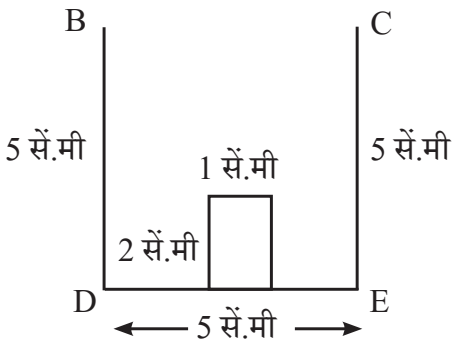


उकल:

पहिले काम हे आहे की, रेषा आणि वक्ररेषा कोणत्या क्रमाने काढाव्या लागतील हे ओळखले पाहिजे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पायरी 1:



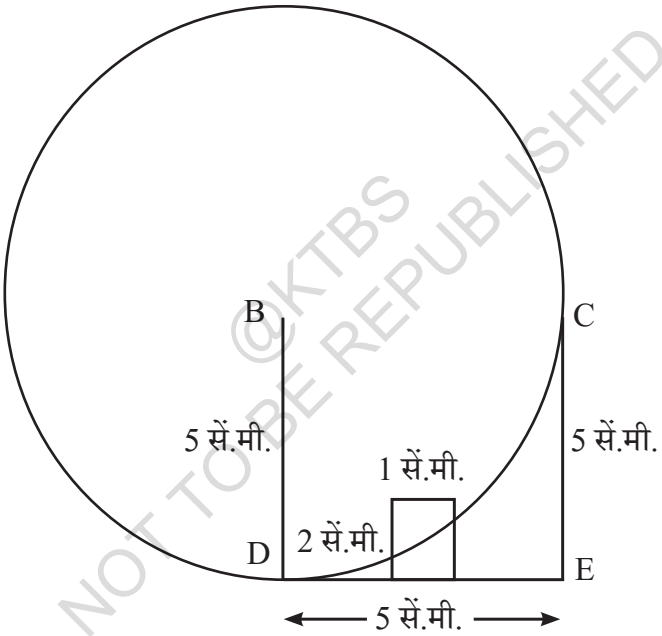
तुम्ही आकृती पूर्ण करु शकाल? प्रयत्न करा.

B आणि C पासून 5 सें. मी. अंतरावर आपल्याला A हा बिंदू स्थापित करावयाचा आहे. तुम्हाला माहित झाले असेलच की यासाठी पट्टीचा वापर करता येऊ शकतो. तरीही अनेक चाचण्या करून त्रुटी दूर केल्या पाहिजेत. ही रचना आणखी सोपी केली जाऊ शकते. कशी?

जर तुमचा अंदाज कैवारचा उपयोग करून ही रचना केली जाऊ शकते असा असेल तर अगदी बरोबर आहे. चाचण्या आणि त्रुटी न करता तुम्ही A हा बिंदू कसा स्थापित करता येईल हे शोधा.

येथे या उदाहरणातील बिंदू A आणि यापूर्वीच्या सोडविलेल्या क्र. 2 च्या उदाहरणातील पायरी 3 मध्ये बिंदू B शोधणे हे सारखेच आहे. (पृष्ठ संख्या 77)

पायरी-2



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

B पासून 5 सें.मी. अंतरावर असलेले सर्व बिंदू येतील असा वक्र रचा; B मध्य असणाऱ्या वर्तुळाची त्रिज्या 5 सें.मी. असली पाहिजे.

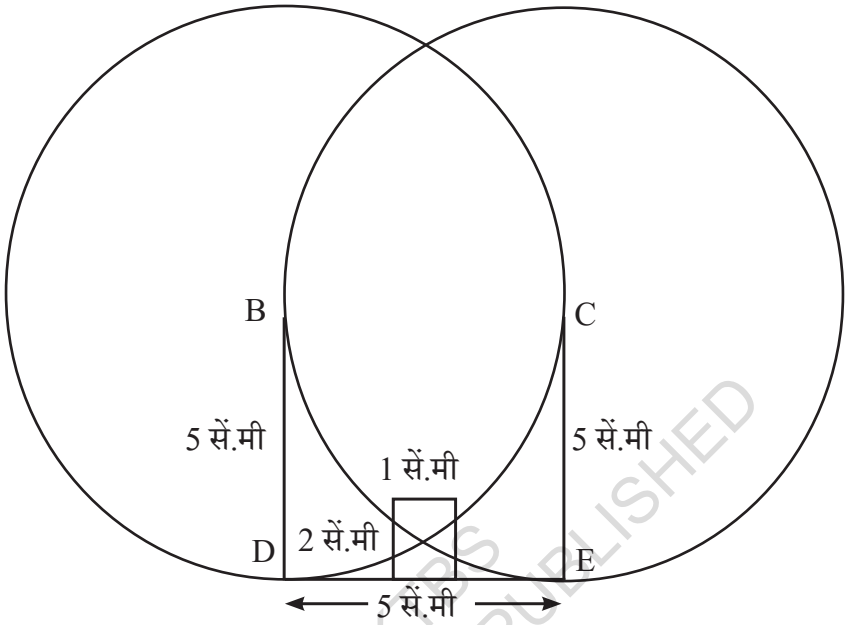
A हा बिंदू शोधण्यास ही पद्धत सहाय्यक आहे का? रचना करा आणि आकृतीमध्ये शोधा.

C या बिंदूपासून 5 सें.मी. अंतरावर वर्तुळावर योग्य बिंदू शोधून A हा बिंदू स्थापित केला जाऊ शकतो. हे पट्टीचा वापर करून देखील केले जाऊ शकते. परंतु यासाठी आपण कैवारचा वापर करु शकतो का?

पायरी-3

पध्दत 1:

कैवारमध्ये त्रिज्या 5 सें.मी. घ्या आणि C हा मध्य घेऊन वर्तुळ काढा.



तुम्हाला A हा बिंदू शोधता आला का? तुमच्या वहीमधील आकृती तपासा. तुम्ही कोणते निरीक्षण केले?

दोन्ही वर्तुळे छेदणारा बिंदू पहा. तो 'B' बिंदूपासून किती अंतरावर आहे?

तो C पासून किती अंतरावर आहे?

म्हणून तो बिंदू A आहे!

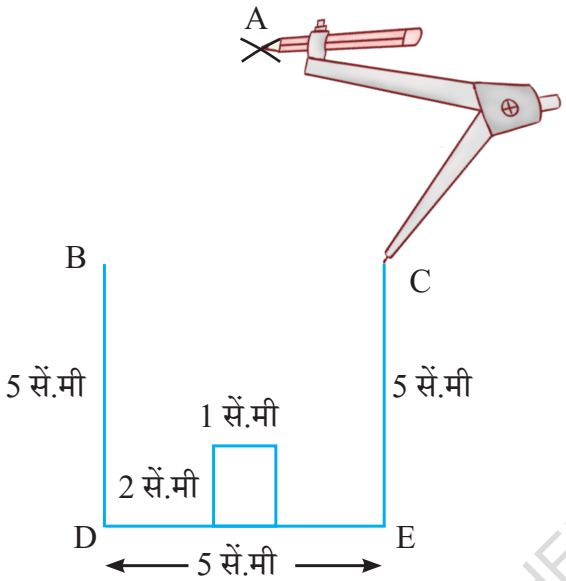
*** विचार करा.**

A हा बिंदू मिळविण्यासाठी दोन वर्तुळे काढणे आवश्यक होते का? आम्हाला फक्त दोन्ही वर्तुळांच्या कांही भागाची आवश्यकता आहे.

पध्दत 2:

म्हणून B आणि C बिंदुपासून 5 सें.मी. त्रिज्येचा फक्त कंस काढला असता तर आपल्याला 'A' हा बिंदू मिळाला असता.

©KSBS NOT TO BE REPUBLISHED



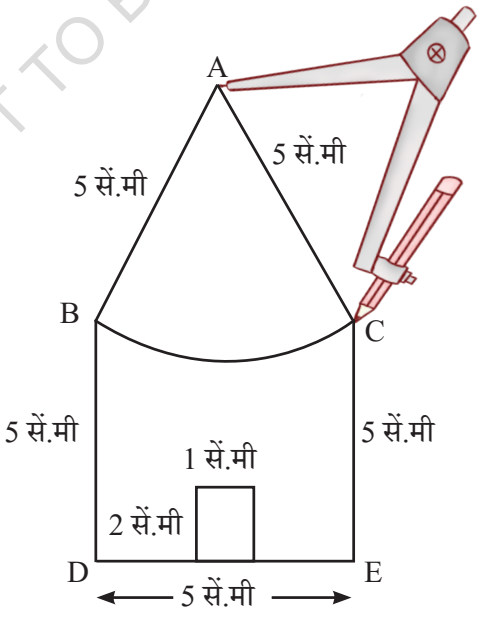
सरळ रेषेने A व B आणि A व C हे जोडा.

A हा बिंदू मिळाल्यानंतर राहिलेल्या कंसाची कोणती रचना अजून करावयाची आहे? ती आम्ही कशी करणार आहोत?

A हा बिंदू B आणि C या बिंदूपासून 5 सें.मी. अंतरावर आहे हा मुद्दा आपण वापरु शकतो का?

पायरी 4:

कैवारमध्ये 5 सें. मी. त्रिज्या घ्या आणि B आणि C बिंदूला स्पर्श करणारा कंस आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे रचा.



आता घर तयार झाले!

@MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

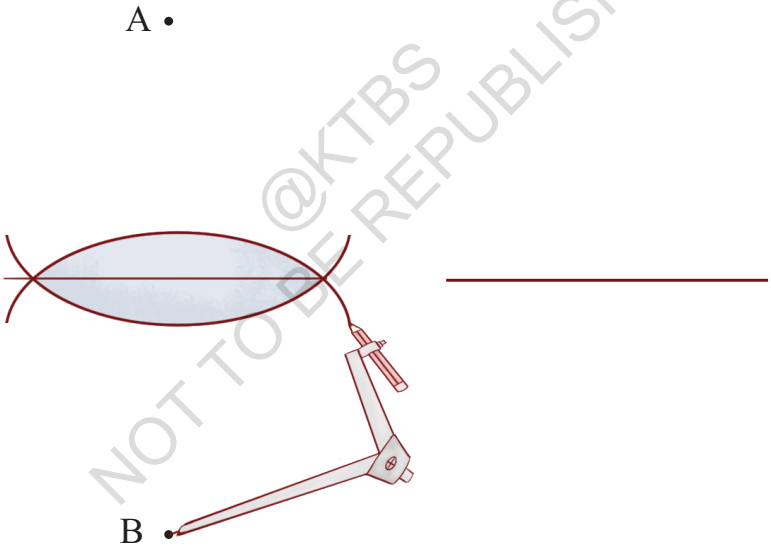
* **रचना करा.**

1. सर्व बाजू 7 सें.मी. असणाऱ्या मोठ्या घराची रचना करा.
2. घराच्या रचनेमध्ये समावेश असलेल्या कल्पना वापरून 'कलाकृती' विभागातील 'एक व्यक्ती', 'नागमोडी तरंग (लहर)' आणि 'डोळे' यांची पुन्हा रचना करण्याचा प्रयत्न करा.
3. सर्व बाजूची लांबी समान आहे पण ती चौरस नाही अशी 4 बाजू असलेली आकृती आहे का? परंतु ती चौरस नाही? जर अशी आकृती अस्तित्वात असेल तर तुम्ही तिची रचना करू शकता का?

सूचना :

A) डोळे (कलाकृती 8.1 आणि वरील 2 मधील रचना) (पृष्ठ क्र. 61)

रचनेचा भाग आधीच दर्शविलेला आहे. त्याचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा. दोन फिकट क्षितीज रेषा रचलेल्या तुम्ही पाहाल. भौमितीक रचनेमध्ये, ज्या दिलेल्या आकृतीचे भाग नाहीत अशा आकृत्या किंवा वक्र बऱ्याचदा रचना करताना वापरतात, परंतु त्या रचना करण्यास मदत करतात.



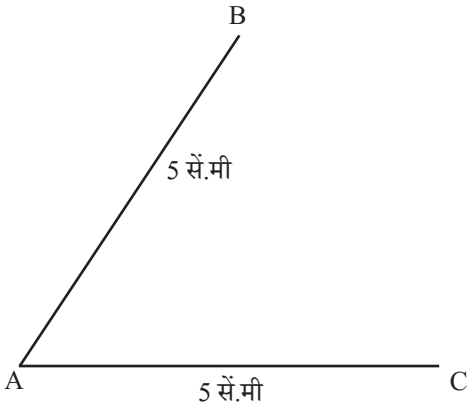
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

डोळ्याचे वरील आणि खालील वक्र रचण्याचे तंत्र हे 'एक व्यक्ती'च्या आकृतीमध्ये वापरल्यासारखेच आहे. डोळ्याचा वक्र काढत (रचत) असताना A आणि B या बिंदूमध्ये कैवारचे टोक ठेवले पाहिजे. लक्षात असू द्या की, वरील वक्र आणि खालील वक्र यानी एकत्रितपणे सममित आकृती बनविली पाहिजे. असे घडून येण्यासाठी बिंदू A आणि B कुठे घेतले पाहिजेत? एक उत्तम अंदाज करा.

डोळे सममित आणि सारखेच मिळविण्याचे शक्य ते सर्व प्रयत्न करा. याकरिता तुम्हाला अनेक चाचण्या कराव्या लागतील.

B) (वरील 3 मधील रचना)

रचना करण्यासाठी बाजूची लांबी 5 सें. मी. घेऊ. आकृतीचा विचार करु.



ही 4 बाजूंची आकृती बनविण्यासाठी आपल्याला आणखी एक बिंदू शोधावा लागेल. तो बिंदू आपण D म्हणू, जो बिंदू B आणि C बिंदुपासून 5 सें. मी. अंतरावर असला पाहिजे. असा बिंदू आपण कसा शोधू शकतो.

घराच्या उदाहरणामध्ये वापरलेली एखादी कल्पना आपण येथे वापरु शकतो का?

©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

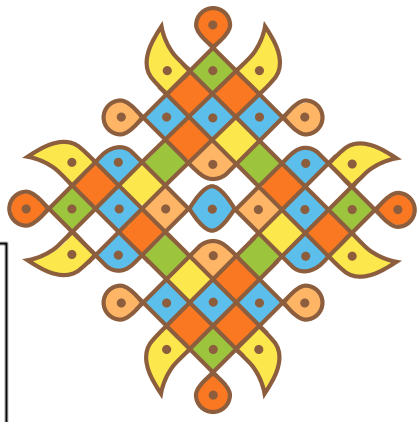
सारांश

- वर्तुळावरील सर्व बिंदू **वर्तुळमध्या**पासून समान अंतरावर असतात. या अंतराला वर्तुळाची **त्रिज्या** असे म्हणतात.
- वर्तुळ आणि त्याच्या भागांची रचना करण्यासाठी कैवारचा वापर करतात.
- दिलेल्या आकृतीची रचना कशी करावी याच्या योजनेसाठी कच्ची आकृती अत्यंत उपयुक्त असते.
- बाजूंची लांबी दिली असता किंवा एक बाजूची लांबी आणि कर्णाची लांबी दिली असता आयताची रचना केली जाऊ शकते.

*****

प्रकरण - 9

सममिती
(SYMMETRY)



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

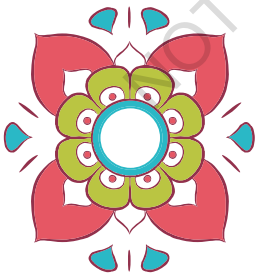
तुमच्या आजूबाजूला पहा. तुमचे लक्ष वेधून घेणाऱ्या अनेक वस्तू तुम्हाला दिसतील. अशा कांही गोष्टी खाली दाखविल्या आहेत.



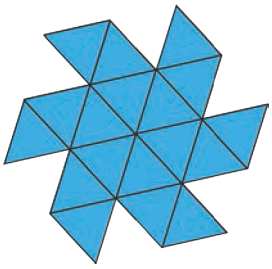
फूल



फुलपांखरू



रांगोळी



पवनचक्र (भिरभिरे)

वरील चित्रांमध्ये कांहीतरी विशेष आहे. फूल वेगवेगळ्या कोनातून सारखेच दिसते. फुलपांखराचे काय? यात कांही शंका नाही की त्याचे रंग खूप आकर्षक आहेत. पण फुलपांखरे तुम्हाला आकर्षित करतात. ती आणखी कशामुळे?

वरील चित्रांमध्ये असे दिसते की आकृतीच्या कांही भागांची पुनरावृत्ती झालेली आहे आणि ही पुनरावृत्ती एका विशिष्ट नमुन्यात होत असल्याचे दिसते.

सुंदर रांगोळीच्या चित्रात कोणती पुनरावृत्ती होत असल्याचे तुम्ही पाहू शकता?

रांगोळीमध्ये जेव्हा फूल केंद्राभोवती 90° मध्ये फिरविले जाते तेव्हा लाल पाकळ्या स्वत:च्या ठिकाणी परत येतात आणि रांगोळीचे इतर भागही फिरतात.

भिरभिऱ्याच्या बाबतीत काय? कोणता नमुना पुनरावर्तीत होत आहे हे आपण शोधू शकता?

सूचना : प्रथम षटकोन पहा.

आता षटकोनाच्या प्रत्येक बाजूवरील कोणत्या आकृतीची पुनरावृत्ती होते हे तुम्ही पाहू शकता का? प्रत्येक बाजूवर चिकटलेल्या आकृतीचा आकार कसा आहे? तुम्ही ओळखता का? षटकोन बाजूवरुन फिरविल्यास हे आकार कसे हलतात? इतर चित्रांचे काय? तुम्हाला आकर्षित करणाऱ्या रचना कशा आहेत आणि त्या रचनांमध्ये कोणते नमुने आहेत जे पुनरावृत्ती करतात?



ढग

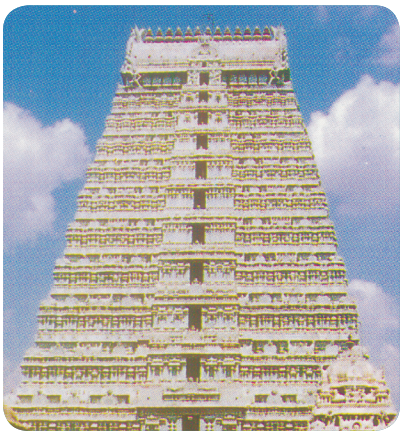
दुसरीकडे ढगांचे चित्र पहा. येथे असा कोणताही पुनरावृत्तीचा नमुना नाही.

आपण असे म्हणू शकतो की, पहिल्या चार आकृत्या सममितीय आहेत आणि शेवटची (ढग) आकृती सममितीय नाही.

एखाद्या आकृतीच्या एक किंवा अनेक भागांची एका विशिष्ट नमुन्यात झालेली पुनरावृत्ती म्हणजेच सममिती होय.



ताजमहल



गोपूर (Gopuram)

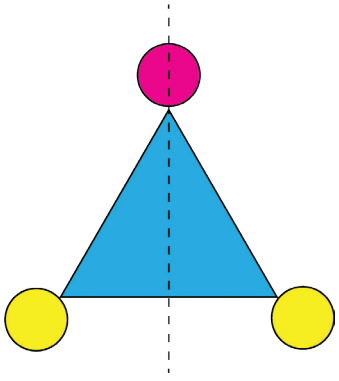
या सुंदर रचनांमध्ये तुम्हाला कोणती सममिती दिसते?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

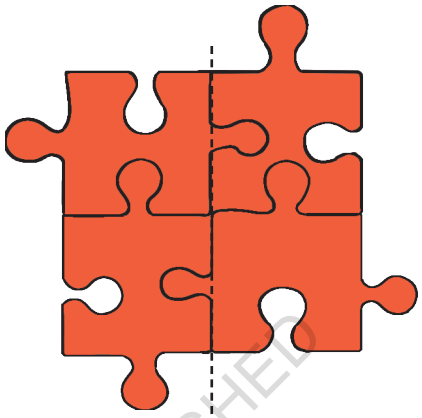
9.1 सममितीय रेषा (अक्ष)

आकृती (a) ठिपक्यांच्या रेषेसह निळ्या रंगाच्या त्रिकोणाचे चित्र दर्शविते.

ठिपक्यांच्या रेषेवरून त्रिकोण दुमडल्यास काय होईल? होय त्रिकोणाचा एक अर्धा भाग दुसऱ्या अर्ध्या भागाशी तंतोतंत जुळतो. यांना अर्ध प्रतिबिंबे (mirror halves) म्हणतात.



(a)



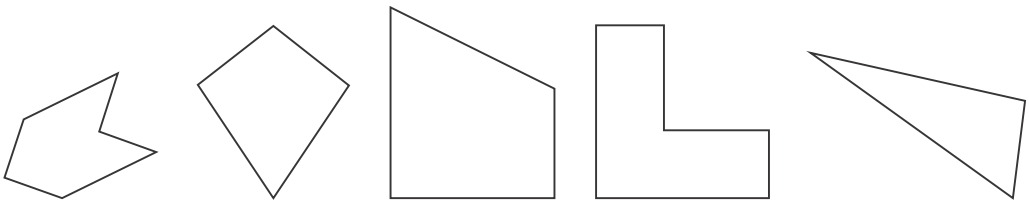
(b)

आकृती (b) मध्ये कोड्याचे चार तुकडे व मधोमध जाणारी ठिपक्यांची रेषा आहे. ती अर्ध प्रतिबिंबे आहेत का? नाही. जेव्हा आपण चित्र ठिपक्यांच्या रेषेवर दुमडतो तेव्हा डाव्या बाजूचा अर्धा भाग हा उजव्या बाजूच्या अर्ध्या भागाशी तंतोतंत जुळत नाही.

ज्या रेषेवरून आकृतीला दुमडल्याने आकृतीचे एकमेकांशी तंतोतंत जुळणारे असे दोन भाग होतात. त्या रेषेला आकृतीची **सममितीय रेषा (अक्ष)** म्हणतात.

