گنِت پرکاش

ریاضی کی درسی کتاب

گریڈ

7

حصّہ اوّل

PART- 1

4774

विद्यया ऽ मृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

KARNATAKA TEXT BOOK SOCIETY (R.)
6th Cross, Malleshwaram
Bengaluru-560 003

پیش لفظ

قومی تعلیمی پالیسی (National Education Policy) 2020 ملک میں ایسا تعلیمی نظام بنانے کی کوشش کر رہی ہے جو ہندستانی اقدار اور انسانی کوششوں اور علم کے تمام شعبوں میں تہذیبی تکمیلیت سے وابستہ ہے اور ساتھ ہی یہ پالیسی طلبا کو اکیسویں صدی کے امکانات اور چیلنجوں سے تعمیری طور پر نبرد آزما ہونے کے لیے تیار کرتی ہے۔ اس امید افزا نقطۂ نظر کی بنیاد قومی درسیات کا خاکہ برائے اسکولی تعلیم 2023 (NCF-SE) میں ہمہ جہت نصابی میدانوں کے تمام تعلیمی مراحل اور مضامین میں مستحکم طور پر رکھی گئی ہے۔ قومی درسیات کا خاکا کہ برائے اسکولی تعلیم۔2023 کا مقصد اساسی اور ابتدائی سطح پر طلبا کے پانچوں مرحلوں یعنی پنچ کوش (*pañchakośhas*) کی نشوونما کو حقیقی بناتے ہوئے مڈل سطح پر ان کی بہتر آموزش کا تسلسل قائم رکھنا ہے۔ مڈل سطح، ابتدائی اور ثانوی سطح کے درمیان ایک پل کا کردار ادا کرتی ہے، جو گریڈ 6 سے 8 تک تین برسوں پر محیط ہے۔

اس خاکے کا مقصد مڈل سطح پر طلبا کو ان مہارتوں سے آراستہ کرنا ہے جن کی ضرورت انھیں اپنی زندگیوں میں ترقی کی راہ پر گامزن ہونے میں ہوگی۔ یہ ان کی تجرباتی، توضیحی اور بیانیہ صلاحیتوں کو فروغ دینے کی کوشش کرتا ہے اور انھیں آنے والے مواقع اور چیلنجوں کے لیے تیار کرتا ہے۔ ایسا متنوع نصاب، جو نو مضامین بہ شمول تین زبانیں—کم از کم دو ہندوستانی زبانوں کے ساتھ سائنس، ریاضی، سماجی علوم، فنون کی تعلیم، جسمانی تعلیم، فلاح و بہبود اور پیشہ ورانہ تعلیم پر مشتمل ہے، طلبا میں ہمہ جہت ترقی کو فروغ دے گا۔

ایسی تبدیلی لانے والے آموزش کی ثقافت کے لیے کچھ مخصوص شرائط ضروری ہیں۔ ان میں سے ایک مختلف نصابی شعبوں میں مناسب درسی کتابوں کا ہونا ہے، کیوں کہ یہ درسی کتابیں نصاب کے مواد، تدریس اور آموزش کی حکمت عملی کے درمیان مرکزی کردار ادا کرتی ہیں۔ ایک ایسا کردار جو طلبا کے تجسس اور تحقیقاتی رجحان کے درمیان مدبرانہ توازن بنائے گا۔ دیگر شرائط کے مابین، نصاب کے مختلف شعبوں کے اندر اور درمیانی تصوری ربط قائم کرنے کے لیے کلاس روم کی ترتیب اور اساتذہ کی تیاری بھی ضروری ہے۔

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ (این سی ای آر ٹی)، اپنی جانب سے طلبا کو معیاری درسی کتابیں فراہم کرنے کے لیے پُرعزم ہے۔ اس مقصد کے لیے مختلف نصابی شعبہ جات کے زمرے تشکیل دیے گئے ہیں، جن میں ماہرینِ مضامین، ماہرینِ تدریس اور اساتذہ شامل ہیں اور انھوں نے ایسی درسی کتابیں تیار کرنے کی بھرپور کاوشیں کی ہیں۔ ریاضی کی کتاب گنت پرکاش، گریڈ 7 (حصّہ اوّل) قومی تعلیمی پالیسی 2020 اور قومی درسیات کا خاکہ برائے اسکولی تعلیم 2023 کی توقعات کے مطابق ہے، خاص طور پر ان پہلوؤں کے حوالے سے جو ریاضیاتی سوچ کو ابھارنے کے لیے تحریک دیتے ہیں۔ یہ درسی کتاب گریڈ 7 کے طلبا کے لیے ترتیب دی گئی ہے جو ریاضی کی دنیا کے اس سفر کو آگے بڑھاتی ہے جو گریڈ 6 میں شروع ہوا تھا۔ اس سفر کے دوران سوالات اور تصورات کا تعلق روزانہ کی زندگی میں پیش آنے والے حالات سے ہے۔ اس لیے یہ

امید کی جاتی ہے کہ طلبا اس کو آسانی سے اپنے اطراف کی چیزوں کے ساتھ جوڑ سکیں گے۔ یہ کتاب طلبا کو اپنے اطراف میں موجود مختلف پیٹرن کا مشاہدہ کرنے کی ترغیب دیتی ہے۔ اس میں ریاضی کو دیگر مضامین جیسے سائنس، سماجی علوم اور ان کے ہم ربط موضوعات جیسے ماحولیاتی تعلیم، اخلاقی تعلیم، شمولیاتی تعلیم اور ہندوستانی علمی نظام (Indian Knowledge Systems -IKS) سے مربوط کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ رنگین تصاویر اور انٹرایکٹو مشقیں اس درسی کتاب کی بنیاد ہیں، جو بچوں میں زیادہ پیچیدہ ریاضیاتی تصورات کو سمجھنے کی ایک مضبوط بنیاد فراہم کریں گی۔ پوری کتاب میں کہانیاں، مکالمات اور حکایات کو شامل کیا گیا ہے تاکہ ریاضی کے تجریدی تصورات کو نوعمر طلبا کے لیے زیادہ قابل فہم اور قابل رسائی بنایا جاسکے۔ مواد کو معموں اور جدید مسائل کا استعمال کر کے تیار کیا گیا ہے تاکہ طلبا شماریاتی فکر (Computational Thinking) کے میدان کے تصورات کو سمجھنے کے لیے بھی تیار ہوسکیں۔ اس کتاب کا مقصد طالب علم مرکوز طریقۂ تعلیم کے ذریعے طلبا کی فعال شراکت کو فروغ دینا ہے۔

تاہم اس درسی کتاب کے ساتھ ساتھ اس سطح پر یہ بھی ضروری ہے کہ طلبا آموزش کے دیگر وسائل سے بھی استفادہ کریں۔ اسکول کی لائبریریاں اس طرح کے وسائل کی فراہمی میں نہایت اہم کردار ادا کرتی ہیں۔ اس کے علاوہ والدین اور اساتذہ کا کردار بھی طلبا کی سرپرستی اور حوصلہ افزائی میں بیش قیمت ہے۔

اسی کے ساتھ میں ان تمام لوگوں کا شکریہ ادا کرتا ہوں جو اس درسی کتاب کی تشکیل میں شامل رہے ہیں اور امید کرتا ہوں کہ یہ سبھی شراکت دار کی توقع پر پورا اترے گی۔ ساتھ ہی میں اس سے استفادہ کرنے والے تمام افراد کو قیمتی رائے اور مشوروں کی دعوت دیتا ہوں تاکہ اگلی اشاعت کو مزید بہتر بنایا جاسکے۔

دنیش پرساد سکلانی
ڈائریکٹر
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

نئی دہلی
مارچ، 2025

اس کتاب کے بارے میں

ریاضی طلبا کو نہ صرف بنیادی حسابی مہارتوں کی نشوونما میں مدد کرتی ہے بلکہ نہایت اہم صلاحیتوں، منطقی استدلال، تخلیقی مسائل کے حل اور درست و واضح مباحثوں (زبانی اور تحریری) کی صلاحیتوں کو پروان چڑھاتی ہے۔ ریاضی کا علم دیگر مضامین جیسے سائنس اور سماجی علوم، حتی کہ فنون، جسمانی تعلیم اور پیشہ ورانہ تعلیم کے تصورات کو سمجھنے میں بھی اہم کردار ادا کرتا ہے۔ ریاضی سیکھنے سے طلبا کو باخبر انتخاب اور فیصلہ کرنے کی صلاحیتوں کی نشوونما میں بھی مدد ملتی ہے۔ اعداد اور مقداری دلائل کو سمجھنا مؤثر و بامعنی جمہوری، اقتصادی شراکت کے لیے ضروری ہے۔ اس طرح ریاضی، اسکول کی تعلیم کے مجموعی مقاصد کو حاصل کرنے میں بے حد اہم کردار ادا کرتی ہے۔

مڈل سطح پر ریاضی ایک بڑا چیلنج ہے اور اسے طلبا کے روزمرہ کے تجربوں اور ماحول سے قریب ہونے کے ساتھ ساتھ تجریدی ہونے کا دوہرا کردار ادا کرنا پڑتا ہے۔ اسے اس کی قطعیت بنائے رکھنے اور اس پر زور دینے کے ساتھ ساتھ وجدان کی نشوونما کا دوہرا کردار ادا کرنا پڑتا ہے۔ اس میں فن کارانہ اور تخلیقی صلاحیتوں، خوب صورتی اور جمالیاتی حس کے ساتھ ساتھ تنقیدی اور منطقی سوچ کی نشوونما کو فروغ دینے کا حقیقی کردار بھی شامل ہے۔ بالآخر ریاضی کو طلبا کو خود مختلف تصورات کی کھوج اور دریافت کے لیے، وافر مواقع فراہم کرنے کے ساتھ ساتھ دنیا بھر کے معروف ریاضیاتی طریقوں کو سکھانے کا دوہرا کردار نبھانا چاہیے۔

زیرنظر درسی کتاب میں اوپر دیے گئے مقاصد اور ریاضی سیکھنے کے چیلنجوں سے نمٹنے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس کتاب کو تیار کرنے والوں نے طلبا میں وجدان اور قطعیت پیدا کرنے کے لیے رسمی اور غیر رسمی تعریفوں اور طریقوں کے درمیان معقول توازن پیدا کرنے کی کوشش کی ہے۔ یہ کتاب کلاس روم میں فعال اور تجرباتی تعلیم کو فروغ دینے کے لیے طالب علم—طالب علم کے مابین اور طالب علم—استاد کے درمیان متعدد تعاملات کے مواقع فراہم کرتی ہے۔ کتاب میں کافی تعداد میں سوالات، معمے اور تعاملی مشقیں شامل کی گئی ہیں تاکہ مسلسل دریافت کی حوصلہ افزائی ہو سکے۔ کئی سوالات غیرمشروط ہیں تاکہ کلاس میں بحث و مباحثے کو فروغ دیا جا سکے۔

اس کتاب کا باب 1 'ہمارے آس پاس کے بڑے اعداد' لاکھوں، کروڑوں، اربوں اور کھربوں کی دنیا کا ایک تعارفی سفر ہے جسے دل چسپ مشقوں اور سیاق و سباق کے ذریعے پیش کیا گیا ہے۔

باب 2 'حسابی عبارات' ان عبارتوں پر غور کرتا ہے جن میں کثیر ریاضیاتی عملیات شامل ہوتی ہیں اور یہ وضاحت کرتا ہے کہ انھیں کس طرح بغیر کسی ابہام کے لکھا اور پڑھا جا سکتا ہے۔ باب 3 'ایک نظر نقطے سے پرے' اعشاریہ نقطے کے استعمال اور طلبا کو اعشاری اعداد کے ساتھ جمع اور تفریق کے بنیادی اصولوں سے روشناس کرتا ہے۔ باب 4 'حروفی اعداد کی مستعمل عبارات' حسابی عبارت کے باب پر مبنی ہے اور طلبا کو الجبرہ کی دنیا میں ابتدائی قدم رکھنے کی رہنمائی کرتا ہے، اس میں حروفی اعداد اور الجبرائی عبارت

کے بنیادی تصورات کا تعارف کرایا گیا ہے۔ باب 5 ’متوازی اور متقاطع خطوط‘ جیومیٹری کے کچھ بنیادی اجزا کو متعارف کراتا ہے اور اس میں دل چسپ سرگرمیوں جیسے کاغذ کا موڑنا اور مضبوط ریاضیاتی منطق کا توازن موجود ہے۔ باب 6 ’عدد کا کھیل‘ پہیلیاں اور جفت و طاق کے تصورات وِرہانک۔ فیوناچی اور کرپٹریتھمزم کے ذریعے شماریاتی فکر اور مسائل کے حل کے پہلوؤں کا احاطہ کرتا ہے۔ باب 7 ’تین متقاطع خطوط کی کہانی‘ تعمیر کے ذریعے ان کے اطراف اور زاویوں کی لمبائی سے متعلق مثلث کی کچھ حیرت انگیز خصوصیات کو دریافت کرتا ہے۔ باب 8 ’کسری اعداد کے ساتھ کام کرنا‘ طلبا کی کسروں کی سمجھ کو مزید بہتر بناتا ہے اور کسروں کی ضرب اور تقسیم کو دریافت کرتا ہے۔ عظیم ہندوستانی ریاضی دان برہم گپت (628 عیسوی) کے طریقوں اور فارمولوں کو نئے مثالوں اور دل چسپ پہیلیوں کے ساتھ زندہ کیا گیا ہے۔ تمام ابواب میں آرٹ، تاریخ اور سائنس سمیت دیگر مضامین کے ساتھ روابط پر زور دینے کی کوشش کی گئی ہے۔

کہانی سنانے کے عمل اور عملی سرگرمیوں کو آپس میں ملا کر ہم امید کرتے ہیں کہ آموزش کا ایسا تجربہ ہوگا جس سے تجسس کو جلا ملے گی اور ریاضی سے دل چسپی بڑھے گی۔ یہ امید ہے کہ اساتذہ، طلبا کو مباحثہ کرنے، کھیلنے، ایک دوسرے کے ساتھ ہم آہنگی پیدا کرنے، مختلف خیالات کے لیے منطقی دلائل پیش کرنے اور پیش کردہ دلائل میں خامیاں تلاش کرنے کے مواقع فراہم کرائیں گے۔ یہ ضروری ہے تاکہ طلبا بالآخر یہ سمجھ سکیں کہ کسی چیز کو ثابت کرنے کا کیا مطلب ہوتا ہے اور بنیادی تصورات کے بارے میں اعتماد پیدا کرسکیں۔ ریاضی کے کلاس روم میں دلائل کی بندش کا اندھا دھند استعمال نہیں ہونا چاہیے بلکہ طلبا کو مختلف طریقوں سے مسائل حل کرنے کی حوصلہ افزائی کرنی چاہیے۔

قومی تعلیمی پالیسی 2020 کے مطابق معموں، کھیلوں اور تعاملی مشقوں کے ذریعے پیار سے طلبا کو شماریاتی فکر سے متعارف کرایا گیا ہے تاکہ ان کی اس طرح کی سوچ کو فروغ ملے۔ مختلف تصورات کا سیاق و سباق دیتے ہوئے ہندوستانی جڑوں کو بھی دھیان میں رکھا گیا ہے۔ ہندوستانی خدمات کو مسئلہ حل کرنے کے ایک طریقے کے طور پر پیش کیا گیا ہے تاکہ طلبا کو ہندوستان کے ریاضیاتی ورثے اور اس کی عالمی شراکت سے آگاہ کیا جاسکے۔

تصورات اور مسائل روزمرہ کی زندگی سے تعلق رکھتے ہیں۔ کوشش کی گئی ہے کہ ایسے سیاق و سباق اور مواد کا استعمال کیا جائے جس سے طلبا پہلے سے واقف ہوں۔ کتاب کی پشت پر آموزشی مواد کی شیٹ دی گئی ہیں جن کو فوٹو کاپی کرا کے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ کئی جگہوں پر طلبا کے درمیان باہمی کاوشوں اور مباحثہ کو فروغ دینے کے لیے شقیں اور سرگرمیاں دی گئی ہیں۔ یہ کتاب کلاس روم میں طلبا کے متنوع گروہ کے سیکھنے کی ضروریات کو پورا کرنے کی کوشش کرتی ہے۔

ہم نے ابتدائی ابواب میں سیکھے گئے تصورات کو بعد کے ابواب کے خیالات سے جوڑنے کی کوشش کی ہے تاکہ ریاضی کے ربط اور اتحاد کو ظاہر کیا جاسکے۔ ہم امید کرتے ہیں کہ اساتذہ مشترکہ طور پر ان تصورات کو دوہرانے میں اس موقع کا استعمال کریں گے تاکہ طلبا ریاضی کی مکمل تصوراتی ساخت کو سمجھ سکیں۔ ہم امید کرتے ہیں کہ اساتذہ کسری اعداد، منفی اعداد اور دوسرے نئے تصورات کو زیادہ وقت دیں گے جو طلبا کے لیے نئے ہیں۔ ان میں بہت سارے تصورات ریاضی میں آگے کی آموزش کی بنیاد ہیں۔

آخر میں اس کتاب کا مقصد درسی کتاب سے کہیں زیادہ ہے۔ یہ ریاضیاتی دریافت اور کھوج کی دنیا کا پاسپورٹ ہے۔ چاہے اسے کلاس میں یا گھر میں استعمال کیا جائے۔ ہم امید کرتے ہیں کہ یہ کتاب طلبا کو ریاضیاتی مہمات پر نکلنے کی ترغیب دے گی، تاکہ وہ اپنے اطراف کی سبھی چیزوں میں ریاضی کی خوب صورتی اور مناسبت کو دیکھ سکیں۔ اس کے پرکشش طرز رسائی اور ریاضی گریڈ 7 کے تصورات کی جامع کوریج کے ساتھ یہ کتاب نوجوان ذہنوں کو محظوظ کرنے اور انھیں ریاضیاتی دریافت کے ایک طویل سفر پر روانہ کرنے کی امید اور مقصد رکھتی ہے۔

میں ایک بار پھر سے اس درسی کتاب کے تمام مصنفین اور معاونین کا شکریہ ادا کرتا ہوں کہ انھوں نے قوم کے ریاضی کے اساتذہ، طلبا اور شائقین کے لیے یہ اہم اور قیمتی تعاون اور خدمت فراہم کی۔

ہم اس کتاب کے متعلق آپ کی رائے اور تجاویز کے منتظر ہیں اور یہ بھی امید کرتے ہیں کہ آپ کی تدریس اور آموزش کے دوران آپ جو بھی دل چسپ مشقیں، سرگرمیاں اور عملی کام تیار کریں گے وہ ہمیں ارسال کریں گے، تاکہ انھیں مستقبل کے ایڈیشن میں شامل کیا جاسکے۔

آشوتوش واژلوار
پروفیسر، اکیڈمک کنوینر
ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن ان سائنس اینڈ میتھ میٹکس
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

کمیٹی برائے قومی نصاب اور تدریسی و آموزشی مواد (NSTC)

1. ایم سی پنت، چانسلر، نیشنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشنل پلاننگ اینڈ ایڈمنسٹریشن (NIEPA)، **(چیئر پرسن)**
2. منجول بھارگو، پروفیسر، پرنسٹن یونیورسٹی، **(کو-چیئر پرسن)**
3. سدھا مورتی، معروف مصنفہ اور ماہر تعلیم
4. بیبیک دیب رائے، چیئر پرسن، اکونامک ایڈوائزری کونسل وزیر اعظم (EAC-PM)
5. شیکھر مانڈے، سابق ڈائریکٹر جنرل سی ایس آئی آر، ممتاز پروفیسر، ساوتری بائی پھولے پونے یونیورسٹی، پونے
6. سجاتا رامدورئی، پروفیسر، یونیورسٹی آف برٹش کولمبیا، کینیڈا
7. شنکر مہادیون، میوزک مائسٹرو، ممبئی
8. یوومل کمار، ڈائریکٹر، پرکاش پاڈوکون بیڈمینٹن اکادمی، بنگلورو
9. مشیل ڈینینو، وزیٹنگ پروفیسر، آئی آئی ٹی، گاندھی نگر
10. سورینا راجن، آئی اے ایس (ریٹائرڈ)، سابق ڈی جی، ایچ آئی پی اے، ہریانہ
11. چمو کرشن شاستری، چیئر پرسن، بھارتیہ بھاشا سمیتی، وزارت تعلیم
12. سنجیو سانیال، ممبر، اکونامک ایڈوائزری کونسل۔وزیر اعظم (EAC-PM)
13. ایم ڈی سری نواس، چیئر پرسن، سینٹر فار پالیسی اسٹڈیز، چنئی
14. گجانن لونڈھے، ہیڈ، پروگرام آفس، این ایس ٹی سی
15. ربن چھیتری، ڈائریکٹر، ایس سی ای آر ٹی، سکم
16. پرتیوش کمار منڈل، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن ان سوشل سائنس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی
17. دِنیش کمار، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن اِن سائنس اینڈ میتھ میٹکس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی
18. کیرتی کپور، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن اِن لینگویجز، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی
19. رنجنا اروڑہ پروفیسر اور ہیڈ، ڈپارٹمنٹ آف کری کولم اسٹڈیز اینڈ ڈیولپمنٹ، این سی ای آر ٹی **(ممبر-سکریٹری)**

ٹیم برائے درسی کتاب

معاونین

آلوک کانہیرے، پروجیکٹ سائنٹفک آفیسر، ہومی بھابھا سینٹر فار سائنس ایجوکیشن، ممبئی

امرتیہ کمار دتا، پروفیسر، اسٹیٹ۔میتھ یونٹ، انڈین اسٹیٹسٹیکل انسٹی ٹیوٹ (آئی ایس آئی)، کولکاتا

انجلی گپتے، پرنسپل (ریٹائرڈ)، ودیا بھون پبلک اسکول، اودے پور

اپرنا لالینگکر، ڈائریکٹر، اکچھر برہما کنسلٹنسی، پونے (**ٹیم لیڈر**)

آشوتوش کیدار ناتھ واڑلوار، پروفیسر، ڈیپارٹمنٹ آف ایجوکیشن اِن سائنس اینڈ میتھ میٹکس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی—سی اے جی (ریاضی)

ممبر کوآرڈی نیٹر

گیتانجلی پاٹھک، پروفیسر، ایس۔پی۔کالج، پونے

ایچ ایس شاردا، ٹی جی ٹی، گورنمنٹ ہائی اسکول، ایچ ڈی کوٹے، کرناٹک

کے وی سبرامنیم، پروفیسر، چنئی میتھ میٹیکل انسٹی ٹیوٹ (سی ایم آئی)، چنئی

کرن بروے، فیکلٹی، بھاسکر آچاریہ پرتشٹھان، پونے

مادھون مکند، ڈائریکٹر، چنئی میتھ میٹیکل انسٹی ٹیوٹ، چنئی—سی اے جی چیئرپرسن (ریاضی)

مدھوبی، اسسٹنٹ پروفیسر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن (آر آئی ای)، میسور

منجول بھارگو، پروفیسر، پرنسٹن یونیورسٹی اور کو۔ چیئرپرسن، این ایس ٹی سی

پدم پریا شرالی، سابق پرنسپل، سہیادری اسکول کے ایف آئی، پونے

پتنجلی شرما، اسسٹنٹ پروفیسر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن (آر آئی ای)، اجمیر

راکھی بنرجی، ایسوسی ایٹ پروفیسر، عظیم پریم جی یونیورسٹی، بنگلور

رام چندر کرشن مورتی، پرنسپل، عظیم پریم جی اسکول، بنگلور

شیو کمار کے ایم، سینئر کنسلٹنٹ، پروگرام آفس، این ایس ٹی سی

شروَن ایس کے، سینئر کنسلٹنٹ، پروگرام آفس، این ایس ٹی سی

سجاتا رامدورئی، پروفیسر، یونیورسٹی آف برٹش کولمبیا، کینیڈا، ممبر این ایس ٹی سی

وی ایم شولاپورکر، ایڈجنکٹ پروفیسر، بھاسکر آچاریہ پرتشٹھان، پونے

وجین کے، پروفیسر، شعبہ نصابِ تعلیم و ترقی، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

مبصرین

انوراگ .بیہر، ممبر، نیشنل کری کولم فریم ورک اوورسائٹ کمیٹی

کے (روی) سبرامنیم، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ہومی بھابھا سینٹر فار سائنس ایجوکیشن (ایچ بی سی ایس ای)، ممبئی

ممبر کوآرڈی نیٹر (اردو ترجمہ)

ٹی پی شرما، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن اِن سائنس اینڈ میتھ میٹکس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

فاروق انصاری، پروفیسر اینڈ ہیڈ، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن اِن لینگویجز، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

مترجمین

آصف اقبال، ٹی جی ٹی ریاضی، گورنمنٹ سروودیہ بال ودیالیہ، پٹودی ہاؤس، دریا گنج، نئی دہلی

ایوب خان، پروفیسر (ریٹائرڈ)، شعبۂ ریاضی، جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

روحی فاطمہ، پروفیسر، شعبۂ تربیت اساتذہ و نیم رسمی تعلیم (آئی اے ایس ای) شعبہ برائے تعلیم، جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

سراج الدین سیفی، ریسرچ اسکالر، شعبۂ تربیت اساتذہ و نیم رسمی تعلیم (آئی اے ایس ای) شعبہ برائے تعلیم، جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

شعیب عبداللہ، پروفیسر (ریٹائرڈ)، شعبۂ تربیت اساتذہ و نیم رسمی تعلیم (آئی اے ایس ای) شعبہ برائے تعلیم، جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

شمیم احمد، اسسٹنٹ پروفیسر، سینٹ اسٹیفنز کالج، دہلی یونیورسٹی، نئی دہلی

صبا کوثر خان، ماڈرن اسکول، ناگپور، مہاراشٹر

ظفر احسن، پروفیسر (ریٹائرڈ)، شعبۂ ریاضی، علی گڑھ مسلم یونیورسٹی، علی گڑھ

محمد فرقان خان، ٹی جی ٹی ریاضی، سروودیہ بال ودیالیہ نمبر 1 اردو میڈیم، جامع مسجد، دہلی

محمد قاسم، لیکچرر (ریٹائرڈ)، اینگلو عرب سینئر سکنڈری اسکول، اجمیری گیٹ، دہلی

محمد ہارون سلمانی، ریسرچ اسکالر، شعبۂ تربیت اساتذہ و نیم رسمی تعلیم (آئی اے ایس ای) شعبہ برائے تعلیم، جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

ندا حسین، ٹی جی ٹی ریاضی، جامعہ مڈل اسکول، جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

نوشاد حسین، ایسوسی ایٹ پروفیسر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، کالج آف ٹیچر ایجوکیشن، بھوپال

اظہار تشکر

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ (این سی ای آر ٹی) معزز چیئر پرسن اور کری کولر ایریا گروپ (CAG) کے ان سبھی ممبران کی سرپرستی اور حمایت کا شکریہ ادا کرتی ہے جنھوں نے درسی کتاب کی تشکیل کے دوران درکار رہنمائی فراہم کی۔ درسی کتاب کی تشکیل کے دوران، متعدد ورکشاپ منعقد کی گئیں اور مختلف اداروں سے ماہرین ریاضی کو دعوت دی گئی۔ این سی ای آر ٹی ان ماہرین مضمون: شیلیش اے۔ شیرالی، ڈائریکٹر، ٹیچر ایجوکیشن پروگرام ویلی اسکول، کے ایف آئی؛ صادق علی شیخ، ہیڈ، شعبۂ ریاضی، مولانا آزاد کالج آف آرٹس، سائنس اینڈ کامرس، اورنگ آباد مہاراشٹر؛ جسپال کور، ٹی جی ٹی (ریاضی)، اسکول آف ایکسیلینس، دہلی؛ بینا پرکاش۔ سینئر پی جی ٹی ریاضی، کیمبین اسکول، بھوپال؛ مہندر شنکر، سینئر لیکچرر (ریٹائرڈ)، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی؛ شیلی چودھری، ٹی جی ٹی ریاضی، جی جی ایس ایس ایس، کھجوری خاص دہلی؛ روی رکھجھت شرما، ٹی جی ٹی ریاضی؛ جی سی ایم ایس، نیو سیلم پور، دہلی؛ پونم اروڑا، پی جی ٹی ریاضی، مینٹر ٹیچر، ایس بی وی، ویسٹ پٹیل نگر، نئی دہلی؛ شالینی اروڑا بہری، ٹی جی ٹی ریاضی، ایس کے وی نمبر 1، نریلا، دہلی؛ سنگیتا سونکی، ٹی جی ٹی ریاضی، دی ہیریٹیز اسکول، دہلی؛ ریشیکیش کمار اسسٹنٹ پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی؛ ایشیتا مکھرجی، سی بی ایس ای، ریسورس پرسن دہلی؛ ترون چوہیسا، پروگرام آفس، این ایس ٹی سی — کے قیمتی نقطۂ نظر اور تجاویز کا اعتراف کرتے ہوئے ان کا شکریہ ادا کرتی ہے۔

کونسل ندھی ایم شاستری اور بھاونا او پادھیائے، پروگرام آفس کی بھی مشکور ہے۔

صفحات کی ترتیب کا ڈیزائن پرائم کلائم کھیل سے متاثر ہے جو کہ میتھ فار لو کی جانب سے ہے۔ کونسل چیتنیا دیو اور رامو ایم ایس کا شکریہ ادا کرتی ہے جنھوں نے اعشاریہ سکوں کے ڈاک ٹکٹوں کی تصاویر فراہم کی۔

کونسل سنیتا فارکیا، پروفیسر اور ہیڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی کے علمی اور انتظامی تعاون کا بھی اعتراف کرتی ہے۔

کونسل اس درسی کتاب کی تیاری میں معاونین سشمیتا جوشی، منجو مہر اور صباحت خان، سینئر ریسرچ ایسوسی ایٹ؛ محمد فرزان اور محمد اظہر سلمانی، ٹائپسٹ، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن اِن سائنس اینڈ میتھ میٹکس، این سی ای آر ٹی کے تعاون کو بھی سراہتی ہے۔

کونسل مصطفیٰ علی، اسسٹنٹ ایڈیٹر (کانٹریکچول)، رائحہ انصار، آصف جمال، محمد زاہد انجم اور واعظ الرحمٰن صدیقی، پروف ریڈر (کانٹریکچول) کے مخلصانہ تعاون و توجہ کا بھی شکریہ ادا کرتی ہے۔

پون کمار باریار، انچارج، ڈی ٹی پی سیل، امجد حسین، مسیح الدین، جنید اور محمد عارض، ڈی ٹی پی آپریٹرس، (کانٹریکچول) پبلیکیشن ڈویژن این سی ای آر ٹی کا بھی شکریہ ادا کرتی ہے جنھوں نے اس کتاب کی ترتیب میں بھرپور محنت کی۔

استاد کے لیے نوٹ

ہم امید کرتے ہیں کہ یہ کتاب گنِت پرکاش آپ کے لیے ایک مضبوط سہارا اور رہنمائی کا کام کرے گی تا کہ آپ اس اہم کام کو سرانجام دے سکیں جو آپ کے سامنے ہے، یعنی ریاضی جیسے دل چسپ مضمون کے سیکھنے کے لطف کو اگلی نسل تک پہنچانا۔

یہ کام ایک سازگار ماحول فراہم کرنے کا مطالبہ کرتا ہے، جو طلبا کے ذہنوں میں ریاضیاتی سوچ کو پروان چڑھانے میں ان کی مدد کرے۔ وہ کلاس روم جہاں طلبا صرف سنتے ہیں اور جو کچھ انھیں بتایا گیا ہے یا بورڈ پر لکھا گیا ہے اسے لکھتے ہیں، ریاضی سیکھنے کے لیے درکار شرائط (حالات) کے لیے نامکمل ہوتا ہے۔ اس کے بجائے، کلاس روم کو ایسی جگہ ہونا چاہیے جہاں طلبا ریاضیاتی تصورات سیکھنے کے ساتھ کھیلنے، پیٹرن کو تلاش کرنے، ان پر بحث کرنے اور مسائل حل کرنے کے لیے تخلیقی حکمت عملیوں کو مل کر تیار کرنے میں مشغول ہوں۔ طلبا کو ایک دوسرے کے سامنے مسائل بھی پیش کرنے چاہیے اور پھر آپس میں ان کے ممکنہ حل پر بحث کرنی چاہیے۔ بلکہ حقیقت میں یہی وہ شرائط (حالات) ہیں جن کے ذریعے ریاضی کے مکمل میدان میں اب تک کی نشوونما ہوئی ہے اور اس لیے ان حالات کے بغیر طلبا سے ریاضیاتی سوچ اور سمجھ کی توقع نہیں کی جاسکتی ہے۔

خوش قسمتی سے کلاس روم میں ایسے مواقع پیدا کرنا مشکل نہیں ہے۔ اس کے لیے صرف ایک دل چسپ سوال، مسئلہ، پیٹرن یا چیلنج کو طلبا کے سامنے باقاعدگی سے پیش کرنے اور انھیں مناسب وقت دینے کی ضرورت ہے تا کہ وہ کھیل سکیں، بحث کرسکیں اور اس پر کلاس یا گروپوں میں کام کرسکیں۔

اس کے ساتھ ایک ایسا ماحول پیدا کرنے کی ضرورت ہے جو غلطیوں کو قبول کرے اور سیکھنے کے لیے ان کی اہمیت کو تسلیم کرے۔

حالاں کہ کلاس روم میں ریاضیاتی سوچ کی نمو کے لیے چنگاری سلگانا مشکل نہیں ہے، بلکہ آگ کو بھڑکائے رکھنا مشکل ہے اور اس میں آپ کی طرف سے کوششیں شامل کرنا بے حد اہم ہے۔ تاہم، اگر ہفتے میں کم از کم ایک یا دو بار کوئی سوال، مسئلہ، پیٹرن یا چیلنج طلبا کے سامنے پیش کیا جائے اور آپ ان کو اس پر کھیلنے، تبادلۂ خیال کرنے اور کام کرنے کے لیے مناسب وقت دیں تو اس سے طلبا کے ریاضی کو دیکھنے اور سمجھنے کے انداز پر نہایت مثبت اثر پڑ سکتا ہے۔

اس پر غور کیا جانا چاہیے کہ یہ مثبت اثر راتوں رات ظاہر نہیں ہوگا۔ اس میں وقت لگے گا اور یہ مختلف پہلوؤں پر منحصر ہوگا، جیسے کہ آپ مسئلہ حل کرنے کے مواقع کتنی بار فراہم کرتے ہیں، آپ کا صبر اور وہ حوصلہ افزائی جو آپ طلبا کی کرتے ہیں۔

آپ کی مدد کے لیے، اس کتاب میں موجود سبھی مسائل یا سوالات کو ایک مخصوص علامت (؟) کے ذریعے نشان زد کیا گیا ہے۔ یہ علامت کلاس میں مسئلہ حل کرنے اور دریافت کے عمل کو شروع کرنے کے ممکنہ موقع کی نشان دہی کرتی ہے۔ کچھ مسائل کو 'ریاضی بات چیت' (Math Talk) سے نام زد کیا گیا ہے۔ ان سوالات کو خاص طور پر کلاس روم میں بحث کے موضوعات کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔

درسی کتاب میں اہم ریاضیاتی عمل، سوچنے کے طریقے اور مسئلہ حل کرنے کے انداز کو اجاگر کرنے کے لیے مختلف مقامات پر الو کے میسکاٹ (Mascot) کو دکھایا گیا ہے۔ انھیں جماعت میں بحث کے دوران اجاگر کیا جاسکتا ہے، چاہے وہ موقع ہو جہاں الو موجود ہو یا کوئی اسی طرح کی صورت حال ہو۔

طلبا میں تصورات کے تعین، حسابی سوچ اور فہم پیدا کرنے کے لیے کافی تعداد میں مسائل دیے گئے ہیں۔ ان سب کو حل کرنے کی کوشش اس قیمت پر نہیں ہونی چاہیے کہ ان سوالات کو حل کرنے اور ان پر بحث کرنے کے لیے طلبا کو معیاری وقت نہ ملے۔

یہ سمجھنا بہت اہم ہے کہ حقیقی مسائل صرف مسئلہ حل کرنے کی مہارتوں کو فروغ دینے کے لیے نہیں ہیں بلکہ جب طلبا تحقیق میں مشغول ہوتے ہیں تو یہ طریقۂ کار کی روانی کو مضبوط کرنے میں مدد دیتا ہے۔

طلبا کو خود مختار طالب علم بنانے کی کوشش بھی کی جانی چاہیے۔ اس کے لیے ایک اہم پہلو ہے ریاضیاتی متون کو پڑھنے اور سمجھنے کی صلاحیت۔ اس مہارت کو فروغ دینے کے لیے طلبا کی حوصلہ افزائی کی جانی چاہیے کہ وہ خود سے اور گروہوں میں کتاب کا مطالعہ کریں۔ مطالعے سے انھوں نے کیا اخذ کیا، اسے دوسروں کے سامنے پیش کرنے اور اس کی وضاحت کرنے کے مواقع فراہم کیجیے۔ اس سے وہ بڑی مشکل بھی حل ہوگی جس کا سامنا طلبا کو ریاضی کے متعلق گفتگو کرنے اور لفظی مسائل کو سمجھنے میں کرنا پڑتا ہے۔

اس کتاب میں کئی غیر مشروط سوالات شامل ہیں۔ اس کتاب میں کچھ تصوّرات کو سمجھنے کے نئے طریقے بھی شامل کیے گئے ہیں۔ اگر آپ ان میں سے کچھ فوری طور پر حل نہیں کر پا رہے ہیں یا ان تک رسائی حاصل نہیں کر پا رہے ہیں تو کوئی بات نہیں، ہر کوئی سب کچھ نہیں جانتا۔ ایسے مواد کو سمجھنے اور اس پر غور کرنے کے ساتھ ساتھ اسے کلاس روم میں لے جانا اور بحث کے لیے پیش کرنا کافی کارآمد ہوگا۔ ان مباحث کے بعد وہ چیزیں جو واضح ہیں اور جو ابھی تک غیر واضح ہیں، واضح طور پر ان کا خلاصہ پیش کیا جاسکتا ہے۔ یہ عمل خود ہی درسی مواد پر کافی روشنی ڈال سکتا ہے۔

ان مباحث کے دوران، آپ ایک رفیقِ جستجو کے طور پر حصہ لے سکتے ہیں اور جب طلبا ایک استاد کو کسی چیز کو سمجھنے کے لیے سوچتے اور جستجو کرتے ہوئے دیکھیں گے تو یہ ان کے لیے ایک بہترین مثال ہوگی۔

یہ امید کی جاتی ہے کہ آپ اور آپ کے طلبا اس کتاب کا استعمال کرتے ہوئے ایک بہترین اور کارآمد وقت گزاریں گے!

اہم نکات کا خلاصہ

دریافت کرنے کا وقت

1. طلبا کے سامنے باقاعدگی سے نئے مسائل، سوالات، پیٹرن اور چیلنج کو پیش کیا جائے اور انھیں ان کے ساتھ انفرادی طور پر یا گروپوں میں کھیلنے، ان پر بحث کرنے اور ان پر کام کرنے کے لیے مناسب وقت فراہم کیا جائے۔
2. اس وقفے کے دوران ایسا ماحول پیدا کرنا ضروری ہے جو غلطیوں کو قبول کرتا ہو اور سیکھنے میں ان کی اہمیت کو تسلیم کرتا ہو۔
3. ایک ایسا ماحول ہونا چاہیے جہاں طلبا ایک دوسرے کے سامنے مسائل پیش کریں اور ان مسائل تک رسائی کے لیے مختلف طریقوں پر ایک دوسرے کے ساتھ تبادلۂ خیال کریں۔

کتاب میں موجود مسائل کے بارے میں

1. کتاب میں موجود تحقیقی مسائل صرف مسئلہ حل کرنے کی صلاحیت کو فروغ نہیں دیتے ہیں؛ بلکہ ان کا مقصد یہ بھی ہے کہ جب بچے تحقیق میں مشغول ہوں تو ان کی عملی مہارت کو مضبوط بنایا جائے۔
2. کتاب میں شامل تمام مسائل کو 'حل' کرنے کی کوشش اس قیمت پر نہیں ہونی چاہیے کہ طلبا کو ان پر کھیلنے، بحث کرنے اور حل کرنے کے لیے مناسب وقت نہ مل سکے۔

پڑھنا

1. طلبا کو خود سے اور گروپوں میں کتاب پڑھنے کی ترغیب دیجیے۔
2. انھیں مواقع فراہم کیجیے کہ وہ جو پڑھتے ہیں اس کی تشریح کریں اور اسے دوسروں کے سامنے بیان کریں۔

نہ جاننے کا حق!

1. اگر کوئی مواد فوری طور پر سمجھ میں نہیں آتا ہے تو کوئی حرج نہیں۔ ایسے مواد کو سمجھنے اور اس پر غور کرنے کی کوشش کے ساتھ اسے کلاس روم میں لے جاکر بحث کے لیے بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔ اس بحث کے بعد، جو چیزیں واضح ہوں اور جو غیر واضح ہوں، ان کا خلاصہ پیش کیا جاسکتا ہے۔ ان مباحث کے دوران، آپ بھی ایک رفیقِ جستجو کے طور پر حصہ لے سکتے ہیں اور جب طلبا ایک استاد کو کسی چیز کو سمجھنے کے لیے سوچتے اور جستجو کرتے ہوئے دیکھیں گے تو یہ ان کے لیے ایک بہترین مثال ہوگی!
2. سیکھنا ایک مسلسل عمل ہے۔ درحقیقت ریاضی میں اب بھی بہت کچھ ہے جو نامعلوم ہے جس کے لیے مزید تحقیقات کی ضرورت ہے!

طلبا کے لیے نوٹ!

ریاضی کے فن کو سمجھنے کے لیے یہ کافی نہیں ہے کہ محض ایک تماشائی بنے رہیں۔ آپ کو اس عمل میں ہمہ تن مصروف ہونا ضروری ہے جس طرح ایک جاسوس کسی راز کو حل کرنے کے دوران حرکت میں رہتا ہے۔

یہ خاص طور پر اس وقت درکار ہے جب آپ کوئی نیا سوال دیکھیں یا جب کوئی سوال آپ کے حس کی فطرت سے پیدا ہو یا جب آپ کوئی نیا خوب صورت پیٹرن دیکھیں۔ جب آپ کو ایسے مواقع ملیں تو ذرا ٹھہر کر مطالعہ کیجیے اور اپنی تخلیقی صلاحیتوں کا استعمال کرتے ہوئے سوال کو حل کیجیے یا پیٹرن کو سمجھیے اور اس کی تعریف کیجیے۔

آپ کو معلوم ہو گا کہ بعض سوالات کے ساتھ ان کے جوابات بھی موجود ہیں۔ لیکن پھر بھی بہتر ہو گا کہ آپ جواب دیکھنے سے پہلے خود سے یا گروپ میں سوالات پر غور کریں اور حل کرنے کی کوشش کریں۔ اسی طرح آپ کے ذریعے کسی کتاب کا مطالعہ مزید مفید ہو گا!

جب بھی سوالات آپ کے سامنے آئیں گے تو آپ کو یہ شبیہ نظر آئے گی: (؟) یہ شبیہ اشارہ کرتی ہے کہ اب چیزوں پر غور کرنے کا وقت ہے!

کبھی کبھی آپ 'معلوم کیجیے' عنوان کے تحت بہت سے سوالات ایک ہی جگہ مجتمع پائیں گے۔

کچھ سوالات (ریاضی بات چیت) سے نشان زد ہیں۔ یہ سوالات اپنے دوستوں کے ساتھ مل کر اور بحث کر کے حل کرنے کے لیے ہیں۔

آخر میں، کچھ سوالات (کوشش کیجیے) سے نشان زد ہیں۔ یہ سوالات زیادہ تخلیقی سوچ کا تقاضا کرتے ہیں، اس لیے ان کے جوابات زیادہ دل چسپ ہو سکتے ہیں!

فہرست

پیش لفظ	iii
اس کتاب کے بارے میں	v
استاد کے لیے نوٹ	xi
طلبا کے لیے نوٹ	xv
باب 1	
ہمارے آس پاس کے بڑے اعداد	1
باب 2	
حسابی عبارات	24
باب 3	
ایک نظر نقطے سے پرے	46
باب 4	
حرفی اعداد کی مستعمل عبارات	81
باب 5	
متوازی اور متقاطع خطوط	106
باب 6	
عدد کا کھیل	127
باب 7	
تین متقاطع خطوط کی کہانی	146
باب 8	
کسری اعداد کے ساتھ کام کرنا	173
آموزشی مواد کے اوراق	200

4774CH01

1 ہمارے آس پاس کے بڑے اعداد

(LARGE NUMBERS AROUND US)

1.1 ایک لاکھ اقسام!



کرناٹک کے ایک قصبہ چنتامنی میں ایشور پاّ نام کا ایک کسان رہتا ہے۔ وہ اپنے دھان کے کھیت کے لیے بیج خریدنے کی غرض سے روزانہ بازار جاتا ہے۔ اسی طرح کے ایک دورے کے دوران اس نے رمنّا اور لکشمنّا کی گفتگو سنی۔ رمنّا نے کہا ”پہلے ہمارے ملک میں دھان کی ایک لاکھ قسمیں ہوا کرتی تھیں۔ کسان مختلف قسموں کے بیجوں کو محفوظ رکھا کرتے تھے اور انھیں دھان اگانے کے لیے استعمال کرتے تھے۔ اب ہمارے پاس صرف چند اقسام رہ گئی ہیں۔ نیز بیج خریدنے کے لیے کسانوں کو بھی بازار آنا پڑتا ہے۔“

لکشمنّا کہتی ہے ”میرے گھر کے قریب ایک بیج بینک ہے۔ اب تک انھوں نے مختلف جگہوں سے چاول کے بیجوں کی تقریباً سو مقامی اقسام جمع کی ہیں۔ آپ وہاں سے بھی بیج خرید سکتے ہیں۔“



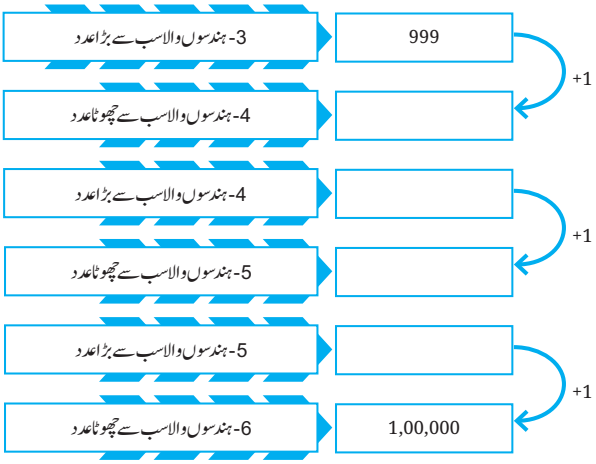
اس سے پہلے آپ نے لفظ ’لاکھ‘ تو سنا ہی ہوگا۔ کیا آپ جانتے ہیں ایک لاکھ کتنا بڑا ہوتا ہے؟ آیئے ہم معلوم کرتے ہیں۔

ایشور پّا نے یہ واقعہ اپنی بیٹی روکسی اور بیٹے ایسٹو کو سنایا۔

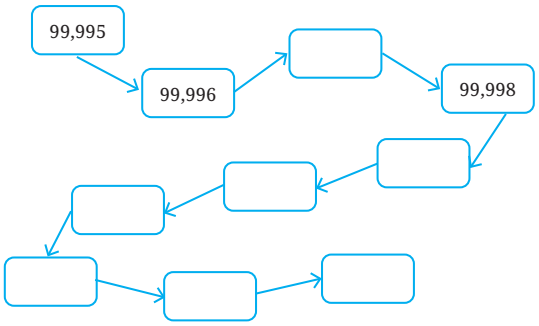
ایسٹو کو یہ جان کر حیرت ہوئی کہ اس ملک میں چاول کی تقریباً ایک لاکھ قسمیں ہوا کرتی تھیں۔ اس نے حیران ہو کر پوچھا ”ایک لاکھ! اب تک میں نے تو صرف 3 قسمیں ہی چکھی ہیں۔ اگر ہم ہر دن ایک نئی قسم کا ذائقہ لیں تو کیا ہم سو سال کی زندگی میں تمام اقسام کو چکھنے کے قریب بھی پہنچ پائیں گے۔“

آپ کا کیا خیال ہے؟ اندازہ لگایئے۔

لیکن ایک لاکھ کتنا ہوتا ہے؟ پیٹرن کا مشاہدہ کیجیے اور ذیل میں دیے گئے خانوں کو بھریے۔



1,00,000 کو "ایک لاکھ" پڑھا جاتا ہے۔







روکسی اور ایسٹو نے پایا کہ اگر وہ ایک دن میں چاول کی ایک قسم کھائیں تو وہ پوری زندگی میں ایک لاکھ کے آس پاس بھی نہیں پہنچ پائیں گے۔ روکسی مشورہ دیتی ہے، "کیا ہوگا اگر ہم روزانہ 2 قسموں کے چاول کھائیں تو؟ کیا ہم سو سال میں ایک لاکھ قسم کے چاول کھا سکیں گے؟"

اگر کوئی شخص روزانہ 3 قسموں کے چاول کھاتا ہے تو کیا وہ 100 سال کی زندگی میں ایک لاکھ اقسام کے چاول کے ذائقے کا لطف اٹھا پائے گا؟ پتہ لگائیے۔

ایسٹو کہتا ہے "ہم جانتے ہیں کہ ایک سال میں کتنے دن ہوتے ہیں — 365، اگر ہم لون سال (Leap Year) کو نظر انداز کر دیں تو۔ اگر ہم y سالوں تک زندہ رہتے ہیں تو ہماری زندگی میں کل دنوں کی تعداد ہوگی $365 \times y$۔"

y کے لیے کوئی ایک عدد چُن لیجیے۔ y کے لیے آپ کے چُنے ہوئے عدد کے مطابق y سالوں میں دنوں کی تعداد ایک لاکھ کے کتنے قریب ہوگی؟

معلوم کیجیے

1. 2011 کی مردم شماری کے مطابق قصبہ چنتا منی کی آبادی تقریباً 75,000 تھی۔ 75,000 ایک لاکھ سے کتنا کم ہے؟
2. تخمینہ کے مطابق 2024 میں چنتامنی کی آبادی 1,06,000 ہے۔ 1,06,000 ایک لاکھ سے کتنا زیادہ ہے؟
3. سال 2011 سے 2024 تک چنتا منی کی آبادی میں کل کتنا اضافہ ہوا؟

بڑے اعداد کا احساس

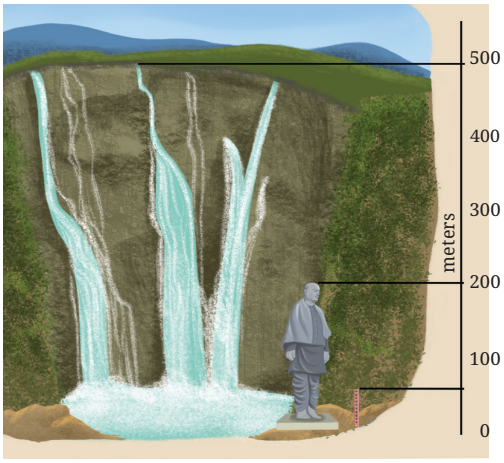


آپ اس طرح کے دل چسپ حقائق سے واقف ہوں گے:

- دنیا کا سب سے اونچا مجسمہ 'مجسمہ اتحاد' (Statue of Unity) ہے، جو گجرات میں ہے اور وہ سردار ولبھ بھائی پٹیل کا مجسّمہ ہے۔ اس کی اونچائی تقریباً 180 میٹر ہے۔
- کہا جاتا ہے کہ کرناٹک میں کنچیکل (Kunchikal) آبشار تقریباً 450 میٹر کی اونچائی سے گرتا ہے۔

یہ سمجھنا ہمیشہ آسان نہیں ہوتا ہے کہ کوئی پیمائش کتنی بڑی ہے۔ لیکن جب ہم ان کا موازنہ کسی جانی پہچانی چیز سے کرتے ہیں تو ان کا اندازہ بہتر طور پر ہو جاتا ہے۔ آیئے ایک مثال سے اسے سمجھتے ہیں۔

بائیں طرف دی ہوئی تصویر کو دیکھیے۔ سوموہ 1 میٹر لمبا ہے۔ اگر اس عمارت کی ہر ایک منزل سوموہ کی لمبائی سے چار گنا زیادہ ہے تو عمارت کی اونچائی تقریباً کتنی ہوگی؟



کون سی چیز زیادہ اونچی ہے — مجسمۂ اتحاد یا یہ عمارت؟ کتنی زیادہ اونچی ہے؟

_____ میٹر۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مجسمۂ اتحاد کی اونچائی سوموہ کی عمارت کی اونچائی سے تقریباً 4 گنا ہے۔

کنچیکل آبشار سوموہ کی عمارت سے کتنا اونچا ہے؟

_____ میٹر۔

سوموہ کی عمارت میں کتنی منزلیں اور ہونی چاہیے تاکہ وہ آبشار جتنی اونچی ہو جائے؟

_____۔

کیا ایک لاکھ بہت بڑا عدد ہے؟



ایشور پّا نے روکسی اور ایسٹو سے پوچھا ''ایک لاکھ بڑا عدد ہے یا چھوٹا؟''

روکسی کو لگتا ہے کہ 1 لاکھ ایک بڑا عدد ہے:

- ''ہمارے پاس چاول کی ایک لاکھ قسمیں تھیں — جو کہ بہت زیادہ ہے۔''
- ''1 لاکھ دن جینے کا مطلب ہے 274 سال تک جینا — جو کہ واقعی ایک طویل مدت ہے!''
- ''اگر 1 لاکھ لوگ کندھے سے کندھا ملا کر ایک صف میں کھڑے ہوتے ہیں تو وہ 38 کلو میٹر کی دوری تک پھیل سکتے ہیں۔''

تاہم ایسٹو کا خیال ہے کہ یہ اتنا بڑا نہیں ہے:

- ''کیا آپ جانتے ہیں کہ احمد آباد کے کرکٹ اسٹیڈیم میں ایک لاکھ سے زیادہ لوگوں کے بیٹھنے کی گنجائش ہے۔ اتنی چھوٹی جگہ میں 1 لاکھ لوگ!''
- ''زیادہ تر انسانوں کے سر پر 80,000 سے 1,20,000 تک بال ہوتے ہیں — تصور کیجیے کہ اتنی چھوٹی سی جگہ میں ایک لاکھ بال فٹ ہو گئے ہیں۔''



- ''میں نے سنا ہے کہ مچھلیوں کی کچھ اقسام ایسی ہیں جن میں ایک مادہ مچھلی ایک ساتھ بہت آرام سے ایک لاکھ انڈے دے سکتی ہے۔ کچھ تو ایک وقت میں دس لاکھ انڈے بھی دیتی ہیں۔''

آپ ایک لاکھ کو کیسے دیکھتے ہیں — ایک لاکھ بڑا عدد ہے یا چھوٹا؟

اعداد کو پڑھنا اور لکھنا

ہم پہلے ہی ہندوستانی مقامی قدری نظام (Indian Place Value System) میں 5 ہندسوں والے اعداد جیسے 45,830 کے لیے سکتہ (Comma) کا استعمال کرتے آ رہے ہیں۔ جیسے جیسے اعداد بڑے ہوتے جاتے ہیں اسی حساب سے سکتوں کا استعمال کرنے سے اعداد کو پڑھنے میں سہولت ہوتی ہے۔ ہم ہندسوں کے درمیان ''دس ہزار'' اور ''ایک لاکھ'' کی جگہ کو ظاہر کرنے کے لیے سکتہ کا استعمال کرتے ہیں۔ جیسا کہ آپ نے پہلے دیکھا ہے (1,00,000)

عدد 12,78,830 کو لفظوں میں لکھا جائے تو یہ بارہ لاکھ اٹھہتّر ہزار آٹھ سو تیس ہو گا۔

اسی طرح، عدد 15,75,000 کو لفظوں میں لکھا جائے تو یہ پندرہ لاکھ پچہتّر ہزار ہو گا۔

مندرجہ ذیل اعداد کو لفظوں میں لکھیے:

(a) 3,00,600
(b) 5,04,085
(c) 27,30,000
(d) 70,53,138

مندرجہ ذیل فقروں کو ہندوستانی مقامی قدری نظام کے مطابق عدد کی صورت میں لکھیے:

(a) ایک لاکھ تیئس ہزار چار سو چھپن

(b) چار لاکھ سات ہزار سات سو چار

(c) پچاس لاکھ پانچ ہزار پچاس

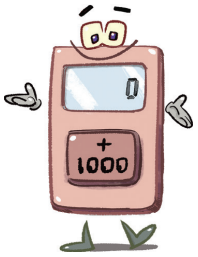
(d) دس لاکھ دو سو پینتیس

نوٹ برائے اساتذہ: طلبا کو ان حقائق کے مابین ربط پیدا کرنے کی ترغیب دیجیے۔ مثال کے طور پر، کیا چنتا منی کی پوری آبادی اسٹیڈیم میں سما سکتی ہے؟ کیا ہم اس میں 38 کلومیٹر ایسی لمبی قطار کا تصور کر سکتے ہیں جس میں ایک لاکھ لوگ ایک دوسرے کے آگے پیچھے بیٹھے ہوں؟

1.2 دہائیوں کی دنیا (Land of Tens)

دہائیوں کی دنیا میں مخصوص بٹن والے خاص تحسیب کار (Calculators) ہوتے ہیں۔

1. **مفکر ہزاری** (Thoughtful Thousands) تحسیب کار میں 1000+ کا صرف ایک بٹن ہے۔ نیچے دیے گئے اعداد کو دکھانے کے لیے اسے کتنی مرتبہ دبانا ہوگا:



(a) تین ہزار؟ تین مرتبہ

(b) 10,000؟ _____

(c) ترپن ہزار؟ _____

(d) 90,000؟ _____

(e) ایک لاکھ؟ _____

(f) 153؟ _____ مرتبہ

(g) ایک لاکھ بنانے کے لیے کتنے ہزار درکار ہیں؟

2. **دبنگ دہائی** (Tedious Tens) تحسیب کار میں 10+ کا صرف ایک بٹن ہے۔ نیچے دیے گئے عدد کو دکھانے کے لیے اسے کتنی مرتبہ دبانا ہوگا:



(a) پانچ سو؟ _____

(b) 780؟ _____

(c) 1000؟ _____

(d) 3700؟ _____

(e) 10,000؟ _____

(f) ایک لاکھ؟ _____

(g) 435؟ _____ مرتبہ

3. **شاندار سیکڑے** (Handy Hundreds) تحسیب کار میں 100+ کا صرف ایک بٹن ہے۔ نیچے دیے گئے اعداد کو دکھانے کے لیے کتنی مرتبہ اس بٹن کو دبانا ہوگا:



(a) چارسو؟ _____ مرتبہ

(b) 3,700؟ _____

(c) 10,000؟ _____

(d) ترپن ہزار؟ _____

(e) 90,000 ؟ _____

(f) (97,600 ؟ _____

(g) 1,00,000؟ _____

(h) 582؟ _____ مرتبہ

(i) دس ہزار حاصل کرنے کے لیے کتنے سیکڑوں کی ضرورت ہے؟

(j) ایک لاکھ حاصل کرنے کے لیے کتنے سیکڑوں کی ضرورت ہے؟

(k) شاندار سیکڑے تحسیب کار کہتا ہے، "کچھ اعداد ایسے ہیں جو دبنگ دہائی تحسیب کار نہیں دکھا سکتا لیکن میں دکھا سکتا ہوں" کیا یہ بیان درست ہے؟ سوچیے اور دریافت کیجیے۔



4. **چالاک چٹّی** ایک الگ قسم کا تحسیب کار ہے اس میں درج ذیل بٹن ہیں:

+1, +10, +100, +1000, +10000, +100000 +1000000

اس کے پاس ہمیشہ کام کرنے کے کئی طریقے ہوتے ہیں۔ "ایسا کیسے؟" آپ پوچھ سکتے ہیں۔ عدد 321 حاصل کرنے کے لیے یہ 10+ کو بتّیس مرتبہ اور 1+ کو ایک مرتبہ دباتا ہے۔ کیا اسے 321 حاصل ہوگا؟ یا پھر یہ 100+ کو دو مرتبہ، 10+ کو بارہ مرتبہ اور 1+ کو ایک مرتبہ دبا سکتا ہے۔

5. 5072 حاصل کرنے کے کئی طریقوں میں سے دو مندرجہ ذیل ہیں:

(a) (50×100) + (7×10) + (2×1) = 5072

(b) (3×1000) + (20×100) + (72×1) = 5072

? 5072 حاصل کرنے کے لیے مختلف طریقہ تلاش کیجیے اور اس کی حسابی عبارت لکھیے۔

? **معلوم کیجیے**

نیچے دیے ہوئے ہر عدد کے لیے بٹن دبانے کے طریقۂ کار کے ذریعے نمبر حاصل کرنے کی کم از کم دو مختلف حسابی عبارتیں لکھیے۔ چٹّی کی طرح سوچیے اور چالاک بنیے۔

بٹن	5072	
+10,00,000		
+1,00,000		
+10,000		
+1,000		3
+100	50	20
+10	7	
+1	2	72

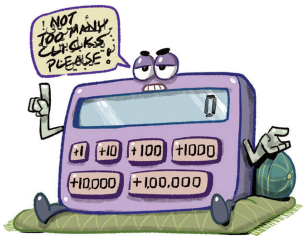
(a) 8300
(b) 40629
(c) 56354
(d) 66666
(e) 367813

چالاک چٹّی (Creative chitti) کے پاس آپ کے لیے کچھ سوالات ہیں —

(a) آپ کو ٹھیک 30 مرتبہ بٹن دبانا ہے۔ 3– ہندسوں والا سب سے بڑا عدد کیا ہے جو آپ حل کر سکتے ہیں؟ 3– ہندسوں والا سب سے چھوٹا عدد کیا ہے جو آپ حل کر سکتے ہیں؟

(b) 25 مرتبہ بٹن دبا کر 997 حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یا آپ کسی اور تعداد میں بٹن دبا کر 997 حاصل کر سکتے ہیں؟

خوب سوچ کر آپ اس طرح کے سوال بنائیے اور اپنے ہم جماعتوں سے پوچھ کر انھیں چیلنج کیجیے۔



منظم سپّی (Systematic Sippy) ایک مختلف قسم کا تحسیب کار ہے۔ اس میں درجہ ذیل بٹن ہیں:

+1+10,+100, +1000, +10000,+100000

یہ چاہتا ہے کہ اسے استعمال کرتے ہوئے کم سے کم بٹن دبائے جائیں۔

ہم کم سے کم بٹن دبا کر اعداد (a) 5072 (b) 8300 کیسے حاصل کر سکتے ہیں؟

معلوم کیجیے کہ کون سے بٹن کتنی مرتبہ دبانے ہوں گے تاکہ جدول میں دیے گئے مطلوبہ اعداد حاصل ہوسکیں۔ مقصد ہے کم سے کم بٹن دبائے جائیں۔

یہاں ایک طریقہ ہے جس سے 5072 حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقے میں مجموعی طور پر 23 مرتبہ بٹن دبایا جاتا ہے۔

کیا کوئی اور طریقہ ہے جس سے 5072 کو 23 سے کم مرتبہ بٹن دبا کر حاصل کیا جاسکے؟ اس کی حسابی عبارت لکھیے۔

بٹن	5072
+10,00,000	
+1,00,000	
+10,000	
+1,000	5
+100	0
+10	6
+1	12

معلوم کیجیے

1. پچھلی مشق میں دیے گئے اعداد کے لیے معلوم کیجیے کہ کم سے کم بٹن دبا کر ہر عدد کو کیسے حاصل کیا جاسکتا ہے اور ان کی حسابی عبارت لکھیے۔
2. آپ کو ہر عدد اور اس کے کم سے کم بٹن دبانے کی تعداد کے درمیان کوئی تعلق نظر آتا ہے؟
3. آپ غور کریں تو کم سے کم بٹن دبانے میں ہندوستانی مقامی قدری نظام بھی جھلکتا ہے۔ سوچیے ایسا کیوں ہے؟

ریاضی بات چیت

اگر ہم دس مرتبہ 10,00,000+ کے بٹن دباتے ہیں تو کیا ہوگا؟ کون سا عدد آئے گا؟ اس میں کتنے صفر ہوں گے؟ اسے ہم کیا نام دیں گے؟ یہ 100 لاکھ ہوگا جسے **ایک کروڑ** بھی کہا جاتا ہے۔ 1 کروڑ 1,00,00,000 ایسے لکھا جاتا ہے— اس میں 1 کے بعد سات صفر ہوتے ہیں۔

1.3 کروڑوں اور صرف کروڑوں کی باتیں!