* शोधा पाहू. [Figure it out]

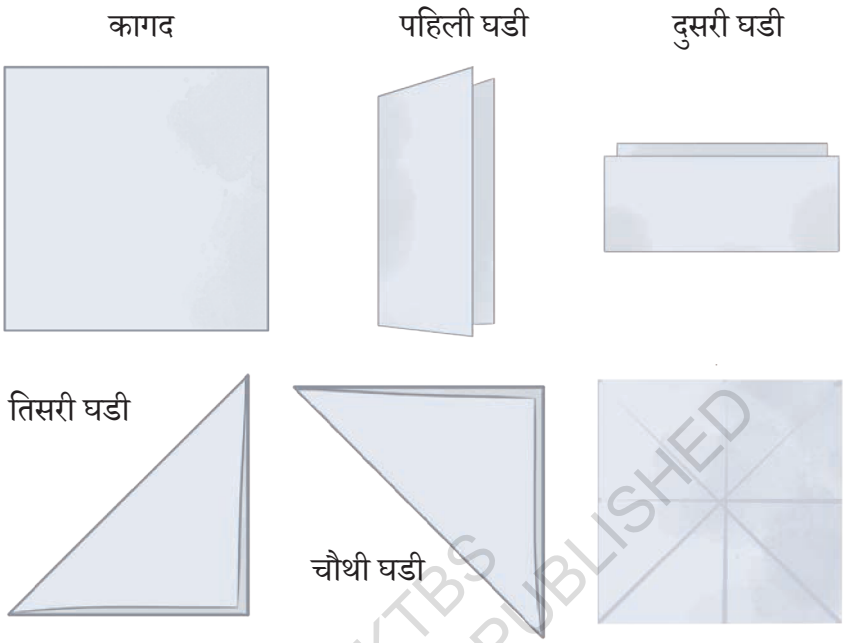
1. तुम्हाला पाठाच्या सुरुवातीला दिलेल्या आकृत्यांमध्ये कोणती सममितीय रेषा दिसते? ती ढगाच्या चित्रामध्येही दिसते का?
2. खालीलपैकी प्रत्येक आकृतीसाठी सममितीय रेषा असल्यास ओळखा.



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

एकापेक्षा जास्त सममितीय रेषा असलेल्या आकृत्या

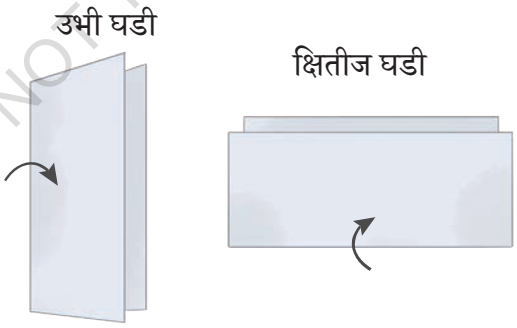
एका चौरसात एकच सममितीय रेषा असते का? कागदाचा चौकोनाकृती तुकडा घ्या. घडी करून त्याच्या सर्व सममितीय रेषा शोधा.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे वेगवेगळ्या सममितीय रेषा दर्शविणाऱ्या वेगवेगळ्या घड्या आहेत.

* कागद अर्धा उभा दुमडून घ्या.
* तो पुन्हा अर्धा आडवा दुमडून घ्या. (म्हणजे तुम्ही कागद दोनदा घडी केला आहे) आता घड्या उघडा.

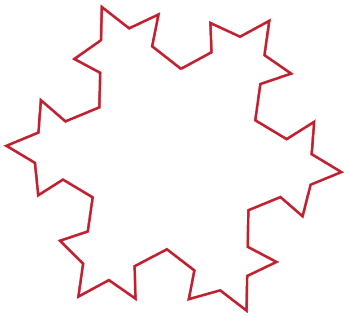
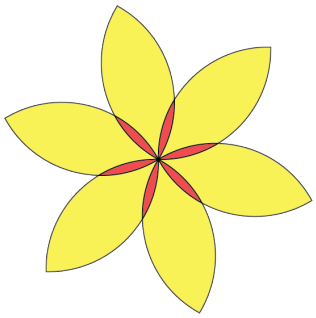
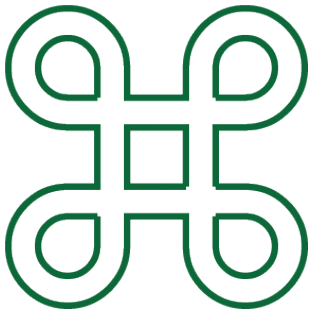


पुन्हा चौरस अर्ध्यामध्ये दुमडा (आता तिसऱ्यांदा) परंतु यावेळी तो आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कर्णावरून दुमडा व पुन्हा घडी उघडा.

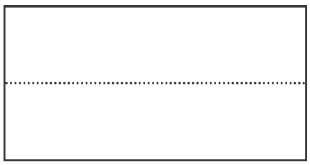
आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे तो अर्ध्यामध्ये (चौथ्यांदा) दुमडा. परंतु यावेळी दुसऱ्या कारणावरून दुमडा व घडी उघडा.

* चौरस दुमडण्याचा दुसरा पर्याय आहे का, जेणेकरून दोन अर्धे भाग तंतोतंत जुळतील? चौरस आकारात किती सममितीय रेषा आहेत?

अशाप्रकारे आकृत्यांमध्ये अनेक सममितीय रेषा असू शकतात. खालील आकृत्यांमध्येही अनेक सममितीय रेषा आहेत. आता आपण त्या सर्व शोधू शकता का?

* आपण पाहिले की, चौरसाचा कर्ण देखील एक सममितीय रेषा आहे. चौरस नसलेला एक आयत घेऊ. त्याचा कर्ण सममितीची रेषा आहे का?



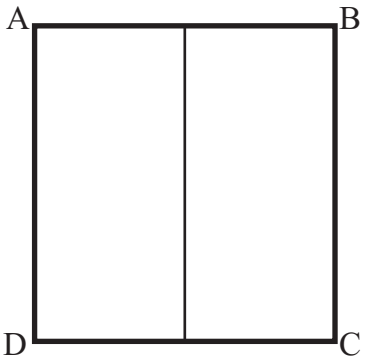
प्रथम आयत पहा आणि या प्रश्नाचे उत्तर द्या. त्यानंतर कागदाचा एक आयताकृती तुकडा घ्या आणि त्याच्या कर्णावरून दुमडून त्याचे दोन भाग एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात का ते तपासा (overlap). तुम्हाला काय आढळते?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रतिबिंब

आतापर्यंत आपण असे म्हणत आलो आहोत की, जेव्हा आपण सममितीय रेषेवरून एखादी आकृती दुमडतो तेव्हा दोन भाग पूर्णपणे तंतोतंत जुळतात. आपण असेही म्हणू शकतो की, सममितीय रेषेच्या एका बाजूला असलेल्या आकृतीचा भाग रेषेद्वारे दुसऱ्या बाजूला परावर्तित होतो. त्याचप्रमाणे सममितीय रेषेच्या दुसऱ्या बाजूला असलेला आकृतीचा भाग पहिल्या बाजूला परावर्तित होतो. आकृतीवर कांही बिंदू घेऊन समजून घेऊ.

आकृतीमध्ये ABCD हा चौरस असून आपण प्रथम उभ्या सममितीय रेषेचा विचार करू. जेव्हा आपण रेषेवरून चौरसाला प्रतिबिंबित करतो तेव्हा उजवीकडील B व C हे बिंदू डाव्या बाजूला परावर्तित होतात आणि A व D बिंदूंनी पूर्वी व्यापलेल्या स्थानावर कब्जा करतात. A व D बिंदूचे काय होते? A चे स्थान B ने आणि D चे स्थान C ने व्यापले आहे.



* जर आपण A ते C पर्यंत कर्णावरून प्रतिबिंबित केले तर? A, B, C व D बिंदू कोठे जातात? आणि जर आपण सममितीच्या क्षितीज रेषेवरून प्रतिबिंबित केले तर ते कोठे जातात?

सममितीय रेषा असलेल्या आकृतीमध्ये **परावर्तन सममिती** असते असेही म्हटले जाते.

सममितीय रेषा असलेले आकार निर्माण करणे

आतापर्यंत आपण सममितीय आकृत्या आणि असममितीय आकृत्या पाहिल्या आहेत. अशा सममितीय आकृत्या कशा तयार होतात? चला आपण शोध घेऊया.

शाईचा डाग (Ink Blot Devils)

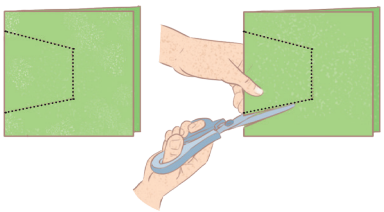
इयत्ता 5 वी मध्ये तुम्ही ही कृती करून आनंद घेतला आहे. कागदाचा एक तुकडा घ्या. तो अर्ध्यावरून दुमडा. कागद उघडा आणि अर्ध्या भागावर शाईचे कांही थेंब (किंवा पेंट) टाका.

आता अर्ध्या भागांना दुमडून एकत्र दाबा आणि नंतर कागद पुन्हा उघडा.

* तुम्हाला काय दिसते?
* मिळालेली आकृती सममितीय आहे का?
* उत्तर होय असल्यास सममितीय रेषा कोठे आहे?
* कोणती रेषा आहे का जिच्यावरून दुमडल्याने आकृतीचे दोन समान भाग होऊ शकतात.
* असे आणखी नमुने बनविण्याचा प्रयत्न करा.

कागद दुमडणे व कापणे

सममितीय आकार बनविण्याची आणखी एक पद्धत आहे. या दोन आकृत्यांमध्ये एका कागदाचा एक तुकडा दुमडला आहे आणि ठिपक्यांनी दर्शविलेल्या रेषेवरून कापले आहे. कागदाची घडी उघडल्यावर तो कसा दिसेल याचे चित्र काढा.



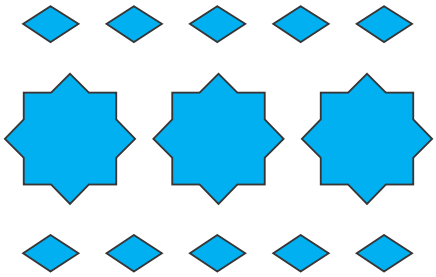
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुम्हाला या आकृतीत सममितीय रेषा दिसते का? ती कोठे आहे?

दुमडून आणि कापून वेगवेगळे सममितीय आकार बनवा.

सममितीय आकार मिळविण्यासाठी कागदाचे तुकडे दुमडण्याच्या आणि कापण्याच्या बऱ्याच पध्दती आहेत.

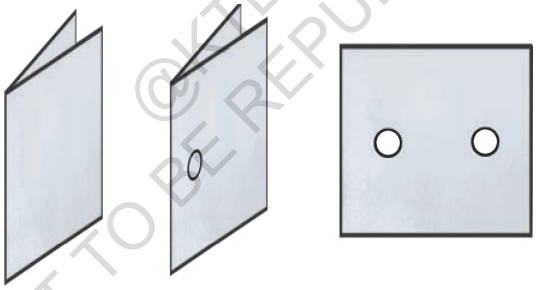
एक पातळ आयताकृती रंगीत कागद घ्या. तो अनेक वेळा घडी करा आणि येथे दाखविल्याप्रमाणे कागद कापून कांही गुंतागुंतीचे नमुने तयार करा. पुनरावृत्ती केलेल्या आराखड्यामधील सममितीय रेषा ओळखा. सण-उत्सवाच्या प्रसंगी अशा सजावटीच्या पेपरचे तुकडे वापरा.



* शोधा पाहू. [Figure it out]

छिद्रे पडण्याचा खेळ (Punching Game)

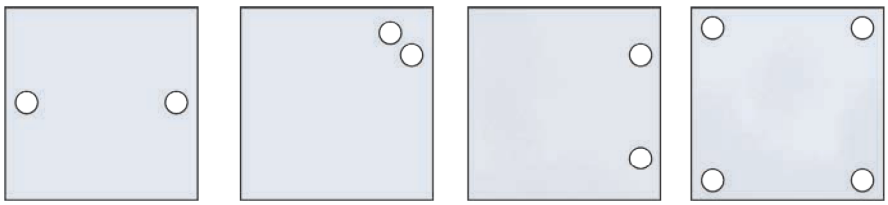
घडी ही एक सममितीय रेषा आहे. पंचिंग मशीन वापरून दुमडलेल्या चौकोनी कागदाच्या वेगवेगळ्या ठिकाणी छिद्रे पाडा आणि विविध सममितीय नमुने तयार करा.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

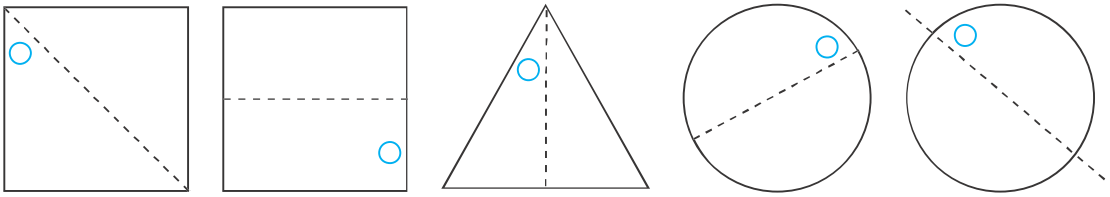
1. पुढील प्रत्येक आकृतीमध्ये दुमडलेल्या चौकोनी कागदावर छिद्र पाडले गेले आणि नंतर कागद उघडला गेला. कागदाची दुमडलेली रेषा ओळखा.

   एक छिद्र पाडून आकृती (D) तयार केली आहे. तर कागद कशाप्रकारे दुमडला होता?



(a) (b) (c) (d)

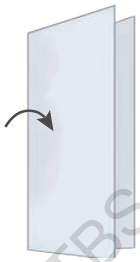
2. सममितीय रेषा दिलेली असताना इतर छिद्रे शोधा.



(a) (b) (c) (d) (e)

3. कागदाच्या कात्रण कामावर येथे कांही प्रश्न आहेत. उभ्या घडीचा विचार करा. ही या प्रकारे दर्शविली जाते.

उभी घडी



त्याचप्रमाणे, क्षितीज घडी खालीलप्रमाणे दर्शविली जाते.

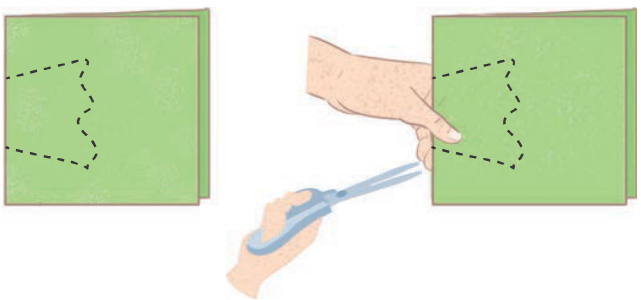
क्षितीज घडी



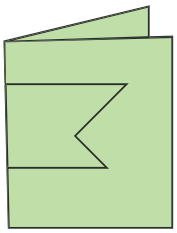
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. खालीलपैकी प्रत्येक कात्रण कामानंतर, कागद उघडल्यावर छिद्राच्या आकाराचा अंदाज लावा. तुम्ही तुमचे अंदाज केल्यानंतर ते आकार कापा आणि तुमचे उत्तर तपासा.

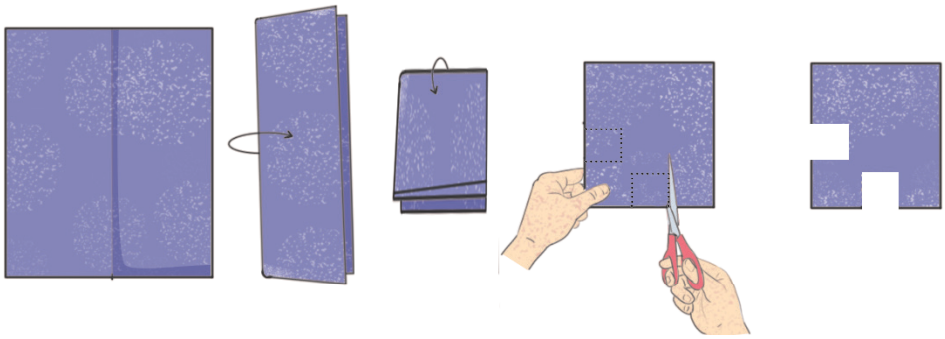
(a)



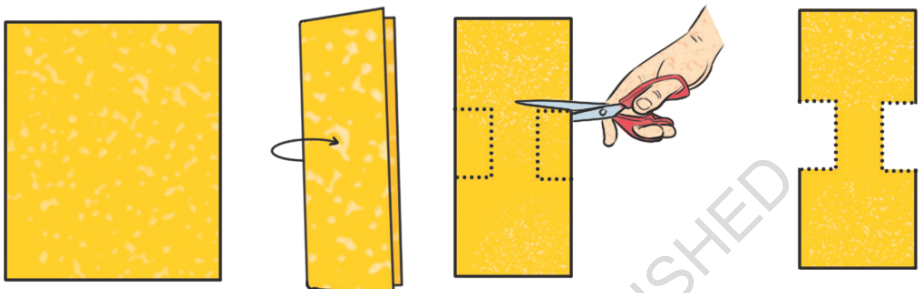
(b)



(c)

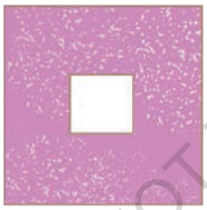


(d)



5. समजा तुम्हाला यापैकी प्रत्येक आकार कांही घड्या घालून आणि एका सरळ रेषेत कापून मिळवायचे आहेत. तुम्ही ते कसे कराल?

a. मध्यभागी असलेले एक छिद्र चौरस आहे.



b. मध्यभागी असलेले एक छिद्र चौरस आहे.

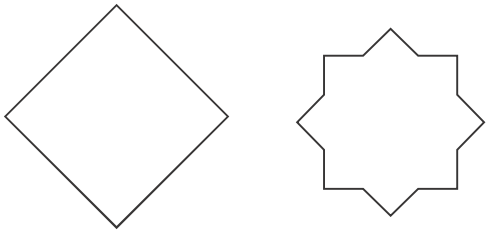


©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

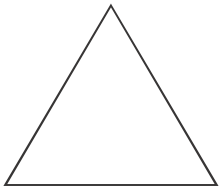
टीप : वरील दोन प्रश्नांमध्ये मध्यभागी 4 बाजू असलेल्या आकृत्या चौरसाचे दोन्ही गुणधर्म दर्शवितात का ते तपासा.

6. या आकारांमध्ये किती सममितीय रेषा आहेत?

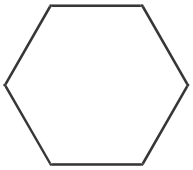
i)



ii) समान बाजू आणि समान कोन असलेला त्रिकोण

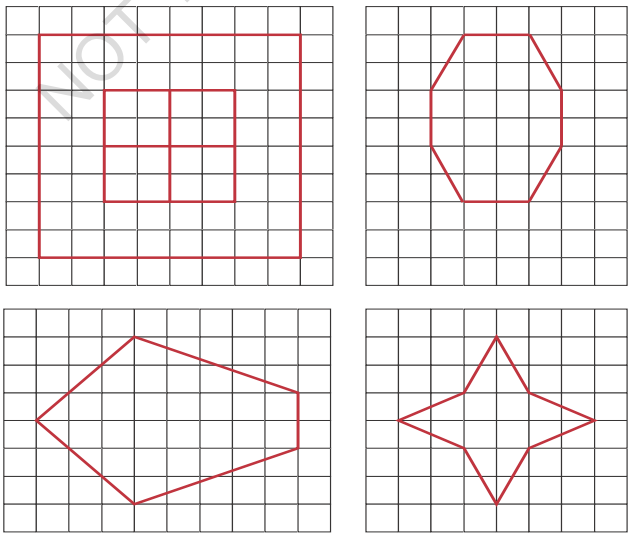


iii) समान बाजू आणि समान कोन असलेला षटकोन



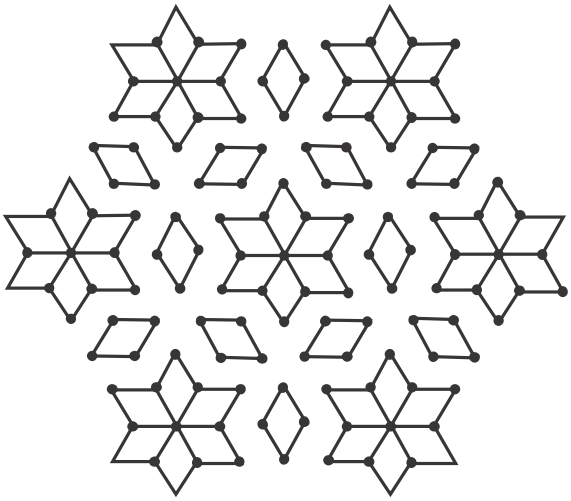
7. प्रत्येक आकृती गिरवा (Trace) आणि ती सममितीय रेषा असल्यास काढा.





@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. खालील रांगोळीमधील सममितीय रेषा शोधा.



9. खालील रचना करा.

a) फक्त एक सममितीय रेषा असणारा त्रिकोण

b) तीन निश्चित सममितीय रेषा असणारा त्रिकोण

c) सममितीय रेषा नसलेला त्रिकोण

दोन निश्चित सममितीय रेषा असणारा त्रिकोण रचणे शक्य आहे का?

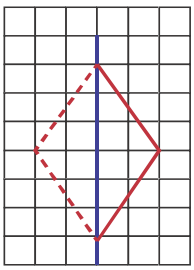
10. खालील आकृत्या काढा. प्रत्येक बाबतीत आकृतीमध्ये कमीत कमी एक वक्र सीमा असली पाहिजे.

a) एक निश्चित सममितीय रेषा असलेली आकृती

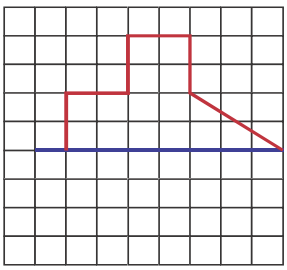
b) दोन निश्चित सममितीय रेषा असलेली आकृती

c) चार निश्चित सममितीय रेषा असलेली आकृती

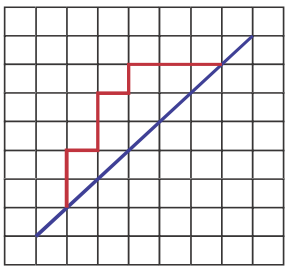
11. चौरस / आलेख कागदावर खालील आकृत्यांची नक्कल करा. निळी रेषा सममितीय रेषा समजून आकृत्या पूर्ण करा. उदाहरणासाठी आकृती (a) पूर्ण केली आहे.



(a)

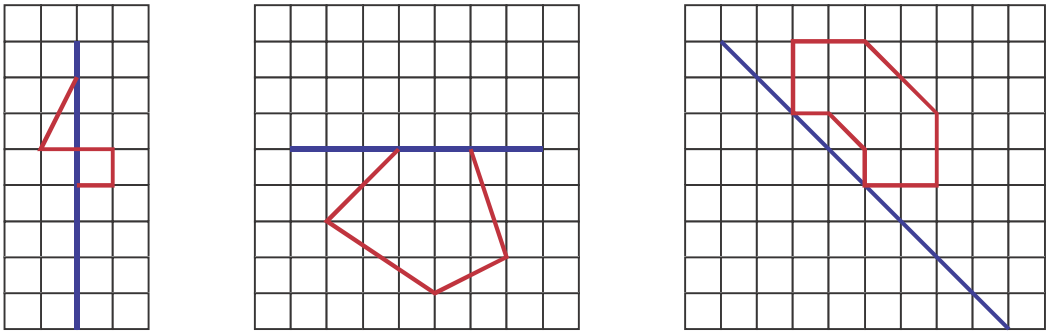


(b)



(c)

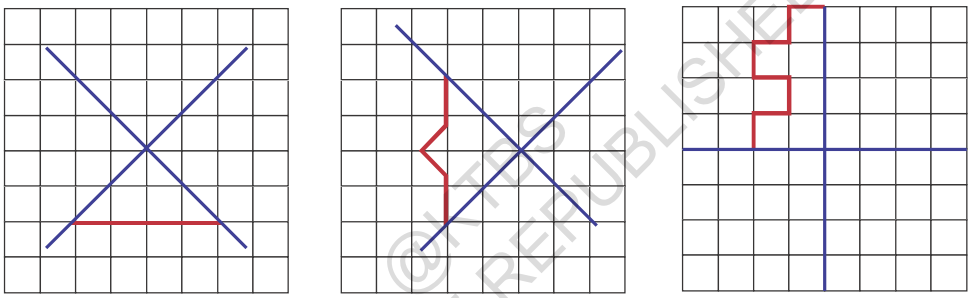
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



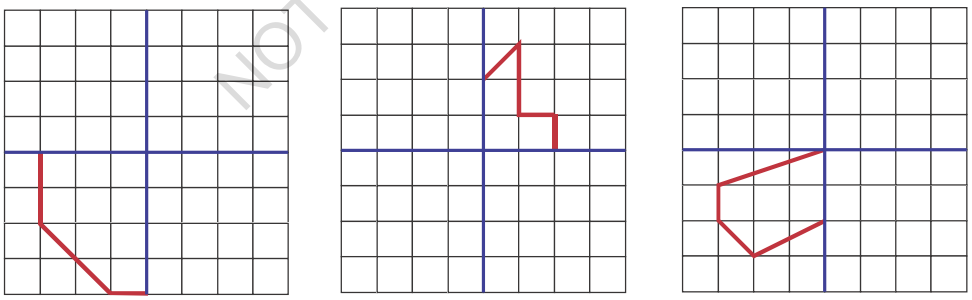
(d) (e) (f)

सूचना: आकृती (c) आणि (f) साठी पुस्तक फिरविल्याने कांही मदत होते का ते पहा.

12. चौरस / आलेख कागदावर खालील चित्रांची नक्कल करा. त्यापैकी प्रत्येक आकृती पूर्ण करा, जेणेकरून पूर्ण झालेल्या आकृत्यांमध्ये सममितीय रेषा म्हणून दोन निळ्या रेषा असतील.



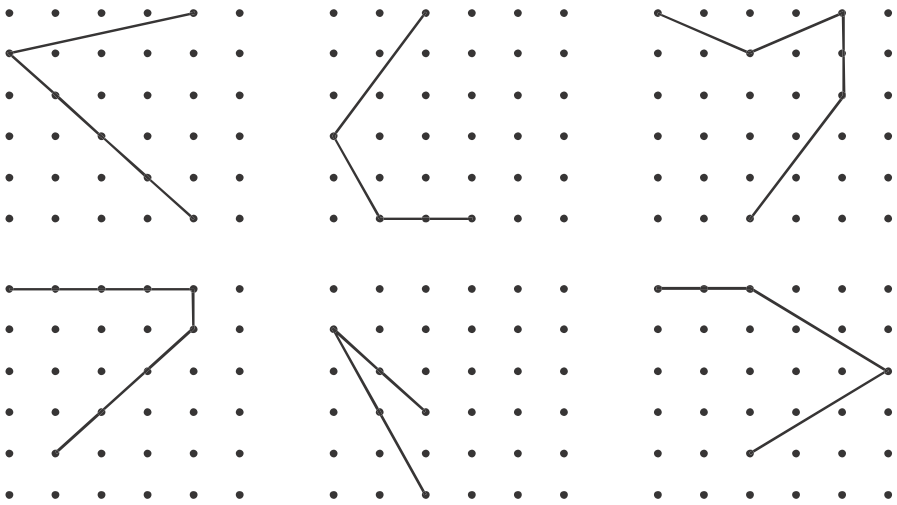
(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

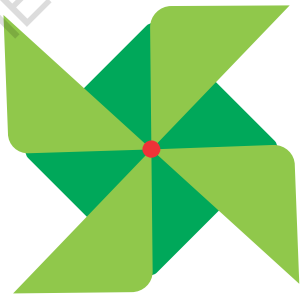
@NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

13. ठिपक्यांच्या कागदावर (Dot Grid) खालील आकृत्यांची नक्कल करा. प्रत्येक आकृतीला सममितीय रेषा असलेला आकार बनविण्यासाठी आणखी दोन रेषा काढा.



9.2 परिभ्रमणीय सममिती

चित्रातील कागदी पवनचक्की सममितीय दिसते, पण तेथे सममितीय रेषा नाही! तथापि आपण ते दुमडले तरी दोन अर्धे भाग एकमेकांशी तंतोतंत जुळत नाहीत. दुसरीकडे, जर तुम्ही ती मध्यभागी असलेल्या लाल बिंदूतून 90° मध्ये फिरविली तर पवनचक्की अगदी सारखी दिसते.



आपण म्हणतो की, पवनचक्कीमध्ये **परिभ्रमणीय सममिती** असते.

परिभ्रमणीय सममितीबद्दल बोलत असताना, नेहमी एक निश्चित बिंदू असतो ज्याच्या भोवती वस्तू फिरविला जाते. या स्थिर बिंदूला **परिभ्रमण केंद्र** म्हणतात.

वरील पवनचक्की 90° पेक्षा कमी कोनामध्ये फिरविल्यास अगदी सारखी दिसेल का?

नाही!

एखादी आकृती सारखीच दिसण्यासाठी ज्या कोनामध्ये फिरविता येऊ शकते त्याला **परिभ्रमणीय सममितीचा कोन** किंवा थोडक्यात **सममितीय कोन** म्हणतात.

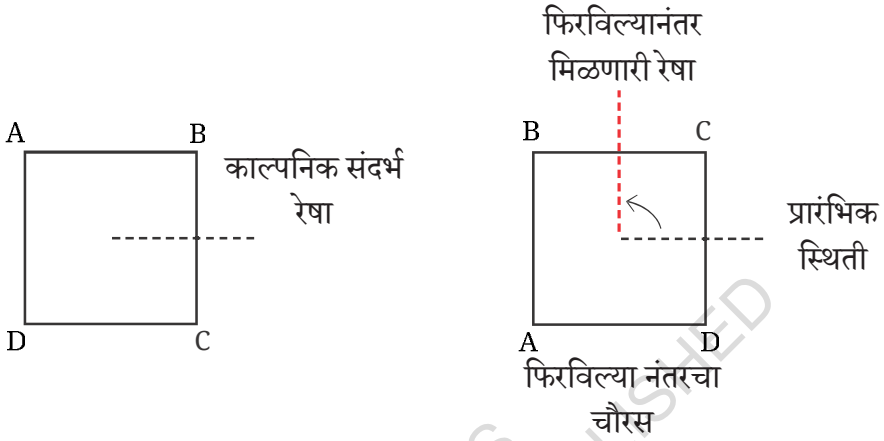
पवनचक्कीसाठी सममितीचे कोन 90° (पाव वळण), 180° (अर्धे वळण), 270° (पाउण वळण) आणि 360° (पूर्ण वळण) असे आहेत. लक्षात घ्या की, जेव्हा कोणतीही आकृती 360° ने फिरविली जाते तेव्हा ती तिच्या मूळ स्थितीत येते. म्हणून 360° हा नेहमी सममितीय कोन असतो. अशा प्रकारे आपण पाहतो की, पवनचक्कीला 4 सममितीय कोन आहेत.

चार सममितीय कोन असणारा इतर कोणता आकार तुम्हाला माहित आहेत का?

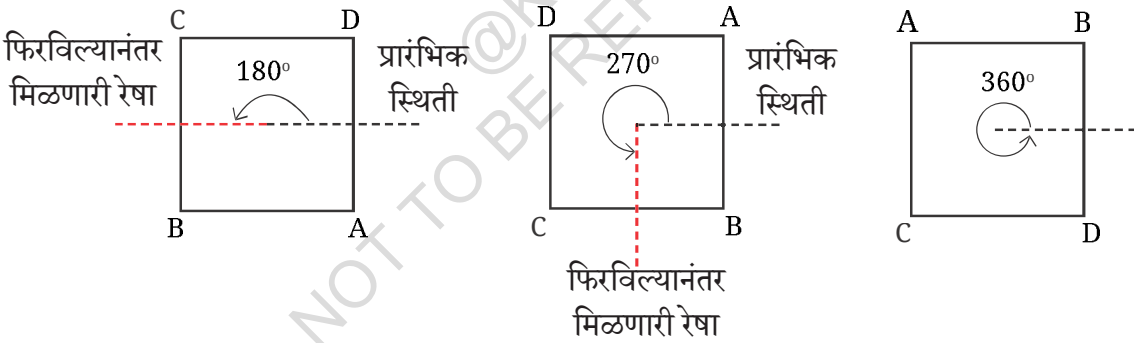
© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

चौरसाला किती सममितीय कोन असतात? प्रारंभिक चौरस मिळविण्यासाठी किती फिरवावे लागेल?

90° मध्ये फिरविल्यानंतर आपल्याला स्वतःवर आच्छादीत (overlapping) होणारा (तंतोतंत जुळणारा) चौरस परत मिळतो. बिंदू A वर बिंदू B चे स्थान, बिंदू B वर बिंदू C चे स्थान, बिंदू C वर बिंदू D चे स्थान, बिंदू D वर बिंदू A चे स्थान स्थलातंरीत होतात. तुम्हाला परिभ्रमणीय केंद्र कोठे चिन्हांकीत करायचे हे माहित आहे का?

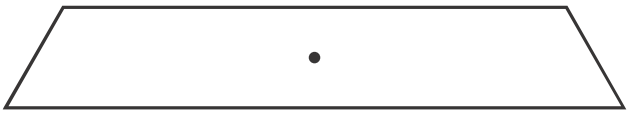


सममितीचे इतर कोन कोणते आहेत?

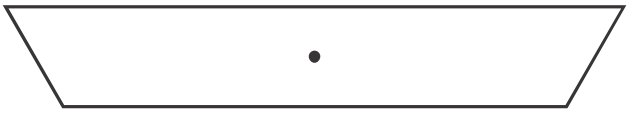


@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण - खालील पट्टीचा सममितीय कोन शोधा.



उपाय: आपण पट्टी तिच्या केंद्राभोवती घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने फिरवू.



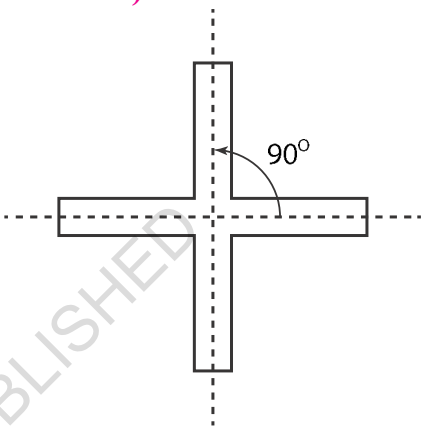
आकृती 180° मध्ये फिरविली असता वरील परिणाम होतो. ही आकृती पूर्वीच्या आकृतीशी तंतोतंत जुळते का?

नाही. का?

या स्थितीतून 180° मध्ये दुसऱ्यांदा फिरविली असता आकृती मूळ आकारात येते. ही आकृती 360° मध्ये पूर्ण फिरविली असता मूळ आकारात पुन्हा येते. म्हणून आम्ही म्हणतो की, आकृतीमध्ये परिभ्रमणीय सममिती नाही.

त्रिज्यात्मक भुजांसह आकृतीची परिभ्रमणीय सममिती (Radial Arms)

या आकृतीचा विचार करा, ही 4 त्रिज्यात्मक भुजा असलेली आकृती आहे. तिला किती सममितीय कोन आहेत? ते कोणते? लक्षात घ्या की, मध्यवर्ती ठिपके असलेल्या संलग्न रेषांमधील कोन 90° आहे.

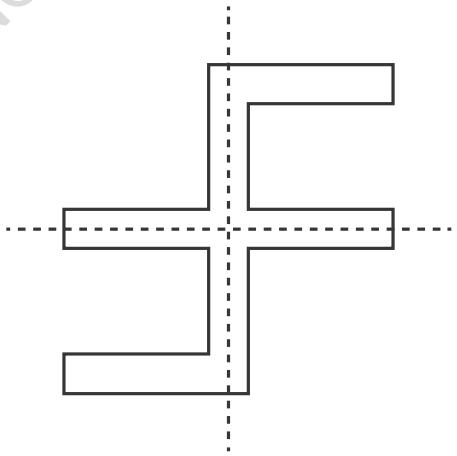


जेणेकरून आकृतीमध्ये 4 सममितीय कोन अजूनही असतील अशाप्रकारे तुम्ही त्रिज्यात्मक भूजांमधील कोण बदलू शकता का? ते रेखाटण्याचा प्रयत्न करा.

काढलेल्या आकृतीत 4 सममितीय कोन आहेत की नाहीत हे तपासण्यासाठी तुम्ही कागदाच्या दोन वेगवेगळ्या तुकड्यांवर आकृती काढू शकता. एका कागदावरील त्रिज्यात्मक भुजा कापून घ्या. दुसरी आकृती स्थिर ठेवा आणि परिभ्रमणीय सममिती तपासण्यासाठी कापलेली आकृती त्यावरून फिरवा.

तुम्ही वरील आकृतीमध्ये कशी सुधारणा कराल, जेणेकरून त्यात फक्त दोन सममितीय कोन असतील?

येथे एक मार्ग आहे.

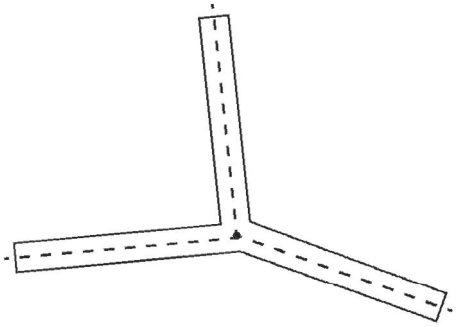


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आम्ही 4 आणि 2 सममितीय कोन असलेल्या आकृत्या पाहिल्या आहेत. तंतोतंत 3 सममितीय कोन असलेली आकृती आपण मिळवू शकतो का? यासाठी तुम्ही त्रिज्यात्मक भुजा वापरू शकता का?

खालील आकृतीप्रमाणे 3 त्रिज्यात्मक भुजांनी प्रयत्न करूया. येथे किती सममितीय कोन आहेत आणि ते कोणते?

येथे 3 त्रिज्यात्मक भुजा असलेली एक आकृती आहे.



या आकृतीवरून गिरवून तिची नक्कल करा व कापून घ्या. आकृतीचा कापलेला भाग या आकृतीवर फिरवून तिचे परिभ्रमणीय कोन ठरवा.

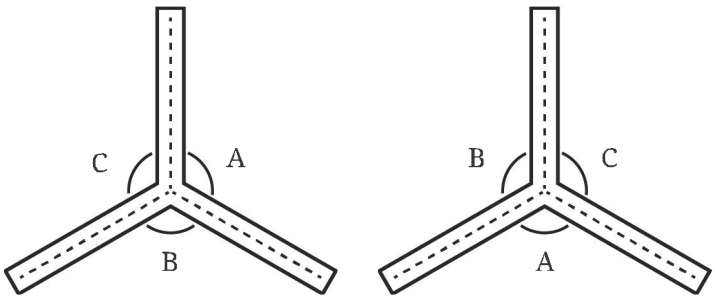
आपण पाहतो की, केवळ पूर्ण वळण किंवा 360° मध्ये फिरविल्यास आकृती मूळ स्थितीमध्ये परत येईल. त्यामुळे या आकृतीत परिभ्रमणीय सममिती नाही. कारण 360° हा एकमेव सममितीय कोन आहे.

तथापि, आकृतीमध्ये 3 सममितीय कोन होण्यासाठी कांही बदल करणे शक्य आहे का?

ठिपके असलेल्या रेषांमधील कोन बदलून हे करता येऊ शकते का?

जर तीन त्रिज्यात्मक भुजा असलेल्या आकृतीमध्ये परिभ्रमणीय सममिती हवी असेल तर तिची फिरविलेली आवृत्ती मूळ आकृतीशी जुळली पाहिजे. येथे त्या दोन्हींच्या ढोबळ आकृत्या आहेत.

जर या दोन्ही आकृत्या तंतोतंत जुळत असतील तर तुम्ही त्यांच्या कोनांबद्दल काय सांगू शकाल?



वरील आकृतीमध्ये ∠A ने ∠B चे स्थान, ∠B ने ∠C चे स्थान ∠C ने ∠A चे स्थान घेतले आहे का पहा.

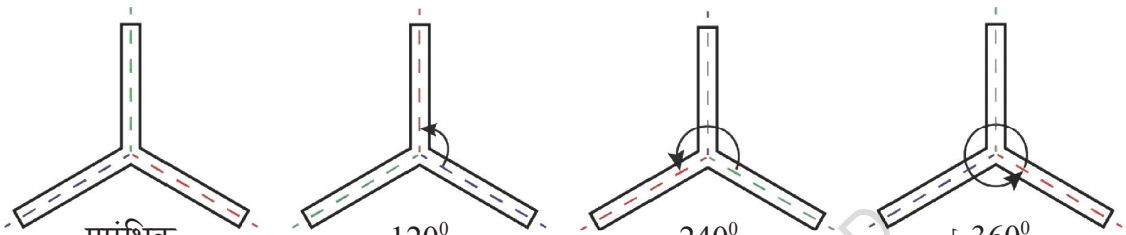
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तर $\angle A = \angle B = \angle C$ हे कोन किती असतील?

आम्हाला माहित आहे की पूर्ण वळण $360°$ असते. हे या तिन्ही कोनात समान प्रमाणात विभागले जाते. म्हणून प्रत्येक कोन $360°/3 = 120°$ असणे आवश्यक आहे.

म्हणून जेंव्हा ठिपके असलेल्या रेषांमधील कोन $120°$ असतो तेव्हा 3 त्रिज्यात्मक भुजा असलेली आकृती परिभ्रमणीय सममिती दर्शविते. हे निरीक्षण करण्यासाठी आकृतीचा कापलेला कागद वापरा.

आता आकृतीला फिरण्याचे किती कोन आहेत आणि ते कोणते?



प्रारंभिक स्थिती | 120^0 फिरविल्यानंतर | 240^0 ($120^0 + 120^0$) फिरविल्यानंतर | $+ 360^0$ ($120^0 + 120^0 + 120^0$) फिरविल्यानंतर

टीप : परिभ्रमण दर्शविण्यासाठी रंगांचा उपयोग केलेला आहे.

चला अजून कांही आकृत्या शोधूया.

* तुम्ही त्रिज्यात्मक भुजांच्या आकृत्या काढू शकाल का? ज्यांचे

अ) निश्चित 5 सममितीय कोन आहेत.

ब) 6 सममितीय कोन आहेत, प्रत्येक घटनेतील सममितीय कोन सुद्धा काढा.

सूचना: पहिल्या आकृतीसाठी 5 त्रिज्यात्मक भुजा वापरा. दोन लगतच्या त्रिज्यात्मक भुजांमधील कोन किती असेल?

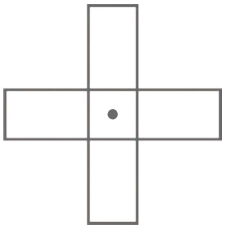
* तंतोतंत 7 सममितीय कोन असलेल्या त्रिज्यात्मक भुजांच्या आकृतीचा विचार करा. तिचा सर्वात लहान सममितीय कोन कोणता असेल? यामध्ये अंशांची संख्या पूर्ण आहे का? नसल्यास मिश्र अपूर्णांकात दाखवा.

इतर प्रकारच्या आकृत्यांसाठी सममितीय कोन शोधू.

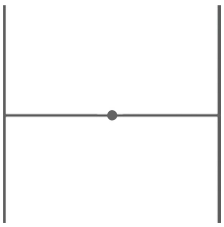
*** शोधा पाहू. [Figure it out]**

1. दिलेल्या आकृतीमधील • ने चिन्हांकित केलेल्या बिंदूवरील सममितीय कोन शोधा.