درج ذیل جدول میں کچھ اعداد ہندستانی مقامی قدری نظام اور کچھ امریکی مقامی قدری نظام (بین الاقوامی مقامی قدری نظام) کے مطابق دیے گئے ہیں۔ دونوں نظاموں میں اعداد کو الفاظ میں لکھنے اور سکتہ لگانے کے طریقے کا مشاہدہ کیجیے۔

ہندوستانی عددی نظام		امریکی عددی نظام	
1,000	ایک ہزار	1,000	ایک ہزار
10,000	دس ہزار	10,000	دس ہزار
1,00,000	ایک لاکھ	100,000	سو ہزار
10,00,000	دس لاکھ	1,000,000	ایک ملین
1,00,00,000	ایک کروڑ	10,000,000	دس ملین
10,00,00,000	دس کروڑ	100,000,000	سو ملین
1,00,00,00,000	ایک ارب یا سو کروڑ	1,000,000,000	ایک بلین

نوٹ کیجیے کہ ہندستانی نظام میں سکتہ ہندسوں کو...3-2-2-2 کی ترتیب میں دائیں سے بائیں (ہزار، لاکھ، کروڑ وغیرہ) کے حساب سے لگائے جاتے ہیں۔ امریکی نظام میں سکتہ کی ترتیب اس طرح ...3-3-3-3 ہے۔ ہر تین ہندسوں کے بعد دائیں سے بائیں (ہزار، ملین، بلین، وغیرہ)۔

بھوٹان، نیپال، سری لنکا، پاکستان، بنگلہ دیش، مالدیپ، افغانستان اور میانمار میں بھی ہندوستانی نظام ہی استعمال ہوتا ہے۔ لاکھ اور کروڑ سنسکرت کے الفاظ لکش (लक्ष) اور کوٹی (कोटि) سے آئے ہیں۔ امریکی نظام بھی کئی ممالک میں استعمال ہوتا ہے۔

ایک لاکھ اور ایک کروڑ میں صفر کی تعداد کا مشاہدہ کیجیے۔

1 لاکھ کو ہندسوں میں لکھیں تو 1 کے بعد 5 صفر ہوتے ہیں۔

ایک کروڑ کو ہندسوں میں لکھیں تو 1 کے بعد 7 صفر ہوتے ہیں۔

ایک لاکھ ایک ہزار کا سو گنا ہے، ایک کروڑ ایک لاکھ کا سو گنا ہے۔ اور ایک ارب ایک کروڑ کا سو گنا ہوتا ہے۔ (یعنی سو ہزار 1 لاکھ ہے، 100 لاکھ 1 کروڑ ہے اور 100 کروڑ 1 ارب ہے)۔

? ایک ہزار لاکھ میں کتنے صفر ہوتے ہیں؟ ____

سو ہزار میں کتنے صفر ہوتے ہیں؟ ____

عدد 9876501234 کو سکتہ لگا کر آسانی سے پڑھا جاسکتا ہے:

(a) 9,87,65,01,234 ← 9 ارب 87 کروڑ 65 لاکھ 1 ہزار 234 یا 987 کروڑ 65 لاکھ 1 ہزار 234 (ہندوستانی عددی نظام میں)۔

(b) 9,876,501,234 ← 9 بلین 876 ملین 501 ہزار 234 (امریکی عددی نظام میں)۔

معلوم کیجیے

1. درج ذیل اعداد کو ہندوستانی مقامی قدری نظام کے مطابق پڑھیے اور ہندوستانی و امریکی عددی نظام کے مطابق ان کو لفظوں میں لکھیے:

(a)	4050678	(b)	48121620
(c)	20022002	(d)	246813579
(e)	345000543	(f)	1020304050

2. مندرجہ ذیل اعداد کو ہندستانی مقامی قدری نظام کے مطابق ہندسوں میں لکھیے:

(a) ایک کروڑ ایک لاکھ ایک ہزار دس

(b) ایک بلین ایک ملین ایک ہزار ایک

(c) دس کروڑ بیس لاکھ تیس ہزار چالیس

(d) نو بلین اسّی ملین سات سو ہزار چھ سو

3. موازنہ کیجیے اور '>'، '<' یا '=' کا استعمال کیجیے:

(a) 30 ہزار ____ 3 لاکھ

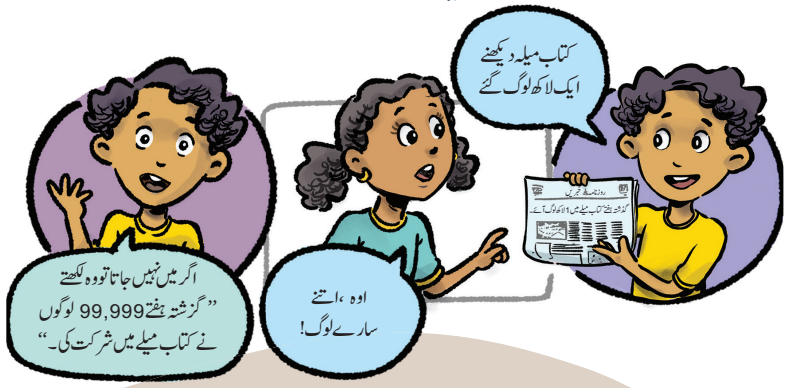
(b) 500 لاکھ ____ 5 ملین

(c) 800 ہزار ____ 8 ملین

(d) 640 کروڑ ____ 60 ملین

ہم بعد کے درجات میں اس سے بڑے اعداد کے بارے میں جانیں گے۔

1.4 قطعی درست اور تخمینی قدریں (Exact and Approximate Values)



اس گفتگو کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا آپ نے ایسی سرخیاں یا بیانات پڑھے یا سنے ہیں؟

اکثر، قطعی درست اعداد کی ضرورت نہیں ہوتی ہے صرف ایک تخمینہ (اندازہ) کافی ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 2011 کی مردم شماری کے مطابق چنتامنی قصبے کی آبادی 76,068 ہے۔ اس کے بجائے یہ کہنا کہ آبادی تقریباً 75000 ہے تو یہ تخمینہ لگانے کے لیے کافی ہے کہ تعداد کتنی بڑی ہے۔



کچھ حالات میں اعداد کو **اوپر کی طرف بڑھانا** (Round up) درست ہوتا ہے۔ (اوپر کی طرف بڑھانے کا مطلب ہے کہ تخمینے والا عدد اصل عدد سے زیادہ ہے۔) مثال کے طور پر، اگر کسی اسکول میں طلبا، اساتذہ اور عملہ سمیت کل 732 افراد ہیں، تو پرنسپل 700 مٹھائیوں کے بجائے 750 مٹھائیاں منگوا سکتا ہے۔

کچھ حالات میں اعداد کو **نیچے کی طرف گھٹانا** (Round down) بہتر ہوتا ہے۔ (نیچے کی طرف گھٹانے کا مطلب ہے کہ تخمینے والا عدد اصل عدد سے کم ہے۔) مثال کے طور پر، اگر کسی چیز کی قیمت ₹470 ہے تو دکان دار یہ کہنے کے بجائے کہ اس کی قیمت تقریباً ₹500 ہے، وہ یہ کہہ سکتا ہے کہ یہ تقریباً ₹450 کی ہو گی۔

سوچیے اور ان حالات کے بارے میں بتائیے جہاں مناسب ہو گا (a) اوپر کی طرف بڑھانا (b) نیچے کی طرف بڑھانا (c) اوپر یا نیچے دونوں میں سے کسی ایک طرف بڑھانا ٹھیک ہو گا (d) جب قطعی درست اعداد کی ضرورت ہو۔

قریب ترین پڑوسی اعداد

بڑے اعداد کے تعلق سے یہ جاننا سود مند ہوتا ہے کہ ان میں ہزار، لاکھ یا کروڑ کے قریب تر کون سا ہے۔ مثال کے طور پر، عدد 6,72,85,183 کے قریب ترین پڑوسی اعداد نیچے جدول میں دکھائے گئے ہیں۔

قریب ترین ہزار	6,72,85,000
قریب ترین دس ہزار	6,72,90,000
قریب ترین لاکھ	6,73,00,000
قریب ترین دس لاکھ	6,70,00,000
قریب ترین کروڑ	7,00,00,000

? اسی طرح، ان اعداد کے پانچ قریب ترین پڑوسی لکھیے:

(a) 3,87,69,957

(b) 29,05,32,481

? میرے پاس ایک عدد ہے جس کے تمام پانچ قریب ترین پڑوسی 5,00,00,000 ہیں۔ وہ عدد کیا ہو سکتا ہے؟ ایسے کتنے اعداد ہو سکتے ہیں؟

ریاضی بات چیت

روکسی اور ایسٹو سادہ عبارات کی قدر کا تخمینہ لگا رہے ہیں۔

1. 4,63,128 + 4,19,682

روکسی: ”حاصل جمع تقریباً 8,00,000 کے قریب ہے اور 8,00,000 سے زیادہ ہے۔“

ایسٹو: ”حاصل جمع 9,00,000 کے قریب ہے اور 9,00,000 سے کم ہے۔“

(a) کیا یہ اندازے درست ہیں؟ کس کا اندازہ حاصل جمع کے قریب ہے؟

(b) کیا حاصل جمع 8,50,000 سے زیادہ ہوگا یا کم؟ آپ کو ایسا کیوں لگتا ہے؟

(c) کیا حاصل جمع 8,83,128 سے زیادہ ہوگا یا کم؟ آپ کو ایسا کیوں لگتا ہے؟

(d) 4,63,128 + 4,19,682 کی قطعی درست قدر = _____ ہے۔

2. 14,63,128 – 4,90,020

روکسی: ”فرق تقریباً 10,00,000 کے قریب ہے اور 10,00,000 سے کم ہے۔“

ایسٹو: ”فرق تقریباً 9,00,000 کے قریب ہے اور 9,00,000 سے زیادہ ہے۔“

(a) کیا یہ تخمینے درست ہیں؟ کس کا تخمینہ فرق کے زیادہ قریب ہے؟

(b) کیا فرق 9,50,000 سے زیادہ ہوگا یا کم؟ آپ کو ایسا کیوں لگتا ہے؟

(c) کیا فرق 9,63,128 سے زیادہ ہوگا یا کم؟ آپ کو ایسا کیوں لگتا ہے؟

(d) 14,63,128 – 4,90,020 کی قطعی درست قدر = _____ ہے

اساتذہ کے لیے نوٹ: طلبا سے اس طرح کے سوالات پوچھیے جیسے "اگر حاصل جمع 8,50,000 سے کم ہو تو اعداد کیا ہو سکتے ہیں؟"

شہروں کی آبادی

مندرجہ ذیل جدول میں کچھ ہندوستانی شہروں کی آبادی کا مشاہدہ کیجیے۔

درجہ	شہر	آبادی (2011)	آبادی (2001)
1	ممبئی	1,24,42,373	1,19,78,450
2	نئی دہلی	1,10,07,835	98,79,172
3	بینگلورو	84,25,970	43,01,326
4	حیدرآباد	68,09,970	36,37,483
5	احمد آباد	55,70,585	35,20,085
6	چنئی	46,81,087	43,43,645
7	کلکتہ	44,86,679	45,72,876
8	سورت	44,67,797	24,33,835
9	وڈودرا	35,52,371	16,90,000
10	پُونے	31,15,431	25,38,473
11	جے پور	30,46,163	23,22,575
12	لکھنؤ	28,15,601	21,85,927
13	کان پور	27,67,031	25,51,337
14	ناگ پور	24,05,665	20,52,066

15	اندور	19,60,631	14,74,968
16	تھانے	18,18,872	12,62,551
17	بھوپال	17,98,218	14,37,354
18	وشاکھاپٹنم	17,28,128	13,45,938
19	پِمپری۔چنچواڑ	17,27,692	10,12,472
20	پٹنہ	16,84,222	13,66,444

? جدول میں دی ہوئی معلومات کی روشنی میں مندرجہ ذیل سوالات کا اندازہ لگا کر جواب دیجیے:

1. آپ کا اس ڈاٹا کے بارے میں عمومی مشاہدہ کیا ہے؟ کلاس کو بتائیے۔
2. اوپر دیے گئے جدول کے لیے مناسب عنوان کیا ہے؟
3. 2011 میں پُونے کی آبادی کتنی تھی؟ 2001 کے مقابلے میں تقریباً اس میں کتنا اضافہ ہوا؟
4. 2001 اور 2011 کے درمیان کس شہر کی آبادی میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا؟
5. کیا ایسے شہر ہیں جن کی آبادی تقریباً دوگنی ہوگئی؟ وہ کون سے ہیں؟
6. ہمیں پٹنہ کی آبادی کو کس عدد سے ضرب دینا چاہیے تاکہ وہ عدد یا آبادی کی تعداد مل سکے جو ممبئی کی آبادی کے قریب ترین ہو۔

1.5 حاصل ضرب میں پیٹرن

روکسی اور ایسٹو ضرب کے ساتھ کھیل رہے ہیں وہ کسی عدد کو 10, 100, 1000 وغیرہ سے ضرب کرنے کی ایک دل چسپ تکنیک کا مشاہدہ کر رہے ہیں۔

ضرب کا شارٹ کٹ طریقہ (A Multiplication Shortcut)

روکسی نے 116×5 کو اس طرح حل کیا:

$$116 \times 5 = \cancel{116}^{58} \times \frac{10}{\cancel{2}}$$
$$= 58 \times 10$$
$$= 580$$

ایسٹو نے 824×25 کو اس طرح حل کیا:

$$824 \times 25 = \cancel{824}^{206} \times \frac{100}{\cancel{4}} = 20600$$

ریاضی بات چیت

ضرب اور تقسیم کے معنی کو پوری طرح سمجھتے ہوئے، کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہے کہ کسی عدد کو 5 سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسا 2 سے تقسیم کر کے 10 سے ضرب دینا؟

معلوم کیجیے

1. ان حاصل ضرب کا تیزی سے حساب لگانے کے طریقے تلاش کیجیے:

(a) $2 \times 1768 \times 50$

(b) 72×125 [**اشارہ:** $125 = \frac{1000}{8}$]

(c) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

4. ان حاصل ضرب کا تیزی سے حساب لگائیے۔

(a) $25 \times 12 =$ _____

(b) $25 \times 240 =$ _____

(c) $250 \times 120 =$ _____

(d) $2500 \times 12 =$ _____

(e) _____ × _____ = 120000000

حاصل ضرب کتنا لمبا ہے؟

ذیل کے ہر خانے میں دیے گئے ضرب کے حاصل ضرب دل چسپ اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان کا جائزہ لیجیے تاکہ ان کے پیٹرن کا اندازہ ہو سکے۔ مشاہدہ کی بنیاد پر ضرب کے عمل کو آگے بڑھائیے۔

$11 \times 11 =$ $111 \times 111 =$ $1111 \times 1111 =$	$66 \times 61 =$ $666 \times 661 =$ $6666 \times 6661 =$
$3 \times 5 =$ $33 \times 35 =$ $333 \times 335 =$	$101 \times 101 =$ $102 \times 102 =$ $103 \times 103 =$

؟ ضرب کیے جانے والے دو اعداد، ان کے ہندسوں اور حاصل ضرب کے ہندسوں کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا ان اعداد کے ہندسوں کی تعداد اور ان کے حاصل ضرب کے ہندسوں کی تعداد کے درمیان کوئی تعلق ہے؟

؟ روکسی کا کہنا ہے کہ 2 ہندسوں والے دو اعداد کا حاصل ضرب 3 یا 4 ہندسوں والا عدد ہی ہو سکتا ہے۔ کیا وہ صحیح ہے؟

؟ کیا ہمیں یہ معلوم کرنے کے لیے کہ روکسی کا دعویٰ درست ہے یا نہیں، تمام ممکنہ 2 ہندسوں والے دو اعداد کو ضرب کر کے دیکھنا چاہیے۔ یا یہ معلوم کرنے کا کوئی اور بہترین طریقہ ہے؟



وہ اپنی منطق یوں سمجھاتی ہے: ”ہم یہ جاننا چاہتے ہیں کہ دو ہندسوں والے دو اعداد کے حاصل ضرب میں کتنے ہندسے ہوں گے؟ سب سے چھوٹے ایسے حاصل ضرب کو جاننے کے لیے میں نے 10×10 لیا تاکہ تمام حاصل ضرب 100 سے زیادہ ہوں۔

اسی طرح سب سے بڑے ایسے حاصل ضرب کو جاننے کے لیے میں نے سب سے چھوٹے 3 ہندسوں والے دو اعداد کو ضرب کیا (100×100) تو 10,000 حاصل ہوا؛ اس لیے تمام 2 ہندسوں والے دو اعداد کا حاصل ضرب 10,000 سے کم ہوگا۔“

؟ کیا ایک 3 ہندسوں والے عدد کو دوسرے 3 ہندسوں والے عدد سے ضرب کرنے پر 4 ہندسوں کا عدد مل سکتا ہے؟

؟ کیا ایک 4 ہندسوں والے عدد کو 2 ہندسوں والے عدد سے ضرب کرنے پر 5 ہندسوں کا عدد مل سکتا ہے؟

؟ ذیل میں دیے ہوئے ضرب کے بیانات کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا آپ کو کوئی پیٹرن نظر آتا ہے؟ دیکھیے کہ کیا یہ پیٹرن دوسرے اعداد کے لیے بھی استعمال ہو سکتے ہیں۔

1-ہندسہ	×	1-ہندسہ	=	1-ہندسہ	یا	2-ہندسہ	
2-ہندسہ	×	1-ہندسہ	=	2-ہندسہ	یا	3-ہندسہ	
2-ہندسہ	×	2-ہندسہ	=	3-ہندسہ	یا	4-ہندسہ	
3-ہندسہ	×	3-ہندسہ	=	5-ہندسہ	یا	6-ہندسہ	
5-ہندسہ	×	5-ہندسہ	=		یا		
8-ہندسہ	×	3-ہندسہ	=		یا		
12-ہندسہ	×	13-ہندسہ	=		یا		

بڑے اعداد کے بارے میں دل چسپ حقائق

بڑے اعداد سے متعلق کچھ دل چسپ حقائق نیچے چھُپے ہوئے ہیں۔ حقائق سے پردہ اٹھانے کے لیے حاصل ضرب یا حاصل تقسیم کا حساب لگائیے۔ جب آپ کو حاصل ضرب یا حاصل تقسیم مل جائے تو ہندوستانی اور امریکی نظام کے مطابق اعداد کو پڑھیے۔ ہر عدد کی دریافت کے بعد اس کے بارے میں اپنے ہم جماعتوں کو اپنے خیالات اور سوالات بتائیے۔



1250 × 380

روایتوں کے مطابق یہ ان کیرتنوں کی تعداد ہے جو پُراندرداس (Purandaradāsa) نے تخلیق کیا۔ وہ 15ویں صدی کے ایک گلوکار اور موسیقار تھے۔ ان کے کیرتنوں نے سماجی اصلاح، بھکتی اور روحانیت کو فروغ دیا۔ انھوں نے کرناٹک موسیقی کی تدریس اور سیکھنے کے طریقے کو منظّم کیا، جس پر آج بھی عمل کیا جاتا ہے۔



اتنے زیادہ گانے بنانے کے لیے وہ کتنے سال تک زندہ رہے ہوں گے؟ انھوں نے کس عمر میں گانا بنانا شروع کیا؟ اگر انھوں نے 4,75,000 گانے بنائے تو اس حساب سے انھوں نے ہر سال کتنے گانے بنائے؟

2100 × 70,000

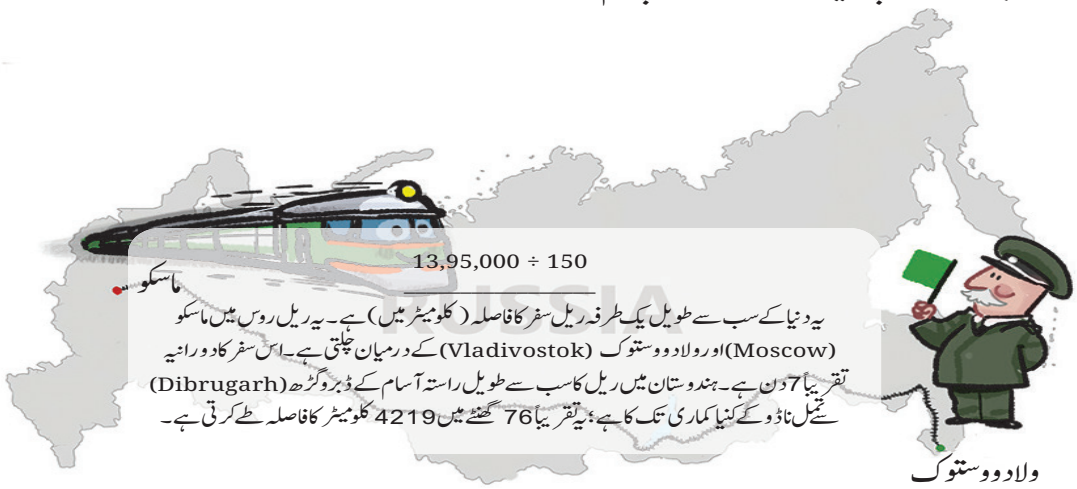
یہ زمین اور سورج کے درمیان کا فاصلہ کلومیٹر میں اندازے کے مطابق تحریر کیا گیا ہے۔ یہ فاصلہ سال بھر بدلتا رہتا ہے۔ سب سے زیادہ فاصلہ تقریباً 152 ملین کلومیٹر ہے۔



6400 × 62,500

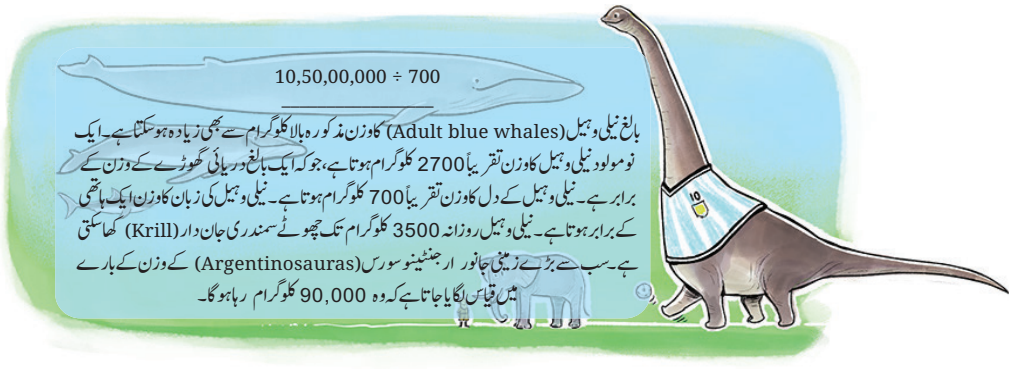
یہ اوسط مقدار لیٹر میں، اس پانی کی ہے جو ایمیزون دریا (Amazon river) سے ہر سیکنڈ میں بحر اوقیانوس (Atlantic Ocean) میں گرتا ہے۔
بحر اوقیانوس میں دریا کا بہاؤ اتنا زیادہ ہوتا ہے کہ پینے کے قابل تازہ میٹھا پانی کھلے سمندر میں 160 کلومیٹر کی دوری تک بھی پایا جاتا ہے۔

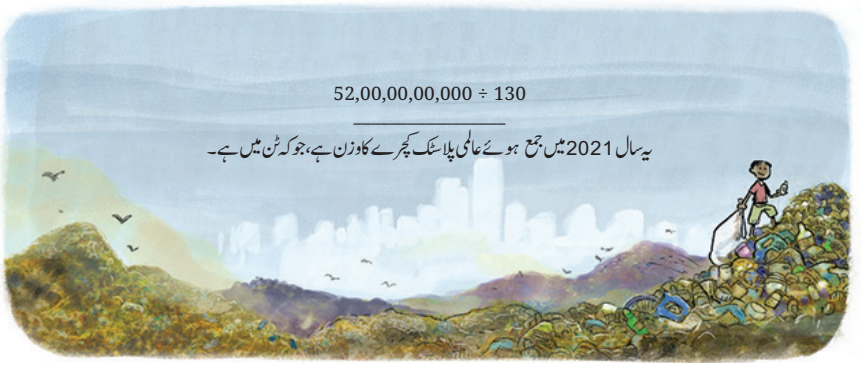
پہلے کی طرح نیچے دیے گئے اعداد کو تقسیم کیجیے تاکہ دل چسپ حقائق ظاہر ہوں۔ جب آپ ہر عدد کو معلوم کر لیں تو اس کے بارے میں اپنے خیالات اور سوالات اپنے ہم جماعت کو بتائیں۔



13,95,000 ÷ 150

یہ دنیا کے سب سے طویل یک طرفہ ریل سفر کا فاصلہ (کلومیٹر میں) ہے۔ یہ ریل روس میں ماسکو (Moscow) اور ولادووستوک (Vladivostok) کے درمیان چلتی ہے۔ اس سفر کا دورانیہ تقریباً 7 دن ہے۔ ہندوستان میں ریل کا سب سے طویل راستہ آسام کے ڈبروگڑھ (Dibrugarh) سے تمل ناڈو کے کنیا کماری تک کا ہے؛ یہ تقریباً 76 گھنٹے میں 4219 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔





بڑے اعداد کی حقیقت

ایک گرام صحت مند مٹی میں تقریباً 100 ملین سے 1 بلین بیکٹیریا اور 1 لاکھ سے 10 لاکھ پھپھوندیاں ہوسکتی ہیں جو پودوں کی نشوونما اور صحت کو بڑھاتی ہیں۔

اس طرح کے بڑے اعداد والے حقائق جس سے آپ واقف ہیں، ان کے بارے میں اپنے ہم جماعت کو بتائیے۔

1.6 کیا آپ نے کبھی سوچا...؟

ایسٹو بڑے عدد کے دل چسپ حقائق کو جان کر حیران ہوجاتا ہے۔ ان کے بارے میں غور و فکر کرتے ہوئے اس کے دماغ میں ایک انوکھا سوال آتا ہے۔ ”کیا ممبئی کی پوری آبادی کو ایک لاکھ بسوں میں بٹھایا جاسکتا ہے؟“

آپ کا کیا خیال ہے؟

ہم کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

فرض کیجیے کہ ایک بس میں 50 افراد بیٹھ سکتے ہیں۔ تو پھر 1 لاکھ بسوں میں 1 لاکھ × 50 = 50 لاکھ افراد بیٹھ سکتے ہیں۔

ممبئی کی کل آبادی 1 کروڑ 24 لاکھ سے زیادہ ہے (جیسا کہ ہم یہ پہلے ایک جدول میں دیکھ چکے ہیں) اس لیے ممبئی کی پوری آبادی ایک لاکھ بسوں میں نہیں بیٹھ سکتی۔

آر ایم ایس ٹائٹینک (RMSTitanic) جہاز میں تقریباً 2500 مسافر سوار تھے۔ کیا ممبئی کی آبادی کو ایسے 5000 جہازوں میں بٹھایا جاسکتا ہے؟



اس انوکھے سوال سے متاثر ہوکر روکسی نے سوچا "اگر میں روزانہ 100 کلومیٹر سفر کروں، تو کیا میں 10 سالوں میں چاند تک پہنچ سکتی ہوں؟" (زمین اور چاند کے درمیان 3,84,400 کلومیٹر کا فاصلہ ہے۔)

وہ ایک سال میں کتنا سفر طے کرے گی؟

وہ دس سال میں کتنا سفر طے کرے گی؟

ان حسابات کو اگر مرحلہ وار انجام دیا جائے تو کیا یہ آسان نہیں ہوگا؟ آپ یہ طریقہ تمام بڑے حسابات کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

معلوم کیجیے کہ اگر آپ روزانہ 1000 کلومیٹر کا سفر طے کریں تو کیا زندگی بھر سفر کرتے رہنے کے بعد آپ سورج تک پہنچ سکتے ہیں؟ (آپ نے گزشتہ مشق میں زمین اور سورج کے درمیان کا فاصلہ لکھا تھا۔)

معقول ضروری مفروضات کے ساتھ درج ذیل سوالوں کے جوابات دیجیے:

(a) اگر کسی کاغذ کے ایک ورق کا وزن 5 گرام ہو تو کیا آپ ایک ہی وقت میں ایک لاکھ کاغذ کے اوراق اٹھا سکتے ہیں؟

(b) اگر دنیا بھر میں ایک منٹ میں 250 بچے پیدا ہوتے ہوں تو کیا ایک دن میں 10 لاکھ بچے پیدا ہوں گے؟

(c) کیا آپ ایک دن میں 1 ملین سِکّے گن سکتے ہیں؟ فرض کیجیے آپ ہر ایک سیکنڈ میں 1 سکّہ گن سکتے ہیں۔

اس طرح کے مزید دل چسپ سوالات سوچیے اور اپنے ہم جماعتوں کو بتائیے۔

معلوم کیجیے

1. 0 سے 9 تک کے سبھی ہندسے صرف ایک مرتبہ استعمال کرتے ہوئے 10 ہندسوں والا ایک عدد بنائیے اور لکھیے (واضح رہے کہ پہلا ہندسہ 0 نہیں ہوسکتا)۔

(a) 5 کا سب سے بڑا ضعف (Multiple)

(b) سب سے چھوٹا جفت عدد (Even number)

2. 10,30,285 کو الفاظ میں لکھا جائے تو یہ بنتا ہے دس لاکھ تیس ہزار دو سو پچاسی (Ten Lakh Thirty Thousand Two Hundred Eighty Five)، جس میں انگریزی کے 41 حروف ہیں۔ ایسا 7 ہندسوں والا عدد بنائیے جس کو الفاظ میں لکھنے پر سب سے زیادہ حروف استعمال ہوں۔

3. ایسا 9 ہندسوں والا عدد لکھیے جس کے کسی بھی دو ہندسوں کا تبادلہ کرنے سے ایک بڑا عدد بنے۔ ایسے کتنے اعداد ہو سکتے ہیں؟

4. عدد 123451234512345123451234 میں سے کوئی بھی 10 ہندسے کاٹ دیجیے تاکہ جو عدد باقی بچے وہ ممکنہ حد تک سب سے بڑا ہو۔

5. الفاظ 'zero' اور 'one' میں 'e' اور 'o' دونوں حرف آئے ہیں۔ الفاظ 'one' اور 'two' میں حرف 'o' مشترک ہے اور 'two' اور 'three' میں حرف 't' مشترک ہے۔ تو آپ کو کتنے عدد تک گنتی کرنی ہوگی تاکہ آپ کو ایسے مسلسل دو عدد ملیں جس میں کوئی انگریزی حرف مشترک نہ ہو۔

کوشش کیجیے

6. فرض کیجیے کہ آپ 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10, 11,... تمام اعداد لکھتے جا رہے ہیں تو دسواں ہندسہ جو آپ لکھیں گے وہ '1' اور گیارہواں ہندسہ '0' ہے جو کہ عدد 10 کا حصہ ہے۔

کوشش کیجیے

(a) ہزارواں (1000th) ہندسہ کیا ہوگا؟ یہ کس نمبر پر آئے گا؟

(b) کس نمبر پر دس لاکھواں ہندسہ ہوگا؟

(c) آپ نے پانچ ہزارویں (5000th) مرتبہ '5' ہندسہ کب لکھا ہوگا؟

7. ایک تخمیب کار میں صرف '10,000+' اور '100+' کے بٹن ہیں۔ درج ذیل اعداد کو حاصل کرنے کے لیے کتنی بار کس بٹن کو دبانا پڑے گا، اس کی وضاحت کرنے والی ایک حسابی عبارت لکھیے:

(a) 20, 800

(b) 92,100

(c) 1, 20, 500

(d) 65,30, 000

(e) 70, 25,700

8. کتنے لاکھ سے ایک ارب (billion) بنتا ہے؟

9. آپ کو عددی کارڈ کے دو سیٹ دیے گئے ہیں جن میں 1 سے 9 تک کی گنتی لکھی ہوئی ہے۔ نیچے دیے گئے ہر ڈبے میں ایک عددی کارڈ رکھیے جس سے آپ کو دونوں اعداد کا (a) سب سے بڑا ممکنہ حاصل جمع (b) سب سے چھوٹا ممکنہ حاصل تفریق مل سکے۔



10. آپ کو کچھ عددی کارڈ دیے گئے ہیں؛
4000,13000,300,70000,150000,20,5 آپ ان کارڈوں کا استعمال کر کے درج ذیل اعداد کے جتنا قریب ہو سکے پہنچیے، آپ کوئی بھی عمل یعنی، جمع، تفریق، ضرب، تقسیم اپنی پسند کے مطابق کر سکتے ہیں۔ لیکن یہ دھیان رہے کہ ایک مخصوص عدد بنانے کے لیے ہر کارڈ کو صرف ایک بار ہی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(a) 1,10,000: قریب ترین عدد جو میں بنا سکا وہ ہے:

4000×(20+5)+13000 = 1,13,000

(b) 2,00,000:

(c) 5,80,000:

(d) 12,45,000:

(e) 20,90,800:

11. معلوم کیجیے کہ مجسمۂ اتحاد کے برابر کی اونچائی تک پہنچنے کے لیے کتنے سکّے ایک دوسرے پر رکھنے ہوں گے؟ فرض کیجیے کہ ہر ایک سکے کی موٹائی ایک ملی میٹر ہے۔



12. سرمئی سر والے بہت دور تک پرواز کرنے والے البتروس (Albatrosses) پرندوں کے پروں کا پھیلاؤ تقریباً 7 فٹ چوڑا ہوتا ہے۔ وہ کئی سمندروں کے مہاجر پرندوں کے طور پر جانے جاتے ہیں۔ البتروس روزانہ تقریباً 900-1000 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ ان کا سب سے طویل ترین ایک طرفہ سفر تقریباً 12000 کلومیٹر درج ہوا ہے۔ بحرالکاہل (Pacific Ocean) کو پار کرنے میں اس طرح کے ایک طرفہ سفر میں تقریباً کتنے دن لگیں گے؟

13. لمڈھینگ (bar-tailed godwit) نامی پرندہ بغیر رکے سب سے طویل پرواز کے لیے جانا جاتا ہے۔ اس نے الاسکا (Alaska) سے آسٹریلیا (Australia) تک 13560 کلومیٹر کا سفر بغیر رُکے طے کیا۔ اس کا سفر 13 اکتوبر 2022 کو شروع ہوا تھا اور تقریباً 11 دن تک جاری رہا بتائیے کہ اس نے اندازاً ہر روز کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا۔ بتائیے کہ اس نے تقریباً ہر گھنٹے میں کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

14. گنجے عقاب کو زمین کی سطح سے 4500 سے 6000 میٹر تک اونچی پرواز کرنے کے لیے جانا جاتا ہے۔ ماؤنٹ ایورسٹ تقریباً 8850 میٹر بلند ہے، ہوائی جہاز 10,000 سے 12,800 میٹر کی بلندی تک پرواز کر سکتے ہیں۔ یہ اونچائیاں سوموکی عمارت کے مقابلے میں کتنی زیادہ ہیں؟



خلاصہ

- ہم نے بڑے اعداد — جیسے لاکھ، کروڑ، ارب؛ ملین اور بلین کے بارے میں معلومات حاصل کیں۔ ہم نے یہ بھی سیکھا کہ ہندوستانی اور امریکی/بین الاقوامی نظام عدد میں ان اعداد کو کیسے پڑھا اور لکھا جاتا ہے۔
  (a) 1 لاکھ وہ عدد ہے جس میں 1 کے بعد 5 صفر آتے ہیں: 1,00,000
  (b) 1 کروڑ وہ عدد ہے جس میں 1 کے بعد 7 صفر آتے ہیں: 1,00,00,000
  (c) 1 ملین وہ عدد ہے جس میں 1 کے بعد 6 صفر آتے ہیں: 1,000,000 (اس کو دس لاکھ بھی کہتے ہیں)
  (d) ایک ارب وہ عدد ہے جس میں 1 کے بعد 9 صفر آتے ہیں: 1,00,00,00,000 (اس کو 100 کروڑ یا ایک بلین بھی کہتے ہیں)
- ہم عام طور پر بڑے اعداد کو اوپر کی طرف بڑھا کر یا نیچے کی طرف گھٹا کر لکھتے ہیں۔ کئی مرتبہ صرف یہ جاننا کافی ہوتا ہے کہ کوئی چیز کتنی بڑی یا کتنی چھوٹی ہے؟
- بڑے اعداد یا مقداروں کا اندازہ لگانے کے لیے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ وہ زیادہ مانوس اعداد کے مقابلے میں کتنے گنا بڑے ہیں۔
- ہم نے اعداد کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کا طریقہ بھی سیکھا تاکہ ضرب کا عمل آسان ہو سکے اور ضرب کو آسان بنانے کے لیے ان کی نئی گروپ بندی کر کے دوبارہ گروپ کیسے کیا جائے۔
- ہم نے غور و فکر پر مبنی دل چسپ تجربات بھی کیے جیسے کہ ”کیا کوئی شخص ایک سال میں 1000 فلمیں دیکھ سکتا ہے؟“



پہیلی بوجھیں!

تیلیوں سے بنے ہندسے

ہم ہندسوں کو ذیل میں دی گئی تصویر کی طرح لکھ سکتے ہیں:



آپ یا تو خلال یا ماچس کی تیلیوں کا استعمال کر سکتے ہیں یا صرف تیلیوں کی نمائندگی لکیروں سے کرتے ہوئے، اس طرح ہندسوں کو لکھ سکتے ہیں۔

ہندسہ 7 بنانے کے لیے تین تیلیوں کی ضرورت ہوتی ہے۔

عدد 5108 بنائیے یا لکھیے۔ اس کے لیے کل کتنی تیلیوں کی ضرورت ہوگی؟

1. عدد 42,019 بنائیے یا لکھیے۔ اس کے لیے کل 23 تیلیوں کی ضرورت ہوگی۔
2. 42,019 سے شروع کرتے ہوئے ایک یا دو مزید تیلیاں جوڑ کر ایک بڑا عدد بنائیے۔ اس کی ایک مثال 42,078 ہے۔ اس طرح آپ عدد 42,019 سے بڑے کون کون سے اعداد بنا سکتے ہیں؟
3. پریتم '4'، '2'، '0'، '1' اور '9' ہندسوں کے درمیان '1' کا ہندسہ ڈالنا چاہتا ہے۔ وہ '1' کو کہاں رکھے تاکہ سب سے بڑا ممکنہ عدد حاصل ہو سکے؟
4. ہندسہ '1' لگا کر وہ اور کون کون سے اعداد بنا سکتا ہے؟

1. عدد 63,890 کو بنائیے یا لکھیے۔
2. 63,890 سے شروع کرتے ہوئے، صرف چار تیلیوں کو کسی دوسری ترتیب میں رکھ کر اس سے ایک بڑا عدد بنائیے۔ اس کی ایک مثال 88,078 ہے۔ اس طرح آپ 63,890 سے بڑے اور کون کون سے اعداد بنا سکتے ہیں؟

1. صرف 24 تیلیوں یا لکیروں کا استعمال کرتے ہوئے کوئی بھی عدد بنائیے۔
2. 24 تیلیوں یا لکیروں کا استعمال کرتے ہوئے سب سے بڑا عدد کون سا بنایا جا سکتا ہے؟
3. 24 تیلیوں یا لکیروں کا استعمال کرتے ہوئے سب سے چھوٹا عدد کون سا بنایا جا سکتا ہے؟

اپنے خود کے سوالات تیار کیجیے اور ایک دوسرے کو چیلنج کیجیے۔



2

حسابی عبارات
(ARITHMETIC EXPRESSIONS)

4774CH02

2.1 آسان عبارات

آپ نے اس طرح کے ریاضیاتی فقرے دیکھے ہوں گے جیسے کہ 2+13، 4 – 20، 5×12 اور 3÷18 ایسے فقروں کو **حسابی عبارات** کہا جاتا ہے۔

ہر حسابی عبارت کی ایک قدر ہوتی ہے جو کہ ایک عدد کے ذریعے دکھائی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر عبارت 2 + 13 کی قدر 15 ہے۔ اس عبارت کو '13 جمع 2' یا '13 اور 2' کا جمع پڑھا جاسکتا ہے۔

ہم حسابی عبارت اور اس کی قدر کے بیچ کے رشتے کو دکھانے کے لیے '=' کے نشان کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

13+2=15

مثال 1: ملّیکا اسکول میں دوپہر کے کھانے کے لیے 25 روپے روزانہ خرچ کرتی ہے۔ کل رقم جو وہ پورے ہفتے سوموار سے جمعہ تک خرچ کرتی ہے اس کے لیے ایک حسابی عبارت لکھیے۔

کل رقم کی حسابی عبارت ہوگی: 5×25

5×25 کا مطلب ہے " 25 کا 5 گنا" یا " 5 اور 25 کا حاصل ضرب۔"

مختلف عبارات کی قدر ایک جیسی ہوسکتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک عدد ہے 12۔ اس عدد کو کن ہی دو اعداد اور چاروں حسابی عمل +، –، × اور ÷ میں سے کسی ایک کا استعمال کر کے کئی طرح سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جیسے:

10 + 2, 15 – 3, 3 × 4, 24 ÷ 2

یہ چاروں عبارات عدد 12 کو ظاہر کرتی ہیں، لیکن مختلف طریقے سے۔

اپنا ایک پسندیدہ عدد منتخب کیجیے اور اس کی قدر کو دکھانے کے لیے مختلف ممکن حسابی عبارات لکھیے۔

عبارات کا موازنہ

جس طرح ہم اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے "="، "<" اور ">" کی علامتوں کا استعمال کرتے ہیں، اسی طرح ہم عبارات کا بھی موازنہ کر سکتے ہیں۔ ہم عبارتوں کا موازنہ ان کی قدر کی بنیاد پر کرتے ہیں اور اس کے مطابق "برابر"، "اس سے بڑا" یا "اس سے چھوٹا" کی علامتوں کا مناسب استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر

10 + 2 > 7 + 1

کیوں کہ 12 = 2 + 10 کی قدر 8=1+7 کی قدر سے زیادہ ہے۔

اسی طریقے سے

13 – 2 < 4 × 3.

معلوم کیجیے

1. ’=‘ کے نشان کے دونوں جانب عبارات کو برابر کرنے کے لیے خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

(a) 13 + 4 = ____ + 6 (b) 22 + ____ = 6 × 5

(c) 8 × ____ = 64 ÷ 2 (d) 34 – ____ = 25

2. مندرجہ ذیل عبارات کو صعودی ترتیب (بڑھتی ہوئی قدر) میں رکھیے۔

(a) 67 – 19 (b) 67 – 20

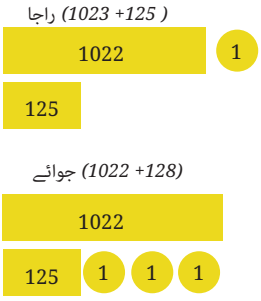
(c) 35 + 25 (d) 5 × 11

(e) 120 ÷ 3

مثال 2: کون بڑا ہے؟ 125 + 1023 یا 128+1022؟

ایک ایسی صورت حال کا تصور کیجیے جو قدروں کو تلاش کیے بغیر اس کا جواب دینے میں ہماری مدد کرسکتی ہے۔

راجا کے پاس 1023 کنچے تھے اور آج اسے 125 کنچے اور مل گئے ۔ اب اس کے پاس 1023+125 کنچے ہیں۔ جوائے کے پاس 1022 کنچے تھے اور آج اسے 128 کنچے اور مل گئے۔ اب اس کے پاس 128 + 1022 کنچے ہیں۔ کس کے پاس زیادہ کنچے ہیں؟

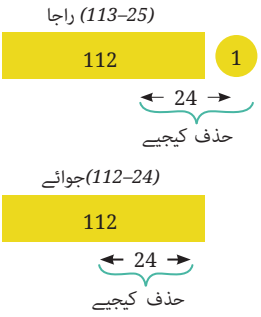


اس صورت حال کو بائیں جانب دی گئی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ شروع میں راجا کے پاس جوائے سے ایک کنچا زیادہ تھا لیکن آج جوائے کو راجا سے 3 کنچے زیادہ ملے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اب جوائے کے پاس راجا سے 2 کنچے زیادہ ہیں۔ وہ ایسے

1023 + 125 < 1022 + 128

مثال 3: کون بڑا ہے؟ 25 – 113 یا 24 – 112؟

ایک ایسی صورت حال کا تصوّر کیجیے جس میں راجا کے پاس 113 کنچے تھے اور اس نے ان میں سے 25 کھو دیے۔ اب اس کے پاس 25 – 113 کنچے ہیں۔ جوائے کے پاس 112 کنچے تھے اور آج اس نے 24 کنچے کھو دیے۔ اب اس کے پاس 24 – 112 کنچے ہیں بتائیے اب کس کے پاس زیادہ کنچے بچے؟



راجا کے پاس جوائے سے ایک کنچا زیادہ تھا لیکن اس نے جوائے سے ایک کنچا زیادہ کھو دیا۔ اس لیے اب ان دونوں کے پاس کنچوں کی تعداد برابر ہے۔

113 – 25 = 112 – 24

؟ مندرجہ ذیل عبارات کا موازنہ کرنے کے لیے ہر ایک میں '>'، '<' یا '=' علامتوں کا استعمال کیجیے۔ کیا آپ اس کو پیچیدہ حساب کے بغیر کر سکتے ہیں؟ ہر معاملے میں اپنی سوچ کی وضاحت کیجیے۔

(a) 245 + 289 ☐ 246 + 285
(b) 273 – 145 ☐ 272 – 144
(c) 364 + 587 ☐ 363 + 589
(d) 124 + 245 ☐ 129 + 245
(e) 213 – 77 ☐ 214 – 76

2.2 پیچیدہ حسابی عبارتوں کو پڑھنا اور ان کی قدر معلوم کرنا

کبھی کبھی جب کسی عبارت کے ساتھ کوئی سیاق و سباق موجود نہ ہو تو اس کی قدر معلوم کرنے کے ایک سے زیادہ طریقے ہو سکتے ہیں۔ اس طرح کے معاملات میں ہمیں کچھ آلات اور اصولوں کی ضرورت ہوتی ہے، جس سے یہ واضح کیا جا سکے کہ اس عبارت کی قدر کیسے نکالی جائے۔

مندرجہ ذیل جملوں میں زبان سے ایک مثال پیش کی جا رہی ہے دیکھیے:



(a) جملہ: ''شالینی کھلونوں کے ساتھ ایک سہیلی کے پاس بیٹھی ہے۔''

مطلب: سہیلی کے پاس کھلونے ہیں اور شالینی اس کے پاس بیٹھی ہے۔



(b) جملہ: ''شالینی کھلونوں کے ساتھ، ایک سہیلی کے پاس بیٹھی ہے۔''

مطلب: شالینی کے پاس کھلونے ہیں اور وہ انھیں لے کر اپنی سہیلی کے پاس بیٹھی ہے۔

بغیر رموزِ اوقاف کے اس جملے کی دو مختلف طریقوں سے تشریح کی جا سکتی ہے۔

علامتِ سکتہ (،) کا مناسب استعمال بتاتا ہے کہ جملے کو کس طرح سمجھنا ہے۔

اب ہم ریاضی کی ایسی عبارتوں کو دیکھتے ہیں جس کی قدر کا اندازہ ایک سے زیادہ طریقوں سے لگایا جا سکتا ہے۔

؟ **مثال 4:** ملّیش (Mallesh) کھیل کے میدان میں 30 کنچے لے کر آیا۔ ارون کنچوں کی 5 تھیلیاں لے کر آیا، ہر ایک تھیلی میں 4 کنچے تھے۔ ملّیش اور ارون دونوں کتنے کنچے لے کر کھیل کے میدان میں آئے؟

ملّیش نے حسابی عبارت کے ذریعے اس کو مختصر طور پر یوں لکھا—

$30 + 5 \times 4$

اس عبارت کا پس منظر جانے بغیر پورنا نے اس عبارت کی قدر 140 نکالی، اس نے پہلے 5 اور 30 کو جمع کر کے 35 حاصل کیا پھر 35 کو 4 سے ضرب دے کر 140 حاصل کیا۔

لیکن ملیش نے اس عبارت کی قدر 50 نکالی۔ اس نے پہلے 5 کو 4 سے ضرب دے کر 20 حاصل کیا اور پھر 20 کو 30 میں جمع کر کے 50 حاصل کیا۔

اس معاملے میں، ملیش صحیح ہے لیکن پورنا سے غلطی کیوں ہوئی؟

صرف عبارت $4 \times 5 + 30$ کو دیکھ کر یہ اندازہ نہیں ہوتا کہ ہمیں پہلے جمع کرنا چاہیے یا ضرب۔

جس طرح زبان میں الجھن کو دور کرنے کے لیے اوقاف کے نشانات استعمال کیے جاتے ہیں، اسی طرح ریاضی میں قوسین اور ارکان کے تصورات کا استعمال عبارتوں کی قدر کی الجھن دور کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

قوسین والی عبارات

عبارت — $4 \times 5 + 30$ — میں کنچے کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ہمیں پہلے 5 کو 4 سے ضرب دینا ہوگا اور پھر اس حاصل ضرب کو 30 کے ساتھ جمع کرنا ہوگا۔ عمل کی اس ترتیب کو قوسین کے استعمال کے ذریعے اس طرح واضح کیا جاتا ہے:

$$30 + (5 \times 4)$$

جب ہم کسی قوسین والی عبارت کا جائزہ لیتے ہیں تو سب سے پہلے قوسین کے اندر والی عبارت کی قدر معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ پھر دوسرے بچے ہوئے حسابی عمل کو انجام دینا ہوتا ہے۔ اس لیے، اوپر والی عبارت میں سب سے پہلے ہم 4×5 کی قدر معلوم کرتے ہیں۔ اس کے بعد اس میں 30 کو جمع کرتے ہیں۔ اس طرح یہ عبارت کنچوں کی تعداد کو بیان کرتی ہے:

$$30 + (5 \times 4) = 30 + 20 = 50$$

مثال 5: عرفان نے ₹15 میں بسکٹ کا ایک پیکٹ اور ₹56 میں توردال کا پیکٹ خریدا۔ اس نے دکان دار کو ₹100 دیے۔ ایک ریاضی عبارت لکھیے جو عرفان کو دکان دار سے واپس ملنے والی رقم کا حساب لگانے میں ہماری مدد کر سکے۔

عرفان نے ₹15 بسکٹ کے پیکٹ پر خرچ کیے اور ₹56 توردال پر۔ اس لیے کل رقم روپیہ میں $15 + 56$ ہوگی۔ اس نے دکان دار کو ₹100 دیے تو اسے 100 میں سے خرچ کی گئی کل رقم گھٹا کر واپس ملنی چاہیے۔ کیا ہم اس عبارت کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں—

$$100 - 15 + 56\,?$$

کیا ہم پہلے 100 میں سے 15 گھٹائیں اور پھر جو نتیجہ آئے اس میں 56 جوڑ دیں؟ تو اس طرح کرنے سے ہمیں 141 حاصل ہوگا۔ یہ بالکل غلط ہوگا کہ عرفان دکان دار کو دی گئی رقم سے زیادہ رقم حاصل کر لے!

اس معاملے میں ہم قوسین کا استعمال کر سکتے ہیں:

$$100 - (15 + 56)$$

سب سے پہلے ہم قوسین کے اندر والی عبارت کو حل کریں گے، تو ہمیں $71 - 100$ ملے گا۔ اب اس سے ہمیں 29 حاصل ہوگا۔ اس لیے، عرفان کو ₹29 واپس ملیں گے۔

عبارات میں ارکان

فرض کیجیے کہ ہمارے پاس ایک ایسی عبارت ہے جس میں کوئی قوسین نہیں ہے جیسے $4 \times 5 + 30$۔کیا اس کا کوئی مطلب نہیں نکلتا ہے؟

جب ہمارے پاس متعدد عمل والی عبارتیں ہوں اور ان پر عمل کرنے کی ترتیب قوسین کے ذریعے واضح نہ کی گئی ہو تو ہم عملوں کی ترتیب معلوم کرنے کے لیے ارکان کے اصول کو اپناتے ہیں۔

ارکان عبارت کے وہ حصے ہوتے ہیں جو علامت '+' سے جدا کیے گئے ہوں۔مثال کے طور پر، $7+12$ میں 12 اور 7 دو ارکان ہیں جن کی نشان دہی نیچے کی گئی ہے۔

$$12 + 7 = (12) + (7)$$

ہم اوپر کی طرح عبارت کے ہر رکن کو نشان زد کرتے رہیں گے۔یاد رکھیے کہ ارکان کو نشان زد کرنے کا یہ طریقہ عام طور پر استعمال نہیں ہوتا۔لیکن یہ اس وقت تک کیا جائے گا جب تک آپ اس تصور سے مانوس نہیں ہو جاتے۔

اب $14 - 83$ میں کون سے ارکان ہیں؟ ہم جانتے ہیں کہ کسی عدد کی تفریق کرنا اسی عدد کے جمع معکوس کو جوڑنے کے برابر ہے۔یاد کیجیے کہ دیے ہوئے عدد کا معکوس اسی عدد کے ساتھ مخالف علامت (نشان) لگا کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر، 14 کا جمع معکوس -14 ہے اور $14 -$ کا جمع معکوس 14 ہے۔اس طرح سے 83 میں سے 14 کی تفریق بالکل ویسا ہی ہے جیسے کہ 83 میں -14 کو جمع کرنا۔

$$83 - 14 = (83) + (-14)$$

اس طرح سے، عبارت $83-14$ کے ارکان 83 اور -14 ہیں۔

? جانچ کیجیے کہ اگر ہم تفریق کو جمع سے تبدیل کرتے ہیں تو کیا عبارت کی قدر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی؟ مختلف مثالیں لے کر دیکھیے۔

? کیا آپ اس بات کی وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایک عدد کی تفریق کرنا بالکل اس کے معکوس عدد کو جوڑنے کے برابر کیوں ہے۔جیسا کہ ہم نے درجہ 6 کی ریاضی کی کتاب میں ٹوکن ماڈل میں پڑھا تھا؟

عبارت میں موجود تمام تفریق اسی طرح جمع میں تبدیل کر دیے جاتے ہیں تا کہ ارکان کو پہچانا جا سکے۔

کوشش کیجیے

یہاں کچھ اور مثالیں پیش کی گئی ہیں جن میں ارکان دکھائے گئے ہیں:

$$-18 - 3 = (-18) + (-3)$$

$$6 \times 5 + 3 = (6 \times 5) + (3)$$

$$2 - 10 + 4 \times 6 = (2) + (-10) + (4 \times 6)$$

نوٹ کیجیے کہ 5×6 اور 6×4 واحد رکن ہیں کیوں کہ ان میں '+' کی علامت نہیں ہے۔مندرجہ ذیل جدول میں کچھ عبارات دی گئی ہیں۔ان کے مطابق جدول کو مکمل کیجیے۔

عبارات	رکنوں کے حاصل جمع کے طور پر عبارات	ارکان
13 – 2 + 6		13, – 2, 6
5 + 6 × 3	5 + 6 × 3	
4 + 15 – 9	◯ + ◯ + ◯	
23 – 2 × 4 + 16	◯ + ◯ + ◯	
28 + 19 – 8	◯ + ◯ + ◯	

اب ہم دیکھیں گے کہ کس طرح سے ارکان کا استعمال کرتے ہوئے کسی عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے ریاضیاتی اعمال کی ترتیب متعین کی جاتی ہے۔

ہم ایسی عبارت سے شروع کریں گے جن میں صرف جمع (اور تمام تفریق کو مناسب طریقے سے جمع میں بدلنے کے ساتھ) ہوں۔

کیا ارکان کو جمع کرنے کی ترتیب کو تبدیل کرنے سے عبارت کی قدر میں فرق آتا ہے؟

تبادلہ اور گروپ بندی

آیئے ہم ایک ایسی آسان عبارت منتخب کرتے ہیں جس میں صرف دو ارکان ہوں۔

مثال 6: مدھو اپنی چھت سے ایک ڈرون اڑا رہی ہے۔ ڈرون پہلے 6 میٹر اوپر جاتا ہے اور پھر 4 میٹر نیچے آجاتا ہے۔ ایک ایسی عبارت لکھیے جو یہ دکھائے کہ آخر میں ڈرون چھت سے کتنی اونچائی پر ہے۔

ڈرون 2 = 4 – 6 میٹر چھت سے اوپر ہے۔ اس کو ارکان کی جمع کے طور پر لکھا جاسکتا ہے:

6 + (– 4) = 2

کیا ارکان کا آپسی تبادلہ کرنے سے جواب بدل جائے گا؟

(– 4) + 6 = 2

اس صورت حال میں تو یہ جواب نہیں بدلا۔

ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ جب دو ارکان مثبت اعداد ہوں تو ارکان کا تبادلہ کرنے سے جواب نہیں بدلتا۔

کیا یہ اصول تب بھی درست رہے گا جب ارکان میں منفی عدد بھی شامل ہوں؟ کچھ مزید عبارتیں لے کر جانچ کیجیے اور تصدیق کیجیے۔

کوشش کیجیے

؟ کیا آپ ٹوکن ماڈل کے ذریعے اس کی وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہو رہا ہے (جیسا کہ ہم نے گریڈ 6 کی ریاضی کی درسی کتاب میں سیکھا تھا؟)

چنانچہ، جب کسی عبارت میں دو ارکان ہوں، تو ان کی جگہ بدلنے سے قدر پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔

رکن 1 + رکن 2 = رکن 2 + رکن 1

اب کوئی ایسی عبارت دیکھتے ہیں جس میں تین ارکان ہیں: (11 –) + 10 + (–7) اب ہم ان ارکان کو مندرجہ ذیل دو مختلف ترتیبوں میں جمع کر کے دیکھتے ہیں:

(–7 + 10) + (–11)

(پہلے دو ارکان کو جمع کرنے کے بعد ان کے حاصل جمع کو تیسرے رکن کے ساتھ جمع کرتے ہیں)

(–7) + (10 + (–11))

(آخری دو ارکان کو جوڑ کر ان کے حاصل جمع کو پہلے رکن کے ساتھ جمع کرتے ہیں)

اب آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ دونوں صورتوں میں حاصل جمع ایک ہی ہے۔

ہم پہلے سے ہی جانتے ہیں کہ جب ہم مثبت اعداد کو مندرجہ بالا دو طریقوں میں سے کسی ایک میں گروپ بندی کر کے جمع کرتے ہیں تو یکساں جواب حاصل ہوتا ہے۔

؟ کیا یہ اصول اس وقت بھی برقرار رہے گا جب کچھ ارکان میں منفی عدد بھی ہوں؟ مزید عبارات لے کر اس کی جانچ کیجیے۔

؟ کیا آپ صحیح اعداد کے ٹوکن ماڈل کے ذریعے اس کی وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہو رہا ہے؟ جیسا کہ ہم نے گریڈ 6 کی ریاضی کی درسی کتاب میں پڑھا تھا۔

اس طرح، عبارات کے ارکان کی گروپ بندی مندرجہ ذیل کسی ایک طریقے کو استعمال کر کے کی جاتی ہے تو ایک ہی قدر حاصل ہوتی ہے۔

(رکن 1 + رکن 2) + رکن 3 = رکن 1 + (رکن 2 + رکن 3)

آیئے اب ہم پھر سے عبارت (–11) + 10 + (–7) پر غور کرتے ہیں۔ کیا ہوتا ہے جب ہم ترتیب میں تبدیلی کرتے ہیں اور پہلے 7 – اور 11 – کی جمع کرتے ہیں، اس کے بعد حاصل جمع کو 10 کے ساتھ جمع کر دیتے ہیں؟ کیا اب بھی ہمیں وہی حاصل جمع ملے گا جو کہ پہلے ملا تھا؟

ہم دیکھتے ہیں کہ عبارت (–11) + (10) + (–7) کے ارکان کو کسی بھی ترتیب میں جمع کرتے ہیں تو 8– ہی حاصل ہوتا ہے۔

کیا کسی عبارت کے ارکان کو کسی بھی ترتیب میں جوڑنے پر یکساں حاصل جمع ملے گا؟ مزید عبارات لیجیے اور جانچ کیجیے۔ تین سے زیادہ ارکان والی عبارتوں کا بھی جائزہ لیجیے۔

کیا آپ صحیح اعداد کے ٹوکن ماڈل کے ذریعے اس کی وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہو رہا ہے جیسا کہ ہم نے گریڈ 6 کی ریاضی کی درسی کتاب میں پڑھا تھا؟

کوشش کیجیے

چنانچہ ارکان کو کسی بھی ترتیب میں جوڑنے پر وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

لہٰذا اگر کسی عبارت میں صرف جمع ہو تو ارکان کس ترتیب میں جوڑے جا رہے ہیں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا: سب کا حاصل جمع ایک ہی رہے گا۔

اب آیئے ہم ایسی عبارات پر غور کرتے ہیں جن میں قوسین کے ذریعے بتائی گئی کارروائیوں کی ترتیب کے بغیر ضرب اور تقسیم شامل ہوتی ہے۔ ایسی عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے سب سے پہلے ہر رکن کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ سبھی ارکان کی قدر معلوم کرنے کے بعد ان کو جمع کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر عبارت $30 + 5 \times 4$ کو مندرجہ ذیل طریقے سے حل کیا جاتا ہے:

$$30 + 5 \times 4 = \underset{30}{\bigcirc} + \underset{5 \times 4}{\bigcirc} = \underset{30}{\bigcirc} + \underset{20}{\bigcirc} = \underset{50}{\bigcirc}$$

عبارت $5 \times (3 + 2) + 7 \times 8 + 3$ کی قدر مندرجہ ذیل طریقے سے معلوم کی گئی ہے:

$$5 \times (3 + 2) + 7 \times 8 + 3 = \underset{5 \times (3 + 2)}{\bigcirc} + \underset{7 \times 8}{\bigcirc} + \underset{3}{\bigcirc}$$

یہاں پر پہلے $(2+3)$ کی قدر معلوم کی گئی ہے اور حاصل جمع کو 5 سے ضرب کر کے (25) حاصل کیا گیا۔

عبارت 8×7 کی قدر (56) ہے۔ اس کا حل $84 = 3 + 56 + 25$ ہے۔

1342
774
8611
9055
1022

منسا اعداد کی ایک لمبی فہرست جمع کرتی ہے۔ ان سب کی جمع کرنے میں وہ 5 منٹ لیتی ہے اور 11749 جواب حاصل کرتی ہے۔ اس کے بعد اس کو احساس ہوا کہ وہ چوتھے عدد 9055 کو شامل کرنا بھول گئی۔ کیا اسے صحیح حاصل جمع معلوم کرنے کے لیے دوبارہ شروع کرنا ہوگا؟

ریاضی میں ہم ''ارکان کو آپس میں بدلنے سے حاصل جمع نہیں بدلتا'' کہنے کے بجائے 'جمع کی **تقلیبی خاصیت** (Commutative Property of Addition)' کا جملہ استعمال کرتے ہیں۔ اسی طرح ''اعداد کو گروپ (قوسین) میں رکھنے سے بھی حاصل جمع نہیں بدلتا۔'' اسے 'جمع کی **تلازمی خاصیت** (Association Property of Addition)' کہا جاتا ہے۔

روزمرہ کی زندگی میں اشیا کا تبادلہ کرنا



منسا کھیلنے کے لیے باہر جا رہی ہے اس کی امی کہتی ہیں ''اپنی ٹوپی اور جوتے پہنو!'' اسے ان میں سے پہلے کیا پہننا چاہیے؟ وہ پہلے اپنی ٹوپی اور اس کے بعد جوتے پہن سکتی ہے۔ یا وہ پہلے اپنے جوتے اور اس کے بعد اپنی ٹوپی پہن سکتی ہے۔



منسا دونوں صورتوں میں بالکل یکساں دکھائی دے گی۔ مختلف صورت حال کا تصوّر کیجیے: منسا کی امی کہتی ہیں کہ ''اپنے موزے اور جوتے پہنو!'' اب

ترتیب اہمیت رکھتی ہے۔اسے پہلے موزے اور اس کے بعد جوتے پہننے چاہیے۔اگر وہ پہلے جوتے اور بعد میں موزے پہنتی ہے، تو منسا بہت بے آرامی محسوس کرے گی اور بہت مختلف نظر آئے گی۔

مزید عبارات اور ان کے ارکان

مثال 7: امو، چرن، مدھو اور جان ایک ہوٹل میں گئے اور انھوں نے چار ڈوسوں کا آرڈر دیا۔ ہر ڈوسے کی قیمت ₹23 اور ساتھ ہی وہ شکریہ کے طور پر ویٹر کو ₹ 5 انعام دینا چاہتے ہیں۔کل لاگت کی وضاحت کرتے ہوئے ایک عبارت لکھیے۔

چار ڈوسوں کی قیمت = 4×23

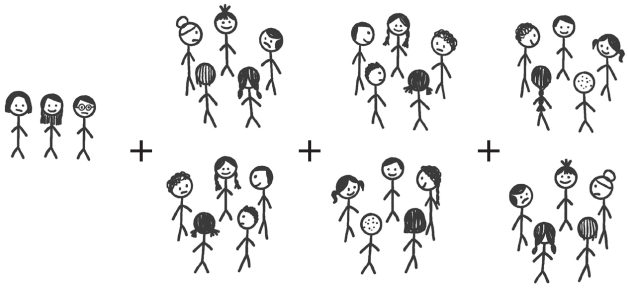
کیا ٹپ کے ساتھ کل رقم $4 \times 23 + 5$ لکھی جا سکتی ہے؟ اس کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے—

$4 \times 23 + 5 =$ (4 × 23) + (5) = (92) + (5) = (97)

اس طرح $4 \times 23 + 5$ اس عبارت کے لکھنے کا صحیح طریقہ ہے۔

اگر دوستوں کی کل تعداد 7 ہو جاتی ہے اور انعامی رقم وہی رہتی ہے، اب انھیں کتنی رقم ادا کرنی پڑے گی؟ اس صورت حال کے لیے ایک عبارت لکھیے اور اس کے ارکان کی پہچان کیجیے۔

مثال 8: ایک جماعت میں بچے کھیل رہے ہیں "پہاڑ پر آگ لگی ہے، بھاگو، بھاگو، بھاگو!" جب بھی استاد کوئی عدد پکارتا ہے تو طلبا کو اسی عدد کے گروپ میں خود کو ترتیب دینا ہوتا ہے۔ جو بھی پکارے گئے گروپ کا حصہ نہیں بنتا، وہ کھیل سے باہر ہو جاتا ہے۔



روبی آرام کرنا چاہتی تھی اس لیے ایک طرف بیٹھ کر ان کا کھیل دیکھنے لگی۔ دوسرے 33 طلبا جماعت میں کھیل کھیل رہے تھے۔

استاد نے "5" پکارا۔ جیسے ہی بچوں نے اپنی اپنی جگہ لے لی تو روبی نے لکھا

$6 \times 5 + 3$

(اس نے 6×5 سے 3 زیادہ سمجھا)

سوچیے اور تبادلۂ خیال کیجیے کہ اس نے یہ کیوں لکھا؟

عبارت ارکان کی جمع کی شکل میں اس طرح سے لکھی جاتی ہے—

$(6 \times 5) + (3)$

؟ نیچے دی گئی ہر صورت کے لیے ایک حسابی عبارت لکھیے اور ارکان کو پہچانیے:

اگر استاد نے "4" پکارا ہوتا تو روبی لکھتی _____

اگر استاد نے "7" پکارا تو روبی لکھتی _____

اپنے ہم جماعت ساتھیوں کی تعداد کے لیے اوپر کی طرح عبارت لکھیے۔

؟ **مثال 9:** رگھو نے تھوک بازار سے 100 کلوگرام چاول خریدا اور ان کو 2 کلوگرام کے تھیلوں میں بھر دیا۔ اس کے پاس پہلے سے 2 کلو کے 4 تھیلے تھے۔ اب اس کے پاس 2 کلوگرام والے چاول کے کتنے تھیلے ہیں؟ اس تعداد کے لیے ایک عبارت لکھیے اور ارکان کی پہچان کیجیے۔

اس کے پاس 4 تھیلے تھے۔ چاول کے 2 کلو کے نئے تھیلوں کی تعداد $100 \div 2$ ہے، جسے ہم $\frac{100}{2}$ کی شکل میں بھی لکھتے ہیں۔

اب اس کے پاس 2 کلو کے تھیلوں کی تعداد $\frac{100}{2} + 4$ ہے۔ اس عبارت کے ارکان ہیں—

4 + $\frac{100}{2}$

؟ **مثال 10:** کنّن کو ایک دکان دار کو 432 ₹ ادا کرنے ہیں۔ 1₹ اور 5₹ کے سکے اور 10₹، 20₹، 50₹ اور 100₹ کے نوٹ کا استعمال کرتے ہوئے وہ یہ ادائیگی کس طرح سے کر سکتا ہے؟

اس کے لیے ایک سے زیادہ امکانات ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$432 = 4 \times 100 + 1 \times 20 + 1 \times 10 + 2 \times 1$$

مطلب: 100 ₹ کے 4 نوٹ، 20 ₹ کا 1 نوٹ، 10 ₹ کا 1 نوٹ اور 1 ₹ کے 2 سکّے

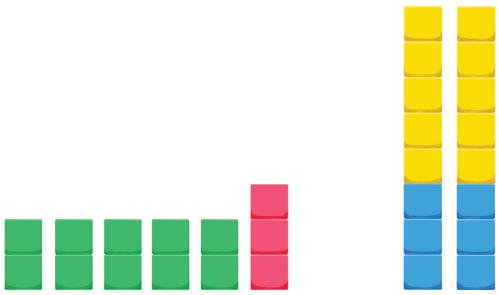
$$432 = 8 \times 50 + 1 \times 10 + 4 \times 5 + 2 \times 1$$

مطلب: 50 ₹ کے 8 نوٹ، 10 ₹ کا 1 نوٹ، 5 ₹ کے 4 سکّے اور 1 ₹ کے 2 سکّے

؟ مندرجہ بالا دونوں عبارتوں میں ارکان کی پہچان کیجیے۔

؟ کیا آپ کسی کو 432 ₹ ادا کرنے کے لیے مزید طریقے سوچ سکتے ہیں؟

؟ **مثال 11:** یہاں دو تصویریں دی گئی ہیں۔ ان میں سے کون سی دو ترتیب عبارت $3 + 2 \times 5$ سے میل کھاتی ہے؟



آیئے اب ہم اس عبارت کو ارکان کی جمع کی شکل میں لکھتے ہیں۔

(5 × 2) + (3) = (10) + (3) = (13)

اس عبارت 3 + 2 × 5 کو 2 × 5 سے 3 زیادہ کے طور پر سمجھا جاسکتا ہے، جو بائیں جانب کی ترتیب کو بیان کرتا ہے۔

پیلے اور نیلے مربعوں کی تعداد کا صحیح استعمال کرتے ہوئے دائیں جانب کی ترتیب کے لیے عبارت کیا ہوگی؟

کیا آپ کو قوسین کا استعمال یاد ہے؟ ہمیں اس کے لیے قوسین کا استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔

$$2 \times (5 + 3)$$

غور کیجیے کہ اس ترتیب کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے ——

$$5 + 3 + 5 + 3$$

یا

$$5 \times 2 + 3 \times 2$$

معلوم کیجیے

1. ہر صورت میں ارکان لکھ کر درج ذیل عبارات کی قدر معلوم کیجیے۔

(a) $28 - 7 + 8$ (b) $39 - 2 \times 6 + 11$

(c) $40 - 10 + 10 + 10$ (d) $48 - 10 \times 2 + 16 \div 2$

(e) $6 \times 3 - 4 \times 8 \times 5$

2. درج ذیل عبارات میں سے ہر ایک کے لیے ایک کہانی/صورت حال لکھیے اور ان کی قدریں معلوم کیجیے۔

(a) $89 + 21 - 10$ (b) $5 \times 12 - 6$

(c) $4 \times 9 + 2 \times 6$

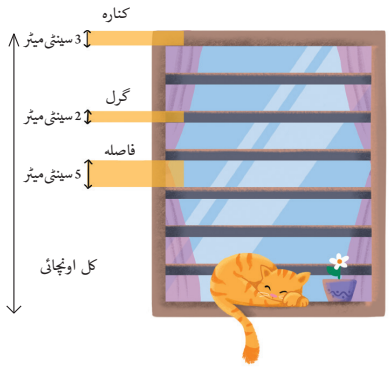
3. درج ذیل ہر صورت حال کے لیے ایک عبارت لکھیے جو اس صورت حال کو بیان کرتی ہے، اس کے ارکان کی پہچان کیجیے اور عبارت کی قدر معلوم کیجیے۔

(a) رانی عالیہ نے پچھلے سال 100 سونے کے سکّے شہزادی ایلسا اور 100 سونے کے سکّے شہزادی انّا کو دیے۔ شہزادی ایلسا نے ایک کاروبار شروع کرنے کے لیے اپنے سکّوں کا استعمال کیا جس سے وہ دوگنے ہوگئے۔ شہزادی انّا نے زیور خریدے اور اس کے پاس صرف آدھے سکّے بچے۔ ایک عبارت لکھیے جو یہ بیان کرے کہ شہزادی ایلسا اور شہزادی انّا کے پاس کل ملا کر کتنے سکّے ہیں۔

(b) میٹرو ٹرین کے دو اسٹیشنوں کے بیچ کے ٹکٹ کی قیمت بالغ کے لیے ₹ 40 اور بچے کے لیے ₹ 20 ہے۔ ٹکٹوں کی کل قیمت کیا ہے:

(i) چار بالغ اور تین بچوں کے لیے؟

(ii) دو ایسے گروپوں کے لیے جن میں ہر ایک میں تین بالغ ہیں؟



(c) تصویر میں دکھائی گئی پیمائش کے درمیان تعلق کو بیان کرنے والی عبارت لکھ کر کھڑکی کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

قوسین کو ہٹانا — I

آیئے ہم اس عبارت کی قدر معلوم کرتے ہیں —

$$200 - (40 + 3)$$

ہم پہلے قوسین کے اندر دی گئی عبارت کی قدر معلوم کرتے ہیں جو 43 ہے۔ پھر اسے 200 سے تفریق کرتے ہیں۔

لیکن پہلے 200 میں سے 40 کی تفریق کرنا زیادہ آسان ہے۔

$$200 - 40 = 160$$

اور پھر 160 سے 3 کی تفریق کیجیے:

$$160 - 3 = 157$$

ہم نے یہاں $200 - 40 - 3$ کیا ہے۔ غور کیجیے کہ ہم نے $200 - 40 + 3$ نہیں کیا۔

اس لیے،

$$200 - (40 + 3) = 200 - 40 - 3$$

مثال 12: ہم نے اس سے پہلے عرفان کے معاملے میں بھی دیکھا تھا کہ اس نے ₹15 کا بسکٹ اور ₹56 میں توردال کا پیکٹ خریدا، جب اس نے ₹100 ادا کیے تو اسے جو روپے واپس ملے:

$$100 - (15 + 56) = 29$$

واپس ملی رقم مندرجہ ذیل طریقہ سے بھی معلوم کی جاسکتی ہے:

(a) پہلے ₹100 سے بسکٹ کے پیکٹ (₹15) کی تفریق کیجیے:

$$100 - 15 = 85$$

یہ وہ رقم ہے جو دکان دار عرفان کو دے گا، اگر اس نے صرف بسکٹ ہی خریدے ہوں۔ جیسا کہ اس نے توردال بھی خریدی تھی، تو اس کی قیمت بچے ہوئے 85 روپیوں میں سے ہی لی جائے گی۔

(b) اس لیے واپس کی گئی رقم معلوم کرنے کے لیے ہمیں 85 ₹ میں توردال کی قیمت گھٹانے کی ضرورت ہے۔

$$85 - 56 = 29$$

ہم نے یہاں پر $100 - 15 - 56$ کیا ہے۔ اس لیے،

$$100 - (15 + 56) = 100 - 15 - 56$$

غور کیجیے کہ کس طرح تفریق علامت کے بعد والے قوسین کو ہٹانے پر قوسین کے اندر کے ارکان کی علامات تبدیل ہو جاتی ہیں۔ پہلی مثال میں 40 اور 3 کے نشان اور دوسری مثال میں 15 اور 56 کے نشانوں کا مشاہدہ کیجیے۔

مثال 13: عبارت (100 – 250) – 500 پر غور کیجیے۔ کیا اس عبارت کو بغیر قوسین کے لکھنا ممکن ہے؟
اس عبارت کی قدر معلوم کرنے کے لیے ہمیں 150 = 100 – 250 کو 500 سے تفریق کی ضرورت ہے:

$$500 - (250 - 100) = 500 - 150 = 350$$

اگر ہم براہ راست 500 میں سے 250 گھٹاتے تو ہمیں جتنا گھٹانا تھا اس سے 100 زیادہ گھٹا دیتے۔ تو پھر ہمیں 250 – 500 میں 100 واپس جمع کرنا پڑتا، جس سے عبارت کی قدر (100 – 250) – 500 کے برابر ہو جائے۔
اس عمل کی ترتیب 150 + 250 – 500 بنتی ہے۔ چناں چہ

$$500 - (250 - 100) = 500 - 250 + 100$$

جانچ کیجیے کہ (100– 250) – 500، 100 – 250 – 500 کے برابر نہیں ہے۔

پھر غور کیجیے جب قوسین سے پہلے والی تفریق کی علامت کو ہٹایا جاتا ہے تو قوسین کے اندر ارکان کے نشان بدل جاتے ہیں۔ اس صورت حال میں 250 اور 100 – کے نشان بدل کر 250 – اور 100 ہو جاتے ہیں۔

مثال 14: ہیرا کے پاس نایاب سکّوں کا ذخیرہ ہے۔ اس کے پاس ایک تھیلے میں 28 اور دوسرے میں 35 سکّے ہیں۔ وہ دوسرے تھیلے سے 10 سکّے اپنے دوست کو تحفہ میں دے دیتی ہے۔ ہیرا کے پاس بچے ہوئے سکّوں کی تعداد کے لیے ایک عبارت لکھیے۔
اس کو اس طرح سے بیان کیا جا سکتا ہے: 28 + (35 – 10)
ہم جانتے ہیں کہ یہ بالکل وہی تعداد ہے جو 28 + (35 + (–10)) سے حاصل ہوتی ہے۔ چوں کہ ارکان کو کسی بھی ترتیب سے جمع کیا جا سکتا ہے، یہ عبارت سیدھے طور پر اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے۔ 10– 28 + 35 یا 28 + 35 + (–10)۔ اس طرح،

$$28 + (35 - 10) = 28 + 35 - 10 = 53$$

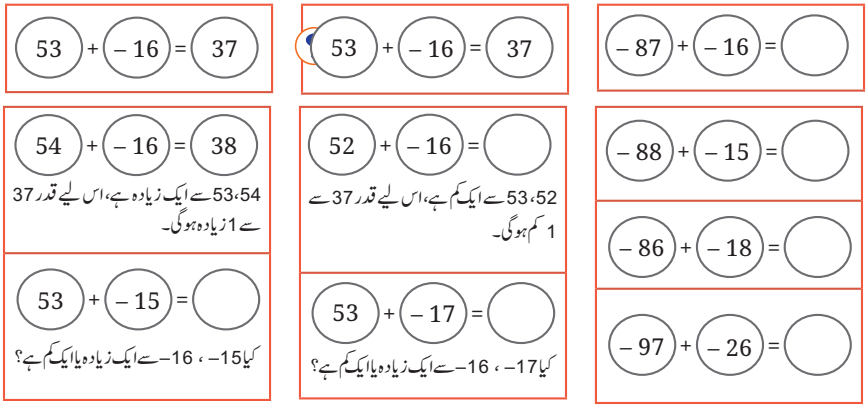
جب قوسین سے پہلے تفریق کی علامت نہیں ہوتی تو ان کے اندر والے ارکان کے نشان، قوسین کو ہٹانے سے نہیں بدلتے۔ مندرجہ بالا عبارت میں ارکان 35 اور 10 – پر غور کیجیے۔



آپ نشان کو کب تبدیل کرنا ہے اور کب نہیں، یہ اصول یاد رکھنے کے بجائے، عبارت کے معنی پر غور کر کے خود اندازہ لگا سکتے ہیں۔

ارکان کا پھیر بدل I

اگر ہم کسی عبارت کے کسی ایک رکن کی قدر میں اضافہ یا کمی کرتے ہیں تو اس پوری عبارت کی قدر پر کیا اثر پڑتا ہے؟
کچھ عبارات درج ذیل تین خانوں میں دی گئی ہیں۔ ہر خانے میں، پہلی عبارت سے ایک یا زیادہ ارکان کو تبدیل کیا گیا ہے۔ پہلے خانے میں دی گئی مثال کو غور سے دیکھیے اور خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔ جتنا ہو سکے، تحسیب کاری کم کیجیے گا۔



معلوم کیجیے

1. خالی جگہوں کو اعداد سے اور خالی خانوں کو عملی علامتوں (Operation Signs) سے پُر کیجیے تاکہ عبارت کے دونوں اطراف برابر ہو جائیں۔

(a) $24 + (6 - 4) = 24 + 6 \square \_\_\_\_$

(b) $38 + (\_\_\_\_ \square \_\_\_\_) = 38 + 9 - 4$

(c) $24 - (6 + 4) = 24 \square 6 - 4$

(d) $24 - 6 - 4 = 24 - 6 \square \_\_\_\_$

(e) $27 - (8 + 3) = 27 \quad 8 \quad 3$

(f) $27 - (\_\_\_\_ \square \_\_\_\_) = 27 - 8 + 3$

2. توسین کو ہٹاکر ایک ایسی عبارت لکھیے جس کی قدر توسین کے ساتھ والی عبارت کے برابر ہو۔

(a) $14 + (12 + 10)$ (b) $14 - (12 + 10)$

(c) $14 + (12 - 10)$ (d) $14 - (12 - 10)$

(e) $-14 + 12 - 10$ (f) $14 - (-12 - 10)$

3. درج ذیل عبارتوں کی قدر معلوم کیجیے۔ ہر ایک جوڑے کے لیے سب سے پہلے یہ اندازہ لگانے کی کوشش کیجیے کہ کیا ان کی قدر برابر ہے؟ کب یہ دونوں عبارات برابر ہوتی ہیں؟

(a) $(6 + 10) - 2$ اور $6 + (10 - 2)$

(b) $16 - (8 - 3)$ اور $(16 - 8) - 3$

(c) $27 - (18 + 4)$ اور $27 + (-18 - 4)$

4. ذیل میں عبارتوں کے مجموعوں میں سے ہر ایک میں ان عبارتوں کو پہچانیے جن کی قدر برابر ہے۔ ان کی قدر کا حساب نہ کیجیے، بلکہ اپنی ارکان کی سمجھ استعمال کیجیے۔