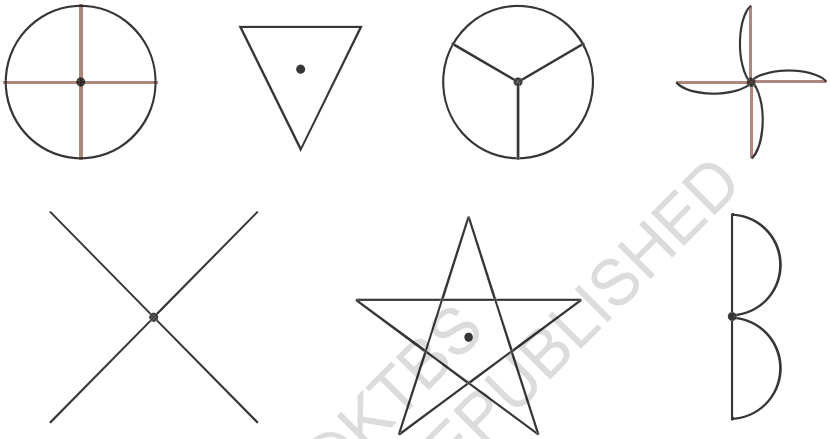
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED


(a)

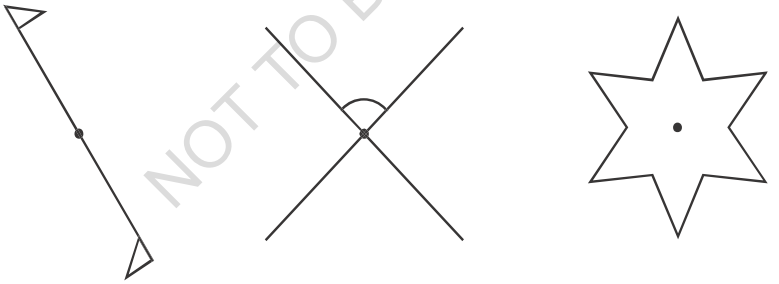

(b)


(c)

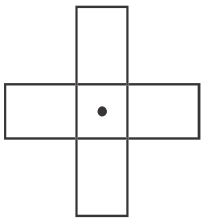
2. खालीलपैकी कोणत्या आकृत्यांना एका पेक्षा जास्त सममितीय कोन आहेत?

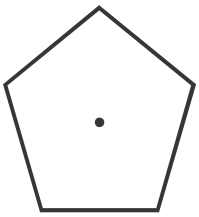


3. खालील प्रत्येक आकृतीसाठी परिभ्रमणीय सममितीचा क्रम लिहा.









@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आपण वरील सर्व आकृत्यांमधील सममितीय कोनांची यादी करू.

* 2 अचूक सममितीय कोन असतात तेव्हा : 180°, 360°
* 3 अचूक सममितीय कोन असतात तेव्हा : 120°, 240°, 360°
* 4 अचूक सममितीय कोन असतात तेव्हा: 90°, 180°, 270°, 360°

आपण या सममितीय कोनांमध्ये कांही साम्य असल्याचे निरीक्षण केले का? संख्यांच्या पहिल्या संचातील सर्व कोन 180° च्या पटीत, दुसरे 120° च्या पटीत आणि तिसरे 90° च्या पटीत आहेत.

* प्रत्येक बाबतीत कोन हे सर्वात लहान कोनांचे गुणक असतात. आपणास आश्चर्य वाटेल आणि विचार कराल की हे नेहमीच होईल का? तुम्हाला काय वाटते?

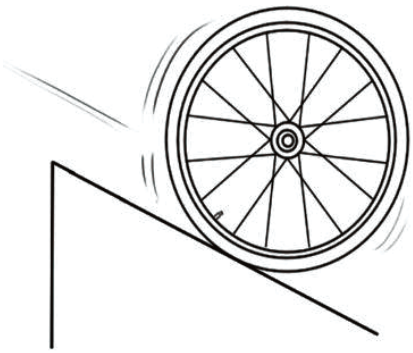
* विधान सत्य की असत्य

- प्रत्येक आकृतीमध्ये सममितीय कोन 360° असेल.
- जर एखाद्या आकृतीचा सर्वात लहान सममितीय कोन अंशामध्ये नैसर्गिक संख्या असेल तर तो 360° चा **अवयव** आहे.

सर्व आकृत्यांसाठी सर्वात लहान सममितीय कोन असतो का? येथे असे दिसून येते की, ज्यांच्या सममितीची आपण आता चर्चा करत आहोत अशा वर्तुळासारखे सर्वात सममित आकार वगळता बहुतेक आकृत्यांमध्ये असेच आहे.

* वर्तुळाची सममिती

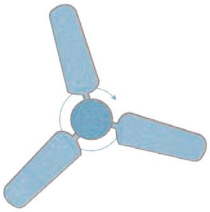
वर्तुळ एक आकर्षक आकृती आहे. जेव्हा तुम्ही वर्तुळ त्याच्या केंद्राभोवती घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने फिरविता तेव्हा काय होते? ते स्वतःशीच जुळते. तुम्ही ते कोणत्या कोनामध्ये फिरविता हे महत्वाचे नाही! म्हणून वर्तुळासाठी प्रत्येक कोन हा सममितीय कोन असतो.



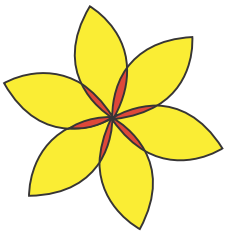
© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता वर्तुळाच्या काठावर एक बिंदू घ्या आणि त्याला मध्यभागी जोडा. रेषा वर्तुळाच्या व्यासापर्यंत वाढवा. तो व्यास प्रतिबिंबित सममितीची रेषा आहे का? होय आहे. प्रत्येक व्यास ही सममितीय रेषा आहे!

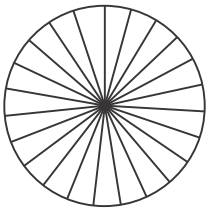
चाकांप्रमाणे आपण आपल्या सभोवतालच्या इतर वस्तू शोधू शकतो, ज्यांमध्ये परिभ्रमणीय सममिती आहे. त्या शोधा. त्यापैकी कांही खाली दर्शविलेल्या आहेत.



पंखा



फूल



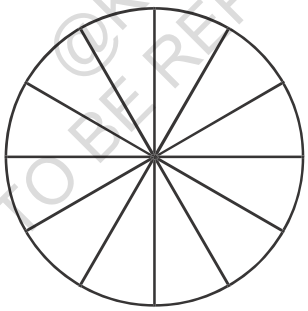
चाक

* **शोधा पाहू. [Figure it out]**

1. खालील वर्तुळाच्या भागांना अशाप्रकारे रंग द्या की,

   i) 3 सममितीय कोन असतील ii) 4 सममितीय कोन असतील

   iii) वेगवेगळ्या प्रकारे भागांना रंगवून तुम्ही सममितीय कोनांच्या किती संभाव्य संख्या मिळवू शकाल?



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. वर्तुळाव्यतिरिक्त दोन आकृत्या काढा आणि एक चौरस काढा. ज्यामध्ये परावर्तनीय सममिती आणि परिभ्रमणीय सममिती आहेत.

3. जेथे शक्य असेल तेथे एक कच्ची आकृती काढा.

   a) किमान दोन सममितीय रेषा आणि किमान दोन सममितीय कोन असलेला त्रिकोण.

   b) एक त्रिकोण ज्यामध्ये फक्त एक सममितीय रेषा आहे परंतु परिभ्रमणीय सममिती नाही.

याचा प्रयत्न करा.

c) परिभ्रमणीय सममिती असलेला परंतु कोणतीही परावर्तनीय सममिती नसलेला चौकोन.

d) परावर्तनीय सममिती असलेला पण परिभ्रमणीय सममिती नसलेला चौकोन.

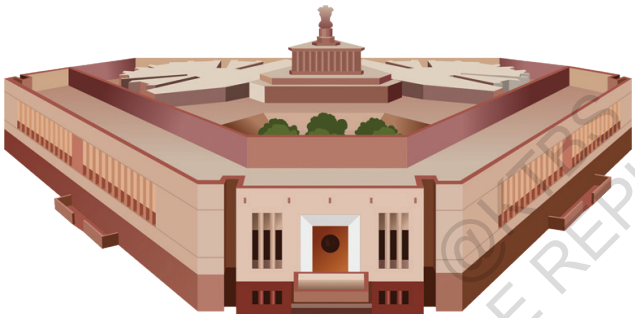
4. आकृतीमध्ये 60° हा सर्वात लहान सममितीय कोन आहे. या आकृतीचे इतर सममितीय कोन किती अंशाचे असतील?

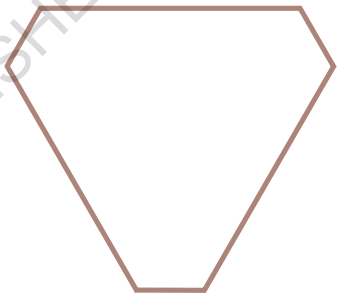
5. आकृतीमध्ये 60° हा सममितीय कोन आहे आणि 60° पेक्षा कमी दोन सममितीय कोन आहेत. तर सर्वात लहान सममितीय कोन किती असेल?

6. आपण परिभ्रमणीय सममिती असलेली जिचे सर्वात लहान कोन खालीलप्रमाणे असतील अशी आकृती काढू शकतो का?

a) 45°? b) 17°?

7. हे दिल्लीतील नवीन संसद भवनाचे चित्र आहे.





© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

a) चित्राच्या बाह्य सीमेला परावर्तनीय सममिती आहे का? तसे असल्यास सममितीय रेषा काढा. त्या किती आहेत?

b) त्याच्या केंद्राभोवती परिभ्रमणीय सममिती आहे का? असल्यास सममितीय कोन शोधा.

8. प्रकरण 1, कोष्टक 3 मधील नियमित बहुभुजाकृतींमध्ये पहिल्या आकाराच्या क्रमात किती सममितीय रेषा आहेत? तुम्हाला कोणता संख्यांचा क्रम मिळतो?

9. प्रकरण 1, कोष्टक 3 मधील नियमित बहुभुजाकृतींमध्ये पहिल्या आकाराच्या क्रमात किती सममितीय कोण आहेत? तुम्हाला कोणता संख्यांचा क्रम मिळतो?

10. प्रकरण 1, कोष्टक 3 मधील कोच स्नो फ्लेक क्रमातील शेवटच्या आकाराच्या क्रमात किती सममितीय रेषा आहेत? तुम्हाला किती सममितीय कोन मिळतात?

11. अशोक चक्रामध्ये किती सममितीय रेषा आणि किती सममितीय कोन आहेत?



14. फरशी सोबत खेळणे (Playing with Tiles)

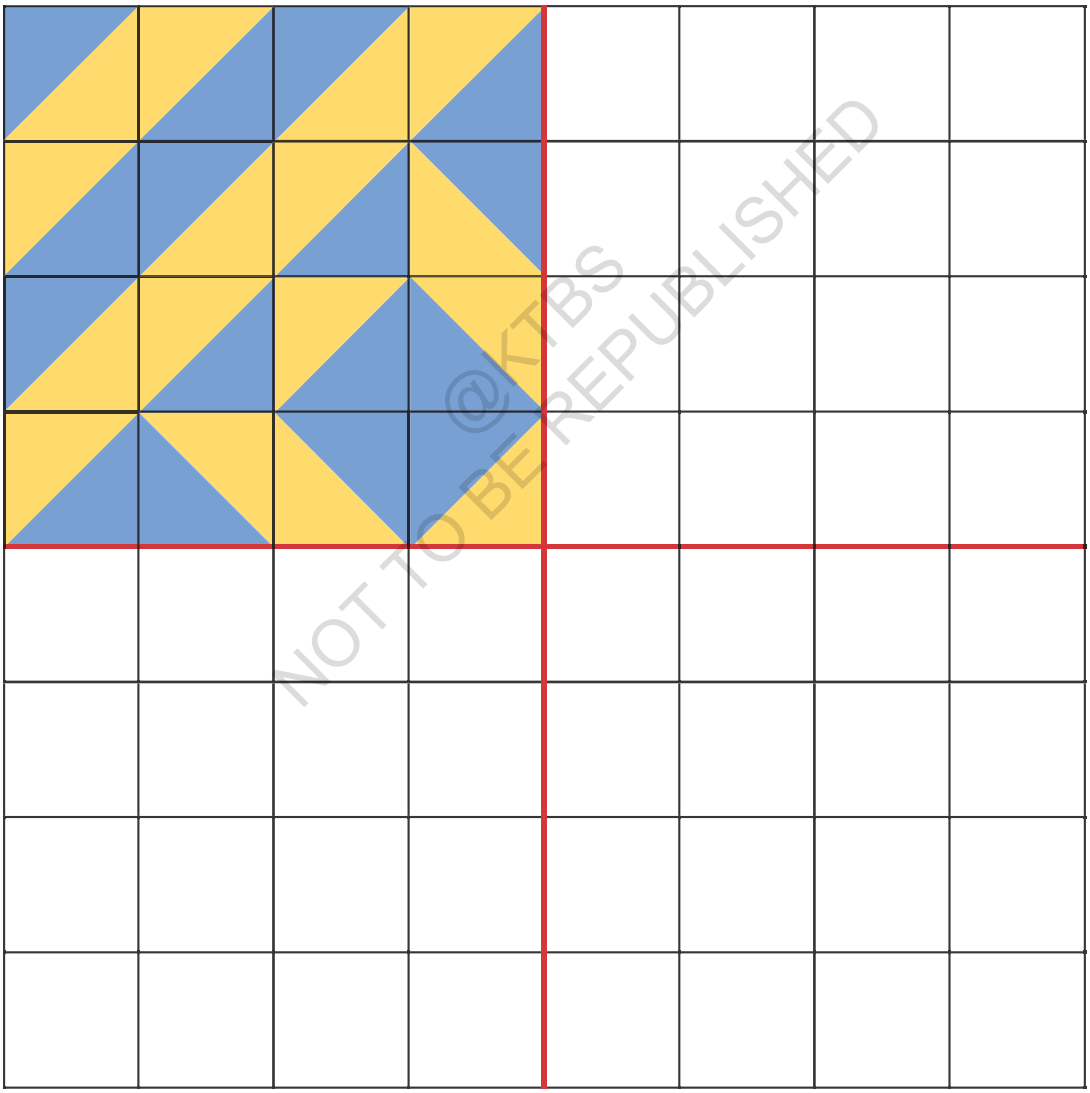
a) खालील आकृती पूर्ण करण्यासाठी पुस्तकाच्या शेवटी दिलेल्या आकृतीमधील रंगीत फरशा  वापरा जेणेकरून त्यामध्ये निश्चित दोन सममितीय रेषा असतील.

b) आकृती बनविण्यासाठी अशा 16 फरशा वापरा ज्यामध्ये निश्चित

एक सममितीय रेषा असेल

दोन सममितीय रेषा असतील

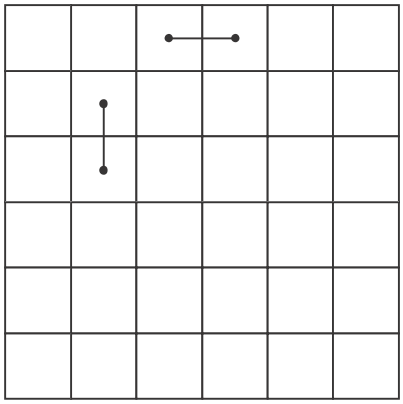
c) सृजनशील सममितीय रचना करण्यासाठी या फरशांचा वापर करा.

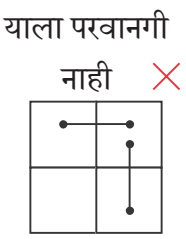


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* खेळ

6X6 मापाचा एक ग्रीड काढा. दोन खेळाडू आळीपाळीने एकावेळी दोन लगतचे चौकोन व्यापतील अशा रेषा काढू शकतील. रेषा क्षितीज किंवा उभी. अशी दोन्ही प्रकारे काढता येते; परंतु एकमेकांवर काढता येऊ शकत नाही. जोपर्यंत खेळाडू आळीपाळीने रेषा काढत राहतील तोपर्यंत हा खेळ चालू राहील. शेवटी जो खेळाडू रेषा काढण्यास असमर्थ ठरेल तो हरेल.





हा खेळ जिंकण्यासाठी तुम्ही कोणती रणनिती वापरू शकाल?

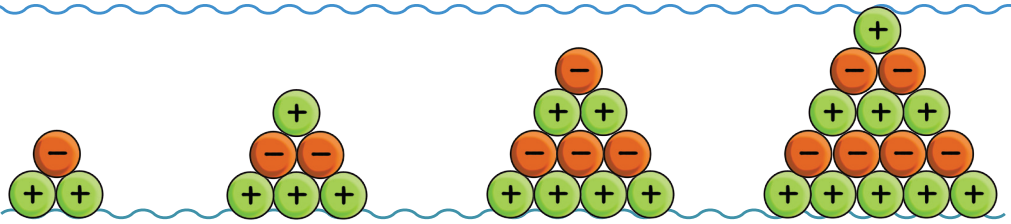
सारांश

* जेव्हा एखादी आकृती एका विशिष्ट नमुन्यात पुनरावृत्ती होणाऱ्या भागांपासून बनलेली असते तेंव्हा आपण त्या आकृतीमध्ये **सममिती** आहे असे म्हणतो. आपण असेही म्हणतो की, अशी आकृती **सममितीय आकृती** आहे.
* ज्या रेषेवरून एखाद्या सपाट आकृतीला दुमडल्याने आकृतीचे एकमेकांशी तंतोतंत जुळणारे दोन भाग होतात.तिला आकृतीची **सममितीय रेषा** किंवा **सममितीय अक्ष** म्हणतात.
* एका आकृतीमध्ये अनेक सममितीय रेषा असू शकतात.
* एखादी आकृती एका स्थिर बिंदूभोवती कोनात फिरविली असता कधीकधी ती अगदी सारखीच दिसते. अशा कोनाला त्या आकृतीचा **सममितीय कोन** म्हणतात. ज्या आकृतीचा सममितीय कोन $0°$ आणि $360°$ च्या दरम्यान असतो तेंव्हा त्या सममितीला **परिभ्रमणीय सममिती** म्हणतात. आकृतीच्या ज्या बिंदूभोवती परिभ्रमण होते त्या बिंदुला **परिभ्रमणीय केंद्र** म्हणतात.
* एका आकृतीमध्ये अनेक सममितीय कोन असू शकतात.
* कांही आकृत्यांमध्ये सममितीय रेषा असू शकतात, परंतु सममितीय कोन नसतात. तर कांही आकृत्यांमध्ये सममितीय कोन असू शकतात, पण सममितीय रेषा नसतात. कांही आकृत्यांमध्ये सममितीय रेषा तसेच सममितीय कोन दोन्ही असू शकतात.

© IITBS NOT TO BE REPUBLISHED

*****

प्रकरण - 10



शून्याची दुसरी बाजू
(THE OTHER SIDE OF ZERO)

C2U3W2

पूर्णांक (Integers)

© DIKSHA NOT TO BE REPUBLISHED

अधिकाधिक संख्या

गणिताचे अध्ययन करताना वस्तू मोजण्यासाठी ज्या संख्या आपण सर्व प्रथम शिकलो त्यांचे स्मरण करा. त्या संख्या 1, 2, 3, 4, 5, ... या आहेत.

पुढे आम्ही शिकलो आहे की, आणखी संख्या आहेत उदाहरणार्थ 0 (शून्य) ही एक संख्या आहे जी काहीही दर्शवित नाही. ही 1 च्या आधी येते. 0 या संख्येला भारतात आणि आता जगात खूप महत्वाचा इतिहास आहे. उदाहरणार्थ जगभरात आपण 0 ते 9 अंकांचा वापर करून भारतीय संख्या प्रणालीमध्ये संख्या लिहिण्यास शिकलो, ज्यामुळे आपल्याला फक्त 10 अंकांचा वापर करून कितीही मोठी किंवा कितीही लहान संख्या लिहीता येते.

त्याचप्रमाणे आम्ही 0, 1, 2, 3, 4 ..... यांच्या दरम्यान अस्तित्वात असलेल्या आणखी कांही संख्यांबद्दलही शिकलेलो आहोत, जसे की $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ आणि $\frac{13}{6}$ अशा संख्यांना अपूर्णांक म्हणतात.

पण अशा अजून संख्या अस्तित्वात आहेत का? बरं 0 ही एक अतिरिक्त संख्या आहे त्याबद्दल आपल्याला आधी माहिती नव्हती आणि ती 1 च्या आधी येते आणि 1 पेक्षा लहान आहे. 0 च्या आधी येणाऱ्या आणि 0 पेक्षा लहान असलेल्या आणखी संख्या आहेत का?

दुसऱ्या शब्दात सांगायचे झाल्यास आपण संख्यारेषा पाहिली आहे.



तथापि, प्रत्यक्षात हा केवळ एक संख्या 'किरण' आहे. यापूर्वी आपण भूमितीमध्ये शिकलो आहोत. हा किरण 0 पासून सुरू होतो आणि उजवीकडे अनंत अंतरापर्यंत जातो. 0 च्या डावीकडे संख्या अस्तित्वात आहेत का? ज्यामुळे हा संख्या किरण एक संख्यारेषा म्हणून पूर्णत्वास येईल?

याचाच आपण या प्रकरणात शोध घेणार आहोत!

* 0 (शून्य) पेक्षा कमी संख्या असू शकते का? आपण कोणत्याही प्रकारचा विचार करू शकतो की, 0 पेक्षा कांहीतरी कमी आहे?

10.1 बेलाज बिल्डींग ऑफ फन (बेला यांची गंमतीशीर इमारत)



बेला यांचा आईस्क्रीम कारखाना पाहण्यासाठी आणि मजेदार आईस्क्रीमची चव चाखण्यासाठी मुलांची नेहमीच गर्दी असते. त्यांच्यासाठी ते आणखी मनोरंजक बनविण्यासाठी बेलाने एक बहुमजली इमारत खरेदी केली आणि मुलांना आकर्षित करणाऱ्या अनेक गोष्टींनी भरली.

तिने त्याला "बेलाज बिल्डींग ऑफ फन" असे नांव दिले. पण ही कांही सामान्य इमारत नव्हती! त्या इमारतीचे निरीक्षण करा. त्या इमारतीचा कांही भाग जमिनीखाली आहे. त्या इमारतीमध्ये तुम्हांला कोणती दुकाने दिसतात? तळ मजल्यावर काय आहे?

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इमारतीमध्ये वर-खाली जाण्यासाठी लिफ्टचा वापर केला जातो. त्यात दोन बटणे आहेत. वर जाण्यासाठी '+' आणि खाली जाण्यासाठी '-'. आपण लिफ्ट शोधू शकाल? प्रवेश (Welcome) हॉलमधून कला केंद्रात जाण्यासाठी, तुम्ही '+' बटण दोनदा दाबावे. आम्ही म्हणतो की बटण दोनदा दाबणे ++ किंवा +2 आहे.



दोन मजले खाली जाण्यासाठी, तुम्हाला '-' दाबावे लागेल. बटण दोनदा दाबणे म्हणजे - - किंवा -2 असे लिहीतो. त्यामुळे तुम्ही +1 दाबल्यास (म्हणजे '+' बटण एकदा दाबले), तर तुम्ही वरच्या एका मजल्यावर जाल आणि तुम्ही -1 दाबले (म्हणजे तुम्ही एकदा '-' बटण दाबले तर) खालच्या एका मजल्यावर जाल.

लिफ्ट बटण आणि संख्या.

+ + + किंवा + 3 असे लिहीले आहे.

- - - - किंवा - 4 असे लिहीले आहे.

* चार मजले वर जाण्यासाठी तुम्ही काय कराल? तीन मजले खाली जाण्यासाठी तुम्ही काय कराल?

बिल्डींग ऑफ फन मधील मजल्यांना क्रमांक देणे

बिल्डींग ऑफ फनमध्ये प्रवेशद्वार तळ मजल्यावर आहे आणि त्याला "स्वागत कक्ष" (welcome Hall) म्हणतात. तळ मजल्यावरून सुरूवात करून, तुम्ही +1 बटण दाबून आहार विभागाकडे (Food Court) पोहोचू शकता. +2 दाबून कला केंद्रामध्ये (Art centre) पोहोचू शकता. त्यामुळे आम्ही असे म्हणू शकतो की आहार विभाग +1 मजल्यावर आहे आणि कला केंद्र +2 मजल्यावर आहे.

तळ मजल्यापासून सुरुवात करून खेळण्यांच्या दुकानात पोहोचण्यासाठी तुम्हाला -1 दाबावे लागेल. त्यामुळे खेळण्यांचे दुकान -1 मजल्यावर आहे. त्याचप्रमाणे तळ मजल्यापासून सुरुवात करून तुम्हाला व्हिडीओ गेम्सच्या दुकानात पोहोचण्यासाठी -2 दाबावे लागेल. तर व्हिडीओ गेम्सचे दुकान - 2 मजल्यावर आहे. तळ मजल्याला 0 (शून्य) मजला म्हणतात. तुम्ही पाहू शकता का?



* बिल्डींग ऑफ फनमधील सर्व मजल्यांना क्रमांक देणे.

तुमच्या लक्षात आले आहे का की +3 हा क्रमांक पुस्तकांचे दुकान आहे. तिसऱ्या मजल्यावर पुस्तकांचे दुकान आहे. त्याचप्रमाणे -3 हा क्रमांक तुम्ही दाबता तेव्हा तुम्ही खाली जाता - - - मजल्यांची संख्या देखील असते.

समोर '+' चिन्ह असलेल्या संख्येला **धन संख्या** म्हणतात. समोर '-' चिन्ह असलेल्या संख्येला **ऋण संख्या** म्हणतात.

बिल्डींग ऑफ फनमध्ये तळमजला 0 (शून्य) मजला किंवा प्रारंभ बिंदू वापरून मजले क्रमांकित केले जातात. तळ मजल्यावरून वरच्या मजल्यांना धन संख्यांनी क्रमांक दिलेला आहे. तळ मजल्यावरून त्यांच्यापर्यंत जाण्यासाठी, कांही वेळा '+' बटण दाबावे लागेल.

तळ मजल्याखालील मजले ऋण संख्यांनी क्रमांकित केले आहेत. तळ मजल्यापासून त्यांच्यापर्यंत जाण्यासाठी कांही वेळा '-' बटण दाबावे लागेल. शून्य ही धन किंवा ऋण संख्या नाही.

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

आपण त्यांच्यासमोर '+' किंवा '-' चिन्ह लावत नाही.

हालचालीच्या मार्गाची बेरीज करणे.

फूड कोर्टपासून सुरुवात करा आणि लिफ्टमध्ये +2 दाबा. कोठे पोहोचणार? _____

हे आपण खालील विधानाने स्पष्ट करू शकतो.

प्रारंभ मजला + हालचाल = लक्ष्य मजला

सुरुवातीचा मजला +1 (फूड कोर्ट) आहे आणि बटण दाबण्याची संख्या +2 आहे. म्हणून आपला लक्ष्य मजला (+1) + (+2) = +3 (पुस्तकांचे दुकान)

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. तुम्ही मजला +2 पासून सुरुवात करा आणि लिफ्टमध्ये -3 दाबा. कोठे पोहोचणार? यासाठी समीकरण लिहा.
2. या समीकरणांचे मूल्यमापन करा. (तुम्ही येथे बिल्डींग ऑफ फनचा संदर्भ देऊन सुरुवातीचा मजला + हालचाल म्हणून विचार करू शकता.)

   a. (+1) + (+4) = _____ b. (+4) + (+1) = _____

   c. (+4) + (-3) = _____ d. (-1) + (+2) = _____

   e. (-1) + (+1) = _____ f. 0 + (+2) = _____

   g. 0 + (-2) = _____
3. वेगवेगळ्या मजल्यापासून सुरुवात करून मजला -5 पर्यंत पोहोचण्यासाठी आवश्यक हालचाली शोधा. उदाहरणार्थ मी मजला +2 पासून प्रारंभ केल्यास मजला -5 पर्यंत पोहोचण्यासाठी मला -7 दाबावे लागेल. समीकरण (+2) + (-7) = -5 आहे.

अशा आणखी प्रारंभिक स्थिती शोधा आणि मजला -5 पर्यंत पोहोचण्यासाठी आवश्यक हालचाली शोधा आणि समीकरण लिहा.

*** बटण दाबणे हे देखील बेरीज करण्या सारखेच आहे.**

गुरमित खेळण्यांच्या दुकानात होता आणि त्याला दोन मजले खाली जायचे होते. पण चुकून त्याने '+' बटण दोनदा दाबले. त्याला त्याची चूक कळली आणि त्याने पटकन '-' बटण तीन वेळा दाबले. गुरमित खेळाच्या दुकानाच्या खाली किंवा वर कितव्या मजल्यावर पोहोचेल?

गुरमित एक मजला खाली जाईल. बटण दाबून एकत्रित केल्याने होणारी हालचाल आपण ही समीकरणाने दाखवू शकतो. (+2) + (-3) = -1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]

बटण दाबण्याच्या संख्यांची बेरीज ही परिणामी हालचाल म्हणून विचार करून या समीकरणांची किंमत काढा.

a. (+1) + (+4) = _____ b. (+4) + (+1) = _____

c. (+4) + (-3) + (-2) = _____ d. (-1) + (+2) + (-3) = _____

शुन्याकडे परत!

तळ मजल्यावर जाण्याची बसंतला खूप घाई आहे आणि चुकून त्याने +3 दाबले. ते रद्द करून तळ मजल्यावर राहण्यासाठी तो काय करू शकतो? तो -3 दाबून ते रद्द करू शकतो. म्हणजेच (+3) + (-3) = 0

आपण -3 ला +3 चा व्यस्त म्हणतो. जर बसंतने आता +4 दाबले आणि नंतर - 4 दाबले तर तो लिफ्ट मधून कुठे पोहोचेल?

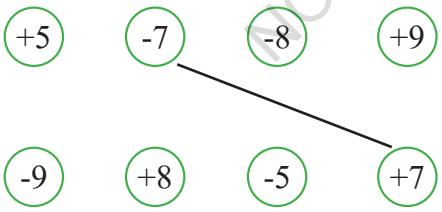
व्यस्त संकल्पनेचा विचार करण्याचा दुसरा मार्ग येथे आहे. जर तुम्ही मजला +4 वर असाल आणि तुम्ही त्याच्या उलट -4 दाबलात तर तुम्ही परत 0 वर, (तळ मजल्यावर) आला आहात! जर तुम्ही मजला -2 दाबलात आणि त्याच्या उलट +2 दाबा, तर तुम्ही (-2) + (+2) = 0 वर (तळ मजल्यावर) जाल.



* या संख्यांचे व्यस्त लिहा.

+4, -4, -3, 0, +2, -1

* रेषा काढून व्यस्त संख्या जोडा.



मजल्यांचा वापर करून संख्यांची तुलना करा.

* सर्वात खालच्या मजल्यावर कोण आहे?

1. जय कला केंद्रात आहे. तर तो मजला +2 वर आहे.
2. असिन क्रीडा विभागामध्ये आहे. तर ती कोणत्या मजल्यावर आहे?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

3. बिन्नू चित्रपटगृहात आहे तर ती कोणत्या मजल्यावर आहे?

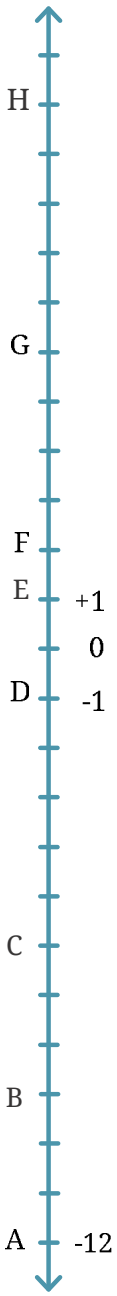
4. अमन खेळण्यांच्या दुकानात आहे. तर तो कोणत्या मजल्यावर आहे?

+ 4 मजल्यापेक्षा + 3 मजला कमी आहे. तर आम्ही +3 < +4 लिहू किंवा +4 > +3 देखील सुध्दा लिहू.

आपण -3 < - 4 किंवा - 4 < -3 लिहावे?

मजला - 4 हा मजला -3 पेक्षा कमी आहे.

म्हणून - 4 < - 3



* शोधा पाहू. [Figure it out]

बिल्डींग ऑफ फन वापरून खालील संख्यांची तुलना करा आणि < किंवा > चिन्ह चौकटीत भरा.

a. -2 ☐ +5 b. -5 ☐ +4 c. -5 ☐ -3

d. +6 ☐ -6 e. 0 ☐ - 4 f. 0 ☐ +4

लक्षात घ्या की सर्व ऋण संख्या मजला 0 (शून्य) च्या खाली आहेत. म्हणून सर्व ऋण संख्या 0 पेक्षा कमी आहेत. सर्व धन संख्या मजला 0 (शून्य) च्या वर आहेत. म्हणून सर्व धन संख्या 0 पेक्षा जास्त आहेत.

2. बिल्डींग ऑफ फन अधिक मजले आहेत अशी कल्पना करा. संख्यांची तुलना करा आणि चौकटीत < किंवा > असे चिन्ह लिहा.

a. -10 ☐ -12 b. +17 ☐ -10

c. 0 ☐ -20 d. +9 ☐ - 9

e. -25 ☐ -7 f. +15 ☐ -17

3. जर इमारतीत मजला A = -12, मजला D = -1 आणि मजला E = +1 इमारतीत उजवीकडे रेषेने दाखविले असेल तर B, C, F, G आणि H ची संख्या शोधा.

4. इमारतीच्या रेषेच्या मजल्यांवर चिन्हांकित करा.

a. -7 b. -4 C. +3 d. -10

© MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वजाबाकीसाठी कोणते बटण दाबायचे ते शोधूया.

मागील वर्गात वजाबाकीचा अर्थ "घेणे" असा समजला उदाहरणार्थ - "भिंतीवरील कपाटावर 10 पुस्तके आहेत. मी 4 पुस्तके घेतो. कपाटावर किती पुस्तके शिल्लक आहेत." आपण वजाबाकी वापरून उत्तर व्यक्त करतो. 10-4=6

तुम्ही वजाबाकीच्या दुसऱ्या अर्थाशी देखील परिचित असाल जो तुलनेशी संबंधित आहे किंवा प्रमाण समान बनविण्याशी संबंधित आहे. उदाहरणार्थ ही परिस्थिती विचारत घ्या. "माझ्याकडे 10 रूपये आहेत आणि माझ्या बहिणीकडे 6 रूपये आहेत" आता मी प्रश्न विचारू शकतो : 'माझ्याइतकीच रक्कम मिळविण्यासाठी माझ्या बहिणीला आणखी किती रूपये मिळवावे लागतील?

आपण हे दोन प्रकारे लिहू शकतो: 6+?=10 किंवा 10-6=?

येथे आपण 'गहाळ क्रमांक शोधणे' मधील संबंध पाहतो जोडणे आणि वजाबाकी.

धन आणि ऋण संख्यांच्या वजाबाकीसाठी आम्ही वजाबाकीचा हा अर्थ 'समान करणे' किंवा जोडण्यासाठी 'गहाळ' संख्या शोधणे असा वापरतो.

* या दृष्टीकोनातून 15-5, 100 - 10 आणि 74 - 34 चे किंमत काढा.

शिक्षकांसाठी सूचना

सर्वसाधारणपणे जेव्हा दोन असमान परिणाम असतात, तेव्हा वजाबाकी प्रमाणांना समान करण्यासाठी आवश्यक बदल दर्शवू शकतो. वजाबाकी दर्शविते की लक्ष्य प्रमाण होण्यासाठी सुरुवातीचे प्रमाण किती बदलले पाहिजे. वेगवेगळ्या मजल्यांच्या पातळीच्या संदर्भात, सुरुवातीच्या मजल्यापासून लक्ष्य मजल्यापर्यंत पोहोचण्यासाठी कोणता बदल आवश्यक आहे? लक्षात घ्या की आवश्यक बदल धनात्मक (वाढीसाठी) किंवा ऋणात्मक (कमी करण्यासाठी) असू शकतात.

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

तुमचा प्रारंभिक मजला कला केंद्र हा आहे आणि तुम्हाला क्रीडाकेंद्र मजल्यावर जायचे आहे, तर तुम्ही कोणते बटण दाबाल?

तुम्हाला तीन मजले वर जाणे आवश्यक आहे, म्हणून तुम्ही +3 दाबले पाहिजे. आम्ही वजाबाकीच्या स्वरूपात ही समीकरण लिहू शकतो : **लक्ष्य मजला - प्रारंभ मजला = आवश्यक हालचाल.** वरील उदाहरणामध्ये, सुरुवातीचा मजला +2 (कला केंद्र) आहे आणि लक्ष्य मजला +5 आहे. +2 वरून +5 वर जाण्यासाठी +3 बटण दाबा.

त्यामुळे

(+5) - (+2) = +3

स्पष्टीकरण :

बेरीज व वजाबाकीमधील संबंध आठवा. 3+2=5 साठी आपण वजाबाकी वापरून गहाळ संख्या शोधू शकतो 5-3=2 म्हणजेच वजाबाकी ही गहाळ संख्या शोधण्यासाठीच असते. हे आम्हाला माहित आहे.

प्रारंभ मजला + आवश्यक हालचाल = लक्ष्य मजला

आवश्यक हालचाल शोधायची असेल तर,

सुरुवातीचा मजला +? = लक्ष्य मजला

म्हणून,

लक्ष्य मजला - प्रारंभ मजला = आवश्यक हालचाल

अधिक उदाहरणे:

a. जर लक्ष्य मजला -1 आणि प्रारंभ मजला - 2 असेल तर तुम्ही कोणते बटण दाबावे?

तुम्हाला एक मजला वर जावे लागेल म्हणून तुम्ही +1 दाबा. समीकरण : (-1) - (-2) = +1

b. जर लक्ष्य मजला -1 असेल आणि सुरुवातीचा मजला +3 असेल तर तुम्ही कोणते बटण दाबावे?

तुम्हाला चार मजले खाली जावे लागेल म्हणून तुम्ही -4 दाबा समीकरण : (-1) - (+3) = -4

c. जर लक्ष्य मजला +2 असेल आणि प्रारंभ मजला - 2 असेल तर तुम्ही कोणते बटण दाबावे?

तुम्हाला चार मजले वर जावे लागेल म्हणून तुम्ही +4 दाबा. समीकरण : (+2) - (-2) = +4

* शोधा पाहू. [Figure it out]

ही समीकरणे पूर्ण करा. तुम्ही सुरुवातीच्या मजल्यापासून लक्ष्य मजल्यापर्यंत पोहोचण्यासाठी आवश्यक हालचाली शोधा.

a. (+1) - (+4) = _____

b. (0) - (+2) = _____

c. (+4) - (+1) = _____

d. (0) - (-2) = _____

e. (+4) - (-3) = _____

f. (-4) - (-3) = _____

g. (-1) - (+2) = _____

h. (-2) - (-2) = _____

i. (-1) - (+1) = _____

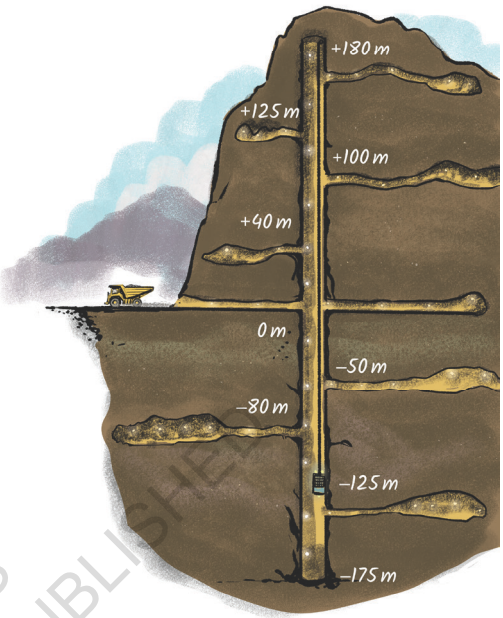
j. (+3) - (-3) = _____

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED



मोठ्या संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी करणे

या चित्रामध्ये एक खाण दाखविली आहे. जिथे खडक खणून खनिजे काढली जातात. ट्रक जमिनीच्या पातळीवर आहे परंतु खनिजे जमिनीच्या वर आणि खाली दोन्ही बाजूला आहेत. एक वेगवान लिफ्ट आहे जी माणसे आणि धातू वाहून नेणाऱ्या खाणीमध्ये वर आणि खाली सरकते.



चित्रात कांही स्तर चिन्हांकित केले आहेत. जमिनीची पातळी 0 चिन्हांकीत आहे. जमिनीच्या वरचे स्तर धनात्मक संख्येने चिन्हांकित केले आहेत आणि जमिनीच्या खालच्या पातळीला ऋण संख्यांनी चिन्हांकित केले आहे. संख्या जमिनीच्या पातळीपासून किती मीटर वर किंवा खाली आहे हे दर्शविते.

खाणीत मजेदार इमारती प्रमाणेच :

प्रारंभ पातळी + हालचाल = लक्ष्य पातळी

उदा :

(+40) + (+60) = +100 (-90) + (-55) = -145

लक्ष्य पातळी - प्रारंभ पातळी = आवश्यक हालचाल

उदा :

(+40) - (-50) = +90 (-90) - (+40) = -130

ऋण संख्या किती आहेत?

बेलाज बिल्डींग ऑफ फनवर फक्त सहा मजले आणि खाली पाच मजले आहेत. म्हणजे संख्या -5 ते +6 या मर्यादेत होत्या. वरील खाणीत आपल्याकडे - 175 ते +180 पर्यंत संख्या आहेत. परंतु आपण मोठ्या इमारती किंवा खाणीची कल्पना करू शकतो. ज्याप्रमाणे धन संख्या +1 ,+2,+3, ... समाप्त न होता वर जातात, त्याचप्रमाणे ऋण संख्या -1, -2, -3, ... अमर्यादपणे खाली जातात. शुन्यासह धन संख्या आणि ऋण संख्यांना पूर्णांक म्हणतात. ते 0 पासून दोन्ही बाजूला जातातः ..... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]

ही समीकरणे पूर्ण करा.

a. (+40) + _____ = +200

b. (+40) + _____ = -200

c. (-50) + _____ = +200

d. (-50) + _____ = -200

e. (-200) - (-40) = _____

f. (+200) - (+40) = _____

J. (-200) - (+40) = _____

खाणीमधील हालचालीचा विचार करून तुमची उत्तरे तपासा.

+1000
+900
+800
+700
+600
+500
+400
+300
+200
+100
0
−100
−200
−300
−400
−500
−600
−700
−800
−900
−1000

कोणत्याही संख्यांची बेरीज, वजाबाकी आणि तुलना करणे

आणखी मोठ्या पूर्णांक बेरजेसाठी आणि वजा करण्यासाठी, आम्ही आणखी मोठ्या लिफ्टची कल्पना करू शकतो! खर तर आपण एका लिफ्टची कल्पना करू शकतो जी कायमस्वरूपी वरच्या दिशेने आणि कायमची खालच्या दिशेने जाऊ शकते पातळी 0 पासून सुरू होते. आजूबाजूला कोणतीही इमारत किंवा खाण असणे आवश्यक नाही - एक "अनंत लिफ्ट"!

या कल्पनेचा वापर करून आपण आपल्या आवडीचे कोणतेही पूर्णांक यांची बेरीज आणि वजाबाकी करू शकतो. उदा. समजा आपल्याला वजाबाकी + 2000 करायची आहे. आपण जमिनीच्या वर 2000 आणि जमिनीच्या खाली 200 पातळी असलेल्या लिफ्टची कल्पना करू शकतो.

लक्ष्य पातळी - प्रारंभ पातळी = आवश्यक हालचाल

प्रारंभ मजला - 200 वरून लक्ष्य मजला + 2000 वर जाण्यासाठी आपण + 2200 दाबले पाहिजे. म्हणून (+2000) - (-200) = + 2200 लक्षात घ्या की (+2000) + (+200) = + 2200 आहे.

* अशाच प्रकारे योग्य लिफ्ट रेखाटून किंवा कल्पना करून खालील राशींची किंमत काढण्याचा प्रयत्न करा.

a. -125 + (-30)

b. +105 - (-55)

c. +105 + (+55)

d. +80 - (-150)

e. +80 + (+ 150)

f. -99 - (-200)

g. -99 + (+200)

h. +1500 - (-1500)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील उदाहरणात आपण पाहिले की +2000 - (-200) = +2200 दुसऱ्या शब्दांत, ऋण संख्या वजा करणे हे संबंधित धन संख्या मिळविणे आहे. म्हणजेच आपण ऋण संख्येची वजाबाकी एका धन संख्येच्या बेरजेने बदलू शकतो!

* तुम्ही वर केलेल्या इतर अभ्यांसामध्ये तुमच्या लक्षात आले का की ऋण संख्या वजा करणे हे संबंधित धन संख्या जोडण्यासारखेच आहे?

वरील 'अनंत लिफ्ट' वर एक नजर टाका. हे तुम्हाला संख्या रेषेची आठवण करून देते का?



पुन्हा एकदा संख्यारेषेकडे वळूया

आम्ही वर पाहिलेली 'अनंत लिफ्ट' अगदी संख्या रेषेसारखी दिसत होती, नाही का? खरे तर जर आपण ते 90° ने फिरविले, तर ती मुळात एक संख्यारेषा बनते. आम्ही पाठाच्या सुरुवातीला विचारलेल्या प्रश्नाचे उत्तर देऊन संख्या रेषेपर्यंत क्रमांक कसे पूर्ण करायचे हे देखील आम्हाला सांगते. 0 च्या डावीकडे ऋण संख्या -1, -2, -3, ...