(a) 319 + 537, 319 – 537, – 537 + 319, 537 – 319

(b) 87 + 46 – 109, 87 + 46 – 109, 87 + 46 – 109, 87 – 46 + 109, 87 – (46 + 109), (87 – 46) + 109

5. عبارتوں میں مناسب جگہ پر قوسین کا استعمال اس طرح کیجیے کہ وہ دی گئی قدروں کے مساوی ہو جائیں۔

(a) 34 – 9 + 12 = 13

(b) 56 – 14 – 8 = 34

(c) –22 – 12 + 10 + 22 = – 22

6. صرف استدلال کا استعمال کرتے ہوئے کہ ارکان اپنی قدروں کو کیسے بدلتے ہیں، خالی جگہوں کو اس طرح پُر کیجیے کہ عبارتوں کے دونوں اطراف برابر ہو جائیں۔

(a) 423 + _____ = 419 + _____

(b) 207 – 68 = 210 – _____

7. اعداد 2، 3، 5 اور ریاضیاتی عمل '+' اور '–' اور قوسین، جیسی ضرورت ہو، استعمال کرتے ہوئے ممکنہ مختلف انداز کی عبارات تشکیل کیجیے۔ مثال کے طور پر، 4 = 5 + 3 – 2 اور 0 = (5 – 2) – 3

8. جسودہ کو جب بھی کسی عدد میں سے 9 کی تفریق کرنی ہوتی ہے تو وہ اس میں پہلے 10 گھٹاتی ہے اور پھر 1 جوڑتی ہے۔ مثال کے طور پر، 36 – 10 = 26 + 1

ریاضی بات چیت

(a) کیا آپ کو لگتا ہے کے اسے ہمیشہ صحیح جواب ملتا ہے؟ کیوں؟

(b) کیا آپ اسی طرح کی دوسری حکمت عملیوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟ اس کی کچھ مثالیں دیجیے۔

9. ان دونوں عبارتوں 1 – 14 – 73 (b) ,1 + 14 – 73 (a) پر غور کیجیے۔ ہر ایک عبارت کے لیے مندرجہ ذیل مجموعہ میں سے ان عبارتوں کو پہچانیے جو ان کے عبارتوں کے برابر ہیں۔

(a) 73 – (14 + 1)　　(b) 73 – (14 – 1)

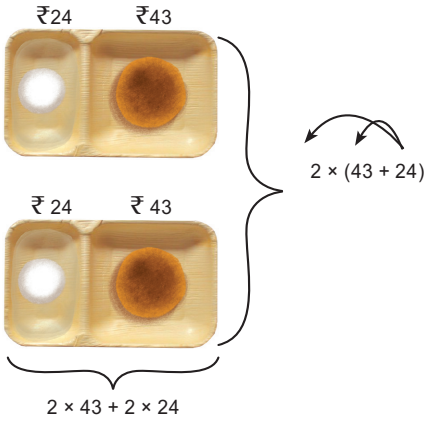
(c) 73 + (– 14 + 1)　　(d) 73 + (– 14 – 1)

قوسین کو ہٹانا — II

مثال 15: لامو اور نور بوا ایک ہوٹل میں گئے، ان میں سے ہر ایک نے ایک سبزی کٹلیٹ اور ایک رس گُلا منگایا۔ ایک سبزی کٹلیٹ کی قیمت 43 ₹ اور ایک رس گُلا کی قیمت 24 ₹ ہے۔ اس رقم کے لیے ایک عبارت لکھیے جو انھیں ادا کرنی ہے۔

جیسا کہ ان میں سے ہر ایک کے پاس ایک سبزی کٹلیٹ اور ایک رس گُلا ہے۔ ان میں سے ہر ایک کے حصّے کی 24 + 43 سے نمائندگی کی جا سکتی ہے۔

انھیں کل کتنی رقم ادا کرنی ہے؟ کیا اس کو عبارت 2 × 43 + 24 کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے؟



اسے ارکان کے جمع کے طور پر لکھنے پر ملتا ہے:

(2 × 43) + (24)

اس عبارت کا مطلب ہے 2 × 43 سے 24 زیادہ ہے۔ لیکن ہم ایک ایسی عبارت چاہتے ہیں جس کا مطلب 24 + 43 کا دوگنا ہو۔ ہم اس طرح کی عبارت لکھنے کے لیے قوسین کا استعمال کر سکتے ہیں:

2 × (43 + 24)

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان دونوں کو ملا کر 2 × (43 + 24) ادا کرنے ہوں گے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے کہ دو سبزی کٹلیٹ اور دو رس گلے کے لیے ادا کرنا:

2 × 43 + 2 × 24

اس لیے،

2 × (43 + 24) = 2 × 43 + 2 × 24

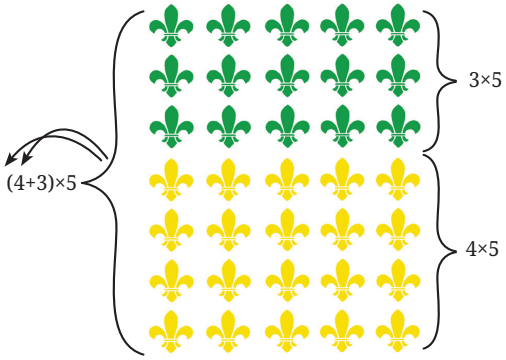
اگر ایک اور دوست سنگمو، ان کے ساتھ شامل ہوتا اور وہی چیزیں منگاتا تو کل رقم ادا کرنے کے لیے عبارت ہوتی؟

مثال 16: یوم جمہوریہ کی پریڈ میں، اسکاؤٹ لڑکے اور گائیڈ لڑکیاں ایک ساتھ مارچ کر رہے ہیں۔ اسکاؤٹ 4 قطاروں میں مارچ کر رہے ہیں اور ہر ایک قطار میں ان کی تعداد 5 ہیں۔ گائیڈ 3 قطاروں میں مارچ کر رہی ہیں اور ہر قطار میں ان کی تعداد بھی 5 ہیں (نیچے دی گئی شکل کو دیکھیے) تو کتنے اسکاؤٹ اور گائیڈ اس پریڈ میں مارچ کر رہے ہیں؟

مارچ کرنے والے اسکاؤٹ لڑکوں کی تعداد 5 × 4 ہے۔ مارچ کرنے والی گائیڈ لڑکیوں کی تعداد 5 × 3 ہے۔

مارچ کرنے والے اسکاؤٹ اور گائیڈ کی کل تعداد

5×3 + 5×4 ہوگی۔



یہ اس طرح سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے کہ پہلے ہم کل قطاروں کی تعداد جو کہ 3 + 4 ہے، اس کا پتا کریں اور پھر حاصل جمع کو ہر قطار میں بچوں کی تعداد سے ضرب دیں۔ اس طرح لڑکے اور لڑکیوں کی کل تعداد 5 × (4 + 3) کے ذریعے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس لیے، 5 × (4 + 3) = 5 × 3 + 4 × 5

اس عبارت کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

4 × 5 + 3 × 5 = (4 × 5) + (3 × 5) = (20) + (15) = (35)

$(4 + 3) \times 5 = 7 \times 5 = 35$

؟ $(3 + 4) \times 5 \neq 5 \times 4 + 3$، کیا آپ وضاحت کر سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہے؟

کیا $5 \times (4 + 3) = (3 + 4) \times 5 = 5 \times (3 + 4)$ ہے؟

جو مشاہدے ہم نے پچھلی دو مثالوں میں کیے ہیں انھیں عمومی طور پر اس طرح سمجھا جا سکتا ہے۔

آیئے $98 \times 3 + 98 \times 10$ پر غور کیجیے۔ اس کا مطلب ہے 98 کو 10 بار جمع کرنا اور 98 کو ہی 3 بار جمع کرنا۔

$$\underbrace{98 + 98 + 98}_{\text{3 مرتبہ}} + \underbrace{98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98}_{\text{10 مرتبہ}}$$

واضح طور پر یہ $3 + 10 = 13$ بار 98 کے مثل ہی ہے۔ اس طرح،

$$10 \times 98 + 3 \times 98 = (10 + 3) \times 98$$

اس عبارت کو دوسرے طریقے سے لکھنے پر ہمیں ملتا ہے،

$$(10 + 3)\ 98 = 10 \times 98 + 3 \times 98$$

مذکورہ بالا حاصِل ضرب میں اعداد کی ترتیب بدلنے پر اس خاصیت کو درج ذیل صورت میں دیکھی جا سکتی ہے:

$$98 \times 10 + 9 \times 83 = 98\ (10 + 3)$$ ،اور

$$98\ (10 + 3) = 98 \times 10 + 98 \times 3$$

اسی طرح سے، آیئے اب ہم عبارت $14 \times 10 - 6 \times 10$ پر غور کرتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے 14 بار 10 میں سے 6 بار 10 کو کم کرنا۔

$$\overbrace{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \cancel{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10}}^{\text{14 مرتبہ}}$$

واضح طور پر یہ $14 - 6 = 8$ یعنی 8 بار 10 ہے۔ اس طرح،

$$14 \times 10 - 6 \times 10 = (14 - 6) \times 10$$

یا

$$(14 - 6) \times 10 = 14 \times 10 - 6 \times 10$$

اس خاصیت کو (جسے تقسیمی خاصیت کہتے ہیں) مندرجہ ذیل طریقے سے سمجھا جا سکتا ہے:

کسی جمع (یا تفریق) کا حاصل ضرب، ارکان کے حاصل ضرب کے جمع (یا تفریق) کے برابر ہوتا ہے۔

ارکان کا پھیر بدل II

آیئے سمجھتے ہیں کہ جب ہم کسی حاصل ضرب میں شامل اعداد کو تبدیل کرتے ہیں تو کیا ہوتا ہے۔

مثال 17: $18 \times 53 = 954$ دیا گیا ہے۔ 63×18 کا پتہ لگائیے۔

کیوں کہ 63×18 کا مطلب 63 کا 18 گنا ہے۔

$$\begin{aligned} 63 \times 18 &= (53 + 10) \times 18 \\ &= 53 \times 18 + 10 \times 18 \\ &= 954 + 180 \\ &= 1134 \end{aligned}$$

مثال 18: 25×97 کی قدر معلوم کرنے کا کوئی آسان و موثر طریقہ معلوم کیجیے۔

25×97 کا مطلب 97 کا 25 گنا۔

ہم اس کو $25 \times (100 - 3)$ کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ یہ 100 بار 25 اور 3 بار 25 کے فرق کی طرح ہی ہے:

$$97 \times 25 = 100 \times 25 - 3 \times 25$$

اس کی قدر معلوم کیجیے۔

مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے اس طریقہ کا استعمال کیجیے:

(a) 95×8

(b) 104×15

(c) 49×50

کیا یہ عام طور پر استعمال کیے جانے والے ضرب کے طریقہ کار سے زیادہ تیز ہے؟

کون سے دوسرے حاصل ضرب ہیں جنھیں اوپر دیے گئے حاصل ضرب کی طرح تیزی سے تلاش کیا جاسکتا ہے؟

معلوم کیجیے

1. خالی جگہوں کو اعداد سے اور خانوں کو علامات سے پر کیجیے تاکہ دونوں اطراف کی عبارات برابر ہوں۔

(a) $3 \times (6 + 7) = 3 \times 6 + 3 \times 7$

(b) $(8 + 3) \times 4 = 8 \times 4 + 3 \times 4$

(c) $3 \times (5 + 8) = 3 \times 5 \square 3 \times \_\_\_\_$

(d) $(9 + 2) \times 4 = 9 \times 4 \square 2 \times \_\_\_\_$

(e) $3 \times (\_\_\_\_ + 4) = 3 \_\_\_\_ + \_\_\_\_$

(f) $(\_\_\_\_ + 6) \times 4 = 13 \times 4 + \_\_\_\_$

(g) $3 \times (\_\_\_\_ + \_\_\_\_) = 3 \times 5 + 3 \times 2$

(h) $(\_\_\_\_ + \_\_\_\_) \times \_\_\_\_ = 2 \times 4 + 3 \times 4$

(i) $5 \times (9 - 2) = 5 \times 9 - 5 \times \_\_\_\_$

(j) $(5 - 2) \times 7 = 5 \times 7 - 2 \times$ ____

(k) $5 \times (8 - 3) = 5 \times 8$ ☐ $5 \times$ ____

(l) $(8 - 3) \times 7 = 8 \times 7$ ☐ 3×7

(m) $5 \times (12 -$ ____$) =$ ____ ☐ $5 \times$ ____

(n) $(15 -$ ____$) \times 7 =$ ____ ☐ 6×7

(o) $5 \times ($ ____ – ____$) = 5 \times 9 - 5 \times 4$

(p) (____ – ____) × ____ $= 17 \times 7 - 9 \times 7$

2. نیچے دیے گئے خانوں کو بائیں طرف اور دائیں طرف کی عبارتوں کا تجزیہ کرنے کے بعد '>'، '<' یا '=' کے نشانوں سے پر کیجیے۔ عبارت کی قدر معلوم کرنے کے بجائے ارکان اور قوسین کی استدلال اور تفہیم کا استعمال کرتے ہوئے درست نشان لگائیے۔

(a) $(8 - 3) \times 29$ ☐ $(3 - 8) \times 29$

(b) $15 + 9 \times 18$ ☐ $(15 + 9) \times 18$

(c) $23 \times (17 - 9)$ ☐ $23 \times 17 + 23 \times 9$

(d) $(34 - 28) \times 42$ ☐ $34 \times 42 - 28 \times 42$

3. یہاں 14 بنانے کا ایک طریقہ ہے: $14 = (\ 1\ + \ 6\ ) \times \ 2\ $۔ کیا 14 حاصل کرنے کے دوسرے اور بھی طریقے ہو سکتے ہیں؟ ان کو نیچے خالی جگہوں میں پر کیجیے:

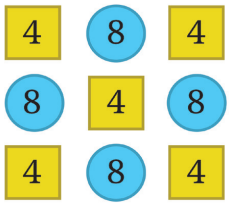
(a) ____ × (____ + ____) = 14

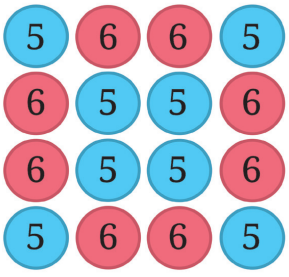
(b) ____ × (____ + ____) = 14

(c) ____ × (____ + ____) = 14

(d) ____ × (____ + ____) = 14

4. مندرجہ ذیل تصویروں میں دیے گئے اعداد کو کم سے کم دو مختلف طریقوں سے جمع کیجیے۔ بیان کیجیے کہ آپ نے اسے عبارات کے ذریعے کیسے حل کیا؟





معلوم کیجیے

1. نیچے دی گئی صورت حال کو پڑھیے۔ ہر ایک کے لیے مناسب عبارات لکھیے اور ان کی قدر معلوم کیجیے۔

(a) بیگور کا ضلعی بازار ہفتے کے ساتوں دن کھلتا ہے۔ رحیم اپنے باغ سے روزانہ 9 کلو آم اور شیام اپنے باغ سے روزانہ 11 کلو آم اس بازار میں بھیجتا ہے۔ ضلعی بازار میں ایک ہفتے میں ان دونوں کی طرف سے لائے گئے آموں کی مقدار معلوم کیجیے۔

(b) بینو ہر مہینے ₹ 20,000 کماتی ہے۔ وہ ہر مہینے ₹ 5,000 کرایے پر، ₹ 5,000 کھانے پر، اور ₹2,000 دیگر اخراجات پر خرچ کرتی ہے۔ سال کے آخر تک بینو کتنی رقم بچائے گی؟

(c) دن کے وقت ایک گھونگا ایک کھمبے پر 3 سینٹی میٹر چڑھتا ہے اور رات کے وقت جب وہ سو رہا ہوتا ہے تو اتفاقاً 2 سینٹی میٹر نیچے پھسل جاتا ہے۔ کھمبا 10 سینٹی میٹر اونچا ہے اور اس کی چوٹی پر ایک مزے دار چیز رکھی ہے۔ گھونگا کتنے دنوں میں اس تک پہنچے گا؟

2. میلون ہر دن دو صفحات کی کہانی پڑھتا ہے، سوائے منگل اور ہفتہ والے دنوں کے۔ 8 ہفتوں میں وہ کتنی کہانیاں مکمل کرے گا؟ درج ذیل میں سے کون سی عبارت اس صورت حال کو بیان کرتی ہے؟

(a) $5 \times 2 \times 8$
(b) $(7 - 2) \times 8$
(c) 8×7
(d) $7 \times 2 \times 8$
(e) $7 \times 5 - 2$
(f) $(7 + 2) \times 8$
(g) $7 \times 8 - 2 \times 8$
(h) $(7 - 5) \times 8$

3. درج ذیل عبارتوں کو حل کرنے کے مختلف طریقے تلاش کیجیے:

(a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$
(b) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

4. درج ذیل عبارتوں کے جوڑوں کا آپس میں '>'، '<' یا '=' کی علامت کے ذریعے یا دلیل کے ساتھ موازنہ کیجیے۔

(a)	$49 - 7 + 8$	☐	$49 - 7 + 8$
(b)	$83 \times 42 - 18$	☐	$83 \times 40 - 18$
(c)	$145 - 17 \times 8$	☐	$145 - 17 \times 6$
(d)	$23 \times 48 - 35$	☐	$23 \times (48 - 35)$
(e)	$(16 - 11) \times 12$	☐	$-11 \times 12 + 16 \times 12$
(f)	$(76 - 53) \times 88$	☐	$88 \times (53 - 76)$

(g) $25 \times (42 + 16)$ ☐ $25 \times (43 + 15)$

(h) $36 \times (28 - 16)$ ☐ $35 \times (27 - 15)$

5. حساب کیے بغیر یہ شناخت کیجیے کہ درج ذیل میں سے کون سی عبارات دی گئی عبارت کے برابر ہیں۔ آپ ارکان کا استعمال کرتے ہوئے یا قوسین کو ہٹاتے ہوئے ان عبارتوں کو دوبارہ لکھ سکتے ہیں۔ ایسی ایک سے زیادہ عبارتیں ہوسکتی ہیں جن کی قدر دی گئی عبارت کے برابر ہوں۔

(a) $83 - 37 - 12$

(i) $84 - 38 - 12$

(ii) $84 - (37 + 12)$

(iii) $83 - 38 - 13$

(iv) $-37 + 83 - 12$

(b) $93 + 37 \times 44 + 76$

(i) $37 + 93 \times 44 + 76$

(ii) $93 + 37 \times 76 + 44$

(iii) $(93 + 37) \times (44 + 76)$

(iv) $37 \times 44 + 93 + 76$

6. ایک عدد منتخب کیجیے اور اس سے دس مختلف عبارات تخلیق کیجیے جن کی قدر منتخب کیے گئے عدد کے برابر ہوں۔

خلاصہ

- ہم کافی عرصے سے سادہ حسابی عبارات پڑھ رہے ہیں اور حل کر رہے ہیں۔ یہاں ہم نے کچھ سادہ عبارتوں اور ان کی قدروں کے مفہوم کو دہراتے ہوئے آغاز کیا ہے۔
- ہم نے یہ سیکھا کہ بعض عبارتوں کا موازنہ مکمل حساب کیے بغیر، صرف دلیل سے کیسے کیا جاسکتا ہے۔
- پیچیدہ عبارتوں کو صحیح طریقے سے پڑھنے اور حل کرنے کے لیے، ہم ارکان اور قوسین کا استعمال کرتے ہیں۔
- جب کوئی عبارت ارکان کے مجموعے کے طور پر لکھی جاتی ہے، تو ارکان کی ترتیب یا ان کو مختلف طریقے سے گروپ بنانے سے عبارت کی قدر پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ یہ جمع کی تقلیبی خاصیت اور جمع کی تلازمی خاصیت کی وجہ سے ہوتا ہے۔
- جب کسی منفی علامت کے ساتھ قوسین کو ہٹایا جاتا ہے، تو قوسین کے اندر موجود ارکان کے نشان (علامت) تبدیل ہوجاتے ہیں۔
- ہم نے "تقسیمی خاصیت" کے بارے میں بھی سیکھا — جس کے مطابق قوسین کے اندر دی گئی عبارت کو کسی عدد سے ضرب دینا اس کے برابر ہوتا ہے کہ اس عدد کو قوسین میں موجود ہر رکن سے الگ الگ ضرب دیا جائے۔



پہیلی بوجھیں!

حسابی عبارتوں کا انجینئر!

3 ارکان اور تینوں کو چاروں ریاضیاتی عملیات (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کے ساتھ اور ضرورت کے مطابق قوسین کا استعمال کرتے ہوئے ہم کئی عبارات تخلیق کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر،

$3 + 3 - 3 = 3$, $3 \times 3 + 3 = 12$, $(3 + 3)/3 = 2$ وغیرہ۔

4 ارکان اور چاروں کا استعمال کرتے ہوئے 1 سے 20 تک کے تمام اقدار حاصل کرنے کی عبارات تخلیق کیجیے۔

اعداد 1، 2، 3، 4 اور 5 کو صرف ایک بار، کسی بھی ترتیب میں استعمال کرتے ہوئے $10-$ سے $10+$ کے درمیان جتنی زیادہ قدریں حاصل ہوسکیں، وہ حاصل کیجیے۔

اعداد 0 سے 9 کو صرف ایک بار، کسی بھی ترتیب میں استعمال کرتے ہوئے ایسی عبارت تخلیق کیجیے جس کی قدر 100 ہو۔

اسی طرح کے دوسرے کون سے دل چسپ سوالات آپ پوچھ سکتے ہیں؟



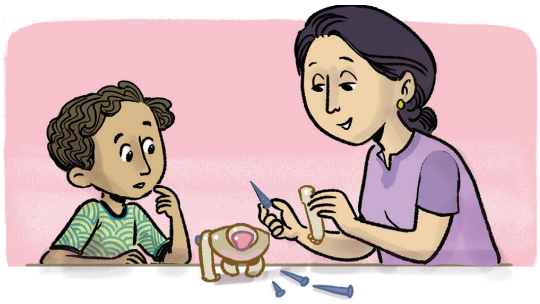
4774CH03

3

ایک نظر نقطے سے پرے

(A PEEK BEYOND THE POINT)

3.1 چھوٹی اکائیوں کی ضرورت



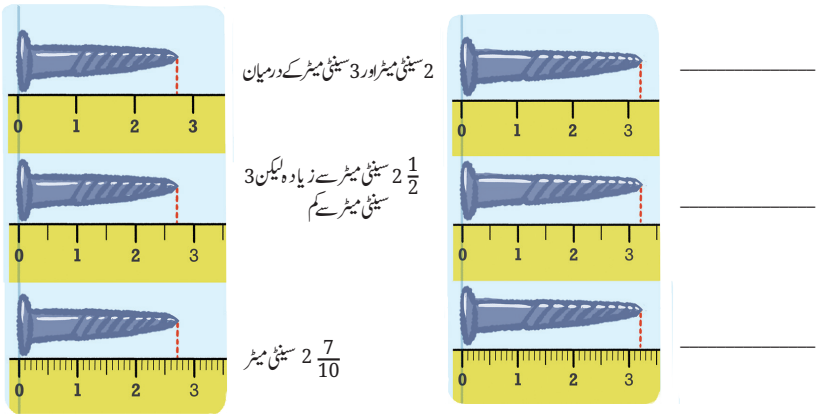
سونو کی والدہ ایک کھلونا ٹھیک کر رہی تھیں۔ وہ ایک پیچ کی مدد سے دو حصوں کو جوڑنے کی کوشش کر رہی تھیں۔سونو بڑی دلچسپی سے اپنی ماں کو دیکھ رہا تھا۔اس کی ماں ان دونوں حصوں کو جوڑنے میں کامیاب نہیں ہو پا رہی تھی۔سونو نے وجہ جاننے کی کوشش کی۔اس کی ماں نے بتایا کہ پیچ درست سائز کا نہیں ہے۔

انھوں نے ڈبے سے دوسرا پیچ نکالا اور کھلونے کو ٹھیک کر دیا۔سونو کو دونوں پیچ ایک جیسے لگے، لیکن جب اس نے غور سے دیکھا تو محسوس کیا کہ دونوں کی لمبائی میں تھوڑا سا فرق تھا۔



سونو کو یہ دیکھ کر بہت حیرانی ہوئی کہ اتنا چھوٹا سا فرق بھی اتنی اہمیت رکھتا ہے۔اب سونو دونوں پیچوں کی لمبائی کا فرق جاننا چاہتا تھا۔وہ یہ بھی جاننا چاہتا تھا کہ یہ فرق کتنا معمولی ہے کیوں کہ دونوں پیچ تقریباً ایک جیسے نظر آ رہے تھے۔

اگلے صفحہ پر دی گئی تصویر میں پیچوں کو ایک پیمانے (Scale) پر رکھا گیا ہے۔ان کی پیمائش کیجیے اور دی گئی جگہ پر ان کی لمبائی لکھیے۔



؟ کس پیمانے نے آپ کی پیچ کی لمبائی درست طور پر ناپنے میں مدد کی اور کیوں؟

؟ 2 $\frac{7}{10}$ سینٹی میٹر (تیسری پیچ کی لمبائی) کا کیا مطلب ہے؟

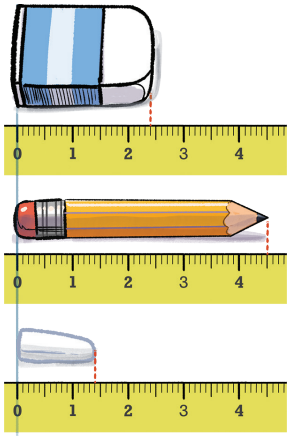
جیسا کہ پیمانہ پر دیکھا جا سکتا ہے دو متواتر اعداد کے درمیان اکائی کی لمبائی کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ 2 $\frac{7}{10}$ سینٹی میٹر کی لمبائی حاصل کرنے کے لیے ہم 0 سے 2 کی جانب جائیں گے اور پھر $\frac{1}{10}$ کے سات حصے لیں گے۔ پیچ کی لمبائی 2 سینٹی میٹر اور $\frac{7}{10}$ سینٹی میٹر ہے۔ اسی طرح ہم 3 $\frac{2}{10}$ سینٹی میٹر کی لمبائی کو بھی سمجھ سکتے ہیں۔

ہم 2 $\frac{7}{10}$ سینٹی میٹر کو **دو اور سات دسواں سینٹی میٹر** پڑھتے ہیں اور 3 $\frac{2}{10}$ سینٹی میٹر کو **تین اور دو دسواں سینٹی میٹر** پڑھا جاتا ہے۔

؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان پیچوں کی پیمائش کے لیے اکائی کو چھوٹے حصوں میں کیوں تقسیم کیا گیا ہے۔

؟ درج ذیل اشیا کی پیمائش پیمانے کی مدد سے کیجیے اور ان کی لمبائی سینٹی میٹر میں درج کیجیے (جیسا کہ پیچوں کی لمبائی کے لیے پہلے دکھایا گیا ہے): قلم، پنسل تراش اور آپ کی پسند کی کوئی اور چیز۔

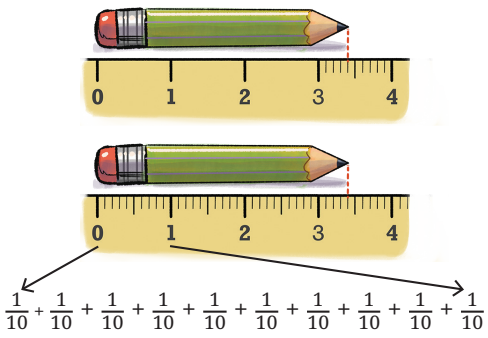
؟ تصویر میں دکھائی گئی چیزوں کی پیمائش تحریر کیجیے:



جیسا کہ یہاں دیکھا جاسکتا ہے، جب قطعی درست پیائش درکار ہو تو ہم پیائش کی چھوٹی اکائیوں کا استعمال کر سکتے ہیں۔

3.2 دسواں حصہ (A Tenth Part)

نیچے دی گئی تصویر میں پنسل کی لمبائی $3\frac{4}{10}$ اکائی دکھائی گئی ہے، جسے 3 اکائی اور چار ایک دسواں کے طور پر بھی پڑھا جا سکتا ہے، یعنی $(3 \times 1) + \left(4 \times \frac{1}{10}\right)$ اکائیاں



$$= 10 \text{ times (مرتبہ)} \ \frac{1}{10} = 10 \times \frac{1}{10} = 1 \text{ unit (اکائی)}$$

یہ لمبائی 34 ایک-دسویں (34 صحیح ایک بٹا دس) اکائیوں کے برابر ہے کیوں کہ 10 ایک دسویں اکائیاں ایک مکمل اکائی بناتی ہیں۔

$$34 \times \frac{1}{10} = \frac{34}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{4}{10} \quad (34 \text{ایک دسواں})$$

$$= 1+1+1+ \frac{4}{10} \quad (3 \text{اور } 4 \text{ دسواں})$$

ذیل میں کچھ اعداد کسری اکائیوں کے ساتھ دکھائے گئے ہیں اور انھیں پڑھنے کا طریقہ بھی بتایا گیا ہے۔

$4\frac{1}{10}$ ⟵ 'چار اور ایک دسواں حصہ' — 'four and one-tenth'

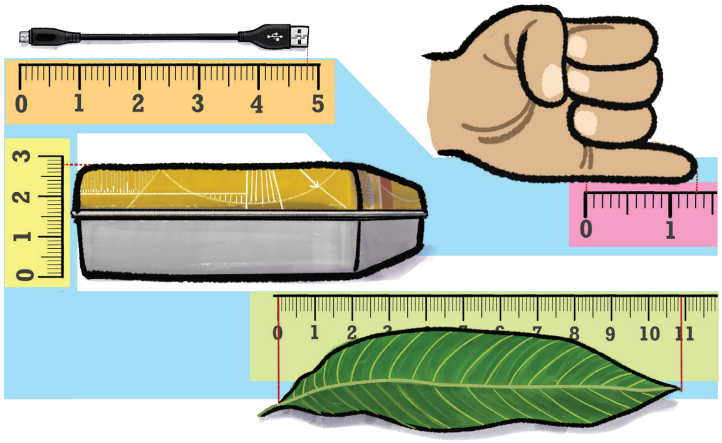
$\frac{4}{10}$ ⟵ 'چار ایک دسواں' یا 'چار دسویں حصے' — 'four one-tenths' or 'four-tenths'

$\frac{41}{10}$ ⟵ 'اکتالیس ایک دسواں' یا 'اکتالیس دسویں حصے' — 'forty-one one-tenths' or 'forty-one tenths'

$41\frac{1}{10}$ ⟵ 'اکتالیس اور ایک دسواں حصہ' — 'forty-one and one-tenth'

درج ذیل اشیا کی لمبائی دو طریقوں سے تحریر کیجیے اور بلند آواز میں پڑھیے۔ ایک مثال یو ایس بی (USB) کیبل کی لمبائی کی دی گئی ہے۔ (نوٹ: ہر خاکے (Diagram) میں اکائی کی لمبائی مختلف ہیں۔)

یو ایس بی کیبل کی لمبائی 4 اور $\frac{8}{10}$ اکائیاں یا $\frac{48}{10}$ اکائیاں ہے۔



ان لمبائیوں کو صعودی ترتیب (Increasing order) میں لگائیے:

(a) $\frac{9}{10}$ (b) $1\frac{7}{10}$ (c) $\frac{130}{10}$ (d) $13\frac{1}{10}$

(e) $10\frac{5}{10}$ (f) $7\frac{6}{10}$ (g) $6\frac{7}{10}$ (h) $\frac{4}{10}$

❓ درج ذیل لمبائیوں کو صعودی (بڑھتی ہوئی) ترتیب میں لگائیے: $4\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{41}{10}, 41\frac{1}{10}$

❓ سونو اپنے جسم کے کچھ حصوں کی پیمائش کر رہا ہے۔ سونو کے نچلے بازو کی لمبائی $2\frac{7}{10}$ اکائیاں ہے اور اس کے اوپر والے بازو کی لمبائی $3\frac{6}{10}$ اکائیاں ہے۔ تو بازو کی کل لمبائی کیا ہے؟

کل لمبائی حاصل کرنے کے لیے، ہم نچلے بازو اور اوپر والے بازو کی لمبائی کو بالترتیب 2 اکائیاں اور 7 دسواں اور 3 اکائیاں اور 6 دسواں مان لیتے ہیں۔

اس طرح یہاں (2+3) اکائیاں اور (6+7) دسویں حصے ہیں، جو مل کر 5 اکائیاں اور 13 دسویں بنتے ہیں۔ لیکن 13 دسویں کا مطلب ہے 1 اکائی اور 3 دسویں۔ لہٰذا کل لمبائی 6 اکائی اور 3 دسویں حصے ہوں گے۔

(a)
$$(2 + 3) + \left(\frac{7}{10} + \frac{6}{10}\right)$$
$$= (2 + 3) + \left(\frac{13}{10}\right)$$
$$= 5 + \frac{13}{10}$$
$$= 5 + \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 5 + 1 + \frac{3}{10}$$
$$= 6 + \frac{3}{10}$$

(b)
$$2\frac{7}{10}$$
$$+ 3\frac{6}{10}$$
$$= 5\frac{13}{10}$$
$$= 6\frac{3}{10}$$

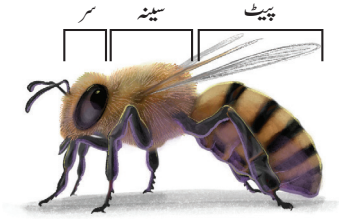
یا دونوں لمبائیوں کو دسویں حصّہ میں تبدیل کر کے بھی جوڑ کر سکتے ہیں:

(c) 27 دسویں اور 35 دسویں مل کر بنتے ہیں 62 دسویں، یعنی

$$\frac{27}{10} + \frac{35}{10} = \frac{62}{10}$$

$\frac{62}{10}$ کا مطلب ہے 60 دسویں حصے $\frac{60}{10}$ اور 2 دسویں حصے $\frac{2}{10}$ ہے جو کہ برابر ہے 6 اکائیوں اور 2 دسویں حصوں کے، یعنی $6\frac{2}{10}$

؟ یہاں شہد کی مکھی کے جسم کے مختلف حصوں کی لمبائیاں دی گئیں ہیں۔اس کی کل لمبائی معلوم کیجیے۔

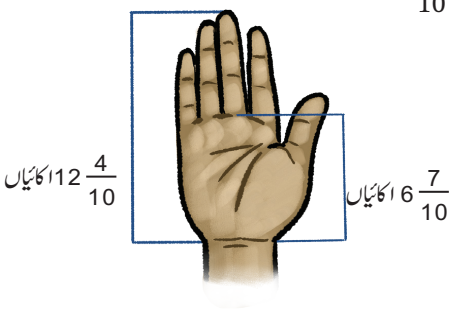


سر: $2\frac{3}{10}$ اکائیاں

سینہ: $5\frac{4}{10}$ اکائیاں

پیٹ: $7\frac{5}{10}$ اکائیاں

؟ شیلجا کے ہاتھ کی لمبائی $12\frac{4}{10}$ اکائی ہے اور اس کی ہتھیلی کی لمبائی $6\frac{7}{10}$ اکائی ہے جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔سب سے لمبی انگلی (درمیانی انگلی) کی لمبائی کیا ہے؟



انگلی کی لمبائی اس طرح معلوم کی جاسکتی ہے:

$$\left(12+\frac{4}{10}\right)-\left(6+\frac{7}{10}\right)$$

اسے مختلف طریقوں سے حل کیا جاسکتا ہے۔مثال کے طور پر:

(a) $12+\frac{4}{10}-6-\frac{7}{10}$

$=(12-6)+\left(\frac{4}{10}-\frac{7}{10}\right)$

$=6-\frac{3}{10}$

$=5+1-\frac{3}{10}$

$=5+\frac{10}{10}-\frac{3}{10}$

$=5+\frac{7}{10}=5\frac{7}{10}$

اس میں کیا ہو رہا ہے اور کیوں؟ اس پر گفتگو کیجیے

(b) $12\frac{4}{10}$ $\longrightarrow$ $11\frac{14}{10}$

$-6\frac{7}{10}$ $\qquad$ $-6\frac{7}{10}$

$=5\frac{7}{10}$

جس طرح سے ہم گنتی کے اعداد میں کرتے ہیں، یہاں بھی بہتر یہی ہوگا کہ دسویں حصہ سے تفریق شروع کریں۔چوں کہ ہم 4 دسویں $\left(\frac{4}{10}\right)$ میں سے 7 دسویں $\left(\frac{7}{10}\right)$ کو گھٹا نہیں سکتے۔اس لیے ہم 12 میں سے ایک مکمل اکائی

کو الگ لے کر اسے 10 دسویں میں بدل دیتے ہیں۔ اب اس عدد 11 اکائیاں اور 14 دسویں ہیں۔ ہم پہلے 14 دسویں سے 7 دسویں کو گھٹاتے ہیں اور پھر 11 اکائیوں میں سے 6 اکائیوں کو گھٹاتے ہیں۔

? ان دونوں لمبائیوں کو دسویں میں تبدیل کر کے ان کا فرق معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

? سیلسٹیل پرل ڈینیو (Celestial Pearl Danio) نامی مچھلی کی لمبائی $2\frac{4}{10}$ سینٹی میٹر ہے اور فلیپن گوبی (Philipine Goby) نامی مچھلی کی لمبائی $\frac{9}{10}$ سینٹی میٹر ہے۔ تو ان دونوں کی لمبائیوں میں کتنا فرق ہے؟

? آپ کی انگلی کے مقابلے میں ان مچھلیوں کی لمبائی کتنی بڑی یا چھوٹی ہے؟



سیلسٹیل پرل ڈینیو



فلیپن گوبی

دیے گئے عددی تواتر کا مشاہدہ کیجیے۔ ہر رکن کے بعد آنے والی تبدیلی کو پہچانیے اور پیٹرن کو آگے بڑھائیے:

(a) $4, 4\frac{3}{10}, 4\frac{6}{10},$ _____, _____, _____, _____

(b) $8\frac{2}{10}, 8\frac{7}{10}, 9\frac{2}{10},$ _____, _____, _____, _____

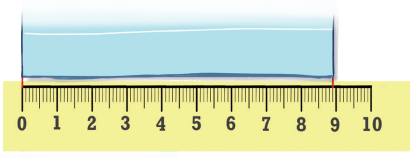
(c) $7\frac{6}{10}, 8\frac{7}{10},$ _____, _____, _____, _____

(d) $5\frac{7}{10}, 5\frac{3}{10},$ _____, _____, _____, _____

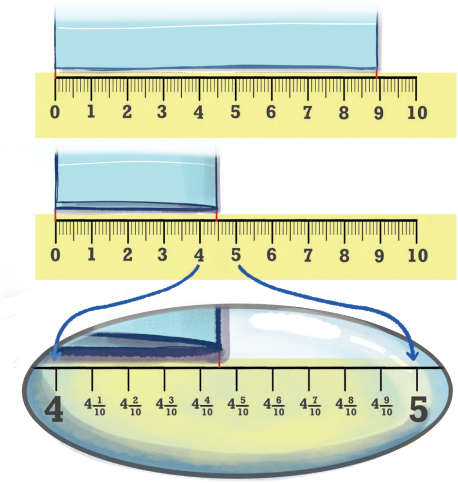
(e) $13\frac{5}{10}, 13, 12\frac{5}{10},$ _____, _____, _____, _____

(f) $11\frac{5}{10}, 10\frac{4}{10}, 9\frac{3}{10},$ _____, _____, _____, _____

3.3 سوواں حصّہ (A Hundredth Part)



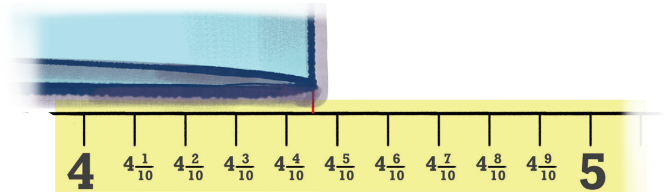
کاغذ کی ایک شیٹ کی لمبائی $8\frac{9}{10}$ اکائیاں ہے، جسے ہم 8 اکائیاں اور 9 دسویں حصے بھی کہہ سکتے ہیں۔ اگر اس شیٹ کو اس کی لمبائی کی طرف سے آدھا موڑا جائے تو اب اس کی لمبائی کیا ہوگی؟



ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کی لمبائی $4\frac{4}{10}$ اکائیوں اور $4\frac{5}{10}$ اکائیوں کے درمیان ہوگی۔ لیکن ہم اس کی درست پیمائش نہیں بتا سکتے کیوں کہ اس پر نشان موجود نہیں ہیں۔ پہلے ہم نے ایک اکائی کو 10 دسویں حصے میں تقسیم کیا تھا تا کہ چھوٹی لمبائیوں کی پیمائش کرسکیں۔ اسی طرح ہم ہر دسویں حصے کو بھی 10 مزید حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

؟ اس چھوٹے حصے کی لمبائی کیا ہے؟ ایک اکائی کی لمبائی میں اس طرح کے کتنے چھوٹے حصے ہوں گے؟

جیسا کہ نیچے تصویر میں دکھایا گیا ہے، ہر دسویں حصے کے 10 مزید چھوٹے حصے ہیں اور ایک اکائی میں کل 10 دسویں حصے ہوتے ہیں۔ لہٰذا، ایک اکائی میں کل 100 چھوٹے حصے ہوں گے۔ پس ایک چھوٹے حصے کی لمبائی ایک اکائی کا $\frac{1}{100}$ ہوگی۔



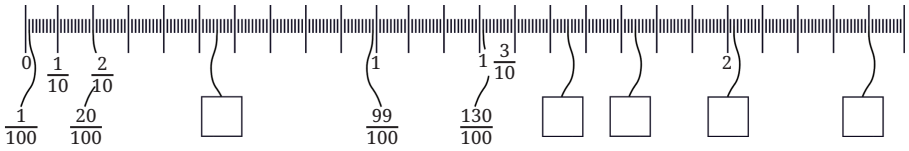
اب ہم اپنے سوال کی طرف واپس آتے ہیں کہ موڑے ہوئے کاغذ کی لمبائی کیا ہے؟

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ $4\frac{4}{10}\frac{5}{100}$ پہ ختم ہو رہی ہے، جسے **4 اکائیاں اور 4 دسویں اور 5 سوویں حصے** پڑھا جاتا ہے۔

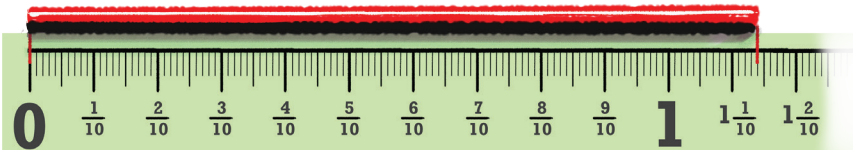
؟ کتنے سوویں حصے مل کر ایک دسویں حصے بناتے ہیں؟ کیا ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ یہ لمبائی 4 اکائیاں اور 45 سوویں حصے ہیں؟

ریاضی بات چیت

؟ نیچے دی گئی شکلوں کا مشاہدہ کیجیے۔ نشانات اور ساتھ میں دی گئی لمبائیوں پر غور کیجیے جو صفر '0' سے ماپی گئی ہیں۔ خالی خانوں میں لمبائیاں لکھیے۔



پہلی تصویر میں تار کی لمبائی تین مختلف طریقوں سے دی گئی ہے۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کس طرح یہ سب ایک ہی لمبائی کو ظاہر کرتے ہیں؟

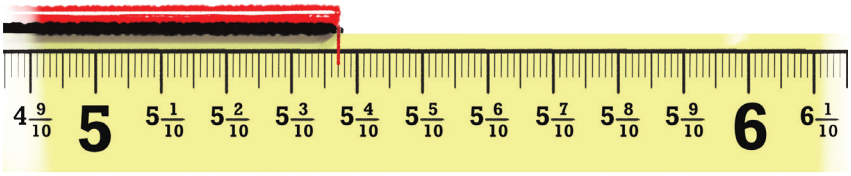


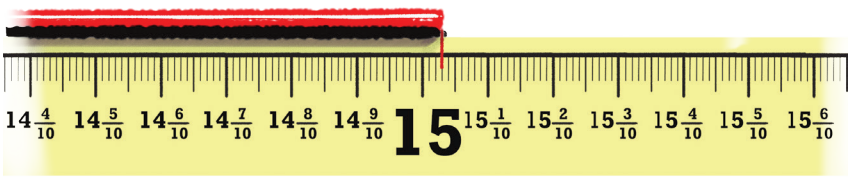
$1\frac{1}{10}\frac{4}{100}$ ایک اکائی اور ایک دسواں حصّہ اور چار سوویں حصّے

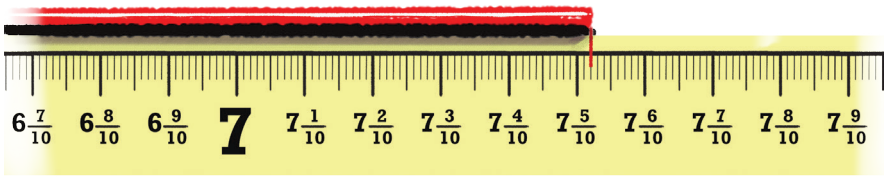
$1\frac{14}{100}$ ایک اکائی اور چودہ سوویں حصّے

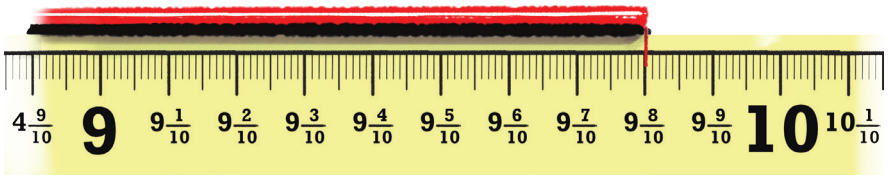
$\frac{114}{100}$ ایک سو چودہ سوویں حصّے

؟ نیچے دی گئی لمبائیوں کو دیکھ کر الفاظ میں ان کی پیمائش لکھیے اور انھیں بلند آواز سے پڑھیے۔







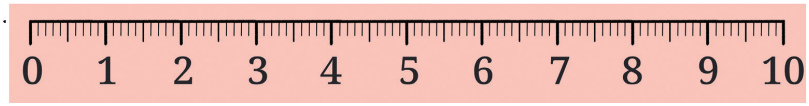


ہر گروپ میں لمبائی کے اعتبار سے سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی کی پہچان کیجیے۔ پیمانے پر ہر لمبائی کی نشان دہی بھی کیجیے۔

(a) $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{33}{100}$



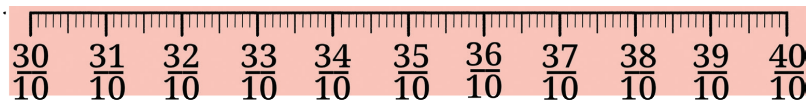
(b) $3\frac{1}{10}, \frac{30}{10}, 1\frac{3}{10}$



(c) $\frac{45}{100}, \frac{54}{100}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}$



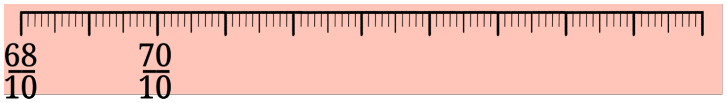
(d) $3\frac{6}{10}, 3\frac{6}{100}, 3\frac{6}{10}\frac{6}{100}$



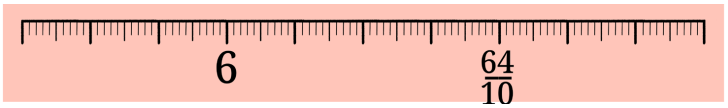
(e) $\frac{8}{10}\ \frac{2}{100}, \frac{9}{100}, 1\frac{8}{100}$



(f) $7\frac{3}{10}\ \frac{5}{100}, 7\frac{5}{10}, 7\frac{41}{100}$



(g) $\frac{65}{10}\ \frac{15}{100}, 5\frac{87}{100}, 5\frac{7}{100}$



$15\frac{3}{10}\ \frac{4}{100}$ اور $2\frac{6}{10}\ \frac{8}{100}$ کا حاصل جمع کیا ہو گا؟

اسے مختلف طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔ کچھ طریقے نیچے دیے گئے ہیں۔

(a) (Method) 1 طریقہ

$$(15 + 2) + \left(\frac{3}{10} + \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{4}{100} + \frac{8}{100}\right)$$

$$= 17 + \frac{9}{10} + \frac{12}{100}$$

$$= 17 + \frac{9}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$$

$$= 17 + \frac{10}{10} + \frac{2}{100}$$

$$= 18\frac{2}{100}$$

10 سوویں حصے 1 دسویں حصے کے برابر ہے۔

(b) (Method) 2 طریقہ

$$\begin{array}{rrrr} & 15 & \frac{3}{10} & \frac{4}{100} \\ + & 2 & \frac{6}{10} & \frac{8}{100} \\ \hline = & 17 & \frac{9}{10} & \frac{12}{100} \\ = & 17 & \frac{10}{10} & \frac{2}{100} \\ = & 18 & & \frac{2}{100} \end{array}$$

کیا یہ دونوں طریقے مختلف ہیں؟

ریاضی بات چیت

نیچے دیے گئے 268 + 483 کے حاصل جمع کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا آپ کو اس میں اوپر دکھائے گئے طریقوں میں کوئی مماثلت نظر آتی ہے؟

$$\begin{aligned}&(400 + 80 + 3) + (200 + 60 + 8)\\ &= (400 + 200) + (80 + 60) + (3 + 8)\\ &= 600 + 140 + 11\\ &= 600 + 150 + 1\\ &= 700 + 50 + 1\\ &= 751\end{aligned}$$

ایک اور طریقہ یہ ہے کہ $15\frac{3}{10}\frac{4}{100} + 2\frac{6}{10}\frac{8}{100}$ کے سوویں حصے کو تبدیل کر کے حسب ذیل طریقے سے حاصل جمع نکالا جائے:

(c) $(15 + 2) + \left(\frac{34}{100} + \frac{68}{100}\right)$

$= 17 + \frac{102}{100}$

$= 17 + 1 + \frac{2}{100}$

$= 18\frac{2}{100}$

100 سوویں 1 اکائی کے برابر ہے۔

(d) $\left(\frac{1534}{100}\right) + \left(\frac{268}{100}\right)$

$= \frac{1802}{100}$

$= \frac{1800}{100} + \frac{2}{100}$

$= 18\frac{2}{100}$

15 برابر ہوتا ہے 1500 سوویں کے اور 2 برابر ہوتا ہے 200 سوویں کے۔

$25\frac{9}{10}\frac{7}{100} - 6\frac{4}{10}$ کی تفریق کیا ہے؟

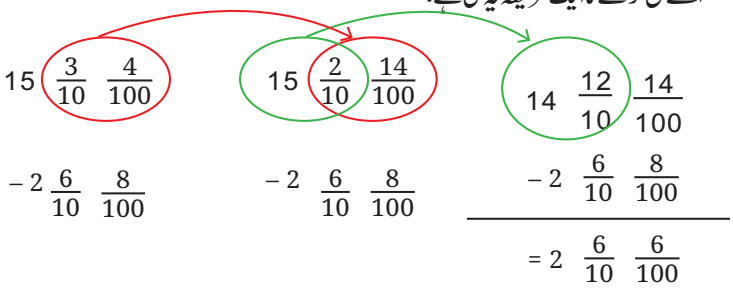
اسے حل کرنے کا ایک طریقہ یہ بھی ہے:

$$25\frac{9}{10} \longrightarrow 25\frac{8}{10}\frac{10}{100} \longrightarrow 25\frac{8}{10}\frac{10}{100}$$
$$-6\frac{4}{10} \qquad -6\frac{4}{10}\frac{7}{100} \qquad -6\frac{4}{10}\frac{7}{100}$$
$$= 19\frac{4}{10}\frac{3}{100}$$

؟ اسے سوویں حصے میں تبدیل کر کے حل کیجیے۔

$15\frac{3}{10}\frac{4}{100} - 2\frac{6}{10}\frac{8}{100}$ کی تفریق کیا ہے؟

اسے حل کرنے کا ایک طریقہ یہ بھی ہے:



؟ نیچے دی گئی 653-268 کی تفریق کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا آپ کو اس میں اور اوپر بتائے گئے طریقوں میں کوئی مماثلت نظر آتی ہے؟

$$
\begin{aligned}
&(600 + 50 + 3) - (200 + 60 + 8)\\
&= (600 - 200) + (50 - 60) + (3 - 8)\\
&= (600 - 200) + (40 - 60) + (13 - 8)\\
&= (600 - 200) + (40 - 60) + 5\\
&= (500 - 200) + (140 - 60) + 5\\
&= 300 + 80 + 5\\
&= 385
\end{aligned}
$$

؟ معلوم کیجیے

جمع اور تفریق معلوم کیجیے:

(a) $\frac{3}{10} + 3\frac{4}{100}$

(b) $9\frac{5}{10}\frac{7}{100} + 2\frac{1}{10}\frac{3}{100}$

(c) $15\frac{6}{10}\frac{4}{100} + 14\frac{3}{10}\frac{6}{100}$

(d) $7\frac{7}{100} - 4\frac{4}{100}$

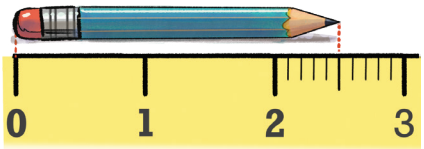
(e) $8\frac{6}{100} - 5\frac{3}{100}$

(f) $12\frac{6}{100}\frac{2}{100} - \frac{9}{10}\frac{9}{100}$

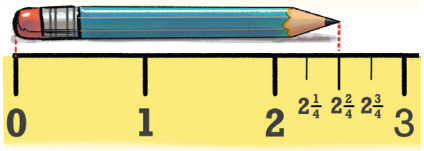
3.4 اعشاری مقامی قدر (Decimal Place Value)

آپ نے یقیناً محسوس کیا ہوگا کہ جب بھی ہمیں کسی چیز کو زیادہ درستگی سے ناپنے کی ضرورت پیش آتی ہے، تو ہم کسی ایک حصے کو دس (چھوٹے) برابر حصوں میں تقسیم کر لیتے ہیں یعنی ہم ایک اکائی کو 10 دسویں حصوں میں تقسیم کر لیتے ہیں، پھر ہر دسویں حصے کو مزید دس سوویں حصوں میں بانٹ لیتے ہیں، اور پھر انھیں چھوٹے حصوں کو پیمائش کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

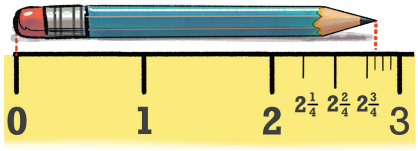
؟ کیا ہم ایک اکائی کو 4 برابر حصوں، 5 برابر حصوں، 8 برابر حصوں یا کسی اور تعداد میں برابر برابر تقسیم نہیں کر سکتے؟



جی ہاں، ہم بالکل ایسا کر سکتے ہیں۔ ذیل کی مثال یہ دکھاتی ہے کہ جب ایک ہی لمبائی کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور پھر جب اسے 4 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے تو وہ کیسے ظاہر ہوتی ہے؟



اگر مزید درست پیمائش درکار ہو تو ہر چوتھائی حصے کو مزید 4 برابر حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ہر حصہ ایک اکائی کا $\frac{1}{16}$ حصہ پیمائش کرتا ہے یعنی 16 ایسے حصے مل کر ایک اکائی بناتے ہیں۔



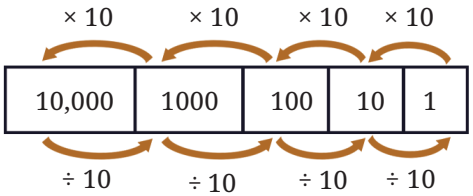
؟ تو پھر ہم ہر بار ایک اکائی کو 10 برابر حصوں میں ہی کیوں تقسیم کرتے ہیں؟

اس کی وجہ یہ ہے کہ ہندوستانی مقامی قدری نظام (Indian place value system) میں 10 کا ایک خاص کردار ہے۔ جب کسی صحیح عدد کو ہندوستانی مقامی قدری نظام کے تحت لکھا جاتا ہے تو ہر مقام کی قدر اس کے دائیں والے مقام کی قدر سے 10 گنا زیادہ ہوتی ہے مثلاً 284 میں 2 کی مقامی قدر سیکڑا (100)، 8 کی مقامی قدر دہائی (10) اور 4 کی اکائی (1) ہے۔ اسی طرح ہر مقام کی قدر اس کے بائیں والے مقام کی قدر سے 10 گنا کم ہوتی ہے:

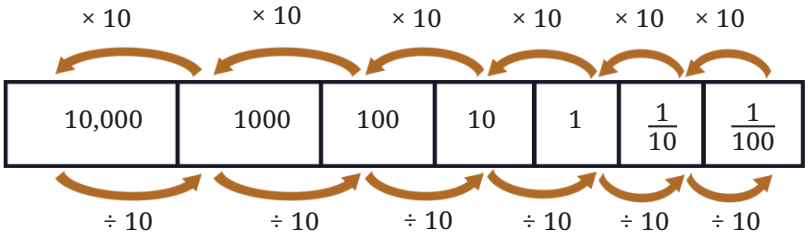
10 اکائیاں مل کر 1 دہائی بناتی ہیں۔

10 دہائیاں مل کر 1 سیکڑا بناتی ہیں۔

10 سیکڑا مل کر 1 ہزار بناتے ہیں، اور یہ سلسلہ یوں ہی آگے بڑھتا رہتا ہے۔



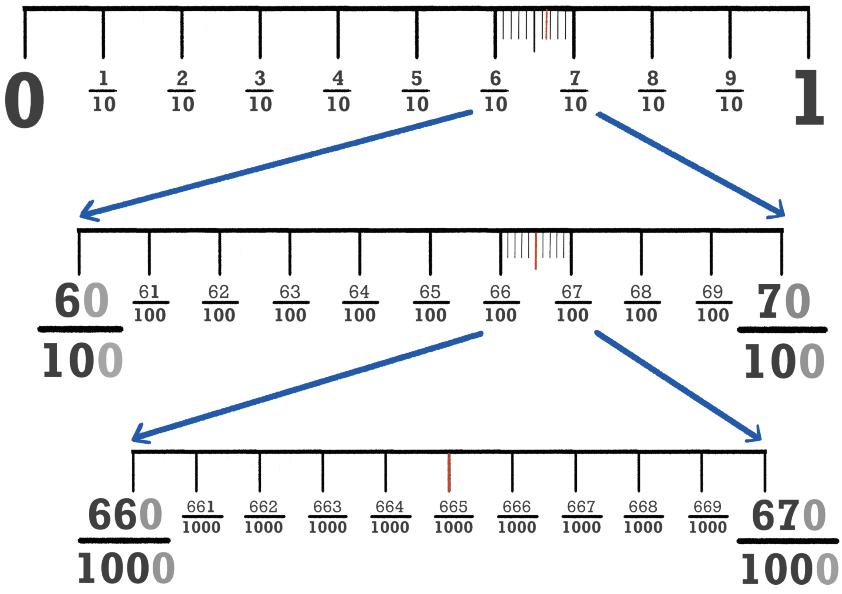
لہٰذا جب ہمیں ایک سے چھوٹی مقداروں کو ظاہر کرنا ہوتا ہے تو ہم اسی مقامی عددی (قدری) نظام کے تحت ایک اکائی کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس سے کیا حاصل ہوتا ہے؟ اس سے ہمیں ایک دسواں حصہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم پھر اس کو دوبارہ 10 حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں سو واں حصہ حاصل ہوتا ہے اور اس طرح یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔



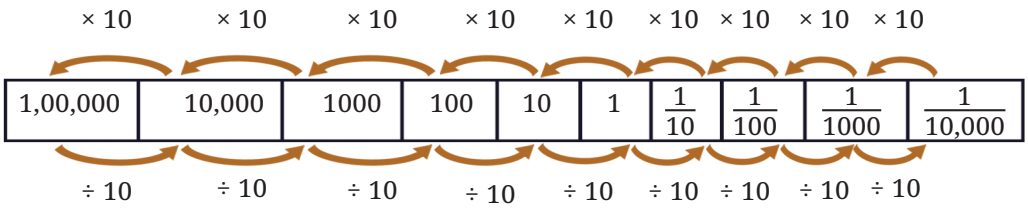
کیا ہم اسے مزید آگے بڑھا سکتے ہیں؟

جب $\frac{1}{100}$ کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو حاصل ہونے والی کسر کیا ہوگی؟

یہ $\frac{1}{1000}$ ہوگی، یعنی کہ ایک ہزار ایسے حصے مل کر ایک اکائی بناتے ہیں۔



جیسے ہم 10,000 کے بائیں جانب بڑھتے ہیں تو ہر قدم پر بڑی عددی قدریں حاصل ہوتی ہیں، اسی طرح ہم $\frac{1}{1000}$ کے دائیں جانب بڑھتے جائیں تو ہر قدم پر چھوٹی عددی قدریں حاصل ہوتی ہیں۔



عدد لکھنے کا یہ طریقہ ''اعشاری نظام'' (Decimal system) کہلاتا ہے چوں کہ یہ عدد 10 پر مبنی ہے؛ لاطینی زبان میں ''Decem'' کا مطلب دس ہوتا ہے، جو کہ سنسکرت لفظ दश سے مشابہ ہے، جس کا مطلب بھی 10 ہے۔ ہندوستان کی بہت سی زبانوں جیسے اوڈیا، کونکنی، مراٹھی، گجراتی، ہندی، کشمیری، بوڈو اور آسامی میں 10 کے لیے اسی طرح کے الفاظ موجود ہیں۔ اگلی جماعتوں میں ہم اعداد لکھنے کے دوسرے طریقے بھی سیکھیں گے۔

کتنا بڑا؟

ہم پہلے سے ہی جانتے ہیں کہ 10 سو مل کر 1000 بنتے ہیں اور 100 سو مل کر 10000 بنتے ہیں۔

ہم کسری حصوں کے متعلق بھی ایسے ہی سوالات پوچھ سکتے ہیں:

(a) کتنے ہزارویں حصے مل کر ایک اکائی بناتے ہیں؟

(b) کتنے ہزارویں حصے مل کر ایک دسواں بناتے ہیں؟

(c) کتنے ہزارویں حصے مل کر ایک سوواں بناتے ہیں؟

(d) کتنے دسویں حصے مل کر ایک دہائی بناتے ہیں؟

(e) کتنے سوویں حصے مل کر ایک دہائی بناتے ہیں؟

اسی طرح کے چند مزید سوالات بنائیے اور ان کے جواب دیجیے۔

اعداد کی علامت (Notation)، تحریر اور پڑھت

ہم اعداد کو ایک خاص انداز سے لکھتے آئے ہیں۔ جیسے 456، کو بجائے اس کے ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں:

(6 اکائیاں) 1×6 + (5 دہائیاں) 10× 5 + (4 سیکڑے) 4×100

اسی طرح کیا ہم دسواں اور سوواں لکھے بغیر بھی کام چلا سکتے ہیں؟

کیا مقدار $4\frac{2}{10}$ کو صرف 42 لکھا جا سکتا ہے؟ (یعنی $\frac{1}{10}$ ×2 میں سے $\frac{1}{10}$ کو چھوڑتے ہوئے)

ریاضی بات چیت

اگر ہاں، تو ہم یہ کیسے سمجھیں گے کہ 42 کا مطلب 4 دہائیاں اور 2 اکائیاں یا 4 اکائیاں اور 2 دہائیاں ہے؟

اسی طرح 705 کا مفہوم ہو سکتا ہے:

(a) 7 سیکڑے، 0 دہائیاں اور 5 اکائیاں $(700 + 0 + 5)$

(b) 7 دہائیاں، 0 اکائیاں اور 5 دسواں $\left(70 + 0 + \frac{5}{10}\right)$

(c) 7 اکائیاں، 0 دسواں اور 5 سوواں $\left(7 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}\right)$

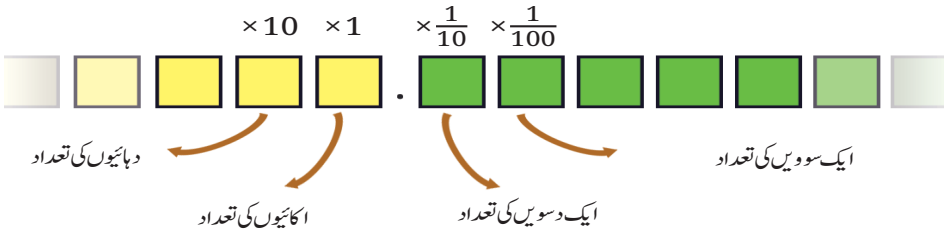
چوں کہ یہ مختلف مقداریں ہیں، اس لیے ہمیں ان کو لکھنے کے مختلف طریقے اختیار کرنے کی ضرورت ہے۔
صحیح اعداد (Integers) کی مقامی قدر کہاں ختم اور کسری حصے (Fractional parts) کہاں سے شروع ہوتے ہیں، اس کی مقامی قدر پہچاننے کے لیے، ہم ایک نقطہ یا علامت کا (’.‘) استعمال کرتے ہیں، جسے **اعشاری نقطے** (Decimal point) کہتے ہیں۔

مندرجہ ذیل مقداریں اعشاری علامت میں یوں لکھے جائیں گے:

مقدار (Quantity)	اعشاری علامت (Decimal Notation)
7 سیکڑے اور 5 اکائیاں $(700 + 0 + 5)$	705
7 دہائیاں اور 5 دسواں $\left(70 + 0 + \frac{5}{10}\right)$	70.5
7 اکائیاں اور 5 سوواں $\left(7 + 0 + \frac{5}{100}\right)$	7.05

ان اعداد کو مقامی قدر کے لحاظ سے کچھ اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

اعشاری عدد	سیکڑا	دہائی	اکائی	دسواں	سوواں
705	7×100	0×10	5×1		
70.5		7×10	0×1	$5 \times \frac{1}{10}$	
7.05			7×1	$0 \times \frac{1}{10}$	$5 \times \frac{1}{100}$



چناں چہ اعشاری علامات ہندوستانی مقامی قدری نظام کا ایک ایسا فطری تسلسل ہے، جو اعداد میں کسری حصوں کو بھی شامل کرتا ہے۔ جیسے کہ 705 کا مطلب ہوتا ہے (7×100+5×1)، 70.5 کا مطلب ہوتا ہے (7×10+5×$\frac{1}{10}$) اور 7.05 کا مطلب (7×1+ 5×$\frac{1}{100}$) ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اعداد کو اعشاری نقطے ('.') کے ساتھ کیسے لکھتے ہیں۔ لیکن ہم ان اعداد کو پڑھتے یا بولتے کیسے ہیں؟

ہم سب واقف ہیں کہ 705 کو **سات سو پانچ** پڑھا جاتا ہے۔

70.5 کو **ستر اعشاریہ پانچ یا ستر اور پانچ دسویں (مختصراً)** پڑھا جاتا ہے۔

7.05 کو **سات اعشاریہ صفر پانچ یا سات اور پانچ سوویں (مختصراً)** پڑھا جاتا ہے۔

0.274 کو **صفر اعشاریہ دو سات چار** پڑھتے ہیں۔ ہم اسے **صفر اعشاریہ دو سو چوہتر** نہیں پڑھتے ہیں کیوں کہ 0.274 کا مطلب ہوتا ہے **2 دسویں، 7 سوویں اور 4 ہزارویں۔**

? اوپر دی گئی جدول کے طرز پر ایک مقامی قدر کی جدول بنائیے۔ ہر مقدار کو اعشاری شکل میں اور مقامی قدر کے مطابق لکھیے اور پڑھیے:

(a) 2 اکائیاں، 3 دسویں اور 5 سوویں

(b) 1 دہائی اور 5 دسویں

(c) 4 اکائیاں اور 6 سوویں

(d) 1 سیکڑا، 1 اکائی اور 1 سوواں

(e) $\frac{8}{100}$ اور $\frac{9}{10}$

(f) $\frac{5}{100}$

(g) $\frac{1}{10}$

(h) $2\frac{1}{100}$ ، $4\frac{1}{10}$ اور $7\frac{7}{1000}$

ہم نے بڑے اعداد کے باب میں یہ سیکھا کہ 23 سیکڑوں (سو) کو کیسے لکھا جائے۔

23 سیکڑا (hundreds) = 23 × 100 = 2000 + 300 = 2300

ہزار	سیکڑا	دہائی	اکائی
	23		
2	3	0	0

اسی طرح 23 دہائیاں ہوں گی:

23 دہائی (tens) = 23 × 10 = 200 + 30 = 230

ہزار	سیکڑا	دہائی	اکائی
		23	
	2	3	0

234 دسویں ہم اعشاری شکل میں کس طرح لکھ سکتے ہیں؟

$$234\text{دسواں} = \frac{234}{10}$$

$$= \frac{200}{10} + \frac{30}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= 20 + 3 + \frac{4}{10}$$

$$= 23.4$$

سیکڑا	دہائی	اکائی	دسواں	سوواں
			234	
	2	3	4	

ان مقداروں کو اعشاریہ میں لکھیے: (a) 234 سوویں (b) 105 دسویں

3.5 پیمائشی اکائیاں (Units of Measurement)

لمبائی کی تبدیلی (Length Conversion)

ہم چند سالوں سے لمبائی کی پیمائش کے لیے پیمانہ کا استعمال کرتے آئے ہیں۔ ہمیں پہلے سے ہی پتہ ہے کہ:

1 سینٹی میٹر (cm) = 10 ملی میٹر (mm) ہوتا ہے۔

1 ملی میٹر میں کتنے سینٹی میٹر ہوتے ہیں؟

1 ملی میٹر = $\frac{1}{10}$ سینٹی میٹر = 0.1 سینٹی میٹر (یعنی ایک سینٹی میٹر کا ایک دسواں حصّہ)

کتنے سینٹی میٹر ہوتے ہیں (a) 5 ملی میٹر؟ (b) 12 ملی میٹر؟

$$5 \text{ mm} = \frac{5}{10} \text{ cm} = 0.5 \text{ cm}$$

$$12 \text{ mm} = 10 \text{ mm} + 2 \text{ mm}$$

$$= 1 \text{ cm} + \frac{2}{10} \text{ cm}$$

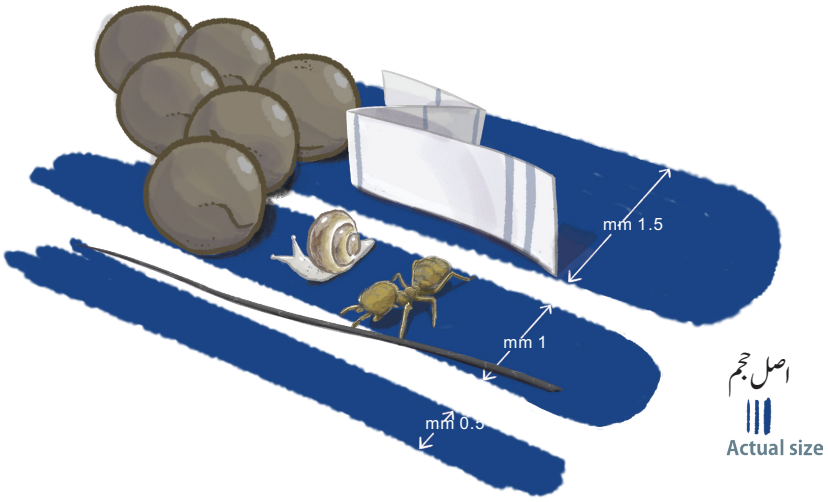
$$= 1.2 \text{ cm}$$

5.6 سینٹی میٹر میں کتنے ملی میٹر ہوتے ہیں؟ چوں کہ ہر 1 سینٹی میٹر میں 10 ملی میٹر ہوتے ہیں، 5.6 سینٹی میٹر (5 سینٹی میٹر +0.6 سینٹی میٹر) میں 56 ملی میٹر ہوتا ہے۔

؟ درج ذیل خالی جگہوں کو پُر کیجیے (ملی میٹر <–> سینٹی میٹر)

12 mm = 1.2 cm	56 mm = 5.6 cm	70 mm = _____
_____ = 0.9 cm	134 mm =_____	_____ = 203.6 cm

نیچے کی تصویر سے پتہ چلتا ہے کہ کچھ چیزیں کتنی چھوٹی ہوتی ہیں! ہر چیز کی ایک تخمینی پیمائش کرنے کی کوشش کیجیے:



- تین نیلی لکیریں قلم کی مختلف نوکوں: (باریک، درمیانی اور موٹی) کے حجم کی نمائندگی کرتی ہیں۔
- انسانی بال کی موٹائی تقریباً 0.1 ملی میٹر ہوتی ہے۔
- اخبار کی موٹائی 0.05 سے 0.08 ملی میٹر کے درمیان ہوسکتی ہے۔
- رائی کے دانوں کی موٹائی 2–1 ملی میٹر ہوتی ہے۔
- اب تک دریافت کی جانے والی سب سے چھوٹی چیونٹی کی نسل "کارابیرابرونی" (Carabera Bruni) ہے، جس کی کل لمبائی 0.8 سے 1 ملی میٹر تک ہوتی ہے۔ یہ سری لنکا اور چین میں پائی جاتی ہے۔
- خشکی میں اب تک پائی جانے والی سب سے چھوٹے گھونگھے کی قسم "ایکمیلا نانا" (Acmella Nana) ہے، جس کے خول کا قطر 0.7 ملی میٹر ہوتا ہے۔ یہ ملیشیا میں پایا جاتا ہے۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ 1 میٹر (m) = 100 سینٹی میٹر (cm) ہوتا ہے اس کی بنیاد پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ ؛

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0.01 \text{ m}$$

کتنے میٹر ہوتے ہیں (a) 10 سینٹی میٹر؟ (b) 15 سینٹی میٹر؟

$$10 \text{ cm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0.1 \text{ m}$$

چوں کہ ہر سینٹی میٹر، میٹر کا سوواں حصہ ہوتا ہے، اس لیے 15 سینٹی میٹر کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے ؛

$$15 \text{ cm} = \frac{15}{100} \text{ m}$$

$$= \frac{10}{100} \text{ m} + \frac{5}{100} \text{ m}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ m} + \frac{5}{100} \text{ m}$$

$$= 0.15 \text{ m}$$

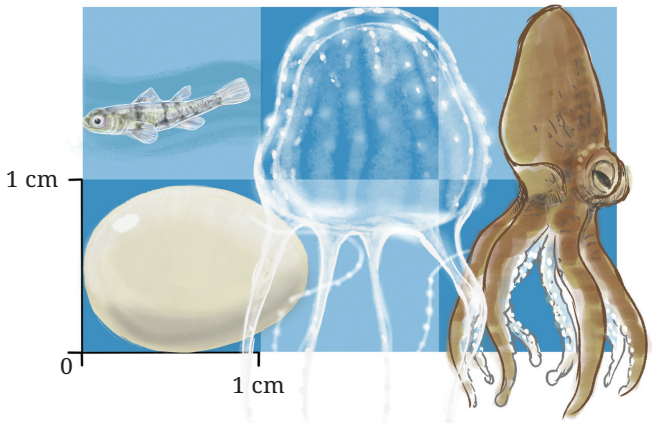
نیچے دیے گئے خانوں کو پُر کیجیے (سینٹی میٹر <–> میٹر):

36 cm = _____	50 cm = _____	_____ = 0.89 m
4 cm = _____	325 cm = _____	_____ = 2.07 m

ایک میٹر میں کتنے ملی میٹر ہوتے ہیں؟

کیا ہم 1 ملی میٹر = $\frac{1}{1000}$ میٹر لکھ سکتے ہیں؟

یہاں فطرت میں موجود چھوٹی چیزوں کے متعلق کچھ اور دل چسپ حقائق دیے گئے ہیں!



- شکرخورا (Humming bird) کاانڈاعام طور سے 1.3 سینٹی میٹر لمبااور 0.9 سینٹی میٹر چوڑاہوتاہے۔
- فلیپن گوبی تقریباً 0.9 سینٹی میٹر لمبی ہوتی ہے۔یہ فلیپن اور دیگر جنوب مشرقی ایشیائی ممالک میں پائی جاتی ہے۔
- سب سے چھوٹی معروف جیلی مچھلی ایروکانڈ جی(Irukandji) کی گھنٹی کا سائز 0.5 سینٹی میٹر سے 2.5 سینٹی میٹر ہوتاہے۔اس کے ریشۂ حاسہ(Tentacles) ایک میٹر تک لمبے ہوسکتے ہیں۔یہ آسٹریلیا میں پائی جاتی ہے۔ اس کا زہر انسانوں کے لیے مہلک ہوسکتاہے۔
- وولفی آکٹوپس (Wolfi Octopus) جسے اسٹارسکر پیگمی آکٹوپس (Star-sucker Pygmy Octopus) بھی کہاجاتاہے،دنیا کا سب سے چھوٹا معروف آکٹوپس ہے۔ان کا عام سائز تقریباً 1–2.5 سینٹی میٹر ہوتاہے اور ان کا وزن 1 گرام سے کم ہوتاہے۔یہ بحرالکاہل (Pacific Ocean) میں پائے جاتے ہیں۔

وزن کی تبدیلی

آیئے کلوگرام پر نظر ڈالیں۔ہم جانتے ہیں کہ 1 کلوگرام (kg) = 1000 گرام(gm)ہوتاہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ؛

$$1\ g = \frac{1}{1000}\ kg = 0.001\ kg$$

5 گرام میں کتنے کلوگرام ہوتے ہیں؟

$$5\ g = \frac{5}{1000}\ kg = 0.005\ kg$$

10 گرام میں کتنے کلوگرام ہوتے ہیں؟

$$10\ g = \frac{10}{1000}\ kg = \frac{1}{100}\ kg = 0.010\ kg$$

چوں کہ ہرگرام ایک کلوگرام کاہزارواں حصہ ہوتاہے،تو 254 گرام کو ایسے لکھ سکتے ہیں:

$$254\ g = \frac{254}{1000}\ kg$$

$$= \left(\frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{4}{1000}\right) kg$$

$$= \left(\frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}\right) kg$$

$$= 0.254\ kg$$

❓ خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔ (گرام <-> کلوگرام)

465 g = _____	68 g = _____	1560 g = _____
704 g = _____	_____ = 0.56 kg	_____ = 2.5 kg

نیچے دی گئی تصویر کو دیکھیے جس میں چاول کی مختلف مقداریں دکھائی گئی ہیں۔ یہ 1 گرام کے ڈھیر سے شروع ہو کر ہر اگلا ڈھیر پچھلے ڈھیر سے 10 گنا زیادہ وزنی ہیں۔ اس تصویر میں چاولوں کا کل وزن 11.111 کلوگرام ہے۔



ساتھ ہی،

1 گرام(g)=1000 ملی گرام(mg)۔ لہٰذا 1 ملی گرام = $\frac{1}{1000}$ گرام = 0.001 گرام۔

روپے کو پیسے میں بدلنا (Rupee — Paise conversion)

آپ نے پیسے کے بارے میں سنا ہوگا۔ 100 پیسے 1 روپے کے برابر ہوتے ہیں۔ جیسے ہمارے پاس روپیوں کے لیے سکّے اور نوٹ ہوتے ہیں۔ اسی طرح پہلے پیسوں کے سکّے بھی عام استعمال میں تھے۔ ماضی قریب میں 1 پیسے، 2 پیسے، 3 پیسے، 5 پیسے، 10 پیسے، 20 پیسے، 25 پیسے اور 50 پیسے کے سکّے رائج تھے۔ 25 پیسے اور اس سے کم مالیت والے تمام سکّے سال 2011 میں بند کر دیے گئے۔ لیکن ہمیں ابھی کہیں کہیں بل، کھاتوں کے گوشواروں وغیرہ میں پیسے دکھائی دیتے ہیں۔

1 روپیہ = 100 پیسے

1 پیسہ = $\frac{1}{100}$ روپیہ = 0.01 روپیہ

چوں کہ ہر پیسہ ایک روپے کا سو واں حصہ ہوتا ہے،

75 پیسے = $\frac{75}{100}$ روپے

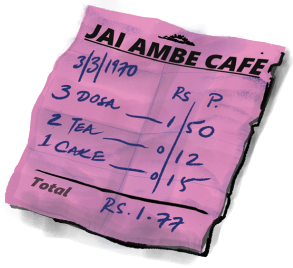
$$\text{روپیہ} \left(\frac{70}{100} + \frac{5}{100} \right) =$$

$$\text{روپیہ} \left(\frac{7}{10} + \frac{5}{100} \right) =$$

$$= 0.75 \text{ روپیہ}$$

؟ نیچے دیے خالی جگہوں کو پر کیجیے (روپیہ <–> پیسہ)

10 p = _____	_____p = ₹ 0.05	_____p = ₹ 0.36
_____ = ₹ 0.50	99 p = _____	250 p = _____



1970 کی دہائی کے دوران، ایک مصالحہ ڈوسہ کی قیمت صرف 50 پیسہ تھی، ایک کیلا 20 سے 25 پیسوں میں خریدا جا سکتا تھا، مٹھی بھر پودینے کی گولیاں 2 یا 3 پیسوں میں ملتی تھیں اور ایک کلوگرام چاول کی قیمت 2.45 روپیہ تھی۔

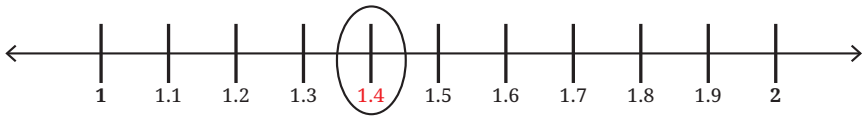
کوشش کیجیے

گھر یا اسکول میں بڑوں سے گفتگو کیجیے کہ ان کے بچپن میں مختلف مصنوعات اور خدمات کی قیمتیں کیا تھیں۔ پرانے سکوں (Coins) اور ڈاک ٹکٹوں (Stamps) کو تلاش کرنے کی کوشش کیجیے۔

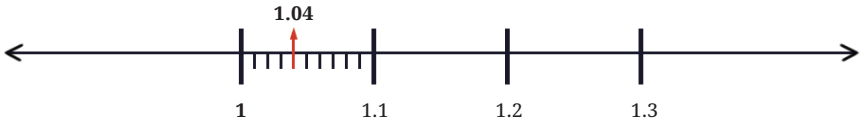


3.6 اعشاری اعداد کو تلاش کرنا اور موازنہ کرنا

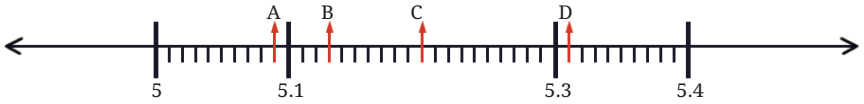
فرض کیجیے 1.4 ایک اعشاری عدد ہے، جو 1 اکائی اور چار دسویں کے برابر ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ 1 اور 2 کے درمیانی اکائی کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا اور ان میں سے 4 حصے لیے گئے تو 1 اور 2 کے درمیان 1.4 ملا۔ اب ہم عددی خط بناتے ہیں اور 1 اور 2 کی درمیانی اکائی کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ پھر اس کا چوتھا حصہ لیتے ہیں، تب ہمارے پاس عددی خط پر 1.4 آتا ہے۔



؟ 1 اور 1.1 کے درمیان موجود تمام تقسیمات کو عددی خط پر دکھایئے۔



؟ حروف کے ساتھ دیے گئے اعشاریہ کی شناخت کیجیے اور لکھیے۔



صفر کی کشمکش!

؟ سونو کے مطابق 0.2 کو 0.20، 0.200 کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے؛ زارا کا خیال ہے کہ دائیں جانب صفر لگانے سے اعشاری عدد کی قدر بدل سکتی ہے۔ آپ کا کیا خیال ہے؟

ہم اس بات کی تصدیق مقامی قدر کے ذریعے ان اعداد کی مقدار کو دیکھ کر کر سکتے ہیں۔

اعشاری عدد	اکائیاں	دسواں	سوواں	ہزارواں
0.2	0	2		
0.20	0	2	0	
0.200	0	2	0	0
0.02	0	0	2	
0.002	0	0	0	2

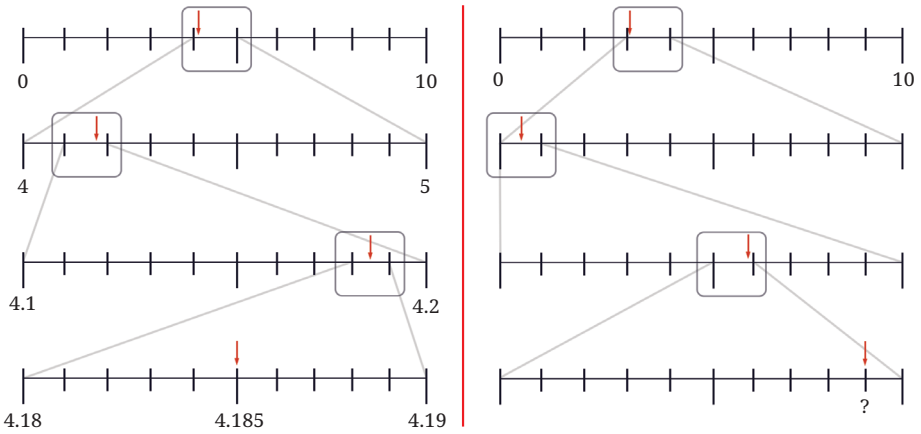
ہم دیکھ سکتے ہیں کہ 0.2, 0.20 اور 0.200 سب برابر ہیں کیوں کہ یہ ایک ہی مقدار یعنی 2 دسواں حصے کو ظاہر کرتے ہیں۔ لیکن 0.2، 0.02 اور 0.002 مختلف ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان میں سے کون سب سے چھوٹا اور کون سب سے بڑا ہے؟

ان میں سے کون سے اعداد برابر ہیں: 4.5، 4.05، 0.405، 4.050، 4.50، 4.005، 04.50؟

نیچے دی گئی شکل (a) میں دکھائے گئے عددی خط کا مشاہدہ کیجیے۔ ہر سطح پر عددی خط کے کسی مخصوص حصے کو بڑھا چڑھا کر دکھایا گیا ہے تاکہ اعشاری عدد 4.185 کی درست جگہ دکھائی جا سکے۔

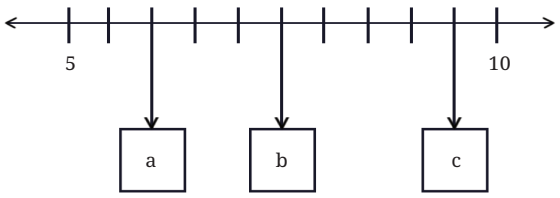
شکل (b) میں آخری عددی خط پر '؟' سے ظاہر کردہ اعشاری عدد کی شناخت کیجیے۔



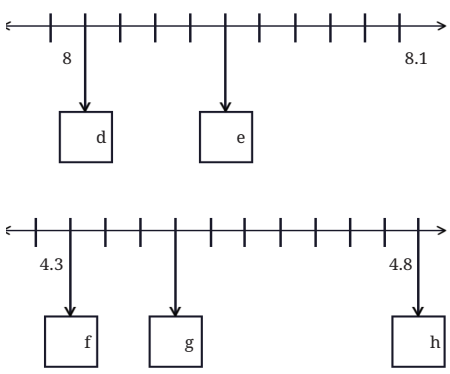
(a) (b)

ان اعشاری اعداد کے لیے ایسے ہی عددی خطوط بنائیے: (a) 9.876 (b) 0.407

نیچے دکھائے گئے عددی خط میں 'a'، 'b' اور 'c' خانے کن اعشاری اعداد کو ظاہر کرتے ہیں؟



'b' والے خانے کا تعلق اعشاری عدد 7.5 سے ہے، کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کیسے؟ 5 اور 10 کے درمیان '5' اکائیاں ہیں، جنھیں 10 برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس طرح ہر 2 تقسیمات 1 اکائی بناتی ہیں اور اس طرح ہر تقسیم نصف اکائی $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے، تو خانہ 'a' اور 'c' کن اعداد کو ظاہر کرتے ہیں؟



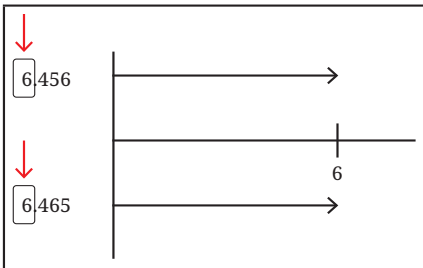
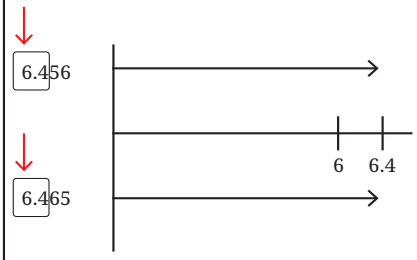
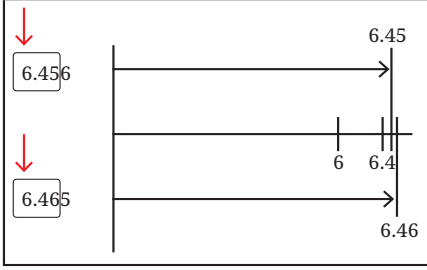
؟ اسی قسم کی دلیل کا استعمال کرتے ہوئے نیچے دیے گئے خانوں میں اعشاری اعداد کا تعین کیجیے۔

؟ کون بڑا ہے: 6.456 یا 6.465 ؟

اس کا جواب دینے کے لیے، ہم عددی خط کا استعمال کر سکتے ہیں تا کہ دونوں اعشاری اعداد کی جگہ معلوم کی جائے اور دکھایا جائے کہ کون بڑا ہے۔

یہ کام ہر مقامی قدر پر متعلقہ اعداد کا موازنہ کر کے بھی اسی طرح کیا جا سکتا ہے، جیسے ہم مکمل اعداد (Whole Number) کا موازنہ کرتے ہیں۔

یہ موازنہ نیچے بصری شکل میں مرحلہ وار دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ یہ بصری خاکہ درست تناسب (Scale) پر نہیں ہے۔

	دونوں اعداد میں 6 اکائیاں ہیں۔
	دونوں اعداد میں 6 اکائیاں اور 4 دسویں ہیں۔
	دونوں اعداد میں 6 اکائیاں اور 4 دسویں ہیں، لیکن پہلے عدد میں صرف 5 سوویں ہیں، جب کہ دوسرے عدد میں 6 سوویں ہیں۔

ہم سب سے زیادہ اہمیت رکھنے والے دو اعداد (یعنی سب سے بڑی عددی قدر والے ہندسے) سے موازنہ کرتے ہیں۔ اگر ہندسے ایک جیسے ہوں تو، ہم اگلے چھوٹے مقامی قدر والے ہندسے کا موازنہ کرتے ہیں۔ ہم اس وقت تک آگے بڑھتے ہیں جب تک ہمیں کوئی ایسا مقام نہ مل جائے جہاں دونوں ہندسے مختلف ہوں۔ اس مقام پر عدد میں جو بڑا ہندسہ ہو، وہی ان دونوں عدد میں بڑا ہوتا ہے۔

ریاضی بات چیت

؟ ہم اس مقام پر موازنہ کیوں روک سکتے ہیں؟ کیا ہم اس بات کا یقین کر سکتے ہیں کہ اس کے بعد جو بھی ہندسے ہوں گے وہ ہمارے نتیجے پر اثرانداز نہیں ہوں گے؟

ان میں سے کون سا اعشاری عدد بڑا ہے؟

(a) 1.23 یا 1.32

(b) 3.81 یا 13.800

(c) 1.009 یا 1.090

قریب ترین اعشاری اعداد

اعشاری اعداد 0.9، 1.1، 1.01 اور 1.11 پر غور کیجیے۔ ایسا اعشاری عدد تلاش کیجیے جو 1 کے سب سے قریب ہو۔

آیئے ان اعشاری اعداد کا موازنہ کرتے ہیں۔ انھیں صعودی ترتیب میں رکھنے پر ہمیں 1.11 > 1.1 > 1.01 > 1 > 0.9 حاصل ہوتا ہے۔ 1 کے پڑوسیوں میں 1.01 کی دوری 1 سے صرف $\frac{1}{100}$ ہے، جب کہ 0.9 کی دوری 1 سے $\frac{10}{100}$ ہے۔ لہٰذا 1.01، 1 کے سب سے قریب ہے۔

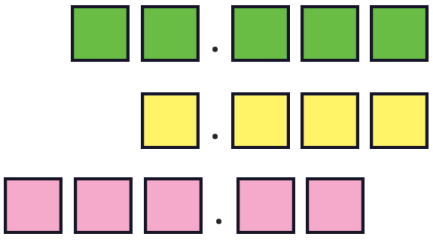
؟ مندرجہ بالا میں سے کون سا 1.09 کے قریب ترین ہے؟

؟ ان میں سے کون سا عدد 4 کے قریب ترین ہے: 3.56، 3.65، 3.099؟

؟ ان میں سے کون سا عدد 1 کے قریب ترین ہے: 0.8، 0.69، 1.08؟

ریاضی بات چیت

؟ نیچے دی گئی ہر شکل میں 4، 1، 8، 2 اور 5 کے ہندسوں کو صرف ایک مرتبہ استعمال کرتے ہوئے ایسا اعشاری عدد بنایئے جو 25 کے سب سے قریب ہو۔



3.7 اعشاری اعداد کی جمع اور تفریق

پریا کو اپنی اسکرٹ کے لیے 2.7 میٹر کپڑے کی ضرورت ہے اور شیلجا کو اپنی قمیض کے لیے 3.5 میٹر کپڑے کی ضرورت ہے۔ کل کتنی مقدار میں کپڑے کی ضرورت ہے؟

ہمیں 2.7 میٹر +3.5 میٹر کا حاصل جمع نکالنا ہے۔

پہلے ہم نے دیکھا تھا کہ $2\frac{7}{10} + 3\frac{5}{10}$ کو جمع کیسے کیا جاتا ہے؟ (اسے نیچے بھی دکھایا گیا ہے)۔ کیا آپ اعشاری علامت کا استعمال کرتے ہوئے بھی اس جمع کو حل کر سکتے ہیں؟ اس کا طریقہ نیچے دکھایا گیا ہے۔

اپنے مشاہدات بتائیے۔

کل درکار کپڑے کی مقدار 6.2 میٹر ہے۔

$$\begin{array}{r} 2\ \frac{7}{10} \\ +\ 3\ \frac{5}{10} \\ \hline =\ 5\ \frac{12}{10} \\ =\ 6\ \frac{2}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2.7 \\ +\ 3.5 \\ \hline =\ 6.2 \end{array}$$

شیلجا کا کپڑا پریا کے کپڑے سے کتنا لمبا ہے؟

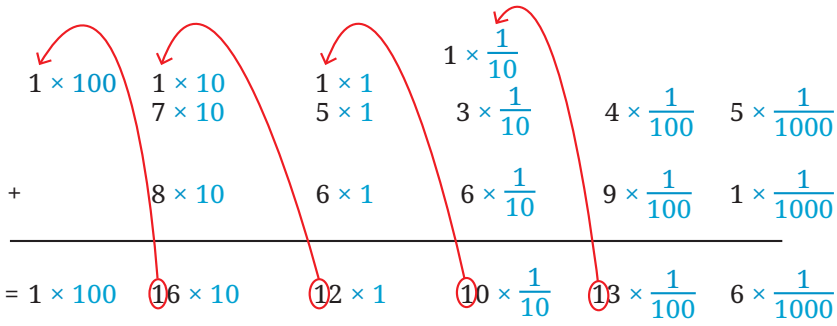
اس کے لیے ہمیں 3.5 میٹر – 2.7 میٹر کا فرق معلوم کرنا ہے۔ پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ $3\frac{5}{10} - 2\frac{7}{10}$ کا فرق اور 3.5 میٹر – 2.7 میٹر کیسے حساب کیا جاتا ہے۔

$$3\ \frac{5}{10} \longrightarrow 2\ \frac{15}{10} \qquad 3.5 \longrightarrow {\scriptstyle 2\ 1}\not{3}.5$$

$$\begin{array}{r} -\ 2\ \frac{7}{10} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 2\ \frac{7}{10} \\ \hline =\ 0\ \frac{8}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 2.7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 2.7 \\ \hline =\ 0.8 \end{array}$$

جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، مکمل اعداد کے جمع اور تفریق کے لیے جو عمومی طریقہ کار ہوتا ہے وہی طریقہ اعشاری اعداد کی جمع اور تفریق میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

75.345+86.691 کے حاصل جمع کے لیے مقامی قدر کی تفصیلی وضاحت نیچے دی گئی ہے۔ اس کا مختصر طریقہ کار اس کے ساتھ دکھایا گیا ہے۔



کوشش کیجیے

? 84.691 – 77.345 کے لیے تفصیلی مقامی قدر کا حساب اور اس کا مختصر طریقہ کار بھی لکھیے۔

? معلوم کیجیے

1. حاصل جمع معلوم کیجیے

(a) 5.3 + 2.6 (b) 18 + 8.8

(c) 2.15 + 5.26 (d) 9.01 + 9.10

(e) 29.19 + 9.91 (f) 0.934 + 0.6

(g) 0.75 + 0.03 (h) 6.236 + 0.487

2. تفریق کیجیے

(a) 5.6 – 2.3 (b) 18 – 8.8

(c) 10.4 – 4.5 (d) 17 – 16.198

(e) 17 – 0.05 (f) 34.505 – 18.1

(g) 9.9 – 9.09 (h) 6.236 – 0.487

اعشاریہ تسلسل (Decimal Sequences)

اس اعشاریائی تسلسل کا مشاہدہ کیجیے اور ہر رکن کے بعد آنے والی تبدیلی کو پہچانیے۔

4.4, 4.8, 5.2, 5.6, 6.0, ...

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہر رکن میں 0.4 کا اضافہ کیا جا رہا ہے تاکہ اگلا رکن حاصل کیا جا سکے۔

? اس تسلسل کو جاری رکھیے اور اگلے تین ارکان لکھیے۔

اسی طرح تبدیلی کی شناخت کیجیے اور نیچے دیے گئے اور ہر تسلسل کے لیے اگلے 3 ارکان لکھیے۔ اس حساب کو ذہنی طور پر کرنے کی کوشش کیجیے۔

(a) 4.4, 4.45, 4.5, ...
(b) 25.75, 26.25, 26.75, ...
(c) 10.56, 10.67, 10.78, ...
(d) 13.5, 16, 18.5, ...
(e) 8.5, 9.4, 10.3, ...
(f) 5, 4.95, 4.90, ...
(g) 12.45, 11.95, 11.45, ...
(h) 36.5, 33, 29.5, ...

؟ اپنے تسلسل خود بنائیے اور اپنے ہم جماعتوں کو اس پیٹرن کو آگے بڑھانے کے لیے چیلنج کیجیے۔

جمع اور تفریق کا تخمینہ لگانا

سونو نے اعشاری اعداد کی جمع اور تفریق کے تخمینے کا مشاہدہ کیا اور کہا کہ ”اگر ہم دو اعشاری اعداد کو جمع کرتے ہیں تو ان کا حاصل جمع ہمیشہ ان کے مکمل عددی حصوں کے حاصل جمع سے بڑا ہوگا۔ نیز یہ حاصل جمع ان کے مکمل عددی حصوں کے حاصل جمع میں 2 سے زیادہ عدد سے ہمیشہ کم ہوگا۔“

آیئے اس دعوے کو ایک مثال سے سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں:

اگر جمع کیے جانے والے دو اعداد 25.936 اور 8.202 ہو تو سونو کے دعوی کے مطابق ان کا حاصل جمع 25+8 (مکمل عددی حصّہ) سے بڑا ہوگا اور ان کا مجموعہ 1+8+1+25 سے چھوٹا ہوگا۔

ریاضی بات چیت

؟ اس دعوے کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا یہ 2 اعشاریہ اعداد کے لیے ہمیشہ درست ہوگا؟

کوشش کیجیے

؟ 25.93603259 اور 8.202 کے حاصل جمع کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

؟ اسی طرح کوئی ایسا طریقہ بتایئے جس سے دو اعشاری اعداد کی تفریق کے لیے یہ اندازہ لگایا جاسکے کہ ان کی تفریق کن مکمل اعداد کے درمیان ہوگی۔

استاد کے لیے نوٹ: حساب کے پہلے نتیجے کا تخمینہ لگانا حل میں ہونے والی کسی غلطی کو پہچاننے میں مدد کرسکتا ہے۔

3.8 اعشاری نظام کے بارے میں مزید معلومات

اعشاری نقطے اور پیمائش کی غلطی کے خطرناک نتائج

اعشاری نقطہ اور اکائی کی تبدیلی میں ہونے والی غلطیاں بعض اوقات معمولی معلوم ہوتی ہیں لیکن یہ سنگین مسائل کا باعث بن سکتی ہیں۔ یہاں کچھ اصل واقعات پیش کیے گئے ہیں جن میں ایسی غلطیوں کی وجہ سے بڑے مسائل پیدا ہوئے۔

- 2013 میں ایمسٹرڈم سٹی کونسل (نیدرلینڈ) کے مالیاتی دفتر نے غلطی سے رہائشی امداد میں 188€ ملین بھیج دیے جب کہ مطلوبہ رقم 1.8€ ملین تھی، یہ غلطی ایک پروگرامنگ کی خرابی کی وجہ سے ہوئی، رقم یورو سینٹس کے بجائے مکمل یورو میں رقم ادا کر دی گئی۔ (1 یورو سینٹ = 1/100 یورو)
- 1983 میں، ایک اعشاری غلطی سے ایئر کینیڈا کی بوئنگ 767 پر ایک بڑا حادثہ ہوتے ہوئے بچا۔ گراؤنڈ اسٹاف نے ایندھن کا غلط حساب لگاتے ہوئے 22,300 پاؤنڈ لوڈ کیا جب کہ کلوگرام کی ضرورت تھی، جو کہ تقریباً نصف مقدار ہے (1 پاؤنڈ ~ 0.453 کلوگرام)۔ اس لیے ہوائی جہاز کا ایندھن پرواز کے دوران ختم ہونے لگا جس کی وجہ سے پائلٹ کو ایک متروک ایئر فیلڈ پر ہنگامی (Emergency) لینڈنگ کرانی پڑی۔ خیر خوش قسمتی سے سبھی مسافر زندہ بچ گئے۔

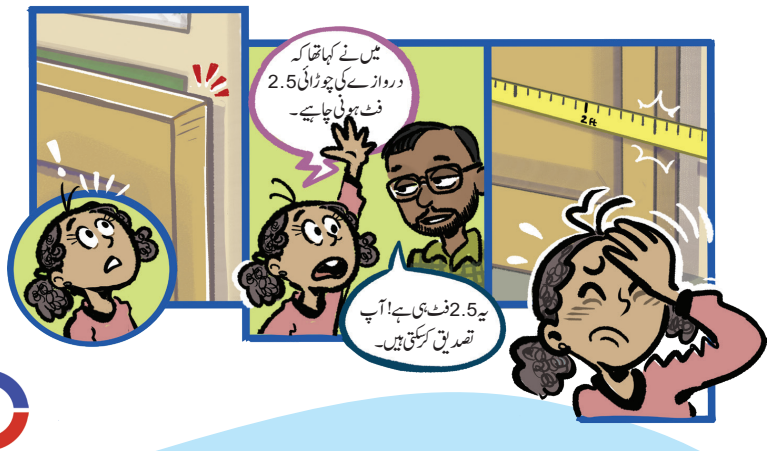
دوائیاں دیتے وقت اعشاری اعداد کو غلط پڑھنے کی وجہ سے کئی حادثات پیش آئے ہیں۔ مثال کے طور پر، 0.05 ملی گرام کو 0.5 ملی گرام پڑھنا دوائی کی مقدار کو تجویز کردہ مقدار سے 10 گنا زیادہ استعمال کرنے کا باعث بن سکتا ہے۔ لہٰذا اکائیوں اور اعشاریہ نقطہ کی جگہ پر توجہ دینا اہم ہے۔

گمراہ کن اعشاری علامت

سریو کو ایک پیغام ملتا ہے: ”بس 4.5 گھنٹے بعد شام میں اسٹیشن پہنچے گی۔“ بس کب اسٹیشن پہنچے گی: شام 4:05، شام 4:50، شام 4:25؟

ان میں سے کسی وقت بھی نہیں! یہاں 0.5 گھنٹے کا مطلب ہے کہ ایک گھنٹے کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے اور اس میں سے 5 حصے لے لیے جائیں۔ ہر حصہ 6 منٹ (60 منٹ/10) لمبا ہو گا۔ 5 ایسے حصے 30 منٹ بناتے ہیں۔ لہٰذا بس شام 4:30 بجے اسٹیشن پہنچے گی۔

یہاں اعشاریہ غلطی کی ایک چھوٹی سی کہانی دی جا رہی ہے: ایک لڑکی نے ایک کھلے حصے کی چوڑائی کو 2 فٹ 5 انچ ناپا لیکن بڑھئی سے 2.5 فٹ چوڑا دروازہ بنانے کے لیے کہا۔ بڑھئی نے 2 فٹ 6 انچ چوڑا دروازہ بنایا (کیوں کہ 1 فٹ = 12 انچ، 0.5 فٹ = 6 انچ) اور اس طرح دروازہ مکمل طور پر بند نہیں ہوا۔



اگر آپ کرکٹ دیکھتے ہیں تو آپ نے اعشاریہ جیسے دکھنے والے عدد دیکھے ہوں گے۔ جیسے 'بقیہ اوور 5.5' ہیں۔ کیا اس کا مطلب 5 اوور اور 5 گیندیں ہیں یا 5 اوور اور 3 گیندیں؟ یہاں 5.5 اوور کا مطلب $5\frac{5}{6}$ اوور ہے (چوں کہ ایک اوور = 6 گیندیں)، یعنی 5 اوور اور 5 گیندیں۔

ریاضی بات چیت

ہم اور کہاں ایسی 'غیر اعشاریہ' علامات دیکھ سکتے ہیں، جو اعشاریہ جیسی نظر آتی ہیں؟

تاریخ کی ایک جھلک —— وقت کے ساتھ اعشاری علامت

اعشاریہ کسرات (یعنی کسرات جن کے نسب نما $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$، $\frac{1}{1000}$ وغیرہ ہوں) کا استعمال قدیم ہندوستانی ماہرین فلکیات اور ریاضی دانوں کے کاموں میں پایا جاتا ہے۔ جن میں آٹھویں صدی کے شری دھر آچاریہ کے حساب اور الجبرا پر اہم کام بھی شامل ہیں۔ اعشاری علامت، جو کہ اپنی جدید شکل میں ہے، کی تفصیلات عرب ریاضی داں ابوالحسن اقلیدسی نے تقریباً 950 عیسوی میں 'کتاب الفصول فی الحساب الهندی' (ہندوستانی حساب پر مبنی ابواب کی کتاب) میں بیان کی ہیں۔ انھوں نے عدد 0.059375 کو 0̲0̲59375 کی صورت میں ظاہر کیا۔

15 ویں صدی میں، مکمل اعداد کو کسری حصوں سے الگ کرنے کے لیے، کئی مختلف علامات استعمال کی گئیں:

- مکمل عدد حصے کے آخری ہندسے کو عمودی نشان سے ظاہر کیا (جیسا اوپر دکھایا گیا ہے)،
- مختلف رنگوں کا استعمال اور
- کسری اعشاریہ مقامات کی تعداد دکھانے کے لیے عددی بالائی ہندسہ (مثلاً 0.36 کو 36^{2} کے طور پر لکھا جائے گا)۔

16 ویں صدی میں اسکاٹ لینڈ کے ایک ریاضی داں جان نیپئر (John Napier) اور جرمن ریاضی داں کرسٹوفر کلیوئس (Christopher Clavius) نے نقطہ ('.') کو مکمل عدد اور کسری حصوں کو الگ کرنے کے لیے استعمال کیا، جب کہ فرانسیسی ریاضی داں فرینکوئس وئیٹے (François Viète) نے سکتہ (،) کا استعمال کیا۔

فی الحال، کئی ممالک صحیح عدد اور کسری حصہ کو الگ کرنے کے لیے سکتہ کا استعمال کرتے ہیں۔ ان ممالک میں 1,000.5 عدد کو 1000,5 کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ لیکن اعشاری نقطہ، مقامی قدر کے نظام میں کسری حصے والے اعداد کو لکھنے کے لیے سب سے مقبول علامت کے طور پر برقرار ہے۔

معلوم کیجیے

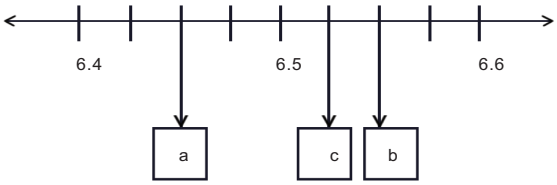
1. مندرجہ ذیل کسروں کو اعشاریوں میں تبدیل کیجیے:

(a) $\frac{5}{100}$ (b) $\frac{16}{1000}$ (c) $\frac{12}{10}$ (d) $\frac{254}{1000}$

2. مندرجہ ذیل اعشاریوں کو دسواں، سوواں اور ہزارواں کے حاصل جمع میں تبدیل کیجیے:

(a) 0.34 (b) 1.02 (c) 0.8 (d) 0.362

3. نیچے دیے گئے عددی خط پر درج ہر حرف کون سے اعشاری عدد کی نمائندگی کرتا ہے؟



4. مندرجہ ذیل مقداریں نزولی ترتیب (descending order) میں لکھیے؟

(a) 11.01, 1.011, 1.101, 11.10, 1.01

(b) 2.567, 2.675, 2.768, 2.499, 2.698

(c) 4.678 g, 4.595 g, 4.600 g, 4.656 g, 4.666 g

(d) 33.13 m, 33.31 m, 33.133 m, 33.331 m, 33.313 m

5. ہندسے 1، 4، 0، 8 اور 6 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اعداد بنائیے:

(a) 30 سے قریب ترین اعشاری عدد

(b) 100 اور 1000 کے درمیان سب سے چھوٹا ممکنہ اعشاری عدد۔

6. کیا زیادہ ہندسوں والا اعشاری عدد کم ہندسوں والے اعشاری عدد سے بڑا ہوگا؟

7. ماہی 0.25 کلوگرام سیم، 0.3 کلوگرام گاجر، 0.5 کلوگرام آلو، 0.2 کلوگرام شملہ مرچ اور 0.05 کلوگرام ادرک خریدتی ہے۔ اس کے ذریعے خریدی گئی اشیا کا کل وزن معلوم کیجیے۔

8. پنٹو شروعاتی تین دنوں میں دودھ کی ڈیری کو 3.79 لیٹر، 4.2 لیٹر اور 4.25 لیٹر دودھ فراہم کرتا ہے۔ 6 دنوں میں وہ کل 25 لیٹر دودھ فراہم کرتا ہے۔ آخری تین دنوں میں ڈیری کو فراہم کی گئی دودھ کی مقدار معلوم کیجیے۔

9. ٹنکو کا وزن جنوری میں 35.75 کلوگرام اور فروری میں 34.50 کلوگرام تھا۔ کیا اس کا وزن بڑھا یا کم ہوا؟ کتنی تبدیلی آئی؟

10. پیٹرن کو آگے بڑھائیے: 5.5، 6.4، 6.39، 7.29، 7.28، 6.18، 6.17، _____

11. کتنے ملی میٹر مل کر ایک کلومیٹر بناتے ہیں؟

12. ہندوستانی ریلوے ای ٹکٹ بُک کرنے والے مسافروں کو اختیاری سفری انشورنس پیش کرتی ہے جس کی قیمت فی مسافر 45 پیسے ہیں۔ اگر ایک دن میں ایک لاکھ لوگ انشورنس کا انتخاب کریں، تو کل کتنی انشورنس فیس ادا کی جائے گی؟

13. کون بڑا ہے؟

(a) $\frac{1}{10}$ یا $\frac{10}{1000}$

(b) ایک سو واں یا 90 ہزارویں

(c) ایک ہزارواں یا 90 سوویں

14. دیے گئے مقداروں کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے (ایک مثال دی گئی ہے):

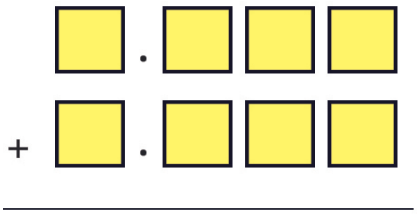
(a) 87 اکائیاں، 5 دسویں اور 60 سوویں = 88.10

(b) 12 دہائیاں اور 12 دسویں

(c) 10 دہائیاں، 10 اکائیاں، 10 دسویں اور 10 سوویں

(d) 25 دہائیاں، 25 اکائیاں، 25 دسویں اور 25 سوویں

15. ہر ہندسے 0 سے 9 کو زیادہ سے زیادہ ایک بار استعمال کرتے ہوئے، نیچے دیے گئے خانوں کو اس طرح پُر کیجیے کہ حاصل جمع 10.5 کے قریب ترین ہو:



16. مندرجہ ذیل کسروں کو اعشاریہ کی شکل میں لکھیے:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$

(e) $\frac{1}{5}$ (f) $\frac{4}{5}$

خلاصہ

- ہم درست پیمائش حاصل کرنے کے لیے ایک اکائی کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔
- ہم نے ہندوستانی عددی قدری نظام کو وسعت دی (بڑھایا) اور دیکھا کہ
  - » 1 اکائی = 10 دسویں حصے،
  - » 1 دسواں = 10 سوویں حصے،
  - » 1 سوواں = 10 ہزارویں حصے،
  - » 10 سوویں حصے = 1 دسواں،
  - » 100 سوویں حصے = 1 اکائی۔
- کسی عدد کا مکمل عددی حصہ اس کے کسری حصے سے الگ کرنے کے لیے ایک اعشاریہ نقطہ (‘.’) استعمال کیا جاتا ہے۔
- ہم نے یہ بھی سیکھا کہ اعشاری اعداد کا موازنہ کیسے کیا جائے، انھیں عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جائے نیز جمع اور تفریق کس طرح انجام دیے جائیں۔

4774CH04

4 حروفی اعداد کی مستعمل عبارات

(EXPRESSIONS USING LETTER-NUMBERS)

4.1 حروفی اعداد کا تصور (The Notion of Letter-Numbers)

اس باب میں ہم ریاضیاتی رشتوں اور نمونوں (Patterns) کو ظاہر کرنے کا ایک مختصر طریقہ سیکھیں گے۔ ہم دیکھیں گے کہ کیسے یہ طریقہ رشتوں اور نمونوں سے متعلق غور و فکر کرنے میں اور ان کی صداقت کی وضاحت کرنے میں مدد کرتا ہے۔

مثال 1: شبنم، آفتاب سے 3 سال بڑی ہے جب آفتاب کی عمر 10 سال تھی تو شبنم کی عمر 13 سال تھی۔ اب آفتاب 18 سال کا ہے تو شبنم کی عمر کیا ہوگی؟ _____

آفتاب کی عمر کی مدد سے آپ شبنم کی عمر کیسے نکال سکتے ہیں؟

آسان ہے: ہم آفتاب کی عمر میں 3 سال جوڑ کر شبنم کی عمر نکال سکتے ہیں۔

کیا ہم اس کو ایک عبارت کی شکل میں لکھ سکتے ہیں؟

شبنم کی عمر آفتاب سے 3 سال زیادہ ہے۔ مختصر طور پر اسے اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

شبنم کی عمر = آفتاب کی عمر + 3

اس طرح کے ریاضیاتی رشتوں کو عام طور پر مختصر شکل میں لکھا جاتا ہے۔ مندرجہ بالا رشتہ میں، 'آفتاب کی عمر' کا فقرہ لکھنے کے بجائے، کسی رائج اور آسان علامت کا استعمال کیا جاتا ہے۔ عام طور پر اس مقصد کے لیے حروف یا مختصر فقرے استعمال کیے جاتے ہیں۔

آفتاب کی عمر	شبنم کی عمر کی عبارت
4	4 + 3
10	10 + 3
23	23 + 3
?	? + 3
a	a + 3

شکل 4.1

فرض کیجیے کہ ہم آفتاب کی عمر کو ظاہر کرنے کے لیے حرف 'a' کا استعمال کرتے ہیں (ہم کوئی دوسرا حرف بھی استعمال کر سکتے تھے) اور شبنم کی عمر کو حرف 's' سے ظاہر کرتے ہیں تو شبنم کی عمر کو معلوم کرنے کے لیے ہم 'a + 3' عبارت کا استعمال کریں گے۔ اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$s = a + 3$$

اگر a (آفتاب کی عمر سالوں میں) 23 ہے، تو شبنم کی عمر کیا ہے؟

عبارت $a+3$ میں a کو 23 سے تبدیل کرنے پر ہمیں $s = 23 + 3 = 26$ سال ملتا ہے۔ حروف جیسے کہ a اور s جو اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں **حروفی اعداد** کہلاتے ہیں۔ ایسی ریاضیاتی عبارتیں جن میں حروفی اعداد کا استعمال ہو جیسے $a+3$ تو وہ **الجبریائی عبارتیں** کہلاتی ہیں۔

اگر شبنم کی عمر دی گئی ہو تو آفتاب کی عمر نکالنے کے لیے ایک عبارت لکھیے۔

ہم جانتے ہیں کہ آفتاب شبنم سے 3 سال چھوٹا ہے۔ اس لیے آفتاب کی عمر شبنم سے 3 سال کم ہوگی۔ اس کو ہم اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں:

آفتاب کی عمر = شبنم کی عمر − 3

اگر ہم دوبارہ آفتاب کی عمر کو ظاہر کرنے کے لیے حرف 'a' اور شبنم کی عمر کے لیے حرف 's' کا استعمال کریں تو الجبریائی عبارت اس طرح ہوگی: $a = s - 3$ یعنی s سے 3 کم۔

اگر شبنم کی عمر 20 سال ہو تو اس عبارت کا استعمال کر کے آفتاب کی عمر معلوم کیجیے۔

مثال 2: پارتھیو ماچس کی تیلیوں سے ایک نمونہ (Pattern) بنا رہا ہے۔ وہ ایک جیسے 'L' کو ایک کے آگے ایک لگا رہا ہے۔ ہر L میں دو ماچس کی تیلیاں ہیں جیسا کہ شکل 4.2 میں دکھایا گیا۔



شکل 4.2

5 عدد L بنانے کے لیے کتنی تیلیوں کی ضرورت پیش آئے گی؟ یہ ہوں گی 5×2

7 عدد L بنانے کے لیے کتنی تیلیاں استعمال ہوں گی؟ یہ ہوں گی 7×2

45 عدد L بنانے کے لیے ماچس کی کتنی تیلیاں استعمال ہوں گی؟ یہ ہوں گی 45×2

اب بتائیے کہ L کی تعداد اور ماچس کی تیلیوں کی تعداد میں کیا رشتہ ہے؟

آیئے سب سے پہلے اس رشتہ یا پیٹرن کو بیان کرتے ہیں۔ ہر L کے لیے دو تیلیاں چاہیے۔ اس لیے **L کی تعداد کی دوگنی تیلیوں کی ضرورت پیش آئے گی**۔ اس رشتے کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

ماچس کی تیلیوں کی تعداد = L کی تعداد $\times$ 2

اب ہم L کی تعداد کے لیے کوئی بھی حرف استعمال کر سکتے ہیں فرض کیجیے ہم 'n' حرف کا استعمال کرتے ہیں۔ ماچس کی تیلیوں کی تعداد کو ظاہر کرنے کی الجبریائی عبارت ہوگی؛

$$2 \times n$$

یہ عبارت ہم کو بتاتی ہے کہ n عدد L بنانے کے لیے ہم کو کتنی ماچس کی تیلیوں کی ضرورت ہوگی۔ تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے درج بالا عبارت میں ہم n کی جگہ L کی تعداد لکھ دیں گے۔

مثال 3: کملا ناریل اور گڑ کے لڈّو بنا کر بیچتی ہے۔ ایک ناریل کی قیمت ₹35 اور ایک کلو گڑ کی قیمت ₹60 ہے۔

10 ناریل اور 5 کلوگڑ خریدنے کے لیے اسے کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟

10 ناریل کی قیمت = 10 × ₹ 35

5 کلوگڑ کی قیمت = 5 × ₹ 60

کل قیمت = 10 × ₹35 + 5 × ₹60 = ₹350 + ₹300 = ₹650

8 ناریل اور 9 کلوگڑ خریدنے کے لیے وہ کتنے روپے ادا کرے گی؟

دی گئی ناریل کی تعداد اور گڑ کی مقدار کی کل قیمت کے لیے ایک الجبر یائی عبارت لکھیے۔

آیئے رشتے کو پہچان کر عبارت لکھتے ہیں:

ضروری مقدار	رشتہ	عبارت
ناریل کی قیمت	ناریل کی تعداد×35	$c \times 35$
گڑ کی قیمت	گڑ کی مقدار کلو میں×60	$j \times 60$

یہاں 'c' ناریل کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور ' j ' گڑ کی مقدار (کلو میں) کو ظاہر کر رہا ہے۔ اب ادا کی جانے والی کل قیمت ہوگی:

ناریل کی قیمت + گڑ کی قیمت

متعلقہ الجبر یائی عبارت اس طرح لکھی جا سکتی ہے:

$$c \times 35 + j \times 60$$

اس عبارت (یا فارمولے) کا استعمال کر کے معلوم کیجیے کہ 7 ناریل اور 4 کلوگڑ خریدنے کے لیے کتنے روپے ادا کرنے ہوں گے؟

خیال رہے کہ 'c' اور ' j ' کی مختلف قدروں کے لیے عبارت کی قدر بھی بدل جائے گی۔

اس عبارت کو ارکان کی حاصل جمع کے طور پر لکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا:

$c \times 35$ + $j \times 60$

مثال 4: ہم سادہ اشکال کا احاطہ (Perimeters of Simple Shapes) معلوم کرنے کے طریقے سے واقف ہیں۔ آیئے اب احاطہ کے لیے عبارت لکھتے ہیں۔

ایک مربع کا احاطہ، **مربع کے ضلع** (Side) **کی لمبائی کا 4 گنا ہوتا ہے**۔ اس کو ہم عبارت $4 \times q$ کے طور پر لکھ سکتے ہیں جہاں 'q' مربع کے ضلع کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے۔

ایک ایسے مربع کا احاطہ کیا ہوگا جس کے ضلع کی لمبائی 7 سینٹی میٹر ہے؟ عبارت کا استعمال کر کے احاطہ معلوم کیجیے۔

آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ حروفی اعداد اور الجبر یائی عبارتوں کو استعمال کر کے ہم عمومی ریاضیاتی رشتوں کو کیسے مختصر طور پر لکھ سکتے ہیں۔ان ریاضیاتی رشتوں کے اظہار کو ہی ہم ضابطہ (Formula) کہتے ہیں۔

معلوم کیجیے

1. درج ذیل احاطے کے فارمولے (Formula) لکھیے:
   (a) ایک ایسا مثلث (Triangle) جس کے تمام اضلاع برابر ہوں۔
   (b) ایک منظم پانچ ضلعی (Pentagon)، (ہم نے پچھلے سال سیکھا تھا کہ ہم لفظ 'منظم' کو اُن اشکال کے لیے استعمال کرتے ہیں جن کے تمام اضلاع اور تمام زاویے برابر ہوں)
   (c) ایک منظم چھ ضلعی (Hexagon)
2. منی رتن کے پاس 20 میٹر لمبا پائپ ہے حالاں کہ اس کو اپنے باغیچے کے لیے اور زیادہ لمبا پائپ چاہیے۔اس نے اس میں ایک اور پائپ جوڑ لیا۔ پائپ کی کل لمبائی کے لیے عبارت بنائیے۔ پائپ کی لمبائی، میٹر میں، کے لیے حرفی عدد 'k' کا استعمال کیجیے۔
3. اگر کریتکا کے پاس ذیل کی گنتی کے مطابق ₹100، ₹20 اور ₹5 کے نوٹ ہیں تو اس کے پاس کل کتنی رقم ہے؟ درج ذیل جدول کو مکمل کیجیے:

₹100 کے نوٹ کی تعداد	₹20 کے نوٹ کی تعداد	₹5 کے نوٹ کی تعداد	عبارت اور کل رقم
3	5	6	
			$3 \times 100 + 5 \times 20 + 6 \times 5 = 430$
8	4	z	
x	y	z	

4. ونود ایک آٹے کی مل کا مالک ہے۔مل کی مشین کو چالو ہونے میں 10 سیکنڈ لگتے ہیں۔ایک بار جب وہ چلنا شروع کر دیتی ہے تو فی کلو اناج پیسنے میں اس کو 8 سیکنڈ لگتے ہیں۔درج ذیل میں کون سی عبارت 'y' کلو اناج کو پیسنے میں لگنے والے کل وقت کو بیان کرے گی۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ مشین شروع میں بند تھی۔
   (a) $10 + 8 + y$
   (b) $(10 + 8) \times y$
   (c) $10 \times 8 \times y$
   (d) $10 + 8 \times y$
   (e) $10 \times y + 8$
5. اپنی پسند کے حرفی عدد کا استعمال کر کے درجہ ذیل الجبر یائی عبارتوں کو لکھیے۔
   (a) کسی عدد سے 5 زیادہ

(b) کسی عدد سے 4 کم
(c) کسی عدد کے 13 گنے سے 2 کم
(d) کسی عدد کے 2 گنے سے 13 کم

6. درج ذیل الجبر یائی عبارتوں کے لیے صورتِ حال کی وضاحت کیجیے۔

(a) $8 \times x + 3 \times y$

(b) $15 \times j - 2 \times k$

7. کسی مہینہ کے کلینڈر سے اگر کوئی 2×3 خانے مع تاریخوں کے منتخب کیے جائیں جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ خالی خانوں میں آنے والی تاریخوں کے لیے عبارتیں لکھیے اگر نیچے کے درمیانی خانے میں آنے والی تاریخ کو 'w' سے ظاہر کیا جائے۔

نومبر 2024

اتوار	سنیچر	جمعہ	جمعرات	بدھ	منگل	پیر
2	1					
9	8	7	6	5	4	3
16	15	14	13	12	11	10
23	22	21	20	19	18	17
30	29	28	27	26	25	24

w – 1	w	

4.2 ریاضیاتی عبارتوں کو دہرانا

ہم نے ارکان کی جمع کے طور پر عبارتوں کو لکھنا سیکھا اور اس سے ہمیں ریاضیاتی عبارتوں کو پڑھنا آسان ہو گیا۔ بسا اوقات ان کو مختلف طریقوں سے پڑھا جا سکتا ہے اور یہ واضح نہیں ہوتا۔ **ہم مبادلہ** (دو اعداد کو کسی بھی ترتیب میں جوڑنا) کرتے ہیں اور **گروہ بندی** (سہولت بخش گروہ بندی کے ذریعے اعداد کو جوڑنا) کرتے ہیں، تاکہ عبارتوں کو ظاہر کرنے کے آسان طریقے تلاش کر سکیں۔ ارکان کا مبادلہ اور گروہ بندی، عبارت کی قدر کو نہیں بدلتی ہے۔ ہم نے عبارتوں میں قوسین کا استعمال بھی سیکھا ہے جن میں قوسین کے باہر تفریق کے نشان کا استعمال بھی شامل ہے۔ ہم نے **تقسیمی خصوصیت** (Distributive Property) بھی پڑھی ہے (کسی حاصل جمع کا حاصل ضرب، حاصل ضرب کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے)۔

آیئے ان تصوّرات کو دہراتے ہیں اور درج ذیل عبارتوں کی قدر معلوم کرتے ہیں:

1. $23 - 10 \times 2$
2. $83 + 28 - 13 + 32$
3. $34 - 14 + 20$
4. $42 + 15 - (8 - 7)$
5. $68 - (18 + 13)$
6. $7 \times 4 + 9 \times 6$
7. $20 + 8 \times (16-6)$

آیئے پہلی عبارت $(2 \times 10 - 23)$ کو حل کرتے ہیں۔ سب سے پہلے ہم عبارت کے ارکان کو لکھیں گے۔ خیال رہے کہ یہاں ایک رکن تو پہلے ہی عدد ہے جب کہ دوسرے رکن کو جوڑنے سے قبل 10 کو 2 سے ضرب کر کے پہلے عدد میں تبدیل کرنا ہوگا اور پھر دونوں ارکان کو جوڑیں گے۔

$$23 - 10 \times 2 = 23 + -10 \times 2 = 23 + -20 = 3$$

آیئے اب دوسری عبارت کو حل کرتے ہیں۔ اس عبارت کے تمام ارکان اعداد ہیں۔ اگر ہم ارکان پر غور کریں، تو ہم پائیں گے کہ ارکان کا آپسی مبادلہ کرنے اور گروہ بنا لینے سے حل کرنے میں آسانی ہو جائے گی۔

$$83 + 28 - 13 + 32 =$$

$$83 + 28 + (-13) + 32$$

$$= 70 + 60 = 130$$

آیئے اب ہم پانچویں عبارت کو دیکھتے ہیں۔ اس میں باہر تفریق کے نشان کے ساتھ قوسین ہیں۔ اس کو دو طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔ پہلے قوسین کو حل کر کے (جیسا ذیل میں بائیں جانب دکھایا گیا ہے) یا قوسین کو قاعدے سے ہٹا کر کے (جیسا ذیل میں دائیں جانب دکھایا گیا ہے)۔

$$= 68 + (-(18 + 13))$$

$$= 68 + (-31)$$

$$= 37$$

یا

$$= 68 + (-(18 + 13))$$

$$= 68 + (-18) + (-13)$$

$$= 50 + (-13) = 37$$

اب باقی ریاضیاتی عبارتوں کی قدر معلوم کیجیے۔

ریاضیاتی عبارتوں میں جب حروفی اعداد کو اعداد سے تبدیل کیا جاتا ہے تو ان کی قدر اعداد میں آجاتی ہے۔ مثال 1 میں شبنم کی عمر معلوم کرنے کے لیے جب کہ آفتاب کی عمر 23 سال تھی، عبارت $a+3$ میں ہم نے حروفی عدد 'a' کو 23 سے تبدیل کر دیا تو قدر 26 آ گئی۔

4.3 الجبریائی عبارتوں میں ضرب کے نشان کو حذف کرنا

ذیل کے عددی تواتر پر غور کیجیے:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

اس تواتر یا پیٹرن کو ہم کیسے بیان کریں گے؟ آسان ہے: یہ وہ اعداد ہیں جو 4 کے پہاڑوں میں آتے ہیں۔

(بڑھی ہوئی ترتیب میں 4 کے اضعاف)۔

تواتر کا تیسرا رُکن کیا ہے؟ یہ ہے 4×3

تواتر کا 29واں رُکن کیا ہے؟ یہ ہے 4×29

? تواتر کا n واں رُکن معلوم کرنے کے لیے الجبریائی عبارت معلوم کیجیے۔

خیال رہے کہ یہاں 'n' ایک حروفی عدد ہے جو تواتر میں مقام بتاتا ہے۔

جیسا کہ یہاں 4 کے اضعاف کا تواتر ہے اس لیے n واں رُکن n کا 4 گنا ہو گا:

$$4 \times n$$

معیاری روش کے طور پر $n \times 4$ کو چھوٹا کر کے $4n$ لکھتے ہیں جس میں ضرب کا نشان حذف کر دیا جاتا ہے۔ ہم پہلے عدد لکھتے ہیں اور اس کے بعد حرف۔ $7k$ کی قدر معلوم کیجیے جب $k=4$ ہو۔ یہاں اس کی قدر ہو گی: $7 \times 4 = 28$

عبارت $5m+3$ کی قدر معلوم کیجیے جب $m=2$ ہو۔

چوں کہ یہاں $5m$ کا مطلب $5 \times m$ ہے، تو عبارت میں $m=2$ رکھنے سے $5 \times 2+3=13$ ہو گا۔

غلطی پر توجہ دیتے ہوئے اسے درست کیجیے

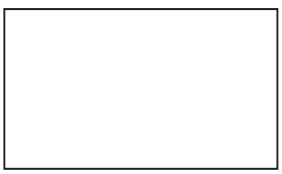
درج ذیل میں کچھ سادہ کاری (Simplification) دکھائی گئی ہیں جہاں حروفی اعداد کو اعداد سے بدلا گیا ہے اور عبارت کی قدر معلوم کی گئی ہے۔

1. ان میں سے ہر ایک کا مشاہدہ کیجیے کہ کیا کہیں کوئی غلطی ہے۔
2. اگر آپ کو لگتا ہے کہ کوئی غلطی ہے تو وضاحت کرنے کی کوشش کیجیے کہ کیا غلطی ہوئی ہے۔
3. پھر اس کو ٹھیک کیجیے اور عبارت کی قدر بتائیے۔

1. اگر $a=-4$ ہے، تو $10-a=6$ ہے۔
2. اگر $d=6$ ہے، تو $3d=36$ ہے۔
3. اگر $s=7$ ہے، تو $3s-2=15$ ہے۔
4. اگر $r=8$ ہے، تو $2r+1=29$ ہے۔
5. اگر $j=5$ ہے، تو $2j=10$ ہے۔
6. اگر $m=-6$ ہے، تو $3(m+1)=19$ ہے۔
7. اگر $f=3$، $g=1$ ہے، تو $2f-2g=2$ ہے۔
8. اگر $t=4$، $b=3$ ہے، تو $2t+b=24$ ہے۔
9. اگر $n=6$، $h=5$ ہے، تو $h-(3-n)=4$ ہے۔

4.4 الجبر یائی عبارتوں کو حل کرنا

پہلے ہم نے اضلاع کے اعتبار سے مختلف منظم اشکال کی عبارتیں معلوم کی تھیں۔ آیئے اب ہم مستطیل کے احاطہ کی عبارت معلوم کرتے ہیں۔



گزشتہ مثالوں کی طرح، ہم پہلے یہ بیان کریں گے کہ اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم ہو تو اس کا احاطہ کیسے معلوم کریں گے؟

لمبائی + چوڑائی + لمبائی + چوڑائی کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔

لمبائی اور چوڑائی کی جگہ بالترتیب حروفی عدد l اور b استعمال کرتے ہیں۔ مستطیل کے احاطہ کو p سے ظاہر کیجیے۔ پھر ہمارے پاس ہے:

$$p = l + b + l + b$$

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ یہ اعداد کو ظاہر کر رہے ہیں۔ اس لیے عبارت کے ارکان کو کسی بھی ترتیب میں جوڑا جا سکتا ہے۔ اس لیے اوپر دی گئی عبارت کو ہم ایسے بھی لکھ سکتے ہیں:

$$= l + l + b + b$$

جیسا کہ $l + l = 2 \times l = 2l$، اور $b + b = 2 \times b = 2b$، اس لیے

$$p = 2l + 2b$$

غور طلب ہو کہ پہلی عبارت $(l + b + l + b)$ اور آخری عبارت $(2l + 2b)$ جو کہ ہمیں مستطیل احاطے کے لیے ملی ہے وہ کچھ مختلف لگ رہی ہے۔ حالاں کہ یہ دونوں برابر ہیں کیوں کہ یہ ہمیں پہلی عبارت سے اُن ہی قاعدوں اور اعمال کو استعمال کر کے حاصل ہوئی ہے جن کا استعمال ہم اعداد کے لیے کرتے ہیں۔ یہ برابر ہیں ان معنوں میں کہ جب حروفی اعداد کو اعداد سے تبدیل کیا جاتا ہے تو ان کی ایک ہی قدر حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر اگر $l = 3$ اور $b = 4$ ہو تو ہمیں پہلی عبارت سے حاصل ہو گا۔

$$l+b+l+b = 3+4+3+4 = 14$$، اور

$$2l + 2b = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$$

ہم عبارت $2l+2b$ کو عبارت $l+b+l+b$ کی **سادہ شکل** (Simplified Form) کہیں گے۔ آیئے سادہ کاری کی کچھ اور مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال 5: درج ذیل جدول میں کسی دکان میں بکنے والی پنسل اور ربر کی تعداد ظاہر کی گئی ہے۔ فی پنسل قیمت 'c' اور فی ربر کی قیمت کو 'd' سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ان تین دنوں میں دکان دار کو ہونے والی کل کمائی معلوم کیجیے۔

	پہلا دن	دوسرا دن	تیسرا دن
پنسل کی (قیمت 'c')	5	3	10
ربر کی (قیمت 'd')	4	6	1

پہلے پنسلوں کی فروخت سے حاصل ہونے والی رقم معلوم کرتے ہیں۔

پہلے دن پنسلوں کی فروخت سے حاصل ہونے والی رقم ہے $5c$۔ اسی طرح دوسرے دن پنسلوں کی فروخت سے حاصل ہونے والی رقم ہے _____ اور تیسرے دن کی _____ ہے۔

پنسلوں کی فروخت سے حاصل ہونے والی کل رقم ہے $5c+3c+10c$۔ کیا ہم اس الجبریائی عبارت کو مزید مختصر کر سکتے ہیں اور ارکان کی تعداد کو کم کر سکتے ہیں؟

مذکورہ عبارت کا مطلب ہے کہ c کے 5 گُنے میں c کے تین گنے کو جوڑا گیا اور پھر اس میں c کے 10 گنے کو جوڑا گیا۔ اس طرح کل ملا کر حروفی عدد 'c' کو (5+3+10) بار جوڑا گیا۔ یہی اعداد کی تقسیمی خصوصیت (Distributions Property) ہے۔ اس طرح،

$$5 \times c + 3 \times c + 10 \times c = (5 + 3 + 10) \times c$$

$(5+3+10)\times c$ کو مزید مختصر کر کے اس طرح لکھا جا سکتا ہے: $18\times c = 18c$

اگر c = 50 ₹ تو پنسل کی فروخت سے حاصل ہونے والی کل رقم معلوم کیجیے۔

ربر کی فروخت سے حاصل ہونے والی کل رقم کی عبارت لکھیے۔ پھر اس کو حل کیجیے۔

ان تین دنوں میں پنسل اور ربر کی فروخت سے حاصل ہونے والی کل رقم کو ہم عبارت $18c+11d$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

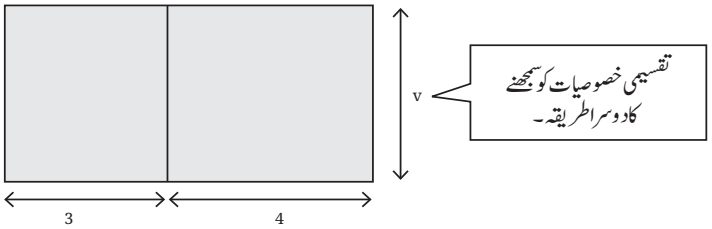
کیا عبارت $18c+11d$ کو مزید مختصر کیا جا سکتا ہے؟

اس عبارت کو مزید مختصر نہیں کیا جا سکتا ہے کیوں کہ اس میں مختلف حروفی اعداد ہیں۔ یہی مختصر ترین عبارت ہے۔

درج بالا مثال میں ہم نے دیکھا کہ عبارت $5c+3c+10c$ کو مزید مختصر کر کے عبارت $18c$ حاصل ہوئی۔

دونوں عبارتوں میں c کو مختلف اعداد سے تبدیل کر کے جانچ کیجیے کہ کیا دونوں میں ایک ہی قدر آتی ہے۔

مثال 6: ایک بڑے مستطیل کو دو چھوٹے مستطیلوں میں بانٹا گیا ہے جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ بڑے مستطیل کے رقبہ کو ظاہر کرنے کے لیے ایک عبارت لکھیے۔



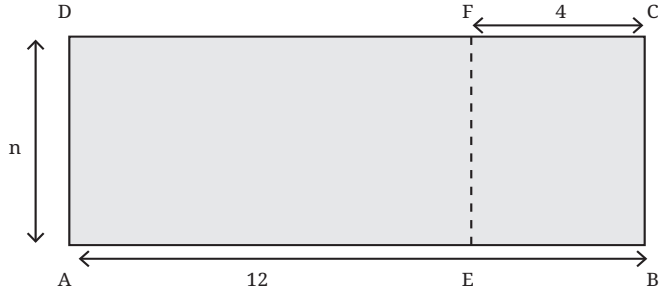
چھوٹے مستطیلوں کے رقبے $4v$ مربع یونٹ اور $3v$ مربع یونٹ ہیں۔

بڑے مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کے دو طریقے ہیں: (i) سیدھے طور پر اس کے اضلاع کی لمبائیاں v اور (3+4) لے کر، یا (ii) چھوٹے مستطیلوں کے رقبہ کو جوڑ کر۔

پہلے طریقے سے $7v$ حاصل ہوگا اور دوسرے طریقے سے $4v+3v$ حاصل ہوگا۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ دونوں برابر ہیں: $4v+3v=7v$ اور یہی بڑے مستطیل کے رقبہ کی مطلوبہ عبارت ہے۔

پہلے کی طرح ایک بڑے مستطیل کو دو چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم کیا گیا جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ AEFD مستطیل کے رقبہ کو معلوم کرنے کے لیے ایک عبارت لکھیے۔

اس صورت میں بھی AEFD مستطیل کا رقبہ دو طریقوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے: (i) اضلاع کی لمبائیاں n اور (12-4) کو استعمال کر کے یا (ii) مستطیل EBCF کے رقبہ کو مستطیل ABCD کے رقبہ سے تفریق کر کے۔



پہلے طریقہ سے ہمیں $8n$ حاصل ہوگا اور دوسرے طریقہ سے ہمیں $12n-4n$ حاصل ہوگا اور یہ دونوں برابر ہیں کیوں کہ $12n-4n=8n$۔ یہی AEFD مستطیل کے رقبہ کی عبارت ہے۔

ارکان کے ایسے سیٹ جیسے $(5c, c, 10c)$ $(12n, -4n)$ جن کے حروفی عدد ایک ہی ہوں **یکساں ارکان** (Like Terms) کہلاتے ہیں۔ ارکان کے ایسے مجموعہ جیسے $\{18c, 11d\}$، **غیر یکساں ارکان** (Unlike Terms) کہلاتے ہیں کیوں کہ اس میں حروفی اعداد مختلف ہیں۔

جیسا کہ ہم نے دیکھا کہ یکساں ارکان کو آپس میں جوڑا جاسکتا ہے اور پھر ان کو ایک رُکن میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 7: ایک دکان ایک دن کے استعمال کے لیے کرسیاں اور میزیں کرائے پر دیتی ہے۔ انھیں کرایہ پر لینے کے لیے پہلے درج ذیل رقم فی کرسی یا میز ادا کرنی ہوتی ہے۔

اشیا	رقم
کرسی	₹40
میز	₹75

فرنیچر واپس کرنے پر دکان دار کچھ رقم حسب ذیل ادا کرتا ہے۔

	واپس کی گئی رقم
کرسی	₹6
میز	₹10

اگر x کرسیاں اور y میزیں کرائے پر دی جائیں تو ادا کیے جانے والے کل ₹ کے لیے ایک عبارت لکھیے۔

x کرسیوں اور y میزوں کے لیے، آیئے شروع میں ادا کی گئی کل رقم اور فرنیچر واپس کرنے کے بعد واپس ملنے والی رقم معلوم کرتے ہیں۔

ان رقوم کو معلوم کرنے کے طریقہ کار کو بیان کیجیے۔

شروع میں ادا کیے گئے روپے کی کل رقم $40x + 75y$ ہے اور واپس کی گئی کل رقم $6x + 10y$ ہے۔

تو، ادا کی گئی کل رقم $= (40x + 75y) - (6x + 10y)$

کیا ہم اس عبارت کو مختصر کر سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو کیسے؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟

ریاضی بات چیت

یاد کیجیے کہ ہم ریاضیاتی عبارتوں میں قوسین کیسے کھولتے ہیں، ہمیں ملتا ہے؛

$$(40x + 75y) - (6x + 10y) = (40x + 75y) - 6x - 10y$$

چوں کہ ارکان کو کسی بھی ترتیب میں جوڑا جاسکتا ہے، اس لیے بقیہ قوسین کھولے جاسکتے ہیں اور درج ذیل عبارت حاصل ہوتی ہے۔ $40x + 75y + - 6x + - 10y$

ہم یکساں ارکان کو ایک ساتھ گروپ کر سکتے ہیں، نتیجتاً

$$40x + - 6x + 75y + - 10y$$
$$= (40 - 6)x + (75 - 10)y$$
$$= 34x + 65y$$

عبارت $(40x + 75y)-(6x + 10y)$ کو اور مختصر ترین کر کے $34x + 65y$ لکھا جاسکتا ہے، جو روپے میں ادا کی گئی کل رقم کو ظاہر کرتی ہے۔

ریاضی بات چیت

کیا ہم ابتدائی عبارت کو درج ذیل طریقہ سے لکھ سکتے ہیں

$(40x + 75y) + (- 6x - 10y)$؟

مثال 8: چارو نے ایک کوئز کے شروع کے تین مقابلے کھیلے۔ تین راؤنڈ میں اس کے اسکور $7p - 3q$، $8p - 4q$ اور $6p - 2q$ ہیں۔ یہاں، p درست جواب کے اسکور کی نمائندگی کرتا ہے اور q غلط جواب کے لیے جرمانے کی نمائندگی کرتا ہے۔

ہر ایک عبارت کا کیا مطلب ہے؟

اگر صحیح جواب کا اسکور $(p = 4)$ 4 ہے اور غلط جواب کا جرمانہ $(q = 1)$ 1 ہے تو کوئز کے پہلے راؤنڈ میں چارو کا اسکور معلوم کیجیے۔

چارو کا اسکور ہے؛ $7 \times 4 - 3 \times 1$۔ ہم اس عبارت کو ارکان کے جمع کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

$$7 \times 4 - 3 \times 1 = 7 \times 4 + - 3 \times 1 = 28 + - 3 = 25$$

دوسرے اور تیسرے راؤنڈ میں اس کے اسکور کیا ہیں؟

اگر کوئی جرمانہ نہیں ہے تو عبارت کیسے لکھیں گے؟ ایسی صورت حال میں q کی قدر کیا ہوگی؟

تین راؤنڈ کے بعد اس کا حتمی اسکور کیا ہے؟

اس کا حتمی اسکور، تین اسکور کا حاصلِ جمع ہوگا:

$$(7p - 3q) + (8p - 4q) + (6p - 2q)$$

چوں کہ ارکان کسی بھی ترتیب میں جمع کیے جاسکتے ہیں، اس لیے ہم قوسین کو ہٹا کر ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں:

$7p + - 3q + 8p + - 4q + 6p + -2q$

$= 7p + 8p + 6p + - (3q) + - (4q) + - (2q)$ (آپسی تبادلے اور گروہ بندی کے ذریعے)

$= (7 + 8 + 6)\, p + - (3 + 4 + 2)q$

$= 21p + - 9q$

$= 21p - 9q$

تین راؤنڈ کے بعد چارو کا کل اسکور $21p - 9q$ ہے۔ اس کی دوست کریشیٹا کا تین راؤنڈز کے بعد اسکور $23p-7q$ ہے۔

تین راؤنڈ میں چارو کے لیے کچھ ممکنہ اسکور بتایئے جن کو جوڑ کر اس کا اسکور $23p - 7q$ آجائے۔

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ کس نے زیادہ اسکور بنائے؟ کیا آپ اس کی وضاحت کر سکتے ہیں، کہ ایسا کیوں ہے؟
کریشیٹا نے چارو سے کتنا زیادہ اسکور کیا ہے؟ دونوں اسکور کے درمیان فرق تلاش کر کے یہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$23p - 7q - (21p - 9q)$$

اس عبارت کو مزید مختصر شکل میں لکھیے۔

مثال 9: عبارت $4\,(x + y) - y$ کو مختصر ترین شکل میں لکھیے۔

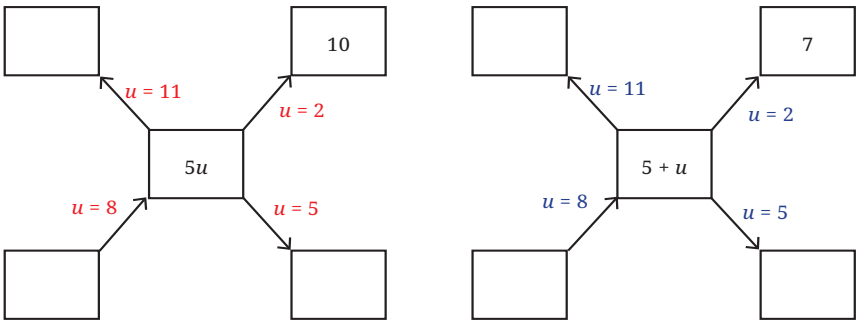
تقسیمی خصوصیت کا استعمال کرتے ہوئے، اس عبارت کو مختصر ترین کیا جاسکتا ہے۔

$$4\,(x + y) - y = 4x + 4y - y$$
$$= 4x + 4y + -y$$
$$= 4x + (4 - 1)y$$
$$= 4x + 3y$$

مثال 10: کیا عبارت $u5$ اور $(5+u)$ ایک دوسرے کے برابر ہیں؟

عبارت $u5$ کا مطلب ہے عدد u کا 5 گنا اور عبارت $u + 5$ کا مطلب ہے عدد u سے 5 زیادہ ہے۔ یہ دونوں مختلف اعمال ہیں۔ یہ دونوں u کی بیشتر قدروں کے لیے مختلف قدریں دیں گے۔
آیئے اس کی جانچ کریں۔

حروفی اعداد کو اعداد سے بدل کر خالی جگہ کو پُر کیجیے؛ نیچے دی گئی تصویر میں ایک خانے میں مثال دی گئی ہے۔ پھر ان قدروں کا موازنہ کیجیے جو $u5$ اور $(u + 5)$ کے لیے لی گئی ہیں۔



اگر عبارت $u5$ اور $u+5$ برابر ہیں، تو انھیں u کی کسی بھی قدر کے لیے ایک جیسی قدریں دینی چاہیے۔ لیکن ہم دیکھ سکتے ہیں کہ وہ عبارتیں ایک جیسی قدریں نہیں دیتی ہیں۔ لہٰذا، یہ دونوں عبارتیں برابر نہیں ہیں۔

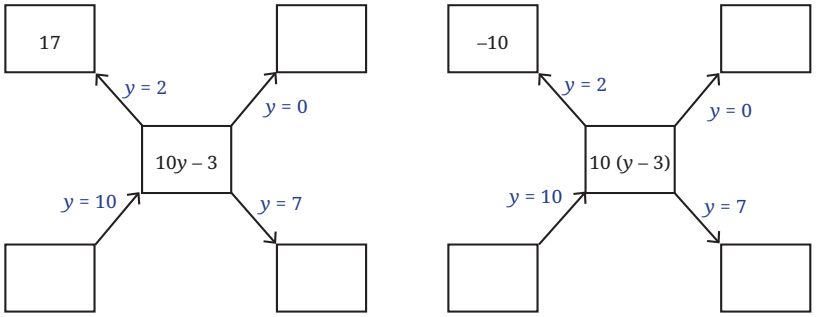
کیا عبارتیں $(10y - 3)$ اور $10(y - 3)$ برابر ہیں؟

ریاضی بات چیت

$10y - 3$، دراصل $10 \times y - 3$ کی مختصر شکل ہے، اس کا مطلب ہے y کے 10 گنا سے 3 کم۔

$10\ (y - 3)$، دراصل $10 \times (y - 3)$ کی مختصر شکل ہے یعنی y سے 3 کم کا 10 گنا۔

آیئے! ان عبارتوں میں y کی مختلف اقدار لے کر ان کا موازنہ کرتے ہیں۔



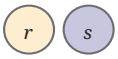
کیا آپ کو لگتا ہے کہ دونوں خاکوں کو پُر کرنے کے بعد، دونوں عبارتیں برابر ہیں؟

مثال 11: تصویر میں اعداد کی جمع کیا ہے (نامعلوم قدروں کو حرفی عدد سے ظاہر کیا گیا ہے؟)

ان اعداد کو جمع کرنے کے بہت سے طریقے ہیں۔ یہاں ان میں سے چند دکھائے گئے ہیں۔

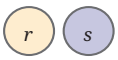
1. قطار کے لحاظ سے جمع کرنے پر عبارت حاصل ہوتی ہے:





$$(4 \times 3) + (r + s) + (r + s) + (4 \times 3)$$

2. یکساں ارکان کو ایک ساتھ جمع کرنے پر عبارت حاصل ہوتی ہے:





$$(8 \times 3) + (r + r) + (s + s)$$

3. اوپری نصف حصے کو جمع کر کے اس کا دوگنا کرنے پر عبارت حاصل ہوتی ہے:

$$2 \times (4 \times 3 + r + s)$$

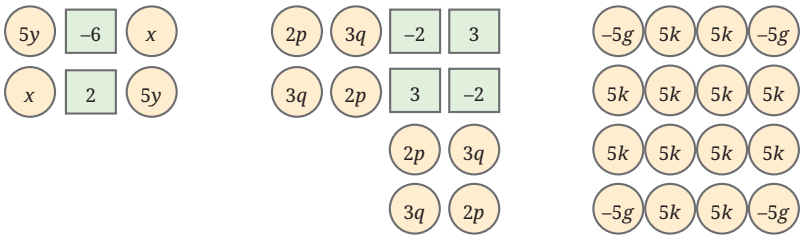
درج بالا تینوں عبارتیں مختلف معلوم ہو رہی ہیں۔ ہم ہر ایک کو مختصر ترین کر کے جانچ کر سکتے ہیں کہ کیا وہ سب:

$2r + 2s + 24$ کے برابر ہیں۔

معلوم کیجیے

1. نیچے دی گئی ہر تصویر میں اعداد کو جمع کیجیے۔ ان کی متعلقہ عبارتیں لکھیے اور انھیں مختصر ترین کیجیے۔ ہر تصویر میں موجود اعداد کو دو مختلف طریقوں سے جمع کرنے کی کوشش کیجیے اور دیکھیے کہ آپ کو ایک ہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

ریاضی بات چیت



2. درج ذیل عبارتوں میں سے ہر ایک کو مختصر ترین بنائیے:

(a) $p + p + p + p$, $p + p + p + q$, $p + q + p - q$,

(b) $p - q + p - q$, $p + q - p + q$,

(c) $p + q - (p + q)$, $p - q - p - q$

(d) $2d - d - d - d$, $2d - d - d - c$,

(e) $2d - d - (d - c)$, $2d - (d - d) - c$,

(f) $2d - d - c - c$

غلطی پر توجہ دیتے ہوئے اسے درست کیجیے

درج ذیل میں الجبریائی عبارتوں کو آسان کر کے دکھایا گیا ہے۔ دائیں طرف کی عبارت اپنی مختصر ترین شکل (Simplest Form) میں ہونا چاہیے۔

- ان میں سے ہر ایک کا مشاہدہ کیجیے اور دیکھیے کہ کیا کوئی غلطی ہے؟
- اگر آپ کو لگتا ہے کہ کوئی غلطی ہوئی ہے، تو یہ بتانے کی کوشش کیجیے کہ کیا غلطی ہوئی ہے۔
- پھر، اسے صحیح طریقے سے حل کر کے مختصر عبارت بنائیے۔

عبارت	مختصر ترین شکل	درست مختصر ترین شکل
.1 $3a + 2b$	5	
.2 $3b - 2b - b$	0	
.3 $6\ (p + 2)$	$6p + 8$	
.4 $(4x + 3y) - (3x + 4y)$	$x + y$	
.5 $5 - (2 - 6z)$	$3 - 6z$	
.6 $2 + (x + 3)$	$2x - 6$	
.7 $2y + (3y - 6)$	$-y + 6$	
.8 $7p - p + 5q - 2q$	$7p + 3q$	
.9 $5(2w + 3x + 4w)$	$10w + 15x + 20w$	

10. $3j + 6k + 9h + 12$ $\quad$ $3\ (j + 2k + 3h + 4)$

11. $4\ (2r + 3s + 5)$ $\quad$ $-20 - 8r - 12s$

؟ تمام تصحیح کی گئی مختصر ترین شکلوں پر ایک نظر ڈالیے (یعنی قوسین ہٹا دیے گئے ہیں، یکساں ارکان جمع کر دیے گئے ہیں اور صرف اعداد والے ارکان کو بھی جمع کر دیا گیا ہے)۔ کیا ان عبارتوں میں ارکان کی تعداد اور حروفی اعداد کی تعداد کے درمیان کوئی تعلق ہے؟

4.5 پیٹرن پہچانیے اور تعلقات کو ظاہر کیجیے

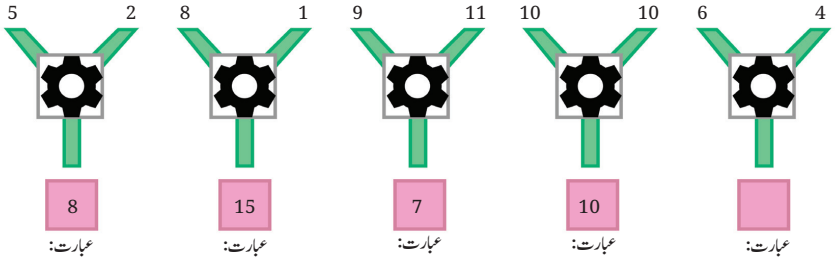
پہلے حصے میں ہم نے الجبریائی عبارتوں کی ایک جھلک دیکھی اور سیکھا کہ کس طرح انھیں استعمال کر کے آسان پیٹرنوں اور تعلقات کو مختصر اور خوب صورت انداز میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ یہاں، ہم مختلف تناظر میں مقداروں کے درمیان عمومی تعلقات کو تلاش کریں گے، ڈھونڈیں گے اور دل چسپ پہلو کی وضاحت بھی کریں گے کہ یہ پیٹرن کیوں وقوع پذیر ہوتے ہیں۔

یاد رکھیے کہ کسی بھی ریاضیاتی تعلق کو عبارتوں کی شکل میں لکھنے کی کوشش کرنے سے پہلے اسے آسان زبان میں بیان کرنا اور بصری طور پر سمجھنا بہت اہم ہے۔

فارمولا معلوم کرنا (Formula Detective)

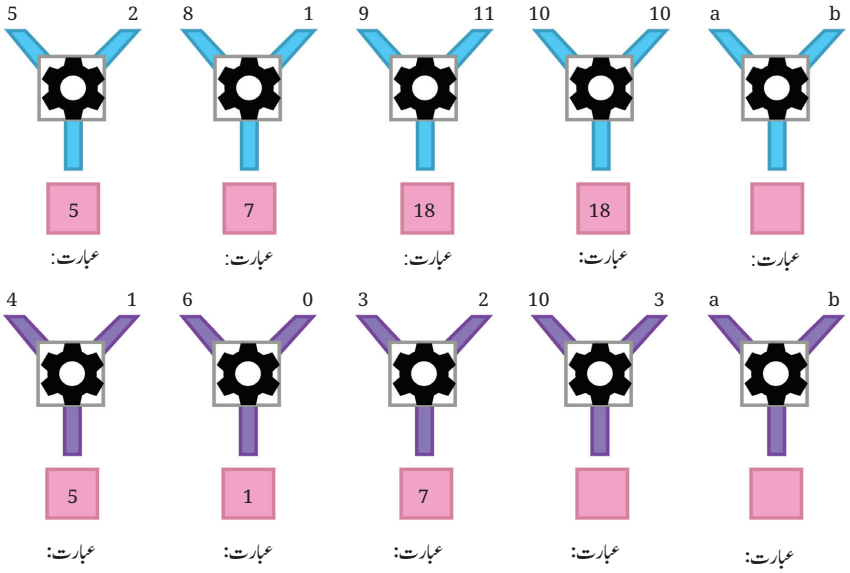
ذیل میں دی گئی تصویر کو دیکھیے۔ ہر معاملے میں، عددی مشین 'Y' کے اوپری حصے میں دیے 2 مختلف اعداد کو بطور ان پٹ (Input) لیتی ہے، کچھ عمل کرتی ہے اور نتیجہ نچلے حصے سے دیتی ہے۔ تمام مشینیں ہر صورت میں اپنے ان پٹ پر ایک جیسا عمل کرتی ہیں۔

؟ اس عددی مشین کا فارمولا معلوم کیجیے۔



اوپر دی گئی عددی مشین کا فارمولا "پہلے عدد کے دوگنے میں سے دوسرے عدد کو گھٹانا" ہے۔ جب اس کو الجبریائی عبارت کی مدد سے لکھا جاتا ہے تو، فارمولا $(2a - b)$ بنتا ہے۔ پہلے سیٹ کے ان پٹ کے لیے عددی عبارت $2 \times 5 - 2 = 8$ ہے۔ جانچ کیجیے کہ فارمولا ان پٹ کے ہر سیٹ کے لیے درست ہے۔

درج ذیل میں عددی مشینوں کے فارمولے تلاش کیجیے اور ان پٹ کے ہر سیٹ کے لیے عبارت لکھیے۔

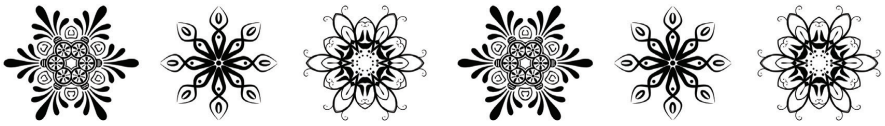


آپ خود ہی اپنا ایک فارمولا بنائیے۔ اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے چند عددی مشینوں کی مثالیں لکھیے۔ فارمولے کا پتہ لگانے کے لیے اپنے ہم جماعت ساتھیوں کو چیلنج کیجیے!

استاد کے لیے نوٹ: صرف مسائل کو حل کرانا ہی نہیں بلکہ نئے سوالات کی تخلیق بھی ریاضی کی آموزش اور عمل کا ایک بہت ضروری جزو ہے!

پیٹرن کو بیان کرنے کے لیے الجبرائی عبارتیں

مثال 12: سومجیت نے ایک ساڑی کے بارڈر پر دہرایا جانے والا ایک پیٹرن دیکھا۔



سومجیت حیران ہے کہ کیا تمام مقاموں (Positions) کے ڈیزائن کو بیان کرنے کا کوئی طریقہ ہے جہاں (i) ڈیزائن A واقع ہے، (ii) ڈیزائن B واقع ہے اور (iii) ڈیزائن C واقع ہے۔

آیئے ڈیزائن C سے شروع کرتے ہیں۔ یہ پہلی بار مقام 3 پر ظاہر ہوتا ہے، دوسری بار مقام 6 پر۔

ڈیزائن C، n ویں بار میں کہاں ظاہر ہوگا؟

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ڈیزائن ان مقاموں میں ظاہر ہوتا ہے جو 3 کے اضعاف ہیں۔ اس لیے ڈیزائن C کی n ویں موجودگی $3n$ مقام پر ہوگی۔

اسی طرح، وہ فارمولا تلاش کیجیے جو ایسا مقام بتاتا ہے جہاں دوسرے ڈیزائن n ویں مرتبہ نمودار ہوئے۔

وہ مقام، جہاں ڈیزائن B نمودار ہوا، وہ $2, 5, 8, 11, 14$ وغیرہ ہیں۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ڈیزائن B کی n ویں شکل کا مقام وہ ہے جو ڈیزائن C کے n ویں مقام سے ایک کم ہے۔ اسی طرح ڈیزائن B کی n ویں موجودگی کا مقام $(3n - 1)$ ہوگا۔

اسی طرح A کی پوزیشن کو بیان کرنے والی عبارت ہوگی: $3n - 2$۔

کسی عدد کے دیے گئے مقام کی مدد سے کیا ہم وہاں ظاہر ہونے والے ڈیزائن کا پتہ لگا سکتے ہیں؟ مثلاً مقام 122 پر کون سا ڈیزائن ظاہر ہوگا؟

پہلے دیکھا گیا ہے کہ اگر ایک مقامی عدد 3 کا اضعاف ہے، تو واضح طور پر یہ ڈیزائن C ہوگا۔ اگر مقامی عدد 3 کے اضعاف سے ایک کم ہے، تو یہ ڈیزائن B ہوگا اور اگر یہ 3 کے اضعاف سے 2 کم ہے، تو یہ ڈیزائن A ہوگا۔

کیا اعداد کے مقام کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی کو اس کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے؟ نیچے دیے گئے جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

مقام نمبر	3 سے تقسیم کرنے پر حاصلِ تقسیم (Quotient)	بقیہ (Remainder)
99	33	0
122	40	2
148	49	1

99، 122 اور 148 مقاموں پر کون سے ڈیزائن ظاہر ہوں گے یہ جاننے کے لیے حاصل تقسیم کا استعمال کیجیے۔

کیلنڈر میں پیٹرن

یہ نومبر 2024 کا کیلنڈر ہے۔ 2×2 مربعوں پر غور کیجیے، جیسا کہ کیلنڈر میں نشان زد ہے۔ اس مربع کے اعداد دل چسپ خصوصیت کو ظاہر کرتے ہیں۔

نومبر 2024

اتوار	سنیچر	جمعہ	جمعرات	بدھ	منگل	پیر
2	1					
9	8	7	6	5	4	3
16	15	14	13	12	11	10
23	22	21	20	19	18	17
30	29	28	27	26	25	24

12	13
19	20

آیئے ہم نشان زد 2 × 2 مربع کو لیتے ہیں اور وتر (Diagonal) پر موجود اعداد پر غور کرتے ہیں؛ یہ 12 اور 20، 13 اور 19 ہیں۔ ان کا حاصل جمع معلوم کیجیے 12+20، اور 13+19۔ آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

وہ برابر ہیں۔

آیئے کیلنڈر میں اعداد کو 30 سے آگے بڑھاتے ہیں۔ اور لامحدود قطاریں بناتے ہیں۔ جیسا کہ ذیل کی تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

نومبر 2024

اتوار	سنیچر	جمعہ	جمعرات	بدھ	منگل	پیر
2	1					
9	8	7	6	5	4	3
16	15	14	13	12	11	10
23	22	21	20	19	18	17
30	29	28	27	26	25	24
37	36	35	34	33	32	31
44	43	42	41	40	39	38
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

? کیا اس لامحدود گرڈ میں ہر 2 × 2 مربع میں وتر پر آنے والی قدروں کا حاصل جمع برابر ہوگا؟ ہم اسے کیسے یقینی بنا سکتے ہیں؟

اسے یقینی بنانے کے لیے ہم تمام 2 × 2 مربعوں کو چیک نہیں کر سکتے کیوں کہ ان کی تعداد لامحدود ہے۔

?	a
?	?

آیئے 2 × 2 مربع پر غور کیجیے۔ اس کا اوپری بائیں عدد کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ آیئے اسے 'a' نام دیتے ہیں۔

? یہ مانتے ہوئے کہ ہمیں اوپری بائیں عدد معلوم ہے، ہم اس 2 × 2 مربع میں دوسرے اعداد کو کیسے متعین کریں گے۔

جیسا کہ ہم ابھی تک کرتے آئے ہیں، پہلے ہم دوسرے اعداد کو الفاظ میں بیان کرتے ہیں۔

- ’a‘ کے دائیں طرف کا عدد اس سے **1 زیادہ ہوگا۔**
- ’a‘ کے نیچے کا عدد اس سے **7 زیادہ ہوگا۔**
- وتر میں ’a‘ کے مقابل آنے والا عدد، اس سے **8 زیادہ ہوگا۔**

a	$a+1$
$a+7$	$a+8$

لہٰذا 2 × 2 مربع میں دوسرے اعداد کو حسب ذیل گرڈ کی طرح دکھایا جاسکتا ہے۔

آیئے ہم وتر پر موجود اعداد کا حاصل جمع معلوم کرتے ہیں: $a+(a+8)$ اور $(a+1)+(a+7)$

آیئے ان کو مختصر (Simplify) کرتے ہیں۔

چوں کہ ارکان کو کسی بھی ترتیب میں جمع کیا جاسکتا ہے، اس لیے قوسین کو کھولا جاسکتا ہے۔

$$a+(a+8)=a+a+8=2a+8$$

$$(a+1)+(a+7)=a+1+a+7=a+a+1+7=2a+8$$

ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں وتروں پر آنے والے اعداد کی حاصل جمع $2a+8$ یعنی (a کے دوگنے سے 8 زیادہ کے برابر) ہے۔

? اس عبارت کی تصدیق کسی بھی 2×2 مربع کے وتر پر موجود اعداد کے لیے کیجیے اور اس کے اوپری بائیں خانے کے عدد ’a‘ کو لے لیجیے۔

اس طرح، ہم نے دیکھا کہ a کی کسی بھی قدر کے لیے وتر کے اعداد کی حاصل جمع برابر ہوتی ہے، یعنی کسی بھی 2 × 2 مربع کے لیے!



یہ مسئلہ ایک ایسی مثال ہے جو پیٹرن کے ہمیشہ برقرار رہنے کی تصدیق کرنے میں الجبریائی ماڈلنگ کی طاقت کو ظاہر کرتی ہے۔

کیلنڈر کے اعداد کے ایک سیٹ سے بننے والی درج ذیل شکل کو ملاحظہ کیجیے (جس میں لامحدود قطاریں ہیں):

	8	
14	15	16
	22	

? درج بالا سیٹ کے تمام اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔ اس کا موازنہ مرکز میں موجود عدد 15 کے ساتھ کیجیے۔ اعداد کے اسی طرح کے دوسرے سیٹ کے لیے اس عمل کو دہرایئے جو درج بالا شکل کو بناتا ہے۔ آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

ہم دیکھتے ہیں کہ حاصل جمع ہمیشہ مرکز میں موجود عدد کا 5 گنا ہوتا ہے۔

? کیا ایسا ہمیشہ ہوتا ہوگا؟ آپ یہ کیسے ثابت کریں گے؟

ریاضی بات چیت

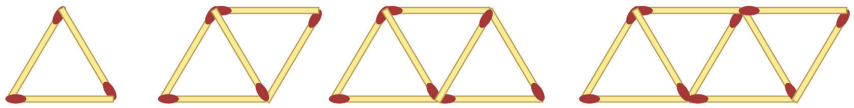
[**اشارہ:** اعداد کے ایک عمومی سیٹ پر غور کیجیے جو اسی طرح کی شکل کو بناتا ہے۔ مرکز میں پائے جانے والے عدد کو ’a‘ سے ظاہر کیجیے۔ دوسرے اعداد کو ’a‘ کی مناسبت سے ظاہر کیجیے۔]

ریاضی بات چیت

ایسی دوسری اشکال تلاش کیجیے جن کے اندر موجود اعداد کی جمع ہمیشہ ان اعداد میں سے کسی ایک عدد کا حاصل ضرب ہو۔

ماچس کی تیلیوں سے پیٹرن بنانا

نیچے دی گئی تصویر کو دیکھیے۔ ماچس کی تیلیوں کے استعمال سے بنایا ایک پیٹرن ہے۔ کیا آپ پہچان سکتے ہیں کہ پیٹرن کس شکل کا ہے؟



ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مرحلہ 1 میں 1 مثلث ہے، مرحلہ 2 میں 2 مثلث ہیں، مرحلہ 3 میں 3 مثلث ہیں، وغیرہ۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ مرحلہ 5 میں کتنی ماچس کی تیلیاں ہوں گی؟ یہ 11 ہوں گی۔ آپ اس کو بھی بنا کر دیکھ سکتے ہیں۔

؟ مرحلہ 33، مرحلہ 84، اور مرحلہ 108 میں کتنی ماچس کی تیلیاں درکار ہوں گی؟ بلاشبہ، ہم اس کا خاکہ بنا سکتے ہیں اور گن بھی سکتے ہیں، لیکن کیا یہاں موجود پیٹرن کا استعمال کرتے ہوئے جوابات تلاش کرنے کا کوئی فوری طریقہ ہے؟

اگلے مرحلے میں ہم سیکھیں گے کہ ماچس کی تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کا عمومی اصول کیا ہے؟ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگلا مرحلہ حاصل کرنے کے لیے ہر قدم پر 2 ماچس کی تیلیاں رکھ دی جاتی ہیں، یعنی ہر بار ماچس کی تیلیوں کی تعداد میں 2 کا اضافہ ہوتا ہے۔

مرحلہ نمبر	1	2	3	4	5	6
ماچس کی تیلیوں کی تعداد	3	5	7	9	11	13

درج بالا جدول کا استعمال کرتے ہوئے مرحلہ 33 میں ماچس کی تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے طریقے کے بارے میں سوچیے۔ (نمبر لکھنے کو جاری رکھے بغیر)۔

جیسا کہ ہر بار 2 ماچس کی تیلیوں کو شامل کیا جا رہا ہے، یہ معلوم کرنے سے کہ مرحلہ 33 میں کتنے 2 شامل کیے جائیں گے۔ نیچے دیے گئے جدول کو دیکھیے اور معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

مرحلہ نمبر	1	2	3	4	5	6
ماچس کی تیلیوں کی تعداد	3	5	7	9	11	13
		3 + 2	3 + 2 + 2	3 + 2 + 2 + 2	3 + 2 + 2 + 2 + 2	

33 مثلث (مرحلہ 33) بنانے کے لیے ماچس کی تیلیوں کی تعداد _____ ہے۔ اسی طرح، مرحلہ 84 اور مرحلہ 108 کے لیے درکار ماچس کی تیلیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

کسی بھی مرحلے پر ماچس کی تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے اصول یا فارمولے کو بیان کرنے والی عبارت کیا ہوسکتی ہے؟

پیٹرن اس طرح ہوگا کہ مرحلہ 10 میں، نو مرتبہ 2 میں 3 جوڑنے پر (3+2×9) ماچس کی تیلیوں کی تعداد ملتی ہے؛ مرحلہ 11 میں، دس مرتبہ 2 میں 3 جوڑنے پر (3+2×10) ماچس کی تیلیوں کی تعداد حاصل ہوتی ہے۔ مرحلہ y کے لیے عبارت کیا ہوگی؟

یہ ہے: y سے ایک کم (یعنی $y - 1$) مرتبہ 2 اور 3 کا جمع۔

لہٰذا، عبارت ہے

$$3 + 2 \times (y - 1)$$

درج بالا عبارت مرحلہ y میں ماچس کی تیلیوں کی تعداد بتاتی ہے۔ اب ہم کسی بھی مرحلے پر ماچس کی تیلیوں کی تعداد فوراً معلوم کر سکتے ہیں۔

آپ نے پہلے ہی دیکھا ہوگا کہ پہلے مرحلے میں بھی 2 ہے، اور $3 = 1 + 2$۔ اس کا استعمال کرتے ہوئے، ہمیں یہ عبارت حاصل ہوتی ہے۔

$$2y + 1$$

❓ کیا مندرجہ بالا عبارت بھی ہر مرحلے پر ماچس کی تیلیوں کی تعداد کو صحیح طور پر بتا دیتی ہے؟ کیا یہ عبارتیں ایک جیسی ہیں؟

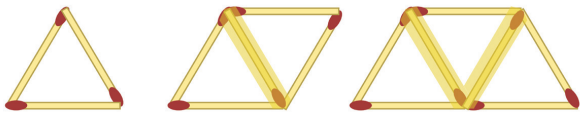
ہم عبارت $3 + 2 \times (y - 1)$ کو مختصر ترین بنا کر کے جانچ سکتے ہیں

$$3 + 2 \times (y - 1) = 3 + 2y - 2$$

$$= 2y + 1$$

دونوں عبارتیں ایک جیسی ہیں۔

پیٹرن گننے یا دیکھنے کا ایک اور مختلف طریقہ بھی ہے۔ آیئے دوبارہ تصویر پر ایک نظر ڈالتے ہیں۔



ماچس کی تیلیوں کو دو جہات سے رکھا گیا ہے — (a) جو افقی طور پر اوپر اور نیچے اور (b) جو درمیان میں وتر کے طور پر رکھی گئی ہیں۔ مثال کے طور پر، مرحلہ 2 میں 2 ماچس کی تیلیاں افقی طور پر اوپر اور نیچے رکھی گئی ہیں اور 3 ماچس کی تیلیاں وتر کے طور پر رکھی گئی ہیں۔

❓ مرحلہ 3 اور مرحلہ 4 میں یہ اعداد کیا ہیں؟

❓ مرحلے بڑھنے کے ساتھ ہی ہر جہت میں ماچس کی تیلیوں کی تعداد کیسے بدلتی ہے؟ ہر جہت میں مرحلہ 'y' پر ماچس کی تیلیوں کی تعداد کے لیے ایک عبارت لکھیے۔ کیا دونوں عبارتوں کا حاصل جمع $2y + 1$ ہوگا؟

معلوم کیجیے

ان مسائل کے لیے جن میں آپ سے مناسب عبارتیں بنانے کے لیے کہا جا رہا ہے، پہلے بیان کردہ صورت حال میں مختلف مقداروں کے درمیان رشتہ کو سمجھنے کی کوشش کیجیے۔ اگر ضرورت ہو تو نامعلوم کے لیے کچھ قدریں فرض کر لیجیے اور پھر تعلق تلاش کرنے کی کوشش کیجیے۔

1. جوار کی روٹی کی ایک پلیٹ کی قیمت ₹30 اور پلاؤ کی ایک پلیٹ کی قیمت ₹20 ہے۔ اگر جوار کی روٹی کی x پلیٹیں اور پلاؤ کی y پلیٹیں ایک دن میں منگوائی جائیں تو کون سی عبارت اس دن روپے میں کل رقم کی ادائیگی کو ظاہر کرے گی؟

   (a) $30x + 20y$ (b) $(30 + 20) \times (x + y)$
   (c) $20x + 30y$ (d) $(30 + 20) \times x + y$
   (e) $30x - 20y$

2. پُشپتا یوم آزادی پر دو قسم کے پھول فروخت کرتی ہے: چمپا اور گیندا۔ ’p‘ گاہکوں نے صرف چمپا کے پھول خریدے، ’q‘ گاہکوں نے صرف گیندے کے پھول خریدے، اور ’r‘ گاہکوں نے دونوں طرح کے پھول خریدے۔ اسی دن، اس نے ہر گاہک کو ایک چھوٹا سا قومی جھنڈا دیا۔ اس دن اس نے کتنے جھنڈے دیے تھے؟

   (a) $p + q + r$ (b) $p + q + 2r$
   (c) $2 \times (p + q + r)$ (d) $p + q + r + 2$
   (e) $p + q + r + 1$ (f) $2 \times (p + q)$

3. ایک گھونگا ایک گہرے کنویں کی دیوار پر چڑھنے کی کوشش کر رہا ہے۔ دن کے وقت یہ ’u‘ سینٹی میٹر اوپر چڑھتا ہے اور رات کے وقت یہ آہستہ آہستہ ’d‘ سینٹی میٹر نیچے گر جاتا ہے۔ ایسا 10 دن اور 10 راتوں تک ہوتا ہے۔

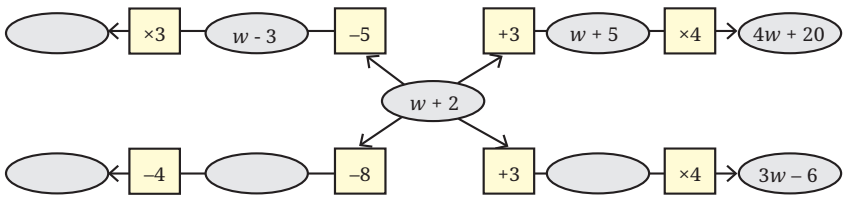
   (a) ایک عبارت لکھیے جو یہ بیان کرے کہ گھونگا اپنے ابتدائی مقام سے کتنا دور ہے۔

   (b) ہم گھونگھے کی حرکت کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں اگر $d > u$ ہو؟

کوشش کیجیے

4. رادھا سائیکل کی دوڑ کی تیاری کر رہی ہے اور روزانہ مشق کرتی ہے۔ پہلے ہفتے وہ ہر روز 5 کلومیٹر سائیکل چلاتی ہے۔ ہر ہفتے وہ روزانہ ’z‘ کلومیٹر فاصلے کا اضافہ کرتی ہے۔ رادھا نے 3 ہفتوں کے بعد کتنے کلومیٹر سائیکل چلائی ہو گی؟

5. مندرجہ ذیل تصویر میں مشاہدہ کیجیے کہ کس طرح ایک راستے کے ساتھ $w + 2$ عبارت، $4w + 20$ بن جاتی ہے۔ بقیہ راستوں پر موجود خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔ بیضوی شکل میں عبارتیں ہیں اور چوکور خانوں میں عمل ہیں۔



6. 'یہاں پور' سے 'وہاں پور' جانے والی ایک لوکل ٹرین راستے میں برابر فاصلے پر تین اسٹیشنوں پر رکتی ہے۔ ایک اسٹیشن سے دوسرے اسٹیشن تک سفر کرنے میں منٹوں میں لگنے والا وقت ایک جیسا ہے اور اسے t سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ٹرین تینوں اسٹیشنوں پر 2 منٹ کے لیے رکتی ہے۔

(a) اگر $t = 4$ ہے تو یہاں پور سے وہاں پور تک سفر کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

(b) یہاں پور سے وہاں پور تک کے سفر میں لگنے والے وقت کی الجبریائی عبارت کیا ہے؟

[**اشارہ:** صورت حال کو دیکھنے کے لیے ایک کچا خاکہ بنائیے]

7. درج ذیل عبارتوں کو مختصر ترین شکل میں لکھیے:

(a) $3a + 9b - 6 + 8a - 4b - 7a + 16$

(b) $3\,(3a - 3b) - 8a - 4b - 16$

(c) $2\,(2x - 3) + 8x + 12$

(d) $8x - (2x - 3) + 12$

(e) $8h - (5 + 7h) + 9$

(f) $23 + 4(6m - 3n) - 8n - 3m - 18$

8. ذیل میں دی گئی عبارتوں کو جمع کیجیے:

(a) $4d - 7c + 9$ اور $8c - 11 + 9d$

(b) $-6f + 19 - 8s$ اور $-23 + 13f + 12s$

(c) $8d - 14c + 9$ اور $16c - (11 + 9d)$

(d) $6f - 20 + 8s$ اور $23 - 13f - 12s$

(e) $13m - 12n$ اور $12n - 13m$

(f) $-26m + 24n$ اور $26m - 24n$

9. ذیل میں دی گئی عبارتوں کو گھٹائیے:

(a) $9a - 6b + 14$ سے $6a + 9b - 18$

(b) $-15x + 13 - 9y$ سے $7y - 10 + 3x$

(c) $17g + 9 - 7h$ سے $11 - 10g + 3h$

(d) $9a - 6b + 14$ سے $6a - (9b + 18)$

(e) $10x + 2 + 10y$ سے $-3y + 8 - 3x$

(f) $8g + 4h - 10$ سے $7h - 8g + 20$

10. درج ذیل الجبریائی عبارتوں کے مطابق صورت حال بیان کیجیے:

(a) $8x + 3y$

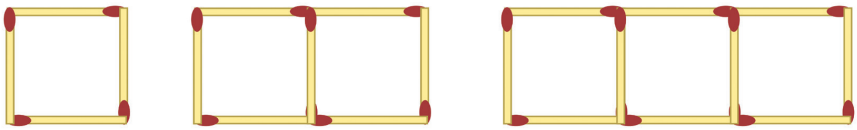
(b) $15x - 2x$

11. ایک سیدھی رسی کا تصور کیجیے۔ اگر اسے ایک بار کاٹا جائے جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے، تو ہمیں 2 ٹکڑے حاصل ہوتے ہیں۔ اگر رسی کو ایک بار موڑ دیا جائے اور پھر تصویر کے مطابق کاٹا جائے تو ہمیں 3 ٹکڑے حاصل ہوتے ہیں۔

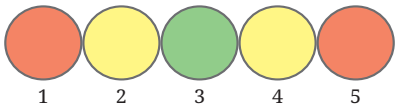
ذیل کے پیٹرن کا مشاہدہ کیجیے اور ٹکڑوں کی تعداد معلوم کیجیے، اگر رسی کو 10 بار موڑ کر کاٹ دیا جائے تو کتنے ٹکڑے حاصل ہوں گے۔ جب رسی کو r بار موڑ کر کاٹا جاتا ہے تو ٹکڑوں کی تعداد معلوم کرنے کی عبارت کیا ہوگی؟



12. نیچے دیے گئے ماچس کی تیلیوں کے پیٹرن کو دیکھیے۔ پیٹرن کا بغور مشاہدہ کیجیے اور پیٹرن کی شناخت کیجیے۔ اس طرح کے 10 مربعے بنانے کے لیے کتنی ماچس کی تیلیوں کی ضرورت ہے۔ w مربع بنانے کے لیے کتنی تیلیوں کی ضرورت ہوگی؟

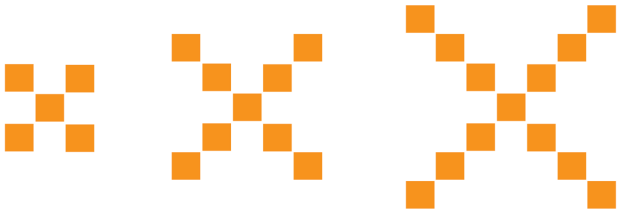


13. کیا آپ نے دیکھا ہے کہ ٹریفک سگنل میں رنگ کیسے بدلتے ہیں؟ رنگ کی تبدیلیوں کا تواتر ذیل میں دکھایا گیا ہے۔ پوزیشن 90، 190 اور 343 پر کون سا رنگ آئے گا؟ ہر رنگ کے مقامات کو بیان کرنے کے لیے عبارت لکھیے۔



.....

14. نیچے دیے گئے پیٹرن کا مشاہدہ کیجیے۔ مرحلہ 4، مرحلہ 10 اور مرحلہ 50 میں کتنے مربع ہوں گے ایک عمومی فارمولا لکھیے۔ اگر ہم تمام مربعوں کے راسوں (Vertices) کی تعداد کو شمار کرنا چاہتے ہیں تو فارمولے میں کیا تبدیلی کرنی ہوگی؟



15. اس لامحدود 4 کالم گرڈ میں اعداد ایک خاص ترتیب میں لکھے گئے ہیں۔

1	2	3	4
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(a) دیے گئے کالم (1, 2, 3, 4) میں تمام اعداد لکھنے کے لیے عبارتیں لکھیے۔

(b) کس قطار اور کالم میں درج ذیل اعداد ظاہر ہوں گے:

(i) 124

(ii) 147

(iii) 201

(c) قطار r اور کالم c میں کون سا عدد ظاہر ہوتا ہے؟

(d) 3 کے اضعاف کے مقامات کا مشاہدہ کیجیے۔

ریاضی بات چیت

کیا آپ کو اس میں کوئی پیٹرن نظر آتا ہے؟ ایسے دوسرے پیٹرنوں کی فہرست بنائیے جو آپ کو نظر آ رہے ہیں۔

خلاصہ

- الجبریائی عبارتوں کا استعمال فارمولوں میں پیٹرنوں اور مقداروں کے درمیان ریاضیاتی تعلقات اور پیشین گوئی کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔
- الجبریائی عبارتوں میں نہ صرف اعداد بلکہ حروفی اعداد بھی استعمال ہوتے ہیں۔ ریاضی کی عبارتوں کی انجام دہی کے قواعد الجبریائی عبارتوں پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ ان اصولوں کا الجبریائی عبارتوں کو ان کی مختصر ترین شکلوں میں لکھنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- الجبریائی عبارتوں کو عام زبان میں بیان کیا جاسکتا ہے اور اس کے برعکس بھی۔ الجبرا کا استعمال کرتے ہوئے آسانی سے لکھے جانے والے پیٹرن یا تعلق عام زبان میں اکثر طویل اور پیچیدہ ہو سکتے ہیں۔ یہ الجبرا کے فوائد میں سے ایک ہے۔

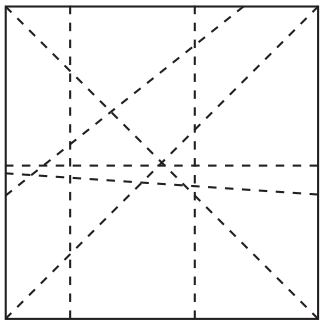
4774CH05

5 متوازی اور متقاطع خطوط

(PARALLEL AND INTERSECTING LINES)

5.1 خط کے آر پار (Across the Line)

ایک چوکور کاغذ کا ٹکڑا لیجیے اور اسے مختلف طرح سے موڑیے۔ اب موڑنے کی وجہ سے جو سلوٹیں نمایاں ہو رہی ہیں، ان پر پنسل اور پیمانہ (Scale) کی مدد سے خطوط کھینچیے۔ آپ دیکھیں گے کاغذ پر مختلف خطوط بن گئے ہیں۔ اب کسی بھی خط کے جوڑے کو منتخب کیجیے اور ایک دوسرے سے ان کی نسبت کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا وہ ملتے ہیں؟ اگر وہ کاغذ کے حدود میں نہیں مل رہے، تو کیا آپ کو لگتا ہے کہ وہ کاغذ سے باہر تک بڑھائے جانے پر ایک دوسرے سے ملیں گے؟



شکل 5.1

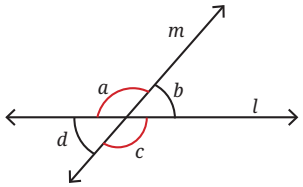
اس باب میں ہم **ایک ہموار سطح** (Plane Surface) پر موجود خطوط کے درمیان تعلق کو دریافت کریں گے۔ میز کا اوپری حصہ، آپ کے کاغذ کا ٹکڑا، بلیک بورڈ اور نوٹس بورڈ، یہ سب ہموار سطحوں کی مثالیں ہیں۔

آیئے ہم ایسے دو خطوط پر نظر ڈالتے ہیں جو ایک دوسرے سے مل رہے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ دونوں خط ایک نقطے پر ملتے ہیں۔ جب ہموار سطح پر خطوں کا کوئی جوڑا ایک دوسرے سے کسی نقطہ پر ملتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ خطوط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں یا **قطع** (Intersect) کرتے ہیں۔

آیئے غور کرتے ہیں کہ جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو کیا ہوتا ہے۔

? وہ کتنے زاویے بناتے ہیں؟

شکل 5.2 میں، جہاں خط l خط m کو قطع کرتا ہے، تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ چار زاویے وجود میں آتے ہیں۔



شکل 5.2

کیا دو مستقیم خطوط (Straight Lines) ایک سے زائد نقطے پر ایک دوسرے کو قطع کر سکتے ہیں؟

سرگرمی 1

ایک سادہ کاغذ پر دو مستقیم خط اس طرح کھینچیے کہ وہ ایک دوسرے کو قطع کر رہے ہوں۔ ایک چاندہ کی مدد سے بنے ہوئے چاروں زاویوں کی پیمائش کیجیے۔ مزید چار متقاطع خطوط کے جوڑے کھینچیے اور نقطۂ قطع پر عیاں ہونے والے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔

ان زاویوں میں آپ کو کیسا طرز (Pattern) نظر آ رہا ہے؟

شکل 5.2 میں اگر $\angle a$ کی پیمائش $120°$ ہے تو کیا آپ $\angle b$، $\angle c$ اور $\angle d$ کی پیمائش بغیر انھیں کھینچے اور ناپے معلوم کر سکتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں کہ $\angle a$ اور $\angle b$ کی مل کر پیمائش $180°$ ہوتی ہے کیوں کہ جب یہ دونوں زاویے جمع ہوتے ہیں تو یہ زاویہ مستقیم کو تشکیل دیتے ہیں جس کی پیمائش $180°$ ہوتی ہے۔ اس لیے اگر $\angle a$ $120°$ ہے تو لازماً $\angle b$ $60°$ ہی ہوگا۔

اسی طرح $\angle b$ اور $\angle c$ کی کل پیمائش $180°$ ہوگی۔ اس لیے اگر $\angle b$ $60°$ ہے تو $\angle c$ کی پیمائش $120°$ ہی ہوگی۔

اور $\angle c$ اور $\angle d$ کی مل کر پیمائش $180°$ ہوگی۔ اس لیے اگر $\angle c$ $120°$ ہے تو $\angle d$ کی پیمائش $60°$ ہی ہوگی۔

اسی وجہ سے شکل 5.2 میں $\angle a$ اور $\angle c$ کی پیمائش $120°$، $\angle b$ اور $\angle d$ کی پیمائش $60°$ ہے۔

جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور چار زاویے بناتے ہیں تو ان کی نشان دہی a,b,c,d سے کی جاتی ہے۔ جیسا کہ شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے، یعنی $\angle a$ اور $\angle c$ مساوی ہیں اور $\angle b$ اور $\angle d$ بھی مساوی ہیں!

کیا یہ بات قاطع خطوط کے ہر جوڑے کے لیے صحیح ثابت ہوگی؟

$\angle a$ کی دیگر پیمائشوں کے ساتھ اس بات کی جانچ کیجیے۔ ان پیمائشوں کے استعمال سے کیا آپ یہ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ یہ بات $\angle a$ کی ہر پیمائش کے لیے صحیح ثابت ہوتی ہے؟

ہم شکل 5.2 کے لیے، $\angle a$ کی کوئی قدر فرض کیے بغیر، اپنے استدلال کو عمومی شکل دے سکتے ہیں۔

چوں کہ زاویہ مستقیم کی پیمائش $180°$ ہوتی ہے تو یہ لازم ہے کہ $\angle a + \angle b = \angle a + \angle d = 180°$۔ اس لیے، $\angle b$ اور $\angle d$ ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔ اسی طرح $\angle b + \angle a = \angle b + \angle c = 180°$، اس لیے $\angle a$ اور $\angle c$ بھی لازماً مساوی ہوں گے۔

متصل زاویے (Adjacent Angles) جیسے $\angle a$ اور $\angle b$ جو دو خطوط کے آپس میں قطع ہونے سے بنتے ہیں،

انھیں **خطی جوڑے** (Linear Pairs) کہتے ہیں۔ خطی جوڑے جمع کرنے پر ہمیشہ 180° ہوتے ہیں۔

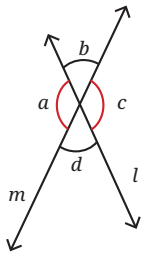
متقابل زاویے (Opposite Angles) جیسے $b\angle$ اور $d\angle$ خطوط کے ایک دوسرے سے قطع ہونے پر بنتے ہیں اور انھیں **عمودی متقابل زاویے** (Vertically Opposite Angles) کہتے ہیں۔ عمودی متقابل زاویے ہمیشہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

اوپر دی گئی دلیل سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب بھی دو خطوط آپس میں قطع ہوتے ہیں تو عمودی متقابل زاویے مساوی ہوتے ہیں۔ اس طرح کی دلیل کو ریاضی میں "**ثبوت**" (Proof) کہتے ہیں۔

معلوم کیجیے

شکل 5.3 میں آپ کو جو خطی جوڑے اور عمودی متقابل زاویے نظر آ رہے ہیں، ان کی فہرست بنائیے:

خطی جوڑے	a∠ اور b∠، ...
عمودی متقابل زاویے کے جوڑے	b∠ اور d∠، ...



شکل 5.3

پیمائش اور جیومیٹری

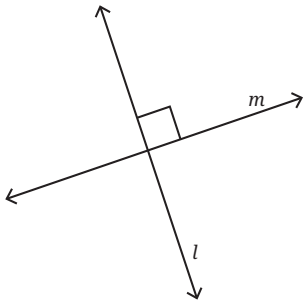
آپ نے دیکھا ہوگا کہ جب آپ خطی جوڑوں کی پیمائش کرتے ہیں تو کبھی کبھی ان کا حاصل جمع 180° نہیں ہوتا یا عمودی متقابل زاویے کی پیمائش پر کبھی کبھی معلوم ہوتا ہے کہ وہ غیر مساوی ہیں۔ اس کی کیا وجوہات ہیں؟ اس کی مختلف وجوہات ہو سکتی ہیں:

- پیمائش کے آلوں کے غلط استعمال کی وجہ سے پیمائش میں غلطی ہو سکتی ہے — جیسے چاندہ کا غلط استعمال۔
- کھینچے گئے خطوط کی موٹائی میں فرق — جیومیٹری میں "مثالی" (Ideal) خط کی کوئی موٹائی نہیں ہوتی ہے! لیکن ایسا نہیں ہو سکتا کہ ہم کوئی خط کھینچیں اور اس کی موٹائی نہ ہو۔

جیومیٹری میں ہم اردگرد نظر آنے والے مثالی "خطوط" اور دوسری اشکال بناتے ہیں اور ان کے درمیان تعلقات کا تجزیہ کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ہم جانتے ہیں کہ مستقیم خط سے بنا زاویہ 180° ہوتا ہے۔ اگر کوئی دوسرا خط اس زاویے کو دو حصوں میں تقسیم کرے تو دونوں حصے مل کر 180° ہوں گے۔ اس نتیجے پر پہنچنے کے لیے پیمائش کی ضرورت نہیں صرف دلیل ہی کافی ہے۔ اگر ہم پیمائش کریں تو ان وجوہات کی بنا پر جو اوپر بیان کی گئی ہیں، ممکن ہے نتیجہ بالکل درست نہ ہو۔ پھر بھی، پیمائش اکثر ہمارے قیاس کے بہت قریب ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ جیومیٹری کا استعمال طبیعیات، آرٹ، انجینئرنگ اور تعمیرات جیسے مختلف شعبوں میں وسیع پیمانے پر کیا جاتا ہے۔

5.2 عمودی خطوط (Perpendicular Lines)

کیا آپ ایسے متقاطع خطوط کا ایک جوڑا کھینچ سکتے ہیں جس کے چاروں زاویے مساوی ہوں؟ کیا آپ ان تمام زاویوں کی پیمائش معلوم کر سکتے ہیں؟



شکل 5.4

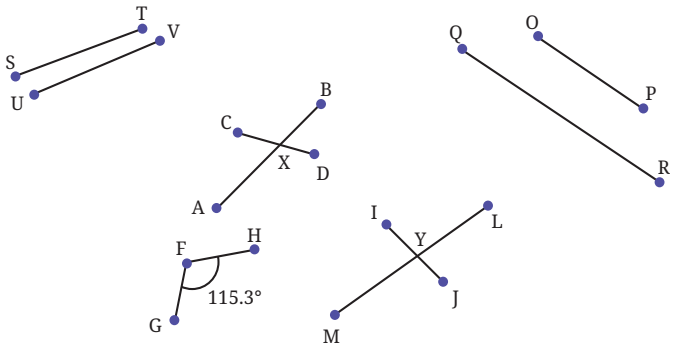
اگر دو خطوط متقاطع ہوں اور بننے والے چاروں زاویے مساوی ہوں، تو سبھی زاویے زاویۂ قائمہ (Right Angle) 90° کے ہوں گے۔

عمودی خطوط وہ دو خطوط ہیں جو ایک دوسرے کو قائمہ زاویوں (90°) پر قطع کرتے ہیں۔ شکل 5.4 میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ خطوط l اور m ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

5.3 خطوط کے درمیان (Between Lines)

شکل 5.5 کا مشاہدہ کیجیے اور یہ بتائیے کہ خطی قطعات کس طرح ایک دوسرے سے مل رہے ہیں یا ایک دوسرے کے پار جا رہے ہیں، مناسب ریاضیاتی اصطلاحات (نقطہ، آخری نقطہ، وسطی نقطہ، نقطۂ تقاطع، متقاطع) استعمال کیجیے اور ہر زاویے کی ڈگری پیمائش بھی بتائیے۔

مثال کے طور پر خطی قطعے FG اور FH، آخری نقطے F پر ملتے ہیں اور زاویہ 115.3° بناتے ہیں۔

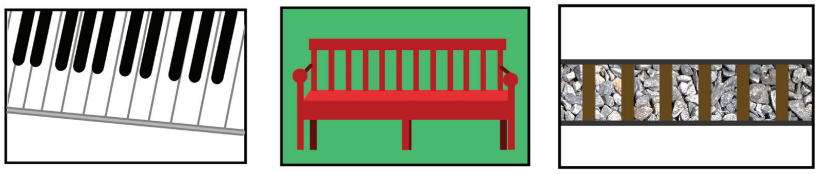


شکل 5.5

کیا خطی قطعے ST اور UV آگے بڑھائے جائیں تو ان کے آپس میں ملنے کا امکان ہے؟

کیا خطی قطعے OP اور QR آگے بڑھائے جائیں تو ان کے آپس میں ملنے کا امکان ہے؟

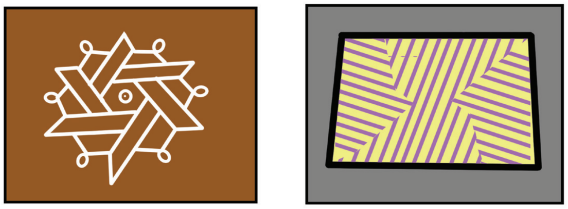
یہاں ہمارے اردگرد نظر آنے والے خطوط کی چند مثالیں دی جا رہی ہیں۔



مندرجہ بالا تصاویر کے خطوط میں کیا بات مشترک ہے؟ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ خطوط آپس میں ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔ ایسے خطوط کو متوازی خطوط (Parallel Lines) کہتے ہیں۔

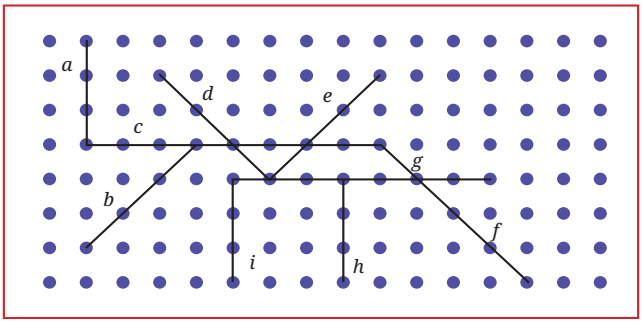
متوازی خطوط خطوط کے وہ جوڑے ہیں جو ایک ہی سطح پر موجود ہوتے ہیں اور دونوں سروں سے خواہ انھیں کتنا بھی بڑھایا جائے، کبھی نہیں ملتے۔

اپنی جماعت میں کچھ متوازی خطوط تلاش کیجیے اور ان کے نام بتائیے۔



اکثر آرٹ کے کاموں اور سایہ اندازی (Shading) میں متوازی خطوط کا استعمال ہوتا ہے۔

؟ نیچے دی گئی شکل 5.6 میں کون سے خطوط کے جوڑے متوازی نظر آتے ہیں؟



شکل 5.6

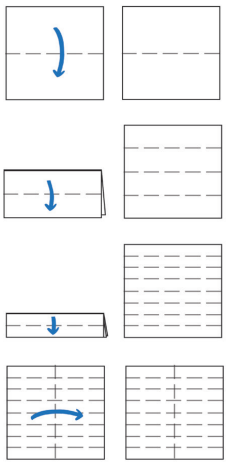
استاد کے لیے نوٹ: یہ بات اہم ہے کہ خطوط ایک ہی سطح پر ہوں۔ میز پر کھینچا گیا خط اور تختہ سیاہ پر کھینچا گیا خط کبھی نہ ملنے کے باوجود متوازی نہیں کہلائیں گے۔

5.4 تہہ کیے ہوئے کاغذ میں متوازی اور عمودی خطوط
(Parallel and Perpendicular Lines in Paper Folding)

سرگرمی 2

کاغذ کا ایک چوکور ٹکڑا لیجیے (اس سرگرمی کے لیے اخبار کا استعمال کیجیے)۔

- اس کاغذ کے متصل کناروں (Opposite Edges) کو آپ کیسے بیان کریں گے ؟ یہ ایک دوسرے کے _____ ہیں؟
- اس کاغذ کے متصل کناروں (Adjacent Edges) کو آپ کیسے بیان کریں گے ؟ متصل کنارے ایک دوسرے کے _____ ہیں۔ وہ ایک نقطے پر ملتے ہیں۔ وہ زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔
- کاغذ کو اُفقی (Horizontal) طور پر درمیان سے موڑیے۔ ایک نیا خط بنتا ہے۔ (شکل 5.7 دیکھیے)
- اب آپ کتنے متوازی خطوط دیکھتے ہیں؟ نئے خطی قطعات کا عمودی اطراف (Vertical Sides) سے کیا تعلق ہے؟

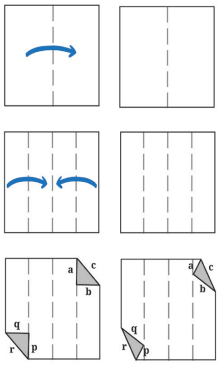


شکل 5.7

- تہہ شدہ کاغذ میں ایک اور اُفقی تہہ بنائیے۔ اب آپ کتنے متوازی خطوط دیکھتے ہیں؟
- اگر آپ اسی عمل کو دہرائیں تو کیا ہوگا؟ آپ کو کتنے متوازی خطوط حاصل ہوں گے ؟ کیا اس میں کوئی پیٹرن بن رہا ہے؟ جانچیے کہ اگر آپ ایک اور افقی تہہ بنائیں تو کیا یہ پیٹرن برقرار رہتا ہے۔
- چوکور کاغذ کی عمودی تہہ بنائیے۔ یہ نیا عمودی خط پچھلے افقی خطوط کے _____ ہے۔

کاغذ کو ایک وَتر (Diagonal) پر موڑیے۔ کیا آپ ایسی تہہ کا پتا لگا سکتے ہیں جو وَتر خط کے ساتھ متوازی خط بنائے؟ یہاں آپ کی مشق کے لیے ایک اور سرگرمی دی گئی ہے۔

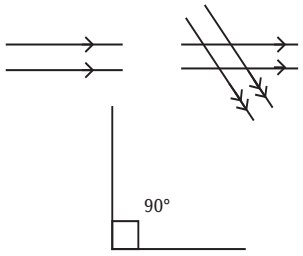
- ایک مربع کاغذ کا ٹکڑا لیجیے، اسے درمیان سے موڑیے اور پھر کھول دیجیے۔
- کناروں کو مرکزی خط یا وسطی خط کی جانب سے موڑیے اور پھر کھول دیجیے۔
- اوپری دائیں اور نچلے بائیں کونوں کو تہہ شدہ خط پر اس طرح موڑیے کہ مثلث بن جائے۔ شکل 5.8 دیکھیے۔
- خیال رہے کہ مثلث کے خط کاغذ پر آئی تہوں سے باہر نہ نکلیں۔
- کیا a, b, c بالترتیب p, q, r کے متوازی ہیں؟ اگر ہاں تو کیوں اور نہیں تو کیوں نہیں؟



شکل 5.8

علامات (Notations)

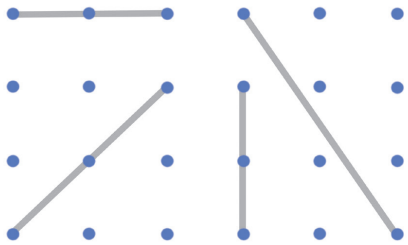
ریاضی میں ہم متوازی خطوط کو دکھانے کے لیے تیر (>) کی علامت کا استعمال کرتے ہیں۔ اگر ایک سے زائد متوازی خطوط کے جوڑے ہوں (جیسا کہ شکل 5.9 میں ہے) تو دوسرے جوڑے کو دو تیروں سے ظاہر کرتے ہیں اور اسی طرح آگے برقرار رکھتے ہیں۔ عمودی خطوط کو ان کے درمیان مربع زاویہ کی علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 5.9

معلوم کیجیے

1. شکل 5.10 میں نقطہ دار کاغذ پر دیے گئے خطوط پر کچھ عمودی خطوط کھینچیے۔

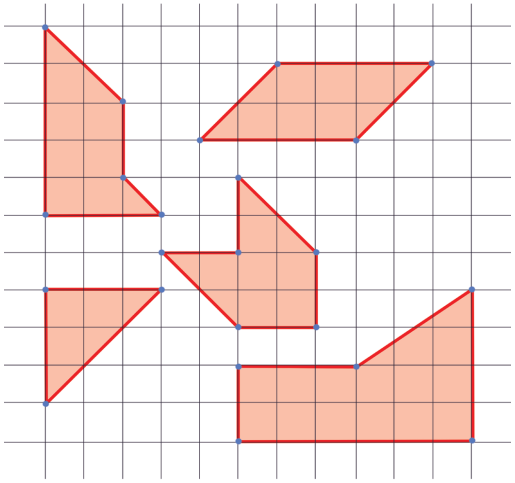


شکل 5.10

2. شکل 5.11 میں متوازی خطوط کو اوپر دی گئی علامتوں (ایک تیر، دو تیر وغیرہ) سے ظاہر کیجیے۔ عمودی خطوط کے درمیانی زاویوں کو مربع کی علامت سے ظاہر کیجیے۔

(a) آپ نے عمودی خطوط کی پہچان کیسے کی؟

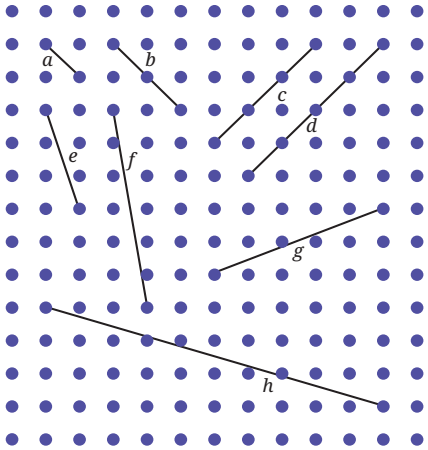
(b) آپ نے متوازی خطوط کی پہچان کیسے کی؟



شکل 5.11

3. دیے ہوئے نقطہ دار کاغذ پر مختلف متوازی خطوط کے جوڑے بنائیے۔ خطی قطعات کی لمبائی مختلف ہوسکتی ہے لیکن ان کے سرے نقطوں پر ہونے چاہیے۔

4. متوازی خطوط کی ظاہری شکل کو ذہن میں رکھتے ہوئے، اس نقطہ دار کاغذ پر دیے گئے خطی قطعات کے متوازی خطوط کھینچنے کی کوشش کیجیے۔



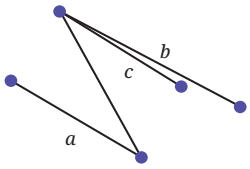
شکل 5.12

(a) کیا آپ کو ان میں سے کچھ خطوط کھینچنے میں دشواری پیش آئی؟

(b) کون سے؟

(c) آپ نے یہ کام کیسے کیا؟

5. شکل 5.13 میں، کون سا خط، خط a کے متوازی ہے — خط b یا خط c؟ آپ نے یہ فیصلہ کیسے کیا؟



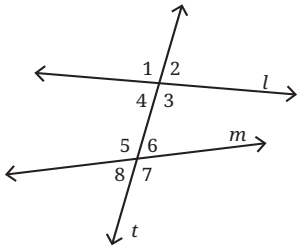
شکل 5.13

استاد کے لیے نوٹ: افقی اور عمودی خطوط اور اسی طرح وہ خط جو 45° کی طرف جھکے ہوئے ہوں (ایک مستطیل نقطہ دار کاغذ پر)، انھیں کھینچنا آسان ہوتا ہے لیکن وہ خطوط جو کسی اور زاویے پر ہوں، اس کے متوازی خط کھینچنا تھوڑا مشکل ہوتا ہے۔ طلبا کو اس کے لیے اپنی بصیرت کا استعمال کرنے دیجیے۔

ہم نے پچھلی مشقوں سے مشاہدہ کیا کہ بعض اوقات یہ فیصلہ کرنا مشکل ہوتا ہے کہ دو خطوط متوازی ہیں یا نہیں۔ اس کا تعین کرنے کے لیے ہم خط قاطع کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔

5.5 خط قاطع (Transversals)

ہم نے دیکھا کہ جب دو خطوط مختلف طریقوں سے متقاطع ہوتے ہیں تو کیا ہوتا ہے۔ آیئے یہ دیکھتے ہیں کہ جب ایک خط دو مختلف خطوط کو قطع کرتا ہے تو کیا ہوتا ہے۔



شکل 5.14

شکل 5.14 میں خط t خطوط l اور m کو قطع کرتا ہے۔ خط t کو **خط قاطع** کہتے ہیں۔ غور کیجیے جب ایک خط دو خطوط کو قطع کرتا ہے تو 8 زاویے بنتے ہیں۔

؟ کیا یہ ممکن ہے کہ تمام آٹھ زاویوں کی پیمائش مختلف ہو؟ اگر ہاں تو کیوں اور نہیں تو کیوں نہیں؟

؟ ان پانچ مختلف زاویوں کے متعلق کیا خیال ہے—2,3,4,5,6 ؟

شکل 5.14 میں چوں کہ $\angle 1$ اور $\angle 3$ متقابل راسی زاویے (Vertically opposite angles) ہیں، اس لیے وہ مساوی ہیں۔ کیا متقابل راسی زاویوں کے اور بھی جوڑے ہیں؟ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کل چار متقابل راسی زاویوں کے جوڑے ہیں اور ہر جوڑے میں زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

اس طرح جب ایک خط قاطع دو خطوط کو قطع کرتا ہے تو یہ آٹھ زاویے بناتا ہے جس میں زیادہ سے زیادہ چار ہی زاویے ایسے ہوتے ہیں جن کی پیمائش ایک دوسرے سے الگ ہوتی ہے۔

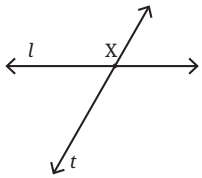
5.6 نظیری زاویے (Corresponding Angles)

شکل 5.14 میں ہم دیکھتے ہیں کہ خط قاطع t زاویوں کے دو جوڑے بناتا ہے—ایک خط l کے ساتھ اور دوسرا خط m کے ساتھ۔ پہلے سیٹ کے کچھ زاویے دوسرے سیٹ کے کچھ زاویوں کے ساتھ اپنے مقام کی بنیاد پر مطابقت رکھتے ہیں۔ $\angle 1$ اور $\angle 5$ کو **نظیری زاویے** کہا جاتا ہے۔ اسی طرح $\angle 2$ اور $\angle 6$، $\angle 3$ اور $\angle 7$، $\angle 4$ اور $\angle 8$ نظیری زاویے ہیں جو خط قاطع t کے خطوط l اور m کو قطع کرنے سے بنتے ہیں۔

؟ سرگرمی 3

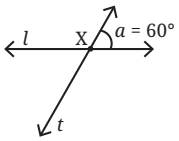
خطوط کا ایک جوڑا اور ایک خط قاطع اس طرح کھینچیے کہ دو مختلف زاویے بن جائیں۔

مرحلہ 1: ایک خط l کھینچیے اس پر ایک خط قاطع t کھینچیے جو اسے نقطہ X پر قطع کرے۔



شکل 5.15

مرحلہ 2: خطوط t اور l سے بننے والے $\angle a$ کی پیمائش کیجیے (فرض کیجیے یہ $60°$ ہے)۔



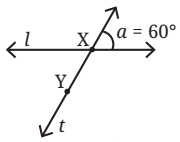
شکل 5.16

اب کتنے مختلف زاویے بنے؟

اگر ایک زاویہ $60°$ ہے، تو اس کے خطی جوڑے (Linear pairs) کا دوسرا زاویہ $120°$ ہونا چاہیے۔ اس طرح ہمارے پاس دو مختلف زاویے ہو ہی گئے۔

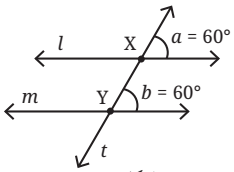
اور جب ہم خط قاطع t کو قطع کرنے والا ایک اور خط کھینچتے ہیں تو صرف دو زاویوں کو بنانا چاہتے ہیں $60°$ اور $120°$۔

مرحلہ 3: خط t پر ایک نقطہ Y نشان زد کیجیے۔



شکل 5.17

مرحلہ 4: نقطہ Y سے گزرتے ہوئے ایک خط m کھینچیے جو خط t پر $60°$ کا زاویہ بناتا ہو۔ اسے آپ یا تو a کو ٹریسنگ پیپر (Tracing Paper) سے نقل کر کے یا چاندہ سے زاویوں کی پیمائش کر کے بنا سکتے ہیں۔



شکل 5.18

خطوط l اور m کے متعلق آپ کا کیا مشاہدہ ہے؟ کیا دونوں ایک دوسرے کے متوازی معلوم ہوتے ہیں؟

جی ہاں، یہ ایک دوسرے کے متوازی نظر آتے ہیں۔

زاویے $a\angle$ اور $b\angle$ خط قاطع t کے ذریعے خطوط l اور m پر بننے والے نظیری زاویے ہیں۔ یہ نظیری زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

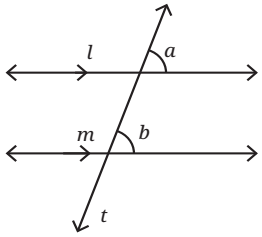
اس سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ:

جب دو خطوط پر خط قاطع سے بننے والے نظیری زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوں، تو متعلقہ دو خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

فرض کیجیے، ہمارے پاس ایک خط قاطع ہے جو دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے۔ تو ان کے نظیری زاویوں کے متعلق کیا کہا جاسکتا ہے؟

سرگرمی 4

شکل 5.19 میں دو متوازی خطوط l اور m دیے گئے ہیں (شکل میں کون سی علامات ان کے متوازی ہونے کو ظاہر کرتی ہے؟)۔ خط t ان دو خطوں کا خط قاطع ہے۔ $a\angle$ اور $b\angle$ نظیری زاویے ہیں۔ ایک ٹریسنگ پیپر پر $a\angle$ کو نقل کیجیے۔ پھر اسے $b\angle$ کے اوپر رکھیے اور دیکھیے کہ کیا دونوں زاویے بالکل ایک جیسے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ زاویے بالکل ملتے ہیں۔ چاندہ کا استعمال کرتے ہوئے شکل میں موجود دیگر نظیری زاویوں کی جانچ کیجیے۔ کیا تمام نظیری زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہیں؟

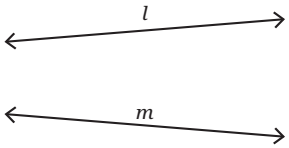


شکل 5.19

خط قاطع کے ذریعے متوازی خطوط کو قطع کرنے سے وجود میں آنے والے نظیری زاویے ہمیشہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

سرگرمی 5

شکل 5.20 میں خطوط l اور m پر خط قاطع t اس طرح کھینچیے کہ نظیری زاویوں کا کم از کم ایک جوڑا مساوی ہو۔ آپ ان جوڑوں کی پیمائش چاندہ کی مدد سے کر سکتے ہیں۔



شکل 5.20

کیا آپ کو ایسا خط قاطع کھینچنا مشکل لگ رہا ہے جس کے نظیری زاویے مساوی ہوں؟

جب دو خطوط ایک دوسرے کے متوازی نہیں ہوتے، تو خط قاطع سے بننے والے نظیری زاویے کبھی ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے۔

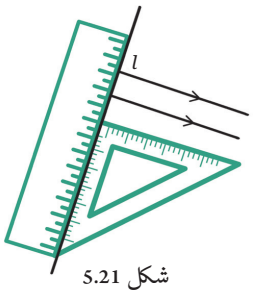
5.7 متوازی خطوط کھینچنا

کیا آپ پیمانہ اور ایک سیٹ اسکوائر کی مدد سے متوازی خطوط کا ایک جوڑا بنا سکتے ہیں؟

شکل 5.21 میں دکھایا گیا ہے کہ آپ یہ کیسے کر سکتے ہیں۔

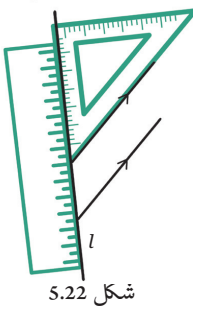
پیمانہ سے ایک خط l کھینچیے۔ سیٹ اسکوائر کو سرکاتے ہوئے آپ خط l پر دو عمودی خطوط کھینچ سکتے ہیں۔

کیا یہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہیں؟ ہم کیسے یقین کریں کہ یہ متوازی ہیں؟ ان دونوں خطوط اور خط l کے درمیان بننے والے زاویے کون سے ہیں؟



شکل 5.21

چوں کہ ہم نے سیٹ اسکوائر استعمال کیا تھا، اس لیے زاویوں کی پیمائش $90°$ ہے۔ خطوط کے مقام مختلف ہیں لیکن وہ خط l پر یکساں زاویہ بنا رہے ہیں۔ اگر خط l کو دو نئے خطوط کے لیے خط قاطع کے طور پر دیکھا جائے، تو نظیری زاویوں کی پیمائش $90°$ ہوگی۔



شکل 5.22

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ یہ نظیری زاویے ہیں اور مساوی ہیں، ہم یقین سے کہہ سکتے ہیں کہ یہ خطوط متوازی ہیں۔

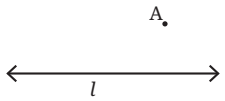
سیٹ اسکوائر کی لمبائی کا استعمال کرتے ہوئے دو مزید متوازی خطوط کھینچیے، جیسا کہ شکل 5.22 میں دکھایا گیا ہے۔

آپ کو کیسے معلوم ہوا کہ یہ دونوں خطوط متوازی ہیں؟ کیا آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ نظیری زاویے مساوی ہیں؟

استاد کے لیے نوٹ: طلبا کو ترغیب دی جانی چاہیے کہ وہ نظیری زاویوں کے مساوی ہونے کی جانچ ٹریسنگ پیپر اور چاندہ کے ذریعے زاویے ناپ کر دونوں طریقوں سے کریں۔ نظیری زاویوں اور متوازی خطوط کے درمیان تعلق ظاہر کرنے والے الفاظ پر توجہ دیجیے۔ نظیری زاویوں کا مساوی ہونا، دو خطوط کے متوازی ہونے کے لیے ضروری ہے اور کافی بھی۔

معلوم کیجیے

کیا آپ l کے متوازی ایک ایسا خط کھینچ سکتے ہیں جو نقطہ A سے گزرے؟ آپ اپنے جیومیٹری باکس کے آلات کی مدد سے یہ کیسے کریں گے؟ اپنا طریقہ بیان کیجیے۔



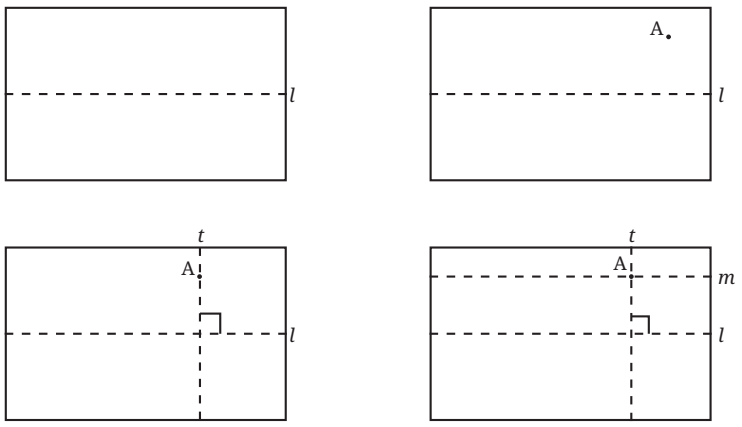
شکل 5.23

کاغذ کو موڑ کر متوازی خطوط بنانا

آیئے اس عمل کے لیے کاغذ کو موڑ کر انجام دینے کی کوشش کرتے ہیں۔ ایک خط l کے لیے (جو ایک تہہ کے طور پر دیا گیا ہے) ہم l کے متوازی ایک ایسا خط کیسے بنائیں گے جو نقطہ A سے گزرے؟

ہم جانتے ہیں کہ کاغذ کو موڑ کر خط l پر عمودی خط کیسے بناتے ہیں۔ اب کوشش کر کے خط l پر ایک عمودی خط ایسا موڑیے جو نقطہ A سے گزرے۔ اس نئی تہہ کو t کا نام دیتے ہیں۔

اب ایک اور خط موڑیے جو t پر عمودی ہو اور دوبارہ نقطہ A سے گزرے۔ اس خط کو m فرض کر لیتے ہیں۔ اب خطوط l اور m ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

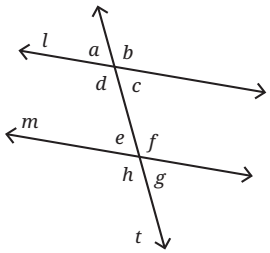


شکل 5.24

؟ خطوط l اور m ایک دوسرے کے متوازی کیوں ہیں؟

5.8 متبادل زاویے (Alternate Angles)

شکل 5.25 میں $\angle d$ کو $\angle f$ کا **متبادل زاویہ** کہا جاتا ہے اور $\angle c$ کو $\angle e$ کا متبادل زاویہ کہتے ہیں۔



شکل 5.25

آپ کسی دیے گئے زاویے مثلاً $\angle f$ کا متبادل زاویہ اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ پہلے $\angle f$ کا نظیری زاویہ معلوم کیجیے جو کہ $\angle b$ ہے اور پھر $\angle b$ کا متقابل راسی زاویہ معلوم کیجیے جو کہ $\angle d$ ہے۔

؟ سرگرمی 6

شکل 5.25 میں اگر $\angle f$ کی پیمائش $120°$ ہے، تو اس کے متبادل زاویہ $\angle d$ کی پیمائش کیا ہے؟

اگر ہمیں $\angle b$ کی پیمائش معلوم ہو تو ہم $\angle d$ کی پیمائش پتہ کر سکتے ہیں کیوں کہ یہ متقابل راسی زاویہ ہیں۔ یاد رکھیے متقابل راسی زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

$\angle b$ کی پیمائش کیا ہے؟ یہ $120°$ ہے کیوں کہ یہ $\angle f$ کا نظیری زاویہ ہے۔

اس لیے $\angle d$ کی پیمائش بھی $120°$ ہے۔

درحقیقت $\angle b = \angle f$ چاہے $\angle f$ کی پیمائش کچھ بھی ہو۔ کیوں؟ کیوں کہ $\angle b$، $\angle f$ کا نظیری زاویہ ہے۔

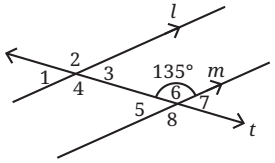
اسی طرح، $\angle d = \angle b$ چاہے $\angle b$ کی پیمائش کچھ بھی ہو۔ کیوں؟ کیوں کہ $\angle d$، $\angle b$ کا متقابل راسی زاویہ ہے۔ اس لیے ہمیشہ یہ ہوگا

$\angle f = \angle d$

ہم نے بغیر پیمائش کے صرف نظیری زاویوں کی سمجھ سے یہ ثابت کیا ہے کہ متبادل زاویے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

خط قاطع کے ذریعے متوازی خطوط کو قطع کرنے پر حاصل ہونے والے متبادل زاویے ہمیشہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

؟ **مثال 1:** شکل 5.26 میں، متوازی خطوط l اور m کو خط قاطع t سے قطع کیا گیا ہے۔ اگر $\angle 6 = 135°$ ہے تو، دیگر زاویوں کی پیمائش کیا ہوگی؟



شکل 5.26

حل: $\angle 6$ کی پیمائش $135°$ ہے، اس لیے $\angle 2$ بھی $135°$ ہے، کیوں کہ یہ $\angle 6$ کا نظیری زاویہ ہے اور خطوط l اور m متوازی ہیں۔

$\angle 8$ کی پیمائش $135°$ ہے، کیوں کہ یہ $\angle 6$ کا متقابل راسی زاویہ ہے۔ $\angle 4$ کی پیمائش $135°$ ہے کیوں کہ یہ $\angle 8$ کا نظیری زاویہ ہے۔

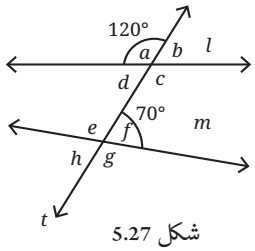
$\angle 2$ کی پیمائش $135°$ ہے کیوں کہ یہ $\angle 4$ کا متقابل راسی زاویہ ہے۔ اس لیے $\angle 6, \angle 4, \angle 2$ اور $\angle 8$ سب کے سب $135°$ ہیں۔

$\angle 5$ اور $\angle 6$ ایک خطی جوڑا ہیں، جو مل کر $180°$ بناتے ہیں۔ اگر $\angle 6$ $135°$ ہے پھر،

$$\angle 5 = 180 - 135 = 45°$$

اسی طرح ہم یہ بھی معلوم کر سکتے ہیں $\angle 1$، $\angle 3$ اور $\angle 7$ کی پیمائش بھی معلوم کر سکتے ہیں جو کہ $45°$ ہے۔

مثال 2: شکل 5.27 میں خطوط l اور m خط قاطع t سے قطع ہو رہے ہیں۔ اگر $\angle a$ کی پیمائش $120°$ ہے اور $\angle f$ $70°$، تو کیا خطوط l اور m ایک دوسرے کے متوازی ہیں؟

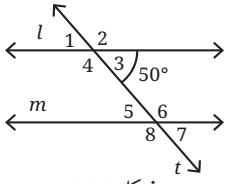


شکل 5.27

حل: $\angle 2$ کی پیمائش $135°$ ہے، اس لیے $\angle b$ کی پیمائش $60°$ ہوگی۔ کیوں کہ $\angle a$ اور $\angle b$ خطی جوڑا ہیں۔ $\angle b$، $\angle f$ کا نظیری زاویہ ہے۔ اگر خطوط l اور m متوازی ہوں تو $\angle b$ کو $\angle f$ کے مساوی ہونا چاہیے، لیکن یہ مساوی نہیں ہیں۔

لہٰذا خطوط l اور m ایک دوسرے کے متوازی نہیں ہیں کیوں کہ خط قاطع t سے بننے والے نظیری زاویے ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہیں۔

مثال 3: شکل 5.28 میں متوازی خطوط l اور m کو خط قاطع t قطع کرتا ہے۔ اگر $\angle 3$ کی پیمائش $50°$ ہے، تو $\angle 6$ کی پیمائش کیا ہوگی؟



شکل 5.28

حل: $\angle 3$ کی پیمائش $50°$ ہے، اس لیے $\angle 2$ کی پیمائش $130°$ ہوگی، کیوں کہ $\angle 2$ اور $\angle 3$ ایک خطی جوڑا بناتے ہیں اور خطی جوڑے کا مجموعہ ہمیشہ $180°$ ہوتا ہے۔

$\angle 2$ اور $\angle 6$ نظیری زاویے ہیں اور چوں کہ خطوط l اور m متوازی ہیں، تو ان کا مساوی ہونا ضروری ہے۔

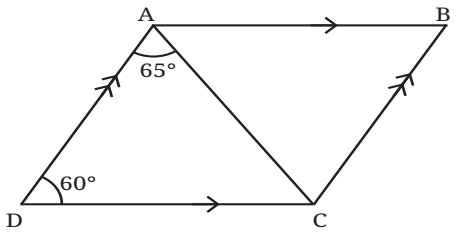
اس لیے $\angle 6$ کی پیمائش $130°$ ہے۔

زاویے $\angle 3$ اور $\angle 6$ کو **اندرونی زاویے** (Interior Angles) (جو خط قاطع کے ایک ہی جانب بننے والے زاویے ہوتے ہیں) کہتے ہیں۔

کیا $\angle 3$ اور $\angle 6$ کے درمیان کوئی تعلق ہے؟ آپ $\angle 3$ کی مختلف قدروں کو لے کر اور $\angle 6$ کی قدر معلوم کر کے تعلق کو تلاش کر سکتے ہیں۔ جب آپ کو کوئی تعلق مل جائے تو اسے ثابت کرنے کی کوشش کیجیے کہ یہ تعلق ہمیشہ برقرار ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ خط قاطع کے ایک ہی جانب بننے والے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ $180°$ ہوتا ہے۔

مثال 4: شکل 5.29 میں قطع خط CD,AB کے متوازی ہے اور BC،AD کے متوازی ہے۔ $\angle DAC$ کی پیمائش $65°$ ہے اور $\angle ADC$ کی $65°$ ہے۔ $\angle ABC$، $\angle CAB$ اور $\angle BCD$ کے زاویوں کی پیمائش کیا ہیں؟

حل: آیئے متوازی خطوط AB اور CD کو دیکھتے ہیں AD ان دو خطوط کا خط قاطع ہے۔



شکل 5.29

ہم جانتے ہیں کہ دو متوازی خطوط کو قطع کرنے والے خط قاطع کے ایک ہی طرف بننے والے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$\angle ADC + \angle DAB = 180°$۔

$60° + \angle DAB = 180°$

اس لیے، $\angle DAB = 120°$

کیا ہم اس کی مدد سے $\angle CAB$ معلوم کر سکتے ہیں ؟

$\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$

اس لیے، $120° = 65° + \angle CAB$

اس لیے، $\angle CAB = 55°$

اب ہم متوازی خطوط AD اور BC کو دیکھتے ہیں۔ وہ خط قاطع CD سے متقاطع ہیں۔ اس لیے،

$\angle ADC + \angle BCD = 180°$، کیوں کہ وہ خط قاطع کے ایک ہی جانب بننے والے اندرونی زاویے ہیں۔

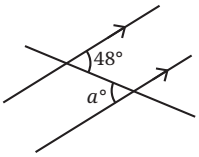
چوں کہ $\angle ADC$ کی پیمائش $60°$ دی گئی ہے، لہٰذا $\angle BCD = 120°$

اسی طرح ہم معلوم کرتے ہیں $\angle ABC = 60^\circ$

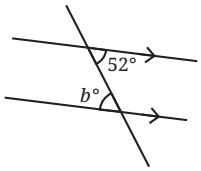
اس لیے شکل 5.29 میں $\angle CAB = 55^\circ$، $\angle ABC = 60^\circ$ اور $\angle BCD = 120^\circ$

معلوم کیجیے

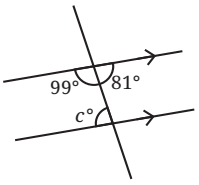
1. نیچے دیے گئے نشان زدہ زاویوں کو معلوم کیجیے۔



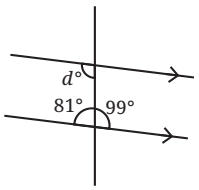
a= ☐



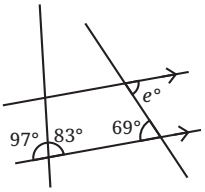
b= ☐



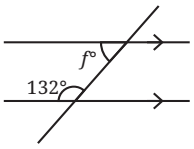
c= ☐



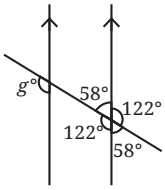
d= ☐



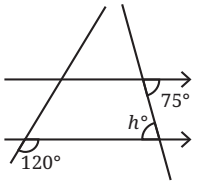
e= ☐



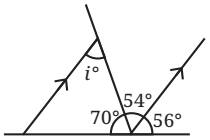
f= ☐



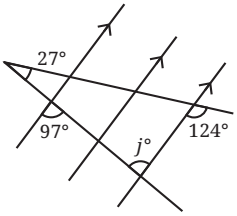
g= ☐



h= ☐



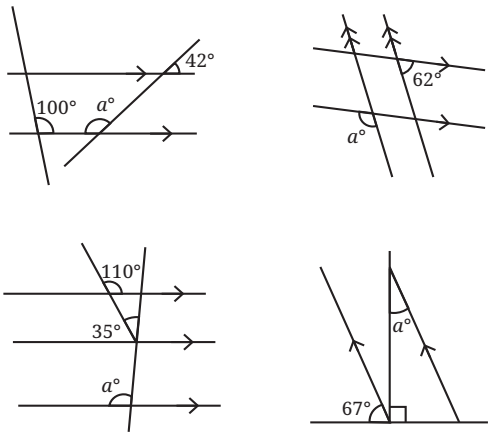
i= ☐



j= ☐

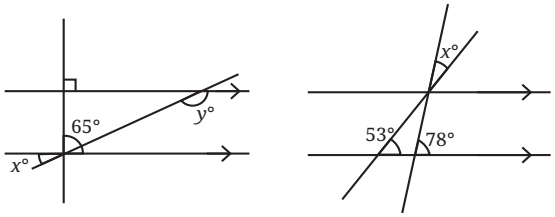
شکل 5.30

2. a سے ظاہر کیے گئے زاویوں کو معلوم کیجیے۔



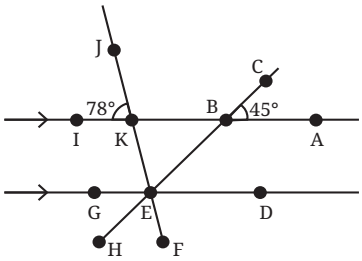
شکل 5.31

3. درجہ ذیل شکلوں میں x اور y کی زاویے کو ظاہر کرتے ہیں؟



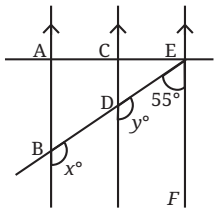
شکل 5.32

4. شکل 5.33 میں ∠ABC = 45° اور ∠IKJ =78° ہے۔ تو ∠GEH, ∠HEF اور ∠FED زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔



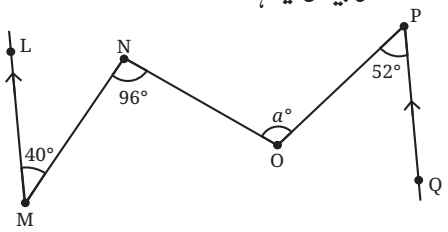
شکل 5.33

5. شکل 5.34 میں AB ، CD کے متوازی ہے اور CD، EF کے متوازی ہے۔ نیز AB، EA کے عمودی ہے۔ اگر ∠BEF = 55° ہو، تو x اور y کی قدریں معلوم کیجیے



شکل 5.34

6. شکل 5.35 میں زاویہ ∠NOP کی پیمائش کیا ہے؟

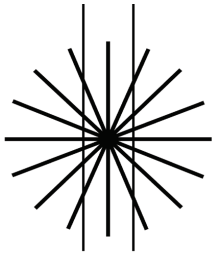


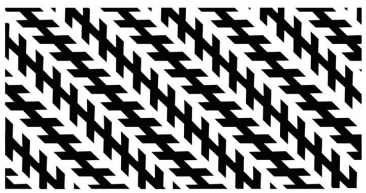
شکل 5.35

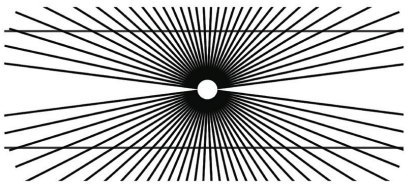
[**اشارہ:** نقطہ N اور O سے LM اور PQ کے متوازی خطوط کھینچیے۔]

5.9 متوازی فریب نظر (Parallel Illusion)

یہاں بظاہر کوئی متوازی خطوط نہیں ہیں۔ یا کیا واقعی ہیں؟







اس فریب نظر کی وجہ کیا ہے؟

خلاصہ

- جب دو خطوط متقاطع (Intersect Lines) ہوتے ہیں، تو وہ چار زاویوں کی تخلیق کرتے ہیں۔ متقابل راسی زاویے (Vertically Opposite Angles) مساوی ہوتے ہیں اور خطی جوڑوں (Linear Pairs) کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔
- جب دو خطوط متقاطع ہوتے ہیں اور بننے والے زاویے 90° ہوتے ہیں (یعنی چاروں زاویے مساوی ہوں)، تو خطوط ایک دوسرے کے عمودی (Perpendicular) کہلاتے ہیں۔
- جب دو خطوط ایک سطح پر کبھی متقاطع نہ ہوں، تو وہ متوازی خطوط (Parallel Lines) کہلاتے ہیں۔
- جب ایک خط t دو خطوط کو قطع کرتا ہے، تو اسے خط قاطع (Transversal) کہا جاتا ہے اور یہ 4 زاویوں کے 2 سیٹ بناتا ہے۔ پہلے سیٹ کے چاروں زاویوں کا نظیری زاویہ (Corresponding Angle) دوسرے سیٹ میں ہوتا ہے۔
- جب ایک خط قاطع متوازی خطوط کے ایک جوڑے کو قطع کرتا ہے تو نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں۔ جب خط قاطع خطوط کے ایک جوڑے کو قطع کرتا ہے اور نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں، تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
- جب ایک خط قاطع متوازی خطوط کے جوڑے کو قطع کرتا ہے تو متبادل زاویے (Alternate Angles) مساوی ہوتے ہیں۔
- جب ایک خط قاطع متوازی خطوط کے جوڑے کو قطع کرتا ہے تو اس کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

6

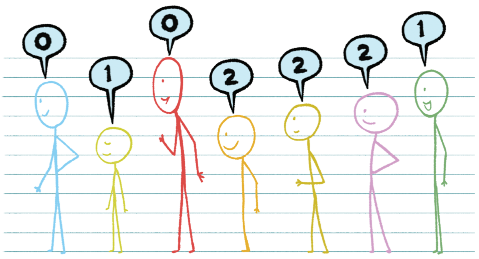
عدد کا کھیل
(NUMBER PLAY)

4774CH06

6.1 اعداد ہمیں کچھ بتاتے ہیں

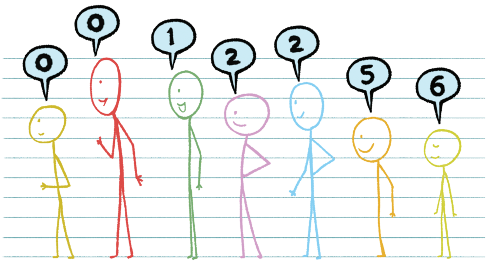
؟ نیچے دی گئی شکل میں موجود اعداد ہمیں کیا بتاتے ہیں؟

ریاضی کی گریڈ 6 کی کتاب میں دیے گئے بچوں کو یاد کیجیے۔ اب وہ ایک مختلف قاعدے کے تحت اعداد بتا رہے ہیں۔



؟ آپ کے خیال میں ان اعداد کا کیا مطلب ہے؟

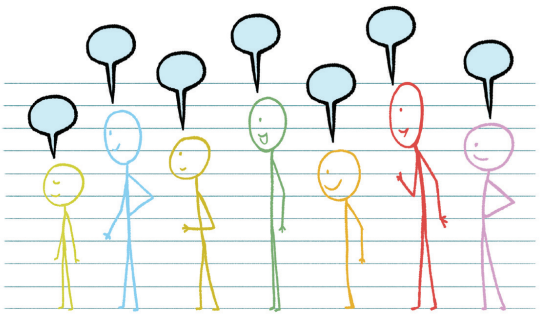
بچے خود اپنی ترتیب بدلتے ہیں اور ہر بچہ نئی ترتیب کے مطابق ایک عدد بولتا ہے۔



؟ کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ یہ اعداد کیا ظاہر کرتے ہیں؟ غور سے دیکھیے اور جاننے کی کوشش کیجیے۔

قاعدہ یہ ہے—ہر بچہ اپنے آگے کھڑے خود سے لمبے بچوں کی تعداد بتاتا ہے۔ دونوں ترتیبوں میں دیکھیے کہ کیا ہر بچے کے ذریعے بتایا گیا عدد اس قاعدے کے مطابق ہے۔

؟ نیچے دی گئی ترتیب میں، اس قاعدے کے تحت ہر بچے کو کون سا عدد بتانا چاہیے، سوچ کر لکھیے۔



؟ معلوم کیجیے

1. کتاب کے آخر میں دیے گئے اسٹک تصاویر کے تراشے کو اس طرح ترتیب دیجیے یا قد کے لحاظ سے ایسی ترتیب بنائیے کہ اس سلسلے کو یوں پڑھا جا سکے:

(a) 0, 1, 1, 2, 4, 1, 5
(b) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
(c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
(d) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0
(e) 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
(f) 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3

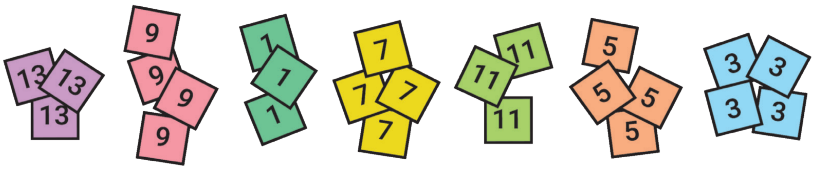
2. نیچے دیے گئے ہر بیان کے بارے میں سوچیے اور بتائیے کہ کیا یہ ہمیشہ درست ہے، کبھی کبھی درست ہے، یا کبھی بھی درست نہیں ہے؟ اپنی دلیل بھی بیان کیجیے۔

(a) اگر کوئی شخص '0' کہے، تو وہ گروپ میں سب سے لمبا ہے۔
(b) اگر کوئی شخص سب سے لمبا ہو، تو اس کا عدد '0' ہو گا۔
(c) پہلے شخص کا عدد '0' ہے۔
(d) اگر کوئی شخص قطار میں نہ تو سب سے آگے کھڑا ہے اور نہ ہی سب سے آخر میں، (درمیان میں کھڑا ہو)، تو وہ '0' نہیں کہہ سکتا۔
(e) جو شخص سب سے بڑا عدد کہے، وہ سب سے چھوٹا ہو گا۔
(f) آٹھ افراد کے گروپ میں سب سے بڑا ممکنہ عدد کیا ہو سکتا ہے؟

6.2 طاق و جفت چننا (Picking Parity)

کشور کے پاس کچھ عددی کارڈ ہیں اور وہ ایک پہیلی حل کر رہا ہے۔ 5 ڈبے ہیں اور ہر ڈبے میں صرف 1 نمبر کارڈ ہونا چاہیے۔ ڈبوں میں موجود تمام اعداد کا مجموعہ 30 ہونا چاہیے۔ کیا آپ کوئی ایسا طریقہ تلاش کرنے میں اس کی مدد کر سکتے ہیں؟

□ + □ + □ + □ + □ = 30



کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ کون سے 5 کارڈوں کا مجموعہ 30 بنتا ہے؟ کیا یہ ممکن ہے؟

اس مجموعے میں سے 5 کارڈ چننے کے کئی طریقے ہیں۔

کیا ایسا کوئی طریقہ ہے جس سے تمام امکانات کو آزمائے بغیر حل نکالا جا سکے؟

آیئے معلوم کرتے ہیں۔

چند جفت اعداد کو جوڑیے۔ آپ کو کس قسم کا عدد حاصل ہوتا ہے؟ کیا اس بات سے فرق پڑتا ہے کہ کتنے اعداد کو جوڑا گیا ہے؟

کوئی بھی جفت عدد جوڑوں میں ترتیب دیا جا سکتا ہے اور کوئی بھی اکیلا عدد باقی نہیں بچتا۔ یہاں کچھ جفت اعداد دکھائے گئے ہیں جو جوڑوں کی صورت میں ترتیب دیے گئے ہیں۔



جیسا کہ ہم شکل میں دیکھ رہے ہیں، کسی بھی جفت اعداد کو جوڑنے پر ان کا حاصل جمع ایسا عدد آئے گا جسے بغیر کسی بچے ہوئے حصے کے جوڑوں میں ترتیب دیا جا سکتا ہے دوسرے الفاظ میں، ان کا حاصل جمع ہمیشہ جفت عدد ہی ہوگا۔

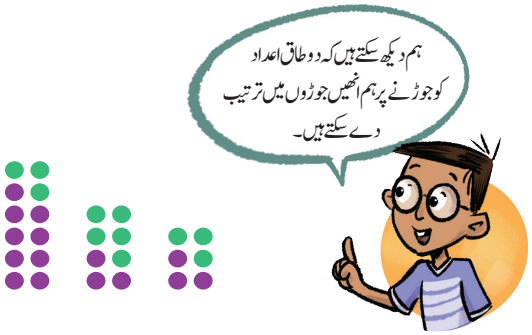
اب چند طاق اعداد کو جوڑیے۔ آپ کو کس قسم کا عدد حاصل ہوتا ہے؟ کیا اس بات سے فرق پڑتا ہے کہ کتنے طاق اعداد کو جوڑا گیا ہے؟

طاق اعداد کو مکمل طور پر جوڑوں میں ترتیب نہیں دیا جا سکتا ہے۔ ایک طاق عدد ہمیشہ کسی جوڑے کے مجموعے سے ایک زیادہ ہوتا ہے۔ ذیل میں کچھ طاق اعداد دکھائے گئے ہیں:





کیا ہم طاق عدد کو ایسے بھی سوچ سکتے ہیں کہ یہ جوڑوں کے مجموعے سے ایک کم ہوتا ہے؟
یہ شکل دکھاتی ہے کہ دو طاق اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ جفت عدد ہوتا ہے! یہ اور یہاں دی گئی دیگر شکلیں بھی اس بات کو **ثابت** کرتی ہیں!



? 3 طاق اعداد کو جوڑنے کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا ان کا حاصل جمع جوڑا بنا کر ترتیب دیا جا سکتا ہے؟ نہیں۔

? معلوم کیجیے کہ (a) 4 طاق اعداد (b) 5 طاق اعداد، اور (c) 6 طاق اعداد کو جوڑنے پر کیا ہوتا ہے۔

آیئے اُس پہیلی کی طرف واپس چلتے ہیں جسے کشور حل کرنے کی کوشش کر رہا تھا۔ وہاں 5 خالی ڈبّے ہیں۔ یعنی اُس کے پاس طاق اعداد میں ڈبّے ہیں۔ تمام عددی کارڈوں پر طاق اعداد لکھے ہیں۔
ان کا حاصل جمع 30 ہونا چاہیے، جو کہ ایک جفت عدد ہے۔ چوں کہ 5 طاق اعداد کو جمع کرنے سے کبھی بھی جفت عدد حاصل نہیں ہو سکتا، اس لیے کشور ان کارڈوں کو ڈبّوں میں اس طرح ترتیب نہیں دے سکتا کہ ان کا حاصل جمع 30 ہو۔

? دو بہن بھائی، مارٹن اور ماریا، ایک سال کے فرق سے پیدا ہوئے۔ آج وہ اپنی سال گرہ منا رہے ہیں۔ ماریا کا کہنا ہے کہ ان کی عمروں کا مجموعہ 112 ہے۔ کیا یہ ممکن ہے؟ اگر ہاں تو کیوں اور نہیں تو کیوں نہیں؟

چوں کہ وہ ایک سال کے فرق سے پیدا ہوئے ہیں، اس لیے ان کی عمریں دو متواتر اعداد ہونے چاہیے۔ کیا ان کی عمریں 51 اور 52 ہو سکتی ہیں؟ 51+52=103 کچھ اور متواتر اعداد کو آزمایئے اور دیکھیے کہ کیا ان کا حاصل جمع 112 ہے۔
گنتی کے اعداد ... 1, 2, 3, 4, 5 متبادل جفت اور طاق کی ترتیب میں ہوتے ہیں۔ کسی بھی دو لگاتار آنے والے اعداد میں، ایک عدد ہمیشہ جفت اور دوسرا طاق ہوتا ہے!
ایک جفت اور ایک طاق عدد کا حاصل جمع کیا ہو گا؟ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ان کا حاصل جمع جوڑوں کی صورت میں ترتیب نہیں دیا جا سکتا، اس لیے وہ عدد ہمیشہ طاق ہو گا۔

چوں کہ 112 ایک جفت عدد ہے اور مارٹن اور ماریا کی عمریں لگاتار آنے والے اعداد ہیں، لہٰذا ان کا حاصل جمع کبھی بھی 112 نہیں ہوسکتا۔

ہم **پیریٹی** (Parity) کا لفظ کسی عدد کے طاق یا جفت ہونے کی خصوصیت کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر، دو متواتر اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ طاق عدد ہوتا ہے۔ اسی طرح دو طاق اعداد کے مجموعے کی پیریٹی ہمیشہ جفت ہوتی ہے۔

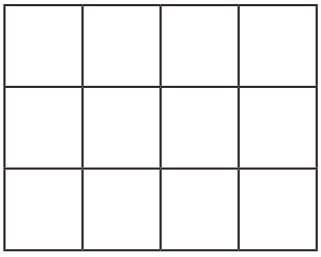
معلوم کیجیے

1. اپنی طاق اور جفت اعداد کی تصویری وضاحت کی سمجھ کو استعمال کرتے ہوئے، درج ذیل مجموعوں کی پیریٹی معلوم کیجیے:
   (a) جفت اعداد اور 2 طاق اعداد کا حاصل جمع مثلاً (جفت + جفت + طاق + طاق)
   (b) 2 طاق اعداد اور 3 جفت اعداد کا حاصل جمع
   (c) 5 جفت اعداد کا حاصل جمع
   (d) 8 طاق اعداد کا حاصل جمع
2. لکپا کی گلک میں ₹1 کے سکے طاق تعداد میں ہیں، ₹5 کے سکے بھی طاق تعداد میں ہیں، اور ₹10 کے سکے جفت تعداد میں ہیں۔ اس کے حساب سے اس کے پاس کل رقم ₹205 ہے۔ کیا اس سے کوئی غلطی ہوئی؟ اگر ہاں تو سمجھایئے کیوں؟ اگر نہیں، تو ہر قسم کے کتنے سکے ہو سکتے ہیں؟
3. ہم جانتے ہیں کہ:
   (a) جفت + جفت = جفت
   (b) طاق + طاق = جفت
   (c) جفت + طاق = طاق

اسی طرح، مندرجہ ذیل صورتوں میں پیریٹی (طاق اور جفت ہونا) معلوم کیجیے:

(d) جفت – جفت = _____
(e) طاق – طاق = _____
(f) جفت – طاق = _____
(g) طاق – جفت = _____

گرڈ میں چھوٹے مربع



ایک 3×3 کے گرڈ میں 9 چھوٹے مربع ہوتے ہیں، جو کہ ایک طاق عدد ہے۔ دوسری طرف، ایک 4×3 کے گرڈ میں 12 چھوٹے مربع ہوتے ہیں، جو کہ ایک جفت عدد ہے۔

اگر آپ کو کسی ایک گرڈ کی لمبائی اور چوڑائی دی جائے، تو کیا آپ ضرب کیے بغیر یہ بتا سکتے ہیں کہ چھوٹے مربعوں کی تعداد طاق ہوگی یا جفت؟

مندرجہ ذیل گرڈ میں چھوٹے خانوں کی تعداد کی پیریٹی بتائیے:

(a) 27×13

(b) 42×78

(c) 135×654

ریاضیاتی عبارات کی پیریٹی

الجبرائی عبارت $3n + 4$ پر غور کیجیے۔ n کی مختلف قدروں کے لیے اس عبارت کی پیریٹی مختلف ہوگی۔

n	$3n+4$ کی قدر	قدر کی پیریٹی
3	13	طاق
8	28	جفت
10	34	جفت

ایسی کوئی الجبرائی عبارت بتائیے جو ہمیشہ جفت پیریٹی رکھتی ہو۔

چند مثالیں: $100p$ اور $48w - 2$۔ ایسی مزید عبارتیں تلاش کیجیے۔

ایسی عبارتیں بتائیے جو ہمیشہ طاق پیریٹی رکھتی ہوں۔

کچھ $3n+4$ جیسی عبارات بتائیے جن کی پیریٹی کبھی طاق اور کبھی جفت ہو سکتی ہے۔

عبارت $6k+2$ کی قدریں $8, 14, 20, \ldots$ ہوتی ہیں جب $k = 1, 2, 3, \ldots$ کے لیے) — اس میں کوئی جفت عدد موجود نہیں ہیں۔

کیا ایسی کوئی عبارت ہے جس سے ہم تمام جفت اعداد کی فہرست بنا سکیں؟

اشارہ: تمام جفت اعداد میں 2 ایک جزو ضربی (Factor) ہوتا ہے۔

کیا ایسی کوئی عبارت ہو سکتی ہے جس سے ہم تمام طاق اعداد کی فہرست بنا سکیں؟

ہم نے پہلے یہ دیکھا تھا کہ 4 کے اضعاف کے سلسلے کی n واں رکن کو کس طرح لکھا جا سکتا ہے، جہاں n وہ حرفی عدد ہے جو سلسلے میں کسی جگہ کو ظاہر کرتا ہے (مثلاً: پہلا، تیئسواں، سوواں، ستر ہواں وغیرہ)۔

2 کے اضعاف کے لیے n واں رکن کیا ہوگا؟ یا n واں جفت عدد کیا ہوگا؟

آیئے طاق اعداد پر غور کرتے ہیں۔

سوواں طاق عدد کیا ہوگا؟

اس کا جواب دینے کے لیے، درج ذیل سوال پر غور کیجیے:

سوواں جفت عدد کیا ہوگا؟

یہ ہے $2 \times 100 = 200$

کیا یہ طریقہ سوویں طاق عدد کو تلاش کرنے میں مددگار ہے؟ آیئے جفت اور طاق اعداد کی ترتیب کا ایک ایک کر کے موازنہ کرتے ہیں:

جفت اعداد: 2، 4، 6، 8، 10، 12، ....

طاق اعداد: 1، 3، 5، 7، 9، 11، ....

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر مقام پر طاق عددی سلسلے کی قدر، جفت عددی سلسلے کی قدر سے ایک کم ہوتی ہے۔ لہٰذا، سوواں طاق عدد $200 - 1 = 199$ ہے۔

nویں طاق عدد تلاش کرنے کا فارمولا لکھیے۔

پہلے ہم وہ طریقہ بیان کرتے ہیں جو ہم نے کسی مقام پر طاق عدد تلاش کرنے کے لیے سیکھا ہے:

(a) اس مقام پر موجود جفت عدد تلاش کیجیے۔ یہ عدد اس مقام کا دوگنا ہوگا۔

(b) پھر اس جفت عدد میں سے 1 گھٹایئے۔

اس طریقے کو ریاضیاتی عبارت میں لکھنے سے ہمیں ملتا ہے

(a) $2n$

(b) $2n - 1$

لہٰذا، nواں جفت عدد کا فارمولا $2n$ ہے اور nواں طاق عدد کا فارمولا $2n - 1$ ہے۔

6.3 گرڈ کے کچھ مشاہدات

4	7	5	16
6	1	2	9
3	9	8	20
13	17	15	

اس 3×3 کے گرڈ کو غور سے دیکھیے۔ اسے ایک سادہ اصول کے تحت بھرا گیا ہے— یعنی 1 سے 9 تک کے اعداد کو استعمال کیا گیا ہے اور کوئی بھی عدد دوہرایا نہیں گیا ہے۔ گرڈ کے باہر کچھ گول دائروں میں اعداد بھی موجود ہیں۔

کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ یہ دائرے میں لکھے گئے اعداد کیا دکھا رہے ہیں؟

پہلے دائرے میں موجود اعداد، متعلقہ قطاروں اور کالموں کی حاصل جمع کو ظاہر کرتے ہیں۔

نیچے دیے گئے گرڈوں کو اسی اصول کے مطابق بھریے:

9			13
			14
		5	18
24	9	12	

			24
		4	15
3			6
12	16	17	

اس طرح کے سوالات خود سے بنائیے اور اپنے دوستوں کو چیلنج کیجیے۔

نیچے دیے گئے سوال کو حل کرنے کی کوشش کیجیے۔

5			
21	6		
19			
	9	11	26

آپ نے محسوس کیا ہوگا کہ اس گرڈ کا حل نکالنا ممکن نہیں ہے۔ ایسا کیوں ہے؟

ممکنہ سب سے چھوٹا مجموعہ 1+2+3 = 6 ہے۔ ممکنہ سب سے بڑا مجموعہ 7+8+9=24 ہے۔ ظاہر ہے کہ دائرے میں موجود عدد 6 سے کم یا 24 سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔ لیکن اس گرڈ میں جو مجموعے دیے گئے ہیں وہ 5 اور 26 ہیں۔ لہٰذا، یہ ممکن ہی نہیں ہے!



پہلے حل کی گئی گرڈوں میں، کشور نے یہ دیکھا کہ دائروں میں موجود تمام اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ 90 ہے۔ اسی طرح، ودیا نے دیکھا کہ تینوں قطاروں یا تینوں کالموں کے دائرے والے اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ 45 ہے۔ پہلے حل کی گئی گرڈوں میں دیکھیے کہ آیا یہ بات درست ہے یا نہیں۔

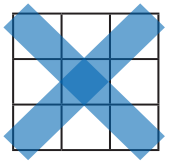
قطاروں کا حاصل جمع یا کالموں کا حاصل جمع 45 کیوں ہونا چاہیے؟

اس گرڈ سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ تمام قطاروں کے حاصل جمع کو آپس میں جوڑنے سے وہی حاصل ہوگا جو 1 سے 9 تک کے اعداد کا مجموعہ ہے۔ یہی بات کالموں کے حاصل جمع پر بھی لاگو ہوتی ہے۔ 1 سے 9 تک کے اعداد کا حاصل جمع ہے

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

4+7+5	5	7	4
6+1+2	2	1	6
3+9+8	8	9	3
	4+6+3	7+1+9	5+2+8

اعداد کی ایک ایسی چوکور گرڈ کو **جادوئی مربع** (Magic Square) کہتے ہیں اگر ہر قطار، ہر کالم، اور ہر وتر (Diagonal) کا حاصل جمع ایک ہی عدد ہو۔ اس عدد کو **جادوئی مجموعہ** (Magic Sum) کہا جاتا ہے۔ وتروں کو تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

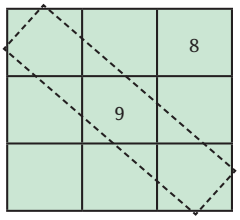


گرڈ کو اعداد سے بھر کر ایک جادوئی مربع بنانے کی کوشش کرنا مشکل ہو سکتا ہے! اس کی وجہ یہ ہے کہ 1 سے 9 تک کے اعداد کو بغیر دہرائے ہوئے 3 × 3 گرڈ میں بھرنے کے بہت سے ممکنہ طریقے ہیں۔ درحقیقت، یہ پایا گیا ہے کہ ایسے کل 880،62،3 طریقے موجود ہیں۔ حیرت انگیز بات یہ ہے کہ ان تمام طریقوں کو فہرست میں لائے بغیر بھی ان کی تعداد معلوم کی جا سکتی ہے۔ ہم آئندہ سالوں میں سیکھیں گے کہ یہ کیسے کیا جاتا ہے۔

ہمیں جادوئی مربع بنانے کے لیے منظم طریقے سے آگے بڑھنا چاہیے۔ اس کے لیے آیئے ہم خود سے کچھ سوالات کرتے ہیں۔

1. جادوئی مجموعہ کیا ہو سکتا ہے؟ کیا یہ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے؟

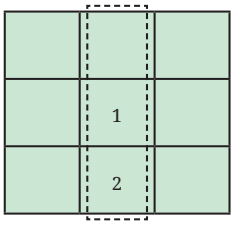
آیئے پہلے صرف قطاروں کے حاصل جمع پر توجہ دیتے ہیں۔ہم دیکھ چکے ہیں کہ 3 × 3 کے گرڈ میں، جس میں 1 سے 9 تک کے اعداد ہوں، قطاروں کے اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ 45 ہوتا ہے۔چوں کہ ایک جادوئی مربع میں تمام قطاروں کے حاصل جمع برابر ہوتے ہیں اور ان سب کا حاصل جمع 45 ہوتا ہے، لہٰذا ہر قطار کا حاصل جمع 15 ہونا چاہیے۔چنانچہ، ہمیں درج ذیل مشاہدہ حاصل ہوتا ہے۔



مشاہدہ 1: 1 سے 9 تک کے اعداد سے بنے جادوئی مربع میں جادوئی مجموعہ لازمی طور پر 15 ہونا چاہیے۔

2. جادوئی مربع کے مرکز میں کون سے ممکنہ اعداد آسکتے ہیں؟

آیئے ایک ایک کر کے امکانات پر غور کرتے ہیں۔کیا مرکز میں 9 آسکتا ہے؟ اگر ہاں، تو پھر 8 کو دوسرے کسی خانے میں آنا ہوگا۔

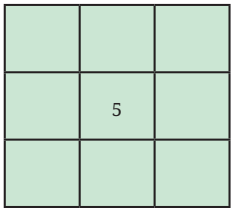


بطور مثال پر، اس صورت میں ہمیں یہ دیکھنا ہوگا 15 = کوئی اور عدد + 9 +8
لیکن یہ ممکن نہیں! چاہے ہم 8 کو کہیں بھی رکھیں، یہی مسئلہ پیش آئے گا۔

لہٰذا، 9 مرکز میں نہیں آسکتا۔کیا مرکز میں 1 آسکتا ہے؟

اگر ہاں، تو پھر 2 کو کسی دوسرے خانے میں آنا ہوگا۔

اس صورت میں ہمیں یہ دیکھنا ہوگا 15 = کوئی اور عدد + 1 + 2
لیکن یہ ممکن نہیں، کیوں کہ ہم صرف 1 سے 9 تک کے اعداد استعمال کر رہے ہیں۔یہی مسئلہ ہر بار پیش آئے گا، چاہے ہم 1 کو کہیں بھی رکھیں۔



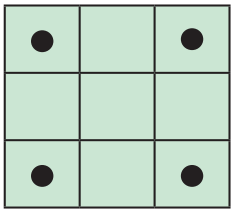
لہٰذا، 1 بھی مرکز میں نہیں آسکتا۔

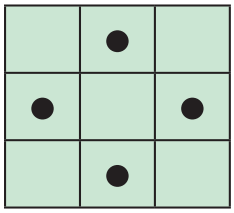
؟ اس طرح کی دلیل کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے کہ 1 سے 9 کے بیچ میں آنے والے اور کون سے دوسرے اعداد مرکز میں نہیں آسکتے۔

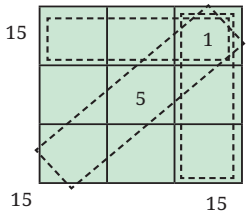
یہ تلاش ہمیں ایک دل چسپ نتیجے تک لے جائے گی۔

مشاہدہ 2: 1 سے 9 تک کے اعداد سے بھرے گئے جادوئی مربع کے مرکز میں آنے والا عدد لازمی طور پر 5 ہونا چاہیے۔

اب آیئے دیکھتے ہیں کہ سب سے چھوٹا عدد 1 اور سب سے بڑا عدد 9 جادوئی مربع میں کہاں آسکتے ہیں۔ہمارا دوسرا مشاہدہ ہمیں بتاتا ہے کہ یہ اعداد لازمی طور پر بیرونی خانوں میں ہی آسکتے ہیں۔آیئے ان خانوں کو دو زمروں میں تقسیم کرتے ہیں:







کیا 1 کسی کونے والے خانے میں آسکتا ہے؟ مثال کے طور پر، کیا اسے اس طرح رکھا جاسکتا ہے؟

اگر ہاں، تو پھر 1 کو دو اور اعداد کے ساتھ ملا کر 15 حاصل کرنے کے تین طریقے موجود ہونے چاہیے۔ ہمارے پاس ہے:

'15 = 8 + 6 + 1 = 9 + 5 + 1' کیا کوئی اور مجموعہ ممکن ہے؟

اسی طرح، کیا 9 کو کسی کونے میں رکھا جاسکتا ہے؟

مشاہدہ 3: اعداد 1 اور 9 کسی بھی کونے میں نہیں آسکتے، لہٰذا وہ لازمی طور پر درمیان کے خانوں میں آئیں گے۔

کیا آپ 1 اور 9 کے دیگر ممکنہ مقامات تلاش کر سکتے ہیں

	1	
	5	
	9	

1	5	9

اب، ہمارے پاس جادوئی مربع کی ایک مکمل قطار یا کالم ہے!
اب اسے مکمل کرنے کی کوشش کیجیے!

[**اشارہ:** پہلے اُن قطاروں یا کالموں کو بھریے جن میں 1 اور 9 شامل ہیں]

معلوم کیجیے

ریاضی بات چیت

1. 1 سے 9 تک کے اعداد کو استعمال کرتے ہوئے کتنے مختلف جادوئی مربع بنائے جاسکتے ہیں؟
2. 2 سے 10 تک کے اعداد کو استعمال کرتے ہوئے ایک جادوئی مربع بنائیے۔ اس کے لیے آپ کون سا طریقہ استعمال کریں گے؟ اسے 1 سے 9 والے جادوئی مربع سے موازنہ کر کے دیکھیے۔
3. ایک جادوئی مربع لیجیے اور
   (a) ہر عدد میں 1 کا اضافہ کیجیے۔
   (b) ہر عدد کو دوگنا کیجیے۔

ان دونوں صورتوں میں، کیا حاصل شدہ گرڈ بھی جادوئی مربع کہلائے گی؟ ہر صورت میں جادوئی مجموعے میں کیا تبدیلی آئے گی؟

ریاضی بات چیت

4. جادوئی مربع پر اور کون سے عمل کیے جاسکتے ہیں تاکہ ہمیں کوئی دوسرا جادوئی مربع حاصل ہو؟
5. لگاتار آنے والے اعداد (مثلاً 9-17, 3-11, 2-10 وغیرہ) کو استعمال کرتے ہوئے جادوئی مربع بنانے کے مختلف طریقے دریافت کیجیے۔

3×3 کے جادوئی مربع کا عمومی تصوّر

ہم یہ بتاسکتے ہیں کہ جادوئی مربع کے اعداد کا آپس میں کیا تعلق ہے، یعنی جادوئی مربع کی ساخت بیان کر سکتے ہیں۔

	m	

اب تک آپ نے لگاتار آنے والے اعداد سے جتنے بھی جادوئی مربع بنائے ہیں، ان میں سے کسی ایک کو منتخب کیجیے۔ اگر اس عدد کو ظاہر کرے جو مربع کے بیچ میں ہے، تو معلوم کیجیے کہ باقی اعداد m سے کتنے زیادہ یا کم ہیں اور وہ m سے کس طرح متعلق ہیں۔

[**اشارہ:** یاد کیجیے ہم نے الجبریائی عبارات والے باب میں کس طرح کیلنڈر مہینے کے 2×2 گرڈ کو بیان کیا تھا۔]

ریاضی بات چیت

جب آپ عمومی صورت تیار کر لیجیے، تو اپنے مشاہدات پوری جماعت کو بتائیے۔

معلوم کیجیے

1. اس عمومی صورت کو استعمال کرتے ہوئے، ایک جادوئی مربع بنائیے جس میں مرکز کا عدد 25 ہو۔
2. کسی بھی قطار، کالم یا وتر کے تین ارکان کو جمع کرنے سے حاصل ہونے والی عبارت کیا ہے؟
3. درج ذیل کے حاصل شدہ نتائج لکھیے اگر
   (a) عمومی صورت کے ہر عدد میں 1 کا اضافہ کر دیا جائے۔
   (b) عمومی صورت کے ہر عدد کو دوگنا کر دیا جائے۔
4. ایک ایسا جادوئی مربع بنائیے جس کا جادوئی مجموعہ 60 ہو۔
5. کیا نو غیر متواتر اعداد سے جادوئی مربع بنانا ممکن ہے؟

کوشش کیجیے

سب سے پہلا 4×4 کا جادوئی مربع

سب سے پہلا ریکارڈ شدہ 4×4 کا جادوئی مربع دسویں صدی کی ایک تحریر میں پایا گیا ہے، جو بھارت کے کھجوراہو میں واقع پارشوناتھ جین مندر میں موجود ہے، اور اسے چوتیسا ینتر (Chautisa Yantra) کہتے ہیں۔



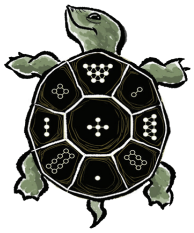
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

سب سے پہلا 4×4 کا جادوئی مربع، چوتیسا یَنتر، جوکھجوراہو، بھارت میں واقع ہے۔

چوتیس کا مطلب "34" ہوتا ہے۔ آپ کے خیال میں اسے چوتیسا ینتر (Chautisa Yantra) کیوں کہا گیا ہوگا؟

اس جادوئی مربع کی ہر قطار، ہر کالم اور ہر وتر کا حاصل جمع 34 ہے۔ کیا آپ اس مربع میں ایسے اور بھی چار عددوں کے پیٹرن تلاش کر سکتے ہیں جن کا حاصل جمع 34 ہو؟

تاریخ و ثقافت میں جادوئی مربع



سب سے پہلا ریکارڈ شدہ جادوئی مربع، لوشو (Lo Shu) مربع ہے جو دو ہزار سال سے بھی زیادہ پرانا ہے اور قدیم چین سے تعلق رکھتا ہے۔ ایک روایت کے مطابق، لو دریا میں ایک خوفناک سیلاب آیا، جس کے دوران دیوتاؤں نے لوگوں کو بچانے کے لیے ایک کچھوا بھیجا۔ اس کچھوے کی پشت پر 3 × 3 کا ایک گرڈ تھا، جس میں 1 سے 9 تک کے اعداد ایک جادوئی ترتیب میں لگے ہوئے تھے۔

2	7	6
9	5	1
4	3	8

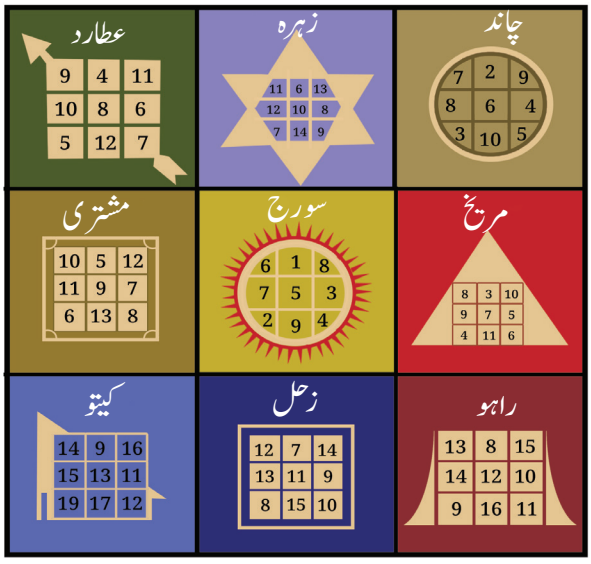
جادوئی مربع دنیا کے مختلف حصوں میں مطالعے کا موضوع رہے ہیں، جن میں بھارت، جاپان، وسطی ایشیا اور یورپ شامل ہیں۔



ہندوستانی ریاضی دانوں نے جادوئی مربع پر بہت گہرائی سے کام کیا ہے اور ان کے بنانے کے عمومی طریقے بیان کیے ہیں۔ ہندوستانی ریاضی دانوں کا کام صرف 3 × 3 اور 4 × 4 گرڈ تک محدود نہیں تھا، بلکہ انھوں نے 5 × 5 اور اس سے بڑے مربع کی بھی تحقیق کی۔ ہم ان کے بارے میں آنے والی جماعتوں میں مزید سیکھیں گے۔

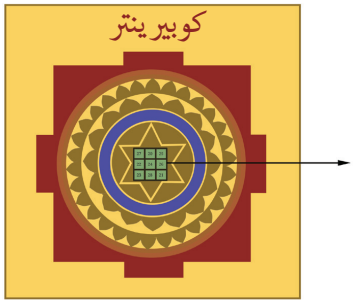
جادوئی مربع صرف علمی یا ریاضیاتی کتب تک محدود نہیں ہے۔ یہ ہندوستان میں کئی مقامات پر پائے جاتے ہیں۔ دائیں طرف ایک 3 × 3 جادوئی مربع کی تصویر دکھائی گئی ہے، جو تمل ناڈو میں پالنی کے ایک مندر میں ستون پر کندہ ہے۔ یہ مندر آٹھویں صدی عیسوی کا ہے۔ 3×3 جادوئی مربع بھارت کے گھروں اور دکانوں میں بھی دیکھے جا سکتے ہیں۔

ایک مثال نوگرہ ینتر (Navagraha Yantra) ہے جو نیچے دکھایا گیا ہے۔



نوٹ کیجیے کہ ہر گرہ کے ساتھ ایک مختلف جادوئی مجموعہ منسلک ہے۔

نیچے ایک تصویر کوبیر ینتر (Kubera Yantra) کی دکھائی گئی ہے۔



27	20	25
22	24	26
23	28	21

6.4 فطرت کی پسندیدہ ترتیب: وِرہانک–فیبوناچی اعداد (Virahāṅka–Fibonacci Numbers)

ترتیب ...,1,2,3,5,8,13,21,34 **وِرہانک–فیبوناچی اعداد** ریاضی کے سب سے زیادہ مشہور سلسلوں میں سے ایک ہے—یہ فن، سائنس اور ریاضی کی دنیا میں ہر جگہ نظر آتا ہے۔ اگرچہ یہ اعداد سائنس میں بہت کثرت سے پائے جاتے ہیں، لیکن یہ بات حیرت انگیز ہے کہ ان اعداد کو سب سے پہلے فن آرٹ (خصوصاً شاعری) کے سیاق و سباق میں دریافت کیا گیا تھا!

وِرہانک –فیبوناچی اعداد، فن، سائنس اور ریاضی کے درمیان قریبی تعلق کی ایک خوبصورت مثال فراہم کرتے ہیں۔

وِرہانک اعداد کی دریافت

وِرہانک اعداد ہزاروں سال پہلے سنسکرت اور پراکرت کے ماہرین لسانیات کے شعری مطالعے میں سامنے آئے تھے!

ہندوستان کی کئی زبانوں کی شاعری میں، جن میں پراکرت، سنسکرت، مراٹھی، ملیالم، تمل اور تیلگو شامل ہیں، ہر رکن کلمہ کو یا تو طویل یا مختصر طور پر درجہ بند کیا جاتا ہے۔

ایک طویل رکن کلمہ کو مختصر اکائی کے مقابلے میں دوگنا وقت تک ادا کیا جاتا ہے۔ جب اس طرح کی نظم گائی جاتی ہے، تو **ہجہ مختصر** (Short Syllable) ایک تال کے برابر ہوتی ہے، جب کہ **ہجہ طویل** (Long Syllable) دو تالوں کے برابر وقت لیتی ہے۔

اس سے بے شمار ریاضیاتی سوالات جنم لیتے ہیں، جن پر ان زبانوں کے قدیم شاعروں نے گہرائی سے غور کیا۔ شاعری سے متعلق ان سوالات کو پوچھنے اور ان کے جواب تلاش کرنے کے عمل میں کئی اہم ریاضیاتی دریافتیں ہوئیں۔

ان میں سے ایک نہایت اہم سوال یہ تھا۔

آٹھ تالوں پر مشتمل کتنی مختلف لَے (Rhythms) بن سکتی ہیں، جن میں مختصر رکن کلمات (1 تال) اور طویل رکن کلمات (2 تالیں)، دونوں شامل ہوں؟ یعنی، آٹھ تالوں کو مختصر اور طویل رکن کلمات سے کتنے مختلف طریقوں سے بھرا جا سکتا ہے، جہاں ایک مختصر رکن کلمہ ایک تال کے برابر وقت لیتی ہے اور ایک طویل رکن کلمہ دو تالوں کے برابر۔

یہاں چند ممکنہ ترکیبیں دی جا رہی ہیں:

طویل طویل طویل طویل
مختصر مختصر مختصر مختصر مختصر مختصر مختصر
مختصر طویل طویل مختصر طویل
طویل طویل مختصر مختصر طویل
.
.
.

کیا آپ مزید طریقے تلاش کر سکتے ہیں؟

اگر اس سوال کو ریاضیاتی انداز میں بیان کیا جائے تو: کسی عدد، جیسے کہ 8، کو **1** اور **2** کے مجموعے کے طور پر کتنے مختلف طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے؟

مثال کے طور پر:

$8 = 2 + 2 + 2 + 2$،
$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$,
$8 = 1 + 2 + 2 + 1 + 2$,
$8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 2$,
وغیرہ۔

کیا آپ کو مزید طریقے نظر آتے ہیں؟

یہاں 4 , 3 , 2 , 1 کو **1** اور **2** کے مجموعے کے طور پر لکھنے کے تمام ممکنہ طریقے دیے گئے ہیں:

	مختلف طریقے	طریقوں کی تعداد
$n = 1$	1	1
$n = 2$	1 + 1 2	2
$n = 3$	1 + 1 + 1 1 + 2 2 + 1	3
$n = 4$	1 + 1 + 1 + 1 1 + 1 + 2 1 + 2 + 1 2 + 1 + 1 2 + 2	5

اپنی کاپی میں عدد 5 کو **1** اور **2** کے مجموعے کے طور پر تمام ممکنہ طریقوں سے لکھنے کی کوشش کیجیے آپ نے کتنے طریقے تلاش کیے؟ (آپ کو 8 مختلف طریقے تلاش کرنے چاہیے)! کیا آپ بغیر تمام امکانات لکھے، جواب معلوم کر سکتے ہیں؟ کیا آپ اسے $n = 8$ کے لیے آزما سکتے ہیں؟

یہ ایک منظم طریقہ ہے جس سے 5 تالوں پر مشتمل مختصر اور طویل رکن کلمات کی تمام لَے لکھی جا سکتی ہیں۔ چار تالوں والی تمام لے کے آگے '**+1**' اور تین تالوں والی تمام لَے کے آگے '**+2**' لگائیے۔ اس طریقے سے ہمیں پانچ تالوں پر مشتمل تمام لَے حاصل ہو سکتی ہیں۔

$n = 5$	1 + 1 + 1 + 1 + 1 1 + 1 + 1 + 2 1 + 1 + 2 + 1 1 + 2 + 1 + 1 1 + 2 + 2	2 + 1 + 1 + 1 2 + 1 + 2 2 + 2 + 1

لہٰذا، 5 تالوں پر مشتمل 8 مختلف لے ہوتی ہیں۔

یہ طریقہ اس لیے کارآمد ہے کیوں کہ ہر 5 تال والی لَے لازماً یا تو '1+' سے شروع ہوگی یا '2+' سے۔ اگر یہ '1+' سے شروع ہوتی ہے، تو باقی کے اعداد سے 4 تال والی لَے بنے گی اور ہم وہ تمام اعداد لکھ سکتے ہیں۔ اگر یہ '2+' سے شروع ہوتی ہے، تو باقی کے اعداد سے 3 تال والی لَے بنے گی اور وہ بھی ہم لکھ سکتے ہیں۔ لہٰذا، 5 تال والی لے کی تعداد 4 تال والی لَے کی تعداد اور 3 تال والی لَے کی تعداد کا مجموعہ ہے۔

تالوں پر مشتمل کتنی لَے ہوں گی؟ اسی دلیل کے تحت، یہ 5 تال والی لَے اور 4 تال والی لَے کا مجموعہ ہوں گے، یعنی 13 = 5 + 8۔ چناں چہ، 6 تالوں پر مشتمل 13 لَے ہوں گی۔

منظم طریقہ استعمال کر کے 6 تالوں پر مشتمل تمام لَے لکھیے، یعنی عدد 6 کو 1 اور 2 کے مجموعے کے طور پر تمام ممکنہ طریقوں سے لکھیے۔ کیا آپ کو 13 طریقے ملے؟

یہ خوبصورت طریقہ، سب سے پہلے عظیم پراکرت عالم وِرہانک نے تقریباً 700 عیسوی میں پیش کیا تھا، جس سے مختصر اور طویل رکن کلمات پر مشتمل کسی بھی مقررہ تعداد کی لَے گنی جا سکتی ہے۔ انھوں نے یہ طریقہ ایک پراکرت نظم کی شکل میں بیان کیا! اسی وجہ سے ترتیب 1,2,3,5,8,13,21,34,... کو **وِرہانک ترتیب** کہا جاتا ہے اور اس ترتیب میں آنے والے اعداد کو **وِرہانک اعداد** کہا جاتا ہے۔ **وِرہانک تاریخ** میں پہلے شخص تھے جنھوں نے ان اہم اعداد پر باقاعدہ غور کیا اور ان کی تشکیل کا قاعدہ تحریری صورت میں بیان کیا۔

ہندوستان کے دیگر علما نے بھی ان اعداد کو اسی شاعرانہ سیاق و سباق میں دیکھا اور بیان کیا۔ وِرہانک کو قدیم سنسکرت عالم پنگل (Pingala) کے کام سے تحریک ملی، جو تقریباً 300 ق م میں زندہ تھے۔ وِرہانک کے بعد ان اعداد پر گوپال (تقریباً 1135 عیسوی) اور پھر ہیم چندر (تقریباً 1150 عیسوی) نے بھی کام کیا۔

مغرب میں ان اعداد کو **فیبوناچی اعداد** کے نام سے جانا جاتا ہے، اس اطالوی ریاضی داں کے نام پر جس نے 1202 عیسوی میں ان کو لکھا تھا—جو کہ وِرہانک کے تقریباً 500 سال بعد کا زمانہ ہے۔ جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں، فیبوناچی نہ تو پہلا، نہ دوسرا، بلکہ ان اعداد کو لکھنے والا تیسرا شخص بھی نہیں تھا کبھی کبھار ''وِرہانک–فیبوناچی اعداد'' کی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے تاکہ سب سمجھ سکیں کہ کن اعداد کا حوالہ دیا جا رہا ہے۔

مختصر اور طویل رکن کلمات پر مشتمل 8 تالوں والی کتنی لَے ہو سکتی ہیں؟ ہم وِرہانک ترتیب کے آٹھویں عنصر (Element) کو لیتے ہیں:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

لہٰذا، 8 تالوں پر مشتمل 34 مختلف لَے ہوں گی۔

اس ترتیب میں 55 کے بعد اگلا عدد لکھیے۔

ہم نے دیکھا ہے کہ ترتیب میں اگلا عدد پچھلی دو اعداد کو جوڑ کر حاصل ہوتا ہے۔ تصدیق کیجیے کہ یہ اوپر دیے گئے اعداد کے لیے درست ہے۔ اگلا عدد 89 = 55 + 34 ہے۔

ترتیب میں اگلے 3 اعداد لکھیے:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 , 55, 89, ____, ____, ____, ...

اگر آپ کو اوپر دی گئی ترتیب میں ایک اور عدد لکھنا ہو، تو کیا آپ بغیر پچھلے دو اعداد کو جوڑ بتا سکتے ہیں کہ وہ عدد طاق ہو گا یا جفت؟

ترتیب میں ہر عدد کی طاق یا جفت ہونے کی پیریٹی کیا ہے؟ کیا آپ کو ترتیب میں کوئی خاص پیٹرن دکھائی دیتا ہے؟

آج، **وِرہانک—فیبوناچی اعداد** بہت سے ریاضیاتی نظریات اور فنونِ لطیفہ کے نظریات کی بنیاد ہیں، جیسے شاعری، طبلہ نوازی، بصری فنون، فنِ تعمیر اور سائنس۔ شاید ان اعداد کا سب سے حیرت انگیز ظہور قدرت میں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، گلِ بہار کے پتوں کی تعداد عموماً **وِرہانک** عدد ہوتی ہے۔

آپ کو ان پھولوں میں سے ہر ایک پر کتنی پتّیاں دکھائی دیتی ہیں؟



34 پتوں والا گل بہار



21 پتوں والا گل بہار



13 پتوں والا گل بہار



وِرہانک—فیبوناچی اعداد کی اور بھی بہت سی حیرت انگیز ریاضیاتی خصوصیات ہیں، جنھیں ہم آگے چل کر ریاضی اور دیگر مضامین میں سیکھیں گے۔

یہ اعداد واقعی فن، سائنس اور ریاضی کے درمیان گہرے تعلق کو نمایاں کرتے ہیں۔

6.5 پوشیدہ ہندسہ

آپ نے عددوں کے ساتھ حسابی عمل کیے ہیں۔ اب ذرا وہی کام حروف کے ساتھ کرنے کی کوشش کیجیے؟

نیچے دی گئی مشقوں میں ہندسے، حروف سے بدل دیے گئے ہیں۔ ہر حرف کسی خاص ہندسہ (0 سے 9) کی نمائندگی کر رہا ہے۔ آپ کو یہ معلوم کرنا ہے کہ ہر حرف کس ہندسہ کے لیے استعمال ہوا ہے۔

```
  T
  T
+ T
----
 UT
```

یہاں ہمارے پاس ایک۔ ہندسی عدد ہے، جو خود سے دو بار جوڑا جائے تو حاصل جمع 2- ہندسی عدد بنتا ہے۔ اس حاصل جمع کا اکائی کا ہندسہ وہی ہے جو اصل میں جوڑا گیا ایک ہندسی عدد ہے۔

U اور T کیا ہو سکتے ہیں؟ کیا T ,2 ہو سکتا ہے؟ کیا یہ 3 ہو سکتا ہے؟

جب آپ غور کریں گے، تو آپ دیکھیں گے کہ T=5 اور UT=15 ہے۔

```
  K2
+ K2
----
 HMM
```

آیئے ایک اور مثال دیکھتے ہیں جو دائیں جانب دی گئی ہے۔ یہاں K2 کا مطلب ہے کہ یہ دو ہندسوں کا عدد ہے، جس میں اکائی کا ہندسہ '2' ہے اور دہائی کا ہندسہ K ہے۔ K2 کو خود اپنے ساتھ جوڑا گیا ہے اور حاصل جمع تین ہندسی عدد HMM پر مشتمل ہے۔ آپ کو یہ معلوم کرنا ہے کہ حرف M کس ہندسہ کے برابر ہے۔

حاصل جمع میں دہائی اور اکائی دونوں جگہ ایک ہی ہندسہ ہے۔

H کیا ہو سکتا ہے؟ کیا یہ 2 ہو سکتا ہے؟ کیا یہ 3 ہو سکتا ہے؟

اس قسم کے سوالات دلچسپ اور مزے دار ہوتے ہیں! یہاں کچھ اور سوالات بھی ہیں جنھیں آپ حل کر سکتے ہیں۔ معلوم کیجیے کہ ہر حرف کس ہندسہ کو دکھا رہا ہے۔

اپنے ہم جماعتوں کو بتایئے کہ آپ نے ہر سوال کے بارے میں کیسے سوچا؛ ممکن ہے آپ کو کچھ نئے طریقے معلوم ہوں!

```
  YY          B5          KP          C1
+  Z        + 3D        + KP        +  C
----        ----        ----        ----
 ZOO         ED5         PRR         1FF
```

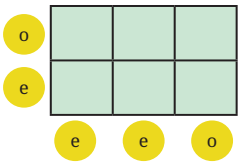
ایسے سوالات کو 'کرپٹریتھمز' (Cryptarithms) یا 'الفامیٹکس' (Alphametics) کہا جاتا ہے۔

معلوم کیجیے

1. ایک بلب جل رہا ہے۔ دورجی نے اس کا سوئچ 77 بار دبایا۔ کیا بلب جل رہا ہو گا یا بجھا ہوا ہو گا؟ کیوں؟

2. لِسونی کے پاس ایک پرانی بڑی انسائیکلوپیڈیا ہے۔ جب اس نے اسے کھولا تو کئی ڈھیلے صفحات باہر گر گئے۔ اس نے کل 50 ورق گنے، جن کے دونوں طرف چھپائی تھی۔ کیا ان گرے ہوئے صفحات کے صفحہ نمبروں کا مجموعہ 6000 ہوسکتا ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

3. یہ ایک 2×3 گرڈ ہے۔ ہر قطار اور ہر کالم کے حاصل جمع کی پیریٹی دائرے میں دی گئی ہے۔ 'e' کا مطلب جفت اور 'o' کا مطلب طاق عدد ہے۔ آپ کو ان 6 خانوں کو 3 طاق اعداد اور 3 جفت اعداد سے اس طرح بھرنا ہے کہ ہر قطار اور کالم کے حاصل جمع کی پیریٹی دی گئی معلومات کے مطابق ہو۔



4. ایک 3 × 3 کا جادوئی مربع بنائیے جس کا جادوئی مجموعہ صفر ہو۔ تمام اعداد صفر نہیں ہو سکتے ضرورت پڑنے پر منفی عدد استعمال کیجیے۔

5. نیچے دی گئی خالی جگہوں کو 'طاق' یا 'جفت' اعداد سے پُر کیجیے۔
   (a) جفت عدد اور طاق عدد کا حاصل جمع _____ ہوتا ہے۔
   (b) طاق عدد اور جفت عدد کا حاصل جمع _____ ہوتا ہے۔
   (c) جفت عدد اور جفت اعداد کا حاصل جمع _____ ہوتا ہے۔
   (d) طاق عدد اور طاق اعداد کا حاصل جمع _____ ہوتا ہے۔

6. 1 سے 100 تک کے اعداد کے حاصل جمع کی پیریٹی کیا ہوگی؛ طاق یا جفت؟

7. وِرہانک ترتیب میں دو مسلسل اعداد 987 اور 1597 ہیں۔ ترتیب میں اگلے دو اعداد کون سے ہوں گے؟ ترتیب میں پچھلے دو اعداد کون سے ہوں گے؟

8. انگان 8 سیڑھیوں والا ایک زینہ چڑھنا چاہتا ہے۔ اس کا اصول یہ ہے کہ وہ ایک بار میں 1 یا 2 سیڑھی ہی چڑھ سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، اس کا ایک راستہ یہ ہوسکتا ہے: 2، 1، 2، 2، 1۔ وہ کتنے مختلف طریقوں سے زینے کے اوپر تک پہنچ سکتا ہے؟

9. وِرہانک ترتیب کی 20ویں رُکن کی پیریٹی کیا ہوگی؟

10. درج ذیل بیانات میں سے کون سا بیان درست ہے؟ پہچانیے
   (a) عبارت $4m - 1$ ہمیشہ طاق عدد دیتی ہے۔
   (b) تمام جفت اعداد کو $6j - 4$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔
   (c) دونوں عبارات، $2p+1$ اور $2q + 1$ تمام طاق اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔
   (d) عبارت $2f+3$ جفت اور طاق دونوں قسم کے عدد دے سکتی ہے۔

11. یہ کرپٹریتھم (Cryptarithm) حل کیجیے:

$$\begin{array}{r} UT \\ +\ TA \\ \hline TAT \end{array}$$

خلاصہ

اس باب میں ہم نے درج ذیل معلومات حاصل کیں:

- پہلی سرگرمی میں ہم نے یہ سیکھا کہ بغیر اصل عدد کو جانے ہوئے، ان کی ترتیب (مثلاً، قد کی پیمائش) کے بارے میں معلومات کو کیسے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
- ہم نے جفت و طاق (Parity) کے بارے میں سیکھا – یعنی وہ عدد جو جوڑوں میں ترتیب دیے جاسکتے ہیں (جفت عدد) اور وہ عدد جو جوڑوں میں ترتیب نہیں دیے جاسکتے ہیں (طاق عدد)۔
- ہم نے یہ بھی سیکھا کہ کسی حاصل جمع اور حاصلِ ضرب کی پیریٹی کیسے معلوم کی جاتی ہے۔
- جب ہم نے گرڈ میں حاصل جمع کا مطالعہ کیا، تو ہم نے صرف قطار اور کالم (Row and Column) کے حاصل جمع کو دیکھ کر، یہ اندازہ لگایا کہ گرڈ کو پورا کیا جاسکتا ہے یا نہیں۔ اسی خیال کو ہم نے آگے بڑھا کر جادوئی مربعے بنانے تک پہنچایا۔
- ہم نے یہ دیکھا کہ وِرہانک عدد تاریخ میں سب سے پہلے، فنون کے تعلق سے دریافت کیے گئے تھے۔ وِرہانک ترتیب یہ ہے :

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- جہاں ہند سے حروف سے بدل دیے گئے وہاں ہم کرپٹر یتھمز کے ذریعے، ریاضیاتی جاسوس بنے۔



7

تین متقاطع خطوط کی کہانی

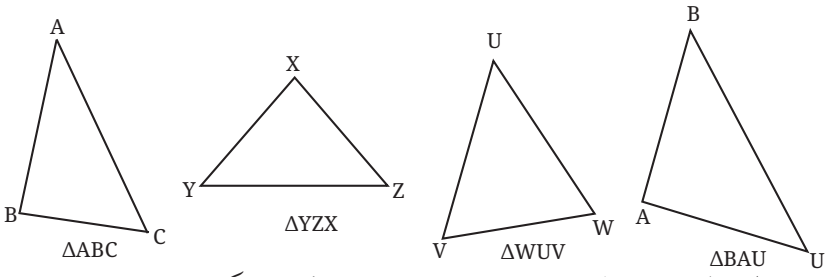
(A TALE OF THREE INTERSECTING LINES)

4774CH07

مثلث سب سے بنیادی بند کثیر ضلعی ہے۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ اس میں:

- تین کونے ہوتے ہیں، جن کو نقطوں سے ظاہر کرتے ہیں اور ان کو ہم مثلث کی راس کہتے ہیں
- تین خطِ قطع یا مثلث کے اضلاع، جو راسوں کے جوڑوں کو جوڑتے ہیں۔

مثلث متعدد اشکال کے ہوتے ہیں ان میں سے چند درج ذیل ہیں۔



مثلث کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہونے والی علامت کا مشاہدہ کیجیے اور دیکھیے کہ ان کے راسوں کا استعمال کرتے ہوئے مثلث کا نام کیسے رکھا گیا ہے۔ مثلث کا نام دیتے وقت، راس کسی بھی ترتیب میں آسکتے ہیں۔

تین کونوں پر اضلاع کے ملنے سے تین زاویے بنتے ہیں جنھیں ہم مثلث کے زاویے کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ΔABC میں، یہ زاویے ∠CAB، ∠ABC، ∠BCA ہیں، جنھیں ہم بالترتیب ∠A، ∠B اور ∠C سے ظاہر کرتے ہیں۔

؟ اگر تینوں راس ایک خط مستقیم پر ہوں تو کیا ہوگا؟

7.1 مساوی الاضلاع مثلث (Equilateral Triangles)

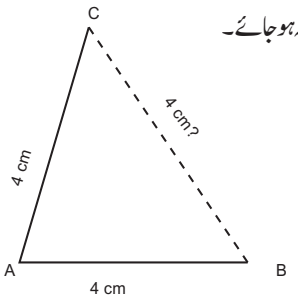
تمام مثلثوں میں، مساوی الاضلاع مثلث متشاکل ہوتے ہیں۔ اس مثلث کے تمام اضلاع برابر لمبائی کے ہوتے ہیں۔ آیئے ان کو بنانے کی کوشش کریں۔

نوٹ: تشکیل سے چند روز قبل اساتذہ طلبا سے جیومیٹری باکس لانے کو کہیں۔

؟ ایک مثلث کی تشکیل کیجیے، جس کے ہر ضلع کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہو۔

آپ نے اس مثلث کی تشکیل کیسے کی اور آپ نے کون سے آلات استعمال کیے؟ کیا یہ تشکیل صرف پیمانہ (اسکیل) اور (ایک پینسل) سے کی جا سکتی ہے؟

صرف ایک پیمانے (Ruler) کا استعمال کرتے ہوئے اس مثلث کی تشکیل ناممکن تو نہیں لیکن یقینی طور پر مشکل ضرور ہے کیوں کہ اس کے لیے کئی بار کوشش کرنی پڑ سکتی ہے۔ فرض کیجیے کہ ہم نے 4 سینٹی میٹر کا ایک قاعدہ بنایا—اور اسے AB کا نام دیا—(نیچے دی گئی تصویر دیکھیے) اور تیسرے نقطہ C کو ایک پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے اس طرح نشان زد کیجیے 4 سینٹی میٹر =AC ہو۔ ایسا کرنے سے عین ممکن ہے کہ BC کی لمبائی بھی 4 سینٹی میٹر نہ ہو۔ آپ خود تجربہ کریں اور BC کی لمبائی کی پیمائش کر کے دیکھیں۔ ایسی صورت میں ہمیں C کو نشان زد کرنے کی کوششیں جاری رکھنی ہوں گی جب تک کہ BC کی لمبائی 4 سینٹی میٹر نہ ہو جائے۔



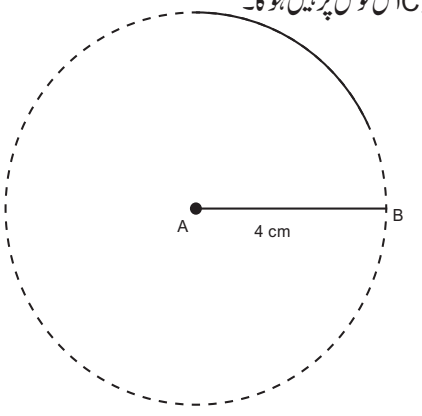
ہم اس کی تشکیل کم وقت میں درستگی کے ساتھ کیسے کر سکتے ہیں؟

یاد کیجیے کہ آپ نے پچھلے سال ایک پرکار (کمپاس) کا استعمال کرتے ہوئے اسی طرح کے مسئلے کو کس طرح حل کیا تھا؟ (باب 'تشکیلات کے ساتھ کھیلنا' میں) ہمیں ایک 'گھر' کے سب سے اونچے نقطہ کو نشان زد کرنا تھا جو کہ دو دیگر نقطوں سے 5 سینٹی میٹر کی دوری پر واقع تھا۔ وہی طریقہ ہم یہاں خطِ قطع BC کے اس نقطے C کو حاصل کرنے کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

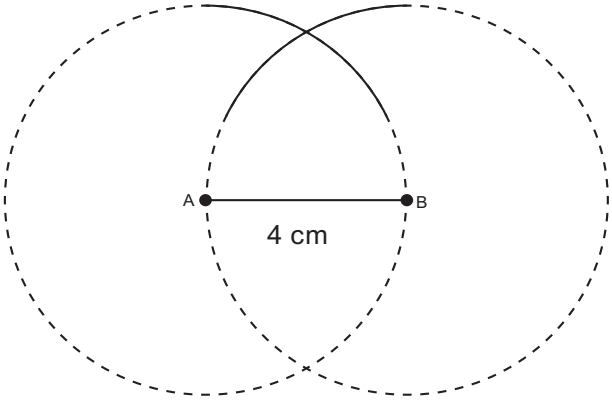
4 سینٹی میٹر =AB بنانے کے بعد، ہم مندرجہ ذیل کام کر سکتے ہیں۔

مرحلہ 1: کمپاس کا استعمال کرتے ہوئے، A سے 4 سینٹی میٹر نصف قطر (Radius) کا ایک بڑا قوس بنائیے، جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ C اس قوس پر کہیں ہوگا۔

ہم اس کا تعین کیسے کریں گے؟



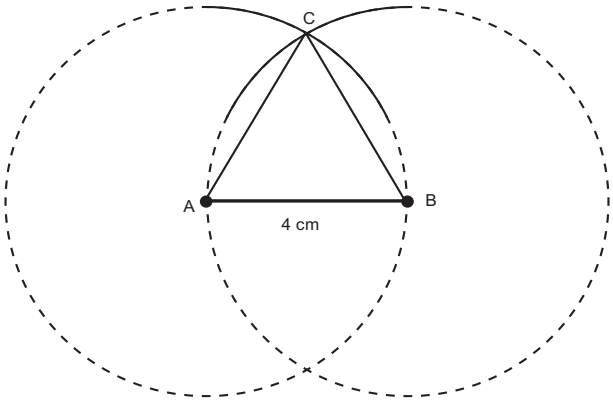
مرحلہ 2: اب B سے 4 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک اور قوس بنائیے۔



مان لیں کہ دونوں قوسوں کے تقاطع (Intersection) کا نقطہ C ہے۔

یہ تشکیل اس بات کو یقینی بناتی ہے کہ AC اور BC دونوں کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہی ہوگی۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہے؟

مرحلہ 3: اب نقطہ AC اور BC کو ملائیں تاکہ مطلوبہ مساوی الاضلاع مثلث (Equilateral triangle) حاصل ہو سکے۔



7.2 مثلث کی تشکیل جب کہ اس کے اضلاع کی لمبائی مختلف ہو

ہم ایسے مثلث کیسے بنا سکتے ہیں جو کہ (مساوی الاضلاع نہ ہوں)؟

؟ ایک مثلث بنائیے جس کے اضلاع کی لمبائی 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہو۔

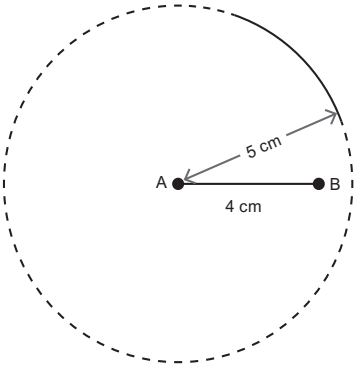
جیسا کہ پچھلے معاملہ میں ہوا تھا، اس مثلث کو بھی صرف ایک پیمانے کا استعمال کرتے ہوئے بنایا جا سکتا ہے۔ لیکن اس میں بھی کئی بار کوشش کرنی ہوگی۔

؟ ہم اس مثلث کو کم وقت میں درستگی کے ساتھ کیسے بنا سکتے ہیں؟

4 سینٹی میٹر مثلث کا قاعدہ بنانے کے لیے، دی گئی لمبائیوں میں سے ایک کا انتخاب کیجیے۔ اب 4 سینٹی میٹر کا ایک قاعدہ بنائیے جس کی راس A اور B ہوں اور تیسری راس کو C نام دیجیے۔ فرض کیجیے 5 سینٹی میٹر = AC اور 6 سینٹی میٹر = BC ۔

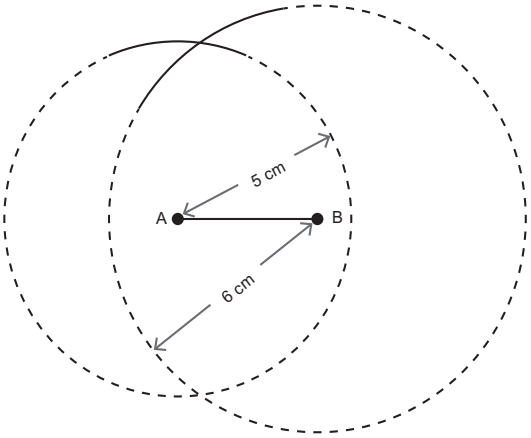
شکل 7.1

جیسا کہ ہم نے مساوی الاضلاع مثلث کے معاملے میں کیا تھا، آیئے پہلے ان سبھی نقطوں کو حاصل کریں جو A سے 5 سینٹی میٹر کے فاصلے پر ہوں۔ ایسا کیوں؟ کیوں کہ AC = 5 ۔ یعنی نقطہ A پر پرکار رکھ کر 5 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک قوس بنائیے۔ یہ نقطہ اس قوس پر ہی ہونا چاہیے جس کا مرکز A ہے اور اس کا نصف قطر 5 سینٹی میٹر ہے۔ ہم اسے کیسے تلاش کریں گے؟



شکل 7.2

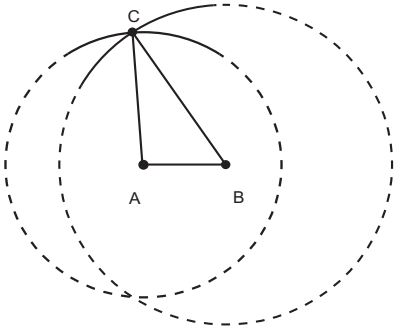
اب ہمیں دیا گیا ہے کہ نقطہ B سے C کا فاصلہ 6 سینٹی میٹر ہے۔ اس لیے اب ہمیں پرکار کہاں رکھنا ہوگا؟ نقطہ B پر۔ اب B سے 6 سینٹی میٹر کا نصف قطر لیتے ہوئے ایک دیگر قوس بنائیے۔ جو پہلے والے قوس کو قطع کرے۔



شکل 7.3

دو قوسین کو آپس میں قطع کرنے والا نقطہ ہی مطلوبہ C ہے۔

یہ قاطع نقطہ ہی تیسرا راس ہوگا، اس کی وجہ بھی وہی ہے جو مساوی الاضلاع مثلث کے لیے تھی۔ یہ نقطہ دونوں دائروں پر ہے۔ لہٰذا A سے اس کا فاصلہ A مرکز والے دائرے کا نصف (قطر 5، سینٹی میٹر) ہوگا اور B سے اس کا فاصلہ B مرکز والے دائرے کا نصف (قطر 6، سینٹی میٹر) ہوگا۔



آیئے تشکیل کے مراحل کا خلاصہ کریں، اس بات کا خیال رکھتے ہوئے کہ تیسرا راس حاصل کرنے کے لیے مکمل دائرے بنانا ضروری نہیں ہے (شکل 7.2 اور 7.3 دیکھیے)۔

مرحلہ 1: کسی ایک ضلع کی لمبائی فرض کیجیے 4 سینٹی میٹر = AB کا انتخاب کرتے ہوئے AB بنایئے۔ (شکل 7.1 دیکھیں)

مرحلہ 2: نقطہ A سے، 5 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک قوس بنایئے (شکل 7.2 دیکھیں)۔

مرحلہ 3: نقطہ B سے، نصف قطر 6 سینٹی میٹر کا ایک قوس اس طرح بنایئے کہ یہ پہلے قوس کو قطع کرے۔ (شکل 7.3 دیکھیے)

مرحلہ 4: وہ نقطہ جہاں دونوں قوس ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں وہی مطلوبہ تیسری راس ہے۔ ΔABC کو حاصل کرنے کے لیے AC اور BC کو ملایئے۔

تشکیل کیجیے

؟ درج ذیل میں اضلاع کی دی گئی لمبائیوں کے مثلث بنایئے (تمام اکائیاں سینٹی میٹر میں ہیں)

(a) 4, 4, 6

(b) 3, 4, 5

(c) 1, 5, 5

(d) 4, 6, 8

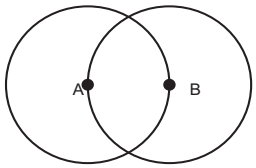
(e) 3.5, 3.5, 3.5

ہم نے سیکھا ہے کہ جس مثلث کے تینوں اضلاع مساوی لمبائی کے ہوں اسے **مساوی الاضلاع مثلث (Equilateral triangles)** کہتے ہیں۔ اور وہ مثلث جن کے کوئی دو اضلاع مساوی ہوں ان کو **مساوی الساقین مثلث (Isosceles triangles)** کہتے ہیں۔

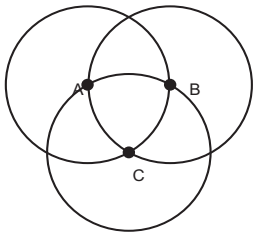
؟ معلوم کیجیے

1. دائرے کے مرکز کو استعمال کرتے ہوئے ایک مساوی الساقین مثلث بنایئے۔

2. دائروں پر واقع نقطوں اور دائروں کے مرکز کو استعمال کرتے ہوئے مساوی الساقین مثلث اور مساوی الاضلاع مثلث بنائیے۔



A اور B ایک ہی سائز کے دائروں کے مراکز ہیں۔



A، B اور C ایک ہی سائز کے دائروں کے مراکز ہیں۔

کیا کسی بھی لمبائی کے مثلث کی تشکیل ممکن ہے؟

کیا مثلث کی تشکیل کے لیے اضلاع کی کوئی بھی لمبائی لی جاسکتی ہے؟ کیا کوئی ایسی بھی لمبائی ہے جس کے لیے مثلث کی تشکیل ہی ممکن نہ ہو؟ آیئے اس کی تلاش کریں۔

؟ 3 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر، اور 8 سینٹی میٹر لمبائی کے اضلاع کے ایک مثلث تشکیل کیجیے۔

اپنے تاثرات بیان کیجیے۔ آپ کیا محسوس کر رہے ہیں؟ کیا آپ اس مثلث کی تشکیل کر پا رہے ہیں؟

؟ یہاں لمبائیوں کا ایک اور سیٹ دیا گیا ہے جو 2 سینٹی میٹر، 3 سینٹی میٹر، اور 6 سینٹی میٹر ہے۔ جانچ کیجیے کہ کیا اضلاع کی دی گئی ان لمبائیوں کے لیے مثلث کی تشکیل ممکن ہے؟

ریاضی بات چیت

؟ اضلاع کی لمبائیوں کے ایسے مزید سیٹ تلاش کیجیے جن کے لیے مثلث کی تشکیل ناممکن ہے۔ دیکھیے کہ کیا آپ ان میں کوئی پیٹرن تلاش کر سکتے ہیں۔

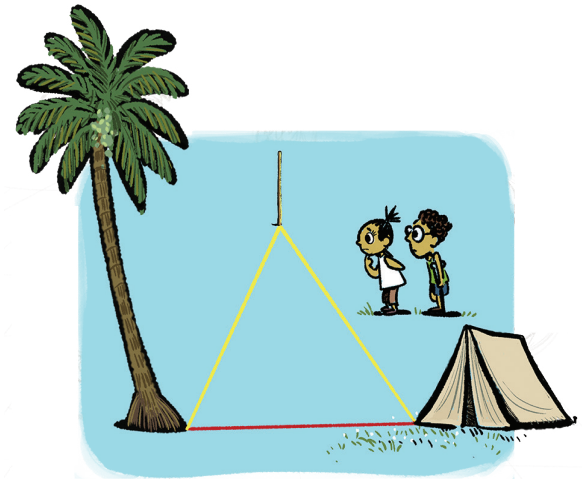
ہم دیکھتے ہیں کہ لمبائی کے کچھ مجموعوں کے لیے ایک مثلث کی تشکیل تو ممکن ہے لیکن کچھ کے لیے ممکن نہیں ہے۔ ہم یہ کیسے معلوم کریں کہ اضلاع کے دیے گئے مجموعے سے مثلث بن سکتا ہے یا نہیں؟ ایک طریقہ تو یہ ہے کہ مثلث بنانے کی کوشش کی جائے اور معلوم کیا جائے کہ کیا یہ ممکن ہے یا نہیں یعنی راست تجربہ کیا جائے۔ کیا اس کو معلوم کرنے کا کوئی اور مؤثر طریقہ ہے؟

مثلث میں عدم مساوات (Triangle Inequality)

10 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 30 سینٹی میٹر والی لمبائیوں پر غور کیجیے۔ کیا ان لمبائیوں کے ساتھ کسی مثلث کا وجود ممکن ہے؟

آیئے! اس مسئلہ کا حل تلاش کرنے کے لیے مثلث کی ایک خاصیت کا مطالعہ کریں۔ درج ذیل تصویر کے مطابق تصور کیجیے کہ کسی ہموار زمین کے ایک چھوٹے سے پلاٹ پر تین مختلف مقامات پر ایک خیمہ، ایک درخت اور ایک کھمبا ہے۔ تصور کیجیے کہ آپ خیمے کے دروازے پر کھڑے ہیں اور درخت تک جانا چاہتے ہیں۔ کون سا راستہ مختصر ترین ہوگا؟ (i) درخت تک جانے والی خط مستقیم (سرخ راستہ) یا (ii) خیمے سے کھمبے تک جا کر کھمبے سے درخت تک سیدھا جانے والا راستہ (پیلا راستہ)؟

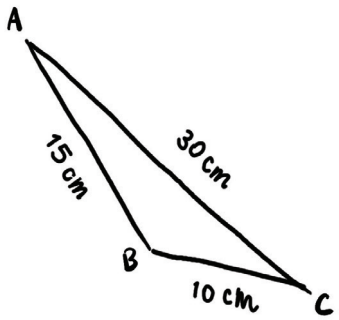
واضح طور پر، خیمے سے درخت تک کا سیدھا راستہ، کھمبے سے ہو کر جانے والے راستے سے چھوٹا ہے۔ درحقیقت، سیدھا جانے کا راستہ، خیمے سے درخت تک پہنچنے کا مختصر ترین راستہ ہے۔



کیا کوئی بھی دو نقطوں کے درمیان کا سیدھا راستہ تیسرے نقطے (جو دو نقطوں کو ملانے والی لائن پر نہ ہو) سے ہو کر جانے والے راستہ سے چھوٹا ہو گا؟ واضح طور پر جواب ہاں ہی ہو گا۔

؟ کیا اس تفہیم کو 10 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 30 سینٹی میٹر اضلاع کی لمبائی والے مثلث کے جائے وقوع کے بارے میں کچھ بتانے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے؟

آیئے فرض کریں کہ لمبائیوں کے اس سیٹ کا ایک مثلث ہے۔ یاد رکھیے کہ اس وقت ہمیں مثلث کے وجود کے بارے میں یقین نہیں ہے لیکن ہم صرف یہ تصور کر رہے ہیں کہ کہیں نہ کہیں اس کا وجود ہے۔ آیئے ایک رف خاکہ بنائیں۔



شکل 7.4

کیا اس مثلث میں سب کچھ ٹھیک نظر آتا ہے؟

اگر یہ مثلث ممکن تھا، تو کسی بھی دو راسوں کے درمیان کا سیدھا راستہ تیسرے راس (Vertex) سے ہو کر گذر کر جانے والے راستے سے چھوٹا ہونا چاہیے۔ کیا یہ ہمارے بنائے گئے خاکے کے لیے بھی درست ہے؟

آیئے B اور C کے درمیان کے دو ممکنہ راستوں پر غور کریں۔

Direct path length (سیدھے راستے کی لمبائی) = BC = 10 cm

راس A سے ہوتے ہوئے B سے C تک پہنچنے والے راستے کی لمبائی کتنی ہے؟ یہ خط قطع BA اور AC کی لمبائیوں کا مجموعہ ہے۔

Roundabout path length (چکر لگا کر آنے والے راستے کی لمبائی) = BA + AC = 15 cm + 30 cm = 45 cm

کیا B سے C تک سیدھے راستے کی لمبائی چکر لگا کر آنے والے راستے کی لمبائی سے کم ہے؟ جی ہاں۔

آیئے اب A اور B کے درمیان کے راستے پر غور کریں۔

Direct path length = AB = 15 cm

راس C کے گرد چکر لگا کر آنے والے راستے کی لمبائی کا پتہ لگانے سے ہمیں ملتا ہے۔

Roundabout path length = AC + CB = 30 cm + 10 cm = 40 cm

کیا سیدھے راستے کی لمبائی چکر لگا کر آنے والے راستے کی لمبائی سے کم ہے؟ جی ہاں۔

آخر میں، C اور A کے درمیان دو ممکنہ راستوں پر غور کیجیے۔

Direct path length = CA = 30 cm

Roundabout path length = CB + BA = 10 cm + 15 cm = 25 cm

کیا سیدھے راستے کی لمبائی چکر لگا کر آنے والے راستے کی لمبائی سے کم ہے؟ اس صورت میں، سیدھا راستہ طویل ہے، جو کہ ایک حیران کن بات ہے۔ کیا اضلاع کی ان لمبائیوں سے مثلث تشکیل کیا جانا ممکن ہے؟ خود تجربہ کر کے دیکھیے اور بنایئے۔

لہٰذا، 10 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 30 سینٹی میٹر کی لمبائی کے اضلاع سے مثلث تشکیل نہیں کیا جا سکتا۔

اس طرح ہم بغیر تشکیل کیے یہ بتانے کے قابل ہیں کہ 10 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 30 سینٹی میٹر لمبائی کے مجموعے کے لیے ایک مثلث کا وجود کیوں نہیں ہو سکتا۔ ہم مکانی/فضائی وجدان اور استدلال کے ذریعے اس کا پتہ لگانے میں کامیاب ہوئے ہیں۔



یاد کیجیے کہ ہم نے قاطع خطوط اور متوازی خطوط کی خصوصیات کو دریافت کرنے کے لیے اسی طرح کے وجدان اور استدلال کا استعمال کیسے کیا تھا۔ ہم جیومیٹری میں انکشافات کے لیے بھی یہ عمل جاری رکھیں گے۔

(؟) ہم 3 سینٹی میٹر، 3 سینٹی میٹر اور 7 سینٹی میٹر لمبائی کے اضلاع کے مثلث کے وجود کے بارے میں کیا کچھ کہہ سکتے ہیں؟ تشکیل کے ذریعہ اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

ریاضی بات چیت

(؟) ”شکل 7.4 کے خاکے میں، کیا یہ ممکن ہے کہ دی گئی لمبائیوں کو مختلف ترتیب میں اس طرح رکھا کیا جائے کہ سیدھا راستہ ہمیشہ چکر لگا کر جانے والے راستے سے چھوٹا ہو؟ اگر یہ ممکن ہے، تو اس مثلث کا وجود بھی ممکن ہے۔

(؟) کیا اس طرح کی لمبائیوں کی ترتیب درج بالا امثال والے مثلث میں ممکن ہے؟

معلوم کیجیے

1. ہم نے تشکیل کے ذریعے نتیجہ اخذ کیا کہ کوئی ایسا مثلث نہیں ہے جس کے اضلاع کی لمبائی (Sidelength) 3 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر ہو۔ اور 2 سینٹی میٹر، 3 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہو۔ معلوم کیجیے کہ کیا آپ مثلث کی تشکیل کیے بغیر یہ پتہ لگا سکتے ہیں؟
2. کیا ہم مندرجہ ذیل اضلاع کی لمبائی والے اضلاع کے مجموعوں میں سے ہر ایک کے لیے مثلث کے وجود کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟

(a) 10 km, 10 km اور 25 km
(b) 5 mm, 10 mm اور 20 mm
(c) 12 cm, 20 cm اور 40 cm

آپ نے محسوس کیا ہوگا کہ ایک خاکے کا استعمال کرتے ہوئے اور سیدھے راستے کی لمبائیوں کا، ان کے متعلقہ چکر لگانے والے راستے کی لمبائی کے ساتھ موازنہ کرنا ایسا ہی ہے جیسے کہ ہر ایک لمبائی کا دیگر دو لمبائیوں کے جوڑ کے ساتھ موازنہ کرنا ہو۔ اس طرح کے تین موازنہ کرنے ہوں گے۔

3. اب تک دیکھی گئی لمبائی کے ہر ایک مجموعہ کے لیے، آپ نے محسوس کیا ہوگا کہ کم از کم دو موازنوں میں، سیدھی لمبائی دیگر دو اضلاع کے مجموعے سے کم تھی (اگر نہیں، تو دوبارہ معلوم کیجیے)۔ مثال کے طور پر، 10 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 30 سینٹی میٹر لمبائی کے مجموعہ کے لیے، دو موازنہ ہیں جہاں ایسا ہوتا ہے:

کوشش کیجیے

$$10 < 15 + 30$$
$$15 < 10 + 30$$

لیکن یہ تیسری لمبائی کے لیے نہیں ہوتا: $30 > 10 + 15$

کیا ایسا ہمیشہ ہوگا؟ یعنی، اضلاع کی لمبائیوں کے کسی بھی مجموعہ کے لیے۔ کیا ایسے کم از کم دو موازنے ہوں گے جہاں براہ راست لمبائی دیگر دو کے مجموعے سے کم ہے؟ لمبائی کے مختلف مجموعوں کے لیے دریافت کیجیے۔

مزید یہ کہ بغیر حساب کیے لمبائی کے دیے گئے مجموعوں کے لیے، کیا یہ شناخت کرنا ممکن ہے کہ کون سی لمبائی دیگر دو لمبائی ہونے کے مجموعے سے کم ہوگی؟

[**اشارہ:** بڑھتی ہوئی ترتیب میں سیدھی لمبائی پر غور کیجیے۔]

تین اضلاع کی لمبائیوں کو دیکھتے ہوئے، ہمیں مثلث کے وجود کی جانچ کرنے کے لیے کس چیز کا موازنہ کرنے کی ضرورت ہے؟

جب ہر لمبائی دوسری دو لمبائیوں کے مجموعے سے چھوٹی ہوتی ہے، تو ہم کہتے ہیں کہ لمبائیاں کی مثلث عدم مساوات (Triangle inequality) کو مطمئن کرتی ہیں۔ مثال کے طور پر، مجموعہ 3، 4، 5 مثلث عدم مساوات کو مطمئن کرتا ہے جب کہ مجموعہ 10,15,30 مثلث کی عدم مساوات کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔

ہم نے دیکھا ہے کہ 10,15,30 جیسی لمبائیاں جو مثلث کی عدم مساوات کو مطمئن نہیں کرتی ہیں وہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں نہیں ہوسکتیں۔

کیا ایک ایسا مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کی لمبائی 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر ہے؟
یہ مثلث عدم مساوات کو مطمئن کرتا ہے؛

$$8 < 4 + 5 = 9$$

ہمیں دوسرے دو اضلاع کو جانچنے کی ضرورت کیوں نہیں ہے؟

اس کا مطلب ہے کہ ہر سیدھے راستے کی لمبائی چکر لگا کر آنے والے راستے کی کل لمبائیوں سے کم ہے۔ کیا یہ مثلث کے وجود کی تصدیق کرتا ہے؟

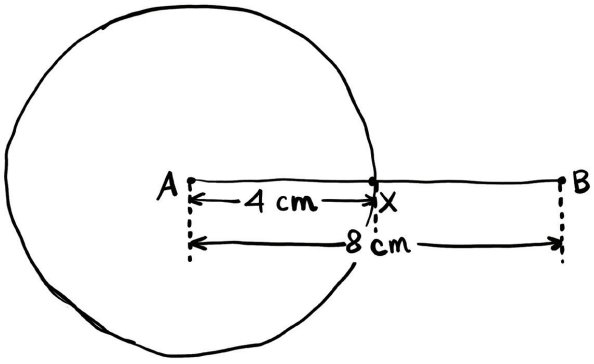
اگر سیدھے راستے کی لمبائی میں سے ایک طویل ہوتی تو ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے تھے کہ مثلث نہیں بنایا جا سکتا ہے۔ لیکن اس معاملے میں، ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ مثلث بنایا جا سکتا ہے یا نہیں بنایا جا سکتا ہے۔

مثلث بنانے کے لیے، جو قوس (arcs) ہم تیسرے راس کو حاصل کرنے کے لیے بناتے ہیں ان کو آپس میں کاٹنا چاہیے۔ کیا اس بات کا تعین کرنا ممکن ہے کہ یہ حقیقت میں تشکیل کے بغیر ہو گا؟

دائروں کی تشکیل کی تصویری پیش کش:

آیئے ہم سب سے لمبے حصے کو قاعدے کے طور پر بنا کر تعمیر شروع کرتے ہیں۔ مان لیں کہ 8 سینٹی میٹر لمبائی AB کا قاعدہ (Base) ہے۔ اگلا مرحلہ دیگر دو لمبائیوں، 4 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر، کے مطابق ایک لمبے قوس کی تشکیل ہے۔

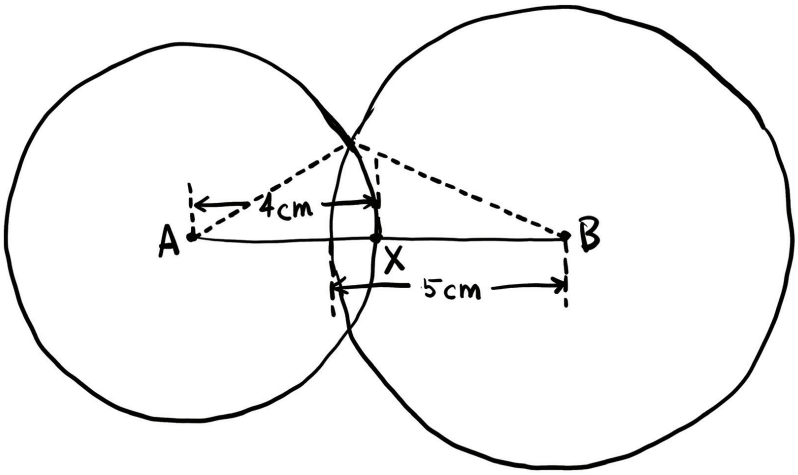
صرف قوس بنانے کے بجائے، آیئے مکمل دائرے بناتے ہیں۔ فرض کیجیے کہ، ہم A کو مرکز کے طور پر لے کر 4 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ بناتے ہیں۔



اب فرض کیجیے کہ نصف قطر 5 سینٹی میٹر کا ایک دائرہ بنایا گیا ہے، جس کا مرکز B ہے۔ کیا آپ اس شکل کا ایک خاکہ بنا سکتے ہیں؟

نوٹ کیجیے کہ نیچے دی گئی تصویر میں، 4 سینٹی میٹر =AX اور 8 سینٹی میٹر =AB ہے تو، BX کیا ہے؟ کیا یہ لمبائی دی ہوئی شکل کو دیکھنے میں مدد کرتی ہے؟

چوں کہ 4 سینٹی میٹر = BX ہے، اور اس دائرے کا نصف قطر 5 سینٹی میٹر ہے جس کا مرکز B ہے، یہ واضح ہے کہ دائرے ایک دوسرے کو دو نقطوں پر کاٹیں گے۔



شکل 7.5: دائرے ایک دوسرے کو دو نقطوں پر کاٹتے ہیں۔

یہ ہمیں مثلث کے وجود کے بارے میں کیا بتاتا ہے؟ نقطے A اور B دائروں کے کسی بھی نقطۂ تقاطع کے ساتھ ہمیں مطلوبہ مثلث دیں گے۔ اس طرح، لمبائی 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر کے ساتھ ایک مثلث بنایا جاسکتا ہے۔

معلوم کیجیے

1. درج ذیل میں سے کون سی لمبائیاں مثلث کے اضلاع کی لمبائی ہوسکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وضاحت کیجیے۔ نوٹ کیجیے کہ ہر سیٹ کے لیے، تینوں لمبائیوں میں پیمائش کی اکائی ایک ہی ہے۔

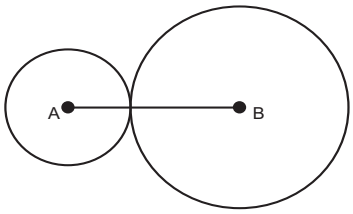
(a) 2, 2, 5 (b) 3, 4, 6
(c) 2, 4, 8 (d) 5, 5, 8
(e) 10, 20, 25 (f) 10, 20, 35
(g) 24, 26, 28

ہم پچھلے مسائل سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ **جب بھی لمبائیوں کا کوئی ایسا مجموعہ ہو جو مثلث میں عدم مساوات کو مطمئن کرتا ہو (ہر لمبائی، دیگر دو لمبائیوں کا مجموعہ سے کم ہو)، تو ان تینوں لمبائیوں کو بطور اضلاع استعمال کرتے ہوئے ایک مثلث ضرور بنایا جاسکتا ہے۔**

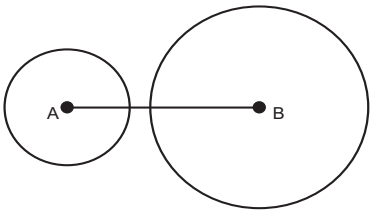
کیسے تعین کر سکتے ہیں کہ اگر لمبائیوں کا ایک مجموعہ، مثلث میں عدم مساوات کے اصول کو مطمئن کرتا ہے تو مثلث ضرور بنے گا۔

ہم مثلث کے وجود کا یقین صرف اس صورت میں کر سکتے ہیں اگر ہم یہ دکھا سکیں کہ مثلث میں عدم مساوات کی شرط (جیسا کہ شکل 7.5 میں ہے) پوری ہوتی ہیں تو دونوں دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ لیکن جب ان دونوں دائروں کو بنایا جائے تو کیا کچھ اور امکانات بھی ہو سکتے ہیں؟ آیئے ہم ان کا جائزہ لیں اور ان کا مطالعہ کریں۔

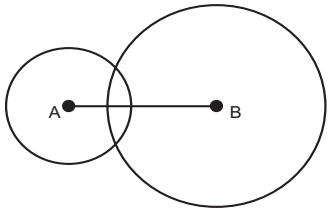
مندرجہ ذیل مختلف صورتیں تصور کی جا سکتی ہیں:



کیس 1: دائرے ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔



کیس 2: دائرے آپس میں نہیں قطع کرتے



کیس 3: دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں

نوٹ کیجیے کہ دائروں کی تشکیل کے دوران، ہم درجہ ذیل اقدامات کرتے ہیں۔

(a) اساس (Base) AB کی لمبائی = دی گئی لمبائیوں میں سب سے لمبی ہے۔

(b) دائروں کے نصف قطر، دو چھوٹی لمبائیوں کے ہوں گے۔

مذکورہ بالا صورتوں میں سے کون سی صورت میں مثلث بنے گا؟ واضح طور پر، مثلث صرف اس وقت بنتے ہیں جب دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر قطع کرتے ہیں (کیس 3)۔

آیئے ہم ان تمام صورتوں کا مطالعہ کریں اور دو چھوٹی لمبائیوں (جو دائروں کے نصف قطر ہیں) اور AB (جو سب سے بڑی لمبائی ہے) کے درمیان رشتہ معلوم کریں۔

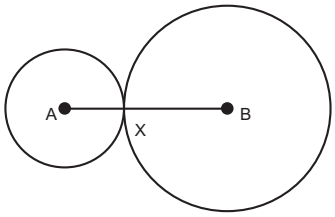
کیس 1: دائرے، ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔

اس کیس کے ہونے کے لیے،

دو نصف قطروں کا حاصل جمع = AB ہے۔

یا

دو چھوٹی لمبائیوں کا حاصل جمع = سب سے لمبی لمبائی



کیس 2: دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر نہیں قطع کرتے۔

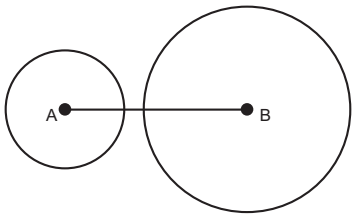
؟ اس صورت میں ہونے کے لیے، نصف قطروں اور AB کے درمیان کیا تعلق ہونا چاہیے؟

یہ تصویر سے دیکھا جا سکتا ہے کہ،

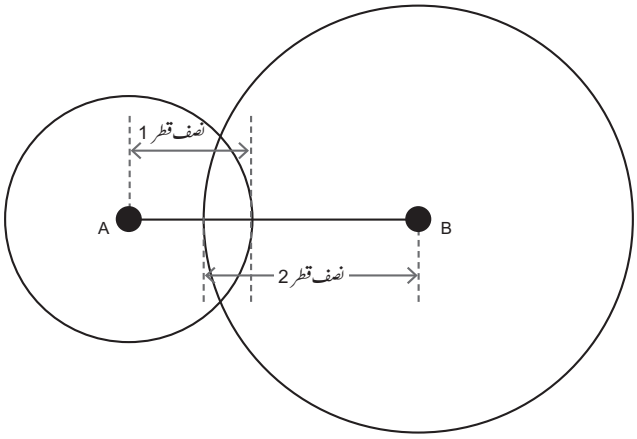
دو نصف قطروں کا حاصل جمع < AB

یا

دو چھوٹی لمبائیوں کا حاصل جمع < سب سے لمبی لمبائی



کیس 3: دائرے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



AB ایک نصف قطر اور دوسرے کے ایک حصے پر مشتمل ہے۔ تو،

دو نصف قطروں کا مجموعہ > AB

یا

دو چھوٹی لمبائیوں کا مجموعہ > سب سے لمبی لمبائی

؟ کیا ہم اس تجزیے کو یہ بتانے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں کہ ایک مثلث اس وقت بن سکتا ہے جب لمبائیاں مثلث میں عدم مساوات کی شرط کو پورا کرتی ہے؟

اگر دی گئی لمبائی مثلث میں عدم مساوات کی شرط کو پورا کرتی ہیں، تو دو چھوٹی لمبائیوں کا مجموعہ سب سے لمبی لمبائی سے زیادہ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ یہ معاملہ 3 کی طرف لے جائے گا جہاں دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو آپس میں کاٹتے ہیں، اور اس طرح ایک مثلث بن سکتا ہے۔

؟ دی گئی لمبائیوں کے مجموعے کے لیے دونوں دائروں کی شکل کیا ہو گی جب وہ مثلث میں عدم مساوات کی شرط کو پورا نہ کر سکتی ہو۔ ایسی لمبائیوں کے مجموعہ کی تین مثالیں دیجیے جن کے دائرے:

(a) ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر چھوتے ہوں۔

(b) ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں۔

؟ ایک ایسا مکمل طریقہ کار وضع کیجیے جو کہ مثلث کے وجود کو جانچنے کے لیے استعمال کیا جا سکے۔

نتیجہ

اگر تین ایسی لمبائیوں کا مجموعہ دیا گیا ہو جو مثلث میں عدم مساوات کی شرط کو پورا کرتا ہے، تو ایک مثلث بن سکتا ہے جس کے اضلاع کی یہ لمبائیاں ہوں۔ اگر مجموعہ مثلث میں عدم مساوات کی شرط کو پورا نہیں کرتا ہے، تو اضلاع کی ان لمبائیوں کے ساتھ ایک مثلث نہیں بن سکتا ہے۔

؟ معلوم کیجیے

1. چیک کیجیے کہ کیا درج ذیل میں دی گئی لمبائیوں سے ایک مثلث بن سکتا ہے:

(a) 1, 100, 100 (b) 3, 6, 9

(c) 1, 1, 5 (d) 5, 10, 12

2. کیا ایک ایسا مساوی الاضلاع مثلث بن سکتا ہے جس میں ہر ایک اضلاع کی لمبائی 50، 50، 50 ہو؟ کیا اضلاع کی لمبائیوں کے کسی بھی مجموعہ سے مساوی الاضلاع مثلث بن سکتا ہے؟ اپنے جواب کا جواز پیش کریں۔

3. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کے لیے، تیسرے ضلع کی لمبائی کی 5 ممکنہ قدریں بتائیے جن سے ایک مثلث بنایا جا سکے (اعشاریہ کی قدریں بھی منتخب کی جا سکتی ہیں)

(a) 1, 100

(b) 5, 5

(c) 3, 7

کوشش کیجیے

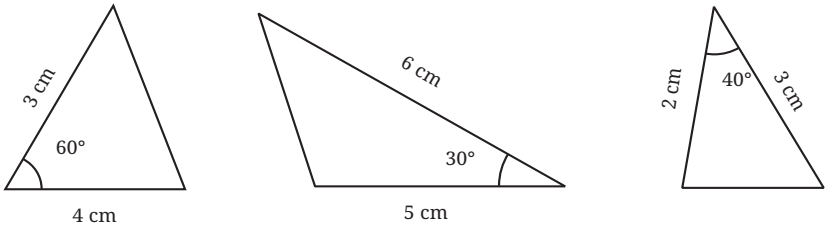
دیکھیے کہ کیا آپ ہر معاملے میں تیسرے ضلع کی تمام ممکنہ لمبائیوں کو بیان کر سکتے ہیں، تاکہ ضلع کی ان لمبائیوں کے ساتھ ایک مثلث بن سکے۔ مثال کے طور پر، کیس (a) میں، 99 اور 101 کے درمیان کے تمام نمبر ممکن ہوں گے۔

7.3 مثلث کی تشکیل جب کچھ اضلاع اور زاویے دیے ہوں

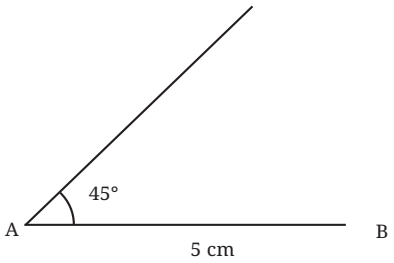
ہم نے دیکھا ہے کہ مثلث کی تشکیل کیسے کی جاتی ہے جب ان کے اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں۔ اب، ہم ایسی تشکیلات کریں گے جہاں کچھ اضلاع کی لمبائیوں کی جگہ زاویہ کی پیمائش دی گئی ہے۔

دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ

اگر دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ دیا جائے تو ہم مثلث کیسے بنائیں گے؟ یہاں پیمائش کی کچھ مثالیں ہیں جو درمیانی زاویہ کو ظاہر کرتی ہیں۔



؟ ایک مثلث ABC بنائیے جس میں AB کی لمبائی 5 سینٹی میٹر ہو۔ 4 سینٹی میٹر = AC اور ∠A = 45° ہے۔

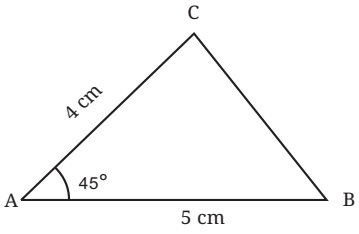


مرحلہ 1: 5 سینٹی میٹر لمبائی کا ایک ضلع AB بنائیے۔

مرحلہ 2: زاویہ کا دوسرا بازو کھینچ کر ∠A = 45° بنائیے۔

مرحلہ 3: نقطہ C کو دوسرے بازو پر اس طرح نشان زد کیجیے کہ 4 سینٹی میٹر = AC ہو۔

مرحلہ 4: مطلوبہ مثلث حاصل کرنے کے لیے BC بنائیے۔



معلوم کیجیے

1. درج ذیل پیمائش کے لیے مثلث تشکیل دیں جہاں اضلاع کے درمیان کا زاویہ بھی دیا گیا ہو:

(a) 3 cm, 75°, 7 cm

(b) 6 cm, 25°, 3 cm

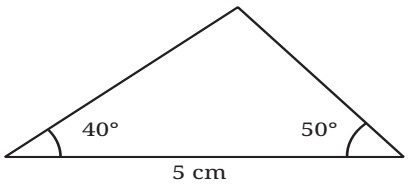
(c) 3 cm, 120°, 8 cm

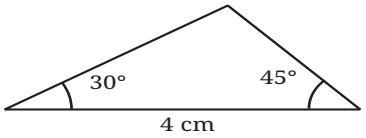
ہم نے دیکھا ہے کہ اضلاع کی لمبائیوں کے تمام مجموعوں کے لیے مثلث تشکیل نہیں دیے ہیں۔ کیا دو اضلاع اور ان کے درمیان کے زاویہ کے معاملے میں پیمائش کا کوئی ایک ایسا مجموعہ ہے جہاں مثلث تشکیل نہیں دیا جا سکتا ہے؟ تشکیل کے دوران کیے ہوئے اپنے مشاہدے کا استعمال کرتے ہوئے اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

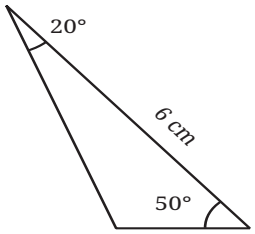
ریاضی بات چیت

دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع:

اس معاملے میں، ہمیں دو زاویے دیے گئے ہیں اور ان کے درمیان کے ضلع کی لمبائی بھی دی ہوئی ہے۔ یہاں اس طرح کی پیمائش کی کچھ مثالیں ہیں:

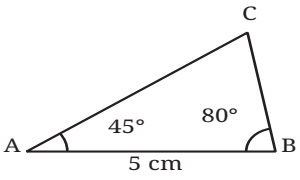


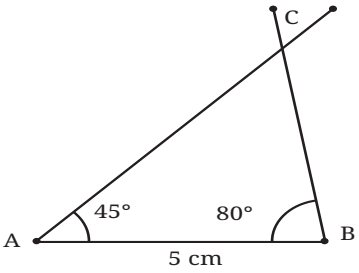




ایک مثلث ABC بنائیے جس میں ہو: $\angle B = 80°$ اور $\angle A = 45°$, $AB = 5$ cm

آیئے دیے گئے ضلع کو قاعدہ کے طور پر لیتے ہیں۔





مرحلہ 1: 5 سینٹی میٹر لمبائی کا قاعدہ AB بنائیے۔

مرحلہ 2: $\angle A$ اور $\angle B$ پر بالترتیب $45°$ اور $80°$ کے زاویے بنائیے۔

مرحلہ 3: دونئی شعاعوں کا نقطہ تقاطع اور تیسرا راس C ہے۔

معلوم کیجیے

1. درج ذیل پیمائش کے لیے مثلث کی تشکیل کیجیے۔

(a) 75°, 5 cm, 75°

(b) 25°, 3 cm, 60°

(c) 120°, 6 cm, 30°

کیا مثلث کا بننا ہمیشہ ممکن ہے؟

کیا دیے گئے دو زاویوں اور ان کے درمیان واقع ضلع کے ہر مجموعہ کے لیے ایک مثلث بنایا جاسکتا ہے؟ تحقیق کیجیے۔

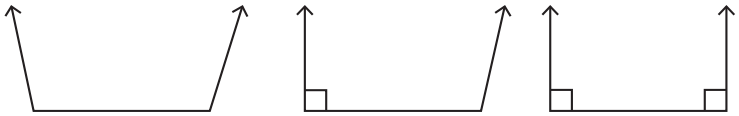
ریاضی بات چیت

جس طرح مثلث کے تینوں اضلاع کی مدد سے یہ پتہ چل جاتا تھا کہ مثلث کی تشکیل ہو پائے گی یا نہیں تو اسی طرح جب دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع دیا جائے تو پتہ چلایا جاسکتا ہے کہ ہمیشہ مثلث کی تشکیل ہو پائے گی یا نہیں۔

دو زاویے اور ان کے درمیان کے ضلع کی پیمائش کے مجموعوں کی ایسی مثالیں معلوم کیجیے جہاں مثلث کی تشکیل کرنا ممکن نہیں ہے۔

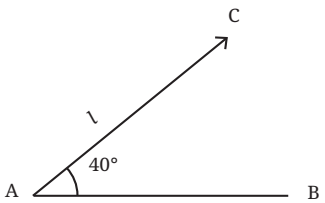
آیئے ہم ایسی صورت حال کو دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ ایک بار جب قاعدہ بن جائے تو تصور کرنے کی کوشش کیجیے کہ دونوں اضلاع کیسے ہونے چاہیے تاکہ وہ مل نہ سکیں۔

یہاں کچھ واضح مثالیں ہیں۔



اگر دونوں زاویے ایک زاویہ قائمہ (90°) سے زیادہ یا برابر ہیں تو یہ واضح ہے کہ مثلث کی تشکیل ممکن نہیں ہے۔

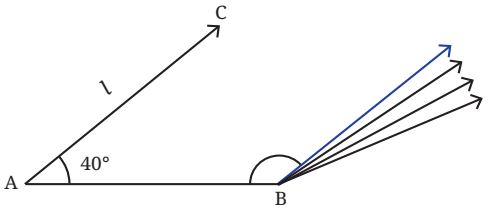
اب ہم قاعدے پر بنے زاویوں میں سے ایک کو زاویہ حادہ بناتے ہیں، جیسے 40°۔ تو دوسرے زاویہ کی ایسی کون سی قدریں ہونی چاہیے تاکہ خطوط مل نہ سکیں؟



یہ واضح ہے کہ اگر B سے لائن کافی حد تک دائیں طرف "مائل" ہے، تو یہ لائن l نہیں ملے گی۔

(a) ایسا کرنے کے لیے ایک ممکنہ $\angle B$ (شکل میں نشان زد) تلاش کرنے کی کوشش کیجیے۔

(b) خطوط کے نہ ملنے کے لیے $\angle B$ کی سب سے چھوٹی قدر کیا ہوسکتی ہے؟



نیلا خط وہ خط ہے جو دائیں طرف سب سے کم مائل ہوا ہے اور جو خط l سے نہیں ملتا

دیکھنے پر، یہ واضح ہے کہ جو خط سب سے چھوٹا زاویہ ∠B بناتا ہے اسے l کے متوازی ہونا چاہیے۔ آیئے ہم اس متوازی خط کو m مان لیتے ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس معاملے میں ∠B کی اصل قیمت کتنی ہے؟

[**اشارہ:** نوٹ کیجیے کہ AB قاطع ہے۔]

ہم نے دیکھا ہے کہ جب دو خطوط متوازی ہوتے ہیں تو قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کا جوڑ 180° ہوتا ہے۔ اس لیے زاویہ ∠B=140° کے برابر ہوگا۔

تو ∠B کی کن قدروں کے لیے، کوئی مثلث نہیں بنایا جا سکتا ہے، کیا لمبائی AB یہاں کوئی کردار ادا کرتی ہے؟

اوپر کی بحث سے، یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ لمبائی AB کسی مثلث کے وجود کا فیصلہ کرنے میں کوئی کردار ادا نہیں کرتی ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثلث کی تشکیل ممکن نہیں ہے جب ∠B140° سے بڑا یا اس کے برابر ہو۔

معلوم کیجیے

1. مندرجہ ذیل زاویوں میں سے ہر ایک کے لیے، ایک اور دوسرا زاویہ کی پیمائش بتایئے جس کے لیے مثلث (a) ممکن ہے، (b) ممکن نہیں۔ ہر زمرے کے لیے کم از کم دو مختلف زاویے تلاش کیجیے:
   (a) 30°
   (b) 70°
   (c) 54°
   (d) 144°
2. معلوم کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون سا جوڑا، کسی مثلث کے زاویوں کا جوڑا ہو سکتا ہے اور کون سا نہیں:
   (a) 35°, 150°
   (b) 70°, 30°
   (c) 90°, 85°
   (d) 50°, 150°

مثلث میں عدم مساوات کی طرح، کیا آپ کوئی ایسا اصول تشکیل دے سکتے ہیں جو ان دو زاویوں کے بارے میں بتائے جن کے لیے مثلث ممکن ہے؟

کیا "دو زاویوں کا جوڑا" اس اصول کو بنانے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے؟

جب دو دیے گئے زاویوں کا حاصل جمع $180°$ سے کم ہو تو ان زاویوں سے ایک مثلث تشکیل دیا جا سکتا ہے۔ اگر یہ حاصل جمع $180°$ سے زیادہ یا اس کے برابر ہے، تو ان زاویوں سے کوئی مثلث نہیں تشکیل دیا جا سکتا ہے۔

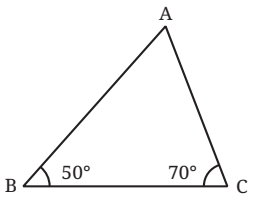
آیئے ایسے دو زاویے لیجیے جن کا حاصل جمع $180°$ سے کم ہو جیسے $60°$ اور $70°$۔ مان لیجیے کہ درمیانی ضلع 5 سینٹی میٹر ہے۔

- تیسرے زاویے کی پیمائش کیا ہو سکتی ہے؟ کیا یہ پیمائش قاعدے کی لمبائی کو تبدیل کرنے پر تبدیل ہوتی ہے۔ مان لیں کہ 7 سینٹی میٹر؟ تشکیل کیجیے اور معلوم کیجیے۔
- عام طور پر، جب دو زاویے مقرر کر دیے جائیں، تو کیا تیسرا زاویہ درمیانی ضلع کی لمبائی پر منحصر ہوتا ہے؟ مختلف زاویوں کے جوڑوں اور ضلع کی لمبائیوں کو لے کر آزمایئے۔

پیمائش سے ظاہر ہو سکتا ہے کہ تیسرے زاویہ پر درمیانی ضلع کی لمبائی کا کوئی اثر نہیں ہوتا (یا بہت کم اثر ہوتا ہے)۔ اس مشاہدے کے ساتھ، آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم تشکیل اور پیمائش کیے بغیر تیسرا زاویہ تلاش کر سکتے ہیں۔

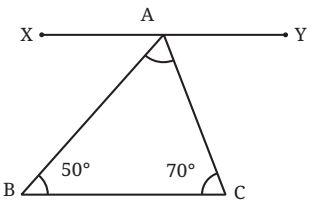
ریاضی بات چیت

- مختلف مثلثوں کے ساتھ آزمانے کی کوشش کیجیے کہ کیا کسی دو زاویوں اور تیسرے زاویہ کے درمیان کوئی تعلق ہے۔ اس تعلق کو تلاش کرنے کے لیے، آپ کس معلومات پر نظر رکھیں گے اور آپ جو معلومات اکٹھا کریں گے اسے کیسے ترتیب دیں گے؟
- ایک مثلث ABC جس کے زاویے $\angle B = 50°$ اور $\angle C = 70°$ ہوں۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم بغیر تشکیل کے $\angle A$ کیسے معلوم کر سکتے ہیں۔



ہم نے دیکھا کہ متوازی خطوط (Parallel lines) کا تصور اس بات کا تعین کرنے کے لیے مفید تھا کہ مثلث کے کسی بھی دو زاویوں کا مجموعہ $180°$ سے کم ہو۔ متوازی خطوط کے استعمال سے تیسرے زاویہ $\angle BAC$ کی بھی تلاش کی جا سکتی ہے۔

فرض کیجیے کہ ہم راس A سے گزرتا ہوا XY بنائیں جو BC کے متوازی ہو۔



شکل 7.6

- ہم یہاں نئے زاویے بنتے دیکھ سکتے ہیں: $\angle XAB$ اور $\angle YAC$۔ ان کی اقدار کیا ہیں؟

چوں کہ خط XY متوازی ہے BC کے $\angle XAB = \angle B$ اور $\angle YAC = \angle C$ کیوں کہ یہ قاطع خطوط AB اور AC کے متبادل زاویے ہیں۔

لہٰذا $\angle XAB = 50°$ اور $\angle YAC = 70°$۔ کیا ہم اس سے $\angle BAC$ کو معلوم کر سکتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں کہ $\angle XAB$، $\angle XAC$ اور $\angle BAC$ مل کر $180°$ بنتے ہیں۔ تو

$$\angle XAB + \angle YAC + \angle BAC = 180°$$
$$50° + \angle BAC + 70° = 180°$$
$$120° + \angle BAC = 180°$$

اس لیے، $\angle BAC = 60°$

اب ایک مثلث بنائیے (BC کی کوئی بھی مناسب لمبائی لے کر) اور تصدیق کیجیے کہ کیا واقعی ایسا ہی معاملہ ہے۔

معلوم کیجیے

1. مثلث کا تیسرا زاویہ معلوم کیجیے ایک (متوازی خط کا استعمال کرتے ہوئے) جب دو زاویہ دیے ہوئے ہوں۔

   (a) $36°, 72°$

   (b) $150°, 15°$

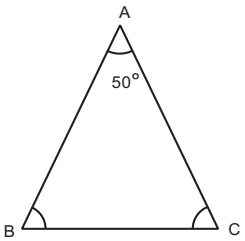
   (c) $90°, 30°$

   (d) $75°, 45°$

2. کیا آپ ایک مثلث کی تشکیل کر سکتے ہیں جس کے تمام زاویے $70°$ کے برابر ہوں؟ اگر دو زاویہ $70°$ ہیں تو تیسرا زاویہ کیا ہو گا؟ اگر ایک مثلث میں تمام زاویے برابر ہوں تو اس کی پیمائش کیا ہو گی؟ تلاش کیجیے اور معلوم کیجیے۔

3. یہاں ایک مثلث ہے جس میں ہم جانتے ہیں کہ $\angle A = 50°$ اور $\angle B = \angle C$ ہے۔ کیا آپ $\angle B$ اور $\angle C$ کو معلوم کر سکتے ہیں؟

کوشش کیجیے



زاویوں کے مجموعے کی خاصیت (Angle Sum Property)

ہم کسی مثلث کے زاویوں کے مجموعے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ایک مثلث ABC پر غور کیجیے۔ اس کے زاویوں کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے، ہم اس قاعدے کے متوازی خط کھینچنے کا وہی طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ راس A کے ذریعے ایک خط بنائیے جو BC کے متوازی ہو۔

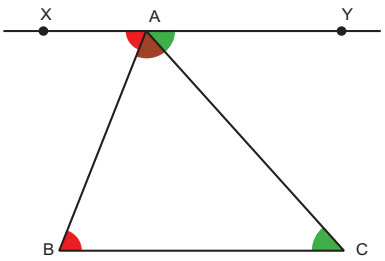
ہمیں معلوم کرنا ہے $\angle A + \angle B + \angle C$

ہم جانتے ہیں کہ $\angle B = \angle XAB, \angle C = \angle YAC$

اس لیے، $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle XAB + \angle YAC$

$= 180°$ ہے، کیوں کہ یہ تینوں زاویے مل کر ایک سیدھا زاویہ بناتے ہیں۔

اس طرح ہم نے ثابت کیا کہ کسی بھی مثلث میں تین زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے! یہ حیرت انگیز نتیجہ ہی **"مثلث کے زاویوں کے مجموعے کی خاصیت"** کہلاتا ہے۔

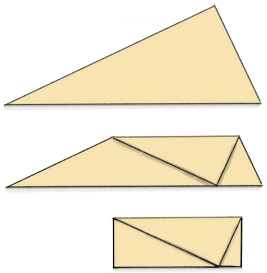


شکل 7.7

اس بات پر غور کرنے کے لیے کچھ وقت نکالیے کہ ہم نے زاویوں کے مجموعے کی خاصیت کا اندازہ کیسے لگایا۔ شروع میں تیسرے زاویے اور باقی دو زاویوں کے درمیان تعلق بالکل واضح نہیں تھا۔ حالاں کہ اوپری راس (جیسا کہ شکل 7.7 میں) پر قاعدہ کے متوازی خط کھینچنے کے ایک خیال نے اچانک تعلق کو واضح کر دیا۔ یہ واضح خیال ریاضی کی تاریخ کی ایک بہت ہی بااثر کتاب میں پایا جاسکتا ہے جسے 'عناصر' کہا جاتا ہے۔ یہ کتاب یونانی ریاضی داں یوکلڈ سے منسوب ہے، جن کا زمانہ 300 قبل مسیح کا ہے۔

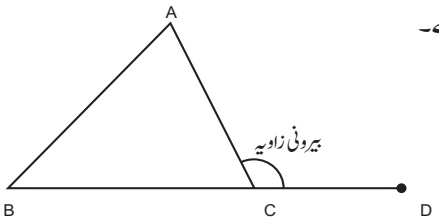
یہ حل ایک اور مثال ہے کہ کس طرح تخلیقی سوچ ریاضی میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے!

ایک کاغذ کے مثلثی کٹ موڑ کر زاویوں کے مجموعے کی خاصیت کی تصدیق کرنے کا ایک اور آسان طریقہ ہے۔ کیا آپ نے دیکھا کہ یہ کیسے ظاہر کرتا ہے کہ اس مثلث میں زاویوں کا مجموعہ $180°$ ہے؟



بیرونی زاویہ (Exterior Angles)

مثلث کے کسی ضلع کے توسیع اور دوسری طرف کے ضلع کے درمیان بننے والا زاویہ مثلث کا **بیرونی زاویہ** کہلاتا ہے اس شکل میں، ∠ACD ایک بیرونی زاویہ ہے۔



∠ACD کو معلوم کیجیے اگر ∠A=50°، اور ∠B=60°

زاویوں کے مجموعے کی خاصیت سے، ہم جانتے ہیں کہ

$$50° + 60° + \angle ACB = 180°$$

$$110° + \angle ACB = 180°$$

تو، $\angle ACB = 70°$

اس لیے $\angle ACD = 180° - 70° = 110°$

چوں کہ ∠ACB اور ∠ACD مل کر ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں۔

∠A اور ∠B کی مختلف پیمائشوں کے لیے بیرونی زاویہ تلاش کیجیے۔ کیا آپ کو بیرونی زاویہ اور ان دو زاویوں کے درمیان کوئی تعلق نظر آتا ہے۔

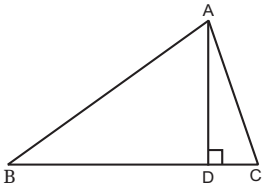
[**اشارہ:** زاویہ کی مجموعی خاصیت سے، ہمارے پاس $\angle ACB = 180° - \angle B + \angle A$ ہے۔]

ہمارے پاس $\angle ACB + \angle ACD = 180°$ بھی ہے، کیوں کہ یہ ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں۔ یہ کیا ظاہر کرتا ہے؟

7.4 مثلث کی ارتفاع (Altitudes) سے متعلق تشکیلات

مثلث کے حوالے سے پیمائشوں کا ایک اور مجموعہ ہے — مثلث کے ہر راس کی اونچائی اس کے متضاد ضلع کے مطابق ہوتی ہے۔

ہم اپنے اطراف کی دنیا میں مختلف اشیا کی اونچائیوں کے بارے میں بات کرتے ہیں: کسی شخص کی اونچائی، درخت کی اونچائی، عمارت کی اونچائی وغیرہ۔ لفظ 'اونچائی' سے ہمارا کیا مطلب ہے؟

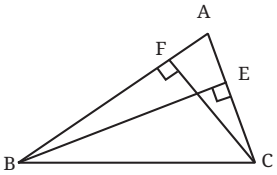


شکل 7.8

ایک مثلث ABC پر غور کیجیے۔ اس کے متضاد ضلع BC سے راس A کی اونچائی کتنی ہے، اور اسے کیسے ناپا جا سکتا ہے؟

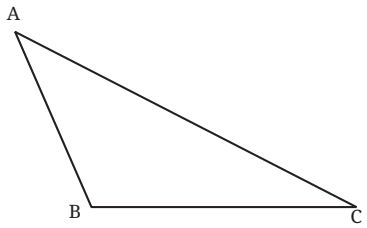
مانا AD ایک خط ہے جو A سے BC پر عمود (Perpendicular) ہے۔ AD کی لمبائی BC سے راس A کی

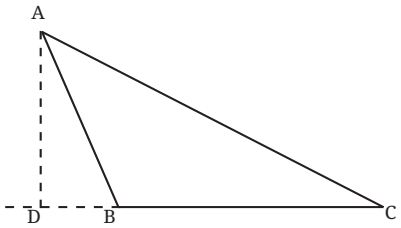
اونچائی ہے۔قاطع خط AD کو مثلث کا ایک 'ارتفاع' کہا جاتا ہے۔ نیچے دی گئی تصویر میں دیگر ارتفاع BE اور CF ہیں: دوسرے راسوں سے ان کے مقابل اضلاع پر کھینچے گئے عمودی خط۔



جب بھی ہم مثلث کی اونچائی کا لفظ استعمال کرتے ہیں تو عام طور پر اس سے مراد ارتفاع کی لمبائی ہوتی ہے جو اس کے کسی قاعدہ کے مطابق ہوتا ہے۔ (یہ ارتفاع شکل 7.8 کے معاملے میں AD ہے)

اس مثلث میں A سے BC تک کا ارتفاع کیا ہوگا؟





ہم BC کو B کی طرف بڑھاتے ہیں اور پھر A سے اس بڑھے ہوئے خط پر ایک عمود ڈالتے ہیں۔

کاغذ موڑنے کے عمل سے ارتفاع کی تشکیل

ایک کاغذ کو مثلث کی شکل میں کاٹ لیجیے۔ اضلاع میں سے کسی ایک کو قاعدہ مان لیجیے۔ اس کو اس طرح موڑیے کہ نتیجے میں آنے والی کریز اوپر کے قاعدہ سے اساس پر بنا ایک ارتفاع ہو۔ اس بات کا جواز پیش کیجیے کہ کریز کو راس پر عمود کیوں ہونا چاہیے۔

مثلث کے ارتفاع کی تشکیل

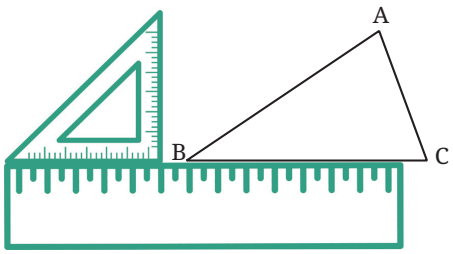
کوئی ایک مثلث بنائیے۔ اس کے راس کا نام A,B,C رکھیے اور BC کو قاعدہ بنائیں۔

A سے BC پر ایک ارتفاع بنائیے۔

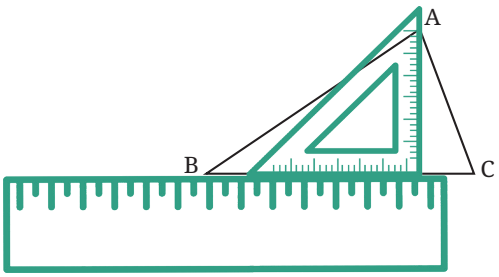
صرف ایک پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے ارتفاع کی تشکیل درست نہیں ہے۔ 90° کا زیادہ درست زاویہ حاصل کرنے کے لیے، ہم پیمانے کے ساتھ ایک سیٹ اسکوائر کا استعمال کرتے ہیں۔

کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایسا کیسے کیا جاتا ہے؟

مرحلہ 1: پیمانے کو قاعدہ سے منسلک رکھیے۔ سیٹ اسکوائر کو پیمانے پر رکھیے جیسا کہ دکھایا گیا ہے، اس طرح کہ زاویہ قائمہ کا ایک کنارہ پیمانے کو چھوتا ہو۔



مرحلہ 2: سیٹ اسکوائر کو پیمانے کے ساتھ تب تک سرکائیں جب تک سیٹ اسکوائر کا عمودی کنارہ (vertical edge) راس نقطہ A کو نہ چھو لے۔



مرحلہ 3: سیٹ اسکوائر کے عمودی کنارے کا استعمال کرتے ہوئے A کے ذریعے BC تک ارتفاع بنائیے۔

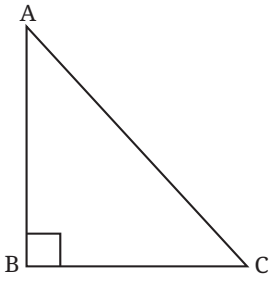
کیا کوئی مثلث ہے جس کا کوئی ضلع اس کا ارتفاع بھی ہو؟

اس طرح کے مثلث کا تصور کیجیے اور ایک خاکہ بنائیے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایسے مثلث میں ہوتا ہے جہاں ایک زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

ایسے مثلث جن کا ایک زاویہ، **زاویہ قائمہ** ہو، **قائم زاویہ مثلث** (Right triangles) کہلاتا ہے۔

A سے BC پر ارتفاع:



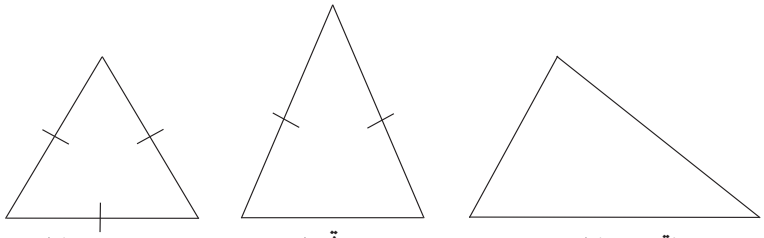
7.5 مثلث کی اقسام

مثلث کے مطالعہ میں، ہم نے مثلث کی درج ذیل اقسام کے بارے میں جانا۔ مساوی الاضلاع مثلث، مساوی الساقین مثلث، مختلف الاضلاع مثلث اور قائم زاویہ مثلث۔

کیا آپ نے مثلث کی کسی اور قسم کو دیکھا؟

اضلاع کی برابری کی بنیاد پر کی جانے والی درجہ بندی میں مساوی الاضلاع مثلث، مساوی الساقین مثلث، آتے ہیں۔

مساوی الاضلاع مثلث کے سبھی اضلاع کی لمبائی برابر ہوتی ہے، مساوی الساقین مثلث کے کسی دو اضلاع کی لمبائی برابر ہوتی ہے مختلف الاضلاع مثلث میں تینوں ضلعوں کی لمبائیاں الگ الگ ہوتی ہیں۔



مساوی الاضلاع مثلث　　مساوی الساقین مثلث　　مختلف الاضلاع مثلث

کیا مثلث کی درجہ بندی زاویوں کی برابری کے اعتبار سے کر سکتے ہیں؟ کیا ان دونوں درجہ بندیوں میں کوئی تعلق ہے؟ ان سوالات کا جواب ہم بعد کے باب میں دیں گے۔

ہم نے زاویوں کی پیمائش کا استعمال اس وقت کیا جب ہم نے مثلث کو قائم زاویہ مثلث کے طور پر درجہ بند کیا۔

زاویہ کی پیمائش پر مبنی مثلث کی دوسری اقسام کیا ہیں؟

ان کے زاویہ کی بنیاد پر مثلث کی درجہ بندی، حادہ زاویہ مثلث، قائم زاویہ مثلث اور منفرجہ زاویہ مثلث ہے۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ قائم زاویہ مثلث کیا ہوتا ہے۔ یہ ایک ایسا مثلث ہے جس کا ایک زاویہ، زاویہ 'قائمہ' ہوتا ہے۔ اسی طرح، ایک منفرجہ زاویہ مثلث میں ایک زاویہ، زاویہ منفرجہ ہوتا ہے۔

ریاضی بات چیت

ایک، حادہ زاویہ مثلث کیا ہو سکتا ہے؟ کیا ہم اسے ایک مثلث جس کا ایک زاویہ، 'زاویہ حادہ' ہو، مثلث کے طور پر بیان کر سکتے ہیں؟ کیوں نہیں؟

ایک **حادہ زاویہ** (Acute-angled) مثلث میں، تینوں زاویے زاویہ حادہ ہوتے ہیں۔

معلوم کیجیے

1. ایک مثلث ABC بنائیے جس میں 5 سینٹی میٹر = BC، 6 سینٹی میٹر = AB، 5 سینٹی میٹر = CA ہو۔ A سے BC پر ایک ارتفاع بنائیے۔

2. ایک مثلث TRY بنائیے جس میں RY = 7 سینٹی میٹر، TR = 4 سینٹی میٹر، $\angle R = 140°$ ہو۔ T سے RY پر ایک ارتفاع بنائیے۔

3. ایک قائم زاویہ مثلث ABCΔ بنائیے جس میں $\angle B = 90°$ اور AC = 5 سینٹی میٹر ہو۔ ان پیمائشوں کے ساتھ کتنے مختلف مثلث بن سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

[**اشارہ:** خیال رہے کہ دوسری پیمائشیں کوئی بھی قدر اختیار کرسکتی ہیں۔ AC کو قاعدہ مان لیجیے۔ $\angle A$ اور $\angle C$ کن قدروں کو اختیار کریں کہ دوسرا زاویہ $90°$ ہو۔]

4. تعمیر کے ذریعے یہ دریافت کیجیے کہ کیا ایک مساوی الاضلاع مثلث بنانا ممکن ہے جو کہ (i) زاویہ قائمہ (Right-angled) (ii) زاویہ منفرجہ (Obtuse-angled) ہو۔ ایک ایسا مساوی الساقین مثلث بنائیے جو (i) زاویہ قائمہ (ii) زاویہ منفرجہ ہو۔

خلاصہ

- کمپاس کا استعمال مثلث کی تعمیر کو آسان بناتا ہے جب اس کے اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں۔
- تین لمبائیوں کا ایک سیٹ جہاں ہر ایک کی لمبائی باقی دو کے مجموعے سے چھوٹی ہے مثلث کی عدم مساوات کو پورا کرتی ہے۔
- مثلث کے اضلاع کی لمبائی مثلث کی عدم مساوات کو پورا کرتی ہے اور اگر اضلاع کی لمبائیوں کا دیا ہوا سیٹ مثلث کی عدم مساوات کو پورا کرتا ہے، تو ان اضلاع کی لمبائیوں کے ساتھ ایک مثلث بنایا جاسکتا ہے۔
- مثلث تب بھی بنائے جاسکتے ہیں جب درج ذیل پیمائش دی گئی ہوں:
  (a) دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ
  (b) دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع
- مثلث کے زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ $180°$ ہوتا ہے۔
- ایک مثلث کا ارتفاع ایک عمودی خط ہے جو اس کے کسی راس سے اس کے متضاد ضلع پر بنا ہو۔
- مساوی الاضلاع مثلث کے سبھی اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوتی ہیں۔ مساوی الساقین مثلث کے کوئی دو اضلاع کی لمبائی برابر ہوتی ہیں مختلف الاضلاع مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائی مختلف ہوتی ہیں۔
- مثلثوں کو ان کے زاویہ کی پیمائش کی بنیاد پر زاویہ حادہ، زاویہ قائمہ اور زاویہ منفرجہ مثلث کے طور پر درجہ بندی کی جاتی ہے۔



پہیلی بوجھیں!

ایک ڈبے میں مختصر ترین راستہ!

ایک ڈبے کے ایک کونے میں ایک مکڑی ہے۔ یہ سب سے دور مخالف کونے تک پہنچنا چاہتی ہے (شکل میں نشان زد)۔ چوں کہ یہ اُڑ نہیں سکتی، اس لیے یہ ڈبے کی سطحوں پر چل کر ہی مخالف مقام تک پہنچ سکتی ہے۔ وہ سب سے چھوٹا راستہ کون سا ہے؟



ایک گتے کا ڈبہ لیجیے اور اس راستے کو نشان زد کیجیے جو آپ کے خیال میں ایک کونے سے اس کے مخالف کونے تک سب سے چھوٹا ہے۔

اس راستے کی لمبائی کا اپنے دوستوں کے بنائے ہوئے راستوں سے موازنہ کیجیے۔

اشارہ:



8

کسری اعداد کے ساتھ کام کرنا

(WORKING WITH FRACTIONS)

4774CH08

8.1 کسری اعداد کی ضرب



آرون(Aaron)ایک گھنٹے میں 3 کلومیٹر چلتا ہے۔وہ 5 گھنٹوں میں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

یہ ایک آسان سوال ہے، ہم جانتے ہیں کہ فاصلہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں 5 اور 3 کا حاصل ضرب معلوم کرنے کی ضرورت ہے، یعنی ہم 5 اور 3 کو ضرب دیتے ہیں۔

ایک گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = 3 کلومیٹر

اس لیے،

5 گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ

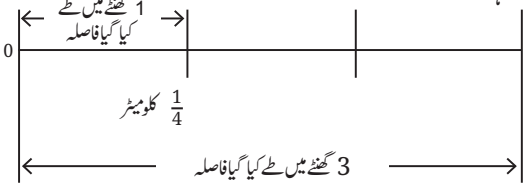
= 5 × 3 کلومیٹر

= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 کلومیٹر

= 15 کلومیٹر

؟ آرون کا پالتو کچھوا بہت آہستہ چلتا ہے۔ یہ ایک گھنٹے میں صرف $\frac{1}{4}$ کلومیٹر چل سکتا ہے۔ یہ 3 گھنٹے میں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

یہاں پر ایک گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ ایک کسر ہے۔اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔کل طے کیا گیا فاصلہ اسی طرح ضرب سے معلوم کیا جاتا ہے۔



1 گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = $\frac{1}{4}$ کلومیٹر۔

اس لیے، 3 گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = $\frac{1}{4}$ × 3 کلومیٹر

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ = کلومیٹر

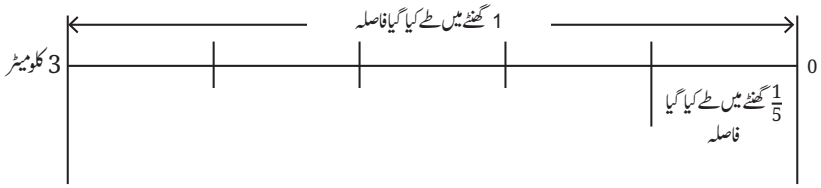
$\frac{3}{4}$ = کلومیٹر

کچھوا 3 گھنٹے میں $\frac{3}{4}$ کلومیٹر کا فاصلہ طے کرسکتا ہے۔

آیئے ایک ایسی مثال پر غور کرتے ہیں جہاں چلنے میں لگنے والا وقت ایک گھنٹے کا کسر ہو۔

ہم نے دیکھا کہ آرون 1 گھنٹے میں 3 کلومیٹر چل سکتا ہے۔ وہ $\frac{1}{5}$ گھنٹے میں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

ہم ضرب کے ذریعے ہی طے کیا گیا فاصلہ معلوم کریں گے۔



$\frac{1}{5}$ گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = 3 × $\frac{1}{5}$ کلومیٹر

حاصلِ ضرب معلوم کرنا (Finding the Product)

1 گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = 3 کلومیٹر۔

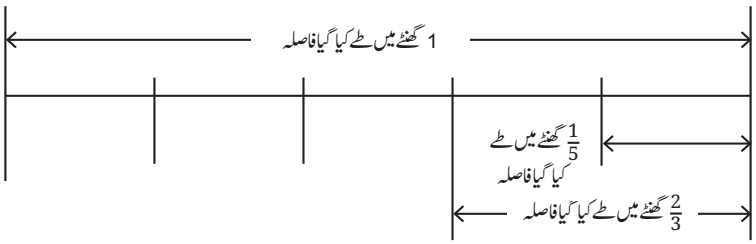
$\frac{1}{5}$ گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ، اتنا ہی ہے جتنا 3 کلومیٹر کو 5 برابر حصوں میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے، یعنی $\frac{3}{5}$ کلومیٹر۔

اس سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ $\frac{1}{5}$ × 3 = $\frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$ گھنٹے میں آرون کتنا فاصلہ طے کرسکتا ہے؟

پھر سے ہمارے پاس—

طے کیا گیا فاصلہ = $3 \times \frac{2}{5}$ کلومیٹر



حاصلِ ضرب معلوم کرنا:

1. پہلے ہم $\frac{1}{5}$ گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔
2. چوں کہ مدت $\frac{2}{5}$ دوگنا ہے $\frac{1}{5}$ کا، ہم کل طے کیا گیا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے اس فاصلے کو 2 سے ضرب دیتے ہیں۔

حساب کا طریقہ درج ذیل ہے۔

1 گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = 3 کلومیٹر

1. $\frac{1}{5}$ گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ

= لمبائی جو کہ ہم 3 کلومیٹر کو 5 برابر حصّوں میں تقسیم کرنے پر حاصل کرتے ہیں۔

= $\frac{3}{5}$ کلومیٹر۔

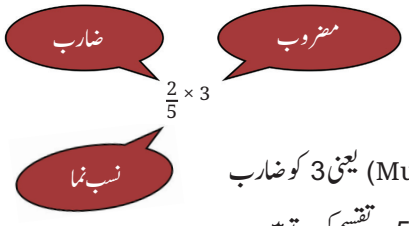
2. اس فاصلے کو 2 سے ضرب کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \text{ کلومیٹر}$$

یہاں سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$$

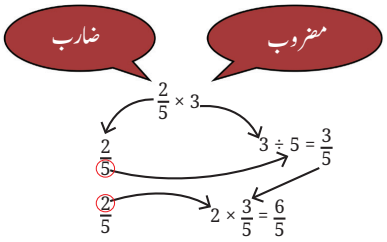
تبادلۂ خیال



ہم نے اس ضرب کو درج ذیل طریقے سے کیا:

- $\frac{3}{5}$ حاصل کرنے کے لیے، پہلے ہم مضروب (Multiplicand) یعنی 3 کو ضارب (Multiplier) کے نسب نما (Denominator) یعنی 5 سے تقسیم کرتے ہیں۔

- پھر ہم $\frac{6}{5}$ حاصل کرنے کے لیے حاصل شدہ نتیجے کو ضارب کے شمار کنندہ یعنی 2 سے ضرب دیتے ہیں۔



اس طرح، جب بھی ہمیں ایک کسر ایک مکمل عدد کو ضرب کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تو ہم مندرجہ بالا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

مثال 1: ایک کسان کے 5 پوتے ہیں۔ اس نے اپنی زمین میں سے ہر پوتے کو $\frac{2}{3}$ ایکڑ زمین دی۔ اس نے اپنے پوتوں کو کل کتنی زمین دی؟

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

مثال 2: انٹرنیٹ کو ایک گھنٹہ استعمال کرنے کا خرچ ₹8 ہے تو انٹرنیٹ کو $1\frac{1}{4}$ گھنٹے استعمال کرنے کا خرچ کتنا ہوگا؟

$1\frac{1}{4}$ گھنٹے $\frac{5}{4}$ گھنٹے ہوتے ہیں (مخلوط کسر کو سادہ کسر میں تبدیل کرتے ہوئے)۔

انٹرنیٹ کو $\frac{5}{4}$ گھنٹے استعمال کرنے کا خرچ $= \frac{5}{4} \times 8$

$= 5 \times \frac{8}{4}$

$= 5 \times 2$

$= 10$

انٹرنیٹ کو $1\frac{1}{4}$ گھنٹے استعمال کرنے کا خرچ ₹10 ہے۔

معلوم کیجیے

1. تیمزن روزانہ $\frac{1}{2}$ گلاس دودھ پیتا ہے۔ وہ ایک ہفتے میں کتنے گلاس دودھ پیتا ہے؟ جنوری کے مہینے میں اُس نے کتنے گلاس دودھ پیا؟
2. مزدوروں کی ایک ٹیم 8 دن میں 1 کلومیٹر پانی کی نہر بنا سکتی ہے۔ اس طرح سے ایک دن میں ٹیم ____ کلومیٹر نہر بنا سکتی ہے؟ اگر وہ ہفتے میں 5 دن کام کریں، تو وہ ایک ہفتے میں ____ کلومیٹر نہر بنائیں گے۔
3. منجو اور اس کے دو ہمسائے ہر ہفتے 5 لیٹر تیل خریدتے ہیں اور اسے 3 خاندانوں میں برابر تقسیم کرتے ہیں۔ ہر خاندان کو ایک ہفتے میں کتنا تیل ملتا ہے؟ 4 ہفتوں میں ایک خاندان کو کتنا تیل ملے گا؟
4. صفیہ نے پیر کے دن رات 10 بجے چاند کو غروب ہوتے ہوئے دیکھا۔ اُس کی ماں، جو کہ ایک سائنس داں ہے، نے اُسے بتایا کہ ہر دن چاند پچھلے دن کے مقابلے میں $\frac{5}{6}$ گھنٹہ بعد غروب ہوتا ہے۔ تو جمعرات کو چاند 10 بجے کے کتنے گھنٹے بعد غروب ہوگا؟

5. ضرب کیجیے اور پھر اس کو مخلوط کسر میں تبدیل کیجیے:

(a) $7 \times \frac{3}{5}$

(b) $4 \times \frac{1}{3}$

(c) $\frac{9}{7} \times 6$

(d) $\frac{13}{11} \times 6$

ابھی تک ہم نے مکمل اعداد کو کسر کے ساتھ اور کسر کو مکمل عدد کے ساتھ ضرب کرنا سیکھا ہے۔ کیا ہوتا ہے جب ضرب میں دونوں اعداد کسریں ہوں؟

دو کسروں کی ضرب

گھنٹے	فاصلہ
1	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	؟

ہم جانتے ہیں کہ آرون کا پالتو کچھوا ایک گھنٹے میں $\frac{1}{4}$ کلومیٹر چل سکتا ہے۔ یہ آدھے گھنٹے چل کر کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

اس طرح کے سوالات کو ضرب کا استعمال کرتے ہوئے حل کرنے کے لیے ہمارے پاس مندرجہ ذیل طریقہ ہے،

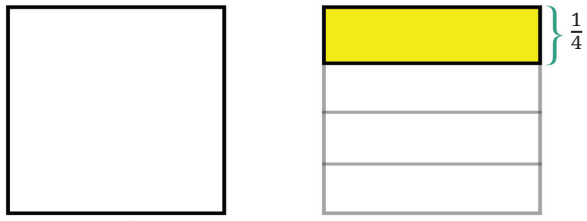
$\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ کلومیٹر

حاصلِ ضرب معلوم کرنا:

1 گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ = $\frac{1}{4}$ کلومیٹر

لہٰذا، $\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کیا گیا فاصلہ وہ لمبائی ہے جو ہمیں $\frac{1}{4}$ کو 2 برابر حصوں میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

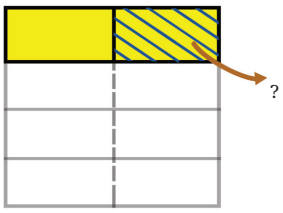
اسے سمجھنے کے لیے یہ مفید ہوتا ہے کہ ہم کسرات کو ایک اکائی مربع (Unit Square) کی مدد سے ظاہر کریں، جو ایک مکمل مقدار (Whole) کی نمائندگی کرتا ہے۔



مکمل کا $\frac{1}{4}$

اکائی مربع مکمل کے طور پر

اب ہم $\frac{1}{4}$ کو 2 برابر حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں کیا ملتا ہے؟



$\frac{1}{4}$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا

مکمل شکل کے کون سے رنگین کسری حصہ کو لکیروں سے بھرا گیا ہے؟

چوں کہ اس میں مکمل شکل کو 8 برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ان میں سے ایک رنگین حصے کو لکیروں سے بھرا گیا ہے، تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکمل شکل کا $\frac{1}{8}$ لکیروں سے بھرا گیا ہے۔ اس لیے، کچھوے نے آدھے گھنٹے میں $\frac{1}{8}$ کلومیٹر فاصلہ طے کیا۔

یہ ہمیں بتاتا ہے کہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

اگر کچھوا تیز چلتا ہے اور یہ ایک گھنٹے میں $\frac{2}{5}$ کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے تو وہ ایک گھنٹے کے $\frac{3}{4}$ حصّے میں چل کر کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

طے کیا گیا فاصلہ $= \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

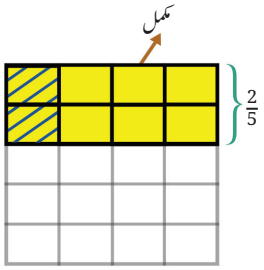
حاصلِ ضرب معلوم کرنا:

(i) پہلے ایک گھنٹے کے $\frac{1}{4}$ میں طے کیا گیا فاصلہ معلوم کیجیے۔

(ii) ایک گھنٹے کے $\frac{3}{4}$ میں طے کیا گیا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے نتیجہ کو 3 سے ضرب کیجیے۔

(i) ایک گھنٹے کے $\frac{1}{4}$ میں طے کیا گیا فاصلہ کلومیٹر میں = وہ مقدار جو ہمیں $\frac{2}{5}$ کو 4 برابر حصوں میں تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اکائی مربع کو مکمّل تصوّر کرتے ہوئے (شکل 8.1) میں لکیروں سے بھرا ہوا حصّہ وہ خطّہ ہے جو ہمیں اس وقت حاصل ہوتا ہے جب ہم $\frac{2}{5}$ کو 4 برابر حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



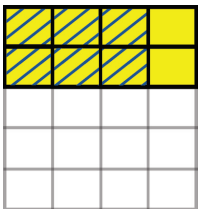
شکل 8.1

یہ مکمّل کا کتنا ہے؟

مکمّل کو 5 قطار اور 4 کالم میں تقسیم کیا گیا ہے تا کہ 20 = 4×5 برابر حصّے بنائے جا سکیں۔

لکیروں سے بھرے ہوئے حصّوں کی تعداد = 2

لہٰذا، ایک گھنٹے کے $\frac{1}{4}$ حصّے میں طے کیا گیا فاصلہ = $\frac{2}{20}$



(ii) اب ہمیں $\frac{2}{20}$ کو 3 سے ضرب کرنا ہے۔

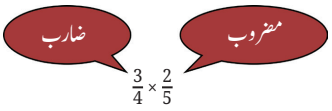
ایک گھنٹے کے $\frac{3}{4}$ حصے میں طے کیا گیا فاصلہ $= 3 \times \frac{2}{20}$

$= \frac{6}{20}$

اس لیے، $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

تبادلۂ خیال

اس مرحلے میں جب ایک کسر کو دوسری کسر سے ضرب دی جاتی ہے، تو ہم وہی طریقہ اپناتے ہیں جو ہم نے اس وقت اپنایا تھا جب ہم نے ایک کسر کو عدد کامل سے ضرب دیا تھا۔ ہم نے مندرجہ ذیل طریقے سے ضرب دیا تھا:



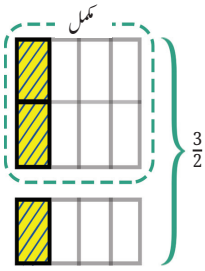
$\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{20}$ $\quad$ مضروب کو 4 سے تقسیم کیجیے

$\frac{3}{4}$ $\quad$ $3 \times \frac{2}{20} = \frac{6}{20}$ $\quad$ مضروب کو 3 سے تقسیم کیجیے

ریاضی بات چیت

؟ اسی طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$ کو ضرب کیجیے۔

سب سے پہلے، آیئے ہم $\frac{3}{2}$ کو اکائی مربع کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں، تاکہ اسے مکمل کے طور پر لیا جاسکے۔ چوں کہ کسر $\frac{3}{2}$ ایک مکمل اور آدھا ہے، اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے دکھایا جاسکتا ہے:



شکل 8.2

ضرب کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں پہلے کسر $\frac{3}{2}$ کو 4 برابر حصّوں میں تقسیم کرنے کی ضرورت ہے۔ ایسا (شکل 8.2) میں دکھائے گئے طریقے سے کیا جاسکتا ہے، جہاں پیلے رنگ کا لکیروں سے بھرا ہوا حصّہ اس کسر کو ظاہر کرتا ہے جو $\frac{3}{2}$ کو 4 برابر حصّوں میں تقسیم کرنے کے بعد حاصل ہوا ہے۔ اس کی قدر کیا ہے؟

ہم دیکھتے ہیں کہ مکمل کو 2 قطاروں (Rows) اور 4 کالموں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

جس سے کل $8 = 4 \times 2$ برابر حصّے بنے ہیں۔

اس میں لکیروں سے بھرے ہوئے حصوں کی تعداد $= 3$

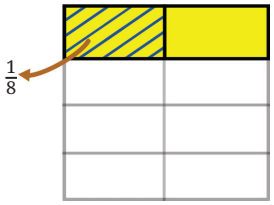
لہٰذا پیلے رنگ والا لکیروں سے بھرا ہوا حصّہ $= \frac{3}{8}$

اب اگلا مرحلہ اس حاصل شدہ نتیجہ کو 5 سے ضرب دینا ہے۔ یہ ہمیں $\frac{3}{2}$ اور $\frac{5}{4}$ کا حاصل ضرب دیتا ہے۔

$$\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = 5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

مستطیل (Rectangle) کے رقبے اور کسری ضرب کے درمیان تعلق

شکل 8.3 میں لکیروں سے بھرے ہوئے مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہے؟ چوں کہ ہم نے ایک اکائی مربع (جس کی ہر سمت کی لمبائی 1 اکائی ہو) سے شروعات کی تھی اس لیے مستطیل کی لمبائی $\frac{1}{2}$ اکائی اور چوڑائی $\frac{1}{4}$ اکائی ہے۔



شکل 8.2

تو اس مستطیل کا رقبہ کتنا ہوگا؟ ہم دیکھتے ہیں کہ 8 ایسی مستطیلیں اس مربع میں آجاتی ہیں جن کا کل رقبہ 1 مربع اکائی ہوتا ہے۔ لہٰذا، ہر مستطیل کا رقبہ $\frac{1}{8}$ مربع اکائی ہوگا۔

کیا آپ رقبے اور لمبائی و چوڑائی کے حاصلِ ضرب کے درمیان کوئی تعلق دیکھتے ہیں؟

کسی کسری اضلاع والے مستطیل کا رقبہ اس کے اضلاع کے حاصلِ ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

عام طور پر، اگر ہم دو کسروں کا حاصل ضرب معلوم کرنا چاہتے ہیں تو ہم ان دونوں کسروں کو مستطیل کے اضلاع کے طور پر لے کر اس مستطیل کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

معلوم کیجیے

1. مندرجہ ذیل کسروں کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔ کسروں کو ظاہر کرنے کے لیے ایک اکائی مربع کا استعمال مکمل کی طرح کیجیے:

(a) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$

(b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

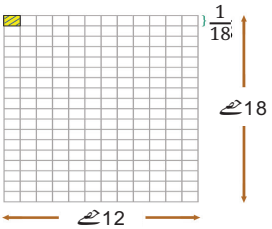
(c) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$

اب معلوم کیجیے $\frac{1}{12} \times \frac{1}{18}$

اکائی مربع کو استعمال کرتے ہوئے کسروں کو ظاہر کرنا ایک مشکل اور دقت طلب طریقہ ہے۔ آیئے پچھلی مثالوں میں استعمال کیے گئے طریقوں کا مشاہدہ کرتے ہوئے حاصل ضرب معلوم کرتے ہیں۔

ہر مثال میں مکمل کو قطاروں اور کالموں میں تقسیم کیا گیا ہے۔



قطاروں کی تعداد ضرب ہونے والی کسر کے نسب نما کے برابر ہے، جو کہ اس مثال میں 18 ہے۔

کالموں کی تعداد ضرب دینے والی کسر کے نسب نما کے برابر ہے، جو کہ اس مثال میں 12 ہے۔

لہٰذا، مکمل کو 2 1× 18 برابر حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس لیے؛

$$\frac{1}{18} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{(18\times12)} = \frac{1}{216}$$

لہٰذا جب دو کسری اکائیاں آپس میں ضرب دی جاتی ہیں تو ان کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{\text{نسب نماؤں کا حاصلِ ضرب}}$$

ہم اس کا اظہار اس طرح کرتے ہیں:

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{b \times d}$$

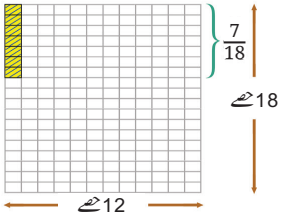
2. درج ذیل کسروں کا حاصلِ ضرب معلوم کیجیے۔ کسروں کو اکائی مربع کے ذریعے ظاہر کیجیے اور ریاضی عمل کو انجام دیجیے۔

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

(c) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ (d) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$

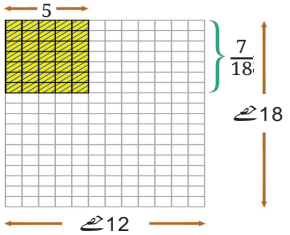
شمار کنندہ اور نسب نما کی ضرب (Multiplying Numerators and Denominators)

اب معلوم کیجیے $\frac{5}{12} \times \frac{7}{18}$



پچھلی مثال کی طرح، آیئے ہم حاصل ضرب مرحلہ وار طریقے سے ضرب کر کے معلوم کرتے ہیں۔ پہلے مکمل کو 18 قطاروں اور 12 کالموں میں تقسیم کرتے ہیں، جس سے 18×12 برابر حصے بنتے ہیں۔

ہم $\frac{7}{18}$ کو 12 برابر حصوں میں تقسیم کر کے جو قدر حاصل کرتے ہیں وہ $\frac{7}{(12 \times 18)}$ ہے۔



پھراس نتیجہ کو 5 سے ضرب دیتے ہیں تاکہ حاصل ضرب معلوم ہوجائے۔ یہ $\frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)}$ ہے۔

اس لیے، $\frac{5}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)} = \frac{35}{216}$

عمومی طور پر، اسے ہم درج ذیل طریقے سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

اس فارمولے کو سب سے پہلے برہم گپت (Brahmagupta) نے 628 عیسوی میں اپنی تصنیف برہماسفٹ سدھانت (*Brāhmasphuṭasiddhānta*) میں عمومی شکل میں بیان کیا تھا۔

یہ فارمولا اس وقت بھی کارآمد ہوتا ہے جب ضرب دینے والا یا ضرب ہونے والا عدد کوئی عدد کامل ہو تو ہم آسانی سے عدد کامل کو 1 نسب نما کے ساتھ کسر کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر،

$3 \times \frac{3}{4}$ کو $\frac{3}{1} \times \frac{3}{4}$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$= \frac{3 \times 3}{1 \times 4} = \frac{9}{4}$$

اور

$4 \times \frac{3}{5}$ کو $\frac{4}{1} \times \frac{3}{5}$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$= \frac{4 \times 3}{1 \times 5} = \frac{12}{5}$$

کسروں کی ضرب — کم ترین شکل (Lowest Form) میں لکھنا

؟ مندرجہ ذیل کسروں کو ضرب کیجیے اور حاصل ضرب کو کم ترین شکل میں ظاہر کیجیے

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24}$$

شمار کنندہ (12 اور 5) اور نسب نما (7 اور 24) کو پہلے ضرب دے کر اس کو آسان شکل میں تبدیل کرنے کے بجائے، ہم یہ بھی کر سکتے ہیں:

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24} = \frac{\cancel{12} \times 5}{7 \times \cancel{24}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں دائروں میں رکھے گئے اعداد میں مشترک جزو ضربی 12 ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ جب شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مشترکہ عدد سے تقسیم کیا جاتا ہے تو کسر وہی رہتا ہے۔ اس صورت میں ہم انھیں 12 سے تقسیم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\cancel{12}^{1} \times 5}{7 \times \cancel{24}_{2}} = \frac{1 \times 5}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$$

آیئے اب ہم اسی تکنیک کا استعمال کرتے ہوئے ایک اور ضرب کرتے ہیں۔

$$\frac{14}{15} \times \frac{25}{42}$$

$$\frac{\cancel{14}^{1} \times \cancel{25}^{5}}{\cancel{15}_{3} \times \cancel{42}_{3}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}$$

جب کسروں کو ضرب دیتے ہیں تو ہم شمار کنندہ اور نسب نما کو ان کے مشترک جزو ضربی (Common Factors) سے تقسیم کر سکتے ہیں۔ پھر شمار کنندہ اور نسب نما کو ضرب دیتے ہیں۔ اسے مشترکہ جزو ضربی کو منسوخ کرنا کہتے ہیں۔

تاریخ کی ایک جھلک (A Pinch Of History)

ہندوستان میں کسر کو اس کی کم ترین ارکان (Lowest Terms) میں تبدیل کرنے کے طریقہ کو ''اپورتن (Apavartana)'' کہا جاتا ہے، جسے اس قدر شہرت حاصل تھی کہ اس کا ذکر غیر ریاضیاتی تحریروں میں بھی ملتا ہے۔ ایک جین عالم اُماسوتی (Umasvati) (تقریباً 150 عیسوی) نے اسے ایک فلسفیانہ تحریر میں بطور تمثیل (تشبیہ) استعمال کیا تھا۔

معلوم کیجیے

1. ایک پانی کی ٹنکی نل سے بھری جاتی ہے۔ اگر نل ایک گھنٹے کے لیے کھلا رہے تو ٹنکی کا $\frac{7}{10}$ حصّہ بھر جاتا ہے۔ تو درج ذیل اوقات کے دوران ٹنکی کا کتنا حصّہ بھر جائے گا؟

   (a) $\frac{1}{3}$ گھنٹہ _____

   (b) $\frac{2}{3}$ گھنٹہ _____

   (c) $\frac{3}{4}$ گھنٹہ _____

   (d) $\frac{7}{10}$ گھنٹہ _____

   (e) اگر ٹنکی کو مکمل بھرنا ہو تو نل کو کتنی دیر تک کھلا رہنا چاہیے؟

کوشش کیجیے

2. حکومت نے ایک سڑک بنانے کے لیے سوموکی زمین کا $\frac{1}{6}$ حصّہ لیا۔ اب سوموکے پاس کتنی زمین بچی؟ وہ اس بچی ہوئی زمین کا آدھا حصہ اپنی بیٹی کرشنا کو اور $\frac{1}{3}$ حصہ اپنے بیٹے بورا کو دیتی ہے۔ ان دونوں کو حصّہ دینے کے بعد باقی زمین وہ اپنے پاس رکھتی ہے۔

(a) کرشنا کو اصل زمین کا کتنا حصّہ ملا؟

(b) بورا کو اصل زمین کا کتنا حصّہ ملا؟

(c) سوموں نے اپنے پاس اصل زمین کا کتنا حصّہ رکھا؟

3. ایک مستطیل جس کی لمبائی $3\frac{3}{4}$ فٹ اور چوڑائی $9\frac{3}{5}$ فٹ ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4. سیوانگ اپنے باغیچے میں ایک قطار میں چار پودے لگاتا ہے۔ دو پودوں کے درمیان کا فاصلہ $\frac{3}{4}$ میٹر ہے۔ پہلے اور آخری پودے کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔ (**اشارہ:** چار پودوں کا خاکہ بنائیے جس میں دو پودوں کے درمیان کا فاصلہ $\frac{3}{4}$ میٹر ہو۔)

5. کون زیادہ وزنی ہے: 500 گرام کا $\frac{12}{15}$ حصہ یا 4 کلوگرام کا $\frac{3}{20}$ حصہ؟

کیا حاصلِ ضرب ہمیشہ ضرب دیے گئے اعداد سے بڑا ہوتا ہے؟

چونکہ، ہم جانتے ہیں کہ جب کسی عدد کو 1 سے ضرب دیا جائے تو وہ عدد ویسا ہی رہتا ہے، اس لیے ہم ایسے اعداد کے جوڑوں کو ضرب دیں گے جن میں سے کوئی بھی 1 نہ ہو۔

جب ہم دو گنتی کے اعداد، جو 1 سے بڑے ہوں مثلاً 3 اور 5 کو ضرب دیتے ہیں، تو حاصلِ ضرب دونوں ضرب دیے جانے والے اعداد سے بڑا ہوتا ہے۔

$$3 \times 5 = 15$$

حاصلِ ضرب یعنی 15 دونوں اعداد 3 اور 5 سے بڑا ہے۔

لیکن جب ہم $\frac{1}{4}$ اور 8 کو ضرب دیتے ہیں تو کیا ہوتا ہے؟

$$\frac{1}{4} \times 8 = 2$$

درج بالا ضرب میں حاصلِ ضرب یعنی 2، $\frac{1}{4}$ سے تو بڑا ہے، لیکن 8 سے چھوٹا ہے۔

اب دیکھیے کہ جب ہم $\frac{3}{4}$ اور $\frac{2}{5}$ کو ضرب دیتے ہیں تو کیا ہوتا ہے؟

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

آیئے اس حاصلِ ضرب یعنی $\frac{6}{20}$ کا موازنہ ان دونوں اعداد $\frac{3}{4}$ اور $\frac{2}{5}$ سے کرتے ہیں۔ اس کے لیے ہم $\frac{3}{4}$ کو $\frac{15}{20}$ اور $\frac{2}{5}$ کو $\frac{8}{20}$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ حاصلِ ضرب دونوں اعداد سے کم ہے۔

آپ کے خیال میں کن صورتوں میں حاصلِ ضرب دونوں اعداد سے زیادہ ہوتا ہے؟ کب یہ دونوں اعداد کے درمیان ہوتا ہے اور کب دونوں اعداد سے کم ہوتا ہے؟

(**اشارہ:** یہ تعلق اس بات پر منحصر ہے کہ حاصلِ ضرب اور ضرب دیے گئے اعداد 0 اور 1 کے درمیان ہیں یا 1 سے بڑے ہیں۔ مختلف اعداد کے جوڑے لیجیے اور ان کے حاصلِ ضرب پر غور کیجیے۔ ہر ضرب کے لیے مندرجہ ذیل سوالات پر غور کیجیے۔)

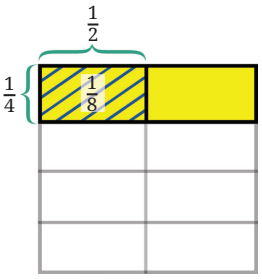
صورتِ حال	ضرب	تعلق
صورتِ حال 1	دونوں اعداد 1 سے بڑے ہیں (مثلاً: $\frac{4}{3} \times 4$)	حاصلِ ضرب $\frac{16}{3}$ دونوں اعداد سے بڑا ہے۔
صورتِ حال 2	دونوں اعداد 0 اور 1 کے درمیان ہیں (مثلاً: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$)	حاصلِ ضرب $\frac{3}{10}$ دونوں اعداد سے چھوٹا ہے۔
صورتِ حال 3	ایک عدد 0 اور 1 کے درمیان ہے اور دوسرا عدد 1 سے بڑا ہے (مثلاً: $\frac{3}{4} \times 5$)	حاصلِ ضرب $\frac{15}{4}$ اس عدد سے کم ہے جو 1 سے بڑا ہے اور اس عدد سے بڑا ہے جو 0 اور 1 کے درمیان ہے۔

ہر صورت حال کے لیے اس طرح کی مزید مثالیں بنائیے اور حاصلِ ضرب اور ضرب دیے گئے اعداد کے درمیان تعلق کا مشاہدہ کیجیے۔

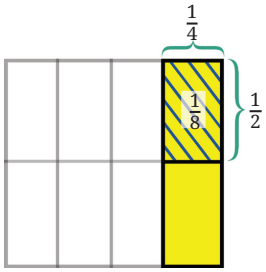
؟ آپ حاصلِ ضرب اور ضرب دیے گئے اعداد کے درمیان کے تعلق کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟ خالی جگہوں کو بھریے:

- جب ضرب دیے گئے اعداد میں سے کوئی ایک عدد 0 اور 1 کے درمیان ہو تو وہ حاصل ضرب دوسرے عدد سے _____ (بڑا یا چھوٹا) ہوتا ہے۔
- جب ضرب دیے گئے اعداد میں سے کوئی ایک عدد 1 سے بڑا ہو تو حاصل ضرب دوسرے عدد سے _____ (بڑا یا چھوٹا) ہوتا ہے۔

ضرب کی ترتیب



ہم جانتے ہیں کہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$



اب $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ کتنا ہو گا؟

یہ بھی $\frac{1}{8}$ ہی ہو گا۔

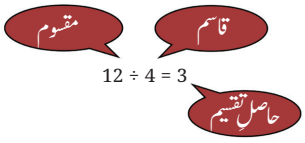
یاد رکھیے کہ عام طور پر ایک مستطیل کا رقبہ لمبائی اور چوڑائی کا تبادلہ کرنے سے نہیں بدلتا۔
یعنی ضرب کی ترتیب سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔ لہٰذا،

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

اس کو برہم گپت کے 'کسروں کو ضرب دینے والے فارمولے' سے بھی سمجھا جا سکتا ہے۔

8.2 کسروں کی تقسیم

$12 \div 4$ کتنا ہے؟ یہ آپ پہلے سے جانتے ہیں۔ لیکن کیا یہ سوال دوبارہ سے ضرب کے سوال کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے؟



12 حاصل کرنے کے لیے کس عدد کو 4 کے ساتھ ضرب دیا جانا چاہیے؟ جو ہے،

$4 \times ? = 12$

ہم تقسیم کو ضرب کے مسئلے میں تبدیل کرنے کی اس تکنیک کو کسروں کی تقسیم کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

$1 \div \frac{2}{3}$ کتنا ہے؟

آیئے اب ہم اسے ضرب کے مسئلے کے طور پر لکھتے ہیں۔

$$\frac{2}{3} \times ? = 1$$

حاصل ضرب 1 حاصل کرنے کے لیے $\frac{2}{3}$ کے ساتھ کسے ضرب دینا چاہیے؟

اگر ہم کسی طرح سے 2 اور 3 کو کاٹ دیتے ہیں تو ہمارے پاس 1 بچتا ہے۔

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}} = 1$$

↓

جواب

لہٰذا،

$$1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

آیئے ہم ایک اور مسئلہ حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں:

$$3 \div \frac{2}{3}$$

یہ بالکل ویسا ہی ہے جیسا کہ

$$\frac{2}{3} \times ? = 3$$

کیا آپ اس کا جواب تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم جانتے ہیں کہ 1 حاصل کرنے کے لیے $\frac{2}{3}$ کے ساتھ کسے ضرب دیا جانا چاہیے۔ ہمیں 3 حاصل کرنے کے لیے اس کو $\frac{3}{2}$ سے ضرب دینے کی ضرورت ہے۔ اس لیے،

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times 3} = 3$$

↓

جواب

لہٰذا،

$$3 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

$\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$ کیا ہے؟

اسے ضرب کے مسئلے کے طور پر اس طرح لکھتے ہیں، ہمارے پاس؛

$$\frac{1}{2} \times ? = \frac{1}{5}$$

اس کو ہم کس طرح سے حل کرتے ہیں؟

$$\frac{1}{\cancel{2}} \times \boxed{\cancel{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

جواب

اس لیے،

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ کتنا ہے؟

اس کو ضرب کے مسئلے کے طور پر اس طرح لکھ سکتے ہیں، ہمارے پاس

$$\frac{3}{5} \times ? = \frac{2}{3}$$

ہم اس کو کس طرح سے حل کریں گے

$$\frac{3}{\cancel{5}} \times \boxed{\cancel{5} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

جواب

اس لیے،

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

تبادلۂ خیال

اوپر دیے گئے تقسیم کے ہر مسئلے پر غور کیجیے کہ ہم نے جواب کیسے تلاش کیا۔ کیا ہم ایسا کوئی اصول بنا سکتے ہیں جو ہمیں دو کسروں کو تقسیم کرنے کا طریقہ بتائے؟ آیئے پچھلے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔

$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ (مقسوم ← $\frac{2}{3}$، قاسم ← $\frac{3}{5}$)

$= \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$ (حاصلِ تقسیم)

ہر تقسیم کے مسئلے میں ہمارے پاس قاسم (Divisor)، مقسوم علیہ (Dividend) اور حاصلِ تقسیم (Quotient) ہوتا ہے۔ حاصلِ تقسیم کے لیے جو تکنیک ہم استعمال کر رہے ہیں، وہ یہ ہے:

1. سب سے پہلے، وہ عدد تلاش کیجیے جس سے قاسم کو ضرب دینے پر 1 حاصل ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عدد ایک ایسی کسر ہے جس کا شمار کنندہ قاسم کے نسب نما اور نسب نما قاسم کے شمار کنندہ کے برابر ہوتا ہے۔

جب ہم ایک کسر کو اس کے معکوس سے ضرب دیتے ہیں تو ہمیں 1 حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے ہماری تکنیک کا پہلا قدم قاسم کا مقلوب معلوم کرنا ہے مثلاً قاسم $\frac{3}{5}$ ہے تو یہ کسر $\frac{5}{3}$ ہے۔ ہم $\frac{5}{3}$ کو $\frac{3}{5}$ کا **مقلوب** (Reciprocal) کہتے ہیں۔

2. اس کے بعد خارج قسمت حاصل کرنے کے لیے ہم مقسوم کو اس مقلوب سے ضرب دیتے ہیں۔

خلاصہ یہ کہ دو کسروں کو تقسیم کرنے کے لیے:

- قاسم کا مقلوب تلاش کیجیے
- اسے مقسوم سے ضرب دیجیے تاکہ حاصلِ تقسیم مل جائے۔

اس لیے، $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{c \times b}$

اسے اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

جیسا کہ آپ نے کسروں کی جمع، تفریق اور ضرب کے طریقے اور فارمولے پہلے سیکھے تھے، اسی طرح کسروں کی تقسیم کا یہ طریقہ اور فارمولا بھی سب سے پہلے برہم گپت نے اپنی برہماسفُٹ سدھانت (628عیسوی) میں واضح طور پر بیان کیا تھا۔

لہٰذا، مثال کے طور پر $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ کو برہم گپت کے فارمولے کے مطابق حل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں:

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$$

مقسوم، قاسم اور حاصلِ تقسیم (Dividend, Divisor and the Quotient)

جب ہم دو مکمّل اعداد کو تقسیم کرتے ہیں، مثلاً 6÷3، تو حاصلِ تقسیم 2 آتا ہے۔ یہاں پر حاصلِ تقسیم مقسوم سے کم ہے۔

$$6 \div 3 = 2,\ 2 < 6$$

لیکن جب ہم 6 کو $\frac{1}{4}$ سے تقسیم کرتے ہیں تو کیا ہوتا ہے؟

$$6 \div \frac{1}{4} = 24$$

یہاں حاصلِ تقسیم مقسوم سے زیادہ ہے!

جب ہم $\frac{1}{8}$ کو $\frac{1}{4}$ سے تقسیم کرتے ہیں تو کیا ہوتا ہے؟

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

یہاں پر بھی حاصلِ تقسیم مقسوم سے زیادہ ہے۔

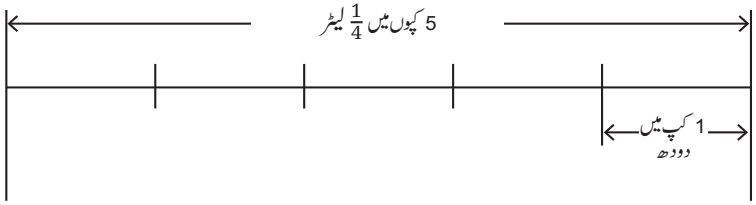
آپ کے خیال میں کب حاصلِ تقسیم مقسوم سے کم ہوتا ہے اور کب یہ مقسوم سے زیادہ ہوتا ہے؟

کیا قاسم اور حاصلِ تقسیم کے درمیان بھی ایسا ہی کوئی تعلق ہے؟

ان تعلقات کو سمجھتے ہوئے، ضرب کے اصولوں کی مدد سے اوپر دیے گئے سوالوں کے جوابات دیجیے۔

8.3 کسروں پر مشتمل کچھ سوالات

مثال 3: لینا نے 5 کپ چائے بنائی۔ اس نے اس کے لیے $\frac{1}{4}$ لیٹر دودھ استعمال کیا۔ چائے کے ہر کپ میں کتنا دودھ ہے؟



لینا نے 5 کپ چائے بنانے کے لیے $\frac{1}{4}$ لیٹر دودھ کا استعمال کیا۔ اس لیے 1 کپ چائے میں دودھ کا حجم (Volume) ہوگا:

$$\frac{1}{4} \div 5$$

اس کو بطور ضرب لکھنے پر، ہمارے پاس

$$5 \times (\text{ہر کپ میں دودھ کی مقدار}) = \frac{1}{4}$$

ہم اس تقسیم کو برہم گپت کے طریقے کے مطابق اس طرح کرتے ہیں: $\frac{1}{5}$ (قاسم) 5 کا مقلوب ہے۔

اس مقلوب کو مقسوم ($\frac{1}{4}$) سے ضرب دینے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

اس لیے چائے کے ہر ایک کپ میں دودھ کی مقدار $\frac{1}{20}$ لیٹر ہے۔

مثال 4: غیر اکائی والی کسروں کے ساتھ کام کرنے کی قدیم ترین مثالیں انسانیت کی قدیم ترین جیومیٹری کی کتابوں، شُلب سُوتر (*Śhulbasūtra*) (تقریباً 800 ق م) میں ملتی ہیں۔ یہاں پر ایک مثال بودھایَن (Baudhāyana) کے شُلب سُوتر (تقریباً 800 ق م) سے دی گئی ہے۔

$7\frac{1}{2}$ مربع اکائیوں کے رقبے کو ایسے مربع شکل کی اینٹوں سے ڈھانپیں جن کے ہر ایک ضلع کی لمبائی $\frac{1}{5}$ اکائی ہے۔

ایسی کتنی مربع اینٹوں کی ضرورت ہوگی؟

ہر مربع اینٹ کا رقبہ $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ مربع اکائیاں ہیں۔

کل ڈھکا جانے والا رقبہ $7\frac{1}{2}$ مربع اکائی $= \frac{15}{2}$ مربع اکائی ہے۔

جیسا کہ (اینٹوں کی تعداد) × (ایک اینٹ کا رقبہ) = کل رقبہ

اینٹوں کی تعداد $= \frac{15}{2} \div \frac{1}{25}$

قاسم کا مقلوب 25 ہے۔

مقلوب کو مقسوم سے ضرب دینے پر، حاصل ہوتا ہے

$$25 \times \frac{15}{2} = \frac{25 \times 15}{2} = \frac{375}{2}$$

مثال 5 : یہ مسئلہ چتر وید پرتھودک سوامی (Pṛithūdakasvāmī) (تقریباً 860 عیسوی) نے برہم گپت کی کتاب برہما سُفُٹ سدھانت (*Brāhmasphuṭasiddhānta*) کی شرح میں پیش کیا تھا۔

چار فوارے ایک حوض کو بھرتے ہیں۔ پہلا فوارہ حوض کو ایک دن میں بھر سکتا ہے۔ دوسرا آدھے دن میں۔ تیسرا ایک چوتھائی دن میں اور چوتھا ایک دن کے پانچویں حصے میں حوض بھر سکتا ہے۔ اگر یہ سب فوارے ایک ساتھ چلیں، تو وہ کتنے وقت میں حوض کو بھریں گے؟

آیئے اس مسئلے کو مرحلہ وار حل کرتے ہیں۔

ایک دن میں، ہر فوارہ جتنی بار حوض بھرے گا—

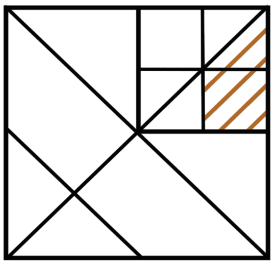
- پہلا فوارہ ایک دن میں حوض کو بھرے گا: $1 \div 1 = 1$ بار
- دوسرا فوارہ حوض کو بھرے گا: $1 \div \frac{1}{2} =$ _____ بار۔
- تیسرا فوارہ حوض کو بھرے گا: $1 \div \frac{1}{4} =$ _____ بار۔
- چوتھا فوارہ حوض کو بھرے گا: $1 \div \frac{1}{5} =$ _____ بار۔

لہٰذا، چاروں فوارے مل کر ایک دن میں حوض کو بھریں گے: 12 بار = _____ + _____ + _____ + _____۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ چاروں فوارے مل کر حوض کو بھرنے میں $\frac{1}{12}$ دن لیں گے۔

کسری رشتے

یہاں پر ایک مربع ہے جس کے اندر کچھ خطوط کھینچے گئے ہیں



شکل 8.4

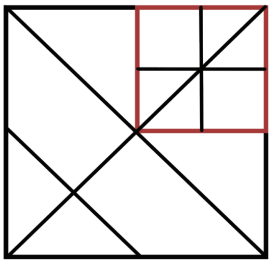
ریاضی بات چیت

پورے مربع کے رقبے کا کون سا حصہ پورا بھرا ہوا ہے؟

اس مسئلے کو حل کرنے کے مختلف طریقے ہیں۔ان میں سے ایک یہ ہے:

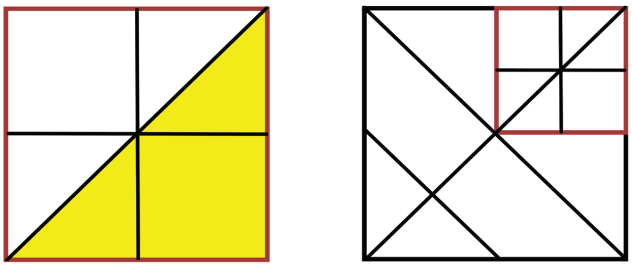
مان لیتے ہیں کہ پورے مربع کا رقبہ 1 مربع اکائی ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر دائیں جانب والا مربع (شکل 8.5 میں) پورے مربع کے رقبے کا $\frac{1}{4}$ حصہ گھیرے ہوئے ہے۔



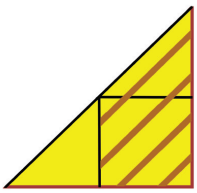
شکل 8.5

لال رنگ والے مربع کا رقبہ $=\frac{1}{4}$ مربع اکائی



شکل 8.6

آیئے ہم لال رنگ کے مربع کو دیکھتے ہیں۔ اس کے اندر دیے ہوئے مثلث (پیلے رنگ) کا رقبہ لال رنگ والے مربع کے رقبہ کا آدھا ہے۔ اس لیے



پیلے رنگ کے مثلث کا رقبہ $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ = مربع اکائی۔

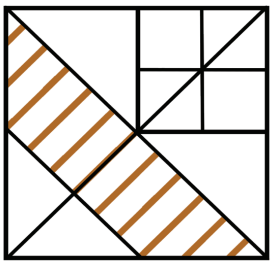
پیلے رنگ کے مثلث کا کتنا حصّہ لکیروں سے بھرا ہوا ہے؟

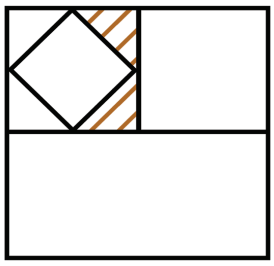
لکیروں سے بھرا ہوا حصّہ پیلے رنگ کے مثلث کے کل رقبے کے $\frac{3}{4}$ حصّے پر مشتمل ہے، کیا آپ دیکھ سکتے ہیں ایسا کیوں ہے؟

لکیروں سے بھرے ہوئے حصّے کا رقبہ $\frac{3}{32} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8}$ = مربع اکائی۔

اس طرح لکیروں سے بھرا ہوا حصّہ مکمل مربع کے رقبے کا $\frac{3}{32}$ ہے۔

؟ درج ذیل دی ہوئی ہر شکل میں بڑے مربع کا وہ حصّہ معلوم کیجیے جو کہ لکیروں سے بھرے ہوئے حصّے پر مشتمل ہے۔





ہم اگلے باب میں اس طرح کی مزید دل چسپ مثالیں حل کریں گے۔

ایک درمی خیرات (A Dramma-tic Donation)

درج ذیل مسئلہ بھاسکر آچاریہ دوم (Bhāskara II) کی کتاب لیلاوتی (جو 1150 عیسوی میں لکھی گئی ہے) سے ترجمہ کیا گیا ہے۔

"اے عقل مند! ایک کنجوس نے ایک فقیر کو ایک درم کا $\frac{3}{4}$ کا $\frac{2}{3}$ کا $\frac{1}{2}$ کا $\frac{1}{4}$ کا $\frac{1}{16}$ کا $\frac{1}{5}$ واں حصّہ دیا۔ اے بچّے! اگر تجھے ریاضی میں کسر کا علم ہے تو بتا، اس کنجوس نے فقیر کو کتنے کوڑیوں کے برابر خیرات دی؟"

"درم" اُس وقت استعمال ہونے والا ایک چاندی کا سکہ تھا۔ کہا جاتا ہے کہ 1 درم 1280 کوڑیوں کے برابر ہوتا تھا۔ اب دیکھتے ہیں کہ کنجوس آدمی نے درم کا کتنا حصہ فقیر کو دیا:

ایک درم کا $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4}$ واں حصّہ

مختصر کرنے پر ہمیں $\frac{6}{7680}$ حاصل ہوتا ہے۔

اس کو کم ترین شکل میں لانے کے بعد ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{6}{7680} = \frac{1}{1280}$$

یعنی، فقیر کو صرف ایک کوڑی کا سکہ دیا گیا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بھاسکر آچاریہ کے اس جواب میں مزاح کا پہلو بھی شامل ہے! کنجوس نے فقیر کو صرف سب سے کم قدر کا ایک سکہ دیا (یعنی ایک کوڑی)

بارہویں صدی کے آس پاس، ہندوستان کی مختلف ریاستوں میں کئی اقسام کے سکے رائج تھے۔ان میں سونے کے سکے (جنھیں دینار، گدین اور ہن وغیرہ کہا جاتا تھا)، چاندی کے سکے (جنھیں درم یا ٹنکا کہا جاتا تھا)، تانبے کے سکے (جنھیں کاسو، پن یا پانا اور ماشک کہا جاتا تھا) اور کوڑی کے سکے جسے (Cowrie shells) کہا جاتا تھا، سب سے زیادہ استعمال ہوتے تھے۔ ان سکوں کے درمیان تبادلہ کی شرحیں علاقہ، دور، معاشی حالات، وزن اور دھات کے خالص پن کے مطابق مختلف ہوسکتی تھیں۔

سونے کے سکے بہت قیمتی سمجھے جاتے تھے اور بڑے لین دین یا دولت کے ذخیرے کے لیے استعمال ہوتے تھے۔ چاندی کے سکے عام طور پر روزمرہ کے لین دین میں استعمال ہوتے تھے۔ تانبے کے سکے نسبتاً کم قیمت کے ہوتے تھے اور چھوٹے لین دین میں استعمال کیے جاتے تھے۔ کوڑی کے سکے سب سے کم مالیت کی کرنسی سمجھے جاتے تھے اور بہت معمولی لین دین یا بقایا رقم کے طور پر استعمال ہوتے تھے۔

اگر ہم فرض کریں 1 سونے کا دینار = 12 چاندی کے درم، 1 چاندی کا درم = 4 تانبے کے پن ، 1 تانبے کا پَن = 6 ماشک اور 1 پَن = 30 کوڑیاں، تو پھر،

$$1 \text{ تانبے کا پَن} = \frac{1}{48} \text{ سونے کا دینار} \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}\right)$$

1 کوڑی = _____ تانبے کے پن

1 کوڑی = _____ سونے کا دینار

تاریخ کی ایک جھلک

جیسا کہ آپ نے دیکھا، کسر اعداد کی ایک اہم قسم ہیں، جو روزمرہ زندگی کے مختلف مسائل جیسے مقداروں کو برابر برابر تقسیم کرنے اور بانٹنے میں بنیادی کردار ادا کرتی ہیں۔ غیر اکائی والی کسروں (Non-unit Fractions) کا عمومی تصوّر جس کو ہم آج استعمال کرتے ہیں اور جس میں جمع، تفریق، ضرب، تقسیم جیسے حسابی عمل (Arithmetic operations) آتے ہیں، زیادہ تر ہندوستان میں ترقی پائے ہیں۔ قدیم ہندوستانی ہندسی متون (Geometry texts)، کو شُلب سُوتر (*Śhulbasūtra*) کہا جاتا ہے، جو کہ تقریباً 800 ق م پرانی ہیں—ان متون میں مذہبی رسومات کے لیے یگیہ (یعنی آتش کدے) کی تعمیر سے متعلق ہندسی مسئلے حل کیے جاتے تھے اور ان میں غیر اکائی والے کسروں کا استعمال عام تھا، جیسا کہ ہم نے مثال 3 میں دیکھا۔

یہاں تک کہ 150 قبل مسیح تک آتے آتے ہندوستان کی مقبول عام ثقافت میں کسریں عوامی سطح پر رائج ہو چکی تھیں۔

اس بات کی شہادت ہمیں مشہور جین عالم اُماسوتی (Umasvati) کے فلسفیانہ کام میں کسروں کو کم ترین ارکان میں لانے کے واضح ذکر سے ملتی ہے۔

ہندوستانی ریاضی داں برہم گپت نے 628 عیسوی میں اپنی تصنیف برہما سْفُٹ سدھانت میں کسروں پر حسابی عمل (یعنی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کے عمومی اصول وضع کیے جو آج بھی استعمال ہوتے ہیں۔ ہم نے کسروں کو جمع اور تفریق کرنے کے طریقے پہلے ہی سیکھ لیے ہیں۔ عام کسروں کو ضرب دینے کے لیے برہم گپت نے لکھا ہے:

"دو یا دو سے زیادہ کسروں کے حاصلِ ضرب معلوم کرنے کے لیے ہم شمار کنندہ کے حاصل ضرب کو نسب نما کے حاصل ضرب سے تقسیم کرتے ہیں۔" (برہما سْفُٹ سدھانت، اشلوک: 12.1.3)

یعنی، $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

اسی طرح برہم گپت نے عام کسروں کی تقسیم کے لیے لکھا ہے:

"کسروں کی تقسیم کے لیے قاسم کے شمار کنندہ اور نسب نما کو آپس میں تبدیل کیا جاتا ہے؛ پھر مقسوم کے شمار کنندہ کو نئے شمار کنندہ سے ضرب کیا جاتا ہے اور نسب نما کو نئے نسب نما سے ضرب کیا جاتا ہے۔"

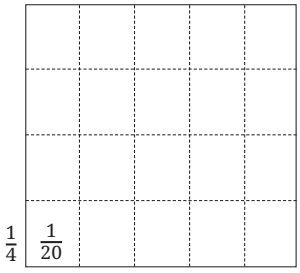
بھاسکر دوم نے 1150ء میں اپنی کتاب لیلاوتی میں برہم گپت کے مذکورہ بیان کو مقلوب شکل میں کچھ اس طرح واضح کیا ہے:

"ایک کسر کو دوسری کسر سے تقسیم کرنا، پہلی کسر کو دوسری کسر کے مقلوب سے ضرب دینے کے مترادف ہوتا ہے۔"

(لیلاوتی، اشلوک: 2.3.40)

ان دونوں بیانات سے مراد یہ ہے کہ کسر کی تقسیم کا عمومی فارمولا درج ذیل ہے:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$



بھاسکراول کی بصری تشریح کہ

$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

بھاسکر اول نے 629ء میں 499ء کے آریہ بھٹ کے کام پر اپنی شرح 'آریہ بھٹ بھاشیہ' میں کسروں کے ضرب کی جیومیٹریائی توضیح بیان کی ہے۔ (جیسا کہ ہم نے پہلے دیکھا) یعنی مربع کو اس کی لمبائی اور چوڑائی میں برابر تقسیم کر کے مستطیل بنانا۔

ہندوستان کے دوسرے بہت سے ریاضی داں جیسے شری دھر آچاریہ (750ء)، مہاویر آچاریہ (850ء) چترویدی پرتھودک سوامی (860ء) بھاسکر دوم (1150ء) نے کسروں کے حساب کے استعمال کو مزید فروغ دیا۔

ہندوستانی کسروں کے اصول اور ان پر حسابی عمل کے طریقے عرب اور افریقی ریاضی دانوں تک منتقل ہوئے اور ان کے ذریعے وہاں مزید ترقی ہوئی مثلاً مراکش (Morocco) کے معروف ریاضی داں ابو بکر الحصّار (1192ء) نے ان خیالات کو مزید فروغ دیا۔ یہ نظریہ عربوں کے ذریعے یورپ پہنچا، اور اگلی چند صدیوں

میں وہاں ترقی پاتا رہا۔ یورپ میں یہ نظریہ تقریباً 17 ویں صدی میں عام استعمال میں آیا اور اس کے بعد یہ دنیا بھر میں پھیل گیا۔ یہ نظریہ آج جدید ریاضی میں لازمی حیثیت رکھتا ہے۔

معلوم کیجیے

1. مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے:

$3 \div \frac{7}{9}$	$\frac{14}{4} \div 2$	$\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$	$\frac{14}{6} \div \frac{7}{3}$
$\frac{4}{3} \div \frac{3}{4}$	$\frac{7}{4} \div \frac{1}{7}$	$\frac{8}{2} \div \frac{4}{15}$	
$\frac{1}{5} \div \frac{1}{9}$	$\frac{1}{6} \div \frac{11}{12}$	$3\frac{2}{3} \div 1\frac{3}{8}$	

2. نیچے دیے گئے ہر سوال کے لیے اس عبارت کا انتخاب کیجیے جو اس کے حل کو بیان کرتی ہو۔ پھر اس کو کم ترین شکل میں لکھیے۔

(a) ماریہ نے اسکول کے لیے بنائے گئے تھیلوں کو سجانے کے لیے 8 میٹر فیتہ خریدا۔ اس نے ہر تھیلے پر $\frac{1}{4}$ میٹر فیتہ استعمال کیا اور سارا فیتہ ختم ہو گیا۔ اس نے کتنے تھیلے سجائے؟

(i) $8 \times \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

(iii) $8 \div \frac{1}{4}$ (iv) $\frac{1}{4} \div 8$

(b) 8 بِلّا (Badges) بنانے میں $\frac{1}{2}$ میٹر فیتہ استعمال ہوتا ہے۔ تو ہر بِلّے کے لیے استعمال کیے گئے فیتہ کی لمبائی کیا ہے؟

(i) $8 \times \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$

(iii) $8 \div \frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{2} \div 8$

(c) ایک نان بائی کو ایک روٹی بنانے کے لیے $\frac{1}{6}$ کلوگرام آٹا چاہیے۔ اس کے پاس 5 کلوگرام آٹا ہے۔ وہ کتنی روٹیاں بنا سکتا ہے؟

(i) $5 \times \frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6} \div 5$

(iii) $5 \div \frac{1}{6}$ (iv) 5×6

3. اگر 12 روٹیاں بنانے میں $\frac{1}{4}$ کلوگرام آٹا استعمال ہوتا ہے، تو 6 روٹیاں بنانے میں کتنا آٹا استعمال ہو گا؟

4. پتگنت (Patiganita)، کتاب جوشری دھر آچاریہ نے 9ویں صدی عیسوی میں لکھی، اس میں یہ مسئلہ مذکور ہے: ”دوست! غور کرنے کے بعد بتاؤ کہ وہ مجموعہ کیا ہو گا جو درج ذیل اعداد کو آپس میں جمع کرنے پر حاصل ہو گا؟ $1 \div \frac{1}{9}$, $1 \div \frac{1}{13}$, $1 \div \frac{1}{10}$, $1 \div \frac{1}{6}$ اور $1 \div \frac{1}{2}$“ دوست کو کیا جواب دینا چاہیے؟

5. میرا ایک ناول پڑھ رہی ہے جس میں 400 صفحات ہیں۔ اس نے ان صفحات کا $\frac{1}{5}$ حصہ کل پڑھا اور آج اس نے $\frac{3}{10}$ صفحات پڑھ لیے۔ اسے ناول مکمل کرنے کے لیے اب مزید کتنے صفحات پڑھنے ہوں گے؟

6. ایک کار 1 لیٹر پیٹرول میں 16 کلومیٹر چلتی ہے۔ $2\frac{3}{4}$ لیٹر پیٹرول میں وہ کتنی دور جائے گی؟

7. امرت پال نے چھٹیوں کے لیے ایک منزل منتخب کی۔ اگر وہ ٹرین سے جائے تو اسے وہاں پہنچنے میں $5\frac{1}{6}$ گھنٹے لگیں گے۔ اگر وہ ہوائی جہاز سے جائے تو صرف $\frac{1}{2}$ گھنٹہ لگے گا۔ تو ہوائی جہاز سے کتنے گھنٹے کی بچت ہو رہی ہے؟

8. مریم کی دادی نے ایک کیک بنایا۔ مریم اور اس کے بھائیوں نے $\frac{4}{5}$ حصہ کیک کھالیا۔ باقی کیک کو مریم کی تین سہیلیوں میں برابر تقسیم کر دیا گیا۔ ہر سہیلی کو کیک کا کتنا حصہ ملا؟

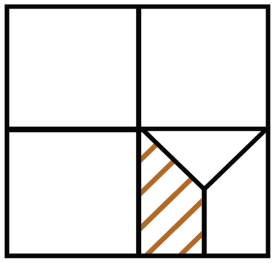
9. درج ذیل اختیارات میں سے وہ متبادل منتخب کیجیے جو $\left(\frac{565}{465} \times \frac{707}{676}\right)$ کے حاصل ضرب کو بیان کرتے ہیں:

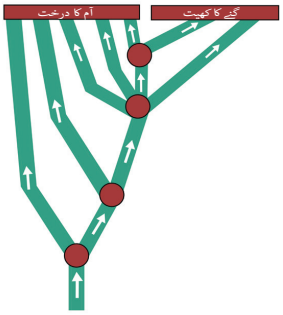
(a) $> \frac{565}{465}$ (b) $< \frac{565}{465}$

(c) $> \frac{707}{676}$ (d) $< \frac{707}{676}$

(e) > 1 (f) < 1

10. مکمل مربع کا کتنا حصّہ لکیروں سے بھرا ہوا ہے؟





شکل 8.7

11. چیونٹیوں کا ایک جھنڈ خوراک کی تلاش میں نکلا۔ تلاش کے دوران، وہ جھنڈ ہر مقام پر برابر برابر تقسیم ہوتا گیا (جیسا کہ شکل 8.7 میں دکھایا گیا ہے) اور خوراک کے دو ذرائع تک پہنچا۔ ایک آم کے درخت کے پاس اور دوسرے گنے کے کھیت کے پاس تو اصل جھنڈ کا کتنا کسری حصّہ خوراک کے ہر ذریعے تک پہنچا؟

12. $1-\frac{1}{2}$ کی قدر کیا ہوگی؟

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$?

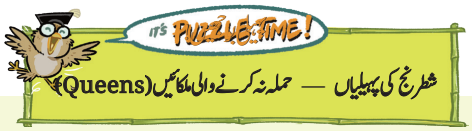
$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$?

ایک عمومی بیان دے کر اس کی وضاحت کیجیے۔

خلاصہ

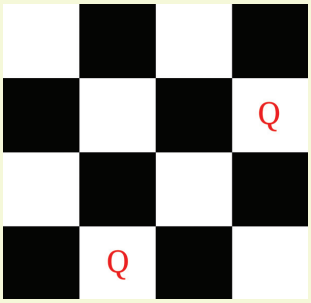
- برہم گپت کے مطابق کسروں کے ضرب کا فارمولا:
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$
- جب ہم کسروں کو ضرب دیتے ہیں تو اگر شمار کنندہ اور نسب نما میں کوئی مشترکہ جزو ضربی ہوں، تو ہم شمار کنندہ اور نسب نما کی ضرب سے پہلے انھیں مختصر (Cancel) کر دیتے ہیں پھر ضرب دیتے ہیں۔
- ضرب کے عمل میں — جب دونوں اعداد 0 اور 1 کے درمیان ہوں، تو حاصلِ ضرب 1 سے کم ہوگا۔ اگر دونوں میں سے کوئی ایک عدد 1 سے بڑا ہو، تو حاصلِ ضرب زیادہ ہوگا۔
- کسر $\frac{a}{b}$ کا مقلوب $\frac{b}{a}$ ہوتا ہے۔ جب ہم کسی کسر کو اس کے مقلوب سے ضرب دیتے ہیں تو حاصل ضرب 1 آتا ہے۔
- برہم گپت کے مطابق کسروں کی تقسیم کا فارمولا:
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$
- تقسیم کے عمل میں — جب قاسم 0 اور 1 کے درمیان ہو، تو خارج قسمت مقسوم سے بڑا ہوگا۔ اور جب قاسم 1 سے بڑا ہو تو مقلوب مقسوم سے چھوٹا ہوگا۔



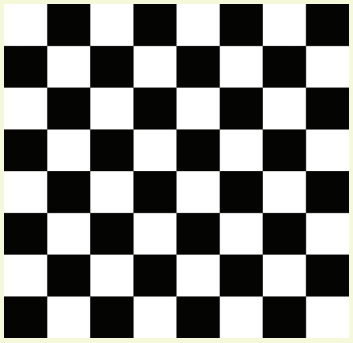
شطرنج کی پہیلیاں — حملہ نہ کرنے والی ملکائیں (Queens)

شطرنج ایک مشہور دو کھلاڑیوں کی حکمتِ عملی پر مبنی کھیل ہے۔ اس کھیل کی ابتدا ہندوستان میں ہوئی تھی۔ یہ 8×8 خانوں والے چوکور بورڈ پر کھیلا جاتا ہے۔ اس میں دو سیٹ کے مہرے ہوتے ہیں — کالے اور سفید — ہر کھلاڑی کے لیے ایک سیٹ۔ ہر مہرہ کس طرح حرکت کرے گا اور کھیل کے اصول کیا ہیں، یہ سب طے شدہ ہوتا ہے۔

یہاں ایک مشہور شطرنج پر مبنی پہیلی پیش ہے۔ اپنی موجودہ جگہ سے ملکہ افقی (Horizontal)، عمودی (Vertical) اور ترچھی (Diagonal) سمت میں حرکت کرسکتی ہے۔ 4 ملکہ اس طرح رکھیں کہ کوئی 2 ملکہ ایک دوسرے پر حملہ نہ کرسکیں مثلاً ذیل میں دکھایا گیا بندوبست درست نہیں ہے کیوں کہ دونوں ملکہ ایک ہی لکیر میں ہیں اور ایک دوسرے پر حملہ کرسکتی ہیں۔

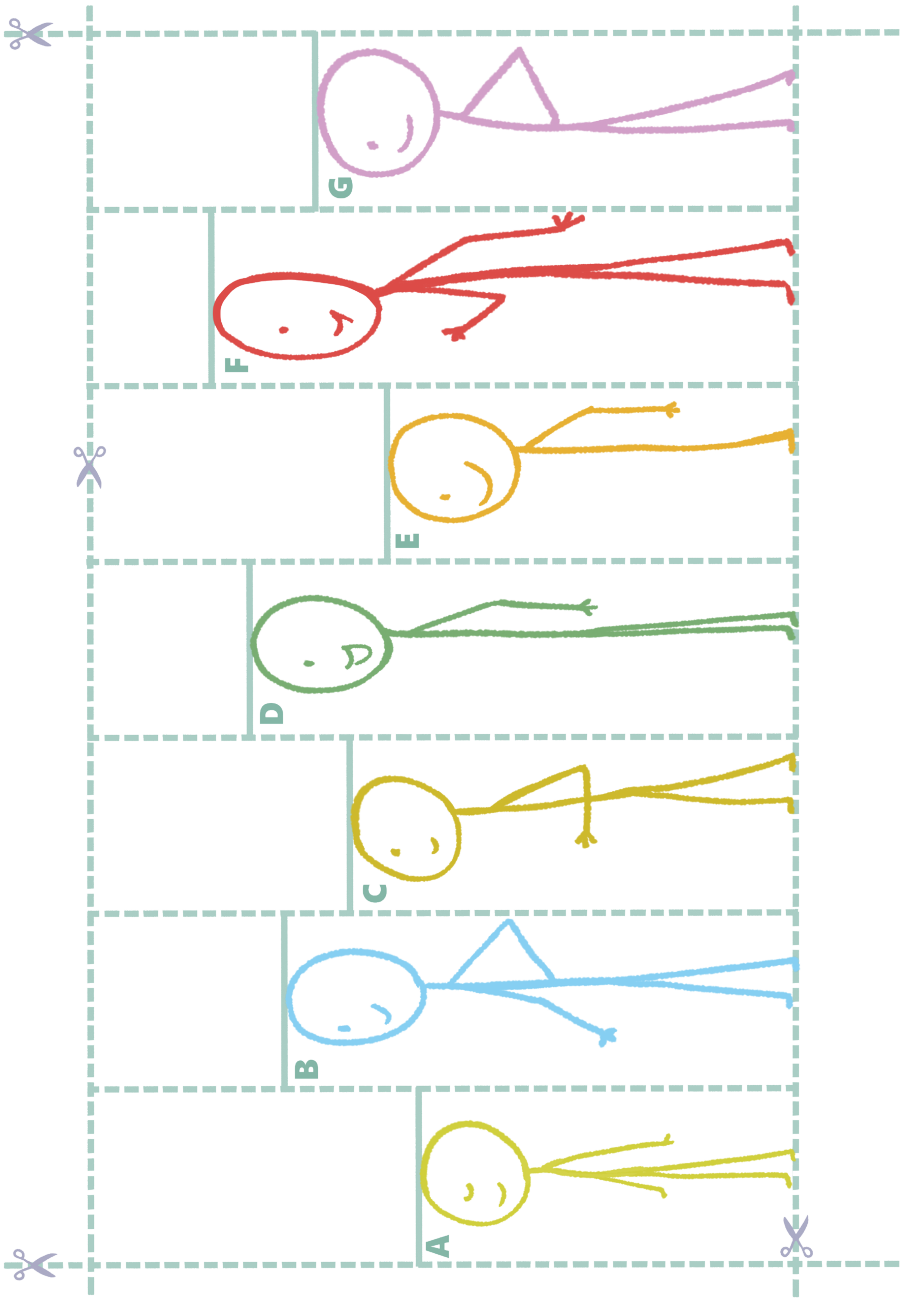


اب 8×8 کے اس بورڈ پر 8 ملکہ اس طرح رکھیے کہ کوئی 2 ملکہ ایک دوسرے پر حملہ نہ کرسکیں!





آموزشی مواد کے اوراق


G
F
E
D
C
B
A