सामान्यत: आपण धन संख्या + चिन्हाने दर्शवितोआणि सोप्या पध्दतीने त्यांना 1, 2, 3,..... असे लिहीतो.

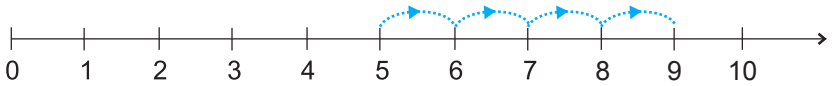


लिफ्ट वापरून संख्यारेषेने प्रवास करण्याऐवजी आपण त्यावर चालण्याची कल्पना करू शकतो. उजवीकडे धन दिशा (पुढे) आहे आणि डावीकडे ऋण दिशा (मागे) आहे.

लहान संख्या आता मोठ्या संख्येच्या डावीकडे आहेत. आणि मोठ्या संख्या लहान संख्यांच्या उजवीकडे आहेत.

तर $2 < 5$; $-3 < 2$; आणि $-5 < -3$

* जर 5 वरून तुम्हाला 9 वर जायचे असेल तर तुम्ही संख्या रेषेने किती लांब प्रवास केला पाहिजे?



तुम्हाला 4 पावलांचा प्रवास करावा लागेल. म्हणूनच 5 + 4 = 9

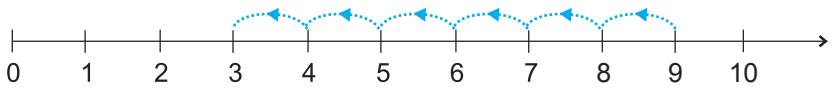
(लक्षात ठेवा : **प्रारंभ क्रमांक + हालचाल = लक्ष्य क्रमांक**)

संबंधित वजाबाकी विधान 9 - 5 = 4

(लक्षात ठेवा : **लक्ष्य क्रमांक - प्रारंभ क्रमांक = आवश्यक हालचाल**)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* आता 9 पासून जर तुम्हाला 3 वर जायचे असेल तर तुम्हाला किती प्रवास करावा लागेल?



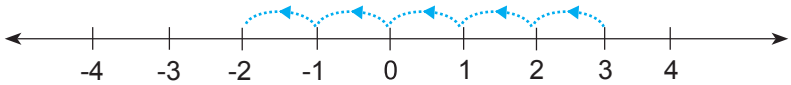
तुम्ही 6 पावले मागे सरकले पाहिजे म्हणजे तुम्ही -6 सरकले पाहिजे. म्हणून 9 + (-6) = 3

(लक्षात ठेवा : **प्रारंभ क्रमांक + हालचाल = लक्ष्य संख्या**)

संबंधित वजाबाकी विधान 3 - 9 = - 6 आहे.

(लक्षात ठेवा : **लक्ष्य क्रमांक - प्रारंभ क्रमांक = आवश्यक हालचाल**)

* आता 3 पासून जर तुम्हाला - 2 वर जायचे असेल तर तुम्हाला किती अंतर प्रवास करावा लागेल?



तुम्हाला -5 पावले प्रवास करावा लागेल म्हणजे 5 पावले मागे. अशा प्रकारे 3 + (-5) = -2

संबंधित वजाबाकी विधान : -2 -3 = -5

* शोधा पाहू. [Figure it out]



1. वरील संख्या रेषेवर 3 धन संख्या आणि 3 ऋण संख्या चिन्हांकीत करा.
2. वरील 3 चिन्हांकीत ऋण संख्या खालील चौकटीत लिहा.

   चौकटी : ☐ ☐ ☐
3. 2 > -3 का? -2 < 3 का?
4. किंमती शोधा.

   i) - 5+ 0 ii) 7 + (-7) iii) -10 + 20

   iv) 10 - 20 v) 7- (-7) vi) -8 - (-10)

* बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी अचिन्हांकीत संख्यारेषा वापरणे.

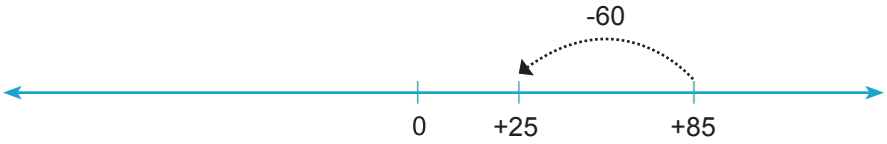
ज्याप्रमाणे तुम्ही वरील संख्यारेषेचा वापर करून लहान संख्येसह बेरीज, वजाबाकी आणि तुलना करू शकता, त्याचप्रमाणे तुम्ही 'अनंत संख्यारेषा' ची कल्पना करून किंवा खालीलप्रमाणे "अचिन्हांकित संख्यारेषा" रेखाटून मोठ्या संख्येची बेरीज, वजाबाकी आणि तुलना करू शकता.



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

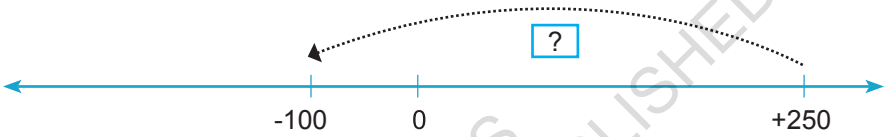
या संख्यारेषेवर फक्त आरंभबिंदू निर्देशांक 0 दर्शविलेला आहे. इतर क्रमांक चिन्हांकीत केलेले नाहीत. पूर्णांक बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी ही अचिन्हांकीत संख्यारेषा वापरणे सोयीचे असू शकते. तुम्ही संख्या रेषेचे माप आणि त्यावरील संख्यांचे स्थान दर्शवू शकता किंवा फक्त कल्पना करू शकता.

उदाहरणार्थ : ही अचिन्हांकित संख्यारेषा पुढील बेरीजेची समस्या दर्शविते : 85 + (-60) =?



त्यानंतर आपण ते 85 + (-60) = 25 ची कल्पना करू शकतो. खालील अचिन्हांकीत संख्यारेषा वजाबाकीची समस्या दर्शविते जी गहाळ जोड समस्या म्हणून देखील लिहीली जाऊ शकते:

(-100) - (+250) =? किंवा 250 +? = -100



मग आपण त्याची कल्पना करू शकतो का? = - 350

अशा प्रकारे तुम्ही बेरीज आणि वजाबाकीची उदाहरणे धन किंवा ऋण संख्यासह, कागदावर किंवा तुमच्या डोक्यात अचिन्हांकित संख्यारेषा वापरून आम्ही सोडवू शकतो.

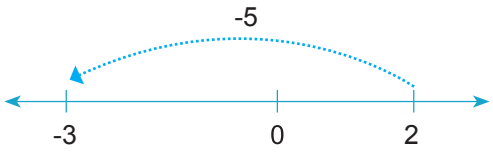
* समीकरणांची किंमत काढण्यासाठी अचिन्हांकित संख्यारेषा वापरा:

a. -125 + (-30) = _____

b. +105 - (-55) = _____

C. +80 - (-150) = _____

d. - 99 - (-200) = _____



© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

वजाबाकीचे बेरजेमध्ये आणि बेरजेचे वजाबाकीमध्ये रूपांतर करणे

लक्षात ठेवा की, **लक्ष्य मजला - प्रारंभ मजला = आवश्यक हालचाल**

किंवा

लक्ष्य मजला = प्रारंभ मजला + आवश्यक हालचाल

जर आपण 2 पासून सुरुवात करून - 3 वर जाऊ इच्छित असाल तर हालचालीची गरज आहे का?

पहिली पध्दत : संख्यारेषा पहा, आपल्याला - 5 (म्हणजेच 5 पावले मागच्या दिशेने) हलविण्याची गरज आहे. म्हणून, - 3 - 2 = -5 आवश्यक हालचाल = -5

दुसरी पध्दत :- 2 ते -3 पर्यंतच्या प्रवासाचे दोन भाग करा.

a. 2 ते 0 पर्यंतची हालचाल 0 - 2 = -2 आहे.

b. 0 ते - 3 पर्यंतची हालचाल **- 3 - 0 = - 3**

दोन हालचालींची बेरीज : **- 3 + (-2) = - 5**

दोन रंगीत समीकरण पहा. दुसऱ्यात वजाबाकी नाही!

अशाप्रकारे आपण नेहमी वजाबाकीला बेरीजमध्ये रुपांतरीत करू शकतो. **जी संख्या वजा करायची आहे ती तिच्या व्यास्तांकाने बदलली जाऊ शकते आणि नंतर वजाबाकीऐवजी बेरीज केली जाऊ शकते.**

त्याचप्रमाणे, **जी संख्या मिळवायची आहे ती तिच्या व्यास्तांकाने बदलली जाऊ शकते आणि नंतर वजाबाकी केली जाऊ शकते.** अशाप्रकारे आपण नेहमी बेरजेलासुद्धा वजाबाकीमध्ये रुपांतरित करू शकतो.

उदाहरणे.

a. (+7) - (+5) = (+7) + (-5)

b. (-3) - (+8) = (-3) + (-8)

c. (+8) - (-2) = (+8) + (+2)

d. (+6) - (-9) = (+6) + (+9)

10.2 प्रतिकात्मक मुद्रा - (Token Model)

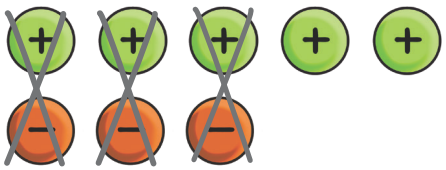
प्रतिकात्मक मुद्रा वापरून बेरीज करणे.

बेलाज बिल्डींग ऑफ फनमध्ये लिफ्टमधील कामगार कंटाळला आहे. स्वतःचे मनोरंजन करण्यासाठी तो एक बॉक्स ठेवतो त्यामध्ये बरेच धन (लाल) आणि ऋण (काळ्या) मुद्रा असतात. प्रत्येक वेळी तो '+' बटण दाबतो तेव्हा तो बॉक्समधून धन मुद्रा घेतो आणि खिशात ठेवतो. त्याचप्रमाणे प्रत्येक वेळी जेव्हा तो '-' बटण दाबतो तेव्हा तो ऋण मुद्रा घेतो आणि खिशात ठेवतो.

तो तळ मजल्यावर (0 मजला) रिकामा खिसा घेऊन सुरुवात करतो. एका तासानंतर त्याने आपला खिसा तपासला आणि त्याला 5 धन मुद्रा आणि 3 ऋण मुद्रा मुद्रा सापडल्या. तर तो आता कोणत्या मजल्यावर आहे?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

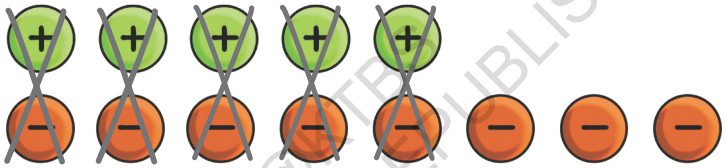
त्याने '+' पाच वेळा आणि '-3' वेळा म्हणजे (+5) + (-3) = +2 त्यामुळे तो आता +2 मजल्यावर आहे. बेरीज करण्याचा दुसरा पर्याय



धन मुद्रा आणि ऋण मुद्रा एकमेकांना रद्द करतात, कारण या मुद्रांच्या जोडीचे मूल्य शून्य आहे. त्याच्या खिशातील या दोन मुद्रांचा अर्थ असा होतो की, त्याने अनुक्रमे एकदा '+' आणि एकदा '-' दाबले आणि ते एकमेकांना रद्द करतात. आम्ही असे म्हणतो की एक धन मुद्रा आणि एक ऋण मुद्रा "शून्य जोडी" बनवतात. जेव्हा तुम्ही सर्व शून्य जोड्या काढता, तेव्हा तुमच्याकडे दोन धन मुद्रा शिल्लक राहतात म्हणून (+5) + (-3) = +2

आम्ही मुद्रा वापरून अशी कोणतीही बेरीज करू शकतो!

उदाहरण : +5 आणि -8 यांची बेरीज करा.



चित्रातून आपण पाहतो की, आपण पाच शून्य जोड्या काढू शकतो आणि नंतर आपल्याकडे -3 शिल्लक राहतात. म्हणून (+5) + (-8) = -3

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]

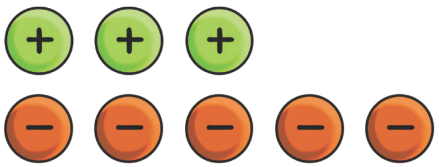
1. प्रतिकात्मक मुद्रा वापरून बेरीज पूर्ण करा.

   a. (+6) + (+4) b. (-3) + (-2)

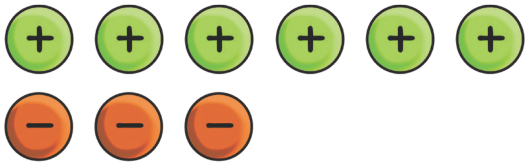
   c. (+5) + (-7) d. (-2) + (+6)

2. खालील दोन संचामधील प्रतिकात्मक मुद्रांच्या शून्य जोड्या रद्द करा. प्रत्येक उदाहरणात लिफ्ट कामगार कोणत्या मजल्यावर आहे? प्रत्येक उदाहरणात संबंधित बेरीजेचे विधान काढा?

   a.



   b.



वजाबाकी करताना प्रतिकात्मक मुद्रा वापरणे

धन मुद्रा आणि ऋण मुद्रांसह पूर्णांकांची बेरीज कशी करायची ते आपण पाहिले आहे. आम्ही मुद्रा वापरून वजाबाकी देखील करू शकतो!

उदाहरण : वजाबाकी करूया. (+5) - (+4)

हे करणे सोपे आहे. परिणाम पाहण्यासाठी धन 5 मधून धन 4 वजा करा.



(+5) - (+4) = +1

उदाहरण : वजाबाकी करुया.

(-7) - (-5)

(-7) - (-5) = (-7) + (+5) आहे का?



(-7) - (-5) = -2

उदाहरण: वजाबाकी करुया.

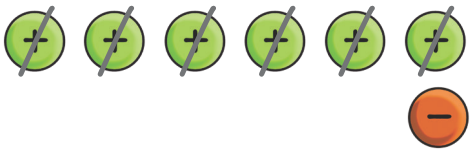
(+5) - (+6)

खाली 5 धन संख्या घ्या.



पण 6 धन संख्या काढण्यासाठी पुरेशा मुद्रा नाहीत!

या समस्येचे निराकरण करण्यासाठी आम्ही एक अतिरिक्त शून्य जोडी (एक धन आणि एक ऋण) ठेवू शकतो, हे जाणून घेणे की यामूळे मुद्रा संचाचे मूल्य बदलत नाही.



आता आपण 6 धन गोष्टी काढू शकतो!

बाकी काय राहते ते पहा.

आम्ही असा निष्कर्ष काढतो की, (+5) - (+6) = -1

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. मुद्रा वापरून खालील फरक शोधा. तुम्हाला आता माहित असलेल्या इतर पध्दती प्रमाणेच उत्तरे मिळतात का? तपासून पहा.

a. (+10) - (+7) b. (-8) - (-4) c. (-9) - (-4)

d. (+9) - (+12) e. (-5) - (-7) f. (-2) - (-6)

2. वजाबाकी करा.

a. (-5) - (-7) b. (+10) - (+13) c. (-7) - (-9)

d. (+3) - (+8) e. (-2) - (-7) f. (+3) - (+15)

उदाहरण : + 4 - (-6)

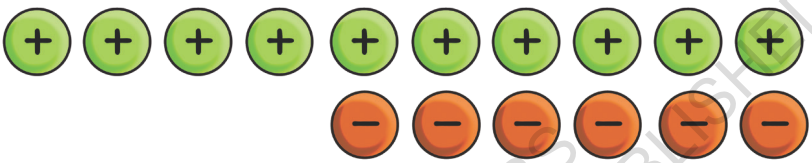
4 धन संख्यांसह सुरुवात करा.

यातील 6 ऋण संख्या काढायच्या आहेत. परंतु पुरेशा ऋण संख्या नाहीत.

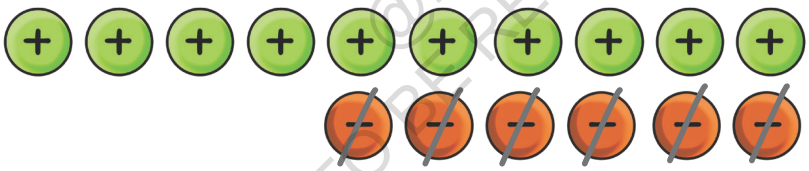


आम्ही कांही शून्य जोड्या जोडतो कारण यामुळे मुद्राच्या संचाचे मूल्य बदलत नाही. पण शून्य जोड्या किती?

आम्हाला 6 ऋण संख्या काढायच्या आहेत म्हणून आम्ही 6 शून्य जोड्या घेतो.



आता आम्ही 6 ऋण काढू शकतो :



म्हणून, +4 - (-6) = +10

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. वजाबाकी करण्याचा प्रयत्न करा. -3- (+5)

तुम्हाला किती शून्य जोड्या घ्याव्या लागतील? परिणाम काय होईल?

2. मुद्रा वापरून खालील गोष्टीचे मूल्यमापन करा.

a. (-3) - (+10) b. (+8) - (-7) c. (-5) - (+9)

d. (-9) - (+10) e. (+6) - (-4) f. (-2) - (+7)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.3 पूर्णांक वापरण्याचे इतर संदर्भ

जमा व खर्च (Credits & Debits)

समजा तुम्ही तुमच्या स्थानिक बँकेत मागील महिन्यापासून बचत करत असलेल्या ₹100 नी बँक खाते उघडले आहे. त्यामुळे तुमची बँक शिल्लक ₹100 पासून सुरू होते.

मग तुम्ही दुसऱ्या दिवशी तुमच्या बँकेत ₹60 जमा करा. हे तुमच्या बँकेच्या पासबुकमध्ये 'जमा' (credit) म्हणून दाखविले जाईल.

* **तुमच्या बँक खात्यात किती रूपये शिल्लक आहेत.** दुसऱ्या दिवशी तुम्ही तुमचे बँक खाते वापरून तुमचे ₹60 इलेक्ट्रिक बिल भरले. हे तुमच्या बँक पासबुकमध्ये 'खर्च' (Debit) म्हणून दाखविले जाईल.

* **तुमच्या बँक खात्यात आता किती रूपये शिल्लक आहेत.** दुसऱ्या दिवशी तुम्ही तुमच्या व्यवसायासाठी ₹150 ची मोठी खरेदी करता. हे पुन्हा खर्च म्हणून दाखविले जाईल.

* **आता तुमच्या बँक खात्यात किती रक्कम आहेत? हे शक्य आहे का?**

(होय, कांही बँका तुमच्या खात्यातील शिल्लक तात्पुरत्या स्वरूपात ऋणात्मक होऊ देतात! कांही बँका तुमची शिल्लक ऋणात्मक झाल्यास "व्याज किंवा शुल्क" स्वरूपात तुमच्याकडून अतिरिक्त रक्कम देखील आकारतात.)

तुमची आदल्या दिवशी केलेली मोठी खरेदी तुम्हाला दुसऱ्या दिवशी तुमच्या व्यवसायात ₹200 कमवू देते.

* **आता तुमची शिल्लक किती आहे?**

तुम्ही 'जमा' चा धन संख्या म्हणून विचार करू शकता आणि 'खर्च' चा ऋण संख्या म्हणून विचार करू शकता. तुमच्या सर्व 'जमा' (धन संख्या) आणि खर्च (ऋण संख्या) ची एकूण बँक खात्यातील शिल्लक आहे. हे धन संख्या किंवा ऋण संख्या असू शकते!

सर्वसाधारपणे, आपल्या बँक खात्यात धन संख्या शिल्लक ठेवण्याचा प्रयत्न करणे चांगले आहे!

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. समजा तुम्ही तुमच्या बँक खात्यात 0 रुपयांपासून सुरुवात करता आणि नंतर तुमच्याकडे ₹30, ₹40 आणि ₹50 जमा करता. नंतर ₹40, ₹50 आणि ₹60 खर्च होते. आता तुमच्या बँक खात्यातील शिल्लक किती रुपये आहे?
2. समजा तुम्ही तुमच्या बँक खात्यात 0 रुपयांनी सुरुवात केली आणि नंतर तुमच्याकडे 1, 2, 4, 8, 16, 32, ₹64 आणि ₹128 खर्च आहेत आणि नंतर ₹256 ची एकच जमा आहे. आता तुमच्या बँक खात्यातील शिल्लक किती आहे?

©KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

3. तुमच्या बँक खात्यात धन संख्या शिल्लक ठेवण्याचा प्रयत्न करणे आणि राखणे सामान्यत: चांगले का आहे? कोणत्या परिस्थितीत तात्पुरती ऋण संख्या शिल्लक ठेवणे फायदेशीर ठरू शकते?

तुम्ही बघू शकता, बँकिंग आणि अकाउंटिंगच्या जगात शून्यासह धन संख्या आणि ऋण संख्या अत्यंत उपयुक्त आहेत.

भौगोलिक उभा छेद

आम्ही 'समुद्र सपाटीपासून' पर्वत, पठार आणि वाळवंट यांसारख्या भौगोलिक वैशिष्ट्यांची उंची मोजतो. समुद्र सपाटीपासूनची उंची 0 मी. समुद्र सपाटीपासूनची उंची धन संख्या वापरून दर्शविली जाते आणि समुद्र सपाटीपासूनची उंची ऋण संख्या वापरून दर्शविली जाते.

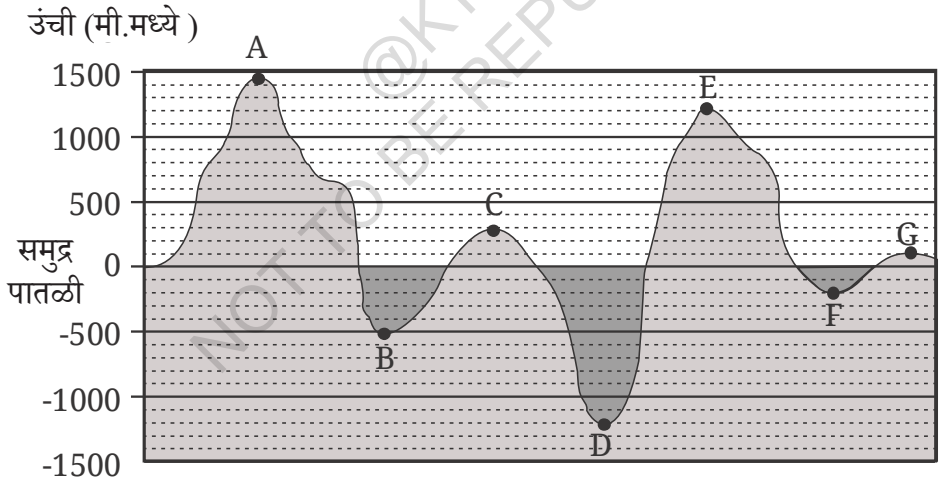
* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. भौगोलिक उभा छेद पाहता संबंधित उंची भरा.

a. ☐ b. ☐ c. ☐ d. ☐

e. ☐ f. ☐ g. ☐

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



शिक्षकांसाठी सूचना

या पृष्ठावरील आकृती दाखवून भौगोलिक उभा छेद काय आहे ते विचारा. हे पृथ्वीवरील एखाद्या ठिकाणी काढलेल्या उभ्या तुकड्याची कल्पना करण्यासारखे आहे. बाजूच्या दृष्यातून हेच दिसेल. भूगोलातील उंची आणि खोली मोजण्यासाठी "समुद्र पातळी" च्या कल्पनेची चर्चा करा.

2. या भौगोलिक उभ्या छेदामधील सर्वोच्च बिंदू कोणता आहे? सर्वात कमी बिंदू कोणता आहे?
3. तुम्ही A, B, ... G हे बिंदू उंचीच्या उतरत्या क्रमाने लिहू शकता का? तुम्ही उंचीच्या चढत्या क्रमाने गुण लिहू शकता का?
4. पृथ्वीवरील समुद्र सपाटीपासून सर्वात उंच बिंदू कोणता आहे? त्याची उंची किती आहे?
5. जमिनीवर किंवा समुद्राच्या तळावरील समुद्र पातळीच्या संदर्भात सर्वात कमी बिंदू कोणता आहे? त्याची उंची किती आहे? (ही उंची ऋणात्मक असावी)

तापमान

उन्हाळ्यात 'उष्णतेची लाट' आल्याची बातमी तुम्ही ऐकली असेल. उन्हाळ्यात जेव्हा तुम्हाला खूप उष्णता जाणवते तेव्हा तापमान काय असेल. असे तुम्हाला वाटते? हिंवाळ्यात आपल्याकडे थंडी किंवा थंड तापमान असते.

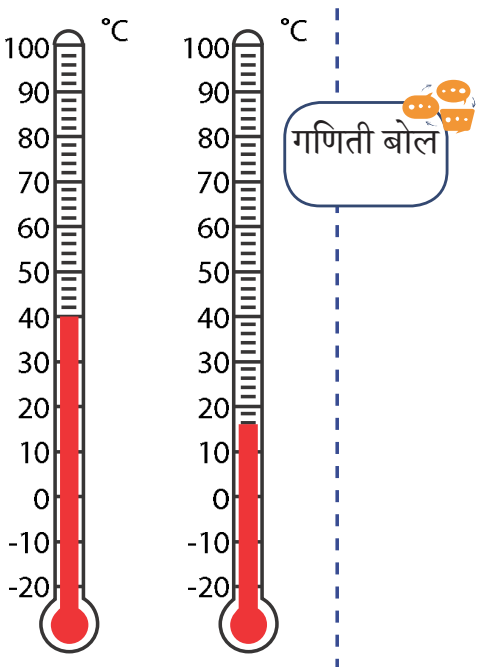
तुमच्या भागात गेल्या वर्षी उन्हाळ्यात कमाल तापमान आणि हिंवाळ्यात किमान तापमान किती होते? शोधा.

जेव्हा आपण तापमान मोजतो. तेव्हा आपण मोजण्याचे एकक (°C) सेल्सिअस म्हणून वापरतो. खालील तापमापक (thermometer) 40°C आणि 15°C तापमान दाखवित आहेत.

@RTES NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. तुम्हाला माहिती आहे का की भारतात अशी कांही ठिकाणे आहेत जिथे तापमान 0°C च्या खाली जाऊ शकते? भारतातील अशी ठिकाणे शोधा जिथे तापमान कधी कधी 0°C च्या खाली जाते. या ठिकाणी काय सामान्य आहे? इतर ठिकाणे थंड का होत नाहीत?
2. लडाखमधील लेहमध्ये हिंवाळ्यात खूप थंडी असते. नोव्हेंबरमधील एका दिवशी लेहमध्ये दिवसा / रात्रीच्या वेगवेगळ्या वेळी घेतलेल्या तापमान नोंदीची सारणी खालीलप्रमाणे आहे. दिवस / रात्रीच्या योग्य वेळेसह तापमान जुळवा.



तापमान	वेळ
14°C	02.00 am
8°C	11.00 pm
-2°C	02.00 pm
-4°C	11.00 am

शिक्षकांसाठी सूचना

तापमापक (thermometer) आणि ते तापमान मोजण्यासाठी ते कसे वापरले जातात याबद्दल सांगा. वर्गात प्रयोगशाळा तापमापक आणा आणि गरम पाणी आणि थंड पाणी यांचे तापमान मोजा. मुलांना दाखवा की तापमापक मध्ये 0°C च्या खाली खुणा आहेत. 0° डिग्री सेल्सियस काय दर्शविते, म्हणजे पाण्याचा गोठणबिंदू यावर चर्चा करा.

10.4 पूर्णांकांचा शोध

एक पोकळ पूर्णांक चौकट (Grid)

4	-1	-3
-3		1
-1	-1	2

5	-3	-5
0		-5
-8	-2	7

या दोन चौकटीमधील संख्यांमध्ये कांही तरी विशेष आहे. चला ते काय आहे शोधूया.

वरची पंक्ती : $4 + (-1) + (-3) = 0$ $5 + (-3) + (-5) =$ _____

खालची पंक्ती : $(-1) + (-1) + 2 = 0$ $(-8) + (-2) + 7 =$ _____

डावा स्तंभ : $4 + (-3) + (-1) = 0$ $5 + 0 + (-8) =$ _____

उजवा स्तंभ : $(-3) + 1 + 2 = 0$ $(-5) + (-5) + 7 =$ _____

प्रत्येक चौकटीमध्ये, प्रत्येक दोन ओळीतील संख्या (वरची पंक्ती आणि खालील पंक्ती) आणि प्रत्येक दोन स्तंभातील संख्या (सर्वात डावीकडील स्तंभ आणि उजवीकडील स्तंभ) समान राखली आहे. या बेरजेला आपण "सीमांत बेरीज" (Border Sum) म्हणू. पहिल्या चौकटीची सीमांत बेरीज '0' आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. वरील दुसऱ्या चौकटीमधील संख्यांची गणना करा आणि सीमांत बेरीज शोधा.
2. आवश्यक सीमांत बेरीज करण्यासाठी चौकट पूर्ण करा.

-10		
		-5
9		

सीमांत बेरीज +4 आहे.

6	8	
		-5
	-2	

सीमांत रेषेची बेरीज -2 आहे.

7		
		-5

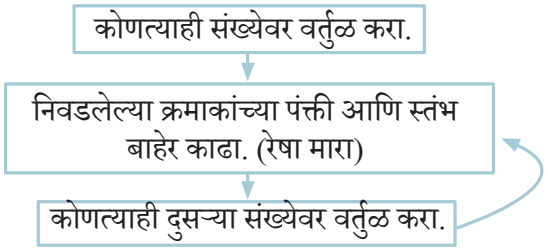
सीमांत रेषेची बेरीज - 4 आहे.

3. वरील शेवटच्या चौकटीमधील, सीमांत बेरीज - 4 मिळविण्यासाठी संख्या लिहीण्याचे एकापेक्षा जास्त मार्ग शोधा.
4. इतर कोणती चौकट अनेक प्रकारे लिहीली जाऊ शकते? आणि त्यांचे कारण लिहा.
5. एक सीमा पूर्णांक चौरस कोडे बनवा आणि आपल्या वर्ग मित्रास सोडवायला सांगा.

संख्यांची एक अदभूत चौकट!

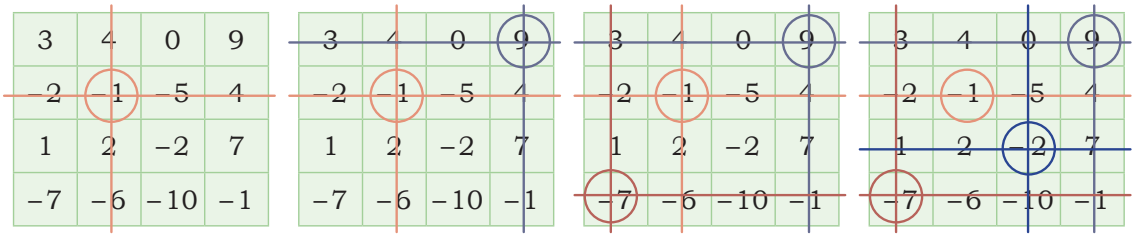
खाली कांही संख्या असलेली चौकट आहे. जोपर्यंत संख्या शिल्लक नाही तोपर्यंत दर्शविल्याप्रमाणे पायऱ्यांचे अनुकरण करा.

3	4	0	9
-2	-1	-5	4
1	2	-2	7
-7	-6	-10	-1



जेव्हा आणखी संख्या नसतील (वर्तुळ करायचे), तेव्हा थांबा. वर्तुळ केलेल्या संख्या जोडा. खालील उदाहरणात, वर्तुळाकार संख्या -1, 9, -7, -2 आहेत, जर तुम्ही त्यांना जोडले तर (बेरीज करा.) तुम्हाला -1 मिळेल.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. पुन्हा प्रयत्न करा, यावेळी वेगळ्या संख्या निवडा. तुम्हाला एकूण बेरीज किती मिळाली? ती पहिल्यापेक्षा वेगळी होती का? आणखी कांही वेळा प्रयत्न करा.

2. खालील चौकटीमध्ये तोच खेळ खेळा. तुम्हाला काय उत्तर मिळाले?

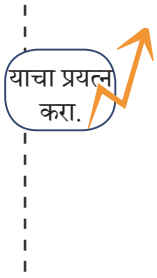
7	10	13	16
-2	1	4	7
-11	-8	-5	-2
-20	-7	-14	-11

-11	-10	-9	-8
-7	-6	-5	-4
-3	-2	-1	0
1	2	3	4

3. या चौकटीमध्ये विशेष काय असू शकते? संख्यांमध्ये जादू आहे की त्यांची मांडणी केली आहे. तुम्ही अशा आणखी चौकटी बनवू शकता का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

* शोधा पाहू. [Figure it out]



1. दिलेल्या जोड्यांमधील सर्व पूर्णांक चढत्या क्रमाने लिहा.

   a. 0 आणि -7 b. - 4 आणि 4

   c. -8 आणि -15 d. -30 आणि -23

2. अशा 3 संख्या घ्या की त्यांची बेरीज - 8 असेल.

3. दोन फासे आहेत आणि त्यांच्यावर असे अंक आहेत: -1, 2, -3, 4, -5, 6. हे फासे फिरवताना सर्वात लहान संभाव्य बेरीज -10 = (-5) + (-5) आणि सर्वात मोठी संभाव्य बेरीज 12 = 6+6 आहे. (-10) आणि (+12) मधली कांही संख्या या दोन फाशावर संख्या जोडून मिळवणे शक्य नाही. ते आकडे शोधा.

4. हे सोडवा.

8 - 13	(-8) - (13)	(-13) - (-8)	(-13) + (-8)
8 + (-13)	(-8) - (13)	1 3- 8	13 - (-8)

5. खालील वर्षे शोधा.

a. सध्याच्या वर्षापासून 150 वर्षापूर्वी कोणते वर्ष होते? _____

b सध्याच्या वर्षापासून 2200 वर्षापूर्वी कोणते वर्ष होते? _____

c. इसवी सन पूर्व 680 नंतर 320 वर्षांनी कोणते वर्ष असेले? _____

6. खालील क्रम पूर्ण करा.

a. (-40), (-34), (-28), (-22), ____, ____, ____

b. 3, 4, 2, 5, 1, 6, 0, 7, ____, ____, ____

c. ____, ____, 12, 6, 1, -3, -6, ____, ____,

7. येथे सहा पूर्णांक पत्ते आहेत: (+1), (+7), (+18), (-5), (-2), (-9)

तुम्ही यापैकी कोणतेही निवडू शकता आणि बेरीज आणि वजाबाकी वापरून समीकरण तयार करू शकता.

येथे एक राशी आहे: (+18) + (+1) - (+7) - (-2) जिची किंमत (+14) आहे. आता, अशी कार्डे निवडा आणि समीकरण तयार करा की त्याचे मूल्य (-30) च्या जवळ असेल.

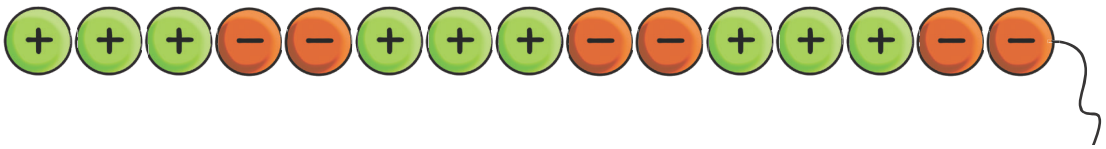
8. दोन धन पूर्णांकांची बेरीज नेहमी धन असते परंतु (धन पूर्णांक) - (धन पूर्णांक) धन किंवा ऋण असू शकते.

a. (धन) - (ऋण) b. (धन) + (ऋण)

c. (ऋण) + (ऋण) d. (ऋण) - (ऋण)

e. (ऋण) - (धन) f. (ऋण) + (धन)

9. या माळेमध्ये एका विशिष्ट प्रकारे एकूण 100 मुद्रा आहेत. तर या माळेचे मूल्य काय आहे?



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.5 ऐतिहासिक संदर्भ

सामान्यपणे अपूर्णांकांप्रमाणेच, सामान्य पूर्णांक (शून्य आणि ऋण संख्यांसह) प्रथम हजारो वर्षापूर्वी, आधुनिक काळात जगभर पसरण्याआधी आशियामध्ये कल्पना करण्यात आली आणि वापरण्यात आली होती.

ऋण संख्या वापरण्याची पहिली ज्ञात उदाहरणे लेखाशास्त्राच्या संदर्भात आली. चीनच्या सर्वात महत्वाच्या गणितीय कार्यापैकी एक, गणितीय कलावरील नऊ अध्याय (जिऊझांग सुआंशू) जे इसवी सनाच्या पहिल्या किंवा दुसऱ्या शतकात पूर्ण झाले होते. धन आणि ऋण संख्या लाल आणि काळ्या रॉडस वापरून दर्शविल्या गेल्या.

प्राचीन काळी भारतातही लेखाशास्त्र (Accountancy) मजबूत संस्कृती होती. जमा व खर्च या संकल्पनेबद्दल कौटील्यानी त्यांच्या अर्थशास्त्र (सी. 3008 CE) मध्ये विस्तृतपणे लिहीले आहे, ज्यामध्ये खाते शिल्लक ऋण असू शकते हे मान्य केले आहे. लेखांकनाच्या संदर्भात ऋण संख्यांचा सुस्पष्ट वापर 300 च्या आसपासच्या बक्षाली हस्तलिखितसह अनेक प्राचीन भारतीय कृतींमध्ये दिसून येतो, जेथे संख्येनंतर (पूर्वी ऐवजी) विशिष्ट चिन्ह वापरून ऋण संख्या लिहीली जात होती.

धन संख्या, ऋण संख्या आणि शून्य यांची पहिली सामान्य चिकित्सा सर्व समान वैध संख्या म्हणून समान पायावर, व्यासावर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि अगदी भागाकाराची मूलभूत क्रिया करता येते जसे ब्रम्हगुप्तानी त्यांच्या स्फुट सिध्दांत इ. स. 628 ब्रम्हामध्ये विस्ताराने वर्णन केले आहे. ब्रम्हगुप्तानी सर्व संख्यांवर क्रिया करण्यासाठी स्पष्ट नियम दिले. धन, ऋण आणि शून्य ज्यामुळे आपण आजही वापरत असलेल्या या संख्या समजून घेण्याचा आधुनिक मार्ग तयार केला!

बेरीज आणि वजाबाकीसाठीचे ब्रम्हगुप्तांचे कांही प्रमुख नियम धन संख्या, ऋण संख्या आणि शून्य खाली दिले आहेत.

ब्रम्हगुप्ताचे बेरजेचे नियम (ब्रम्हा - स्फुट - सिध्दांत 18.30, 628 CE):

1. दोन धनाची बेरीज धन आहे. (उदा. 2+3 = 5)
2. दोन ऋणांची बेरीज ऋण आहे. दोन ऋण संख्यांची चिन्हाशिवाय बेरीज करा आणि नंतर उत्तराला वजा चिन्ह द्या. [उदा. (-2) + (-3) = -5]
3. धन संख्या आणि ऋण संख्याच्या बेरजेसाठी, मोठ्या संख्येतून (चिन्ह नसलेली) लहान संख्या वजा करा आणि उत्तराला मोठ्या संख्येचे चिन्ह ठेवा. [उदा. -5 + 3 = -2, 2 + (-3) = -1 आणि -3 + 5 = 2]
4. संख्यांची बेरीज आणि तिचा व्यस्त यांची बेरीज शून्य आहे. [उदा. 2 + (-2) = 0]
5. कोणतीही संख्या आणि शून्य यांची बेरीज तिच संख्या असते. [उदा. -2 + 0 = -2 आणि 0 + 0 = 0]

© DTERT NOT TO BE REPUBLISHED

वजाबाकीसाठी ब्रम्हगुप्तांचे नियम (ब्रम्ह - स्फुट - सिद्धांत 18.31-18.32)

1. मोठ्या धन संख्येतून लहान धन संख्या वजा केल्यास, उत्तर धन संख्या येते. (उदा. 3 - 2 = 1).
2. लहान धन संख्येतून मोठी धन संख्या वजा केल्यास, उत्तर ऋण संख्या येते. (उदा. 2 - 3 = -1)
3. ऋण संख्या वजा करणे हे संबंधित धन संख्यांची बेरीज असते. (उदा. 2 - (-3) = 2 + 3 = 5)
4. एखादी संख्या त्याच संख्येतून वजा केल्यास उत्तर शून्य मिळते. (उदा. 2 - 2 = 0 आणि (-2) - (-2) = 0)
5. एखाद्या संख्येतून शून्य वजा केल्यास उत्तर तीच संख्या मिळते. (उदा. -2 - 0 = -2 आणि 0 - 0 = 0) शून्यातून संख्या वजा केल्याने संख्येचा व्यस्त मिळतो. (उदा. 0 - (-2) = 2)

एकदा तुम्हाला ब्रम्हगुप्ताचे नियम समजले की, तुम्ही कोणत्याही संख्येची बेरीज आणि वजाबाकी करू शकता. धन, ऋण आणि शून्य!

* शोधा पाहू. [Figure it out]

1. बेलाज बिल्डींग ऑफ फन संदर्भात ब्रम्हगुप्तांचे प्रत्येक नियम तुम्ही स्पष्ट करू शकता का?
2. प्रत्येक नियमासाठी तुमची स्वतःची उदाहरणे द्या.

ब्रम्हगुप्त हे पहिले गणितज्ञ होते, ज्यानी शून्याला समान पायावर धन संख्यांसह तसेच ऋण संख्यांसह संख्या म्हणून वर्णन केले आणि अशा सर्व संख्यावर अंकगणित क्रिया करण्यासाठी स्पष्ट नियम देणारे पहिले गणितज्ञ होते. धन, ऋण आणि शून्य म्हणजे काय तयार करणे. त्याला गोल (Ring) म्हणतात. ही जगाची गणिते करण्याची पध्दत बदलते.

तथापि उर्वरित जगाला संख्या म्हणून शून्य आणि ऋण संख्या स्विकारण्यासाठी अनेक शतके लागली. 13 व्या शतकापर्यंत युरोपमध्ये जाण्यापूर्वी हे आकडे 9 व्या शतकापर्यंत अरब जगात प्रसारीत केले गेले, स्विकारले गेले आणि पुढे त्याचा अभ्यास केला गेला.

आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे, 18 व्या शतकातही अनेक युरोपियन गणिततज्ञांनी ऋण संख्या अजूनही स्विकारली नाही. 18 व्या शतकातील फ्रेंच गणिततज्ञ लाझारे कार्नोट यांनी ऋण संख्यांना "असमंजस" (Absurd) म्हटले. परंतु कालांतराने, जागतिक गणित आणि विज्ञानमध्ये शून्य तसेच ऋण संख्या अपरिहार्य असल्याचे सिध्द झाले आणि आता त्यांना समान पातळीवर महत्वाच्या संख्या मानल्या जातात आणि धन संख्यांइतकीच महत्वाची इ.स. 628 मध्ये ब्रम्हगुप्ताने शिफारस केली होती आणि स्पष्टपणे वर्णन केले होते.

सर्व संख्यांवरील अंकगणित नियमांच्या या अमूर्ततेने बीजगणिताच्या आधुनिक विकासाचा मार्ग मोकळा केला, ज्याबद्दल आपण पुढील वर्गामध्ये शिकू.

©KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

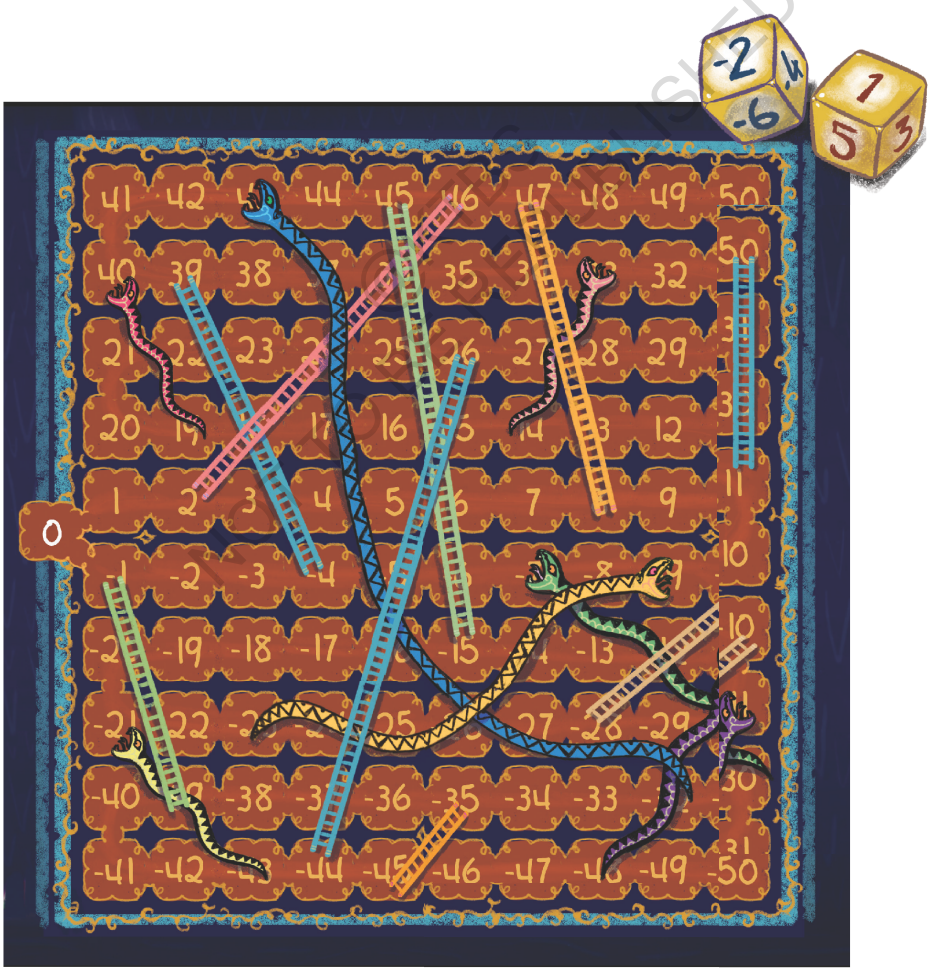
* अशा संख्या आहेत ज्या शून्यापेक्षा लहान आहेत. त्या संख्यांच्या समोर ' - ' चिन्ह लिहीलेले असतात. (उदा. -2) आणि त्यांना **ऋण संख्या** म्हणतात. त्या संख्या संख्यारेषेवर शून्याच्या डावीकडे लिहील्या जातात.
* ....., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... यांना **पूर्णांक** म्हणतात. 1, 2, 3, 4, ...या संख्यांना **धन पूर्णांक** म्हणतात. आणि ..... -4, -3, -2, -1 या संख्यांना **ऋण पूर्णांक** म्हणतात. 0 (शून्य) ही संख्या धन किंवा ऋण संख्या नाही.
* प्रत्येक दिलेल्या संख्येशी संबंधित दुसरी संख्या असते जी दिलेल्या संख्येत मिळविल्यास शून्य मिळते. याला संख्येचा **बेरीज व्यस्त** असे म्हणतात. (उदा. 7 चा बेरीज व्यस्त -7 आहे आणि -543 चा बेरीज व्यस्त 543 आहे.)
* बेरजेचा अर्थ : **प्रारंभिक स्थिती + आवश्यक हालचाल = लक्ष्य स्थिती**
* बेरीज म्हणजेच हालचालींचे संयोजन किंवा वाढ / कमी होय. **हालचाल 1 + हालचाल 2 = एकूण हालचाल**
* वजाबाकीचा अर्थ : **लक्ष्य स्थिती - प्रारंभिक स्थिती = हालचाल**
* सर्वसाधारपणे, ब्रम्हगुप्तांच्या बेरजेच्या नियमांचे पालन करून आपण दोन संख्या मिळवू शकतो.
  a. जर दोन्ही धन संख्या असतील, तर संख्यांची बेरीज धन संख्याच असेल (उदा. 2 + 3 = 5)
  b. दोन्ही संख्या ऋण असल्यास त्या संख्यांची चिन्हाशिवाय बेरीज करा आणि उत्तराला वजा चिन्ह द्या. (उदा. (-2) + (-3) = -5)
  c. जर एक संख्या धन संख्या असेल आणि दुसरी ऋण संख्या असेल, तर मोठ्या संख्येतून (चिन्हाशिवाय) लहान संख्या वजा करा आणि उत्तराला मोठ्या संख्येचे चिन्ह द्या. (उदा. -5 + 3 = -2)
  d. एक संख्या आणि तिचा बेरीज व्यस्त यांची बेरीज शून्य येते. (उदा. 2 + (-2) = 0)
  e. एक संख्या आणि शून्य यांची बेरीज तीच संख्या येते. (उदा. -2 + 0 = -2)
* आपण दोन पूर्णांक संख्यांची वजाबाकी करू शकतो. पूर्णांकाची वजाबाकी त्यांच्या बेरीज व्यस्तांच्या बेरजेइतकीच असते.
* पूर्णांकांची तुलना केली जाऊ शकतेः -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3..... लहान संख्या मोठ्या संख्येच्या डावीकडे असतात.
* आपण धन आणि ऋण संख्यांचा अर्थ जमा आणि खर्च असा घेऊ शकतो. आपण तळ मजल्याचा संदर्भ वरच्या बिंदूचे अंतर म्हणून धन संख्या असा अर्थ घेऊ शकतो. त्याचप्रमाणे ऋण संख्यांचा अर्थ जमिनीच्या पातळीपेक्षा कमी अंतर म्हणून केला जाऊ शकतो. अंश सेल्सिअसमध्ये तापमान मोजताना, धन तापमान हे पाण्याच्या गोठणबिंदूपेक्षा जास्त असते आणि ऋण तापमान हे पाण्याच्या गोठण बिंदूच्या खाली असते.

© IVTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पूर्णांक : साप-शिडी

नियम -

- हा दोन खेळाडूंचा खेळ आहे. प्रत्येक खेळाडूकडे 1 मोहरा असतो. दोन्ही खेळाडू 0 पासून सुरुवात करतात. खेळाडू जिंकण्यासाठी -50 किंवा +50 पर्यंत पोहोचू शकतात; परंतु खेळापूर्वी किंवा दरम्यान हे ठरविण्याची किंवा निश्चित करण्याची आवश्यकता नाही.
- प्रत्येक खेळाडू एका वेळी दोन फासे फिरवून टाकतो. एका फाशावर +1 ते +6 पर्यंत संख्या आहेत आणि दुसऱ्या फाशावर -1 ते -6 पर्यंत संख्या आहेत.
- प्रत्येक वेळी दोन फासे टाकल्यानंतर, खेळाडू कोणत्याही क्रमाने त्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करू शकतो आणि नंतर परिणाम दर्शविणारी पायरी हालचाल करू शकतो. धन संख्या म्हणजे + 50 च्या दिशेने जाणे आणि ऋण संख्या म्हणजे -50 च्या दिशेने जाणे होय.

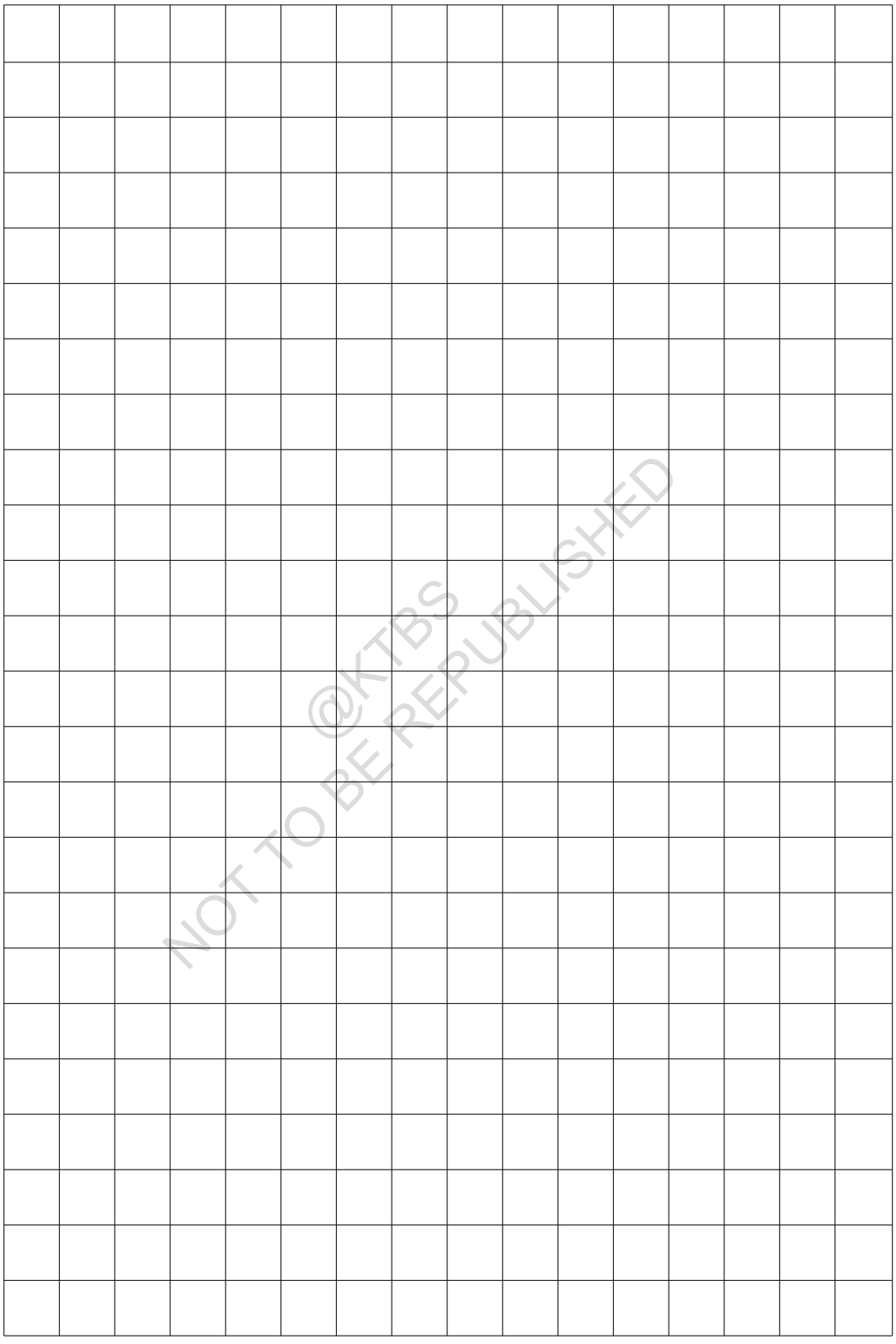


अध्ययन साहित्यासाठी पाने

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

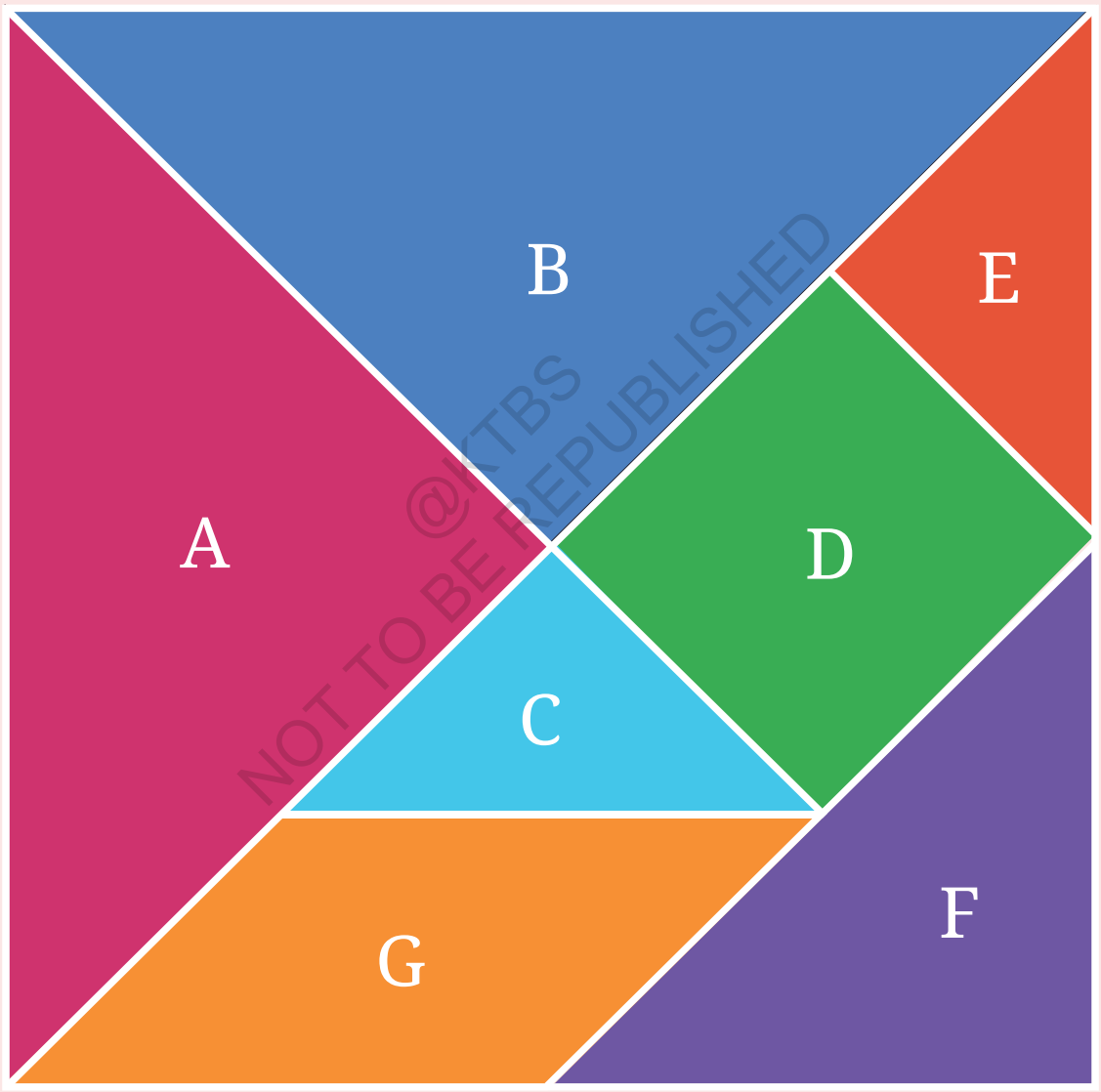
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED


@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

भौमितिक कोडे - TANGRAM

टीप - प्रत्येक आकार पांढऱ्या सीमेवरून कापा.

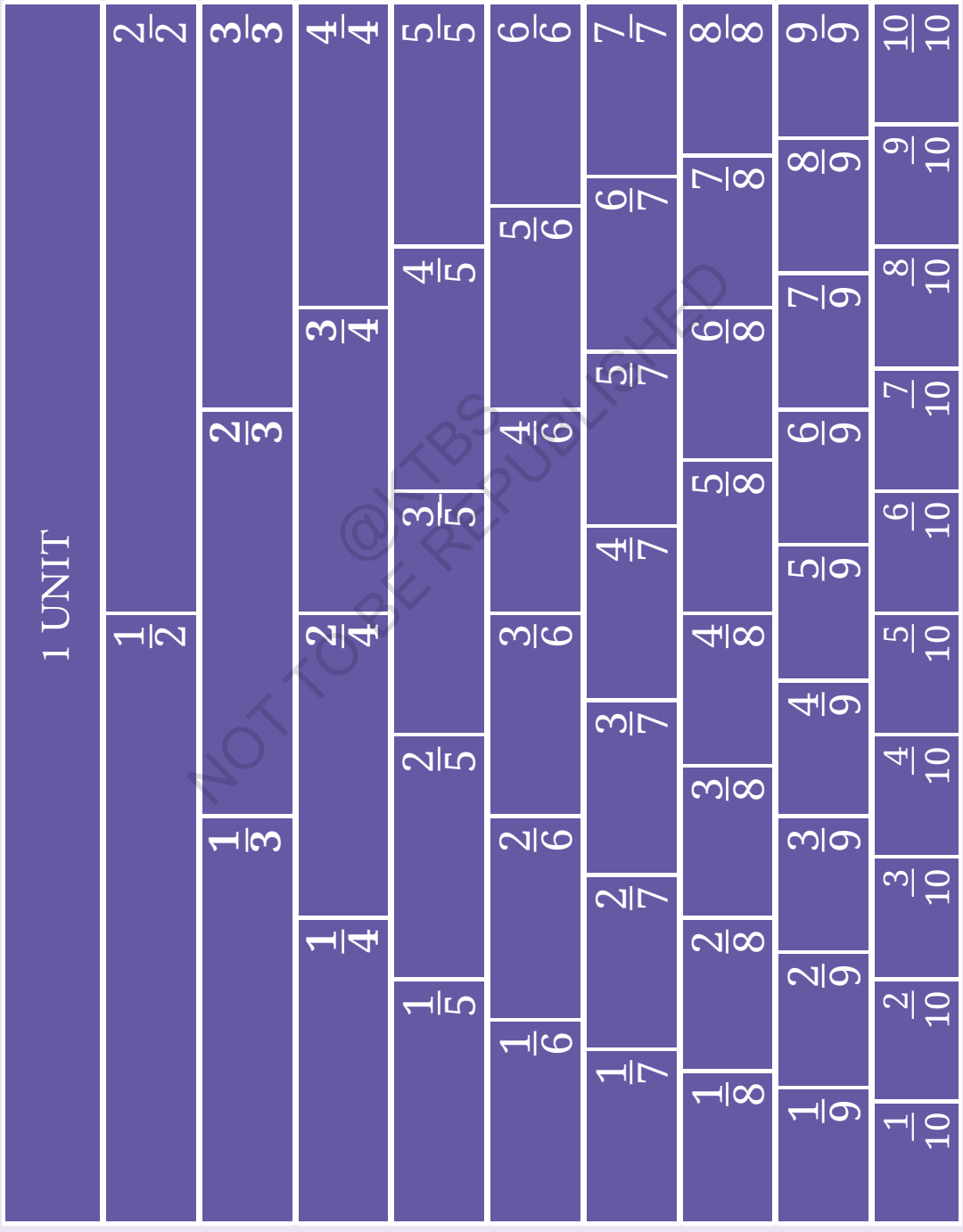


@IKTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

अपूर्णांक भिंत (FRACTION WALL)

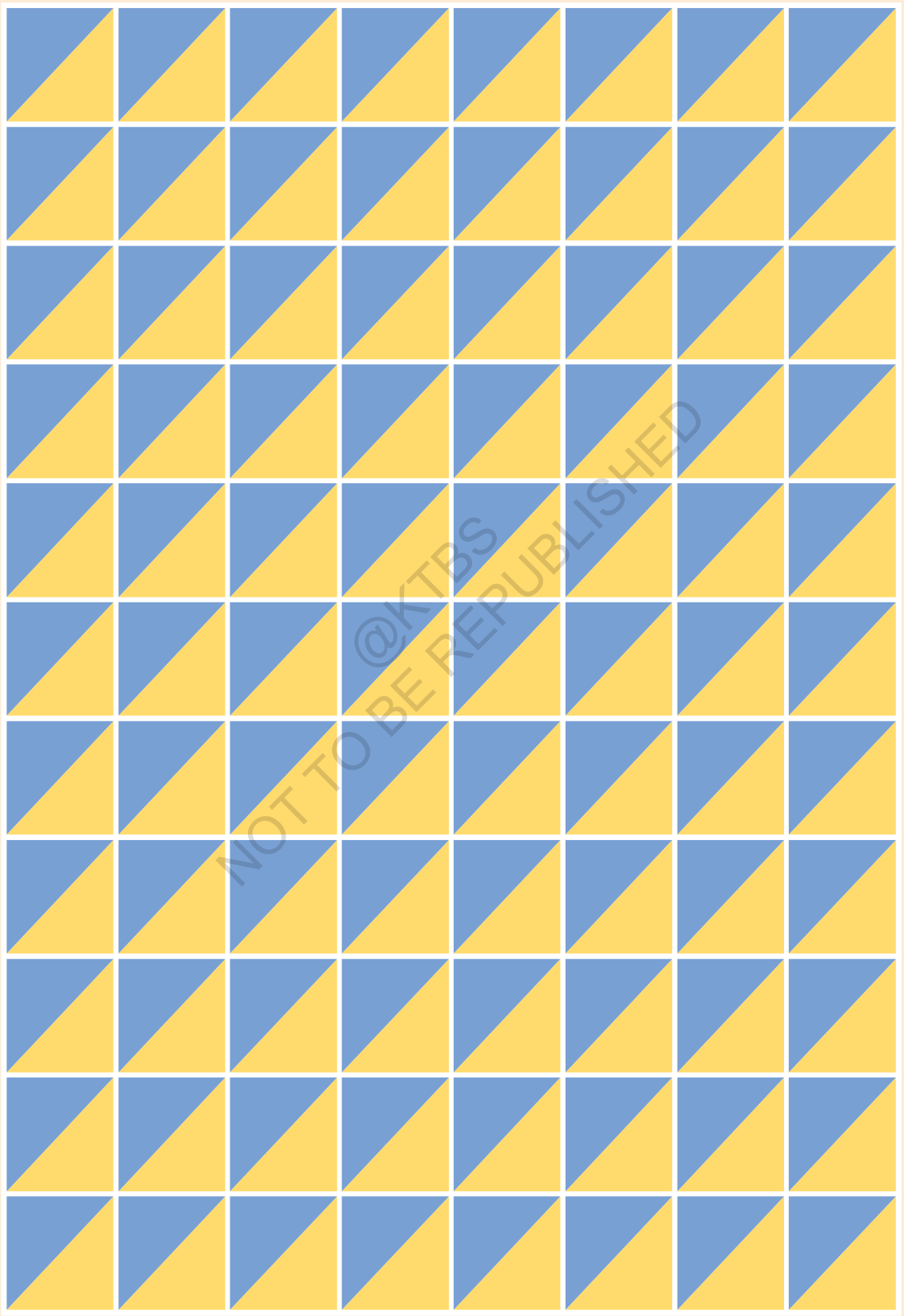
टिप - प्रत्येक आकार पांढऱ्या सीमेवरून कापा.



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

टिप - प्रत्येक फरशी पांढऱ्या सीमेवरून कापा.



@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED