ریاضی

دسویں جماعت کی نصابی کتاب

Tenth Standard

MATHEMATICS

10

حصّہ اوّل

(Part-I)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

KARNATAKA TEXTBOOK SOCIETY (R.)
6th Cross, Malleshwaram.
Bengaluru - 560 003.

5013- RIYAZEE (MATHEMATICS)
Textbook for Class X

ISBN 81-7450-737-X

پہلا اردو ایڈیشن

اپریل 2007 بیساکھ 1928

دیگر طباعت

فروری 2015 ماگھ 1936
اپریل 2019 چیتر 1941
فروری 2020 ماگھ 1941
جنوری 2021 پوش 1942
جنوری 2023 پوش 1944

PD 3T

© نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ، 2007

قیمت : ₹160.00

این سی ای آر ٹی واٹر مارک 80 جی ایس ایم کاغذ پر شائع شدہ

سکریٹری، نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ، شری اروندو مارگ، نئی دہلی نے شری وِرِنداون گرافکس پرائیویٹ لمیٹڈ، E-34 سیکٹر 7، نوئیڈا-201301 میں چھپوا کر پبلی کیشن ڈویژن سے شائع کیا۔

جُملہ حقوق محفوظ

- ناشر کی پہلے سے اجازت حاصل کیے بغیر، اس کتاب کے کسی بھی حصے کو دوبارہ پیش کرنا، یادداشت کے ذریعے بازیافت کے سسٹم میں اس کو محفوظ کرنا یا برقیاتی، میکانیکی، فوٹو کاپینگ، ریکارڈنگ کے کسی بھی دیگر ذریعے سے اس کی ترسیل کرنا منع ہے۔
- اس کتاب کو اس شرط کے ساتھ فروخت کیا جارہا ہے کہ اسے ناشر کی اجازت کے بغیر، اس شکل کے علاوہ جس میں کہ یہ چھاپی گئی ہے یعنی، اس کی موجودہ جلد بندی اور سرورق میں تبدیلی کرکے، تجارت کے طور پر نہ تو مستعار دیا جاسکتا ہے، نہ دوبارہ فروخت کیا جاسکتا ہے، نہ کرایہ پر دیا جاسکتا ہے اور نہ ہی تلف کیا جاسکتا ہے۔
- کتاب کے صفحہ پر جو قیمت درج ہے وہ اس کتاب کی صحیح قیمت ہے۔ کوئی بھی نظرثانی شدہ قیمت چاہے وہ ربر کی مہر کے ذریعے یا چپکی یا کسی اور ذریعے ظاہر کی جائے تو وہ غلط متصوّر ہوگی اور ناقابل قبول ہوگی۔

این سی ای آر ٹی کے پبلی کیشن ڈویژن کے دفاتر

این سی ای آر ٹی کیمپس
سری اروندو مارگ
نئی دہلی - 110016 **فون** 011-26562708

108,100 فٹ روڈ ہوسڈے کیرے ہیلی
ایکسٹینشن بناشنکری III اسٹیج
بینگلورو - 560085 **فون** 080-26725740

نوجیون ٹرسٹ بھون
ڈاک گھر، نوجیون
احمد آباد - 380014 **فون** 079-27541446

سی ڈبلیوسی کیمپس
بمقابل ڈھانکل بس اسٹاپ، پانی ہاٹی
کولکاتا - 700114 **فون** 033-25530454

سی ڈبلیوسی کامپلیکس
مالی گاؤں
گواہاٹی - 781021 **فون** 0361-2674869

اشاعتی ٹیم

ہیڈ پبلی کیشن ڈویژن	:	انوپ کمار راجپوت
چیف پروڈکشن آفیسر	:	ارون چتکارا
چیف بزنس منیجر	:	وپن دیوان
چیف ایڈیٹر (انچارج)	:	بگیان سُتار
ایڈیٹر	:	سید پرویز احمد
پروڈکشن اسسٹنٹ	:	راجیش پپّل

سرورق اور آرٹ
اروند رچاولہ

NOT TO BE REPUBLISHED © NCERT TBS

پیش لفظ

'قومی درسیات کا خاکہ —2005' میں سفارش کی گئی ہے کہ بچّوں کی اسکول کی زندگی، ان کی باہر کی زندگی سے ہم آہنگ ہونی چاہیے۔ یہ زاویۂ نظر، کتابی علم کی اس روایت کی نفی کرتا ہے جس کے باعث آج تک ہمارے نظام میں گھر اور سماج کے درمیان فاصلے حائل ہیں۔ نئے قومی درسیات کے خاکے پر مبنی نصاب اور درسی کتابیں اسی بنیادی خیال پر عمل آوری کی ایک کوشش ہے۔ اس کوشش میں مختلف مضامین کو ایک دوسرے سے الگ رکھنے اور رٹ کر پڑھنے کے طریقۂ کار کی حوصلہ شکنی بھی شامل ہے۔ ہمیں امید ہے کہ ان اقدامات سے قومی تعلیمی پالیسی 1986 میں مذکور 'تعلیم کے طفل مرکوز نظام' کی طرف مزید پیش رفت ہوگی۔

اس کوشش کی کامیابی کا انحصار اس پر ہے کہ سب ہی اسکولوں کے پرنسپل اور اساتذہ بچّوں میں اپنے تاثرات خود ظاہر کرنے اور ذہنی سرگرمیوں اور سوالوں کے ذریعے سیکھنے کی ہمّت افزائی کریں۔ ہمیں یہ ضرور تسلیم کرنا چاہیے کہ بچوں کو اگر موقع، وقت اور آزادی دی جائے تو وہ بڑوں سے حاصل شدہ معلومات سے وابستہ ہو کر، نئی معلومات مرتّب کرتے ہیں۔ آموزش کے دوسرے ذرائع اور محل وقوع کو نظر انداز کرنے کے بنیادی اسباب میں سے ایک اہم سبب مجوّزہ درسی کتاب کو امتحان کے لیے واحد ذریعہ بنانا ہے۔ بچّوں کے اندر تخلیقی صلاحیت اور پیش قدمی کے رجحان کو فروغ دینا اسی وقت ممکن ہے جب ہم آموزشی عمل میں بچّوں کو بحیثیت شریک کار قبول کریں اور اُن سے اسی طرح پیش آئیں۔ انھیں محض مقررہ معلومات کا پابند نہ سمجھیں۔

یہ مقاصد اسکول کے معمولات اور طریقۂ کار میں معقول تبدیلی کا مطالبہ کرتے ہیں۔ روزمرہ نظام الاوقات (Time-Table) میں لچیلا پن اُسی قدر ضروری ہے جتنی کہ سالانہ کیلنڈر کے نفاذ میں سخت محنت کی تاکہ مطلوبہ ایّام کو حقیقتاً تدریس کے لیے وقف کیا جا سکے۔ تدریس اور اندازۂ قدر کے طریقوں سے بھی اس امر کا تعین ہوگا کہ یہ درسی کتاب، بچوں میں ذہنی تناؤ اور اکتاہٹ کا ذریعہ بننے کے بجائے ان کی اسکولی زندگی کو خوش گوار بنانے میں کس حد تک مؤثر ثابت ہوتی ہے۔ نصابی بوجھ کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے نصاب سازوں نے مختلف سطحوں پر معلومات کی تشکیلِ نو اور اسے نیا رخ دینے کی غرض سے بچوں کی نفسیات

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اور تدریس کے لیے دستیاب وقت پر زیادہ سنجیدگی کے ساتھ توجہ دی ہے۔ اس مخلصانہ کوشش کو مزید بہتر بنانے کے لیے یہ درسی کتاب سوچنے اور محسوس کرنے کی تربیت، چھوٹے گروپوں میں بحث ومباحثہ کرنے اور عملاً انجام دی جانے والی سرگرمیوں کو زیادہ اوّلیت دیتی ہے۔

این سی ای آر ٹی اس کتاب کے لیے تشکیل دی جانے والی ''کمیٹی برائے درسی کتاب'' کی مخلصانہ کوششوں کی شکر گزار ہے۔ کونسل سائنس اور ریاضی کے مشاورتی گروپ کے چیئرمین پروفیسر جے۔ وی۔ نارلیکر اور اس کتاب کے خصوصی صلاح کاروں پی۔ سنک لیر اندرا گاندھی نیشنل اوپن یونیورسٹی نئی دہلی اور پروفیسر جی۔ پی دکشت (ریٹائرڈ) لکھنؤ یونیورسٹی لکھنؤ کی ممنون ہے۔ اس درسی کتاب کی تیاری میں جن اساتذہ نے حصّہ لیا، ہم ان کے متعلقہ اداروں کے بھی شکر گزار ہیں۔ ہم ان سب ہی اداروں اور تنظیموں کا بھی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنے وسائل، مآخذ اور عملے کی فراہمی میں فراخ دلی کا ثبوت دیا۔ ہم وزارت برائے فروغ انسانی وسائل کے شعبہ برائے ثانوی اور اعلیٰ ثانوی تعلیم کی جانب سے پروفیسر مرنال مری اور پروفیسر جی۔ پی۔ دیش پانڈے کی سربراہی میں تشکیل شدہ نگراں کمیٹی (مانیٹرنگ کمیٹی) کے اراکین کا بھی خصوصی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنا قیمتی وقت اور تعاون ہمیں دیا۔ ہم اس نصابی کتاب کے اردو ترجمے کی ذمے داری بخوبی انجام دینے کے لیے جامعہ ملیہ اسلامیہ نئی دہلی کے شکر گزار ہیں، خاص طور پر جامعہ ملیہ کے وائس چانسلر پروفیسر مشیر الحسن اور محترمہ رخشندہ جلیل کے ممنون اور شکر گزار ہیں جنھوں نے مرکز برائے جواہر لعل نہرو اسٹڈیز، جامعہ ملیہ اسلامیہ کے آؤٹ ریچ پروگرام کے ذریعے اس عمل میں رابطہ کار کے فرائض بخوبی انجام دیے۔ کونسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے محمد قاسم کی شکر گزار ہے۔ باضابطہ اصلاح اور اپنی اشاعت کے معیار کو مسلسل بہتر بنانے کے مقصد کی پابند ایک تنظیم کے طور پر این سی ای آر ٹی، تمام مشوروں اور آرا کا خیر مقدم کرتی ہے تاکہ کتاب کو مزید غور وفکر کے بعد اور زیادہ کارآمد اور بامعنی بنایا جا سکے۔

نئی دہلی
نومبر 2006

ڈائریکٹر
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

دیباچہ

کوٹھاری کمیشن کے زمانے سے ہی مختلف کمیٹیاں اسکول کے نصاب کو بچوں کے لیے بامعنی اور دلچسپ بنانے کی کوششوں میں مصروف رہی ہیں۔ کئی سال کے غور وخوض کے بعد جس فکر و بصیرت کا ارتقا ہوا اس کی روشنی میں ایک قومی درسیات کا خاکہ (NCF) 2005 کو آخری شکل دی گئی۔ اسی کوشش کے ایک حصے کے طور پر ریاضی کی تدریس کے لیے ایک نیشنل فوکس گروپ کی بھی تشکیل عمل میں آئی۔ اس گروپ کی رپورٹ جو 2005 میں منظر عام پر آئی۔ ریاضی کی تعلیم و تدریس کے سلسلے میں ایک مثبت اور تعمیری رویّے کی نشاندہی کی گئی ہے۔ اس رویّے کا خلاصہ یہ ہے کہ بچّے پہلے سے جانتے ہیں، وہ اسکول میں داخلے سے پہلے ہی اپنے پاس کی دنیا میں ہی فطری طور پر حساب کتاب کر سکتے ہیں۔ اسکول نصاب، تدریسی طریقہ اور درسی کتابوں وغیرہ کا ارتقا اسی معلومات کی بنیاد پر اس انداز سے کیا جائے کہ بچے ریاضی میں دلچسپی لیں، اس سے لطف اندوز ہوں اور یہ محسوس کریں کہ یہ مضمون ایک طریقہ استدلال ہے اور فقط فارمولوں کے حسابی طور پر اطلاق کا نام نہیں ہے۔ ضرورت اس بات کی ہے کہ طلبہ اور اساتذہ دونوں ریاضی کو ایک فطری چیز سمجھیں اور اس کو آس پاس کی عملی زندگی سے مربوط کریں۔ حساب پڑھاتے وقت بچوں میں یہ صلاحیت پیدا کی جائے کہ وہ اس مضمون کو حسب ضرورت عمومی بھی بنا سکیں اور خصوصی بھی، پیش آنے والے مسائل کو حل بھی کر سکیں اور بامعنی مسائل پر سوالات بھی کر سکیں نیز حسابی ثبوت کے پس پردہ جو منطقی سوچ ہوتی ہے اس کا اطلاق کر سکیں اور یہ سب کچھ ایک ایسے ماحول میں ہو جس کو بچے خود زندگی سے مربوط کر سکیں اور مضمون ان پر بوجھ نہ بنے۔ یہی وہ فکری اساس تھی جس پر پہلی سے لے کر بارہویں جماعت تک ریاضی کا نصاب تیار کیا گیا ہے اور جس کو عملی شکل دینے کے لیے مرتبین کی کمیٹی نے کوشش کی ہے۔ اس کے علاوہ اس درسی کتاب تیار کرتے وقت مندرجہ ذیل رہنما اصولوں کو بھی خاص طور سے پیش نظر رکھا گیا ہے۔

- مضمون کے مواد کو بچوں کی سابقہ معلومات اور تجربات سے مربوط کرنے کی ضرورت ہے۔
- اس کتاب میں جو زبان استعمال کی جائے وہ واضح، سادہ اور غیر مبہم ہو۔
- تصورات اور اقدامات بچوں کے ماحول اور ان کی روزمرہ کی زندگی میں پیش آنے والے واقعات سے مربوط ہوں۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

- تصورات کی تفہیم کے لیے جو مثالیں اور مشقیں دی جائیں ان میں یکسانیت ہوتا کہ مضمون کی دلچسپی برقرار رہے۔اس کا فائدہ یہ ہوگا کہ طلبہ اس تصور کو مختلف سیاق وسباق میں بار بار استعمال کریں گے۔
- بچوں میں اس بات کا شوق پیدا کیا جائے کہ وہ خود غور وفکر کریں، مسائل سے عہدہ برآ ہوں اور ان کے مختلف حل تلاش کر سکیں۔
- جہاں تک ممکن ہو، بچوں کے ذریعے نکالے گئے نتائج پر ان کی ستائش کی جائے۔
- جو ثبوت دیئے جائیں وہ ناصحانہ ہوں بلکہ ان کو یہ موقع حاصل ہو کہ وہ خود غور کریں اور استدلال کی صحت کو پرکھیں۔توجہ ایسے ثبوتوں پر مرکوز کی جائے، جن میں مختصر مگر واضح دلیل سے بچوں کی فکری اور عقلی قوتوں کو جلا ملے۔
- جہاں تک ممکن ہو ایک سے زیادہ ثبوت دیئے جائیں۔
- ثبوت اور حل ایسے استعمال کیے جائیں جو بچوں کے لیے اس بات میں مددگار ہوسکیں کہ وہ اپنی دلیلوں کو واضح اور منطقی انداز میں پیش کرنے کے اہل ہو جائیں۔
- جیومیٹری کی اشکال کے ساتھ ان کی ساخت اور تعمیر کا تجزیہ بھی ہو اور ان اقدامات کا ثبوت بھی جو مطلوبہ اشکال کی تعمیر میں اختیار کیے گئے ہیں۔نتیجتاً بچّوں کی تربیت بھی اسی طرح ہو کہ وہ اشکال کی تعمیر کے وقت خود بھی ایسا ہی کریں۔
- ایسے واقعات، تصاویر، کارٹون اور تاریخی حقایق کا موقع بہ موقع استعمال کیا جائے یا ان سے استفادہ کیا جائے جس سے بچوں کی دلچسپی میں اضافہ ہو۔
- جو بچے زیادہ دلچسپی لے رہے ہوں ان کے لیے مزید اختیاری مشقیں دی جائیں۔البتہ ان کو امتحان سے مستثنیٰ رکھا جائے۔
- بچوں کی جو بھی ضروریات ہوں ان کو پورا کیا جائے۔ان کے سوالات کے جوابات دیئے جائیں اور ان کے مسائل کو حل کیا جائے۔
- جہاں تک ممکن ہو دستوری اقدار کی تبلیغ وترویج کی جائے۔

کتاب کے مطالعے کے وقت آپ دیکھیں گے کہ درسی کتاب کے مرتبین کی کمیٹی نے ان تمام امور کو پیش نظر رکھا ہے اور یہ کتاب خاص طور پر اس بات کو پیش نظر رکھ کر مرتب کی گئی ہے کہ ریاضی کی کھوج کرنے کے لیے بچوں میں اشتیاق بھی پیدا کیا جائے اور ان کو مواقع بھی فراہم کیے جائیں۔اس طرح ان میں ریاضیاتی استدلال کی صلاحیت کو فروغ حاصل ہوگا۔اس کے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

علاوہ دو خصوصی ضمیمے بھی دیے گئے ہیں—یعنی ریاضی میں ثبوت اور ریاضیاتی ماڈلنگ—یہ زیادہ دلچسپی رکھنے والے بچوں کے مطالعے کے لیے ہیں اور سر دست ان کا مطالعہ اختیاری ہے۔ مستقبل میں، حسب ضرورت ان موضوعات کو نصاب میں شامل بھی کیا جا سکتا ہے۔

ماضی کی طرح یہ کتاب بھی ایک ٹیم کی کوششوں کا ثمرہ ہے۔ بہر کیف، اس مرتبہ کی ایک اہم خصوصیت یہ رہی ہے کہ مختلف قسم کے اسکولوں کے اساتذہ اس کتاب کے ارتقا کی ہر سطح پر شامل رہے ہیں۔ ہمیں یقین ہے اساتذہ ایسی مثالیں اور مشقیں تیار کریں گے جو بچوں کے تجربات اور معلومات سے ہم آہنگ ہوں جماعت کے تعلیم و تدریس کو بہتر بنانے میں مسلسل تعاون دیتے رہیں گے۔ آخر میں ہم یہ امید کرتے ہیں کہ اساتذہ اور طلبہ اپنی تجاویز اور مفید مشوروں سے ہمیں نوازتے رہیں گے اور درسی کتاب کو بہتر سے بہتر بنانے میں این سی ای آر ٹی کو اپنا تعاون دیتے رہیں گے۔

پروین سنک لیر
جی پی دیکشت
خصوصی صلاح کار
کمیٹی برائے درسی کتب

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

بھارت کا آئین

تمہید

ہَم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بَھارَت کو ایک مقتَدر، سمَاج وَادی، غیَر مَذہَبی عَوامی جَمہُوریَہ بنائیں اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں۔

انصاف سماجی، معاشی اور سیاسی

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت

مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع اور ان سب میں

اخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور سالمیت کا تیقن ہو۔

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر 1949ء کو یہ آئین ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں، وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

1۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''مقتدر عوامی جمہوریہ'' کی جگہ (3-1-1977 سے)

2۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''قوم کے اتحاد'' کی جگہ (3-1-1977 سے)

© KRBS NOT TO BE REPUBLISHED

کمیٹی برائے درسی کتاب

چیئرمین مشاورتی کمیٹی برائے ریاضی اور سائنس

جے وی نارلیکر، ایمرٹس پروفیسر صدر-یونیورسٹی سینٹر فار ایسٹرونومی اینڈ ایسٹروفیزیکس (آئی یو سی اے اے) گنیش کھنڈ پونے یونیورسٹی، پونہ

خصوصی صلاح کار

پی سنک لیئر، سابق ڈائرکٹر، این سی ای آر ٹی اور پروفیسر آف میتھ میٹکس، اندرا گاندھی نیشنل اوپن یونیورسٹی، نئی دہلی

جی۔پی دکشت، پروفیسر (ریٹائرڈ) لکھنؤ یونیورسٹی، لکھنؤ

چیف کوآرڈی نیٹر

حکم سنگھ، پروفیسر وصدر ریٹائرڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

اراکین

انجلی لال، پی جی ٹی، ڈی اے وی پبلک اسکول، سیکٹر 14، گڑگاؤں

اشوتوش۔کے۔وڑالوار، پروفیسر اور ہیڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

بی۔ایس۔اپادھیایہ، پروفیسر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن، میسور

جینتی دتہ، پی جی ٹی، سلوان پبلک اسکول، گڑگاؤں

مہندر شنکر، لیکچرر (ایس جی) (ریٹائرڈ)، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

منیکا اگروال، گرین پارک، نئی دہلی

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

این۔ڈی۔شکلا، پروفیسر (ریٹائرڈ)، لکھنؤ یونیورسٹی، لکھنؤ
رام اوتار، پروفیسر، (ریٹائرڈ) اور کنسلٹینٹ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی
راماباالاجی، ٹی جی ٹی، کے وی ایم ای جی اینڈ سنٹر، سینٹ جانس روڈ، بنگلور
ششی دھر جگدیشن، ٹیچر اور ممبر، گورننگ کونسل، سنٹر فار لرننگ، بنگلور
ایس کے ایس گوتم، پروفیسر ریٹائرڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی
وندیتا کالرا، لیکچرر، سرودیہ کنیا ودیالیہ، دسٹرکٹ سینٹر، وکاس پوری، دہلی
وی اے سجاتا، ٹی جی ٹی، کیندریہ ودیالیہ نمبر 1، واسکو، گوا
وی۔مادھوی، ٹی جی ٹی، سنسکرتی اسکول، چانکیہ پوری، نئی دہلی

ممبر کوآرڈی نیٹر

آر۔پی۔موریہ، ایسوسی ایٹ پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

@KEBS
NOT TO BE REPUBLISHED

اظہار تشکر

کونسل اس کتاب کی تیاری کے لیے مالا منی ٹی جی ٹی ایٹی انٹرنیشنل اسکول، سیکٹر-44، نوئیڈہ؛ میرا مہادیون ٹی جی ٹی، اٹامک انرجی سینٹرل اسکول، نمبر 4، انوشکتی نگر، ممبئی، رشمی رانا ٹی جی ٹی۔ ڈی اے وی پبلک اسکول پشپانجلی انکلیو پیتم پورہ دہلی محمد قاسم ٹی جی ٹی اینگلو عربک سینئر سیکنڈری اسکول اجمیری گیٹ دہلی ایس۔سی راؤ ٹو ٹی جی ٹی سینٹرل اسکول فار تبتن پیپل ویلی مسوری، راکیش کوشک ٹی جی ٹی سینک اسکول کونچ پورہ کرنال، اشوک کمار گپتا ٹی جی ٹی جواہر نوودیہ ودیالیہ وودھ نوئی ضلع گول پارہ، شنکر مشرا ٹی جی ٹی ڈمانٹریشن ملٹی پرپز اسکول آر آئی ای بھونیشور، اودے سنگھ لیکچرار ڈپارٹمنٹ آف میتھ میٹکس بی۔ایچ۔یو۔وارانسی، بی آر ہانڈہ ایمیریٹس پروفیسر آئی آئی ٹی نئی دہلی مونیکا سنگھ لیکچرار شری رام کالج دہلی یونیورسٹی لاج پت نگر نئی دہلی، جی شری ہری بابو ٹی جی ٹی جواہر نوودیہ ودیالیہ سرپور کاغذ نگر عدیلہ آباد، اجے کمار سنگھ ٹی جی ٹی رام جاس سینئر سیکنڈری اسکول نمبر 3، چاندنی چوک، دہلی، مکیش کمار اگروال، ٹی جی ٹی ایس ایس اے پی جی بی ایس ایس اسکول، سیکٹر-v، ڈاکٹر امبیڈکر نگر نئی دہلی کی شکر گزار ہے اس کے علاوہ کونسل پروفیسر حکم سنگھ ہیڈ (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی کا اس کتاب کی تیاری کے دوران ان کی خدمات کا بھی اعتراف کرتی ہے اور ان کی شکر گزار ہے۔

کونسل پبلی کیشن ڈویژن، این سی ای آر ٹی، ڈی ای ایس ایم کی انتظامیہ اور اے پی سی آفس کے تعاون کا بھی اعتراف کرتی ہے۔

NOT TO BE REPUBLISHED

بھارت کا آئین

حصہ III (دفعہ 12 سے 35)

(بعض شرائط، چند مستثنات اور واجب پابندیوں کے ساتھ)

بنیادی حقوق

کے ذریعہ منظور شدہ

حق مساوات

- قانون کی نظر میں اور قوانین کا مساویانہ تحفظ
- مذہب، نسل، ذات، جنس یا مقام پیدائش کی بنا پر عوامی جگہوں پر مملکت کے زیر انتظام
- سرکاری ملازمت کے لیے مساوی موقع
- چھوت چھات اور خطابات کا خاتمہ

حق آزادی

- اظہار خیال، مجلس، انجمن، تحریک، بود و باش اور پیشے کا
- سزا کے جرم سے متعلق بعض تحفظات کا
- زندگی اور شخصی آزادی کے تحفظ کا
- 6 سے 14 سال کی عمر کے بچوں کے لیے مفت اور لازمی تعلیم کا
- گرفتاری اور نظر بندی سے متعلق بعض معاملات کے خلاف تحفظ کا

استحصال کے خلاف حق

- انسانوں کی تجارت اور جبری خدمت کی ممانعت کے لیے
- بچوں کو خطرناک کام پر مامور کرنے کی ممانعت کے لیے

مذہب کی آزادی کا حق

- آزادی ضمیر اور قبول مذہب اور اس کی پیروی اور تبلیغ
- مذہبی امور کے انتظام کی آزادی
- کسی خاص مذہب کے فروغ کے لیے ٹیکس ادا کرنے کی آزادی
- کلی طور سے مملکت کے زیر انتظام تعلیمی اداروں میں مذہبی تعلیم یا مذہبی عبادت کی آزادی

ثقافتی اور تعلیمی حقوق

- اقلیتوں کی اپنی زبان، رسم خط یا ثقافت کے مفادات کا تحفظ
- اقلیتوں کو اپنی پسند کے تعلیمی ادارے کے قیام اور ان کے انتظام کا حق

قانونی چارہ جوئی کا حق

- سپریم کورٹ یا کورٹ کی جانب سے ہدایات، احکام یا رٹ کے اجرا کو تبدیل کرانے کا حق

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

فہرست

	پیش لفظ	*iii*
	دیباچہ	*v*
1۔	**حقیقی اعداد (RealNumbers)**	**1**
1.1:	تعارف	1
1.2:	حساب کا بنیادی مسئلہ	1
1.3:	غیر ناطق اعداد پر نظر ثانی	6
1.4:	خلاصہ	10
2۔	**کثیر رکنیاں (Polynomials)**	**11**
2.1:	تعارف	11
2.2:	کثیر رکنی کے صفر کا جیومیٹرائی مفہوم	12
2.3:	کثیر رکنی کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق	20
2.4:	خلاصہ	25
3۔	**دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑے (Pairof lLinear Equationslin Two Variables)**	**26**
3.1:	تعارف	26
3.2:	خطی مساواتوں کے جوڑے کا گرافی حل	27
3.3:	خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کرنے کے الجبرائی طریقے	32
3.3.1:	بدل کا طریقہ	32
3.3.2:	اخراج کا طریقہ	37
3.4:	خلاصہ	41
4۔	**دو درجی مساواتیں (QuadraticlEquations)**	**43**
4.1:	تعارف	43
4.2:	دو درجی مساواتیں	44
4.3:	اجزائے ضربی کے طریقے سے دو درجی مساوات کا حل	48
4.4:	جذروں کی نوعیت	51
4.5:	خلاصہ	55

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5۔	**حسابی تصاعد (ArithmeticlProgression)**	**56**
	5.1: تعارف	56
	5.2: حسابی تصاعد	58
	5.3: AP کا nواں رکن	64
	5.4: AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع	72
	5.5: خلاصہ	83
6۔	**مثلثات (Triangles)**	**84**
	6.1: تعارف	84
	6.2: مشابہ اشکال	85
	6.3: مثلثوں کی مشابہت	90
	6.4: مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں	97
	6.5: خلاصہ	110
7۔	**مختص جیومیٹری (CoordinatelGeometry)**	**111**
	7.1: تعارف	111
	7.2: فاصلہ فارمولہ	112
	7.3: سیکشن فارمولہ	119
	7.4: خلاصہ	126
ضمیمہ AI: ریاضی میں ثبوت (lProofslinlMathematics)		**127**
	A1.1: تعارف	127
	A1.2: ریاضیاتی بیانات پر نظر ثانی	128
	A1.3: استخراجی استدلال	132
	A1.4: قیاس، مسئلے، ثبوت اور ریاضیاتی استدلال	134
	A1.5 : بیان کا منفی	139
	A1.6 : بیان کا معکوس	143
	A1.7 : تضاد کے ذریعے ثبوت	146
	A1.8 : خلاصہ	150
جوابات/اشارے		**151**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



1 حقیقی اعداد (REAL NUMBERS)

1.1 تعارف

نویں جماعت میں آپ نے حقیقی اعداد کی دنیا کی تلاش کی اور غیر ناطق سے آپ کا سابقہ ہوا۔ اس باب میں ہم حقیقی اعداد کا مطالعہ جاری رکھیں گے۔ سیکشن 1.2 کو ہم مثبت صحیح اعداد کی اہم خصوصیات سے شروع کریں گے جسے اقلیدس کا تقسیم الگورتھم اور حساب کا بنیادی مسئلہ کہتے ہیں۔

دوسری طرف حساب کے بنیادی مسئلے کا تعلق مثبت صحیح اعداد کی ضرب سے ہے۔ آپ پہلے سے ہی واقف ہیں کہ ہر ایک مرکب عدد کو ایک مخصوص طریقے سے مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یہ اہم حقیقت ہی حساب کا بنیادی مسئلہ ہے۔ یہ نتیجہ بھی سمجھنے اور بیان کرنے میں کافی آسان ہے۔ اور ریاضی کے میدان میں اس کے گہرے اور اہم استعمالات ہیں۔ ہم حساب کے بنیادی مسئلے کا استعمال ہم کئی اعداد کی غیر ناطقیت کو ثابت کرنے میں بس کا استعمال کریں گے۔ جس کا مطالعہ آپ سے نویں جماعت میں کیا ہے۔ جیسے $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ اور $\sqrt{5}$ آیئے اب ہم اپنے مطالعہ کو شروع کرتے ہیں۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 حساب کا بنیادی مسئلہ

سابقہ کلاسوں میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی فطری عدد کو آپ اس کے مفرد اجزائے ضربی کی شکل میں لکھ سکتے ہیں، مثال کے طور پر $2 = 2$، $4 = 2 \times 2$، $253 = 11 \times 23$ اور آگے تک، آیئے اب ہم فطری عدد کو ایک دوسرے نظریہ سے دیکھتے ہیں یعنی کیا کسی فطری عدد کو مفرد اعداد کی ضرب کے ذریعے حاصل کیا جا سکتا ہے؟ آیئے دیکھتے ہیں۔

مفرد اعداد کا کوئی بھی مجموعہ لیجئے جیسے 2, 3, 7, 11 اور 23، اگر ہم ان میں کچھ یا تمام اعداد کو ضرب کریں، جس میں اعداد کی تکرار کی کوئی قید نہیں ہو، تو ہم مثبت صحیح اعداد کا ایک بہت بڑا مجموعہ حاصل کر سکتے ہیں (درحقیقت لامحدود) آیئے ان میں سے کچھ کی فہرست مندرجہ ذیل میں بتاتے ہیں۔

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$ $\quad$ $7 \times 11 \times 23 = 1771$

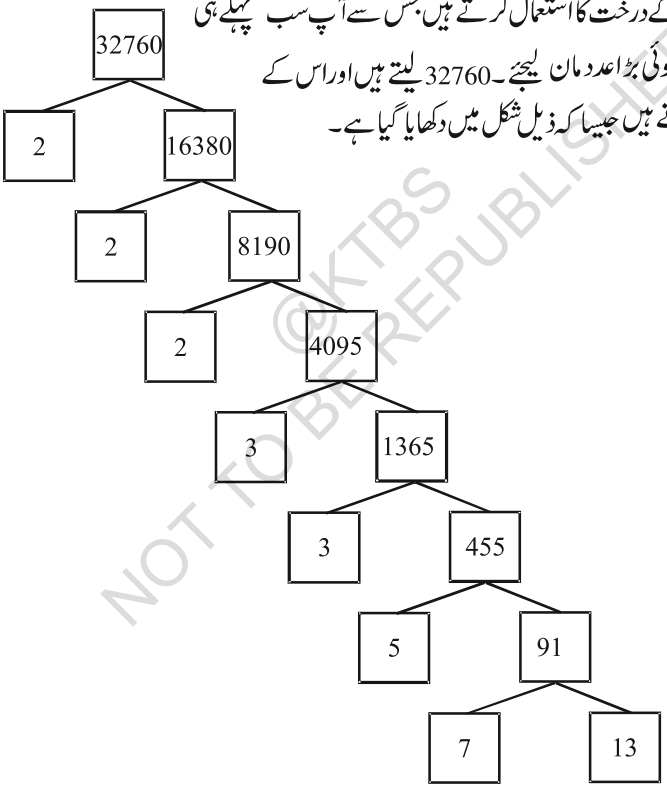
$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$ $\quad$ $2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

وغیرہ $\quad$ $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

اب فرض کر لیجئے کہ آپ کے مفرد اعداد کے مجموعہ میں تمام ممکنہ مفرد اعداد شامل ہیں۔اس مجموعہ کے سائز کے بارے میں آپ کا کیا اندازہ ہے؟ کیا اس میں محدود صحیح اعداد ہیں یا لامحدود؟ درحقیقت اس میں لامحدود مفرد اعداد ہیں۔اس لئے اگر ہم ان تمام مفرد اعداد اور ان کے تمام ممکنہ حاصل ضربوں پر مشتمل کریں اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم اس طریقہ سے تمام مرکب اعداد بھی حاصل کر سکتے ہیں؟ آپ کیا سوچتے ہیں؟ کیا آپ یہ سوچتے ہیں کہ ایک ایسا مرکب عدد ہو سکتا ہے جو مفرد اعداد کی قوتوں (Power) کا حاصل ضرب نہ ہو؟ اس سے پہلے کہ ہم اس کا جواب دیں آیئے مثبت صحیح اعداد کے اجزائے ضربی بنائیں

یعنی اس سے قبل جو ہم نے کیا ہے اس کا برعکس کریں۔

ہم اجزائے ضربی کے درخت کا استعمال کرتے ہیں جس سے آپ سب پہلے ہی سے واقف ہیں۔آیئے کوئی بڑا عدد مان لیجئے۔32760 لیتے ہیں اور اس کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں جیسا کہ ذیل شکل میں دکھایا گیا ہے۔



©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

اس طرح سے ہم نے 32760 کے اجزائے ضربی مفرد اعداد کے حاصل ضرب $2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times13$ کی شکل میں معلوم کیجئے یعنی $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ یہ مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل ہے۔آیئے ایک دوسرا عدد لیتے ہیں جیسے 123456789 اس کو ہم $3^2 \times 3803 \times 3607$ کی طرح لکھ سکتے ہیں بے شک آپ کو جانچ کرنا ہوگا کہ 3803 اور 3607 مفرد ہیں !(اس کو آپ خود دوسرے بہت سے فطری اعداد کے لئے کوشش کیجئے) اس سے ہمیں ایک Conjecture قیاس حاصل ہوتا ہے کہ ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

درحقیقت یہ بیان صحیح ہے اور اسے ہم **حساب کا بنیادی مسئلہ** کہتے ہیں کیونکہ صحیح اعداد کے مطالعہ کے لئے اس کی بنیادی حیثیت ہے۔ آیئے اب ہم رسمی طور پر اس مسئلہ کو بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 1.1 حساب کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of Arithmetic) :- ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب (اجزائے ضربی) کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یہ اجزائے ضربی میں (تحلیل) اظہار منفرد ہوتا ہے۔ بھلے ہی مفرد اجزائے ضربی کی ترتیب مختلف ہو۔



کارل فریڈرک گاس
(1777-1855)

مسئلہ 1.2 کا معادل بیان سب سے پہلے اقلیدس کے عناصر کی کتاب IX میں موضوعہ 14 کے طور پر ریکارڈ کیا گیا ہے۔ بعد میں اسے حساب کے بنیادی مسئلہ کے طور پر جانا جانے لگا۔ لیکن اس کا پہلا صحیح ثبوت کارل فریڈرک گاس (Carl Friedrich Gauss) نے *Disquisitiones Arithmeticae* میں دیا۔ گاس کو اکثر ریاضی کے شہزادے کے طور پر جانا جاتا ہے اور اس کا نام ابھی تک کے دنیا کے 3 بڑے ریاضی دانوں میں شامل ہوتا ہے۔ فریڈرک گاس، نیوٹن (Newton) اور ارشمدس (Archimedes) وغیرہ۔ انہوں نے سائنس اور ریاضی میں بنیادی تعاون دیا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حساب کے بنیادی مسئلے کے مطابق ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ درحقیقت اس میں بھی زیادہ اس مسئلے کی رو سے دیے ہوئے کسی مرکب عدد کے اجزائے ضربی ایک مخصوص (منفرد) طریقہ سے مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں بنائے جا سکتے ہیں۔ سوائے اس ترتیب کے جس میں مفرد اعداد واقع ہوتے ہیں یعنی کسی بھی دیے ہوئے مرکب کو ایک اور صرف ایک ہی طریقے سے مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ جب تک کے ہم اس کے مفرد اعداد کی ترتیب پر غور نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر ہم $7 \times 5 \times 3 \times 2$ اور $2 \times 3 \times 5 \times 7$ کو ایک ہی سمجھتے ہیں یا اس کے علاوہ اور بھی کسی ترتیب میں ہوں۔ اس حقیقت کو ہم مندرجہ ذیل شکل میں بیان کرتے ہیں۔

فطری اعداد کی مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل منفرد (ایکتا) ہے سوائے اس کے اجزائے ضربی کی ترتیب کے۔

عمومی طور پر ایک دیے ہوئے مرکب عدد x کے ہم اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں $x = p_1 p_2 \dots p_n$، جہاں $p_1, p_2, p_3 \dots$ فطری اعداد

ہیں جو بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھے ہیں۔یعنی $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$. اگر ہم یکساں مفرد اعداد کو ملائیں تو ہمیں مفرد اعداد کی قوت حاصل ہوگی مثال کے طور پر،

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

جب ہم نے ایک بار طے کرلیا کے ترتیب بڑھتی ہوئی ہوگی تب وہ طریقہ جس میں سے عدد کے اجزائے ضربی ہوں گے منفرد ہوگا ۔

حساب کے بنیادی مسئلے کے ریاضی اور دوسرے میدانوں میں بہت سے استعمال ہیں۔آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: اعداد 4^n پر غور کیجئے جہاں n ایک طبعی عدد ہے، جانچ کیجئے کہ آیا n کی کوئی ایسی قدر ہے جن کے لئے 4^n کا اختتام صفر پر ہو۔

حل: اگر عدد 4^n کسی بھی n کے لیے ہندسہ صفر پر ختم ہوتا ہے تب یہ 5 سے تقسیم ہوگا یعنی 4^n مفرد اجزائے ضربی میں مفرد عدد 5 شامل ہوگا یہ ممکن نہیں ہے کیونکہ $4^n = (2)^{2n}$ اس لئے 4^n کا مفرد جز وضربی 2 ہے۔اس لئے حساب کے بنیادی مسئلے کی انفرادیت سے یہ طے ہوجاتا ہے کہ 4^n کے مفرد اجزائے ضربی میں 2 کے علاوہ کوئی دوسرا مفرد عدد نہیں ہے۔اس لئے ایسا کوئی بھی طبعی عدد n نہیں ہے جس کے لئے 4^n ہندسہ صفر پر ختم ہو۔

سابقہ کلاسوں میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ حساب کے بنیادی مسئلہ کو استعمال کر کے دو مثبت صحیح اعداد کا HCF اور LCM کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔جبکہ ہم اس مسئلہ کے بارے میں کچھ جانتے نہیں تھے۔

اس طریقہ کو ہم **مفرد اجزائے ضربی کا طریقہ** بھی کہتے ہیں۔آیئے ایک مثال کے ذریعہ اس طریقہ کو دہراتے ہیں۔

مثال 2: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے 6 اور 20 کا LCM اور HCF معلوم کیجئے۔

حل: $6 = 2^1 \times 3^1$ اور $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

آپ معلوم کرسکتے ہیں کہ $HCF\,(6,20) = 2$ ہے اور $LCM\,(6,20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ہے جیسا کہ آپ سابقہ کلاسوں میں کرچکے ہیں۔

نوٹ کیجئے کہ $HCF\,(6, 20) = 2^1$ **اعداد میں موجود ہر ایک مشترک مفرد اجزائے ضربی کی قلیل قوت کا حاصل ضرب۔**

$LCM\,(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ **اعداد میں شامل ہر ایک مفرد اجزائے ضربی کی اعظم قوت کا حاصل ضرب۔**

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

مذکورہ بالا مثال سے آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ $\text{HCF}(6,20)\times\text{LCM}(6,20)=6\times20$ درحقیقت ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لئے $\text{HCF}\ (a,b)\times\text{LCM}\ (a,b)=a\times b$ اس نتیجہ کے استعمال سے ہم دو مثبت صحیح اعداد کا LCM معلوم کر سکتے ہیں اگر ہم دونوں مثبت اعداد کا HCF پہلے ہی معلوم کر چکے ہوں۔

مثال 3: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے 96 اور 404 کا HCF معلوم کیجئے اور پھر LCM بھی معلوم کیجئے۔

حل: 96 اور 404 کے مفرد اجزائے ضربی سے ہمیں ملتا ہے۔

$$96=2^5\times3,\qquad 404=2^2\times101$$

اس لئے ان دو صحیح اعداد کا HCF $=2^2=4$ ہے

$$\text{LCM}(96,404)=\frac{96\times404}{\text{HCF}(96,404)}=\frac{96\times404}{4}=9696$$

مثال 4: مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ کو استعمال کر کے 6, 72 اور 120 کا HCF اور LCM معلوم کیجئے۔

حل:

$$6=2\times3,$$
$$72=2^3\times3^2$$
$$120=2^3\times3\times5$$

یہاں 2^1 اور 3^1 مشترک اجزائے ضربی 2 اور 3 کی بالترتیب اصغر (سب سے چھوٹی) قوتیں ہیں۔

اس لئے،
$$\text{HCF}(6,72,120)=2^1\times3^1$$
$$=2\times3$$
$$=6$$

2^3, 3^2 اور 5^1 مفرد اجزائے ضربی 2, 3 اور 5 بالترتیب اعظم قوتیں ہیں جو تینوں اعداد میں شامل ہیں۔

اس لئے،
$$\text{LCM}(6,72,120)=2^3\times3^2\times5^1=360$$

ریمارک: نوٹ کیجئے $6\times72\times120\neq\text{HCF}\ (6,72,120)\times\text{LCM}\ (6,72,120)$. اس لئے تین اعداد کا حاصل ضرب ان کے HCF اور LCM کے حاصل ضرب کے برابر نہیں ہے۔

مشق 1.1

1۔ مندرجہ ذیل ہر ایک عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر لکھیے۔

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

NOT TO BE @KTBS REPUBLISHED

2۔ مندرجہ ذیل صحیح اعداد کے جوڑوں کا HCF اور LCM معلوم کیجئے اور تصدیق کیجئے کہ

دونوں اعداد کا حاصل ضرب = LCM × HCF

(i) 26 اور 91 (ii) 510 اور 92 (iii) 336 اور 54

3۔ مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ کے استعمال سے مندرجہ ذیل صحیح اعداد کا LCM اور HCF معلوم کیجئے

(i) 12, 15 اور 21 (ii) 17 , 23 اور 29 (iii) 8 , 9 اور 25

4۔ دیا ہوا ہے HCF (306 , 657) = 9، LCM (306 , 657) معلوم کیجئے۔

5۔ جانچ کیجئے آیا 6^n کسی فطری عدد n کے لئے ہندسہ صفر پر ختم ہوتا ہے؟

6۔ تشریح کیجئے کہ کیوں $7 \times 11 \times 13 + 13$ اور $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ مرکب اعداد ہیں؟

7۔ کھیل کے ایک میدان کے چاروں طرف ایک دائری راستہ ہے۔ سونیا میدان کا ایک چکّر لگانے میں 18 منٹ لیتی ہے جبکہ روی ایک چکّر 12 منٹ میں پورا کر لیتا ہے۔ فرض کیجئے کہ دونوں ایک مقام سے ایک ہی سمت میں ایک وقت چلنا شروع کرتے ہیں۔ کتنے منٹ بعد وہ دونوں ابتدائی مقام پر دوبارہ ملیں گے؟

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

1.3 غیر ناطق اعداد پر نظر ثانی

نویں کلاس میں آپ کو غیر ناطق اعداد اور ان کی خصوصیات سے متعارف کرایا گیا تھا۔ آپ نے ان کے وجود کے بارے میں مطالعہ کیا اور آپ نے یہ بھی سیکھا کہ کس طرح دونوں ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر حقیقی اعداد کی تشکیل کرتے ہیں۔ آپ نے غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر پلاٹ کرنا بھی سیکھا۔ لیکن ہم نے یہ ثابت نہیں کیا کہ یہ غیر ناطق ہیں۔ اس سیکشن میں ہم یہ ثابت کریں گے کہ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ اور عمومی طور پر $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے جہاں p مفرد ہے۔ ایسے ثبوت میں ہم جس ایک مسئلہ کا استعمال کریں گے وہ ہے حساب کا بنیادی مسئلہ

یاد کیجئے کہ ایک عدد 's' غیر ناطق اعداد کہلاتا ہے اگر اس کو '$\frac{p}{q}$' کی شکل میں نہ لکھا جا سکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$۔ غیر ناطق اعداد کی کچھ مثالیں جس سے آپ پہلے ہی واقف ہیں۔

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots$ وغیرہ۔

اس سے پہلے کہ ہم یہ ثابت کریں کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔ ہمیں ایک مسئلے کی ضرورت ہے جبکہ ثبوت کی بنیاد حساب کے بنیادی مسئلہ پر ہے۔

مسئلہ 1.2: مان لیجئے p ایک مفرد عدد ہے اگر p یہ a^2 کو تقسیم کرتا ہے تب p، a کو بھی تقسیم کرے گا، جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

* ثبوت: مان لیجئے a کے مفرد اجزائے ضربی مندرجہ ذیل ہیں۔

$a = p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ جہاں $p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ مفرد ہیں لیکن ضروری نہیں کہ یہ مختلف ہوں۔

اس لئے $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$

اب ہمیں دیا ہوا ہے کہ p، a^2 کو تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے حساب کے بنیادی مسئلے کی رو سے یہ پتہ چلتا ہے p یہ a^2 کے مفرد اجزائے ضربی کا ایک جز ہے لیکن حساب کے بنیادی مسئلے کی انفرادیت کو استعمال کر کے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ a^2 کے مفرد اجزائے ضربی صرف $p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ ہیں۔ اس لئے p، $p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ میں سے ایک ہے اب کیونکہ $a = p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ $a, p,$ کو تقسیم کرتا ہے

اب ہم $\sqrt{2}$ کو غیر ناطق ثابت کرنے کے لئے تیار ہیں

اس ثبوت کی بنیاد جس تکنیک پر ہے اسے 'تضاد کا ثبوت' کہتے ہیں (اس تکنیک کو ضمیمہ **1** میں تفصیل سے بیان کیا گیا ہے)

مسئلہ 1.3: $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔

ثبوت: آیئے فرض کرتے ہیں کہ $\sqrt{2}$ ناطق ہے۔

اس لئے ہم صحیح اعداد r اور $s(\neq 0)$ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$

مان لیجئے r اور s میں ایک کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی ہے تب ہم اس مشترک جزو ضربی سے تقسیم کر کے $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حاصل کرتے ہیں۔ جہاں a اور b باہمی مفرد (Coprime) ہیں

اس لئے $b\sqrt{2} = a$

* یہ امتحان کے نقطۂ نظر سے نہیں ہے۔

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

دونوں طرف مربع کرنے اور دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $2b^2 = a^2$ س لئے 2، یہ a^2 کو تقسیم کرتا ہے۔
اب مسئلہ 1.3 کی رو سے یہ کہتے ہیں کہ 2 یہ a کو تقسیم کرتا ہے۔

اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں $a = 2c$ کسی صحیح عدد c کے لئے، a کی جگہ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے $2b^2 = 4c^2$ یعنی $b^2 = 2c^2$،
اس کا مطلب ہے کہ 2 یہ b^2 کو بھی تقسیم کرتا ہے اس لئے 2 یہ b کو بھی تقسیم کرے گا (دوبارہ مسئلہ 1.3 کی رو سے جس میں $p = 2$ ہے) اس لئے a اور b میں 2 ایک مشترک جزوضربی ہے۔

لیکن یہ تضاد ہے کیونکہ ہم نے مانا تھا کے a اور b میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزوضربی نہیں ہے۔ اس تضاد سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ہم نے جو مانا تھا وہ غلط تھا یعنی کہ $\sqrt{2}$ ناطق ہے غلط ہے۔

اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے

مثال 5: ثابت کیجئے $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے

حل: آیئے اس کے برخلاف فرض کرتے ہیں کہ $\sqrt{3}$ ناطق ہے یعنی $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ جہاں a اور b $(\neq 0)$ دو صحیح اعداد معلوم کرسکتے ہیں

مان لیجئے a اور b میں 1 کے علاوہ ایک مشترک جزوضربی ہے۔ تو ہم اس مشترک جزوضربی سے تقسیم کردیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ a اور b، ہم مفرد ہیں

اس لئے $b\sqrt{3} = a \cdot$

دونوں طرف مربع کرنے اور ترتیب دینے پر ہمیں ملتا ہے $3b^2 = a^2$

اس لئے a^2 یہ 3 سے تقسیم ہوجائیگا اور مسئلہ 1.3 کی رو سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ a بھی 3 سے تقسیم ہوجائیگا۔

اس لئے ہم $a = 3c$ لکھ سکتے ہیں جہاں c کوئی صحیح عدد ہے۔

مساوات (1) میں a کی جگہ رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$3b^2 = 9c^2$$
$$b^2 = 3c^2$$

اس کا مطلب ہے کہ b^2 بھی 3 سے تقسیم ہوجائے گا۔ اس لئے b بھی 3 سے تقسیم ہوجائیگا۔ (مسئلہ 1.3 کی رو سے جب $p = 3$)

اس لئے a اور b کم سے کم 3 مشترک جزوضربی رکھتا ہے۔

لیکن یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ a اور b باہمی مفرد ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اور یہ تضاد اس لئے ہوا کہ ہم نے غلط فرض کیا تھا کہ $\sqrt{3}$ ناطق ہے۔لہٰذا، یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

نویں کلاس میں ہم نے بیان کیا تھا

- کہ ایک ناطق اور غیر ناطق عدد کا حاصل جمع اور فرق غیر ناطق ہوتا ہے اور
- ایک غیر صفر اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب اور حاصل تقسیم غیر ناطق ہوتا ہے۔

یہاں ہم کچھ مخصوص حالات کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 6 : ثابت کیجئے کہ $5-\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

حل: آیئے اس کے برخلاف فرض کرتے ہیں کہ $5-\sqrt{3}$ ناطق ہے

یعنی ہم دو باہم مفرد اعداد a اور b معلوم کر سکتے ہیں $(b \neq 0)$ جن کے لئے $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ہو۔

اس لئے $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ ہے

اس مساوات کو دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں ملتا ہے $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}=\frac{5b-a}{b}$

کیونکہ a اور b صحیح اعداد ہیں اس لئے $5-\frac{a}{b}$ ناطق ہے۔اور اس لئے $\sqrt{3}$ بھی ناطق ہے۔

لیکن یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

یہ تضاد اس لئے ہوا کیونکہ ہم نے غلط مانا تھا کہ $5-\sqrt{3}$ ناطق ہے۔

اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $5-\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔

مثال 7 : ثابت کیجئے کہ $3\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے

حل: اس کے برخلاف ہم مانتے ہیں کہ $3\sqrt{2}$ ناطق ہے۔

یعنی ہم دو باہم مفرد اعداد a اور b معلوم کریں گے جس میں $b \neq 0$ ہو اس طرح کہ $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$

کیونکہ 3, a اور b صحیح اعداد ہیں $\frac{a}{3b}$ ناطق ہے اس لئے $\sqrt{2}$ بھی ناطق ہوگا۔

لیکن یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $3\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔

مشق 1.2

1۔ ثابت کیجئے $\sqrt{5}$ غیر ناطق ہے۔

2۔ ثابت کیجئے کہ $3 + 2\sqrt{5}$ غیر ناطق ہے۔

3۔ مندرجہ ذیل کو غیر ناطق ثابت کیجئے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 خلاصہ

1۔ اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا

ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر (اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں، اجزائے ضربی کی یہ تحلیل منفرد ہے بھلے ہی اجزائے ضربی کی ترتیب مختلف ہو۔

2۔ اگر p مفرد ہے اور p یہ a^2 کو تقسیم کرتا ہے تب a, p کو بھی تقسیم کرے گا جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

3۔ ثابت کیجئے کہ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ غیر ناطق ہیں۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

قارئین کے لیے نوٹ

آپ دیکھ چکے ہیں کہ $\text{HCF}(p, q, r) \times \text{LCM}(p, q, r) \neq p \times q \times r$, جہاں p, q, r مثبت صحیح اعداد ہیں (مثال 8 دیکھیے) جبکہ تین اعداد p,q اور r کے لئے مندرجہ ذیل نتیجہ درست ہے۔

$$\text{LCM}(p,q,r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p,q,r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$



5013CH02

2 کثیر رکنیاں (POLYNOMIALS)

2.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ نے ایک متغیر والی کثیر رکنیوں اور ان کے درجہ کے بارے میں پڑھا تھا، یاد کیجئے اگر $p(x)$، x میں کوئی کثیر رکنی ہے تو $p(x)$ کی سب سے **بڑی قوت کثیر رکنی** $p(x)$ کا درجہ کہلاتی ہے مثال کے طور پر

$4x + 2$ متغیر x میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 1 ہے۔

$2y^2 - 3y + 4$ متغیر y میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 2 ہے۔

$5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$، متغیر x میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 3 ہے۔

$7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ متغیر u میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 6 ہے۔

عبارتیں جیسے $\frac{1}{x-1}$، $\sqrt{x} + 2$، $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ وغیرہ کثیر رکنیاں نہیں ہیں۔

درجہ 1 کی کثیر رکنی **خطی کثیر رکنی** کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر $2x - 3$، $\sqrt{3}x + 5$، $y + \sqrt{2}$، $x - \frac{2}{11}$، $3z + 4$

$\frac{2}{3}u + 1$ وغیرہ تمام خطی کثیر رکنیاں ہیں، کثیر رکنیاں جیسے $2x + 5 - x^2$، $x^3 + 1$ وغیرہ خطی کثیر رکنیاں نہیں ہیں۔

ایک کثیر رکنی جس کا درجہ 2 ہوتا ہے **دو درجی کثیر رکنی** کہلاتی ہے لفظ quadratic (دو درجی) "quadrate" سے اخذ کیا گیا ہے جس کا مطلب 'مربع' ہے۔ $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$، $y^2 - 2, 2 - x^2 + \sqrt{3}x$، $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5, \sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v, 4z^2 + \frac{1}{7}$

دو درجی کثیر رکنیوں کی کچھ مثالیں ہیں (جن کے ضریب حقیقی اعداد ہیں) عمومی طور پر n میں کوئی بھی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ شکل کی ہوتی ہے، جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔

ایک کثیر رکنی جس کا درجہ 3 ہوتا ہے **کعبی کثیر رکنی** کہلاتی ہے۔ کعبی کثیر رکنی کی کچھ مثالیں ہیں۔

$x^3 - 1$، $3x^3 - 2x^2 + x - 1$، $x^3 + 1$، $3 - x^2$، $\sqrt{2}x^3$، x^3، $2 - x^3$ درحقیقت کعبی کثیر رکنی کی عمومی شکل

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہے: $ax^3 + bx^2 + cx + d$

جہاں a، b، c اور d حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$.

آیئے اب کثیر رکنی $p(x) = x^2 - 3x - 4$ پر غور کرتے ہیں۔ اس کثیر رکنی میں $x = 2$ رکھتے ہیں اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$، کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ میں x کی جگہ 2 رکھنے سے جو ہمیں قدر 6- ملتی ہے وہ $x = 2$ پر $x^2 - 3x - 4$ کی قدر ہے۔ اسی طرح سے $p(0)$ کے لئے، $p(x)$ کی $x = 0$ پر قدر ہے جو 4- ہے۔

اگر $p(x)$ یہ x میں کوئی کثیر رکنی ہے اور اگر K کوئی حقیقی عدد ہے تب $p(x)$ میں x کی جگہ k رکھنے سے جو قدر حاصل ہوتی ہے وہ $p(x)$ کی $x = k$ پر قدر ہوتی ہے۔ اور اس کو ہم $p(k)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$p(x) = x^2 - 3x - 4$ کی $x = -1$ پر قدر کیا ہے؟

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

مزید نوٹ کیجئے $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$

کیونکہ $p(-1) = 0$ اور $p(4) = 0$ اور 1- اور 4 دو درجی کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ کے صفر کہلاتے ہیں۔

عمومی طور پر k یہ کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کہلائے گا جب $p(k) = 0$

نویں جماعت میں آپ پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ کسی خطی کثیر رکنی کے صفر کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر K، $P(x) = 2x + 3$ کا صفر ہے تب $p(k) = 0$ سے ہمیں ملتا ہے $2k + 3 = 0$ یعنی $k = -\frac{3}{2}$

عمومی طور پر اگر $p(x) = ax + b$ میں اگر k یہ $p(x)$ کا صفر ہو تب $p(k) = ak + b = 0$ یعنی $k = \frac{-b}{a}$

اس لئے خطی کثیر رکنی $ax + b$ کا صفر ہے $\frac{-b}{a} = \frac{-(\text{مستقل رکن})}{x \text{ کا ضریب}}$

اس طرح خطی کثیر رکنیوں کا صفر ان کے ضریب سے متعلق ہوتا ہے، کیا ایسا دوسری کثیر رکنیوں کے ساتھ بھی ہے؟ مثال کے طور پر کیا دو درجی کثیر رکنیوں کے صفر بھی ان کے ضریبوں سے متعلق ہیں؟

2.2 کثیر رکنی کے صفر کا جیومیٹریائی مفہوم

آپ جانتے ہیں کہ حقیقی عدد k کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے اگر $p(k) = 0$۔ لیکن سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ کثیر رکنیوں کے

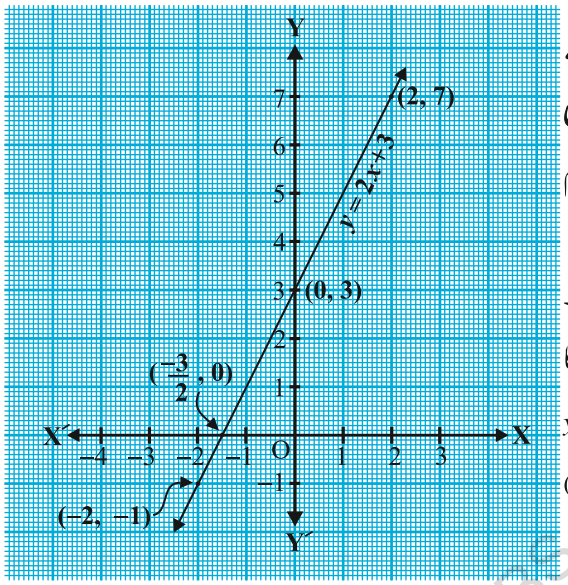
NOT TO BE REPUBLISHED @KEBS

صفر کی اتنی اہمیت کیوں ہے؟ اس کا جواب دینے کے لئے پہلے ہم خطی اور دو درجی کثیر رکنیوں کا **جیومیٹریائی** اظہار اوران کے صفروں کا جیومیٹریائی مفہوم (مطلب) سمجھیں گے۔

پہلے آپ خطی کثیر رکنی $ax+b, a \neq 0$ پر غور کیجئے۔

آپ نویں کلاس میں پڑھ چکے ہیں کہ $y=ax+b$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے۔مثال کے طور پر $y=2x+3$ کا گرا ف ایک خط مستقیم ہے جو $(-2,-1)$ اور $(2,7)$ نقطوں سے ہوکر گزرتا ہے

x	-2	2
$y=2x+3$	-1	7



شکل:2.1

شکل 2.1 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y=2x+3$ کا گراف $x-$ محور کو $x=-2$ اور $x=-1$ کے درمیان قطع کرتا ہے یعنی نقطہ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ پر آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ $2x+3$ کا صفر $-\frac{3}{2}$ ہے۔اس طرح سے کثیر رکنی $2x+3$ کا صفر اس نقطہ کے $x-$ محور کو قطع کرتا ہے ۔

عمومی طور پر ایک خطی کثیر رکنی $ax+b$ جس میں $a \neq 0$ ہے، کے لیے $y=ax+b$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو $x-$ محور کو صرف ایک نقطہ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ پر قطع کرتا ہے۔اس لئے خطی کثیر رکنی $ax+b, a \neq 0$ کا صفر ایک صفر ہے اور اس نقطہ کا $x-$ مختص ہے جہاں $y=ax+b$ کا گراف $x-$ محور کو قطع کرتا ہے۔

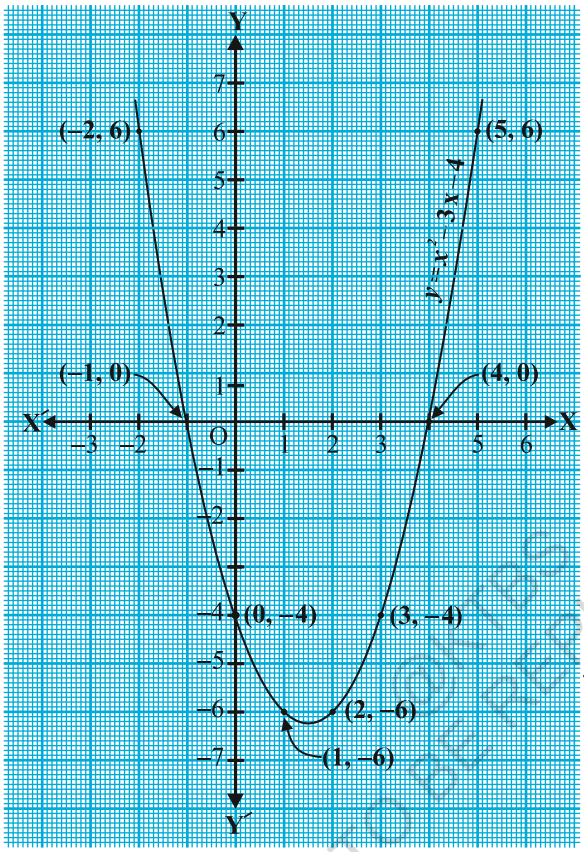
آیئے اب ہم ایک دود رجی کثیر رکنی کے صفر کا جیومیٹریائی مفہوم (مطلب) پر غور کرتے ہیں دود رجی کثیر رکنی x^2-3x-4 کا گراف کیسا نظر آتا ہے، آیئے کچھ قدروں کے لئے $y=x^2-3x-4$ کی کچھ قدریں معلوم کرتے ہیں جیسا کہ جدول 2.1 میں دی گئی ہے۔

جدول 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2-3x-4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

*دو درجی اور سہ درجی رکنیوں کی گراف سازی نہ تو طلباء سے کرائی جانی ہے اور نہ ہی جانچی جانی ہے

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 2.2

اگر ہم مندرجہ بالا نقطوں کو گراف پر پلاٹ کر گراف بنائیں یہ بالکل ایسا ہی نظر آئے گا جیسا کے شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔

در حقیقت کسی بھی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + a \neq 0, bx + c,$ کے لئے اس کی متعلقہ (نظیری) مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے گراف دو شکلوں میں ایک ہوگا یا تو اوپر کی طرف کھلا ہوا یا نیچے کی طرف کھلا ہوا $\cap$ اور یہ اس بات پر منحصر ہے کہ آیا وہ $a > 0$ یا $a < 0$ (یہ منحنیاں مکافی (parabolas) کہلاتی ہیں)۔

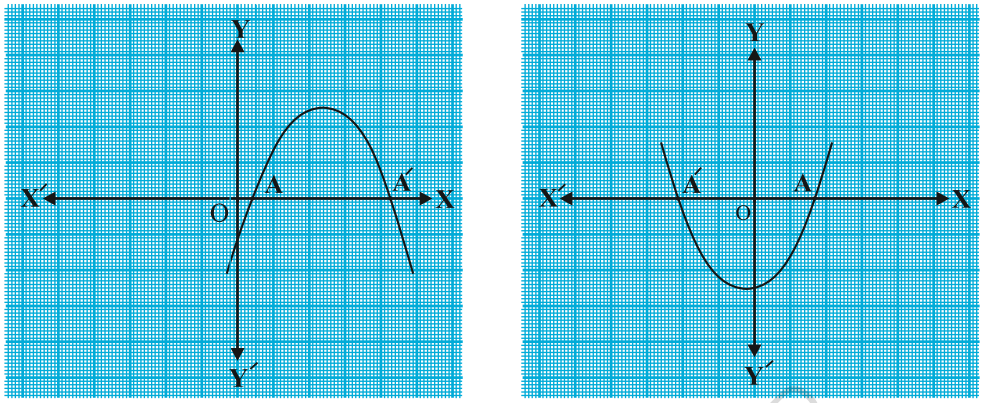
جدول 2.1 سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 1– اور 4 دو درجی کثیر رکنی کے صفر ہیں۔ شکل 2.2 سے مزید نوٹ کیجئے کہ 1– اور 4 ان نقطوں کے x – مختص ہیں جہاں $y = x^2 - 3x - 4$ کا گراف x – محور کو قطع کرتا ہے۔ اس طرح سے دو درجی کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ کے صفر ان نقطوں کے x – مختصات ہیں جہاں $y = x^2 - 3x - 4$ کا گراف x – محور کو قطع کرتا ہے۔

یہ حقیقت کسی بھی دو درجی کثیر رکنی کے لئے درست ہے یعنی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے صفر ان نقطوں کے x – مختصات ہیں جہاں $y = ax^2 + bx + c$ کو ظاہر کرنے والا مکافی (Parabola) x – محور کو قطع کرتا ہے۔

مندرجہ بالا $y = ax^2 + bx + c$ کے گراف کی شکل سے متعلق 3 حالتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

حالت (i) یہاں گراف x – محور کو دو مختلف نقاط A اور A′ پر قطع کرتا ہے A اور A′ کے x – مختصات دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے **2 صفر** اس حالت کے لئے (شکل 2.3 دیکھئے۔)

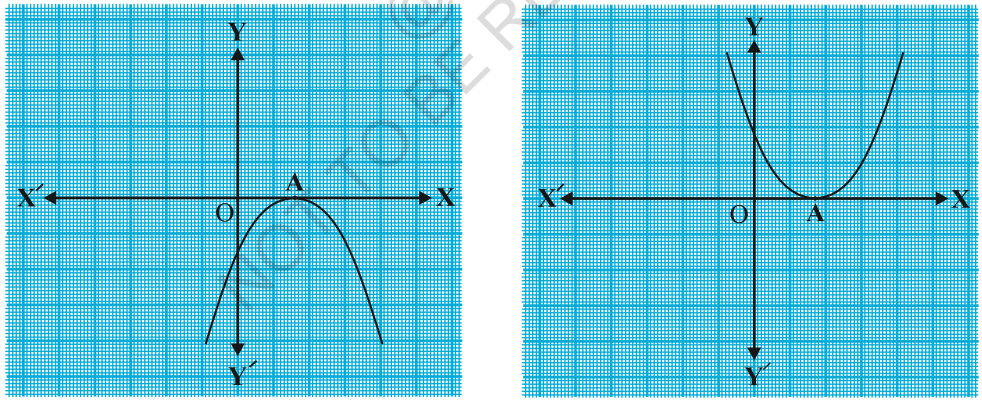
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



(i) (ii)

شکل 2.3

حالت (ii) یہاں گراف x – محور کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے یعنی دو منطبق نقطوں پر اس لئے حالت (i) کے دو نقطے A اور A′ یہاں منطبق ہو کر ایک نقطہ A بن جاتا ہے (شکل 2.4 دیکھئے)

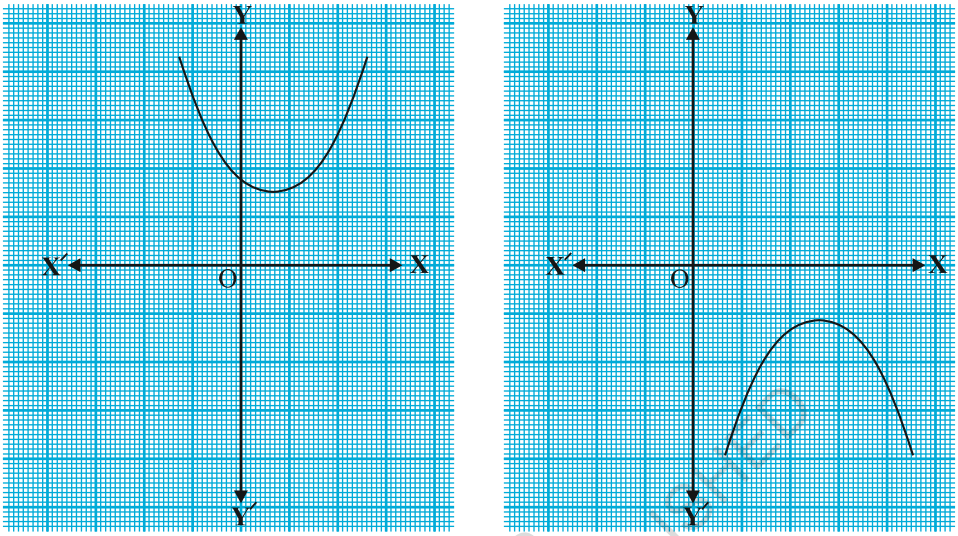


(i) (ii)

شکل 2.4

A کا x– مختص دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کا **واحد صفر** ہے۔

حالت (iii): یہاں یا تو گراف مکمل x–محور کے اوپر کی طرف ہے یا نیچے کی طرف۔ اس لئے یہ x–محور کو کسی بھی نقطہ پر قطع نہیں کرے گا (شکل 2.5 دیکھئے)۔



(i) (ii)

شکل 2.5

اس لئے اس حالت میں دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کا **کوئی صفر نہیں ہے۔**

تو جیومیٹریائی طور پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دودرجی کثیر رکنی کے یا تو مختلف صفر یا دو مساوی صفر (یعنی ایک صفر) یا کوئی صفر نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دودرجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں۔

کسی مکعبی کثیر رکنی کے صفر کی جیومیٹریائی مفہوم سے آپ کیا توقع رکھتے ہیں؟ اسے معلوم کرتے ہیں، کبھی کثیر رکنی $x^3 - 4x$ پر غور کیجئے۔ یہ جاننے کے لئے کہ $y = x^3 - 4x$ کا گراف کیسا نظر آتا ہے x کے نظیری y کی کچھ قدریں فہرست تیار کیجئے جیسا کہ جدول 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 2.2

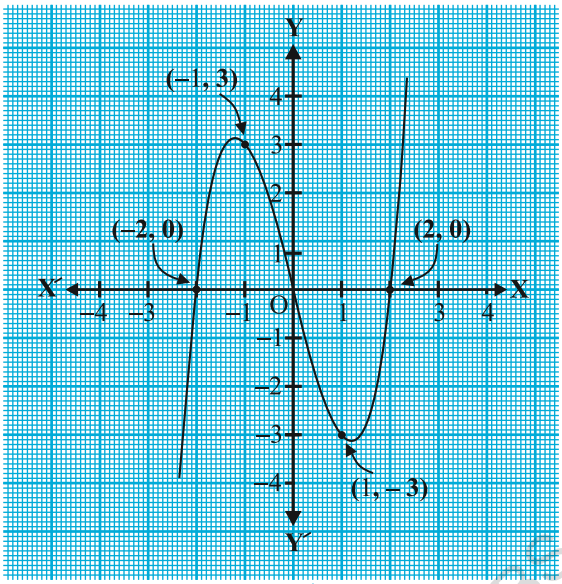
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

جدول میں دیے گئے نقطوں کو گراف پر پلاٹ کرنے اور گراف بنانے سے ہم دیکھتے ہیں $y = x^3 - 4x$ کا گراف دراصل شکل 2.6 کی طرح نظر آتا ہے۔

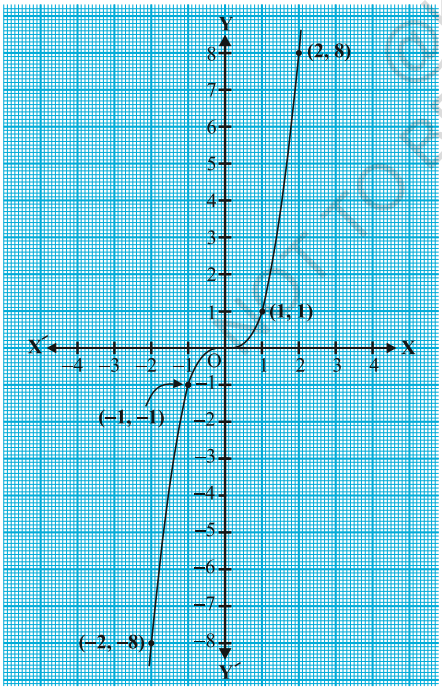
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

جدول سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $-2, 0$ اور 2 مکعبی کثیر رکنی $x^3 - 4x$ کے صفر ہیں مشاہدہ کیجئے کہ $-2, 0$ اور 2 دراصل ان نقطوں کے x- مختص ہیں جہاں $y = x^3 - 4x$ کا گراف x- محور کو قطع کرتا ہے۔ کیونکہ منحنی x- محور کو صرف ان تین نقطوں پر قطع کرتی ہے اس لئے ان کے x- مختصات کثیر رکنی صفر ہیں۔

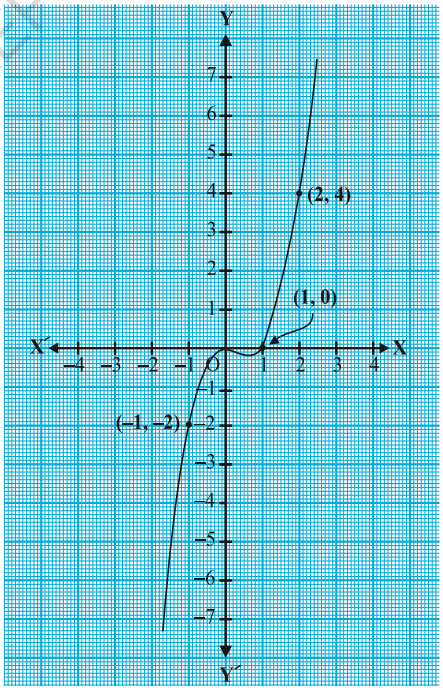
آیئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔ مکعبی کثیر رکنیوں x^3 اور $x^3 - x^2$ پر غور کیجئے۔ ہم $y = x^3$ اور $y = x^3 - x^2$ کا گراف بالترتیب شکل 2.7 اور شکل 2.8 میں دکھاتے ہیں۔



شکل 2.6



شکل 2.7



شکل 2.8

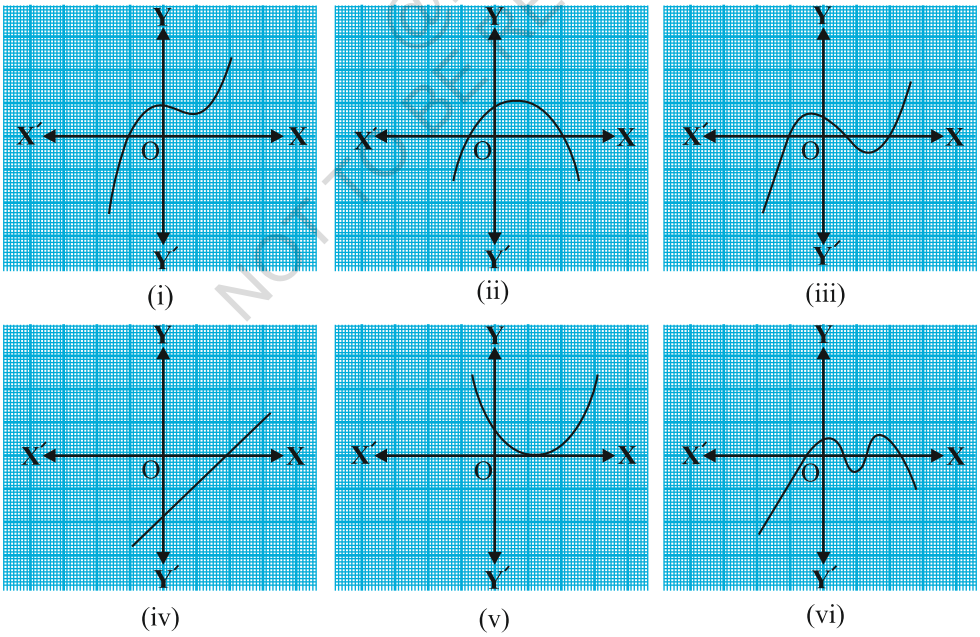
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

نوٹ کیجئے کہ 0 کثیر رکنی x^3 کا واحد صفر ہے۔ مزید شکل 2.7 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 0 اس واحد نقطے کا x – مختص ہے جہاں $y = x^3$ کا گراف x– محور کو قطع کرتا ہے۔ اسی طرح سے کیونکہ $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$، 0 اور 1 کثیر رکنی $x^3 - x^2$ کے واحد صفر ہیں۔ مزید شکل 2.8 سے، x–مختصات کی یہ قدریں وہ نقطے ہیں جہاں $y = x^3 - x^2$ کا گراف ہے– x محور کو قطع کرتا ہے۔

مذکورہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کے ایک کعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں درجہ 3 کی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوتے ہیں۔

ریمارک: عمومی طور پر، n درجہ کی ایک کثیر رکنی $p(x)$ دی ہوتی ہے۔ $y = p(x)$ کا گراف n محور کو n نقطوں پر قطع کرے گا۔ اس لئے n درجہ والی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوں گے۔

مثال 1: نیچے دئے گئے شکل 2.9 کے گراف کو دیکھئے۔ ہر ایک $y = p(x)$ کا گراف ہے جہاں $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے۔ ہر ایک گراف کے لئے $p(x)$ کے صفر کی تعداد معلوم کیجئے۔



شکل 2.9

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

(i) صفر کی تعداد 1 ہے کیونکہ گراف x– محور کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

(ii) صفر کی تعداد 2 ہے کیونکہ گراف x– محور کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

(iii) صفر کی تعداد 3 ہے (کیوں؟)

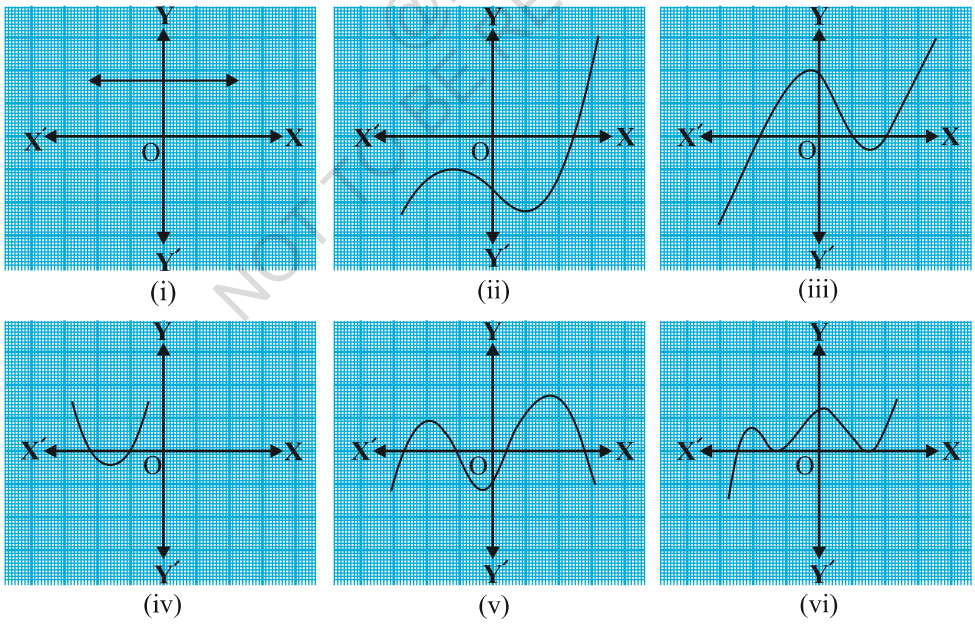
(iv) صفر کی تعداد 1 ہے (کیوں؟)

(v) صفر کی تعداد 1 ہے (کیوں؟)

(vi) صفر کی تعداد 4 ہے (کیوں؟)

مشق 2.1

1۔ نیچے شکل 2.10 میں کسی کثیر رکنی $y=p(x)$ کا گراف دیا ہوا ہے۔ ہر ایک کے لئے $p(x)$ کے صفر کی تعداد معلوم کیجئے۔



شکل 2.10

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

2.3 کثیر رکنی کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق

آپ پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ خطی کثیر رکنی $ax + b$ کا صفر $-\frac{b}{a}$ ہے۔اب ہم سیکشن 2.1 اٹھائے گئے سوال کا جواب دینے کی کوشش کریں گے۔یعنی دو درجی کثیر رکنی کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کے بارے میں اس مقصد کے لیے ایک دو درجی مساوات $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ کو لیتے ہیں۔نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ کس طرح دو درجی کثیر رکنی کے وسطی کو منقسم کر کے اس کے اجزائے ضربی بناتے ہیں۔اس لئے یہاں ہمیں وسطی رکن '$-8x$' کو منقسم کرنا ہے دو ارکان کے حاصل جمع میں جن کا حاصل ضرب $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ہے اس لئے ہم لکھتے ہیں۔

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)x-3)$$

اس لئے $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ کی قدر صفر ہے۔جہاں $x - 1 = 0$ یا $x - 3 = 0$ یعنی جب $x = 1$ یا $x = 3$ اس لئے $2x^2 - 8x + 6$ کے صفر 1 اور 3 ہیں مشاہدہ کیجئے کہ

$$-\frac{(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{-(-8)}{2} = 4 = 1 + 3 = \text{صفروں کا حاصل جمع}$$

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{6}{2} = 3 = 1 \times 3 = \text{صفروں کا حاصل جمع}$$

آیئے ایک اور دو درجی کثیر رکنی لیتے ہیں مان لیجئے $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ وسطی رکن کو منقسم کرنے کے طریقہ سے ہمیں ملتا ہے

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 - 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

اس طرح سے $3x^2 + 5x - 2$ کی قدر صفر ہے اگر یا تو $3x - 1 = 0$ یا $x + 2 = 0$ یعنی جب $x = \frac{1}{3}$ $x = -2$ اس لئے $3x^2 + 5x - 2$ کے صفر $\frac{1}{3}$ اور -2 ہیں

مشاہدہ کیجئے کہ

$$-\frac{(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{-5}{3} = \frac{1}{3} + (-2) = \text{صفروں کا حاصل جمع}$$

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{-2}{3} = \frac{1}{3} \times (-2) = \text{صفروں کا حاصل ضرب}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

عمومی طور پر، اگر $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کثیر رکنی α^*، β^* کے صفر ہیں تب آپ یہ جانتے ہیں کہ $x-\alpha$ اور $x-\beta$ یہ $p(x)$ کے اجزائے ضربی ہیں اسلئے

$$ax^2+bx+c = k(x-\alpha)(x-\beta)$$ (جہاں K ایک مستقلہ ہے)

$$= k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$$

$$= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta$$

اور مستقلہ کے ضریبوں کا دونوں طرف موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta) \text{ اور } c = k\alpha\beta$$

اس سے حاصل ہوتا ہے $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a}$

اور $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

یعنی $\dfrac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}} = -\dfrac{b}{a} = \alpha+\beta =$ صفروں کا حاصل جمع

$\dfrac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \dfrac{c}{a} = \alpha\beta =$ صفروں کا حاصل ضرب

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 2: دو درجی کثیر رکنی $x^2+7x+10$ کے صفر معلوم کیجئے اور صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجئے۔

حل:

$$x^2+7x+10 = (x+2)(x+5)$$

اس لئے $x^2+7x+10$ کی قدر 0 ہوگی جب $x+2=0$ یا $x+5=0$ یعنی جب $x=-2$ یا $x=-5$، اس لئے

$x^2+7x+10$ کے صفر -2 اور -5 ہیں۔ اب

$$\frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{-(7)}{1} = -(7) = -2+(-5) = \text{صفروں کا حاصل جمع}$$

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{(10)}{1} = (-2)\times(-5) = (10) = \text{صفروں کا حاصل ضرب}$$

*α، β یونانی زبان کے الفاظ بالترتیب 'الفا' اور 'بیٹا' کہتے ہیں۔ بعد میں ایک اور حرف 'γ' کا ہم استعمال کریں گے جسے گاما کہتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 3: کثیر رکنی $x^2 - 3$ کے صفر معلوم کیجئے اور اس کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجئے۔

حل: تماثل $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ اس کے استعمال کرنے پر ہم لکھ سکتے ہیں

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

اس لئے $x^2 - 3$ کی قدر صفر ہے اگر $x = \sqrt{3}$ یا $x = -\sqrt{3}$

اس لئے $x^2 - 3$ کے صفر $\sqrt{3}$ اور $-\sqrt{3}$ ہیں

اب

$$\frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \text{صفروں کا حاصل جمع}$$

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \frac{-3}{1} = -3 = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = \text{صفروں کا حاصل ضرب}$$

مثال 4: دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجئے اگر اس کے صفر کا حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب 3 – اور 2 ہے

حل: مان لیجئے دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ ہے اور اس کے صفر α اور β ہیں،

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

اور $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

اگر $a = 1$ تب $b = 3$ اور $c = 2$

اس لئے ایسی دو درجی کثیر رکنی جو ان شرطوں کو مطمئن کرتی ہے وہ $x^2 + 3x + 2$

آپ جانچ کر سکتے ہیں کوئی دوسری دو درجی کثیر رکنی جو ان شرطوں کو مطمئن کر سکتی ہے وہ $k(x^2 + 3x + 2)$ کی شکل کی ہوگی جہاں k حقیقی عدد ہے۔

آیئے اب مکعبی کثیر رکنیوں پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ کبھی کثیر رکنیوں کے صفر اور ضریبوں کے درمیان یہی تعلق درست ہے؟

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

آیئے $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ پر غور کیجئے۔

آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ کے لئے $p(x) = 0$۔ کیونکہ p(x) کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہو سکتے ہیں، اس لئے یہ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ کے صفر ہیں۔ اب

$$\frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^3 \text{ کا ضریب}} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \text{صفروں کا حاصل جمع}$$

$$\frac{\text{مستقل رکن}}{x^3 \text{ کا ضریب}} = \frac{-8}{2} = -4 = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = \text{صفروں کا حاصل ضرب}$$

لیکن یہاں ایک اور تعلق نظر آتا ہے۔ دو صفروں کو ایک ساتھ لے کر ان کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع پر غور کیجئے۔

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2$$

$$= -7 = \frac{-14}{2} = \frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^3 \text{ کا ضریب}}$$

عمومی طور پر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر α, β, γ کعبی کثیر رکنی $ax^3 + bx^3 + cx + d$ کے صفر ہیں

تو $$\alpha+\beta+\gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}$$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 5*: تصدیق کیجئے کہ $3, 1, -\frac{1}{3}$ کعبی کثیر رکنی $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ کے صفر ہیں اور پھر صفروں اور اس کے ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجئے۔

حل: دی ہوئی کعبی کثیر رکنی کا $ax^3 + bx^2 + cx + d$ سے موازنہ کیجئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3.$$

مزید $$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

* امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 \quad = \quad \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

اس لئے $3, -1$ اور $-\frac{1}{3}$ کثیر رکنی $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ کے صفر ہیں۔

اس لئے ہم $\alpha = 3, \beta = -1$ اور $\gamma = -\frac{1}{3}$ لیتے ہیں

اب $\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$,

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3\times(-1) + (-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$$

مشق 2.2

1۔ مندرجہ ذیل دودرجی کثیر رکنیوں کے صفر معلوم کیجئے اور ان کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجئے۔

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2۔ دودرجی کثیر رکنی معلوم کیجئے جن کے صفروں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.4 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ درجہ 1، 2 اور 3 کی کثیر رکنیاں بالترتیب خطی، دودرجی اور تکعبی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔

2۔ x میں حقیقی اعداد کے ضریبوں کے ساتھ کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کی شکل کی ہوتی ہے۔ جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں جس میں $a \neq 0$

3۔ کثیر رکنی $p(x)$ کے صفر ان نقطوں کے x-مختصات ہیں جہاں $y = p(x)$ کا گراف x-محور کو قطع کرتا ہے۔

4۔ ایک دودرجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 2 اور تکعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوتے ہیں۔

5۔ اگر α, β دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر ہیں تب

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6۔ اگر α, β, γ تکعبی کثیر رکنی $ax^3 + bx^2 + cx + d$ کے صفر ہیں تب

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

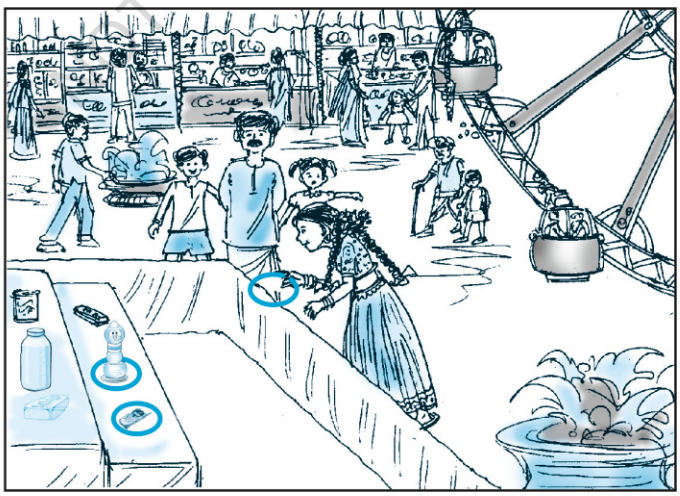
5013CH03

3 دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑے (PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

3.1 تعارف

آپ کا سابقہ ذیل میں دی گئی صورت حال سے ضرور ہوا ہوگا:

عقیلہ اپنے گاؤں میں ایک میلے میں گئی۔ وہ جھولے (Giant Wheel) پر جھولنا چاہتی تھی اور ہو پلا (Hoopla) کھیلنا چاہتی تھی۔ ہو پلا (ایک ایسا کھیل ہے جس میں آپ ایک اسٹال میں رکھی ہوئی چیزوں پر ایک رِنگ (Ring) پھینکتے ہیں۔ اگر آپ کا رِنگ کسی بھی چیز کو پوری طرح گھیر لیتا ہے، وہ چیز آپ کی ہو جاتی ہے)۔ جتنی مرتبہ اس نے ہو پلا کھیلا اس کے آدھی مرتبہ جھولے میں سواری کی۔ اگر جھولہ کا ہر ایک چکر اس کو 3 روپے میں پڑا اور ہو پلا کا ہر ایک کھیل 4 روپے میں تو آپ کیسے معلوم کریں گے کہ اس نے جھولے کے کتنے چکر لگائے اور کتنی مرتبہ ہو پلا کھیلا اگر اس نے کل ₹ 20 خرچ کیے تو آپ بہت سی حالتوں پر غور



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

کر سکتے ہیں۔ جب کہ اس نے ایک چکر جھولا جھولا ہو، کیا یہ ممکن ہے؟ کیا یہ ممکن ہے کہ اس نے دو چکر جھولا جھولا ہو؟ اور اسی طرح آگے بھی۔ یا آپ اپنی نویں کلاس کی قابلیت سے اس صورت حال کو دو متغیر والی خطی مساواتوں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

آیئے اس طریقے پر غور کرتے ہیں

عقیلہ کے ذریعے لگائے گئے جھولے کے چکروں کی تعداد کو x سے ظاہر کرتے ہیں اور جتنی مرتبہ اس نے ہو پلا کھیلا اسے y سے ظاہر کرتے ہیں، اب مذکورہ بالا صورت حال کو دو مساواتوں سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

کیا ہم مساواتوں کے اس جوڑے کا حل معلوم کر سکتے ہیں؟ اس کو معلوم کرنے کے بہت سے طریقے ہیں جو ہم اس باب میں پڑھیں گے۔

3.2 خطی مساواتوں کے جوڑے کا گرافی حل:

خطی مساواتوں کا ایسا جوڑا جس کا کوئی حل نہیں ہوتا، **غیر ہم آہنگ** خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتا ہے۔ دو متغیر والی خطی مساواتوں کا ایسا جوڑا جس کا حل ہوتا ہے **ہم آہنگ** خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتا ہے۔ خطی مساواتوں کا وہ جوڑا جو معادل ہوتی ہیں اور جن کے لامحدود کئی مختلف مشترک حل ہوتے ہیں ایسے جوڑے دو متغیر والی خطی مساواتوں کے **تابع** (dependent) جوڑے کہلاتے ہیں۔

یہ بات نوٹ کیجئے کہ خطی مساواتوں کے تابع جوڑے ہمیشہ ہم آہنگ ہوتے ہیں ہم ذیل میں دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں کو ظاہر کرنے والے خطوط کے رویہ (behaviour) کا خلاصہ کرتے ہیں:

(i) خطوط ایک نقطہ پر قطع کر سکتے ہیں۔ اس حالت میں مساواتوں کے جوڑوں کا یکتا حل ہوگا۔ (ہم آہنگ مساواتوں کا جوڑا)

(ii) خطوط متوازی ہو سکتے ہیں۔ اس حالت میں مساواتوں کا کوئی حل نہیں ہوگا (غیر ہم آہنگ مساواتوں کا جوڑا)

(iii) خطوط منطبق ہو سکتے ہیں۔ اس حالت میں مساواتوں کے لامحدود حل ہوں گے [تابع (ہم آہنگ) مساواتوں کا جوڑا]

درج ذیل 3 خطی مساواتوں کے جوڑوں پر غور کریں۔

(i) $x - 2y = 0$ اور $3x + 4y - 20 = 0$ (خطوط قطع کرتے ہیں)

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

(ii) $2x+3y-9=0$ اور $4x+6y-18=0$ (خطوط منطبق ہیں)

(iii) $x+2y-4=0$ اور $2x+4y-12=0$ (خطوط متوازی ہیں)

آیئے اب ہم تینوں مثالوں میں $\frac{a_1}{a_2}$ ، $\frac{b_1}{b_2}$ اور $\frac{c_1}{c_2}$ کی قدروں کو لکھتے ہیں اور ان کا موازنہ کرتے ہیں۔

یہاں a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 معیاری شکل دی گئی خطی مساواتوں کے ضریب میں جو سیکشن 3.2 میں دی گئی ہیں۔

جدول 3.1

نمبر شمار	خطوط کا جوڑا	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	نسبتوں کا موازنہ	گرافی اظہار	الجبری ترجمانی
1	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	قاطع خطوط	یکتا حل (صرف ایک حل)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	منطبق خطوط	لامحدود حل
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	متوازی خطوط	کوئی حل نہیں

© KTRS
NOT TO BE REPUBLISHED

مذکورہ بالا جدول سے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ اگر خطوط کو مساواتوں

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

اور

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

سے ظاہر کیا جائے تو خطوط

(i) قاطع ہوں تو $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

(ii) منطبق ہوں تو $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

(iii) متوازی ہو تو $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

درحقیقت کسی بھی خطوط کے جوڑنے کے لئے اس کا معکوس بھی درست ہے۔ اس کی تصدیق آپ کچھ اور مثالیں لے کر کر سکتے ہیں۔

آیئے اس کی مزید وضاحت کے لئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 1: جانچ کیجئے کہ آیا مساواتوں کا جوڑا

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

اور

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

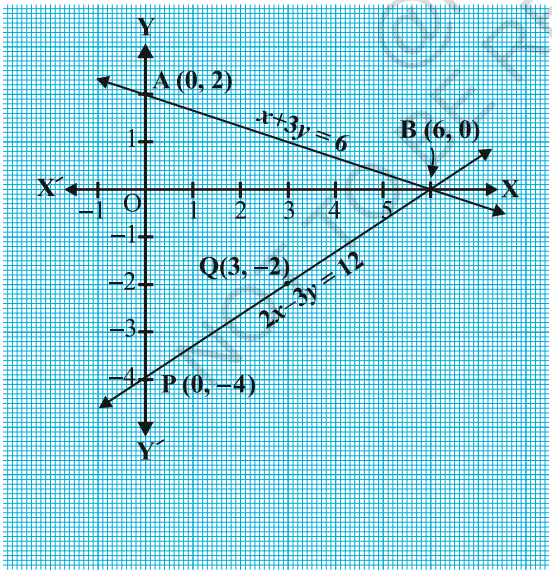
ہم آہنگ ہے یا نہیں، اگر ہے تو گراف کی مدد سے حل کیجئے۔

حل: مساواتوں (1) اور (2) کا گراف بنایئے۔ اسکے لئے ہم ہر ایک مساوات کے کم سے کم دو حل لیں گے۔ جو جدول 3.2 میں دکھائے گئے ہیں۔

جدول 3.2

x	0	6
$y = \frac{6 - x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x - 12}{3}$	-4	-2



شکل 3.1

نقاط A(0,2)، B(6,0)، P(0,–4) اور Q(3,–2) کو گراف پیپر پر پلاٹ کیجئے۔ اور ان نقاط کو ملا کر خطوط AB اور PQ کھینچئے جیسا کہ شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ گراف میں ایک نقطہ B(6,0) ہے جو دونوں خطوط AB اور PQ میں مشترک ہے اس لئے مساواتوں کے جوڑے کا حل $x = 6$ اور $y = 0$ ہے یعنی دی ہوئی مساواتیں ہم آہنگ ہیں۔

مثال 2: گراف کی مدد سے معلوم کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑوں کے یکتا حل ہیں لامحدود حل ہیں یا کوئی حل نہیں ہے۔

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED (OKTBS)

حل: مساوات (2) کو $\frac{5}{3}$ سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$5x - 8y + 1 = 0$$

لیکن یہ مساوات ایسی ہی ہے جیسی مساوات (1) اس لئے مساوات (1) اور (2) سے ظاہر ہونے والے خطوط منطبق ہیں۔ اس لئے مساوات (1) اور (2) کے لامحدود حل ہیں۔

گراف پر کچھ نقطے پلاٹ کر کے آپ خود اس کی تصدیق کریں۔

مثال 3: چمپا کچھ پینٹ اور اسکرٹ خریدنے ایک "Sale" میں گئی۔ جب اس کی دوست نے پوچھا کہ اس نے دونوں چیزیں کتنی کتنی خریدیں۔ اس نے جواب دیا کہ خریدی گئیں اسکرٹ کی تعداد خریدی گئیں پینٹ کی تعداد کے دگنے سے دو کم ہیں۔ مزید اسکرٹ کی تعداد پینٹ کی تعداد کے چار گنے سے 4 کم ہے۔ یہ معلوم کرنے میں اس کی دوست کی مدد کیجئے کہ چمپا نے کتنی پینٹ اور کتنی اسکرٹ خریدیں۔

حل: مان لیجئے اس نے x پینٹ اور y اسکرٹ خریدیں۔ تب مساواتیں ہوں گی۔

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

اور

$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

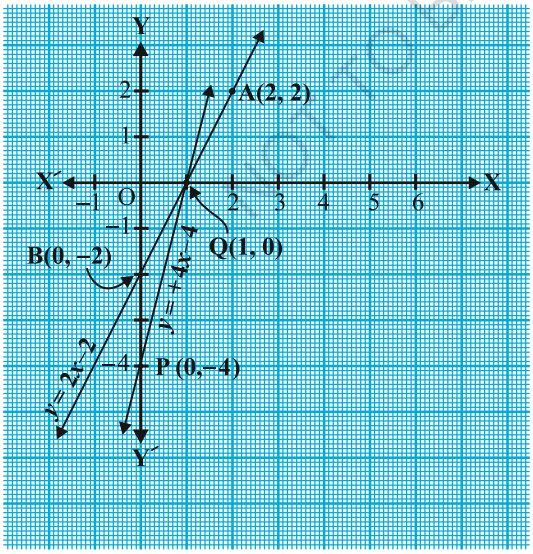
آیئے مساواتوں (1) اور (2) کے گراف کھینچتے ہیں۔ اس کے لئے ہر ایک مساوات کے دو حل معلوم کیجئے۔ یہ جدول 3.3 میں دئے گئے ہیں۔

جدول 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	–2

x	0	1
$y = 4x - 4$	–4	0

نقطوں کو پلاٹ کیجئے اور ان سے گزرتے ہوئے مساواتوں کو ظاہر کرنے والے خطوط کھینچئے جیسا کہ شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

دونوں خطوط ایک دوسرے کے نقطے (1,0) پر قطع کرتے ہیں، اس لئے $y = 0 , x = 1$ خطی مساواتوں کے جوڑوں کا مطلوبہ حل ہے یعنی اس نے 1 پینٹ خریدی اور اور کوئی اسکرٹ نہیں خریدی۔

اپنے جواب کی **تصدیق** کے لئے آپ یہ جانچ کر سکتے ہیں کہ یہ دی ہوئی مساواتوں کو مطمئن کرتا ہے یا نہیں۔

مشق 3.1

1۔ مندرجہ ذیل سوالوں میں مساواتوں کے جوڑے بنائیے اور گرافی طور پر ان کے حل معلوم کیجئے۔

(i) دسویں کلاس کے 10 طلبا نے ریاضی کے ایک کوئز میں حصہ لیا۔ اگر لڑکیوں کی تعداد لڑکوں کی تعداد سے 4 زیادہ ہے۔ تو اس کوئز میں حصہ لینے والے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

(ii) 5 پنسلوں اور 7 پینوں کی کل قیمت 50 روپے ہے۔ جب کہ 7 پنسل اور 5 پینوں کی کل قیمت 46 روپے۔ ایک پنسل اور ایک پین کی قیمت معلوم کیجئے۔

2۔ نسبتوں $\frac{a_1}{a_2}$، $\frac{b_1}{b_2}$ اور $\frac{c_1}{c_2}$ کا موازنہ کرتے ہوئے معلوم کیجئے کہ مندرجہ خطی مساواتوں کے جوڑوں کو ظاہر کرنے والے خطوط ایک نقطے پر قطع کرتے ہیں، متوازی ہیں یا منطبق ہیں۔

(i) $5x-4y+8=0$
$7x+6y-9=0$

(ii) $9x+3y+12=0$
$18x+6y+24=0$

(iii) $6x-3y+10=0$
$2x-y+9=0$

3۔ نسبتوں $\frac{a_1}{a_2}$، $\frac{b_1}{b_2}$ اور $\frac{c_1}{c_2}$ کا موازنہ کرتے ہوئے معلوم کیجئے کہ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑے ہم آہنگ ہیں یا غیر ہم آہنگ۔

(i) $3x + 2y = 5 ; 2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8 ; 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}y = 7 ; 9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11 ; -10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x - 2y = 8 ; 2x + 3y = 12$

4۔ مندرجہ ذیل میں کون سی خطی مساواتیں ہم آہنگ ہیں اور کون سی غیر ہم آہنگ۔ اگر ہم آہنگ ہیں تو ان کو گراف کی

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

مدد سے حل کیجئے:

(i) $x+y=5,$ $2x+2y=10$

(ii) $x-y=8$ $3x-3y=16$

(iii) $2x+y-6=0$ $4x-2y-4=0$

(iv) $2x-2y-2=0$ $4x-4y-5=0$

5۔ ایک مستطیل باغ ہے جس کی لمبائی اس کی چوڑائی سے نصف احاطہ 36m ہے۔ 4 میٹرز زیادہ باغ کی ابعاد معلوم کیجئے۔

6۔ ایک خطی مساوات $2x+3y-8=0$ دی ہوئی ہے۔ ایک دوسری دو متغیر والی ایسی خطی مساوات لکھئے جبکہ ان مساواتوں کے جوڑوں کا جیومیٹریائی اظہار

(i) خطوط قاطع ہو

(ii) خطوط متوازی ہو

(iii) خطوط منطبق ہو

7۔ مساواتوں $x-y+1=0$ اور $3x+2y-12=0$ کا گراف بنائیے۔ ان دونوں خطوط اور $x-$ محور سے بنے مثلث کے دو راسوں کے مختصات بھی معلوم کیجئے اور مثلثی خطہ کو شیڈ کیجئے۔

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

3.3 خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کرنے کے الجبری طریقے

پہلے سیکشن میں ہم نے مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنے کا طریقہ سیکھا، ایسی شکل میں گراف کا طریقہ مناسب نہیں ہے جب خطی مساواتوں کا حل غیر صحیح اعداد ہے $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$، $(-1.75, 3.3)$، $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ وغیرہ ہوں۔ کیونکہ اس طرح کے مختصات پڑھنے میں غلطی کے امکان بہت زیادہ ہیں۔ کیا حل معلوم کرنے کا کوئی متبادل طریقہ بھی ہے؟ ایسے بہت سے الجبری طریقے ہیں۔ جن کا مطالعہ ہم اس سیکشن میں کریں گے۔

3.3.1 بدل کا طریقہ: بدل کے طریقہ کی تشریح کرنے کے لئے ہم کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 4: مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑے کو بدل کے طریقہ سے حل کیجئے۔

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

حل:

قدم 1: ہم دونوں میں سے کسی ایک مساوات کو چنتے ہیں اور ایک متغیر کو دوسرے کی شکل میں لکھتے ہیں۔ آیئے مساوات (2) کو لیتے ہیں۔

$$x + 2y = 3$$

اور اس کو اس طرح لکھتے ہیں $x = 3 - 2y$ (3)

قدم 2: x کی قدر مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

یعنی $21 - 14y - 15y = 2$

یعنی $-29y = -19$

اس لئے $y = \frac{19}{29}$

قدم 3: y کی اس قدر کو مساوات (3) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

اس لئے حل ہے $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$

تصدیق: $x = \frac{49}{29}$ اور $y = \frac{19}{29}$ رکھنے پر آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ دونوں مساواتیں (1) اور (2) مطمئن ہو جائیں گی۔

بدل (substuition) کے طریقے کو اچھی طرح سمجھنے کے لئے آیئے اس کو قدم بہ قدم لیتے ہیں۔

قدم 1: کسی بھی ایک متغیر y (مان لیجئے) کی قدر دوسرے متغیر x کی شکل میں معلوم کیجئے۔

قدم 2: y کی اس قدر کو دوسری مساوات میں رکھئے اور اس مساوات کو ایک متغیر والی مساوات میں بدل دیجئے یعنی x میں، جس کو آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔ کبھی کبھی جیسے کے ذیل میں مثال 9 اور 10 میں ہے۔ آپ کو اپنا بیان ملے گا جس میں کوئی متغیر

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

نہیں ہوگا اگر یہ بیان درست ہے تو آپ یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ قطعی مساواتوں کے جوڑے کے لامحدود حل ہوں گے۔ اگر بیان درست نہیں ہے تو تب خطی مساواتوں کا جوڑا غیر ہم آہنگ ہوگا۔

قدم 3: قدم (2) میں ملی (x) (یا y) کی قدر کو قدم 1 میں استعمال ہوئی مساوات میں رکھئے اس سے آپ کو دوسرے متغیر کی قدر حاصل ہو جائے گی۔

ریمارک: خطی مساواتوں کے جوڑے حل کرنے کے لئے ہم اس متغیر کی قدر مساوات میں رکھی جس کو دوسرے متغیر کی شکل میں ظاہر کیا گیا تھا۔ اس لئے یہ طریقہ بدل کا طریقہ کہلاتا ہے۔

مثال 5: درج ذیل سوال حل کیجئے۔ آفتاب نے اپنی بیٹی کو بتایا کہ سات سال پہلے میں تمہاری عمر کا سات گنا تھا اور اب سے 3 سال بعد میں تمہاری عمر کا 3 گنا ہو جائے گا (کیا یہ دلچسپ نہیں ہے؟) اس صورتِ حال کو الجبرائی اور جیومٹریائی طور ظاہر کیجئے۔

حل: مان لیجئے s اور t بالترتیب آفتاب اور اس کی بیٹی کی عمریں ہیں تب خطی مساواتوں کا وہ جوڑا جو اس صورت حال کو ظاہر کرتا ہے۔

$s - 7 = 7\ (t - 7)$ یعنی $s - 7t + 42 = 0$ (1)

اور $s + 3 = 3(t + 3)$ یعنی $s - 3t = 6$ (2)

مساوات (2) کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $s = 3t + 6$

s کی اس قدر کو مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

یعنی $4t = 48$ جس سے $t = 12$ حاصل ہوتا ہے۔

t کی اس قدر کو مساوات (2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$s = 3\ (12) + 6 = 42$$

اس لئے آفتاب اور اس کی بیٹی بالترتیب 42 اور 12 سال کے ہیں۔

اس جواب کی تصدیق آپ اس کو دونوں مساواتوں میں رکھ کر کر سکتے ہیں اگر یہ دونوں مساواتوں کو مطمئن کرے۔

مثال 6: ایک دُکان میں 6 پنسل اور 3 ربڑ کی کل قیمت ₹ 9 ہے اور 4 پنسل اور 6 ربڑ کی قیمت ₹ 18 تو پنسل اور ربڑ کی قیمت معلوم کیجئے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل: بنا ہوا خطی مساواتوں کا جوڑا تھا۔

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

پہلے ہم مساوات $2x + 3y = 9$ میں سے x کی قدر کو y کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں جس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

اب x کی اس قدر کو مساوات (2) میں رکھتے ہیں، اس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

یعنی $18 - 6y + 6y = 18$

یعنی $18 = 18$

یہ بیان یعنی y کی تمام قدروں کے لئے درست ہے۔ لیکن ہمیں حل کے طور پر y کی کوئی مخصوص قدر نہیں ملتی اس لئے ہمیں x کی بھی کوئی مخصوص قدر نہیں ملتی۔ یہ صورت حال اس لئے پیدا ہوئی کے دونوں مساواتیں معادل ہیں۔ اس لئے مساوات (1) اور (2) کے لامحدود حل ہوں گے۔

ہمیں پنسل اور ربڑ کی ایک یکتا قیمت نہیں ملے گی، کیونکہ یہاں بہت سے مشترک حل ہیں۔

مثال 7 : دو ٹرین کی پٹریاں مساواتوں $x + 2y - 4 = 0$ اور $2x + 4y - 12 = 0$ کو ظاہر کرتی ہیں۔ کیا یہ ایک دوسرے پر عبور کرتی ہیں؟ ظاہر کیجئے۔

حل: اس صورت حال میں خطی مساواتوں کا جوڑا تھا۔

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

اب ہم مساوات (1) میں، x کو y کی شکل میں رکھتے ہیں جس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = 4 - 2y$$

اب ہم x کی اس قدر کو مساوات (2) میں رکھتے ہیں، اس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

یعنی $8 - 12 = 0$

یعنی $-4 = 0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جو کے ایک غلط بیان ہے۔

اس لئے ان مساواتوں کا مشترک حل نہیں ہے۔اس لئے دونوں ریل ایک دوسرے کو کراس نہیں کریں گی۔

مشق 3.2

1۔ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کو بدل کے طریقہ سے حل کیجئے۔

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$
$\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2۔ $2x + 3y = 11$ اور $2x - 4y = -24$ کو حل کیجئے اور پھر 'm' کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے $y = mx + 3$ ہو،

3۔ مندرجہ ذیل مسلوں کے خطی مساواتوں کے جوڑے بنائیے اور بدل کے طریقہ سے ان کا حل معلوم کیجئے۔

(i) دو اعداد کا فرق 26 ہے ان میں سے ایک عدد دوسرے کا تین گنا ہے۔اعداد معلوم کیجئے۔

(ii) تتمی زاویوں کا بڑا زاویہ چھوٹے زاویہ سے 18 ڈگری زیادہ ہے۔زاویہ بتائیے۔

(iii) کرکٹ ٹیم کے کوچ نے 7 بیٹ اور 6 گیندیں ₹3800 میں خریدیں۔بعد میں اس نے 3 بیٹ اور 5 گیندیں ₹1750 میں خریدیں۔بیٹ اور گیند کی قیمت معلوم کیجئے۔

(iv) کسی شہر میں ٹیکسی کے کرایہ میں ایک تو متعین کرایہ ہوتا ہے اور اس کے ساتھ جتنا فاصلہ طے کیا جاتا ہے اس کا کرایہ ہوتا ہے۔ 10 km کے فاصلہ کے دیا گیا کل کرایہ ₹105 اور 15 km کے فاصلہ کے لئے کل کرایہ ₹155 ہے۔تو متعین کرایہ اور فی کلومیٹر کرایہ معلوم کیجئے؟ 25 km کا فاصلہ طے کرنے کے لئے کسی شخص کو کتنا کرایہ دینا پڑے گا؟

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(v) اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 2 جمع کر دیا جائے تو کسر $\frac{9}{11}$ ہو جاتی ہے اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں 3 جمع کر دیا جائے تو کسر $\frac{5}{6}$ ہو جاتی کسر معلوم کیجئے۔

(vi) 5 سال بعد جیکب کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کی تین گنا ہوگی۔ پانچ سال پہلے جیکب کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کی 7 گنا تھی۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجئے۔

3.3.2 اخراج کا طریقہ

آیئے ایک اور طریقے پر غور کرتے ہیں جس میں ایک متغیر کا اخراج کیا جاتا ہے۔ کبھی کبھی یہ طریقہ بدل کے طریقہ سے زیادہ مناسب ہوتا ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں یہ طریقہ کس طرح عمل پیرا ہوتا ہے۔

مثال 8 : دو اشخاص کی آمدنی کی نسبت 9:7 اور خرچ کی نسبت 4:3 ہے اگر دونوں میں سے ہر ایک 2000 روپے مہینہ بچاتا ہے تو ان کی ماہانہ آمدنی معلوم کیجئے۔

حل : فرض کیجئے کہ دونوں اشخاص کی آمدنی ₹$9x$ اور ₹$7x$ ہے اور ان کے اخراجات بالترتیب ₹$4y$ اور ₹$3y$ ہیں، تو اس صورت حال میں مساواتیں ہوں گی۔

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

اور $$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

قدم 1: مساوات (1) کو 3 سے اور (2) کو 4 سے ضرب کر کے y کے ضریبوں کو یکساں بنا لیجئے تب ہمارے پاس مساواتیں ہوتی ہیں۔

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

اور $$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

قدم 2: y کا اخراج کرنے کے لئے مساوات (3) کو (4) میں سے گھٹایئے۔ کیونکہ y کے ضریب یکساں ہیں۔ اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(28x - 27x) - (12y + 12y) = 8000 - 6000$$

یعنی $$x = 2000$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

قدم 3: x کی اس قدر کو (1) میں رکھ کر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$9(2000) - 4y = 2000$$

یعنی $$y = 4000$$

اس لئے مساواتوں کا حل ہے $x = 2000$, $y = 4000$ اس لئے اشخاص کی ماہانہ آمدنی ہے بالترتیب ₹18000 اور ₹14000۔

تصدیق: $18000 : 14000 = 9 : 7$ اور ان کے اخراجات کی نسبت $18000 - 2000 : 14000 - 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3$

ریمارک:

1۔ مذکورہ بالا مثال کو حل کرنے میں استعمال ہوا طریقہ **اخراج کا طریقہ** کہلاتا ہے۔ کیونکہ پہلے ہم ایک متغیر کو خارج کرتے ہیں جس سے ہمیں ایک متغیر والی مساوات مل جاتی ہے۔ مذکورہ بالا مثال میں ہم نے y کو خارج کیا۔ ہم x کو بھی خارج کر سکتے تھے۔ اس طرح کر کے بھی سوال کو حل کیجئے۔

(2) اس سوال کو حل کرنے کے لئے آپ گراف اور بدل کے طریقہ بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ایسا کیجئے اور دیکھئے کہ کون سا سا طریقہ زیادہ مفید ہے:

آیئے اخراج کے طریقہ میں استعمال ہوئے اقدام کو نوٹ کرتے ہیں:

قدم 1: سب سے پہلے ہم دونوں مساواتوں کو ایک مناسب غیر صفر مستقلہ سے ضرب کرتے ہیں تا کہ کسی ایک متغیر (x یا y) کے ضریب عددی طور پر یکساں ہو جائیں۔

قدم 2: پھر ایک مساوات کو دوسری مساوات میں جمع یا تفریق کیجئے تا کہ ایک متغیر خارج ہو جائے۔ اگر آپ کو ایک متغیر میں مساوات حاصل ہو جائے تو قدم 3 کی طرف آگے بڑھئے۔

اگر قدم 2 میں متغیر والا کوئی صحیح بیان ملتا ہے تب ان مساواتوں کا لامحدود حل ہوں گے۔

اگر قدم 2 میں متغیر والا کوئی غلط بیان ملتا ہے تب ان مساواتوں کا کوئی حل نہیں ہوگا۔ یہ غیر ہم آہنگ ہوگی۔

قدم 3: قدم 2 سے ملی ایک متغیر (x یا y) کی مساوات کو حل کیجئے۔ اور اس کی قدر معلوم کیجئے۔

قدم 4: (x یا y) کی اس قدر کو اصل مساواتوں میں سے کسی ایک مساوات میں رکھ کر دوسرے متغیر کی قدر معلوم کیجئے۔

© KSEEB NOT TO BE REPUBLISHED

اس کی مزید وضاحت کے لئے ہم کچھ اور مساواتوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 9 : اخراج کے طریقہ سے مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کے تمام ممکنہ حل معلوم کیجئے۔

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

حل:

قدم 1: x کے ضریب کو یکساں بنانے کے لئے مساوات (1) کو 2 سے اور (2) کو 1 سے ضرب کیجئے۔ تب ہمیں مساواتیں ملتی ہیں وہ اس طرح ہیں:

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

قدم 2: مساوات (4) کو (3) میں سے تفریق کرنے پر

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = (16 - 7)$$

یعنی $0 = 9$ جو کے ایک غلط بیان ہے۔

اس لئے مساواتوں کے جوڑوں کا کوئی حل نہیں ہے۔

مثال 10: ایک دو ہندسی عدد اور ہندسوں کے مقام تبدیل ہونے سے بننے والے عدد کا حاصل جمع 66 ہے اگر عدد کے ہندسوں میں فرق 2 کا ہو تو عدد معلوم کیجئے۔ ایسے کل کتنے عدد ہیں ؟

حل: مان لیجئے پہلے عدد کا دہائی کا اور اکائی کا ہندسہ بالترتیب x اور y ہے۔ اس لئے پہلا عدد پھیلی ہوئی شکل میں ہے $10x + y$ (مثال کے طور پر $10(5) + 6 = 56$)

جب ہندسوں کی جگہ تبدیل کر دی جائے تب x اکائی کا ہندسہ اور y کا دہائی کا ہندسہ بن جاتا ہے۔ اس لئے پھیلی ہوئی شکل میں یہ عدد ہوگا $10y+x$ (مثال کے طور پر جب 56 کے ہندسوں کی جگہ تبدیل کر دی جائے تو $10(6)+5=65$ حاصل ہوتا ہے) دی ہوئی شرط کے مطابق

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

یعنی $11(x + y) = 66$

یعنی $x + y = 6$ (1)

ہمیں یہ بھی دیا ہوا ہے کہ ہندسوں میں 2 کا فرق ہے اس لئے

یا تو $x - y = 2$ (2)

یا $y - x = 2$ (3)

اگر $x - y = 2$ ہے تو (1) اور (2) کو حل کرنے پر (اخراج کے طریقہ سے) ہمیں $x = 4$ اور $y = 2$ ملتا ہے

اس حالت میں عدد 42 ہوگا۔

اگر $y - x = 2$ تب اخراج کے طریقہ سے (1) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں $x = 2$ اور $y = 4$ ملتا ہے

اس حالت میں عدد 24 ہوگا۔ اس طرح سے ایسے دو عدد ہیں 42 اور 24

تصدیق: یہاں $42 + 24 = 66$ اور $4 - 2 = 2$ اور $24 + 42 = 66$ اور $4 - 2 = 2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 3.3

1۔ مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کے جوڑوں کو اخراج اور بدل کے طریقوں سے حل کیجئے۔

(i) $x + y = 5$ اور $2x - 3y = 4$

(ii) $3x + 4y = 10$ اور $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ اور $9x = 2y + 7$

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ اور $x - \frac{y}{3} = 3$

2۔ مندرجہ ذیل سوالوں میں خطی مساواتوں کے جوڑوں کی تشکیل کیجئے اور اخراج کے طریقہ سے ان کے حل معلوم کیجئے۔ (اگر حل ہوں)

(i) اگر ہم کسی کسر کے شمار کنندہ میں 1 جمع کریں اور نسب نما میں سے 1 تفریق کر دیں تو کسر 1 ہو جاتی ہے۔ اگر ہم اس کسر کے صرف نسب نما میں 1 جمع کریں تو کسر $\frac{1}{2}$ ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کیجئے؟

(ii) پانچ سال پہلے نوری کی عمر سونو کی عمر کا تین گنا تھی۔ دس سال بعد نوری کی عمر سونو کی عمر کی دگنی ہوگئی نوری اور سونو کی موجودہ عمر کیا ہے؟

(iii) ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع 9 ہے۔ اور اس عدد کا نو گنا ہندسوں کی جگہ تبدیل کر کے ملنے والے عدد کے دو گنے برابر ہے۔ عدد معلوم کیجئے۔

(iv) مینا 2000 ₹ نکالنے کے لئے بینک گئی اس نے کیشئر سے صرف 50 روپے اور 100 ₹ کے نوٹ مانگے مینا کو کل 25 نوٹ ملے۔ معلوم کیجئے اس کو 50 ₹ اور 100 ₹ والے کتنے نوٹ ملے۔

(v) ایک لائبریری کا پہلے تین دن تک ایک متعین چارج ہے اور اس کے بعد ہر ایک دن کا ایک اضافی چارج ہے۔ سریتا ایک کتاب کو 7 دن تک اپنے پاس رکھتی ہے اور 27 ₹ ادا کرتی ہے جبکہ سوزی اس کتاب کو 5 دن تک رکھتی ہے اور 21 ₹ ادا کرتی ہے۔ متعین چارج اور ہر ایک دن کا اضافی چارج معلوم کیجئے۔ $x = \frac{-84+140}{20-6} = 4$

3.4 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ دو متغیر والی خطی مساواتوں کے جوڑوں کو مندرجہ ذیل طریقوں سے ظاہر اور حل کر سکتے ہیں۔

(i) گراف کا طریقہ (ii) الجبری طریقہ

2۔ مساواتوں کا جوڑا گراف کے ذریعہ دو خطوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

گراف کا طریقہ:

(i) اگر خطوط ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں تو وہ نقطہ تقاطع دونوں مساواتوں کا یکتا حل ہوتا ہے اس حالت میں مساواتوں کا جوڑا **ہم آہنگ** کہلاتا ہے۔

(ii) اگر خطوط منطبق ہوتے ہیں تو حل لامحدود ہوتے ہیں۔ اور خط پر موجود ہر ایک نقطہ دونوں مساواتوں کا حل ہوتا ہے۔ اس حالت میں مساوات **تابع (ہم آہنگ)** ہوتی ہیں۔

(iii) اگر خطوط متوازی ہوں تو مساواتوں کے جوڑے کا کوئی حل نہیں ہوتا۔ اس حالت میں مساواتیں **غیر ہم آہنگ** کہلاتی ہیں۔

3۔ الجبری طریقہ: خطی مساواتوں کے جوڑوں کو حل کرنے کے لئے ہم نے مندرجہ ذیل طریقوں کو سیکھا۔

(i) بدل (Substitution Method) کا طریقہ

(ii) اخراج (Elimination Method) کا طریقہ

@KTS NOT TO BE REPUBLISHED

4۔ اگر خطی مساواتوں کا جوڑا $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ کی شکل کا ہو تو مندرجہ ذیل باتیں ممکن ہوتی ہیں:

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$ اس حالت میں خطی مساواتوں کا جوڑا ہم آہنگ ہوتا ہے۔

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ اس حالت میں خطی مساواتوں کا جوڑا غیر ہم آہنگ ہوتا ہے۔

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ اس حالت میں خطی مساواتوں کا جوڑا تابع اور ہم آہنگ ہوتا ہے۔

5۔ ایسی بہت سی صورتِ حال ہوتی ہیں جن کو ریاضیاتی طور پر شروع میں دو خطی مساواتوں میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ لیکن بعد میں ہم ان کو بدل کے طریقہ سے خطی مساواتوں کے جوڑوں میں تحلیل کر لیتے ہیں۔

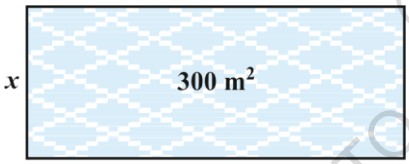
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5013CH04

4 دودرجی مساواتیں (QUADRATIC EQUATIONS)

4.1 تعارف

باب 2 میں آپ نے مختلف قسم کی کثیر رکنیوں کے بارے میں پڑھا۔ جس میں ایک قسم دو درجی کثیر رکنی بھی تھی جو $ax^2+bx+c, a\neq 0$ کی شکل کی ہوتی ہے۔ جب ہم اس کثیر رکنی کو صفر کے برابر رکھ دیتے ہیں تو یہ دودرجی مساوات بن جاتی ہے۔ جب ہم بہت سے روزمرہ کے مسائل کا سامنا کرتے ہیں تو دودرجی مساواتیں ابھر کر سامنے آتی ہیں۔ مثال کے طور پر ایک خیراتی ٹرسٹ عبادت کے لیے ایک ایسا ہال بنانا چاہتا ہے جس کا کارپیٹ (قالین) کا رقبہ 300 مربع میٹر ہو اور اس کی لمبائی چوڑائی کے دوگنے سے 1 میٹر زیادہ ہو۔ تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہوگی؟ مان لیجیے ہال کی چوڑائی x میٹر ہے تب اس کی لمبائی ہوگی $(2x+1)$ میٹر۔ اس مسئلہ کو تصویری طور پر ہم نے شکل 4.1 میں دکھایا ہے



شکل 4.1

$$\text{ہال کا رقبہ} = (2x+1)x\,\text{m}^2$$
$$= (2x^2+x)\,\text{m}^2$$
$$\therefore\ 2x^2+x=300 \quad \text{(دیا ہوا)}$$
$$\therefore\ 2x^2+x-300=0$$

اس طرح سے ہال کی چوڑائی، مساوات $2x^2+x-300=0$ جو ایک دودرجی مساوات ہے، کو مطمئن کریں گی۔

بہت سے لوگوں کا یہ ماننا ہے کہ بیبلونین (Babylonians) پہلے وہ لوگ تھے جنھوں نے دو درجی مساواتوں کو حل

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

کیا۔مثال کے طور پر وہ جانتے تھے کیسے دو مثبت اعداد کو معلوم کیا جا سکتا ہے جن کا حاصل جمع مثبت ہو اور حاصل ضرب بھی مثبت ہو اور یہ مسلہ دو درجی مساوات $x^2 - px + q = 0$ کو حل کرنے کے معادل ہے۔یونانی ریاضی داں اقلیدس نے لمبائیاں ، جو ہماری موجودہ اصطلاح میں دو درجی مساوات کا حل ہے، معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ نکالا۔دو درجی مساواتوں کو حل کرنے کا سہرا ، قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں کے سر جاتا ہے ۔درحقیقت برہم گپتا (C.E. 598-665) نے $ax^2 + bx = c$ کی شکل والی دو درجی مساواتوں کا حل کرنے کا ایک صریح فارمولہ دیا ۔بعد میں سری دھرا چاریہ (C.E. 1025) نے ایک فارمولہ معلوم کیا جو اب دو درجی فارمولہ کہلاتا ہے (جیسا کے بھاسکر II سے کوٹ کیا گیا ہے) جس سے دو درجی مساواتوں کو کامل مربع کے طریقہ سے حل کیا جاتا ہے۔ایک عرب ریاضی داں الخورزمی (تقریباً 800 عیسوی) نے بھی مختلف قسم کی دو درجی مساواتوں کا مطالعہ کیا Abraham bar Hiyya Ha-Nasi نے اپنی کتاب 'Liber embadorum' جو C.E. 1145 میں یورپ میں چھپی، میں مختلف دو درجی مساواتوں کا حل دیا۔

اس باب میں آپ دو درجی مساواتوں کے بارے میں پڑھیں گے اور ان کے حل مختلف طریقوں کے ذریعہ سے معلوم کریں گے۔آپ روزمرہ کے مسئلوں کو حل کرنے میں اس کے استعمال کے بارے میں بھی سیکھیں گے۔

@CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

4.2 دو درجی مساوات

متغیر x میں دو درجی مساوات وہ مساوات ہے جس کی شکل $ax^2 + bx + c = 0$ کی ہوتی ہے جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ مثال کے طور پر $2x^2 + x - 300 = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے اسی طرح $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ، $4x - 3x^2 + 2 = 0$ اور $1 - x^2 + 300 = 0$ بھی دو درجی مساواتیں ہیں۔

درحقیقت کوئی بھی $p(x) = 0$ کی شکل کی مساوات جہاں $p(x)$ درجہ 2 کی کثیر رکنی ہے، دو درجی مساوات ہے۔لیکن جب ہم $P(x)$ کی ارکان کو درجہ کے حساب سے سے گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں تب ہمیں مساوات کی معیاری شکل حاصل ہوتی ہے۔ یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ یہ **دو درجی مساوات کی معیاری شکل** کہلاتی ہے۔

ہمارے اردگرد کی دنیا کے ریاضی کے مختلف میدانوں میں ہمیں دو درجی مساواتوں کی بہت سی صورت حال ملیں گی۔آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل صورت حال کو ریاضیاتی طور پر ظاہر کیجیے۔

(i) جان اور جیوانتی کے پاس 45 ماربل ہیں۔دونوں 5, 5 ماربل کھو دیتے ہیں اور ان کے پاس بقیہ ماربل کا حاصل

ضرب 124 ہے۔ ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ شروعات میں ان دونوں کے پاس کتنے ماربل تھے۔

(ii) ایک کاٹیج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ کھلونے بناتے ہے۔ ہر ایک کھلونہ کو بنانے میں ہوا خرچ (روپیوں میں) ایک دن میں بنے کھلونوں کی تعداد سے 55 کم ہے۔ کسی ایک دن کھلونہ بنانے کا کل خرچ ₹750 ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اس دن کل کتنے کھلونے بنائے گئے ؟

حل:

(i) مان لیجئے جان کے پاس x ماربل تھے

تو جیونتی کے پاس ماربل ہوئے $=(45-x)$ (کیوں؟)

جب جان نے 5 ماربل کھودئے تو اس کے پاس باقی ماربل $= x-5$

جب 5 ماربل کھو گئے تو جیونتی کے پاس باقی کل ماربل $= 45-x-5$

$= 40-x$

اس لئے ان کا حاصل ضرب $= (x-5)(40-x)$

$= 40x-x^2-200+5x$

$= -x^2+45x-200$

اس لئے $-x^2+45x-200 = 124$ (دیا ہوا ہے، کے حاصل ضرب 124)

یعنی $-x^2+45x-324 = 0$

یعنی $x^2-45x+324 = 0$

اس لئے جان کے پاس جو ماربل ہوں گے وہ دودرجی مساوات $x^2-45x+324 = 0$ کو مطمئن کریں گے جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

(ii) مان لیجئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد x ہے

اس لئے اس دن ہر ایک کھلونہ بنانے کا خرچ (روپیوں میں) ہے $=55-x$

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کا کل خرچ $= x(55-x)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $x(55-x)=750$

یعنی $55x-x^2=750$

یعنی $-x^2+55x-750=0$

یعنی $x^2-55x+750=0$

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد دودرجی مساوات $x^2-55x+750=0$ کو مطمئن کرے گی جو کے مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

مثال 2: جانچ کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل دودرجی مساواتیں ہیں یا نہیں۔

(i) $(x-2)^2+1=2x-3$ (ii) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)=x^2+1$ (iv) $(x+2)^3=x^3-4$

حل: (i)

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= (x-2)^2+1\\ &= x^2-4x+4+1\\ &= x^2-4x+5\end{aligned}$$

اس لئے $(x-2)^2+1=2x-3$ کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$x^2-4x+5=2x-3$$

یعنی $x^2-6x+8=0$

جو $ax^2+bx+c=0$ کی شکل ہے۔

اس لئے دی ہوئی مساوات دودرجی مساوات ہے۔

(ii) کیونکہ $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

اس لئے $x^2+x+8=x^2-4$

یعنی $x+12=0$

اس لئے یہ دودرجی مساوات نہیں ہے۔ یہ $ax^2+bx+c=0$ کی شکل کی نہیں ہے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) یہاں $\text{LHS} = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$

اس لئے $x(2x+3) = x^2 + 1$ کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$2x^2 + 3x = x^2 + 1$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہے

اس لئے یہ دودرجی مساوات ہے۔

(iv) $\text{LHS} = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

اس لئے $(x+2)^3 = x^3 - 4$ کو لکھ سکتے ہیں

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

یعنی $6x^2 + 12x + 12 = 0$ یا $x^2 + 2x + 2 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کا ہے۔

اس لئے یہ دودرجی مساوات ہیں۔

ریمارک: (ii) کے بارے میں خبردار! اس میں دی ہوئی مساوات دودرجی نظر آرہی ہے لیکن یہ دودرجی نہیں ہے اسی طرح (iv) کی مساوات دیکھنے میں کعبی مساوات نظر آتی ہے (درجہ 3 والی مساوات) لیکن یہ دودرجی مساوات نکلی، جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی مساوات کے بارے میں کوئی نظریہ قائم کرنے سے پہلے اس کو مختصر کر لیجیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 4.1

1۔ جانچ کیجئے کہ مندرجہ ذیل میں کون سی مساواتیں دودرجی ہیں:

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2۔ مندرجہ ذیل صورت حال کو دو درجی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) ایک مستطیل کی شکل والے پلاٹ کا رقبہ 528m^2 ہے۔اس پلاٹ کی لمبائی (میٹروں میں) اس کی چوڑائی کے دگنے سے 1 زیادہ ہے ہمیں پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(ii) مسلسل دو مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے۔ہمیں صحیح اعداد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(iii) روہن کی ماں اس سے عمر میں 26 سال بڑی ہے۔3 سال بعد ان کی عمروں (سالوں میں) کا حاصل ضرب 360 ہوگا۔ہم روہن کی موجودہ عمر معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

(iv) ایک ٹرین 480 km کا فاصلہ یکساں رفتار سے طے کرتی ہے۔اگر اس کی رفتار 8 km/h کم ہوتی ہے تو وہی فاصلہ طے کرنے میں 3 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے ہمیں ٹرین کی رفتار معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

4.3 اجزائے ضربی کے طریقہ سے دو درجی مساوات کا حل

دو درجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$ پر غور کیجئے۔اگر ہم اس مساوات کی LHS میں x کی جگہ 1 رکھ دیں تو ہمیں ملتا ہے

$(2\times 1^2) - (3\times 1) + 1 = 0 = \text{RHS}$ ہم کہتے ہیں کہ 1 دو درجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$

کا جز رہے۔اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ 1 دو درجی کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 1$ کا صفر ہے

$0 = \text{RHS}$

عمومی طور پر ایک حقیقی عدد α دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کا جز کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2-b\alpha+c=0$

ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ $x=\alpha$ دو درجی مساوات کا حل ہے یا α دو درجی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔یہ بات نوٹ کیجیے کہ دو درجی کثیر رکنی ax^2+bx+c کے صفر اور دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جز ایک ہی ہوتے ہیں۔

باب 2 میں آپ نے مشاہدہ کیا تھا کے دو درجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں اس لئے کسی بھی دو درجی مساوات کے زیادہ سے زیادہ دو جز رہو سکتے ہیں۔

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ وسطی رکن کو منقسم کر کے ہم کس طرح دو درجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی بناتے ہیں۔ ہم اس علم کو دو درجی مساوات کے جز رمعلوم کرنے کے لئے استعمال کریں گے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

آیئے دیکھتے ہیں کیسے۔

مثال 3: اجزائے ضربی کے طریقہ سے دودرجی مساوات $2x^2-5x+3=0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل: آیئے وسطی رکن $-5x$ کو $(-3x-2x)$ میں منقسم کرتے ہیں [کیونکہ $(-2x)\times(-3x)=6x^2=(2x^2)\times 3$]

اس لئے $2x^2-5x+3=2x^2-3x+3=2x(x-1)-3(x-1)=(2x-3)(x-1)$

اب $2x^2-5x+3=0$ کو ہم $(2x-3)(x-1)=0$ کی طرح لکھ سکتے ہیں

یعنی یا تو $(2x-3=0)$ یا $(x-1=0)$

$$x=\frac{3}{2} \text{ یا } x=1$$

دوسرے لفظوں میں 1 اور $\frac{3}{2}$ مساوات $2x^2-5x+3=0$ کے جزر ہیں،

تصدیق کیجئے یہ دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں۔

نوٹ کیجئے ہم نے $2x^2-5x+3=0$ کے جزر $2x^2-5x+3$ اجزائے ضربی میں تحلیل کر کے دو خطی اجزائے ضربی بنایئے اور ہر جز وضربی کو صفر کے برابر رکھئے۔

مثال 4: دودرجی مساوات $6x^2-x-2=0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل:

$$6x^2-x-2=6x^2+3x-4x-2$$

$$=3x(2x+1)-2(2x+1)$$

$$=(3x-2)(2x+1)$$

$6x^2-x-2=0$ کے جزر x کی قدریں ہیں جس کے لئے $(3x-2)(2x+1)=0$

اس لئے، $3x-2=0$ یا $2x+1=0$

یعنی $x=\frac{2}{3}$ یا $x=-\frac{1}{2}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر $\frac{2}{3}$ اور $\frac{-1}{2}$ ہیں

ہم جزروں کی تصدیق اس طرح کر سکتے ہیں، ان کی قدریں مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ میں رکھ کر دیکھیں کہ وہ اس کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

مثال 5: دو درجی مساوات $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل:

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$$

$$= \sqrt{3}\,x\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)$$

اس لئے مساوات کے جزر x کی وہ قدریں ہیں جن کے لئے

$$\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) = 0$$

اب، $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ یا $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

اس لئے جزروں کی تکرار ہے، ہر ایک تکراری جزو ضربی $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ کے لئے

اس لئے $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ہیں

مثال 6: سیکشن 4.1 میں لئے گئے عبادت کے ہال کے ابعاد معلوم کیجیے

حل: سیکشن 4.1 میں ہم نے پایا تھا کہ اگر ہال کی چوڑائی x m, تب x مساوات $2x^2 + x - 300 = 0$ کو مطمئن کرے گا اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کرنے پر ہم مساوات کو لکھتے ہیں۔

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x\,(x - 12) + 25\,(x - 12) = 0$$

یعنی $$(x - 12)(2x + 25) = 0$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جزر ہیں $x = 12$ یا $x = -12.5$ کیونکہ x ہال کی چوڑائی ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہو سکتی

اس لئے ہال کی چوڑائی $12\,\text{km}$

اس کی لمبائی $= 2x+1 = 2\,(12)+1 = 25\,\text{m}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 4.2

1۔ اجزائے ضربی کے طریقہ سے مندرجہ ذیل دودرجی مساواتوں کو حل کیجیے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 \quad 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x - \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2۔ مثال 1 میں دیے گئے سوالوں کو حل کیجیے۔

3۔ دو عدد معلوم کیجیے جن کا حاصل جمع 27 ہے اور حاصل ضرب 182 ہے۔

4۔ مسلسل دو مثبت صحیح اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 365 ہے۔

5۔ ایک قائم مثلث کا ارتفاع اس کے قاعدہ سے 7cm کم ہے۔ اگر اس کا وتر 13cm ہے تو باقی دو ضلع معلوم کیجیے۔

6۔ ایک کاٹیج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ برتن بناتی ہے، یہ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ کسی ایک دن ہر ایک ایک برتن کے بنانے کا خرچ (روپیوں میں) اس دن بنے برتنوں کے دگنے سے 3 زیادہ ہے۔ اگر اس دن برتن بنانے کا کل خرچ ₹90 ہے تو اس دن بنے برتنوں کی کل تعداد اور ہر برتن کا خرچ معلوم کیجیے۔

4.4 جزروں کی نوعیت

دودرجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جزر ہیں۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اگر $b^2 - 4ac > 0$ تو ہمیں دو مختلف حقیقی جزر مل سکتے ہیں $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac = 0$ تب $x = -\frac{b}{2a} \neq 0$ یعنی $x = \frac{-b}{2a}$ یا $-\frac{b}{2a}$

اس لئے $\frac{-b}{2a}$ دونوں $ax^2 + bx + c = 0$ اس مساوات کے جذر ہیں

اس لئے ہم کہتے ہیں کہ وہ درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے دو مساوی حقیقی جزر ہوتے ہیں۔

اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہے تب کوئی ایسا حقیقی عدد نہیں ہے جس کا مربع $b^2 - 4ac$ ہو۔

($b^2 - 4ac$) وضاحت کرتا ہے کہ دی گئی دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے حقیقی جزر ہوتے ہیں یا نہیں،

اس لیے $b^2 - 4ac$ کو اس دو درجی مساوات کا **ممیّز** (discrimanant) کہتے ہیں۔

اس لئے دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر

(i) **مختلف اور حقیقی ہوں گے اگر** $b^2 - 4ac > 0$

(ii) **حقیقی اور مساوی ہوں گے اگر** $b^2 - 4ac = 0$

(iii) **حقیقی نہیں ہوں گے اگر** $b^2 - 4ac < 0$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7 : دو درجی مساوات $2x^2 - 4x + 3 = 0$ کا ممیّز معلوم کیجئے اور پھر اس کے جزروں کے استعمال معلوم کیجئے۔

حل: دی ہوئی مساوات $ax^2 + bx - c = 0$ کی شکل کی ہے جہاں $a = 2, b = -4$ اور $c = 3$ اس لئے ممیّز ہے

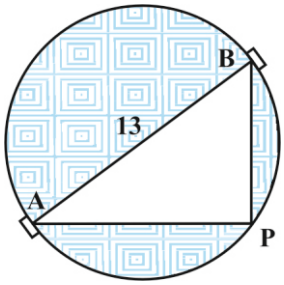
$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$ جزروں

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہیں۔

مثال 8 : 13m قطر والے ایک دائری پارک کی باؤنڈری کے ایک نقطہ پر ایک کھمبا اس طرح کھڑا کیا جاتا ہے کہ اس کے قطر کے سرے کے نقطوں A اور B پر موجود دو دروازوں سے اس کے فاصلہ کا فرق 7 m ہے۔ کیا ایسا کرنا ممکن ہے؟ اگر ہاں تو

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

معلوم کیجئے کہ 2 دروازوں سے کتنے فاصلہ پر کھمبا کھڑا کیا جائے گا۔



شکل 4.2

حل: آیئے پہلے ڈائی گرام بنایئے (شکل 4.2 دیکھئے)

مان لیجئے P، کھمبا کا مطلوبہ مقام ہے، مان لیجئے کھمبا کا دروازہ B سے فاصلہ x m ہے یعنی $BP = x$ m ۔ اب دونوں دروازوں کے کھمبا سے فاصلوں کا فرق $AP - BP = 7$ m

(یا $BP - AP$) اس لئے $AP = (x + 7)$ m

اب $AB = 13$ m اور کیونکہ AB وتر ہے

$\angle APB = 90^\circ$ (کیوں؟)

اس لئے $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (فیثاغورث کا مسئلہ)

یعنی $(x+7)^2 + x^2 = 13^2$

یعنی $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

یعنی $2x^2 + 14x - 120 = 0$

$2(x^2 + 7x = 60) = 0$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

اس لئے دروازہ B سے کھمبا کا فاصلہ x مساوات کو مطمئن کرے گا۔

اس لئے اگر اس مساوات کے جز حقیقی ہوئے تو ایسا ممکن ہے کہ کھمبا اس مقام پر لگایا جا سکے۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ ایسا ہے آیئے اس کی ممیّز (Discriminant) پر غور کیجئے۔

ممیّز $= b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$

اس لئے دی ہوئی دودرجی مساوات کے دو حقیقی جز رہیں۔ اس لئے پارک کی باؤنڈری پر کھمبا کھڑا کیا جا سکتا ہے۔

دودرجی مساوات $x^2 + 7x - 60 = 0$ کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

اس لئے $x = 5$ یا -12

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کیونکہ x دروازہ B اور کھمبے کے درمیان فاصلہ ہے۔ اس لئے یہ مثبت ہوگا۔ اس لئے $x = -12$ کو نظر انداز کرنا ہوگا۔ اس لئے $x = 5$

اس لئے کھمبا پارک کی باؤنڈری پر دروازہ B سے 5m کے فاصلہ پر اور دروازہ A سے 12 m کے فاصلہ پر ہوگا۔

مثال 9 : مساوات $3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ کا ممیّز معلوم کیجئے اور پھر جزروں کی استعمال معلوم کیجئے۔ ان کو معلوم کیجئے اگر یہ حقیقی ہیں۔

حل: یہاں $a = 3, b = -2$ اور $c = \frac{1}{3}$

اس لئے ممیّز $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

اس طرح دی ہوئی دو درجی مساوات کے دو مساوی حقیقی جزر ہیں۔

جزر ہیں $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ یعنی $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

مشق 4.3

1۔ مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے جزروں کی نوعیت معلوم کیجئے۔ اگر جزر موجود ہیں تو ان کو معلوم کیجئے۔

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2۔ k کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے مساوی جزر ہیں۔

(i) $2x^2 - kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3۔ کیا یہ ممکن ہے کہ ایسا آموں کا باغ ڈیزائن کیا جائے جس کی لمبائی اس کی چوڑائی کی دگنی ہے اور اس کا رقبہ 800m^2 ہو؟ اگر ایسا ممکن ہے تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

4۔ کیا مندرجہ ذیل صورتِ حال ممکن ہے۔ اگر ہے تو ان کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

دو دستوں کی عمروں کا حاصل جمع 20 سال ہے۔ چار سال پہلے ان کی عمروں کا حاصل ضرب (سالوں میں) 48 تھا۔

5۔ کیا ایک ایسا مستطیل پارک کا ڈیزائن کرنا ممکن ہے جس کا احاطہ 80m ہو اور رقبہ 400m^2؟ اگر ہے تو اس کی لمبائی و چوڑائی معلوم کیجئے۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ متغیر x میں دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہوتی ہے جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$

2۔ ایک حقیقی عدد α دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر مساوی ہوتے ہیں۔

3۔ اگر ہم دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کو دو خطی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں تو دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ہر ایک خطی جزو ضربی کو صفر کے برابر رکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔

4۔ دودرجی فارمولہ: دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ہیں

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ہے جب کہ $b^2 - 4ac \geq 0$

5۔ ایک دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے

(i) دو مختلف اور حقیقی جزر ہوں گے اگر $b^2 - 4ac > 0$

(ii) مساوی جزر ہوں گے اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) حقیقی جزر نہیں ہوں گے اگر $b^2 - 4ac < 0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

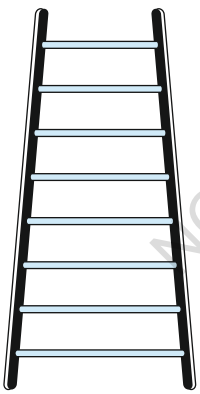
5 حسابی تصاعد (ARITHMETIC PROGRESSIONS)

5.1 تعارف

آپ نے کائنات میں مشاہدہ کیا ہوگا کہ بہت سی چیزیں ایک مخصوص پیٹرن پر بنی ہوتی ہیں جیسے سورج مکھی کے پھول شہد کی مکھی کے چھتّے کے سوراخ، مکئی کے بھٹا پر دانہ، انناس کے spiral اور مخروط وغیرہ۔

ہم کچھ اور پیٹرن کا مشاہدہ کرتے ہیں جو ہماری روزمرہ زندگی میں نظر سے گزرتے ہیں جس کی کچھ مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) رینا نے ایک نوکری کے لیے عرضی دی اور چن لی گئی۔ اس کو ایک ایسا کام دیا گیا جس کی شروعاتی تنخواہ 8000 ₹ تھی اور اس میں 500 ₹ کی سالانہ بڑھوتری۔ اس کی پہلے، دوسرے، تیسرے.... سالوں میں تنخواہ (₹ میں) بالترتیب 8000, 8500, 9000..... تھی۔



شکل 5.1

(ii) ایک سیڑھی میں نیچے سے اوپر تک لگے ڈنڈوں میں 2cm کا فرق ہے، یعنی سب سے نیچے کا ڈنڈا سب سے بڑا اس سے اوپر کا اس سے 2cm چھوٹا اور اس سے اوپر کا اس سے 2cm چھوٹا جیسا کے (شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے) سب نیچے لگے ڈنڈے کی لمبائی 45 cm ہے اس طرح سے نیچے سے اوپر تک لگے ڈنڈوں کی بالترتیب لمبائیاں ہیں۔ 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

(iii) ایک بچت اسکیم میں ایک رقم 3 سال بعد خود کی $\frac{5}{4}$ گنا ہو جاتی ہے۔ 8000 ₹ کی سرمایہ کاری کرنے پر 9, 6, 3

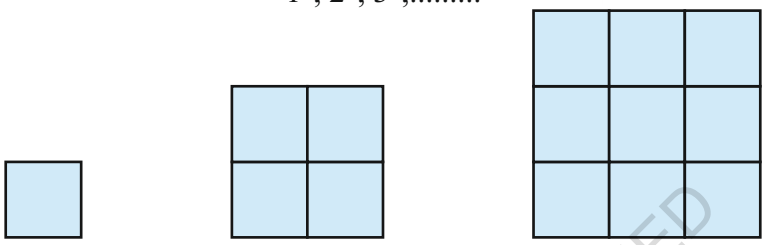
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اور 12 سال بعد میعاد پوری ہونے پر بالترتیب رقم (₹ میں) ملے گی:

10000 ، 12500 ، 15625 ، 19531.25

(iv) 1 مربع جن کے اضلاع 1,2,3.... اکائیوں کے ہیں، میں اکائی مربعوں کی تعداد شکل 5.2 میں دیکھیے بالترتیب ہے:

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ldots$



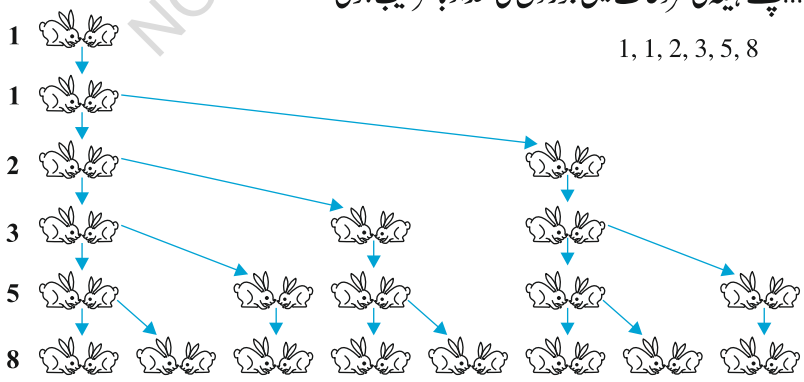
شکل 5.2

(v) شکیلہ نے ایک سال عمر کی اپنی بیٹی کے پرس میں ₹100 رکھے اور ہر سال وہ اس پرس میں ₹50 بڑھاتی رہی اس کی بیٹی کی پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی یوم پیدائش پر اس کے پرس میں رقم (₹ میں) بالترتیب تھی

100, 150, 200, 250

(vi) خرگوشوں کا ایک جوڑا اتنا چھوٹا تھا کہ وہ پہلے مہینہ میں اپنی نسل کو آگے نہیں بڑھا پائے لیکن اگلے آنے والے ہر ایک مہینہ میں انھوں نے ایک نئے جوڑے کو جنم دیا۔ اور ہر نئے جوڑے نے دوسرے مہینہ میں ایک نئے جوڑے کو جنم دیا۔ (شکل 5.3 دیکھیے) یہ مانتے ہوئے کہ درمیان میں کسی بھی خرگوش کی موت نہیں ہوئی ۔ پہلے، دوسرے، تیسرے .....چھٹے مہینہ کی شروعات میں جوڑوں کی تعداد بالترتیب ہوگی

1, 1, 2, 3, 5, 8



شکل 5.3

NOT TO BE REPUBLISHED @RTBS

مذکورہ بالا مثالوں میں ہم نے کچھ پیٹرن کا مشاہدہ کیا۔ کچھ میں ہم نے پایا کہ اگلی رکن پچھلے رکن میں کوئی متعین عدد جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے اور کچھ میں متعین عدد سے ضرب کر کے اور کچھ میں ہم نے پایا کہ وہ لگاتار (مسلسل) اعداد کے مربع ہیں۔ اسی طرح سے آگے بھی۔

اس باب میں ہم ان میں سے ایک پیٹرن کا مطالعہ کریں گے جس میں اگلے ارکان کو پچھلے رکن میں کسی متعین عدد کو جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ہم یہ بھی سیکھیں گے کہ ایسے سلسلوں کا n واں رکن اور n مسلسل ارکان حاصل جمع کیا ہوگا اور اس علم کو روزمرہ کے مسائل کو حل کرنے میں استعمال کریں گے۔

5.2 حسابی تصاعد

مندرجہ ذیل اعداد کی فہرست پر غور کیجیے۔

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

اس فہرست میں ہر ایک عدد ایک **رکن** کہلاتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا فہرست میں سے کوئی ایک رکن دیا ہوا ہو تو کیا آپ اس کا اگلا رکن معلوم کر سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو آپ اسے کس طرح لکھیں گے؟ شاید مندرجہ ذیل پیٹرن یا قاعدہ سے۔ اس لئے مشاہدہ کرتے ہیں اور قاعدہ کو تحریر کرتے ہیں۔

(i) میں ہر ایک رکن پچھلے رکن سے 1 زیادہ ہے

(ii) میں ہر ایک رکن پچھلے رکن سے 30 کم ہے۔

(iii) میں ہر ایک رکن پچھلے رکن میں 1 جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے

(iv) میں ہر رکن 3 سے یعنی ہر ایک رکن اس کے پچھلے رکن میں 0 جمع کر کے (یا تفریق کر) حاصل کیا جا سکتا ہے۔

(v) میں ہر ایک رکن کو اس کے پچھلے رکن میں 0.5 – جمع کر کے (یا 0.5 تفریق کر) حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مذکورہ بالا فہرست میں آپ نے دیکھا کہ ہر اگلے رکن کو پچھلے رکن میں کوئی متعین عدد جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اعداد کی ایسی فہرست حسابی تصاعد (A.P.) کہلاتی ہے۔

اس طرح سے حسابی تصاعد ایسے اعداد کی فہرست ہے جس میں ہر ایک رکن اس کے پچھلے رکن میں کوئی متعین عدد جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے سوائے پہلے رکن کے۔

یہ متعین عدد A.P. کا **مشترک فرق** کہلاتا ہے، یاد رکھئے یہ **فرق، مثبت، منفی یا صفر** بھی ہو سکتا ہے۔

آیئے ایک A.p. کے پہلے رکن کو a_1 سے دوسرے رکن کو a_2 سے اور nویں رکن کو a_n سے ظاہر کرتے ہیں اور مشترک فرق کو d سے۔ تب AP ہو جاتی ہے۔ $a_1, a_2\ a_3, \ldots, a_n$ ۔

اس لئے $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$

AP کی کچھ اور مثالیں ہیں۔

(a) صبح کی اسمبلی کی لائن میں کھڑے اسکول کے طلبا کی اونچائیاں (cm میں) ہیں 147,148,149,....,157

(b) کسی شہر میں جنوری کے مہینہ میں ایک ہفتہ کے ریکارڈ کئے گئے کم سے کم درجۂ حرارت (ڈگری سیلسیس میں) بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھے گئے ہیں۔

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) ₹1000 کے قرض پر کل کا 5% ادا کرنے کے بعد ہر مہینہ کی بقیہ رقم ہے۔ 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) پہلی کلاس سے لے کر بارہویں کلاس تک اول نمبر لانے والے طلبا کو اسکول کی طرف سے دئے گئے نقد انعام (₹ میں) بالترتیب ہیں۔ 200, 250, 300, 350, ..., 750

(e) 10 مہینوں تک ہر مہینہ کی کل بچت جب ہر مہینہ 50 روپے بچائے جاتے ہوں۔

50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500

قارئین کے لئے یہ ایک مشق ہے کہ بتائے مذکورہ بالا ہر فہرست A.P. کی ایک مثال ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

ایک A.P. کو ظاہر کرتی ہے جہاں a پہلا رکن اور d مشترک فرق یہ A.P. کی عمومی شکل ہے۔

نوٹ کیجئے اوپر دی گئی مثال (a) سے (e) میں ارکان کی تعداد محدود ہے۔ ایسی A.P. متناہی **حسابی تصاعد** کہلاتی ہے مزید نوٹ

NOT TO BE REPUBLISHED @KSEB

کیجئے ان میں سے ہر ایک A.P. کا آخری رکن دیا ہوا ہے اس سیکشن کی مثال (i) سے (vi) میں A.P. متناہی نہیں ہے اس لئے یہ **لامتناہی حسابی تصاعد** کہلاتا ہے۔ ایسی A.P. کا آخری رکن نہیں ہوتا۔

اب کسی A.P. کے بارے میں جاننے کے لئے کم سے کم کتنی باتوں کا معلوم ہونا ضروری ہے؟ کیا صرف پہلا رکن جاننا کافی ہے؟ یا صرف مشترک فرق جاننا کافی ہے؟ آپ یہ پائیں گے کہ دونوں کا معلوم ہونا ضروری ہے۔ پہلا رکن a اور مشترک فرق d

مثال کے طور پر اگر پہلا رکن a , 6 ہے اور مشترک فرق d، 3 ہے۔ تب A.P ہے۔

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

اور اگر $a = 6$ ہے اور d، -3 ہے تب $d = -3$ A.P. ہے۔

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

اسی طرح جب:۔

$-7, -9, -11, -13, \ldots$ ہے A.P. تب $a = -7,$ $d = -2$

$1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$ ہے A.P. تب $a = 1.0,$ $d = 0.1$

$0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$ ہے A.P. تب $a = 0$ $d = 1\frac{1}{2}$

$2, 2, 2, 2, \ldots$ ہے A.P. تب $a = 2$ $d = 0$

اس لئے جب آپ جانتے ہیں کہ a اور d کیا ہیں تو A.P بنا سکتے ہیں۔ اگر اس کے برعکس ہو تو کیا ہوگا؟ یعنی اگر آپ کو اعداد کی فہرست دی ہوئی ہو تو کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ A.P. ہے اور ہے تو اس کے a اور d کیا ہیں۔ کیونکہ a پہلا رکن ہے اس لئے یہ آسانی سے لکھا جا سکتا ہے، ہم یہ جانتے ہیں کہ ایک A.P. میں ہر اگلا رکن پچھلے رکن میں d جمع کرنے پر حاصل ہو سکتا ہے۔ اس لئے d کو ہم کسی بھی اگلے رکن میں سے پچھلا رکن تفریق کر کے کیا جا سکتا ہے۔ اور یہ تمام A.P. کے لئے یکساں ہوگا۔

مثال کے طور پر اعداد کی فہرست کے لئے $6, 9, 12, 15, \ldots,$

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

یہاں کسی دو مسلسل ارکان کا فرق 3 ہے تو دی ہوئی فہرست ایک A.P. ہے جس کا پہلا رکن 6 ہے اور مشترک فرق 3 ہے

اعداد $6, 3, 0, -3, \ldots$ کے لئے

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

اسی طرح سے یہ بھی ایک A.P. ہے جس کا پہلا رکن 6 اور مشترک فرق -3 ہے۔

عمومی طور پر ایک AP، $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ہو تو

$$d = a_{k+1} - a_k$$

جہاں a_{k+1} اور a_k بالترتیب $(k+1)$ واں رکن اور k واں رکن ہے۔

ایک دی ہوئی AP میں ہمیں تمام $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$. معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ یہ کافی ہے کہ ان میں سے صرف ایک معلوم ہو۔

اعداد $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$. پر غور کیجئے۔ ان کو دیکھنے سے ہی آپ یہ بتا سکتے ہیں کہ دو مسلسل ارکان کا فرق ہر جگہ مساوی نہیں ہے۔ اس لئے یہ AP. نہیں ہے۔

نوٹ کیجئے کہ AP، $6, 3, 0, -3, \ldots$. میں d معلوم کرنے کے لئے آپ نے 6 کو 3 میں سے تفریق کیا ہے نہ کے 3 کو 6 میں سے یعنی ہم k ویں رکن کو $(k+1)$ ویں رکن میں سے تفریق کرتے ہیں چاہے $(k+1)$ واں رکن چھوٹا بھی ہو۔

آیئے اس تصور کو مثالوں کی مدد سے مزید واضح کرتے ہیں۔

مثال 1: AP، $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \ldots$. کے لئے پہلا رکن a اور مشترک فرق d معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $a = \frac{3}{2}$ اور $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

یاد رکھئے کہ اگر ہمیں اعداد حسابی تصاعد میں ہیں، یہ معلوم ہو جائے تو ہم دو مسلسل ارکان کے ذریعہ d معلوم کر سکتے ہیں۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 2: مندرجہ ذیل اعداد کی کون سی فہرست ایک AP کی تشکیل کرتی ہیں؟ اگر یہ AP ہیں تو ان کے اگلے 2 ارکان لکھیں:

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . . (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

حل:

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ ہر جگہ یکساں ہے۔ اس لئے دی گئی اعداد فہرست AP جس میں مشترک فرق $d = 6$

اگلے دو ارکان ہیں: $22 + 6 = 28$ اور $28 + 6 = 34$

(ii)

$$a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$

$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ ہر جگہ یکساں ہے۔ اس لئے اعداد کی دی گئی فہرست AP جس کا مشترک فرق -2 ہے

اگلے دو ارکان ہیں

$-5 + (-2) = -7$ اور $-7 + (-2) = -9$

(iii)

$$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

کیونکہ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ اس لئے دی گئی اعداد کی فہرست AP نہیں ہے۔

(iv)

$$a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$$

$$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$$

یہاں $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ اس لئے دی گئی اعداد کی فہرست AP نہیں ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 5.1

1۔ مندرجہ ذیل کون سی صورت حال میں اعداد کی فہرست ایک AP ہے اور کیوں؟

(i) ہر ایک کلومیٹر کے لئے ٹیکسی کا کرایہ جب کے پہلے کلومیٹر کے لئے کرایہ ₹15 اور ₹8 ہر ایک زائد کلومیٹر کے لئے

(ii) جب ایک ہوا نکالنے والا پمپ سلنڈر میں سے ہر مرتبہ بچی ہوئی ہوا کا $\frac{1}{4}$ نکالتا ہے، تو سلنڈر میں موجود ہوا کی مقدار

(iii) ایک کنویں کو کھودنے کا کل خرچ جب کے ہر پہلے میٹر کھودنے کا خرچ ₹150 اور اگلے ہر ایک میٹر کا خرچ ₹50 ہے۔

(iv) ایک اکاؤنٹ میں ہر سال موجود رقم جب ₹10,000 ہے 8% سالانہ سود مرکب کی شرح سے جمع کئے گئے ہوں۔

2۔ AP کے پہلے چار ارکان لکھئے پہلا رکن a اور مشترک فرق d ذیل میں دیا گیا ہے۔

(i) $a = 10,\ d = 10$ (ii) $a = -2,\ d = 0$

(iii) $a = 4,\ d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = 0.25$

3۔ مندرجہ ذیل APs میں پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجئے۔

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4۔ مندرجہ ذیل میں کون سی APs ہیں؟ اگر یہ AP ہیں تو ان کا مشترک فرق d معلوم کیجئے اور تین ارکان لکھئے۔

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$

(v) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

© CTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$

(viii) $-\frac{1}{2}, -, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$

(x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3\ a^4, \ldots$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

(xiv) $1^2, 3^2\ 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2\ 7^2, 73, \ldots$

5.3 AP کا nواں رکن

آیئے سیکشن 5.1 میں دی ہوئی صورت حال پر دوبارہ غور کیجئے جس میں رینا نے ایک نوکری کے لئے عرضی دی تھی اور اس کا انتخاب ہو گیا تھا۔ اس ایک ایسے نوکری کی پیش کش ہوئی تھی جہاں شروعاتی ماہانہ تنخواہ ₹8000 ہے اور سالانہ بڑھوتری ₹500 کی ہے۔ پانچویں سال میں اس کی ماہانہ تنخواہ کیا ہوگی؟

اس کا جواب دینے کے لئے پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ دوسرے سال میں اس کی تنخواہ کیا ہوگی۔

یہ (₹8000 + 500) = ₹8500 ہوگی اسی طرح سے ہم تیسرے، چوتھے اور پانچویں سال کی تنخواہ پچھلے سال کی تنخواہ میں ₹500 جمع کر کے معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے تیسرے سال کی تنخواہ ہے = ₹(8500 + 500)

= ₹(8000 + 500 + 500)

= ₹(8000 + 2 × 500)

(تیسرے سال کے لئے) = ₹[8000 + (3 – 1) × 500]

= ₹ 9000

چوتھے سال کی تنخواہ = ₹(9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

چوتھے سال کے لئے = ₹[8000 + (4 – 1) × 500]

= ₹ 9500

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

پانچویں سال کی تنخواہ ₹(9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + (5 – 1) × 500]

پانچویں سال کے لئے = ₹10000

مشاہدہ کیجئے کہ ہم کو مندرجہ ذیل اعداد کی فہرست مل رہی ہے۔

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

یہ اعداد AP میں ہیں۔(کیوں؟)

اب ہم مذکورہ پیٹرن کو دیکھتے ہیں۔ کیا آپ چھٹے سال کی تنخواہ کے بارے میں بتا سکتے ہیں؟ 15 ویں سال کی تنخواہ؟ یہ فرض کرتے ہوئے کہ وہ مستقل اس نوکری پر کام کر رہی ہے تو 25 ویں (25th) سال کی ماہانہ تنخواہ کیا ہوگی؟ آپ اس کو آسانی سے ہر پچھلے سال کی تنخواہ میں 500 روپے جمع کر کے معلوم کر سکتے ہیں۔ کیا ہم اس عمل کو مختصر بنا سکتے ہیں؟ اس لئے دیکھتے ہیں، جس طرح سے ہم نے اوپر تنخواہ حاصل کی ہے اس سے آپ کو اندازہ تو ہو ہی گیا ہوگا۔

15 ویں سال کی تنخواہ ہے

= 14 ویں سال کی تنخواہ + ₹500

$$= ₹\left[800 + \frac{500 + 500 + 500 \ldots + 500}{\text{13 بار}}\right] + ₹500$$

= ₹ [8000 + 14 × 500]

= ₹ [8000 + **(15 – 1)** × 500] = ₹ 15000

پہلی تنخواہ + **(15 – 1)** × سالانہ بڑھوتری

اسی طریقہ سے 25 ویں سال میں اس کی ماہانہ تنخواہ ہوگی

= ₹ [8000 + **(25 – 1)** × 500] = ₹ 20000

پہلی تنخواہ + **(25 – 1)** × سالانہ بڑھوتری =

اس مثال سے آپ کو اندازہ ہو گیا ہوگا کہ کس طرح سے آپ AP کا 15 واں رکن یا 25 واں رکن اور مجموعی طور پر n واں

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

رکن کیسے معلوم کریں گے۔

مان لیجئے $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ایک AP ہے جس کا پہلا رکن a_1، a ہے اور مشترک فرق d ہے۔

تب دوسرا رکن $a_2 = a + d = a + (2-1)\,d$

تیسرا رکن $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3-1)\,d$

چوتھا رکن $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4-1)\,d$

. . . . . .

. . . . . .

اس پیٹرن کو دیکھتے ہی ہم کہہ سکتے ہیں کہ **n**واں رکن ہوگا $a_n = a + (n-1)d$

اس لئے **ایک AP جس کا پہلا رکن a مشترک فرق d ہو تو اس کا nواں رکن یعنی a_n ہوگا $a_n = a + (n-1)d$**

a_n، AP کا عمومی رکن بھی کہلاتا ہے۔ اگر کسی AP میں m ارکان ہیں تب a_m اس کا آخری رکن ہوگا جس کو اکثر ہم l سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 3: $2, 7, 12, \ldots$ اس AP کا دسواں رکن معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $a = 2$ اور $d = 7 - 2 = 5$ $n = 10$

$$a_n = a + (n-1)d$$

اس لئے $a_{10} = 2 + (10-1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

اس لئے AP کا 10th رکن 47 ہے

مثال 4: AP کا کون سا رکن -81 ہے اگر AP ہے $21, 18, 15 \ldots$؟ یہ بھی بتایئے کہ کوئی سا رکن صفر بھی ہے؟ ایسے جواب کی وجوہات بھی لکھئے۔

حل: یہاں $a = 21, \quad d = 18 - 21 = -3$ اور $a_n = -81$ تو ہمیں n معلوم کرنا ہے

$$a_n = a + (n-1)d,$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$-81 = 21 + (n-1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

اس لئے $n = 35$

اس لئے دی ہوئی AP کا 25واں رکن 81 – ہے۔

آگے ہم یہ جاننا چاہتے ہیں کہ کسی ایسے n کا وجود ہے جس کے لئے $a_n = 0$ اگر ایسا n ہے تب

$$21 + (n-1)(-3) = 0,$$

یعنی $3(n-1) = 21$

یعنی $n = 8$

اس لئے 8واں رکن صفر ہے۔

مثال 5: AP معلوم کیجئے جس کا تیسرا رکن 5 ہے اور 7واں رکن 9 ہے۔

حل:

$$a_3 = a + (3-1)d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

$$a_7 = a + (7-1)d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

خطی مساواتوں (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$a = 3, \quad d = 1$$

اس طرح سے مطلوبہ AP ہے۔ 3, 4, 5, 6, 7, . . .

مثال 6: جانچ کیجئے آیا اعداد 5, 11, 17, 23, . . . کی فہرست میں کوئی رکن 301 ہے۔

حل:

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6 \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6 \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

لہذا، $a_{K+1} - a_k$ مساوی ہے ہر..... $K = 1,2,3$ کے لئے، اس لئے دیئے گئے اعداد کی فہرست AP میں ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اب $d = 6$ اور $a = 5$

$$a_n = a + (n-1)d$$

اس لئے $$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

یعنی $$301 = 6n - 1$$

اس لئے $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

لیکن n کو مثبت صحیح عدد ہونا چاہیے (کیوں؟) اس لئے 301 دی ہوئی اعداد کی فہرست کا رکن نہیں ہے۔

مثال 7: ایسے کتنے دو ہندسی اعداد ہیں جو 3 سے تقسیم پذیر ہیں؟

حل: 3 سے تقسیم ہونے والے دو ہندسی اعداد کی فہرست ہے:

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

کیا یہ AP ہے؟ ہاں یہ ہے، یہاں $a = 12,\ d = 3\quad a_n = 99$

ضابطہ $$a_n = a + (n-1)\,3$$

$$99 = 12 + (n-1) \times 3$$

یعنی $$87 = (n-1) \times 3$$

یعنی $$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

یعنی $$n = 29 + 1 = 30$$

اس لئے ایسے 30 ہندسی اعداد ہیں جو 3 سے تقسیم ہوں گے۔

مثال 8: AP: $10, 7, 4, \ldots, -62$ کے آخری رکن سے (پہلے رکن کی طرف) 11 واں رکن معلوم کیجئے۔

حل: یہاں ہے، $a = 10, d = 7 - 10 = -3, l = -62$

جہاں $$l = a + (n-1)d$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

آخر سے 11واں رکن معلوم کرنے کے لئے ہمیں AP کے کل ارکان معلوم کرنے ہیں۔

کیونکہ، $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

یعنی، $-72 = (n-1)(-3)$

یعنی، $n-1 = 24$

$n = 25$

اس لئے اس AP میں 25 ارکان ہیں۔ آخری رکن سے 11واں رکن 15واں رکن (نوٹ کیجئے کہ 14واں رکن نہیں ہوگا) ہوگا۔

اس لئے $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

یعنی آخری سے 11واں رکن -32 ہے۔

متبادل حل:

اگر ہم AP کو معکوسی طریقہ سے لکھیں تو $-62 = a$ اور $d = 3$ (کیوں؟) اس لئے اب سوال یہ ہو جاتا ہے ہمیں 11واں رکن معلوم کرنا ہے جس کے a اور d معلوم ہیں۔

اس لئے $a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

اس لئے 11واں رکن جواب مطلوبہ رکن ہے -32

مثال 9: ₹1000 کی رقم 8% سالانہ کی شرح سے سود مفرد پر لگائی گئی۔ ہر ایک سال کے بعد سود کی تحسیب کیجئے۔ کیا یہ سود AP ہے؟ اگر ایسا ہے تو اس حقیقت کا استعمال کرتے ہوئے 30 سال کے آخر میں حاصل ہونے والے سود کی تحسیب کیجئے۔

حل: ہم سود مفرد معلوم کرنے کا فارمولہ جانتے ہیں۔

$$\text{سود مفرد} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$= \frac{₹1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹80$ اس لئے پہلے سال کے آخر میں سود ہوگا

$= \frac{₹1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹160$ دوسرے سال کے آخر میں سود ہوگا

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

تیسرے سال کے آخر میں 240 ₹ سود ہوگا $= \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} =$

اسی طرح سے ہم 4 ویں سال اور 5 ویں سال اور اسی طرح سے آگے سالوں کے آخر کا سود حاصل کر سکتے ہیں۔

اس لئے پہلے، دوسرے، تیسرے،.... سالوں کا بالترتیب سود ہے۔

80, 160, 240

یہ ایک AP ہے کیونکہ دو مسلسل ارکان کا فرق 80 ہے یعنی $d = 80$ اور $a = 80$ ہی ہے۔

اس لئے 30 سال کے آخر میں سود معلوم کرنے کے لئے ہمیں a_{30} معلوم کرنا ہے۔

اب $a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

اس لئے 30 سال کے آخر میں سود ہوگا 2400 ₹

مثال 10: پھولوں کی ایک کیاری کی پہلی قطار میں گلاب کے 23 پودے دوسری قطار میں 21 اور تیسری قطار میں 19 اور اسی طرح سے آگے بھی۔ آخری قطار میں گلاب کے 5 پودے ہیں، کیاری میں ایسی کتنی قطاریں ہیں۔

حل: پہلی، دوسری، تیسری،.... قطار میں گلاب کے پودوں کی تعداد

23, 21, 19, ..., 5

یہ ایک AP ہے (کیوں؟) مان لیجئے پھولوں کی کیاری میں n قطاریں ہیں؟

تب $a = 23$، $d = 21 - 23 = -2$ $a_n = 5$

ضابطہ $a_n = a + (n - 1)d$

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

یعنی $-18 = (n - 1)(-2)$

یعنی $n = 10$

اس لئے پھولوں کی کیاری میں کل 10 قطاریں ہوں گی۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 5.2

1۔ مندرجہ ذیل جدول میں خالی جگہ کو پر کیجئے اگر AP کا کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d اور n واں رکن a_n ہے۔

a_n	n	d	a	
...	8	3	7	(i)
0	10	...	– 18	(ii)
–5	18	–3	...	(iii)
3.6	...	2.5	– 18.9	(iv)
...	105	0	3.5	(v)

2۔ مندرجہ ذیل میں صحیح جواب کو چنئے اور اس کا جواز پیش کیجیے۔

(i) AP: 10, 7, 4, . . . کا 30 واں رکن ہے۔

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) AP: $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$ کا 11 واں رکن ہے۔

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3۔ مندرجہ ذیل APs میں باکس میں گمشدہ رکن بھریئے۔

(i) $2, \square, 26$

(ii) $\square, 13, \square, 3$

(iii) $5, \square, \square, 9\frac{1}{2}$

(iv) $-4, \square, \square, \square, \square, 6$

(v) $\square, 38, \square, \square, \square, -22$

4۔ AP: 3, 8, 13, 18, . . . کا کون سا رکن 78 ہے؟

5۔ مندرجہ ذیل ہر ایک AP میں ارکان کی تعداد معلوم کیجیے۔

(i) 7, 13, 19, . . ., 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

6۔ جانچ کیجئے کہ کیا AP: 11, 8, 5, 2, . . . کا رکن 150 – ہے۔

7۔ ایک A P کا 11 واں رکن 38 ہے اور 16 واں رکن 73 ہے تو اس کا 31 واں رکن معلوم کیجیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8۔ ایک AP میں 50 ارکان ہیں جس کا تیسرا رکن 12 اور آخری رکن 106 ہے تو 29 واں رکن معلوم کیجئے۔

9۔ اگر ایک AP کا تیسرا اور نواں رکن بالترتیب 4 اور 8– ہے تو AP کا کون سا رکن صفر ہوگا ؟

10۔ ایک AP کا 17 واں رکن اس کے 10 ویں رکن سے 7 زیادہ ہے۔ مشترک فرق معلوم کیجئے۔

11۔ AP : 3, 15, 27, 39,.... کا کون سا رکن اس کے 54 ویں رکن سے 132 زیادہ ہے؟

12۔ دو APs کا مشترک فرق ایک ہی ہے ان کے 100 ویں ارکان میں 100 کا فرق ہے۔ تو ان کے 1000 ویں ارکان میں کیا فرق ہوگا ؟

13۔ تین ہندسوں کے کتنے عدد 7 سے تقسیم پذیر ہیں ؟

14۔ 10 اور 250 کے درمیان میں 4 کے کتنے اضعاف ہیں ؟

15۔ n کی کس قدر کے لیے 3, 10, 17,... اور AP : 63, 65, 67, ... کے n ویں رکن مساوی ہوگا ؟

16۔ AP معلوم کیجئے جس کا تیسرا رکن 16 ہے اور ساتواں رکن پانچویں رکن سے 12 زیادہ ہے۔

17۔ AP : 3, 18, 13, . . .253 کے آخری رکن سے 20 واں رکن معلوم کیجئے۔

18۔ ایک AP میں چوتھے اور آٹھویں ارکان کا حاصل جمع 24 ہے اور 6 ویں اور 10 ویں ارکان کا حاصل جمع 44 ہے۔ AP کے تین ارکان معلوم کیجئے۔

19۔ سُبّا راؤ نے 1995 میں ایک نوکری 5000 ₹ کی سالانہ تنخواہ پر شروع کی اور ہر سال اس کو 200 ₹ کی ایک اضافی رقم ملی۔ کونسے سال میں اس کی آمدنی 7000 ₹ ہوگی؟

20۔ رام کلی نے سال کے پہلے ہفتہ میں 5 ₹ کی بچت کی اور پھر اس نے اپنی ہفت وار بچت 1.75 ₹ سے بڑھا دیا۔ اور n ویں ہفتہ میں اس کی ہفتہ وار بچت 20.75 ₹ ہوگئی تو n معلوم کیجیے۔

5.4 AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع

سیکشن 5.1 میں دی گئی صورت حال پر دوبارہ غور کیجئے، جس میں شکیلا نے اپنی بیٹی کے پرس میں 100 ₹ رکھے تھے جب اس کی عمر ایک سال کی تھی۔ 150 ₹ اس کے دوسرے یوم پیدائش پر اور 200 ₹ اس کے تیسرے یوم پیدائش پر اور اسی طرح سے اگلے یوم پیدائش پر بھی۔ جب اس کی بیٹی 21 سال کی ہوگئی تو اس کے پرس میں کل کتنے ₹ تھے ؟

یہاں پہلے، دوسرے، تیسرے، چوتھے یوم پیدائش پر اس کے پرس میں رکھے گئے ₹ کی تعداد بالترتیب 100, 150, 200, 250,... ہے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



21ویں یوم پیدائش تک اس کے 21ویں یوم پیدائش پر جمع کل رقم معلوم کرنے کے لئے ہم اوپر دی گئی رقم کو تمام 21 اعداد کو جمع کریں گے۔ کیا آپ کو ایسا نہیں لگتا کے گننے کا یہ عمل کچھ پیچیدہ اور دیرطلب ہے؟ کیا ہم اس عمل کو مزید مختصر اور چھوٹا نہیں بنا سکتے۔ یہ ممکن ہے اگر ہم حاصل جمع معلوم کرنے کا ایک طریقہ دریافت کریں۔ آیئے دیکھتے ہیں۔

اب ہم Gauss کو دیے گئے ایک مسئلے پر غور کریں (جس کے بارے میں آپ نے باب 1 میں پڑھا تھا) جو اس کو حل کرنے کے لئے جب دیا گیا تھا جب وہ 10 سال کی عمر کا تھا۔ اس سے کہا گیا تھا کہ اسے 100 تک کے مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔ اس نے فوراً جواب دیا تھا 5050۔ کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں اس نے ایسا کیسے کیا؟ اس نے لکھا تھا:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

اور غیر اعداد کو معکوس طریقے سے لکھیں

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ان دونوں کو جمع کرنے پر اس نے پایا

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \quad (100 \text{ مرتبہ})$$

اس لئے $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$ یعنی حاصل جمع $= 5050$

اب ہم AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے اسی تکنیک کا استعمال کریں گے۔

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

اس AP کا nواں رکن $a + (n - 1)d$ ہے۔ مان لیجئے S، اس AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے۔

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)\, d] \qquad (1)$$

ان ارکان کو معکوس طریقے سے دوبارہ لکھنے پر

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$S = [a + (n-1)\,d] + [a + (n-2)\,d] + \ldots + (a+d) + a \qquad (2)$$

(1)اور(2) کو جمع کرنے پر

$$2S = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ مرتبہ}} + [2a + (n-1)d]$$

$$2S = n\,[2a + n - 1)d] \qquad \text{یا} \qquad (\text{کیونکہ ارکان کی تعداد } n \text{ ہے})$$

$$S = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)d] \qquad \text{یا}$$

اس لئے کسی AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]}$$

$$S = \frac{n}{2}\,1\;a + a + (n - 1\,d) \qquad \text{اس کو ہم}$$

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,(a + a_n)} \qquad \text{یعنی (3)}$$

اب اگر کسی AP میں صرف n ارکان ہیں تب $a_n = l$ یعنی آخری رکن جو (3) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}(a + l)} \qquad (4)$$

نتیجہ کی یہ شکل کافی مفید ہوتی ہے جب کسی AP کا پہلا اور آخری رکن دیا ہوا ہو اور مشترک فرق نہ دیا ہوا ہو،

اب ہم اپنے اس سوال کی طرف واپس جاتے ہیں جو شروع میں ہم نے اٹھایا تھا۔یعنی شکیلہ کی بیٹی کے پرس میں اس کے پہلے، دوسرے،

تیسرے اور چوتھے یوم پیدائش پر رقم بالترتیب,. . . 100, 150, 200, 250

یہ ایک AP ہے اور ہمیں معلوم کرنا ہے کہ اس کے 21th یوم پیدائش پر کل کتنی رقم اس کے پرس میں ہوگی ۔یعنی اس AP کے پہلے 21 ارکان کا حاصل جمع

یہاں $a = 100, \quad d = 50$ اور $n = 21$ فارمولہ کا استعمال کرنے پر

$$S = \frac{n}{2}\;[\,2a + (n-1)d]$$

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000] \qquad \text{ہمارے پاس ہے}$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے اس کے 21ویں یوم پیدائش پر کل رقم 12600 روپے ہے۔ کیا فارمولے کے استعمال نے اسے آسان نہیں بنا دیا؟

ہم AP کے پہلے n ارکان کے حاصل جمع S کی جگہ S_n بھی لکھ سکتے ہیں ہم AP کے پہلے 20 ارکان کے حاصل جمع کو S20 سے ظاہر کرتے ہیں۔ حاصل جمع معلوم کرنے کے فارمولہ میں چار مقداریں شامل ہیں۔ d, a, S اور n۔ اگر ہم ان میں سے کسی تین کے بارے میں معلوم ہے تو ہم چوتھی معلوم کر سکتے ہیں۔

غور کیجئے: اگر کسی AP کا n واں رکن اس کے پہلے n ارکان کے حاصل جمع اور پہلے $(n-1)$ ارکان کے حاصل جمع کے فرق کے برابر ہوتا ہے یعنی $a_n = S_n - S_{n-1}$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 11: AP : 8, 3, –2,... کے پہلے 22 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$a=8,\ d=3-8=-5,n=22$$

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S=\frac{22}{2}[16+21(-5)]=11(16-105)=11(-89)=-979$$

اس لئے پہلے 22 ارکان کا حاصل جمع 979 – ہے۔

مثال 12: اگر کسی AP کے پہلے 14 ارکان حاصل جمع 1050 ہے اور اس کا پہلا رکن 10 ہے تو 20 واں رکن معلوم کیجئے۔

حل: یہاں $a = 10 \quad n = 14 \quad S_{14} = 1050$

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

اس لئے $$1050=\frac{14}{2}[20+13d]=140+91d$$

یعنی $$910 = 91d$$

یا $$d = 10$$

اس لئے $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$ یعنی 20 واں رکن 200 ہے۔

مثال 13: AP . . . 24, 21, 18, کے کتنے ارکان کو لیا جائے کہ ان کا حاصل جمع 78 ہو ؟

©KBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل: یہاں $a = 24, d = 21 - 24 = -3, S_n = 78$ ہمیں n معلوم کرنا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

اس لئے $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3) = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

یا $$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

یا $$n^2 - 17n + 52 = 0$$

یا $$(n-4)(n-13) = 0$$

یا $$n = 4 \text{ یا } 13$$

n کی دونوں ہی قدریں صحیح ہیں، ارکان کی تعداد یا تو 4 ہے یا 13

غور کیجئے:

1۔ اس حالت میں = پہلے 13 ارکان کا حاصل جمع 78 = پہلے 4 ارکان کا حاصل جمع ہے۔

2۔ یہ دو جواب اس لئے ممکن ہیں کیونکہ 5 ویں رکن سے 13 ویں رکن تک کے ارکان کا حاصل جمع صفر ہے یہ اس لئے ہے کیونکہ a مثبت ہے اور d منفی۔ اسلئے کچھ ارکان مثبت ہوں گی اور کچھ منفی جس ایک دوسرے سے کینسل ہو جائیں گی۔

مثال 14: حاصل جمع معلوم کیجئے:

(i) پہلے 1000 مثبت صحیح اعداد کا (ii) پہلے n مثبت صحیح اعداد کا۔

حل:

(i) مان لیجئے $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$

کسی AP کے پہلے n ارکان کا فارمولہ $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

اس لئے پہلے 1000 مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع 500 500 ہے۔

(ii) مان لیجئے $s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

© TBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہاں $a = 1$ اور آخری رکن l=n ہے۔

اس لئے $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ یا $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

اس لئے پہلے n مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال 15: اعداد کی اس فہرست کے پہلے 24 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے جن کا n واں رکن $a_n = 3 + 2n$ دیا ہوا ہے۔

حل:

کیونکہ $a_n = 3 + 2n$

اس لئے $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

اعداد کی فہرست ہو جاتی ہے۔ 5, 7, 9, 11. . . .

یہاں $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

اس لئے ایک AP ہے جس کا مشترک فرق $d = 2$

معلوم کرنے کے لئے ہمارے پاس ہے $d = 2, a = 5, n = 24$

اس لئے $S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$

اس لئے پہلے 24 ارکان کا حاصل جمع 672 ہے۔

مثال 16: ایک ٹی وی کی کمپنی تیسرے سال میں 600 ٹی وی سیٹ اور 700 سیٹ ساتویں سال میں بناتی ہے یہ مانتے ہوئے کہ ہر سال ٹی وی کے تیار ہونے کی تعداد ایک متعین عدد سے بڑھتی ہے۔ تو معلوم کیجئے۔

(i) پہلے سال میں بنائے گئے ٹی وی سیٹوں کی تعداد (ii) 10 ویں سال میں تیار کئے گئے سیٹ

(iii) پہلے 7 سال میں تیار کئے گئے کل سیٹ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل: (i) کیونکہ ٹی وی میں ہر سال ایک متعین تعداد سے زیادہ ہو رہی ہے تو پہلے، دوسرے اور تیسرے سال...، میں بنائے گئے ٹی وی کی تعداد ایک AP ہوگی۔ آیئے ہم n ویں سال میں تیار کئے گئے ٹی وی کی تعداد کو a_n سے ظاہر کرتے ہیں۔

تب $a_3 = 600$ اور $a_7 = 700$

یا $a + 2d = 600$

اور $a + 6d = 700$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $a = 550$ اور $d = 25$

اس لئے پہلے سال میں تیار کئے گئے ٹی وی سیٹ کی کل تعداد 550 ہے۔

(ii) اب $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

اس لئے دسویں سال میں تیار کئے گئے TV سیٹ کی کل تعداد 775 ہے۔

(iii) مزید $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$

اس طرح سے پہلے 7 سالوں میں تیار کئے گئے کل TV سیٹ ہیں 4375۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 5.3

1۔ مندرجہ ذیل APs کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

(i) $2, 7, 12, \ldots,$ 10 ارکان تک

(ii) $-37, -33, -29, \ldots,$ 12 ارکان تک

(iii) $0.6, 1.7, 2.8, \ldots,$ 100 ارکان تک

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \ldots,$ 11 ارکان تک

2۔ نیچے دئے گئے حاصل جمع معلوم کیجئے۔

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$

(ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3۔ ایک AP میں دیا ہوا:

(i) $a_n = 50, d = 3, a = 5$ n اور S_n معلوم کیجئے۔

(ii) $a_{13} = 35, a = 7$ تو d اور S_{13} معلوم کیجئے۔

(iii) $d = 3, a_{12} = 37$ تو a اور S_{12} معلوم کیجئے۔

(iv) $S_{10} = 125 \quad a_3 = 15,$ تو d اور a_{10} معلوم کیجئے۔

(v) $S_9 = 75 \quad d = 5$ تو a اور a_9 معلوم کیجئے۔

(vi) $S_9 = 90 \quad d = 8, \ a = 2$ تو n اور a_n معلوم کیجئے۔

(vii) $S_n = 210, a_n = 62, a = 8,$ تو n اور d معلوم کیجئے۔

(viii) $S_n = -14, d = 2, a_n = 4$ تو n اور a معلوم کیجئے۔

(ix) $S = 192, n = 8, a = 3,$ تو d معلوم کیجئے۔

(x) $S = 144, l = 28$ اور کل ارکان 9 ہیں تو a معلوم کیجئے۔

4۔ AP : 9, 17, 25, . . . کے کتنے ارکان لئے جائیں کہ حاصل جمع 636 ہو جائے؟

5۔ AP کا پہلا رکن 5 اور آخری رکن 45 اور حاصل جمع 400 ہے۔ ارکان کی تعداد اور مشترک فرق معلوم کیجئے۔

6۔ ایک AP کا پہلا اور آخری رکن بالترتیب 17 اور 350 ہے۔ اگر مشترک فرق 9 ہے تو ارکان کی کل تعداد حاصل جمع معلوم کیجئے۔

7۔ ایک AP کے 22 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے جس میں $a = 7$ اور 22 واں رکن 149 ہے۔

8۔ ایک AP کے 51 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے جس کا دوسرا اور تیسرا رکن بالترتیب 14 اور 18 ہے۔

9۔ اگر کسی AP کے پہلے 7 ارکان کا حاصل جمع 49 ہے اور 17 ارکان کا حاصل جمع 289 ہے۔ تو پہلے n ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

10۔ دکھایئے کہ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ایک AP جہاں a_n کو ذیل میں معروف کیا گیا ہے۔

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

اور ہر ایک حالت کے لئے پہلے 15 ارکان کا حاصل جمع بھی معلوم کیجئے۔

11۔ اگر AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع $4_n - n^2$ ہے تو پہلا رکن کیا ہے (یعنی S_1)؟ پہلے دو ارکان کا حاصل جمع کیا ہے؟ دوسرا رکن کیا ہے؟ اسی طرح سے تیسرا، دسواں اور n واں رکن معلوم کیجئے۔

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

12۔ پہلے 40 مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے جو 6 سے تقسیم ہو جائیں۔

13۔ 8 کے پہلے 15 اضعاف کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

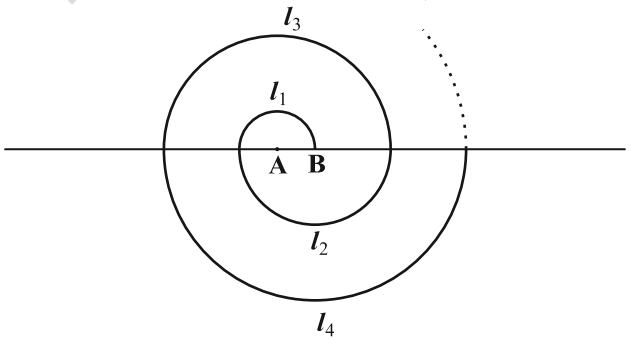
14۔ 0 اور 50 کے درمیان تمام طاق اعداد کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

15۔ تعمیر کے کام کے ایک معاہدہ میں یہ بات صاف طور پر لکھی جاتی ہے کہ کسی کام کو اس کی دی گئی تاریخ کے بعد مکمل کیا جاتا ہے تو جرمانہ اس طرح سے ہوگا۔ تاخیر کے پہلے دن 200 روپے دوسرے دن 250 روپے، تیسرے دن 300 روپے وغیرہ۔ جرمانہ کی رقم ہر آنے والے دن میں 50 روپے بڑھ جائے گی۔ اگر ایک کنٹریکٹر ایک کام کو 30 دن تاخیر سے کرتا ہے تو اس کو کل کتنا جرمانہ دینا پڑیگا۔

16۔ ایک اسکول میں طلبا کی سال بھر کی بہترین کارکردگی کے لئے 700 روپیہ کی رقم کو سات نقد انعام کی شکل میں طلبا کو دیا جاتا ہے۔ اگر ہر انعام پچھلے انعام سے 20 روپے کم ہے تو ہر انعام کی قیمت معلوم کیجئے۔

17۔ ایک اسکول میں ہوائی آلودگی کو کم کرنے کے لئے طلبا نے اسکول کے چاروں طرف پودے لگانے کے بارے میں سوچا یہ طے کیا گیا کہ ہر کلاس کا ہر سیکشن اتنے ہی پیڑ لگائے گا جس کلاس میں وہ پڑھتے ہیں۔ مثال کے طور پر پہلی کلاس کے طلبا 1، دوسری کلاس کے طلبا 2، تیسرے کلاس کے طلبا 3 اور اسی طرح سے XII کے طلبا 12 پیڑ لگائیں گے ہر کلاس کے تین سیکشن ہیں۔ طلباء کے ذریعے لگائے گئے پیڑوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

18۔ ایک Spiral، مسلسل نصف دائروں سے بنایئے جن کے مراکز متبادل طور پر A اور B ہیں۔ مرکز A سے شروع کرتے ہوئے ان کے نصف قطر ہیں۔ 0.5 سینٹی میٹر، 1.0 سینٹی میٹر، 1.5 سینٹی میٹر، 2.0 سینٹی میٹر، جیسا کے شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے Spiral کی کل لمبائی معلوم کیجئے جو 13 لگاتار نصف دائروں سے مل کر بنا ہے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ مان لیجئے)

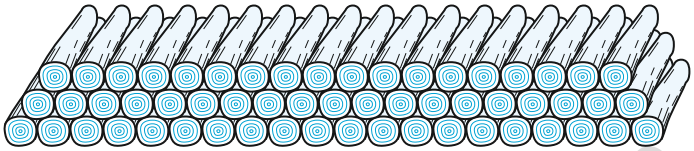


شکل 5.4

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

[اشارہ: لگاتار نصف دائروں کی لمبائیاں ہیں $l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots$ جن کے مراکز بالترتیب A,B, A,B, ہیں...]

19۔ 200 لکڑی کے لٹھے مندرجہ ذیل طریقہ سے اکٹھا کئے گئے ہیں۔ سب سے نچلی قطار میں 20 لٹھے اس سے اگلی قطار میں 19 اور 18 اس سے اگلی قطار میں اور اسی طرح سے آگے بھی (شکل 5.5 دیکھئے) کتنی قطاروں میں 200 لٹھوں و دکھا گیا اور سب سے اوپر کی قطار میں کتنے لٹھے ہوں گے۔



شکل 5.5

20۔ آلو کی ریس میں شروعاتی نقطہ پر ایک بالٹی رکھ دی گئی جو پہلے آلو سے 5 میٹر کے فاصلہ پر ہے اور دوسرے آلو خط مستقیم میں 3 میٹر کے درمیانی فاصلہ پر رکھے گئے ہیں۔ اس خط پر کل دس آلو ہیں (شکل 5.6 دیکھئے)



شکل 5.6

ایک شخص اس بالٹی سے شروع کرتے ہوئے سب سے نزدیک رکھے ہوئے آلو کو اٹھاتا ہے اور دوڑ کر واپس آتا ہے اور اس کو بالٹی میں ڈال کر پھر واپس اگلے رکھے ہوئے آلو کی طرف دوڑتا ہے اس کو اٹھاتا ہے اور واپس اس بالٹی کی طرف دوڑتا ہے اس کو بالٹی میں ڈال کر وہ اگلے آلو کی طرف دوڑتا ہے یہ سلسلہ جب تک جاری رہتا ہے جب تک کے تمام آلو اس بالٹی میں نہیں آجاتے اس شخص کے ذریعے دوڑا گیا کل فاصلہ معلوم کیجئے۔

[**اشارہ:** پہلے اور دوسرے آلو کو اٹھانے میں اس شخص کے ذریعے طے کیا گیا کل فاصلہ ہے۔ $2 \times 5 + 2 \times (5+3)$]

مشق 5.4 (اختیاری)*

1۔ AP: 121, 117, 113, . . ., کا کون سا رکن اس کا پہلا منفی رکن ہوگا؟

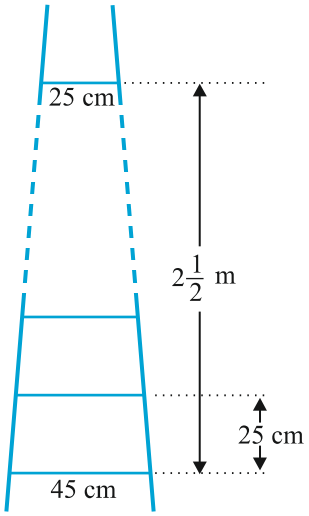
[اشارہ: n معلوم کیجئے $a_n < 0$ کے لئے]

* یہ مشقیں امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2۔ ایک AP کی تیسری اور ساتویں رکن کا حاصل جمع 6 ہے اور ان کا حاصل ضرب 8 ہے ۔تو پہلے 16 ارکان کا حاصل جمع معلوم کیجئے۔

3۔ ایک سیڑھی میں 25 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ڈنڈے لگے ہوئے ہیں (شکل 5.7 دیکھئے) ڈنڈوں کی لمبائی یکساں طور پر گھٹ رہی ہے سب سے نیچے والا ڈنڈا 45 سینٹی میٹر لمبا اور سب سے اوپر والا ڈنڈا 25 سینٹی میٹر لمبا اگر سب سے اوپری ڈنڈے اور سب سے نیچے والے ڈنڈے کے درمیان کا فاصلہ $2\frac{1}{2}$ میٹر ہے۔تو ڈنڈوں میں استعمال ہونے والی مطلوبہ لکڑی کی لمبائی معلوم کیجئے۔



شکل 5.7

[اشارہ: ڈنڈوں کی تعداد $= \frac{250}{25}$]

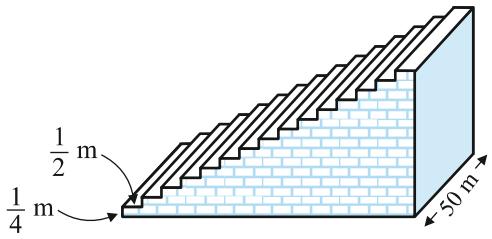
4۔ کسی ایک قطار میں مکانوں پر 1 سے 49 تک کے نمبر لکھے ہوئے ہیں۔دکھایئے کہ x کی ایک ایسی قدر ہے جس کے لئے اس گھر جس کا مکان نمبر x ہے، اس سے پہلے تمام مکانوں کی تعداد کا حاصل جمع اس مکان کے بعد والے مکانوں کی تعداد کے حاصل جمع کے برابر ہے۔x کی قدر معلوم کیجئے۔

[اشارہ: $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5۔ فٹ بال کے ایک میدان کے ایک چھوٹے سے چھجے جس میں 50 میٹر لمبی 15 سیڑھیاں ہیں جس ٹھوس کنکریٹ کی بنی ہیں۔ہر سیڑھی کی اونچائی $\frac{1}{4}$ اور چوڑائی (جس پر بیٹھا جاتا ہے) $\frac{1}{2}$ میٹر ہے (شکل 5.8 دیکھئے) چھجے کو بنانے میں مطلوب کنکریٹ کا کل حجم معلوم کیجئے۔

[اشارہ: پہلی سیڑھی بنانے میں مطلوب کنکریٹ کا حجم $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 m^3$]

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 5.8

5.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ حسابی تصاعد (AP) اعداد کی وہ فہرست ہے جس میں ہر رکن کو، پہلے رکن کے علاوہ، اس کے پچھلے رکن میں ایک متعین عدد d کو جمع کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ متعین عدد d، مشترک فرق کہلاتا ہے۔

ایک AP کی عمومی شکل ہے۔ a, a+d, a+2d, a+3d, . . .

2۔ اعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots$ کی دی گئی فہرست ایک AP ہے اگر $a_2 - a_1, a_3 - a_4, \ldots$ سے ایک قدر حاصل ہو۔ یعنی اگر $a_{k+1} - a_k$ کی قدر k کی مختلف قدروں کے لئے ایک ہی ہو۔

3۔ ایک AP میں جس کا پہلا رکن a ہو اور مشترک فرق d ہو اس کا n واں رکن (یا عمومی رکن) ہے۔ $a_n = a+(n-1)d$

4۔ ایک AP کے پہلے n ارکان کا حاصل جمع ہوتا ہے۔

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5۔ اگر کسی AP کا آخری رکن l ہے، یعنی nth رکن تب AP کے ارکان کا حاصل جمع ہوگا۔

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

قارئین کے لئے نوٹ

اگر a, b, c AP میں ہیں تب $b = \frac{a+c}{2}$ اور a, b اور c کا حسابی اوسط کہلاتا ہے۔

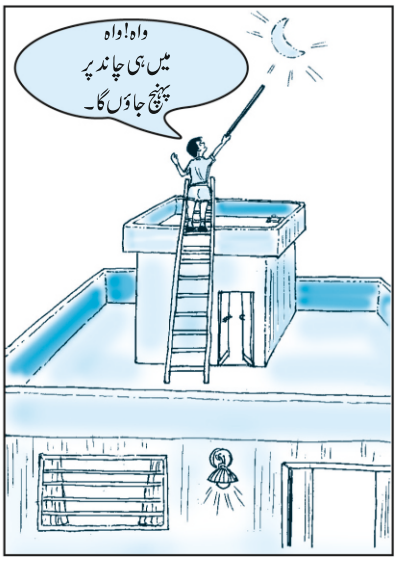
©NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

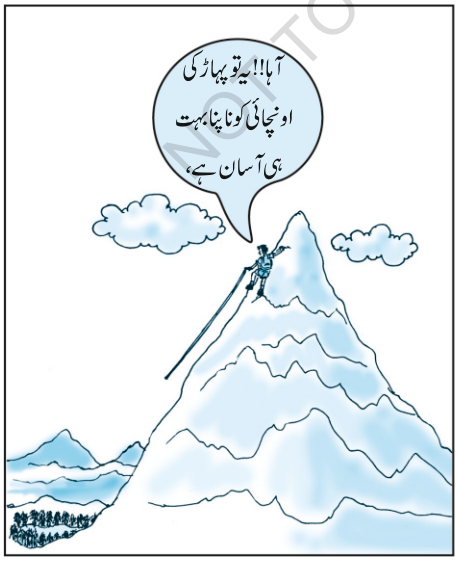
5013CH06

6 مثلثات (TRIANGLES)

6.1 تعارف

پچھلی کلاسوں میں آپ مثلثوں اور ان کی بہت سی خصوصیات سے پہلے ہی واقف ہو چکے ہیں۔ نویں کلاس میں آپ نے مثلثوں کی مماثلت کے بارے میں تفصیل سے مطالعہ کیا۔ یاد کیجیے کہ دو اشکال **متماثل** ہوتی ہیں۔ اگر ان کی شکل (Shape) اور پیمائش (Size) یکساں ہوں۔ اس باب میں ہم ان اشکال کے بارے میں پڑھیں گے جن کی شکل ایک سی ہو لیکن ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہی ہو۔ دو اشکال جن کا ایک ہی شکل ہو (ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہو) **مشابہ اشکال** کہلاتی ہیں۔ مخصوص طور پر، ہم مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں پڑھیں گے اور اس علم کا استعمال پہلے سے معلوم فیثاغورث کے مسئلے کو





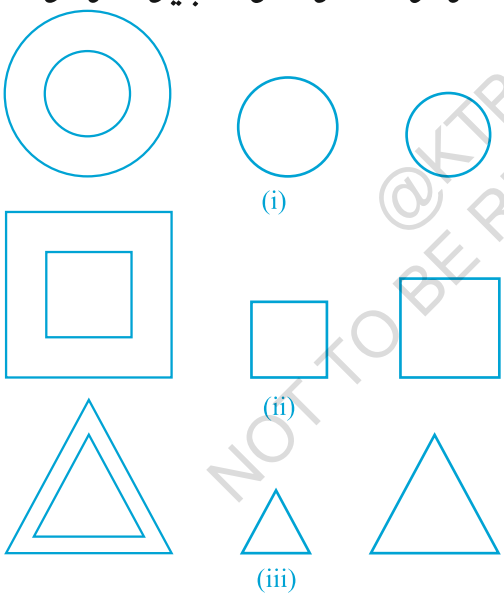
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ثابت کرنے میں کریں گے۔

کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ پہاڑوں (جیسے ماؤنٹ ایوریسٹ) کی اونچائی بتائی یا ایسی اشیا کے فاصلے جو کافی دوری پر واقع ہیں (جیسے چاند) کس طرح معلوم کئے جاتے ہیں؟ کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ان کو کسی ناپنے والے ٹیپ سے سیدھا ناپا جا سکتا ہے؟ درحقیقت ایسی تمام اونچائیاں اور فاصلہ پیمائش کے غیر درست طریقے سے معلوم کئے جاتے ہیں، جس کی بنیاد اشکال کی مشابہت کے اصول پر ہے (مشق 6.3 کی مثال 7) سوال نمبر 15 اور اسی کتاب کا باب نمبر 8 اور 9 دیکھیے)

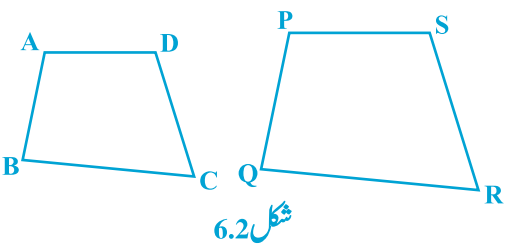
6.2 مشابہ اشکال

نویں جماعت میں آپ نے دیکھا کہ تمام دائرے جن کے نصف قطر برابر ہوں متماثل ہوتے ہیں۔ تمام مربعے جن کے اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں اور تمام مساوی ضلعی مثلث جس کے ضلع کے لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 6.1

اب دو یا دو سے زیادہ دائروں پر غور کیجیے (شکل 6.1(i) کو دیکھئے) کیا یہ متماثل نہیں ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ کچھ متماثل ہیں اور کچھ نہیں لیکن تمام دائروں کی شکل ایک سی ہے ضروری نہیں ہے کے سائز بھی ایک سے ہوں اس لئے تمام دائرے مشابہ ہوتے ہیں۔ دو (یا دو سے زیادہ) مربعے یا (دو یا دو سے زیادہ) مساوی ضلعی مثلثوں کے بارے میں کیا خیال ہے [شکل 6.1 (ii) اور (iii) کو دیکھیے]؟ جیسا ہم نے دائروں کے سلسلہ میں مشاہدہ کیا تھا یہاں بھی تمام مربعے اور تمام مساوی ضلعی مثلث مشابہ ہیں۔

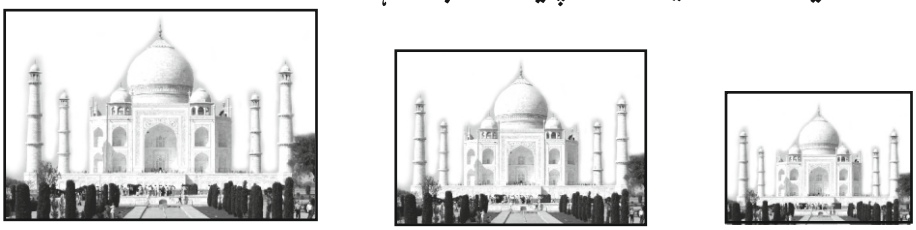


شکل 6.2

مذکورہ بالا باتوں سے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ **تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن مشابہ اشکال ضروری نہیں کہ متماثل ہوں۔**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کیا ایک دائرہ اور مربع مشابہ ہوسکتا ہے؟ کیا ایک مثلث اور مربع مشابہ ہوسکتا ہے؟ ان سوالوں کا جواب ہم صرف اشکال کو دیکھ کر دے سکتے ہیں (اشکال 6.1 دیکھئے) یقینی طور پر یہ اشکال مشابہ نہیں ہے (کیوں؟)



شکل 6.3

دو چار ضلعی ABCD اور PQRS کے بارے میں آپ کہہ سکتے ہیں؟ (شکل 6.2 دیکھئے) کیا یہ مشابہ ہیں۔ یہ اشکال بظاہر تو مشابہ نظر آتی ہیں لیکن ضروری نہیں ہے کہ یہ مشابہ ہوں۔ اس لئے ہمارے پاس اشکال کی مشابہت کی کوئی تعریف ہونی چاہیے تاکہ اس تعریف اور کچھ اصولوں کی بنیاد پر ہم یہ طے کرسکیں کہ دو دی ہوئی اشکال مشابہ ہیں یا نہیں۔ ان کے لئے شکل 6.3 میں دئے گئے فوٹوگراف کو غور سے دیکھیے۔

آپ اس کو دیکھ کر فوراً کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک یادگار (تاج محل) کے فوٹوگراف ہیں۔ لیکن ان کے سائز مختلف ہیں، کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تینوں فوٹوگراف مشابہ ہیں؟ ہاں یہ ہیں۔

آپ ایک ہی شخص کے 10 سال کی عمر میں لئے گئے ایک فوٹوگراف اور 40 سال کی عمر میں لئے گئے اس ہی سائز کے فوٹوگراف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ کیا یہ دونوں فوٹوگراف مشابہ ہیں؟ یہ دونوں فوٹوگراف ایک ہی سائز کے ہیں لیکن یقیناً ان کی شکل (Shape) ایک سی نہیں ہے۔ اس لئے یہ مشابہ نہیں ہیں۔

ایک فوٹوگراف جب ایک ہی Negative سے مختلف سائز کے فوٹوگراف کے پرنٹ نکالتا ہے تو وہ کیا کرتا ہے؟ آپ نے اسٹیمپ سائز، پاسپورٹ سائز اور پوسٹ کارڈ سائز کے فوٹوگراف کے بارے میں سنا ہے۔ عموی طور پر وہ ایک چھوٹے سائز کی فلم پر فوٹوگراف لیتا ہے، جیسے 35 ملی میٹر کا سائز، اور پھر اس کو بڑے سائز میں تبدیل کردیتا ہے یعنی 45 ملی میٹر (یا 55 ملی میٹر)۔ اس طرح سے اگر ہم کسی قطع خط کے ایک چھوٹا فوٹوگراف (شکل)، پر غور کریں اور اس کا نظیری قطع خط بڑے فوٹوگراف میں (شکل) اس قطع خط کا $\frac{45}{35}$ (یا $\frac{55}{35}$) ہوگا۔

اس کا مطلب یہ ہوا کہ چھوٹے فوٹوگراف کا ہر قطع خط 35:45 (یا 35:55) کی نسبت میں بڑھا دیا گیا ہے۔ یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ بڑے فوٹوگراف کا ہر قطع خط 45:35 (یا 55:35) کی نسبت میں کم کردیا گیا۔ یہ مزید اگر آپ مختلف سائزوں والے دو فوٹوگراف کے نظیری قطعات خط کے جوڑوں کے درمیان جھکاؤ (یا زاویوں) پر غور کریں۔ تو آپ دیکھیں گے کہ یہ جھکاؤ (یا

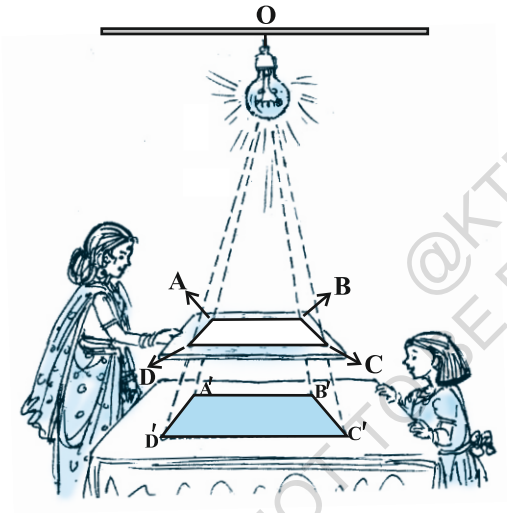
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

زاویہ) ہمیشہ برابر ہوں گے۔ یہ دو اشکال خاص طور سے دو کثیر ضلعی کی مشابہت کی ضروری شرط ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ:

دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہو، مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ مساوی ہوں اور (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت یکساں ہوں (یا متناسب ہوں)۔

نوٹ کیجئے کہ نظیری اضلاع کی یکساں نسبت کا مطلب ہے کثیر ضلعی کا Scale factor (یا ظاہر کرنے والی کسر) آپ نے ضرور سنا ہوگا کے دنیا کے نقشہ (یا global maps) اور بلڈنگوں کی تعمیر کے لئے نیلے خاکہ کو مناسب Scale factor اور مخصوص روائج (Conventions) کو ذہن میں رکھتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔

واضح طور پر اشکال کی مشابہت کو سمجھنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل مشغلہ انجام دیتے ہیں۔



شکل 6.4

سرگرمی 1: اپنے کلاس روم کی چھت کے ایک نقطہ O پر ایک جلتا ہوا بلب لگائیں اور اس کے ٹھیک نیچے ایک میز رکھیں۔ ایک کثیر ضلعی، مان لیجئے ایک چار ضلعی ABCD ایک گتّے سے کاٹ کر زمین کے متوازی اس بلب اور میز کے درمیان رکھیں۔ تب ABCD کی پرچھائیں میز پر پڑے گی۔ اس پرچھائی کی Outline کو A'B'C'D' نشان کیجئے (شکل 6.4 دیکھیے)۔

نوٹ کیجئے کہ چار ضلعی A'B'C'D'، چار ضلعی ABCD کی بڑھی ہوئی شکل ہے۔ یہ روشنی کی خصوصیت کی وجہ سے ہے کیونکہ روشنی ہمیشہ ایک خط مستقیم میں چلتی ہے۔ آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں A' شعاع OA پر، B' شعاع OB پر اور C'، OC پر اور D'، OD پر واقع ہے۔ اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' اور ABCD ایک ہی شکل اور مختلف سائز کے ہیں۔

اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' چار ضلعی ABCD کے مشابہ ہیں۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ چار ضلعی ABCD چار ضلعی A'B'C'D' کے مشابہ ہیں۔

یہاں آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں کہ راس A'، راس A کا نظیر راس ہے راس B'، B کا اور C'، C کا D'، D کا نظیری راس ہے۔ علامتی طور پر اس مطابقت کو ہم ظاہر کر سکتے ہیں, $A' \leftrightarrow A$، $B' \leftrightarrow B$، $C' \leftrightarrow C$، اور $D' \leftrightarrow D$ کا نظیری راس ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

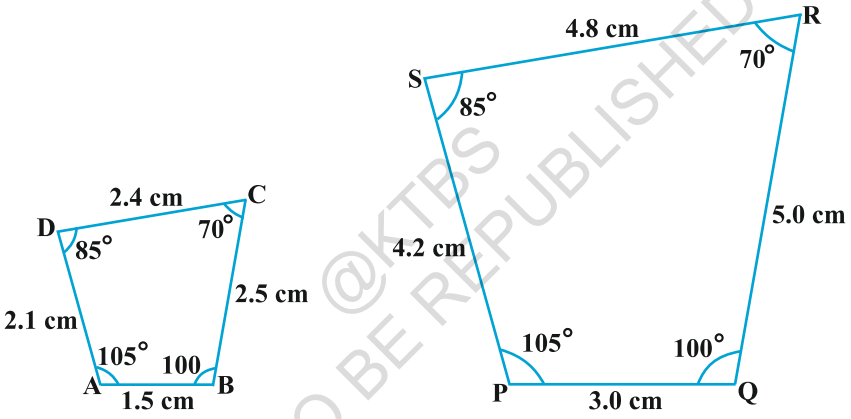
درحقیقت دونوں چارضلعی کے زاویوں اوراضلاع کی پیمائش سے آپ تصدیق کرسکتے ہیں کہ

(i) $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D'$ اور

(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

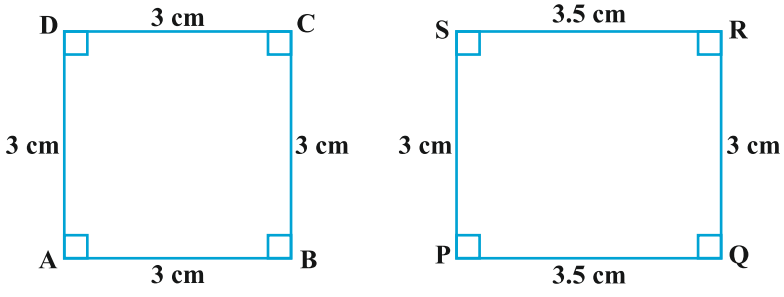
اس سے اس بات کو مزید تقویت ملتی ہے کہ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گے اگر (i) تمام نظیری زاویہ برابر ہو (ii) تمام نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں ہو (یا متناسب ہوں)

مذکورہ بالا بیان کی رو سے آپ آسانی سے یہ کہہ سکتے ہیں کہ چارضلعی ABCD اور PQRS مشابہ ہیں شکل 6.5 دیکھیے۔



شکل 6.5

ریمارک: آپ تصدیق کرسکتے ہیں کہ اگر ایک کثیر ضلعی دوسری کثیر ضلعی کے مشابہ ہے اور دوسرا کثیر ضلعی تیسرے کثیر ضلعی



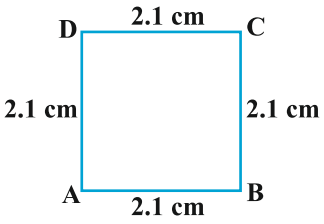
شکل 6.6

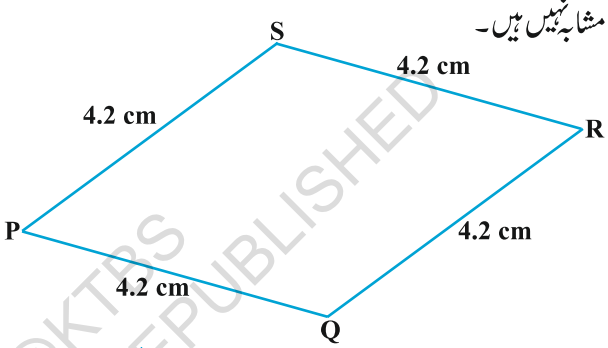
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کے مشابہ ہے تو پہلا کثیر ضلعی تیسرے کے مشابہ ہوگی۔

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دو چار ضلعی کے (مربع اور مستطیل) شکل 6.6 میں نظیری زاویہ برابر ہیں لیکن ان کے نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں نہیں ہیں۔

اس لئے دو چار ضلعی مشابہ نہیں ہیں اسی طرح سے آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ شکل 6.7 کے دو چار ضلعی (مربع اور مستطیل) میں نظیر اضلاع ایک ہی نسبت میں ہیں (لیکن ان کے نظیری زاویہ برابر نہیں ہیں اس لئے یہ دونوں چار ضلعی (کثیر ضلعی) کے مشابہ نہیں ہیں۔





شکل 6.7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس طرح سے مندرجہ بالا میں مشابہت کی کوئی سی بھی دو شرطیں (i) اور (ii) ان کی مشابہت کے لئے کافی نہیں ہیں۔

مشق 6.1

1۔ بریکٹ میں دئے گئے صحیح الفاظ سے مندرجہ ذیل خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

(i) تمام دائرے ——— (متماثل، مشابہ) ہوتے ہیں۔

(ii) تمام مربعے ——— ہوتے ہیں (متماثل، مشابہ)

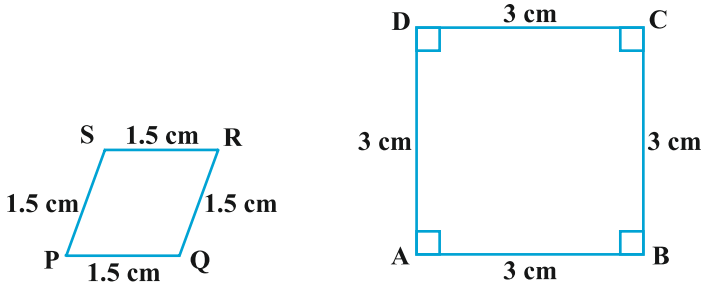
(iii) تمام ——— مثلث مشابہ ہوتے ہیں (مساوی الساقین، مساوی الاضلاع)

(iv) دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گی اگر (a) ان کے نظیری زاویہ ——— ہوں اور (b) ان کے نظیری ضلع ——— ہیں (مساوی، متناسب)

2۔ دو مختلف مثالیں دیجئے۔

(i) مشابہ اشکال کے جوڑوں کی (ii) غیر مشابہ اشکال کے جوڑوں کی

3۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل چار ضلعی مشابہ ہیں یا نہیں:



شکل 6.8

6.3 مثلثوں کی مشابہت

آپ دو مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

آپ دہرا سکتے ہیں کہ مثلث بھی ایک کثیر ضلعی ہے اس لئے ہم مثلثوں کی مشابہت کے لئے بھی وہی شرطیں بیان کر سکتے ہیں جو ہیں:

دو مثلث مشابہ ہیں اگر

(i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں

(ii) ان کے نظیر اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہوں)



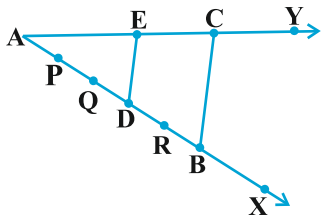
تھیلیز

(640 – 546 قبل مسیح)

ایک مشہور یونانی ریاضی داں نے دو مساوی زوای مثلث سے متعلق ایک اہم حقیقت سے آگاہ کیا ہے دو مساوی زاوی مثلثوں کے نظیری اضلاع کی نسبت ہمیشہ برابر ہوتی ہے۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ اس نے ایک نتیجہ جو **متناسب کا بنیادی مسئلہ** (جواب **تھیلز کا مسئلہ** جانا جاتا ہے) کا استعمال کیا جاتا ہے۔

متناسب کے بنیادی مسئلے کو سمجھنے کے لئے ہم اسے ایک عملی کام کریں

سرگرمی 2: کوئی زاویہ XAY بنایئے اور اس کے ایک بازو AX پر نقاط (مان لیجئے 5 نقطہ) P,Q,D,R, اور B اس طرح سے نشان کریں کہ AP = PQ = QD = DR = RB اب B سے گذرتا ہوا کوئی خط جو بازو



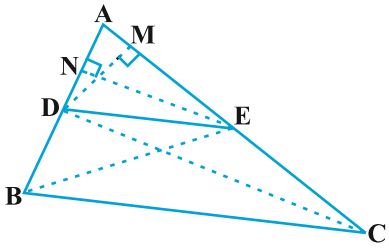
شکل 6.9

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

AY کو C پر قطع کرتا ہے کھینچیے (شکل 6.9 دیکھیے)

اور D سے گذرتا ہوا بھی ایک کھینچیے جو BC کے متوازی ہو اور A اور C کو E پر قطع کرے۔ کیا آپ اپنی بناوٹ سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$؟ AE اور EC کی پیمائش کیجئے۔ $\frac{AE}{EC}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مشاہدہ کیجئے کہ $\frac{AE}{EC}$ بھی $\frac{3}{2}$ کے مساوی ہے۔ اس طرح سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ΔABC میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ کیا یہ ایک اتفاق ہے؟ نہیں یہ مندرجہ ذیل مسئلے کی وجہ سے ہے (جو متناسب کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے)۔

مسئلہ 6.1: اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کوئی خط کھینچا جائے تو وہ باقی دو اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرتا ہے اور وہ دو اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔



شکل 6.10

ثبوت: ہمیں مثلث ABC دیا ہوا ہے جس میں ایک خط BC کے متوازی ہے جو باقی دو اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے (شکل 6.10 دیکھئے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

آیئے BE اور CD کو ملائیں اور پھر $DM \perp AC$ اور $EN \perp AB$. کھینچیں۔

اب ΔADE کا رقبہ = (قاعدہ × اونچائی) $\frac{1}{2}$ =

$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

یاد کیجئے کہ آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ ΔADE کے رقبہ کو ہم ar(ADE) سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس لئے $ar(ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$

اسی طرح سے $ar(BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN$

$ar(ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM$ اور $ar(DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$

اس لئے (1) $\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2) \quad \text{اور}$$

نوٹ کیجیے کہ ΔBDE اور DEC ایک قاعدہ DE اور متوازی خطوط BC اور DE کے درمیان میں ہے۔

$$ar(BDE) = ar(DEC) \qquad (3) \quad \text{اس لئے}$$

اس لئے (1) اور (2) اور (3) ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

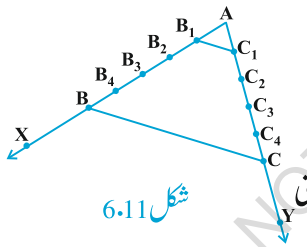
کیا اس مسئلے کا معکوس بھی درست ہے (معکوس کے مفہوم کے لئے ضمیمہ 1 دیکھئے) اس کی جانچ کرنے کے لئے آیئے مندرجہ ذیل مشغلہ کرتے ہیں

سرگرمی 3: اپنی کاپی پر ایک زاویہ XAY بنایئے اور شعاع AX پر نقطے B_1, B_2, B_3, B_4 اور B نشان کیجیے

$$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$$

اسی طرح سے شعاع AY پر نقطے C_1, C_2, C_3, C_4 نشان کیجئے جبکہ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$

تب B_1C_1 اور BC کو ملایئے (شکل 6.11 دیکھیے)۔



شکل 6.11

نوٹ کیجیے کہ $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ہر ایک $\frac{1}{4}$ کے برابر ہے)

آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطوط B_1C_1 اور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں یعنی

$$B_1C_1 \| BC \qquad (1)$$

اسی طرح سے B_2C_2, B_3, C_3 اور B_4C_4 کو ملانے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(= \frac{2}{3}\right) \text{ اور } B_2C_2 \| BC \qquad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(= \frac{3}{2}\right) \text{ اور } B_3C_3 \| BC \qquad (3)$$

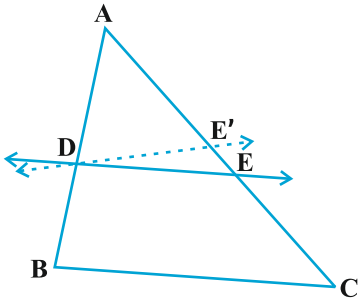
$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(= \frac{4}{1}\right) \text{ اور } B_4C_4 \| BC \qquad (4)$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(1)، (2)، (3)، اور (4) یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک خط مثلث کے دو اضلاع کو ایک نسبت میں منقسم کرتا ہے تب خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوگا۔

اس مشغلے کو ہم کو ایک ایسے زاویہ XAY بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کی پیمائش مختلف ہے اور اس کے بازو AX اور AY کے مساوی حصہ بنے ہوں۔ ہر مرتبہ آپ کو ایک ہی نتیجہ ملے گا۔ اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوگا جو مسئلہ 6.1 کا معکوس ہے۔

مسئلہ 6.2: اگر ایک خط مثلث کے کسی دو اضلاع کو یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے، تب یہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔



شکل 6.12

اس مسئلے کو ہم اس طرح سے ثابت کر سکتے ہیں، ایک DE اس طرح لیجئے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ BC، DE کے متوازی نہیں ہے۔ (شکل 6.12 دیکھئے)

اگر BC, DE کے متوازی نہیں ہے، تو BC، DE کے متوازی کیجیے۔

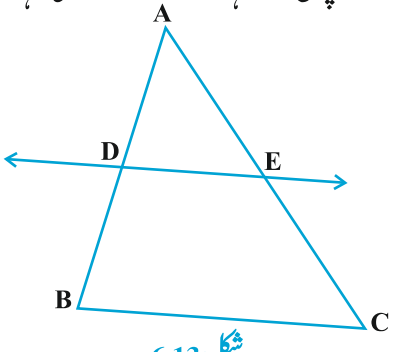
اس لئے $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

اس لئے $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

مذکورہ بالا مساوات میں دونوں طرف 1 جمع کرنے پر آپ دیکھ سکتے ہیں اور E اور E' منطبق ہیں (کیوں؟)

مذکورہ بالا مسئلوں کی مزید وضاحت کے لئے آیئے کچھ مثالوں کو لیتے ہیں۔

مثال 1: اگر ایک خط مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔ اور BC کے متوازی ہے تو ثابت کیجئے کہ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (شکل 6.13 دیکھیے)



شکل 6.13

حل: دیا ہوا ہے $DE \parallel BC$

اس لئے $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (مسئلہ 6.1)

یا $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

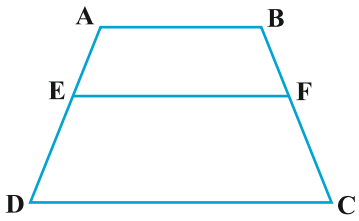
$$\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$$ یا

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$ یا

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$ اس لئے

مثال 2: ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB || DC، E اور F دو غیر متوازی اضلاع بالترتیب AD اور BC پر نقطے ہیں جب کہ EF || AB (شکل 6.14 دیکھیے)

ثابت کیجئے کہ $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$



شکل 6.14

حل: آیئے AC کو ملائیں جو EF کو G پر قطع کرے (شکل 6.15 دیکھئے)

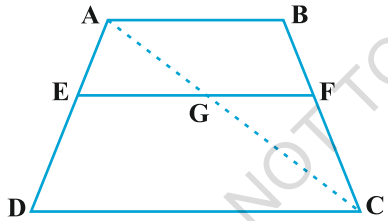
AB || DC اور EF || AB (دیا ہوا ہے)

اس لئے EF || DC (خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوں گے۔

اب، ΔADC میں

EG || DC (کیونکہ EF || DC)

اس لئے $\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (مسئلہ 6.1) (1)



شکل 6.15

اسی طرح سے ΔCAB

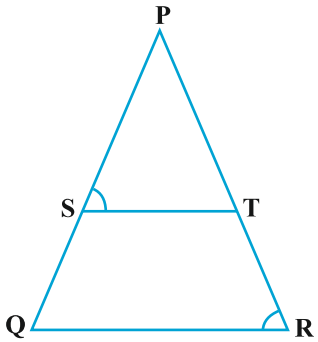
$$\frac{CG}{AG}=\frac{CF}{BF}$$

یعنی $\frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC}$ (2)

اس لئے (1) اور (2) سے

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.16

مثال 3: شکل 6.16 میں $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ اور $\angle PST = \angle PRQ$

ثابت کیجئے کہ PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$.

اس لئے $ST \parallel QR$ (مسئلہ 6.2)

اس لئے $\angle PST = \angle PQR$ (نظیری زاویے) (1)

مزید یہ دیا ہوا ہے کہ

$\angle PST = \angle PRQ$ (2)

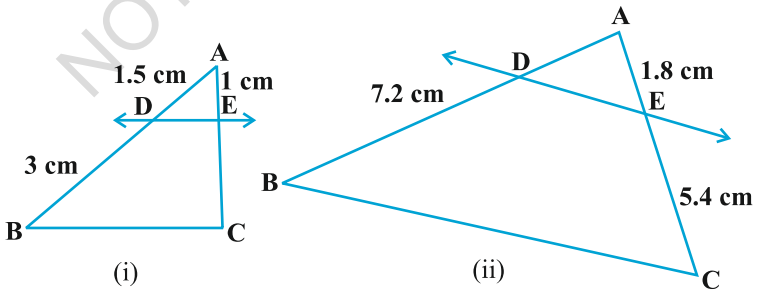
اس لئے $\angle PRQ = \angle PQR$ (1 اور 2 سے)

اس لئے $PQ = PR$ (مساوی زاویوں کے مقابل اضلاع)

یعنی PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

مشق 6.2

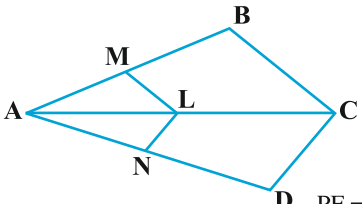
1۔ شکل 6.17(i) اور (ii) میں $DE \parallel BC$۔ (i) میں EC اور (ii) میں AD معلوم کیجیے۔



شکل 6.17

2۔ E اور F بالترتیب مثلث PQR کے اضلاع PQ اور PR پر دو نقطے ہیں۔ مندرجہ ذیل ہر ایک حالت کے لئے جانچ کیجیے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.18

کہ EF || QR

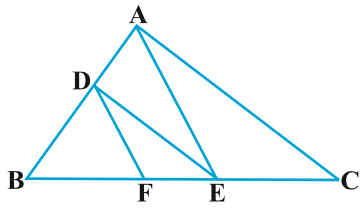
(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm اور FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm اور RF = 9 cm

(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm اور PF = 0.36 cm

3۔ شکل 6.18 میں اگر LM || CB اور LN || CD ثابت کیجیے کہ

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}.$$

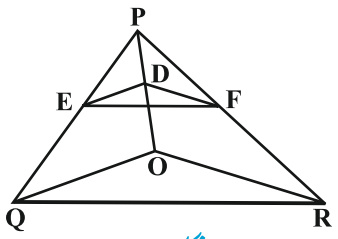


شکل 6.19

4۔ شکل 6.19 میں DE || AC اور DF || AE ثابت کیجیے کہ

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}.$$

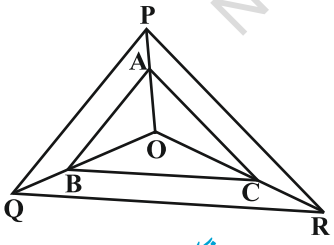
5۔ شکل 6.20 میں DE || OQ اور DF || OR دکھایئے کہ EF || QR



شکل 6.20

6۔ شکل 6.21 میں A, B اور C بالترتیب OQ, OP اور OR پر نقطے ہیں جب کہ AB || PQ اور AC || PR ثابت کیجئے کہ BC || QR۔

7۔ مسئلہ 6.1 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجئے کہ مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گذرنے والا خط دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔ (یاد کیجئے کہ آپ اس کو نویں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)



شکل 6.21

8۔ مسئلہ 6.2 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجئے کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوتا ہے (یاد کیجئے کہ آپ اس کو نویں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)

9۔ ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB || DC اور اس کے وتر ایک دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں ثابت کیجئے کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

10۔ ایک چار ضلعی ABCD کے وتر ایک دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جب کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ثابت کیجئے کہ چار ضلعی

@KPBS NOT TO BE REPUBLISHED

ABCD ایک منحرف ہے۔

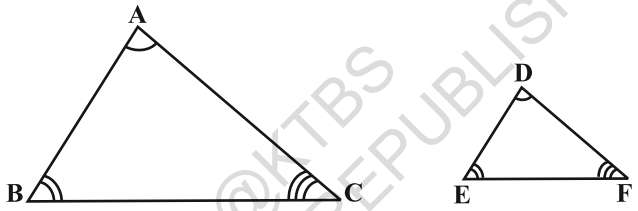
6.4 مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں

پچھلے سیکشن میں ہم نے بیان کیا کہ دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر (متناسب ہوں) ہو۔

یعنی ΔABC اور ΔDEF میں اگر

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ اور

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$، تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (شکل 6.22 دیکھیے)



شکل 6.22

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ A کا نظیری D، B کا نظیری E اور C کا نظیری F ہے۔ علامتی طور پر ہم ان دو مثلثوں کی مشابہت کو 'ΔABC ~ ΔDEF' لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں کہ مثلث ABC مثلث DEF کے مشابہ ہے۔ علامت '~' کے مشابہ ہیں، کو ظاہر کرتی ہے، یاد کیجیے آپ نے نویں کلاس میں علامت '≅' کو متماثل ہے، کے لیے استعمال کیا تھا۔

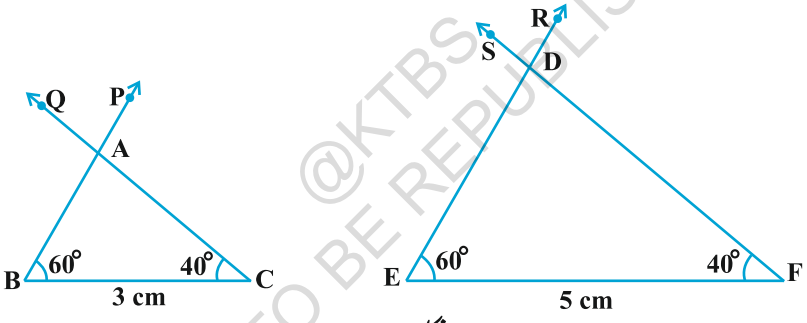
اس کو ضرور یاد رکھنا چاہیے کہ جیسے کے دو مثلثوں کی متماثلت میں کیا گیا، مثلثوں کی مشابہت کو بھی علامتی طور پر ظاہر کیا جائے۔ ان کے راسوں کی صحیح مطابقت کو استعمال کرے۔ مثال کے طور پر شکل 6.22 کے مثلثوں ABC اور DFE کے لئے ہم $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ یا $\Delta ABC \sim \Delta FED$ نہیں لکھ سکتے ہیں۔ لیکن ہم $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ لکھ سکتے ہیں۔

اب قدرتی طور پر یہ سوال پیدا ہوتا ہے: دو مثلثوں ABC اور DEF کی مشابہت کی جانچ کرنے کے لیے، کیا ہم ہمیشہ ان کے نظیری زاویوں کی برابری ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) اور ان کے نظیری اضلاع کی نسبت کی برابری $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ پر غور کرتے ہیں؟ آیئے جانچ کرتے ہیں۔ یاد کیجیے کہ آپ نے نویں کلاس میں دو مثلثوں کی

کی متماثلت سے متعلق کچھ شرطیں حاصل کی تھیں، جن میں صرف تین نظیر حصوں کے جوڑے ملوث کیجئے۔ یہاں بھی آیئے ہم ایک کوشش کریں دو مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں حاصل کرنے کی جس میں دو مثلثوں کے نظیری حصوں کے چھ جوڑوں کے بجائے کم نظیری حصوں کے جوڑوں کا استعمال کر کے مثلثوں کو مشابہ ثابت کر دیں۔ اس کے لیے ہم مندرجہ ذیل سرگرمی (عملی کام) کرتے ہیں۔

سرگرمی 4: دو مختلف لمبائیوں، مان لیجئے 3 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر، والے قطعات خط بالترتیب BC اور EF کھینچیں۔ تب نقطہ B اور C پر بالترتیب زاویہ PBC اور QCB بنایئے جن کی پیمائش مان لیجیے 60° اور 40° ہو۔ مزید نقطہ E اور F پر بالترتیب زاویہ REF اور SEF، 60° اور 40° کے بنائیں۔ (شکل 6.23 دیکھیے)

مان لیجئے شعاعیں BP اور CQ ایک دوسرے کو A پر اور ER اور FS ایک دوسرے کو D پر قطع کریں دو مثلثوں



شکل 6.23

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

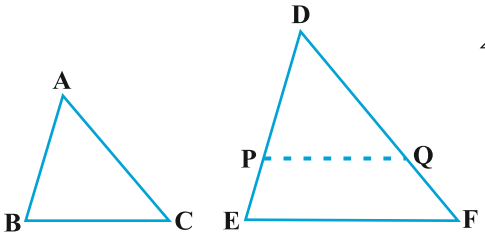
ABC اور DEF میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle A = \angle D$ اور $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ بھی ان دونوں مثلثوں کے نظیری زاویے برابر ہیں۔ آپ ان کے نظیری اضلاع کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$. اور $\frac{AB}{DE}$، $\frac{CA}{FD}$ کے بارے میں آپ کا خیال ہے AB, DE, CA اور FD کی پیمائش کرنے پر آپ پائیں گے کہ $\frac{AB}{DE}$ اور $\frac{CA}{FD}$ بھی 0.6 کے برابر ہیں (یا نزدیکی طور پر 0.6 کے قریب ہیں۔ اگر پیمائش میں کچھ غلطی ہوگئی ہو تو) اس طرح سے آپ اس عمل کو ایسے دوسرے بہت سے مثلثوں کے جوڑے بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کے نظیری زاویے مساوی ہوں ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے (یا متناسب ہیں) اس مشغلہ سے ہمیں دو مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط حاصل ہوتی ہے۔

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

مسئلہ 6.3: اگر دو مثلثوں میں نظیری زاویہ برابر ہوں۔ تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت

برابر ہوتی ہے (یا متناسب) اور اس لئے دونوں مثلثات مشابہ ہوں گے۔

اس مشابہت کی شرط کو ہم دو مثلثوں کی مشابہت AAA (زاویہ-زاویہ-زاویہ) شرط کہتے ہیں اس مسئلے کو ہم دو مثلثوں ABC اور DEF کو لے کر کر سکتے ہیں جب کہ $\angle A=\angle D, \angle B=\angle E$ اور $\angle C=\angle F$ (شکل 6.24 دیکھیے)



شکل 6.24

اگر $DP=AB$ اور $DQ=AC$ کاٹئے اور PQ ملایئے

اس لئے $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

اس سے حاصل ہوتا ہے $\angle B=\angle P=\angle E$ اور $PQ \parallel EF$ (کیسے؟)

اس لئے $\frac{DP}{PE}=\frac{DQ}{QF}$ (کیوں؟)

یعنی $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (کیوں؟)

اسی طرح سے، $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$

اور اسی لئے $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$

رائے زنی (ریمارک): اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زوایوں کے برابر ہوں تب مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت سے ان کا تیسرا زاویہ بھی مساوی ہوگا۔ اس لئے AAA مشابہت کی شرط کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

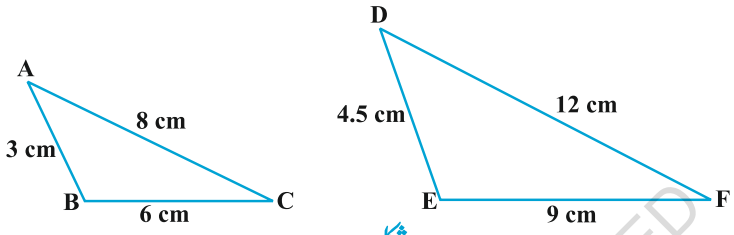
اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تو دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

اس شرط کو ہم AA دو مثلث کی مشابہت کی شرط کہتے ہیں۔

اوپر آپ دیکھ چکے ہیں اگر کسی مثلث کے تین زاویہ بالترتیب دوسرے مثلث کے تین زاویوں کے برابر ہیں تو ان کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے (یا ان کی نسبت برابر ہوگی) اس بیان کے معکوس کے بارے میں کیا خیال ہے؟ کیا اس کا معکوس درست ہے؟ دوسرے لفظوں میں اگر ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہیں، تو کیا یہ صحیح ہے کہ ان کے نظیری زاویہ بھی برابر ہوں؟ آیئے اس کو ایک مشغلے کے ذریعے جانچیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

سرگرمی 5: دو مثلث ABC اور DEF اس طرح بنائیں کہ AB = 3cm، BC = 6cm اور CA = 8cm،
DE = 4.5cm، EF = 9cm اور FD = 12cm (شکل 6.25 دیکھیے)
اس لئے آپ کے پاس ہے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہیں)



شکل 6.25

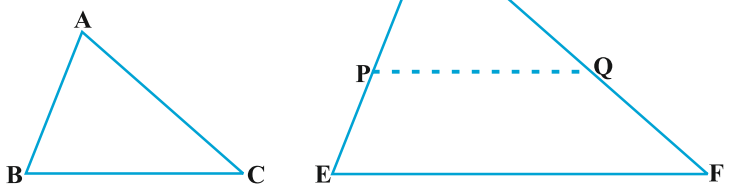
اب ∠A, ∠B, ∠C, ∠D, ∠E اور ∠F کی پیمائش کیجئے آپ مشاہدہ کریں گے کہ ∠A = ∠D, ∠B = ∠E اور ∠C = ∠F یعنی دونوں مثلثات کے نظیری زاویے برابر ہیں۔

اس سرگرمی کو آپ دوسرے اسی طرح کے مثلثوں کو بنا کر (جن کے اضلاع کی نسبت برابر ہو) دہرا سکتے ہیں۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری زاویے برابر ہوں گے۔ یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.4: اگر دو مثلثوں میں، ایک مثلث کے اضلاع دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں (یا ان کی نسبت برابر ہو) تب ان کے نظیری زاویے برابر ہونگے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

دو مثلثوں کی مشابہت کی اس شرط کو ہم SSS (ضلع۔ضلع۔ضلع) شرط کہتے ہیں۔

اس مسئلے کو ہم دو مثلث ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جبکہ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1) (شکل 6.26 دیکھیے:)



شکل 6.26

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

$DP = AB$ اور $DQ = AC$ کاٹئے اور PQ کو ملایئے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ اور $PQ \parallel EF$ (کیسے؟)

اس لئے $\angle Q = \angle F$ اور $\angle P = \angle E$

اس لئے $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

اس لئے $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (کیوں؟)

اس لئے $BC = PQ$ (کیوں؟)

اس طرح سے $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

اس لئے $\angle C = \angle F$ اور $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ (کیسے؟)

ریمارک: آپ یاد کیجیے کہ دونوں شرطیں (i) نظیری زاویہ برابر ہیں (ii) نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے دو کثیر ضلعی کے مشابہ ہونے کے لئے کافی نہیں ہیں۔لیکن مسئلہ 6.3 اور 6.4 کی بنیاد پر اب آپ کہہ سکتے ہیں کہ دو مثلثوں کی مشابہت کے سلسلے میں دونوں شرطوں کی جانچ کرنا ضروری نہیں ہے۔ایک شرط دوسری شرط اپنے آپ پوری ہوجاتی ہے۔

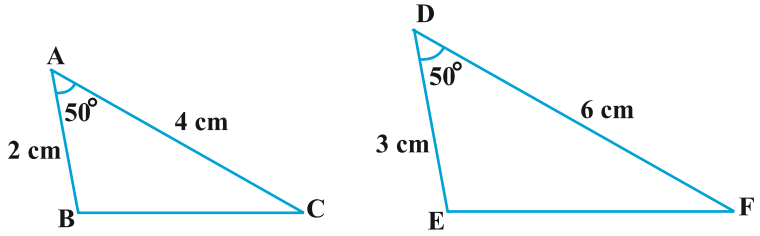
آیئے اب نویں کلاس میں مثلثوں کی متماثلت کی مختلف شرطوں کو دہرایئے۔آپ یہ مشاہدہ کریں گے کہ مشابہت کی SSS شرط کا موازنہ متماثلت کی SSS شرط سے کیا جاسکتا ہے۔اس بات سے ہمیں تقویت ملتی ہے کہ ہم دیکھیں مثلثوں کی متماثلت کی SAS شرط کا موازنہ مشابہت کی شرط سے کیا جاسکتا ہے یا نہیں،اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل سرگرمی کرتے ہیں۔

سرگرمی 6: دو مثلث ABC اور DEF بنایئے جس میں $AB = 2cm$، $\angle A = 50^\circ$، $AC = 4cm$

$DE = 3cm$، $\angle D = 50^\circ$ اور $DF = 6cm$ (شکل 6.27 دیکھیے)

یہاں آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہے) اور $\angle A$ (ضلع AB اور AC کے درمیان

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.27

بنا زاویہ) برابر ہے ∠D (اضلاع DE اور DF کے درمیان بنے زاویے) کے۔ یعنی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہے اور ان زاویوں کے متصل اضلاع کی نسبت برابر ہو (یعنی متناسب) آیئے اب ∠B, ∠C, ∠E اور ∠F کی پیمائش کیجیے۔

آپ پائیں گے کے ∠B = ∠E اور ∠C = ∠F یعنی ∠A = ∠D, ∠B = ∠E اور ∠C = ∠F اس لئے مشابہت کی AAA شرط کے مطابق Δ ABC ~ Δ DEF۔ آپ اس سرگرمی مثلثوں کے بہت سے ایسے جوڑے بنا کر کر سکتے ہیں جس میں مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان زاویوں کے متصل اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہو)۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ مثلث مشابہ ہیں یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.5: اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان زاویوں کے متصل اضلاع متناسب ہوں، تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔

اس شرط کو ہم مثلثوں کی مشابہت کی SAS (ضلع۔زاویہ۔ضلع) شرط سے جانتے ہیں۔

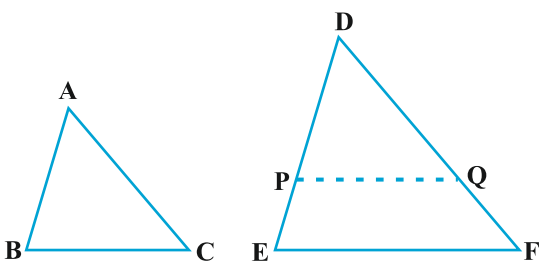
جیسا ہم نے پہلے کیا ہے، اس مسئلے کو بھی ہم دو مثلثوں ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جب کہ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} (<1)$ اور ∠A = ∠D (شکل 6.28 دیکھئے) DP = AB، DQ = AC کاٹئے اور PQ ملایئے۔

اب PQ || EF اور Δ ABC ≅ Δ DPQ (کیسے؟)

اس لئے ∠A = ∠D, ∠B = ∠P اور ∠C = ∠Q

اس لئے Δ ABC ~ Δ DEF (کیوں)

اس شرط کے استعمال کی مزید وضاحت کے لئے

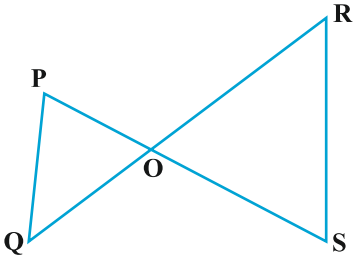


شکل 6.28

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ہم کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 4: شکل 6.29 میں اگر $PQ \parallel RS$ ثابت کیجئے کہ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$

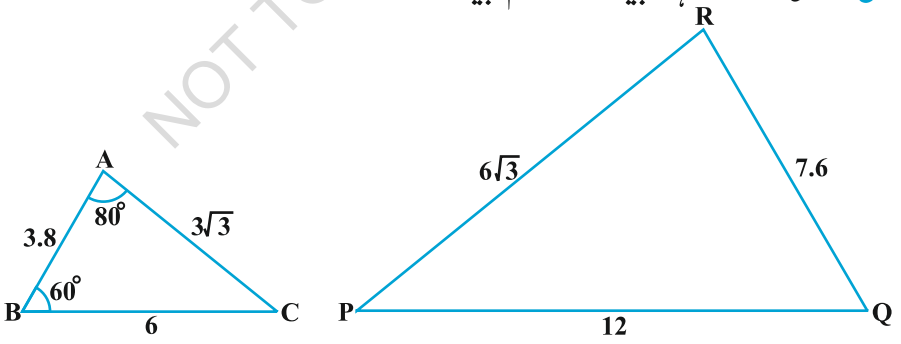


شکل 6.29

حل:

	$PQ \parallel RS$	(دیا ہوا ہے)
اس لیے	$\angle P = \angle S$	(متبادل زاویہ)
اور	$\angle Q = \angle R$	
اس لیے	$\angle POQ = \angle SOR$	(بالمقابل زاویہ)
اس لیے	$\Delta POQ \sim \Delta SOR$	(AAA مشابہت کی شرط)

مثال 5: شکل 6.30 کا مشاہدہ کیجیے اور $\angle P$ معلوم کیجیے۔



شکل 6.30

حل: ΔABC اور ΔPQR میں

$$\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یعنی $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

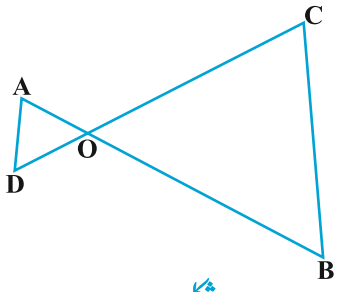
اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS مشابہت کی شرط)

اس لیے $\angle C = \angle P$ (مشابہ مثلثوں کے نظیری زاویہ)

لیکن $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$ (زاویوں کی جمعی خصوصیت)

$= 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$

اس لیے $\angle P = 40^\circ$



شکل 6.31

مثال 6: شکل 6.31 میں $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. ثابت کیجئے کہ $\angle A = \angle C$ اور $\angle B = \angle D$

حل: $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

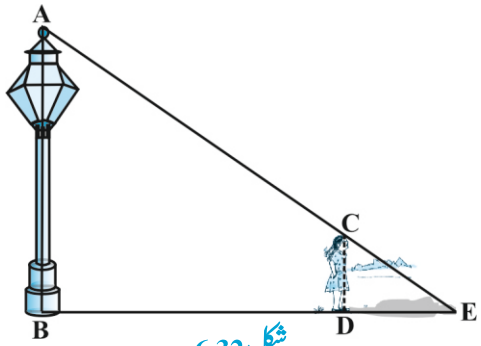
$\angle AOD = \angle COB$ (2) (بالمقابل زاویہ)

اس لیے (1) اور (2) سے $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (مشابہت کی SAS شرط)

اس لیے $\angle A = \angle C$ اور $\angle D = \angle B$ (مشابہ مثلثوں کے نظیری زاویہ)

مثال 7: 90 سینٹی میٹر قد کی ایک لڑکی 1.2 منٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے ایک لیمپ پوسٹ کے قاعدہ سے دور جا رہی ہے۔ اگر لیمپ زمین سے 3.6 میٹر اونچائی پر واقع ہے تو 4 سیکنڈ بعد اس کی پرچھائی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل: مانا AB لیمپ پوسٹ کو ظاہر کرتا ہے اور CD، 4 سیکنڈ چلنے کے بعد لڑکی کو ظاہر کرنا ہے (شکل 6.32 دیکھیے) شکل میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ DE لڑکی کی پرچھائی ہے۔ مان لیجیے DE



شکل 6.32

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

x میٹر ہے۔

اب، $DB = 1.2\text{ m} \times 4 = 4.8\text{m}$

نوٹ کیجئے ΔABE اور ΔCDE،

$\angle B = \angle D$ (ہر ایک 90° کا ہے کیونکہ لیمپ پوسٹ اور لڑکی دونوں زمین پر انتصابی طور پر کھڑے ہیں)

اور $\angle E = \angle E$ (یکساں)

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$

اس لئے $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AB}{CD}$

یعنی $\dfrac{4.8 + x}{x} = \dfrac{3.6}{0.9}$ $\left(90\text{cm} = \dfrac{90}{100}\text{ m} = 0.9\text{m}\right)$

یعنی $4.8 + x = 4x$

یعنی $3x = 4.8$

یعنی $x = 1.6$

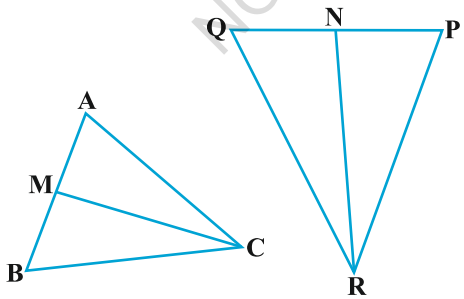
اس لئے 4 سیکنڈ چلنے کے بعد لڑکی کی پرچھائی کی لمبائی 1.6m ہے۔

مثال 8: شکل 6.33 میں CM اور RN بالترتیب ΔABC اور ΔPQR کے وسطانیہ ہیں اگر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ہو تو ثابت کیجئے کہ

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



شکل 6.33

حل: (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

اس لئے (1) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

اور (2) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ اور $\angle C = \angle R$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

لیکن $AB = 2AM$ اور $PQ = 2\ PN$ (کیونکہ CM اور RN وسطانیہ ہیں)

اس لئے (1) سے $\frac{2\,AM}{2\,PN} = \frac{CA}{RP}$

یعنی $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

مزید $\angle MAC = \angle NPR$ (4) (2 سے)

اس لئے 3 اور 4 سے

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (5) (مشابہت SAS)

(ii)(5) سے $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

لیکن $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ (7) (1 سے)

اس لئے $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ (8) [(6) اور (7) سے]

(iii) دوبارہ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) سے]

اس لئے $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ (9) [(8) سے]

مزید $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\ BM}{2\ QN}$

یعنی $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

یعنی $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) اور (10)]

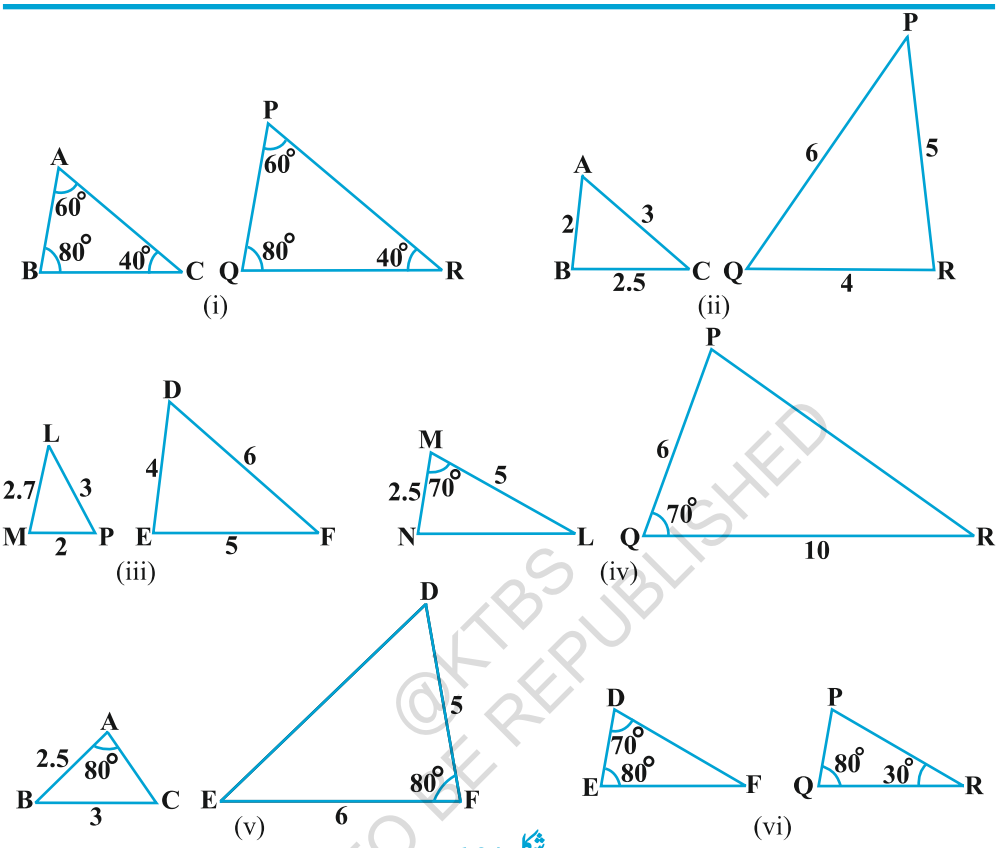
اس لئے $\Delta CMB\ \Delta RNQ$ (SSS مشابہت)

[نوٹ کیجئے: آپ (iii) کو اسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں جس سے (i) ثابت ہوا ہے۔

مشق 6.3

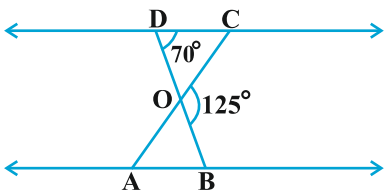
1۔ بیان کیجیے کہ شکل 6.34 میں کون سے مثلثوں کے جوڑے مشابہ ہیں۔ اس سوال کا جواب دینے کے لئے استعمال ہوئی مشابہت کی شرط لکھئے اور مشابہ مثلثوں کو علامتی شکل میں لکھیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.34

2۔ شکل 6.35 میں $\Delta OBA \sim \Delta ODC$، $|BOC = 125^\circ$ اور $\angle CDO = 70^\circ$، $\angle DOC$، $\angle COD|$ اور $\angle OAB$ معلوم کیجیے۔

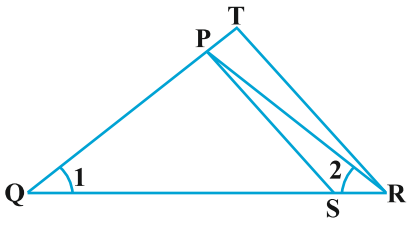


شکل 6.35

3۔ ایک منحرف ABCD جس میں $AB \parallel DC$ کے وتر AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ دو مثلثوں کی مشابہت کی شرط کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے، کہ

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.36

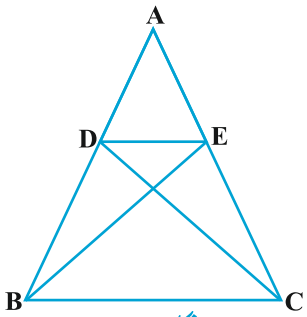
4۔ شکل 6.36 میں $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ اور $\angle 1 = \angle 2$ ثابت کیجئے کہ

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$

5۔ S اور T، ΔPQR کے اضلاع PR اور QR پر دو نقطے ہیں جب کہ $\angle P = \angle RTS$ ثابت کیجئے کہ $\Delta PRQ \sim \Delta RTS$

6۔ شکل 6.37 میں اگر $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ثابت کیجئے کہ

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$



شکل 6.37

7۔ شکل 6.38 میں ΔABC کے ارتفاعات AD اور CE ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو ثابت کیجئے کہ

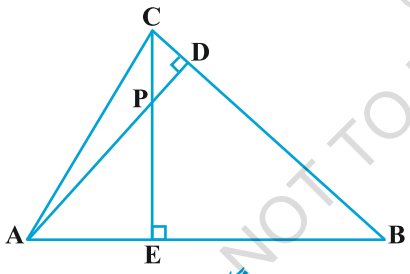
$\Delta AEP \sim \Delta CDP$ (i)

$\Delta ABD \sim \Delta CBE$ (ii)

$\Delta AEP \sim \Delta ADB$ (iii)

$\Delta PDC \sim \Delta BEC$ (iv)

8۔ متوازی الاضلاع ABCD کے بڑھے ہوئے ضلع AD پر کوئی نقطہ E ہے اور CD, BE کو F پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجئے کہ $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

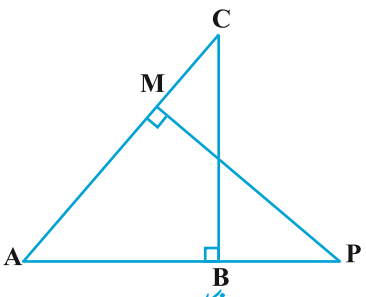


شکل 6.38

9۔ شکل 6.39 میں، ΔABC اور ΔAMP دو قائم مثلثیں ہیں جو بالترتیب B اور M پر قائم ہیں: ثابت کیجیے کہ

$\Delta ABC \sim \Delta AMP$ (i)

$\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ (ii)



شکل 6.39

10۔ CD اور GH بالترتیب $\angle ACB$ اور $\angle EGF$ کے ناصف ہیں جب کہ D اور H بالترتیب ΔABC اور ΔFEG کے اضلاع AB اور FE پر واقع ہیں اگر $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ ثابت کیجئے کہ

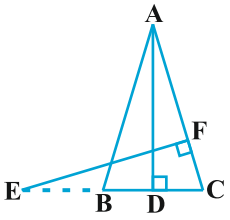
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG} \quad \text{(i)}$$

$\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (ii)

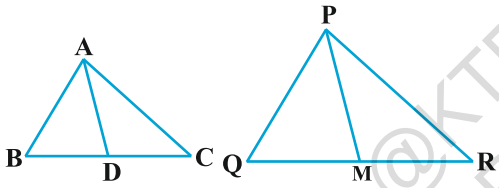
$\Delta DCA \sim \Delta HGF$ (iii)

11۔ شکل 6.40 میں E مساوی الساقین مثلث ABC جس میں $AB = AC$، کے بڑھتے ہوئے ضلع CB پر ایک نقطہ E ہے اگر $AD \perp BC$ اور $EF \perp AC$ ثابت کیجیے، کہ $\Delta ABD \sim \Delta ECF$



شکل 6.40

12۔ مثلث ABC کے اضلاع AB اور BC اور وسطانیہ AD بالترتیب ABC کے اضلاع PQ ، QR اور وسطانیہ PM کے متناسب ہیں (شکل 6.41 دیکھیے) ثابت کیجئے کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$۔



شکل 6.41

13۔ ABC کے ضلع BC پر D ایک نقطہ ہے جبکہ $\angle ADC = \angle BAC$ ثابت کیجئے کہ $CA^2 = CB.CD$

14۔ مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC اور وسطانیہ AD بالترتیب ΔPQR کے اضلاع PQ اور PR اور وسطانیہ PM کے متناسب میں ہیں۔ ثابت کیجئے کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

15۔ 6 میٹر لمبے ایک انتصابی پول کی گراؤنڈ پر 4 میٹر لمبی پرچھائی بنتی ہے اسی لمحہ ایک ٹاور کی پرچھائی 28 میٹر لمبی بنتی ہے ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

16۔ اگر AD اور PM بالترتیب مثلث ABC اور PQR کے وسطانیہ ہیں جہاں $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ثابت کیجئے کہ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$.

@KTRC NOT TO BE REPUBLISHED

6.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1۔ دو اشکال جن کی شکل یکساں ہو لیکن ضروری نہیں سائز بھی ایک ہو تو وہ مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔

2۔ تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن اس کا معکوس درست نہیں ہے۔

3۔ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہے مشابہ ہوں گے اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (2) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہو (یعنی متناسب ہو)

4۔ اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ایک قطر کھینچا جائے جو باقی دونوں اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرے تو تب دونوں اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔

5۔ اگر کوئی خط مثلث کے دو اضلاع کو مساوی نسبت میں منقسم کرے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

6۔ دو مثلثوں میں اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت بھی برابر ہوگی اور اس طرح دونوں مثلث مشابہ ہوں گے (AAA مشابہت کی شرط)

7۔ دو مثلثوں میں اگر ایک مثلث کے دو زاویہ دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (AAA مشابہت کی شرط)

8۔ اگر دو مثلثوں میں نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہو تب ان کے نظیر زاویہ برابر ہوں گے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔ (SSS مشابہت کی شرط)

9۔ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان کے زاویوں کے حامل اضلاع بھی متناسب ہوں تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔ (SAS مشابہت کی شرط)

قارئین کے لئے نوٹ

اگر دو قائم مثلثوں میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ضلع کے متناسب ہو تو دو مثلثات مشابہ ہوں گے۔ اس کو ہم مشابہت کی RHS شرط کہتے ہیں۔
اگر آپ اس شرط کو باب 8 کی مثال 2 میں استعمال کریں تو ثبوت بہت آسان ہو جائے گا۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5013CH07

7 مختص جیومیٹری (COORDINATE GEOMETRY)

7.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ایک مستوی میں کسی نقطے کو تلاش کرنے کے لئے ہمیں مختص محوروں کی ضرورت ہوتی ہے کسی نقطہ کا y–محور سے فاصلہ x– **مختص یا طولی مختص** کہلاتا ہے اور کسی نقطہ کا x– محور سے فاصلہ y– **مختص یا عرضی مختص** کہلاتا ہے x– محور پر موجود کسی نقطہ کے **مختصات** $(x.0)$ کی شکل کے ہوتے ہیں اور y– محور پر کسی نقطے کے **مختصات** $(0,y)$ شکل کے ہوتے ہیں۔

یہاں آپ کے لئے ایک کھیل ہے ایک گراف پیپر پر عمودی محوروں کا ایک جوڑا بنائیے۔ اب مندرجہ ذیل نقطے اس پر پلاٹ کیجئے اور ان کو بتائے گئے طریقے کے مطابق ملائیے یعنی نقطے A(4,8) کو B(3,9) سے B کو C(3,8) سے، C کو D(1,6) سے، E(1,5) کو F(3,3) سے، F کو G(6,3) سے G کو H(8,5) سے، H کو I(8,6) سے I کو J(6,8) سے، J کو K(6,9) سے، K کو L(5,8) سے اور L کو A سے ملائیے۔ اس کے بعد نقطوں P(3.5, 7), Q(3, 6) اور R(4, 6) کو جوڑ کر ایک مثلث بنائیے۔ اور نقطے X(5.5, 7), Y(5, 6) اور Z(6, 6) کو ملا کر مثلث بنائیے۔ اب S(4, 5), T(4.5,4) اور U(5, 5) کو مثلث بنائیے۔ اور آخر میں نقطہ S کو نقطوں (0,5) اور (0, 6) سے ملائیے اور نقطہ U کو نقاط (9, 5) اور (9, 6) سے ملائیے۔ آپ کو کسی طرح کی تصویر حاصل ہونی چاہئے ؟

آپ یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ دو متغیروں والی $ax + by + c = 0$ (a,b اور c ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکے) شکل کی خطی مساوات کو جب گراف کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔ مزید باب 2 میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ کا گراف ایک مکافی ہے۔ درحقیقت مختص جیومیٹری کی ایک الجبری اوزار کے طور پر دریافت جیومیٹری کی اشکال کا مطالعہ کرنے کے لئے ہوئی ہے۔ یہ ہماری مدد الجبرے کے استعمال سے جیومیٹری کا مطالعہ کرنے میں

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

کرتی ہے اور الجبرے کو جیومیٹری کے استعمال سے سمجھنے میں مدد کرتی ہے یہی وجہ ہے کہ مختص جیومیٹری کا استعمال مختلف میدانوں جیسے فزکس، انجینئرنگ، جہاز رانی زلزلے پیما سے متعلق اور فن میں ہوتا ہے۔

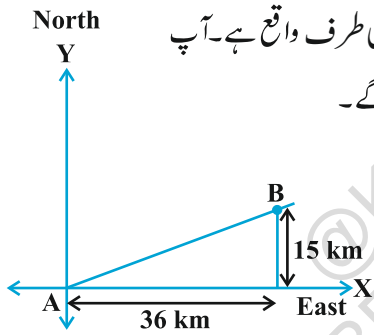
اس باب میں آپ سیکھیں گے کہ آپ ان دو نقاط، جن کے مختصات دئے ہوئے ہوں، کے درمیان فاصلے کس طرح معلوم کریں گے۔ اور اس کے ساتھ دئے ہوئے تین نقطوں سے بنے مثلث کا رقبہ کس طرح معلوم کریں گے۔ آپ یہ بھی مطالعہ کریں گے کہ اس نقطے کے مختصات کیسے معلوم کئے جائیں جو دو نقطوں کو ملانے والے قطع خط کو دی ہوئی نسبت میں منقسم کرتا ہے۔

7.2 فاصلہ فارمولہ

آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں

ایک شہر B، شہر A سے 36 کلومیٹر مشرق کی طرف اور 15 کلومیٹر شمال کی طرف واقع ہے۔ آپ بغیر ناپے دونوں A شہر سے B شہر کے درمیان فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے۔

آیئے دیکھتے ہیں، اس صورت حال کو گراف کے طور پر شکل 7.1 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ یہ فاصلہ معلوم کرنے کے لئے فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کر سکتے ہیں۔

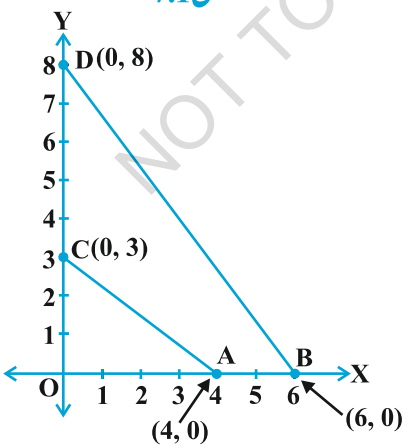


شکل 7.1

اب مان لیجئے دو نقطے x–محور پر واقع ہیں ہم ان کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر دو نقطے A(4,0) اور B(6,0) پر غور کیجئے (شکل 7.2) نقطہ A اور B x– محور پر واقع ہیں۔ شکل میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ OA = 4 اور OB = 6 اکائیاں ہیں۔

اس لئے B کا A سے فاصلہ ہے یعنی AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 اکائیاں

اس لئے اگر گراف دو نقطے x – محور پر واقع ہوں تو ہم آسانی سے ان کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اور C(0,3) اور D(0,8) y– محور پر ہوں۔ اسی طرح ہم اکائیاں CD = (8–3) = 5 (شکل 7.2 دیکھیے)



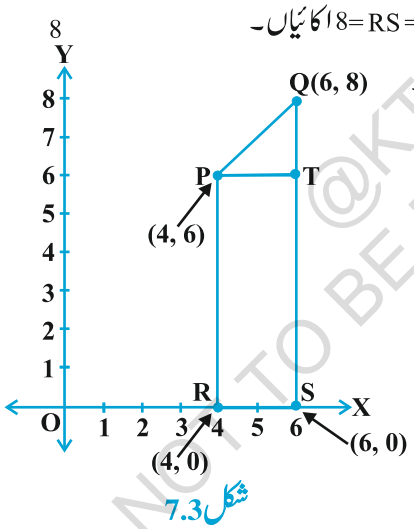
شکل 7.2

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کیا آپ A اور C کے درمیان (شکل 7.2) کا فاصلہ بھی معلوم کر سکتے ہیں ۔ کیونکہ $OA = 4$ اکائیاں اور $OC = 3$ اکائیاں اس لئے A کا C سے فاصلہ یعنی اکائیاں $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ اسی طرح سے آپ B کا D سے فاصلے معلوم کر سکتے ہیں $DB = 10$ اکائیاں۔

آیئے اب ایسے دونقطوں پر غور کرتے ہیں جو مختص محوروں پر واقع نہیں ہیں ۔ کیا ان کے درمیان فاصلہ معلوم کیا جا سکتا ہے؟ ہاں! ایسا کرنے کے لئے ہم فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرتے ہیں۔ آیئے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

شکل 7.3 میں نقاط P(4,6) اور Q(6,8) پہلے ربع میں ہیں ۔ ان کے درمیان فاصلے معلوم کرنے کے لئے ہم فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کریں گے؟ آیئے P اور Q سے بالترتیب x– محور پر عمود PR اور QS ڈالیں ۔ P سے QS پر بھی عمود ڈالیں جو QS سے T پر ملے ۔ تب R اور S کے مختصات ہیں بالترتیب (4,0) اور (6,0) اس لئے $RS = 2$ اکائیاں، ساتھ ہی $QS =$ 2 اکائیاں $PR = TS = 6$ اور ہیں۔ اس لئے $QT = 2$ اکائیاں اور $PT = RS = 8$ اکائیاں۔



شکل 7.3

اب فیثا غورث کے مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس ہے۔

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

$$PQ = 2\sqrt{2} \text{ اکائیاں}$$

آپ دو مختلف ربعات میں موجود نقطوں کے درمیان فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے؟

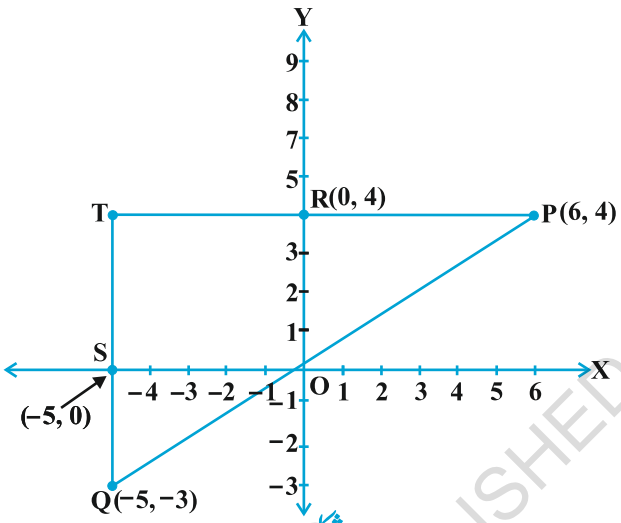
نقاط P(6,4) اور Q(–5,–3) (شکل 7.4) غور کیجئے ۔ QS کے x– محور پر عمود ڈالئے ۔ اور نقطہ P سے QS (بڑھانے پر) پر PT عمود ڈالئے جو y– محور کو نقطہ R پر ملے۔

تب $PT = 11$ اکائیاں اور $QT = 7$ اکائیاں (کیوں؟)

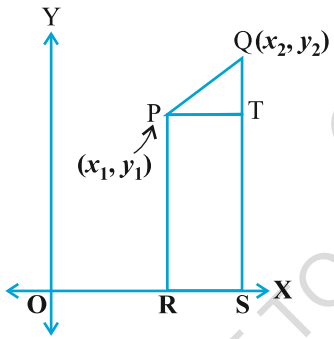
قائم مثلث PTQ میں فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے اکائیاں $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$

آیئے اب کوئی سے دونقطوں $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کرتے ہیں ۔ PR اور QS x– محور پر عمود ڈالیں نقطہ P سے ایک عمود کھینچا گیا جو ایک نقطہ T پر ملتا ہے (شکل 7.5 دیکھیے)۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 7.4



شکل 7.5

تب $OR = x_1$, $OS = x_2$

اس لئے $RS = x_2 - x_1 = PT$

مزید $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$

اس لئے $QT = y_2 - y_1$

اب مثلث PTQ میں فیثا غورث کے مسئلے کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

اس لئے $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نوٹ کیجئے کیونکہ فاصلہ ہمیشہ غیر منفی ہے اس لئے ہم ہمیشہ مثبت جذر المربع لیتے ہیں۔اس لئے نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ ہے۔

$$\left[PQ=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]$$

جو فاصلہ فارمولہ کہلاتا ہے۔

ریمارک:

1۔ مخصوص طور پر نقطہ $P(x,y)$ کا مبدا سے فاصلہ $O(0,0)$ ہوگا۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2۔ ہم یہ بھی لکھ سکتے ہیں $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (کیوں؟)

مثال 1: کیا نقاط (3,2) , (–2,–3) اور (2,3) ایک مثلث بناتے ہیں؟ اگر ہاں تو مثلث کی قسم معلوم کیجیے۔

حل: آیئے PQ , QR اور PR فاصلے معلوم کرنے کے لئے فاصلہ فارمولہ کا استعمال کرتے ہیں جہاں Q(–2, –3), P(3,2) اور R(2,3) دئے ہوئے نقاط ہیں۔ ہمارے پاس ہے۔

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \quad (\text{تقریباً})$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \quad (\text{تقریباً})$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \quad (\text{تقریباً})$$

کیونکہ ان میں کن ہی دو فاصلوں کا حاصل جمع تیسرے سے بڑا ہے اس لئے نقاط Q,P اور R ایک مثلث بنائیں گے۔

مزید $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ فیثاغورث کے مسئلے کے معکوس کے مطابق ہمیں $\angle P = 90°$

اس لئے PQR ایک قائم مثلث ہے

مثال 2: دکھایئے کہ نقاط (1,7), (4,2)، (–1,–1) اور (–4,4) ایک مربع کے راس ہیں۔

حل: مان لیجئے A(1, 7), B(4, 2), C (–1, –1) اور D (– 4 ,4) دئے ہوئے نقطے ہیں۔ ABCD کو مربع دکھانے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ چار اضلاع کو اور دونوں وتروں کو برابر دکھا دیں۔ اس لئے،

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

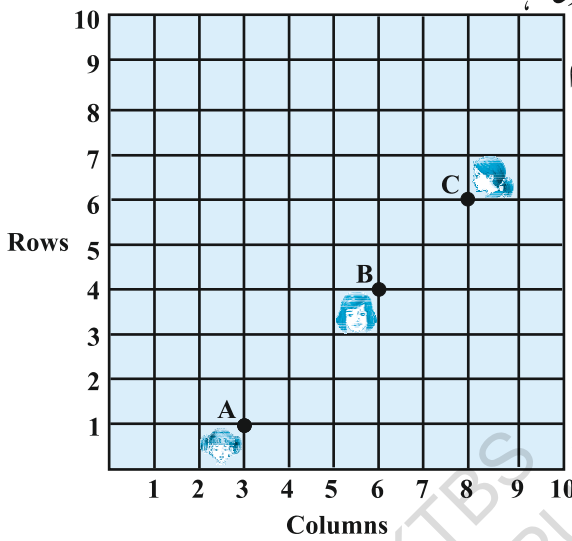
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

کیونکہ AB = BC = CD = DA، چارضلعی ABCD کے تمام اضلاع برابر ہیں اور AC = BD اور اس کے وتر AC اور BD بھی برابر ہیں اس لئے ABCD ایک مربع ہے۔

متبادل حل: ہم چار اضلاع اور ایک وتر AC معلوم کرتے ہیں جیسا کہ اوپر دکھایا گیا ہے۔ یہاں $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ اس لئے فیثاغورث کے مسئلہ کے معکوس کے مطابق $\angle D = 90^\circ$ ہوگا۔ اس لئے ایسا چارضلعی جس کے چار اضلاع مساوی ہوں اور ایک زاویہ 90° کا ہو وہ مربع ہوتا ہے۔ لہٰذا، ABCD ایک مربع ہے



شکل 7.6

مثال 3: شکل 7.6 ایک کلاس روم میں ترتیب دئے گئے ڈیسکوں کو دکھایا گیا ہے اشیما، بھارتی اور کامیلا بالترتیب A(3, 1)، B(6, 4) اور C(8,6) جگہ پر بیٹھی ہیں کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ یہ ایک ہی خط میں بیٹھی ہوئی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی بتایئے۔

حل: فاصلہ فارمولہ استعمال کرنے پر۔

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

کیونکہ $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقاط A,B اور C ہم خط ہیں۔ اس لئے وہ ایک ہی لائن میں بیٹھی ہوئی ہیں۔

مثال 4: x اور y میں ایک تعلق معلوم کیجئے جب کہ نقطہ (x,y) نقاط $(7,1)$ اور $(3,5)$ سے برابر فاصلہ پر واقع ہے۔

حل: مان لیجئے $P(x,y)$ نقاط $A(7,1)$ اور $B(3,5)$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہمیں دیا ہوا ہے کہ $AP = BP$ اس لئے $AP^2 = BP^2$

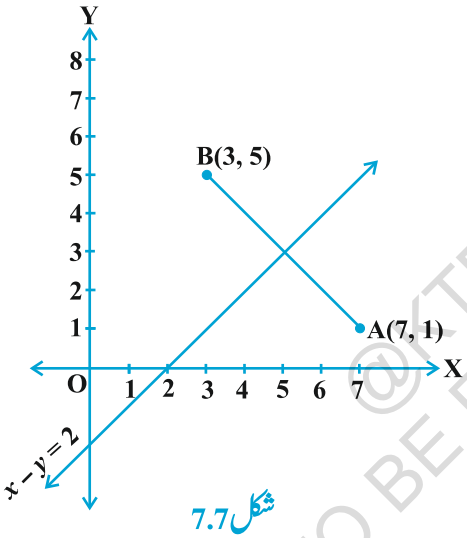
یعنی $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

یعنی $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

یعنی $x - y = 2$

جو کہ مطلوبہ تعلق ہے۔

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ مساوات $x - y = 2$ کا گراف ایک خط ہے آپ ایسے سابقہ مطالعہ سے یہ جانتے ہیں کہ ایک نقطہ جو A اور B سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے AB کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے اس لئے $x-y=2$ کا گراف کا عمودی ناصف ہے۔ (**شکل 7.7** دیکھئے)



شکل 7.7

مثال 5: y-محور پر ایک نقطہ معلوم کیجئے جو نقاط A (6,5) اور B(–4,3) سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ y-محور پر کوئی نقطہ (0,y) کی شکل میں ہوتا ہے۔ اس لئے مان لیجیے نقطہ AP(0,y) اور B سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ تب

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

یعنی $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

یعنی $4y = 36$

یعنی $y = 9$

اس لئے مطلوبہ نقطہ ہے (0,9)۔

آیئے اپنے جواب کی جانچ کریں:

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

نوٹ: مندرجہ بالا ریمارک کو استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $(0,9)$ y – محور اور AB کے عمودی ناصف کا تقاطع ہے۔

مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے

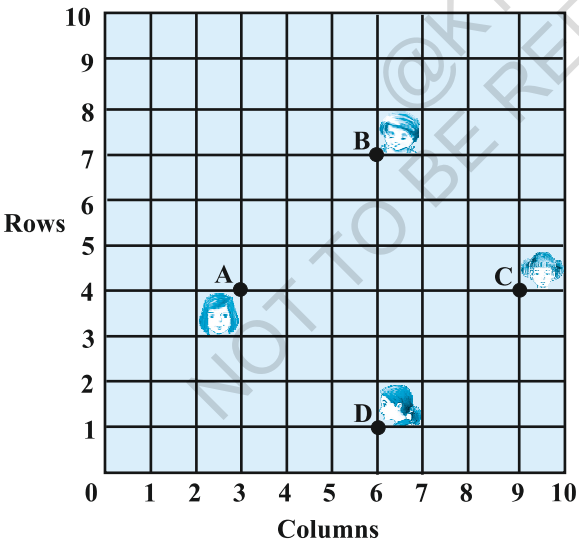
(i) $(2, 3), (4, 1)$ (ii) $(-5, 7), (-1, 3)$ (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2۔ نقاط $(0,0)$ اور $(36,15)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے کیا اب آپ سیکشن 7.2 میں لئے گئے دو شہروں A اور B کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔

3۔ معلوم کیجئے کہ نقاط $(1,5)$، $(2,3)$ اور $(-2,-11)$ ہم خط ہیں۔

4۔ جانچ کیجئے کہ آیا $(5,-2)$، $(6,4)$ اور $(7,-2)$ ایک مساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

5۔ ایک کلاس روم میں 4 دوست نقاط A, B، C اور D پر بیٹھے ہیں جیسا کہ شکل 7.8 میں دکھایا گیا ہے۔ چمپا اور چمیلی کلاس کے اندر آئی ہیں اور کچھ منٹوں تک مشاہدہ کرنے کے بعد چمپا چمیلی سے پوچھتی ہے تمہیں نہیں لگتا کہ ABCD ایک مربع ہے؟ چمیلی اس بات کو نہیں مانتی۔ فاصلہ فارمولہ سے معلوم کیجئے کہ ان میں سے کون صحیح ہے۔



شکل 7.8

6۔ مندرجہ ذیل نقاط سے بنے چار ضلعی کس قسم کے ہیں۔ اپنے جواب کی وجوہات بھی دیجیے۔

(i) $(-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$

(ii) $(-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$

© KBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7۔ x– محور پر وہ نقطہ معلوم کیجیے جو $(2, -5)$ اور $(-2,9)$ سے مساوی فاصلہ پر ہو۔

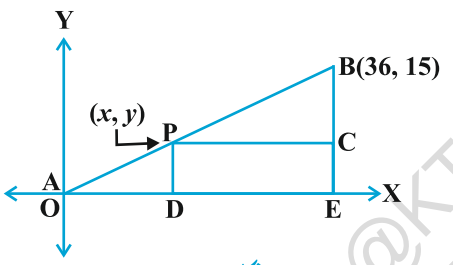
8۔ y کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے نقاط $P(2, -3)$ اور $Q(10,y)$ کے درمیان فاصلہ 10 اکائیاں ہیں۔

9۔ اگر $Q(0,1)$، $P(5,-3)$ اور $R(x,6)$ سے مساوی فاصلہ پر ہو تو x کی قدر معلوم کیجئے اور QR اور PR کے فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

10۔ x اور y کے درمیان تعلق معلوم کیجیے جب کہ نقطہ (x,y) نقاط $(3,6)$ اور $(-3,4)$ سے مساوی فاصلہ پر ہے۔

7.3 سیکشن فارمولہ

آیئے سیکشن 7.2 میں دی گئی صورت حال کو دہراتے ہیں۔ ٹیلیفون کی ایک کمپنی A اور B کے درمیان ایک نشریات ٹاور P پر اس طرح قائم کرنا چاہتی ہے کہ ٹاور P کا B سے فاصلہ ٹاور P کا A سے فاصلہ کا دگنا ہو۔ اگر P، AB پر واقع ہے تو یہ AB کو 1:2 کی نسبت میں بانٹے گا۔ (شکل 7.9 دیکھئے) اگر ہم A کو مبدا O کے طور پر لے لیں، 1 کلومیٹر کو دونوں محوروں پر ایک اکائی کے طور پر لیں، تو B کے



شکل 7.9

مختصات ہوں گے $(36,15)$: ٹاور کا مقام معلوم کرنے کے لئے ہمیں نقطہ P کے مختصات معلوم کرنا ضروری ہے۔ ہم یہ مختصات کیسے معلوم کریں گے۔

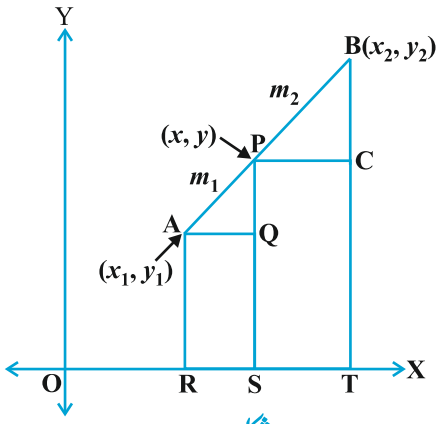
مان لیجئے P کے مختصات (x,y) ہیں۔ P اور B سے x– محور پر عمود کھینچیں جو بالترتیب D اور E نقطہ پر ملتے ہوں، BE, PC پر عمود ڈالیں تب مشابہت کی AA شرط کے مطابق جو آپ نے باب 6 میں پڑھی ہے، ΔPOD اور ΔBPC مشابہ ہوں گے۔

$$\text{اس لئے } \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{اس لئے } \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$$

ان مساواتوں سے $x = 12$ اور $y = 5$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ $P(12,5)$ شرط $OP : PB = 1:2$ کو مطمئن کرتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 7.10

اس مثال سے جو آپ نے سمجھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے ہم ایک عمومی فاصلہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

کوئی دو نقطے $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ پر غور کیجئے اور فرض کیجئے کہ $P(x,y)$، AB کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں بانٹتا ہے یعنی $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (شکل 7.10 دیکھیے)

PS, AR اور BT، x–محور پر عمود ڈالئے، AQ اور PC، x–محور کے متوازی کھینچئے۔ تب مشابہت کی AA شرط کے مطابق

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ان قدروں کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

اسی طرح سے $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

اس لئے نقطہ P(x,y) کے مخصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

یہ **سیکشن فارمولہ** کہلاتا ہے۔

اس کو ہم A , P اور B سے y– محور پر عمود ڈال کر بھی پہلے ہی کی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر وہ نسبت جس میں AB, P کو تقسیم کرتا ہے، $k : 1$ لیے تب نقطہ P کے مختصات ہوں گے۔

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

مخصوص حالت: ایک قطع خط کا وسطی نقطہ، قطع خط کو $1 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے، اس لئے نقاط $A(x_2, y_1)$ اور $B(x_2y_2)$ نقاط کو ملانے والا قطع خط کا وسطی نقطہ مختصات ہوں گے۔

$$\left(\frac{1\cdot x_1 + 1\cdot x_2}{1+1}, \frac{1\cdot y_1 + 1\cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

آیئے اس فارمولہ پر منحصر چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 6: اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط $(4, -3)$ اور $(8, 5)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $3 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل: مان لیجئے $P(x,y)$ مطلوبہ نقطہ ہے، سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

اس لئے $(7,3)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔

مثال 7: نقطہ $(-4,6)$، نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟

حل: مان لیجئے $AB(-4,6)$ کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے، اس سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(-4,6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \quad (1)$$

یاد کیجئے کہ اگر $(x,y) = (a,b)$ تب $x = a$ اور $y = b$

@ITBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$ اور $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$

اب $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ سے ملتا ہے

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

یعنی $$7m_1 = 2m_2$$

یعنی $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

اب تصدیق کر سکتے ہیں کہ نسبت y- مختص کو بھی مطمئن کرے گی۔

اب $\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ دونوں طرف m_2 سے تقسیم کرنے پر

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

اس لئے نقطہ $(-4,6)$ نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو $2 : 7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

متبادل طور پر نسبت $m_1 : m_2$ کو $\frac{m_1}{m_2} : 1$ یا $k : 1$ کی طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مان لیجیے AB,(-4,6) کو داخلی طور پر K:1 نسبت میں تقسیم کرتا ہے سیکشن فارمولہ کے استعمال سے

$$(-4.6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1} \right)$$

اس لئے $$-4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

یعنی $$-4k - 4 = 3k - 6$$

یعنی $$7k = 2$$

یعنی $$k : 1 = 2 : 7$$

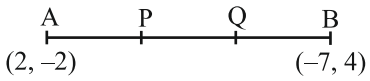
آپ y- مختص کے لئے بھی جانچ کر سکتے ہیں۔

اس لئے نقطہ $(-4,6)$ نقاط $A(-6,10)$ اور $B(3,-8)$ کو ملانے والے قطع خط کو $2 : 7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

نوٹ: آپ اس نسبت کو PA اور PB کو معلوم کر کے اور ان کی نسبت لے کر معلوم کر سکتے ہیں ۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب P,A اور B ہم خط ہوں۔

مثال 8: اس قطع خط کے نقطہ تثلیث (trisection) (نقطہ جو قطع خط کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں) کے مختصات معلوم کیجئے جس کے سرے کے نقطے A(2, –2) اور B(–7,4) ہوں۔



شکل 7.11

حل: مان لیجئے P اور Q، AB کے نقطہ تثلیث ہیں یعنی AP = PQ = QB

(شکل 7.11 دیکھئے)

اس لئے P، AB کو داخلی طور پر 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے P کے مختصات، سیکشن فارمولہ کو استعمال کرنے پر ہیں،

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) \text{ یعنی } (-1,0)$$

اب Q بھی AB کو داخلی طور پر 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لئے Q کے مختصات ہیں۔

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) \text{ یعنی } (-4,2)$$

اس لئے نقاط A اور B کو ملانے والے قطع خط کے نقطہ تثلیث کے مختصات ہیں (–1,0) اور (–4,2)

نوٹ: ہم Q کو PB کے وسطی نقطہ کے طور پر حاصل کر سکتے ہیں اور پھر ہم وسطی نقطہ کے فارمولہ کو استعمال کر کے اس کے مختصات معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 9: وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں y– محور نقاط (5,–6) اور (–1,–4) کو ملانے والے قطع خط کو تقسیم کرتا ہے۔ نقطہ تقاطع بھی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے کی نسبت $k : 1$ ہے تب سیکشن فارمولہ کی رو سے اس نقطہ کے مختصات جو AB کو $k : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ہیں $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

یہ نقطہ y– محور پر واقع ہے اور ہم جانتے ہیں کہ y– محور ہر طولی مختص (abscissa) 0 ہے۔

اس لئے $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

اس لئے $k = 5$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یعنی نسبت 1 : 5 ہے، $k = 5$ قدر رکھنے پر ہمیں نقطہ تقاطع ملتا ہے $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$

مثال 10: اگر نقاط A(6,1) B (8,2) C(9,4) اور D(p, 3) متوازی الاضلاع کے راس ہیں، p کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس لئے AC کے وسطی نقطہ کے مختصات = BD کے وسطی نقطہ کے مختصات ہیں

یعنی $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

یعنی $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

اس لئے $\frac{8+p}{2} = \frac{15}{2}$

$p = 7$

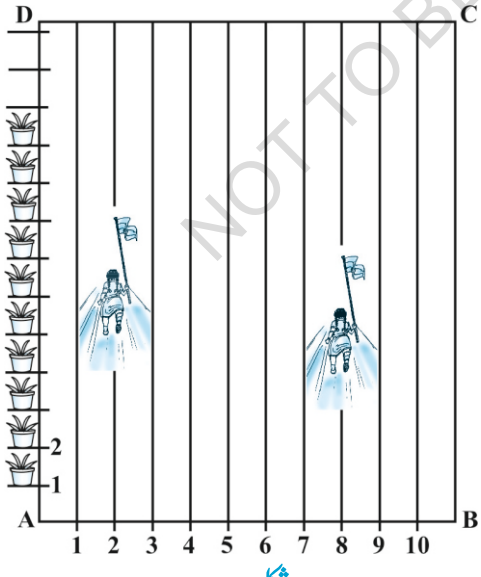
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 7.2

1۔ اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجئے جو نقاط (–1,7) اور (4,–3) کو ملانے والے قطع خط کو 2 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

2۔ ان نقاط کے مختص معلوم کیجئے جو (4 , – 1) اور (–2,–3) سے ملانے والے قطعہ کو تین برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہوں۔

3۔ مستطیل کی شکل والے ایک اسکول کے میدان ABCD میں کھیل کی سرگرمیوں کو چلانے کے لئے کرنے کے لئے۔ 1 میٹر کے فاصلہ پر چاک کے پوڈر سے لائنیں بنائی گئیں۔ خط AD کے ہمراہ 1 میٹر کے



شکل 7.12

فاصلہ پر 100 گملے رکھے گئے جیسا کہ شکل 7.12 میں دکھایا گیا ہے نہار یکا دوسری لائن میں فاصلہ AD کا $\frac{1}{4}$ دوڑتی ہے اور ایک ہرا جھنڈا لگا دیتی ہے۔ پریت AD فاصلہ کا $\frac{1}{5}$ دوڑتی ہے اور آٹھویں لائن میں ایک لال جھنڈا گاڑ دیتی ہے۔ دونوں جھنڈوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے ؟ اگر رشمی کو دونوں جھنڈوں کو ملانے والے قطع خط کے بالکل بیچ میں نیلا جھنڈا گاڑنا ہو تو وہ اپنا جھنڈا کہاں گاڑے گی۔

4۔ وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں نقاط $(-3,10)$ اور $(6,-8)$ کو ملانے والے قطع خط، $(1,-6)$ سے منقسم ہوتا ہے۔

5۔ وہ نسبت معلوم کیجیے AB کا دائرہ جس کا مرکز $(2,-3)$ اور $B(1,4)$ ہو تو۔

مختصات بھی معلوم کیجیے۔

6۔ اگر $(1,2)$، $(4,y)$، $(x,6)$ اور $(3,5)$ ترتیب میں لئے گئے متوازی الاضلاع کے راسوں کے مختصات ہیں تو x اور y کی قدر معلوم کیجیے۔

7۔ نقطہ A کے مختصات معلوم کیجئے جس میں x-محور نقاط $A(1,-5)$ اور $B(-4,5)$ کو ملانے والے قطع خط کو منقسم کرتا ہے نقطہ کے تقسیم کے مختصات بھی معلوم کیجیے۔

8۔ اگر A اور B بالترتیب $(-2,-2)$ اور $(2,-4)$ ہیں تو P کے مختصات معلوم کیجئے جب کہ $AP = \frac{3}{7} AB$ اور P قطع خط AB پر واقع ہے۔

9۔ ان نقطوں کے مختصات معلوم کیجئے جو نقاط $A(-2,2)$ اور $B(2,8)$ کو ملانے والے قطع خط کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

10۔ ایک معین کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے راس اگر ترتیب میں لئے جائیں تو $(3,0)$، $(4,5)$، $(-1,4)$ اور $(-2,-1)$ ہیں

[اشارہ: معین کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ اس کے وتروں کا حاصل ضرب]

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.4 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ ہے $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2۔ نقطہ $P(x,y)$ کا مبدا سے فاصلہ ہے $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3۔ نقطہ $P(x,y)$ کے مختصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو داخلی طور پر $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ہیں $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

4۔ نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کا وسطی نقطہ ہے $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

قارئین کے لئے نوٹ

سیکشن 7.3 میں آپ نے نقطہ P کے مختصات (x,y) کے سیکشن فارمولہ کے بارے میں بحث کی جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع خط کو $m_1 : m_2$ میں تقسیم کرتا ہے۔ جو ہے،

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

نوٹ کیجئے کہ یہاں $PA : PB = m_1 : m_2$

لیکن اگر P, A اور B کے درمیان نہ ہو کر خط AB پر واقع ہو یعنی قطع خط $PA : PB = m_1 : m_2$ کے باہر تب ہم کہتے ہیں کہ P نقاط A اور B کو ملانے والے قطع خط خارجی طور پر تقسیم کرتا ہے۔ ایسی حالت کے لئے سیکشن فارمولہ کے بارے میں آپ اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔

© BTES NOT TO BE REPUBLISHED

A1 ضمیمہ A1: ریاضی میں ثبوت (PROOFS IN MATHEMATICS)

A1.1 تعارف (INTRODUCTION)

ہماری روزمرہ زندگی میں صاف ستھری سوچ اور استدلال کی صلاحیت کافی مفید ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک سیاست داں آپ کو بتاتا ہے اگر آپ کو ایک ایماندار، صاف ستھری حکومت چاہیے تو ہمیں ووٹ دیجئے۔ اصل میں وہ آپ کو اس بات کا یقین دلانا چاہتا ہے کہ اگر آپ نے اس کو ووٹ نہیں دیا تو آپ ایک صاف ستھری حکومت سے محروم ہو جائیں گے۔ اسی طرح سے ایک اشتہار میں یہ بتایا جاتا ہے کہ عقلمند آدمی XYZ قسم کے جوتے پہنتے ہیں۔ اگر آپ XYZ قسم کے جوتے نہیں پہنتے ہیں تو آپ عقلمند نہیں ہیں۔ آپ خود مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ اوپر دئے گئے دونوں بیانات عام پبلک کو گمراہ کرنے کے لئے ہوتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم استدلال کے عمل کو صحیح طور پر سمجھتے ہیں تو ہم انجانے میں بھی ان کے جال میں نہیں پھنسیں گے۔

استدلال کا صحیح استعمال ریاضی اور خصوصاً ثبوت کی تشکیل کا مغز ہے، آپ نویں کلاس میں ثبوت کے تصور سے متعارف ہو چکے ہیں اور آپ نے اصل میں بہت سے بیانات، خاص طور سے جیومیٹری، کو ثابت بھی کئے ہیں، یاد کیجئے کہ ثبوت بہت سے ریاضیاتی بیانوں سے مل کر بنے ہوتے ہیں۔ جس میں ہر ایک بیان ثبوت میں موجود بیان یا پہلے سے ثابت کئے گئے مسئلہ یا بدیہی یا مفروضہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی ثبوت کی تشکیل کا خاص اور استخراجی استدلال کا عمل

اس باب کی شروعات ہم ریاضاتی بیان پر نظر ثانی کرتے ہیں اور پھر ہم بہت سی مثالوں کا استعمال کر کے استخراجی استدلال میں اپنے ہنر skill کو مزید تیز کریں گے۔ ہم نفی (negation) کے تصور پر بھی غور کریں گے اور دئے ہوئے بیان کا منفی بیان بھی معلوم کریں گے۔ اور پھر ہم

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس بات پر بحث کریں گے کہ کس بیان کا معکوس معلوم کرنے سے کیا مراد ہے اور آخر میں ہم نویں کلاس میں سیکھے گئے ثبوت کے اہم اجزاء پر بہت سے مسئلوں کا تجزیہ کر کے نظر ثانی کریں گے۔ یہاں ہم تضاد کے ذریعے ثابت کرنے کے تصور پر بھی بحث کریں گے۔ جس سے آپ کا سابقہ نویں کلاس میں اور اس کتاب کے بہت سے ابواب میں پڑھ چکے ہیں۔

A1.2 ریاضیاتی بیانات پر نظری ثانی

یاد کیجیے کہ بیان ایک بامعنی جملہ ہے جو ایک حکم یا ایک استعجاب یا استفہام نہیں ہے مثال کے طور پر کرکٹ ورلڈ کپ کے فائنل میں کون سی ٹیمیں کھیل رہی ہیں؟ ایک سوال ہے ایک بیان نہیں ہے۔ جاؤ اور اپنے گھر کا کام ختم کرو، ایک حکم ہے بیان نہیں ہے۔ کتنا خوبصورت گول ہوا ہے، استعجابیہ جملہ ہے بیان نہیں ہے۔

یاد کیجئے کہ عمومی طور پر بیانات مندرجہ ذیل میں سے ایک ہو سکتے ہیں۔

- ہمیشہ صحیح
- ہمیشہ غلط
- مبہم

نویں کلاس میں آپ یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ ریاضی میں **ایک بیان قابل قبول تب ہی ہوتا ہے اگر یا تو یہ ہمیشہ صحیح ہو یا ہمیشہ غلط ہو۔** اس لئے مبہم بیانات کبھی بھی ریاضیاتی بیانات نہیں ہوتے۔

آیئے کچھ مثالوں سے اپنی سمجھ پر نظر ثانی کرتے ہیں۔

مثال 1: بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات ہمیشہ صحیح ہیں۔ ہمیشہ غلط ہیں یا مبہم ہیں اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) سورج زمین کے گرد گھومتا ہے۔

(ii) گاڑیوں میں چار پہیے ہوتے ہیں۔

(iii) روشنی کی رفتار تقریباً 3×10^5 کلومیٹر فی سیکنڈ ہوتی ہے۔

(iv) کلکتہ جانے والی ایک سڑک نومبر سے مارچ تک بند کر دی جاتی ہے۔

(v) تمام انسان فانی ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

(i) یہ بیان ہمیشہ غلط ہے کیونکہ ماہر فلکیات نے یہ ثابت کر دیا ہے زمین سورج کے گرد گھومتی ہے۔

(ii) یہ بیان مبہم ہے کیونکہ ہم یہ طے نہیں کر سکتے کہ یہ ہمیشہ صحیح ہوگا یا ہمیشہ غلط۔ اس کا انحصار اس بات پر ہے گاڑی کون سی ہے کیونکہ گاڑیوں کے 2,3,4,6,10 وغیرہ پہیے ہو سکتے ہیں۔

(iii) یہ بیان ہمیشہ صحیح ہے جس کی تصدیق طبیعیات سے ہو چکی ہے۔

(iv) یہ بیان مبہم ہے کیونکہ یہ واضح نہیں کیا گیا ہے یہاں پر کون سی سڑک مراد ہے۔

(v) یہ بیان بالکل صحیح ہے کیونکہ انسان کو کبھی نہ کبھی مرنا ہے۔

مثال 2: بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط، ایسے جوابات کا جواز بھی پیش کیجئے۔

(i) تمام مساوی ضلعی مثلث مساوی الساقین ہوتے ہیں۔

(ii) کچھ مساوی الساقین مثلث مساوی ضلعی ہوتے ہیں۔

(iii) تمام مساوی الساقین مثلث مساوی ضلعی ہوتے ہیں۔

(iv) کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد بھی ہوتے ہیں۔

(v) کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد نہیں ہوتے ہیں۔

(vi) تمام صحیح اعداد ناطق اعداد نہیں ہوتے۔

(vii) دو ناطق اعداد کے درمیان کوئی ناطق عدد نہیں ہوتا۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

(i) یہ بیان درست ہے کیونکہ مساوی ضلعی کے تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں اس لئے یہ مساوی الساقین ہوتا ہے۔

(ii) یہ بیان درست ہے کیونکہ ایسے مساوی الساقین مثلث جن کے قاعدہ کے زاویہ $60°$ کے ہوتے ہیں۔ مساوی ضلعی مثلث ہوتے ہیں۔

(iii) یہ بیان غلط ہے اس کی ایک برعکس مثال دیجئے۔

(iv) یہ بیان درست ہے کیونکہ ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ کی شکل کے ہوتے ہیں جہاں p ایک صحیح عدد اور جہاں $q = 1$ ہو وہ صحیح

اعداد ہیں (مثال کے طور پر $3 = \frac{3}{1}$)

(v) یہ بیان درست ہے کیونکہ $\frac{p}{q}$ کی شکل والے ایسے ناطق اعداد جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور q, p کو تقسیم نہیں کرتا، صحیح اعداد نہیں ہیں۔ (مثال: $\frac{3}{2}$)

(vi) یہ بیان ایسا ہے جیسے ہم کہیں، ایک ایسا صحیح عدد ہے جو ناطق عدد نہیں ہے۔ یہ غلط ہے کیونکہ تمام صحیح اعداد ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

(vii) یہ بیان غلط ہے کیونکہ آپ جانتے ہیں کہ کن ہی دو ناطق اعداد r اور s کے درمیان ناطق عدد $\frac{r+s}{2}$ ان کے درمیان میں ہوتا ہے۔

مثال 3: اگر $x<4$، تو بتایئے کہ مندرجہ ذیل کون سا بیان درست ہے؟ اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

حل:

(i) یہ بیان غلط ہے، کیونکہ مثال کے طور پر $x = 3 < 4$، $2x > 8$ کو مطمئن نہیں کرتا۔

(ii) یہ بیان غلط ہے، کیونکہ مثال کے طور پر $x = 3.5 < 4$، $2x < 6$ کو مطمئن نہیں کرتا۔

(iii) یہ بیان صحیح ہے، یہ ایسا ہی جیسا $x < 4$

مثال 4: مندرجہ ذیل بیانوں کو مناسب شرطوں کے ساتھ اس طرح دوبارہ بیان کیجئے کہ یہ درست بیانات ہو جائیں۔

(i) اگر کسی چار ضلعی کے وتر مساوی ہوں تو یہ مستطیل ہوتا ہے۔

(ii) مثلث کے دو ضلعوں کے دو نقطوں کو ملانے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

(iii) تمام مثبت صحیح اعداد p کے لئے $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے۔

(iv) تمام دو درجی مساواتوں کے دو حقیقی جذر ہیں۔

حل:

(i) اگر متوازی الاضلاع کے وتر برابر ہوں تو وہ مستطیل ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

(iii) تمام مفرد اعداد p کے لئے $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے۔

(iv) تمام دو درجی مساواتوں کے زیادہ سے زیادہ دو حقیقی جزر ہوتے ہیں۔

ریمارک: مذکورہ بالا بیانوں کو دوبارہ بیان کرنے کا دوسرا طریقہ بھی ہے مثال کے طور پر (iii) کو ہم اس طرح بھی بیان کر سکتے ہیں $\sqrt{p}$ تمام مثبت صحیح اعداد p کے لئے غیر ناطق ہے جو پورا ایک مربع نہیں ہے۔

مشق A1.1

1۔ بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات ہمیشہ صحیح ہیں، ہمیشہ غلط ہیں یا مبہم ہیں، اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) ریاضی کی تمام نصابی کتابیں دلچسپ ہیں۔

(ii) زمین سے سورج تک کا فاصلہ تقریباً 1.5×10^8 کلومیٹر ہے۔

(iii) تمام انسان بوڑھے ہوتے ہیں۔

(iv) اتر کاشی سے حارسل کا سفر تھکا دینے والا ہے۔

(v) عورت نے دوربین کے ذریعے ہاتھی دیکھا۔

2۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط، اپنے جوابات کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) تمام مسدس (چھ ضلعی) کثیر ضلعی ہوتے ہیں۔

(ii) کچھ کثیر ضلعی پانچ ضلعی ہوتے ہیں۔

(iii) تمام جفت اعداد 2 سے تقسیم نہیں ہوتے۔

(iv) کچھ حقیقی اعداد غیر ناطق ہوتے ہیں۔

(v) تمام حقیقی اعداد ناطق نہیں ہوتے۔

3۔ مان لیجئے a اور b حقیقی اعداد ہیں جب کہ $a\,b \neq 0$ تب مندرجہ ذیل میں کون سے بیانات صحیح ہیں؟ اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) a اور b دونوں صفر ہیں

(ii) a اور b دونوں غیر صفر ہیں

(iii) a یا b میں سے ایک صفر نہیں ہے۔

4۔ مناسب شرطیں لگا کر مندرجہ بیانات کو اس طرح دوبارہ لکھیں کہ یہ درست ہو جائیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) اگر $a^2 > b^2$ تب $a > b$

(ii) $x^2 = y^2$ تب $x = y$

(iii) اگر $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ تب $x = 0$

(vi) ایک چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

A1.3 استخراجی استدلال

نویں کلاس میں آپ **استخراجی استدلال** کے تصوّر سے متعارف ہو چکے ہیں، یہاں ہم ایسی بہت سی مثالوں کو حل کریں گے۔ جو یہ واضح کر دیں گی کہ کس طرح سے استخراجی استدلال، دئے ہوئے بیانوں، جن کو ہم صحیح سمجھتے ہیں، سے نتائج اخذ کرتا ہے دئے ہوئے بیانات مفروضہ کہلاتے ہیں، ہم کچھ مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 5: دیا ہوا ہے کہ بیجاپور، کرناٹک صوبہ میں واقع ہے۔ شبانہ بیجاپور میں رہتی ہے۔ شبانہ کس صوبہ میں رہتی ہے۔

حل: یہاں دو مفروضے ہیں:

(i) بیجاپور کرناٹک صوبہ میں ہے۔

(ii) شبانہ بیجاپور میں رہتی ہے۔

اس مفروضہ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ شبانہ کرناٹک صوبہ میں رہتی ہے۔

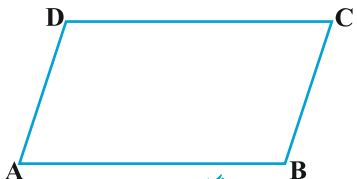
مثال 6: دیا ہوا ہے کہ تمام ریاضی کی نصابی کتابیں دلچسپ ہیں اور فرض کیجئے آپ ریاضی کی نصابی کتاب پڑھ رہے ہیں۔ تو پڑھی جانے والی نصابی کتاب سے کیا نتیجہ نکالتے ہیں؟

حل: دو مفروضوں کو استعمال کرنے پر ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ آپ ایک دلچسپ کتاب پڑھ رہے ہیں۔

مثال 7: دیا ہوا ہے کہ $y = -6x + 5$ اور فرض کیجئے کہ $x = 3$، y کیا ہے۔

حل: دو مفروضہ دئے ہوئے ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے $y = -6(3) + 5 = -13$

مثال 8: دیا ہوا ہے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، اور فرض کیجیے کہ $AB = 7\text{cm}$ $AD = 5\text{cm}$ (شکل A1.1 دیکھئے) آپ DC اور AB کی لمبائیوں کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟



شکل A1.1

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

حل: ہمیں دیا ہوا ہے کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔اس لئے ہم تمام خصوصیات کو اخذ کرتے ہیں جو متوازی الاضلاع کے لئے درست ہیں۔اس لئے خصوصی طور پر یہ خصوصیت کہ متوازی الاضلاع کے مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں صحیح ہے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ AD= 5cm ہم اخذ کرتے ہیں کہ BC = 5cm اسی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ BC=7cm

ریمارک: اس مثال میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اکثر ایک مفروضہ میں مخفی خصوصیت کو معلوم کرنے اور استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

مثال 9: دیا ہوا ہے کہ $\sqrt{p}$ غیر ناطق ہے تمام p کے لئے۔اور فرض کیجئے کہ 19423 ایک مفرد عدد ہے آپ $\sqrt{19423}$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

حل: ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sqrt{19423}$ غیر ناطق ہے۔

مذکورہ بالا مثالوں میں آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ ہم یہ جانتے ہیں کہ مفروضہ صحیح ہے یا غلط۔ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ یہ صحیح ہیں اور پھر استخراجی استدلال کا استعمال کرتے ہیں مثال کے طور پر مثال 9 میں ہم نے یہ جانچ نہیں کی کہ 19423 مفرد ہے یا نہیں اپنی اس دلیل کی وجہ سے ہم اسے مفرد مانتے ہیں۔اس سیکشن میں ہم جس بات پر زور دینا چاہتے ہیں وہ یہ ہے کہ دئے ہوئے ایک مخصوص بیان سے کوئی نتیجہ اخذ کرنے کے لئے ہم کس طرح استخراجی استدلال کا استعمال کرتے ہیں۔یہاں جس بات کی سب سے زیادہ اہمیت ہے وہ یہ ہے کہ ہم استدلال کا صحیح عمل استعمال کریں۔اور استدلال کا یہ عمل مفروضہ کے غلط یا صحیح ہونے پر منحصر نہ ہو۔جب کہ یہ بات نوٹ کرنا ضروری ہے کہ اگر آپ ایک غلط مفروضہ سے شروع کرتے ہیں تو آپ ایک غلط نتیجہ پر ہی پہونچیں گے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A1.2

1۔ دیا ہوا کہ تمام خواتین فانی ہیں اور فرض کیجئے کہ A ایک عورت ہے تو ہم A کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

2۔ دیا ہوا کے دو ناطق اعداد کا حاصل ضرب ناطق ہے اور فرض کیجئے کہ a اور b ناطق ہیں تو ab کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

3۔ دیا ہوا ہے کہ غیر ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ غیر ختم اور غیر تکراری ہے اور $\sqrt{17}$ غیر ناطق ہے، تو ہم $\sqrt{17}$ کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

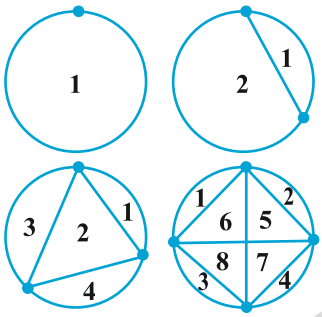
4۔ دیا ہوا ہے کہ $y = x^2 + 6$ اور $x = -1$، y کی قدر کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

5۔ ABCD ایک متوازی الاضلاع دیا ہوا ہے اور $\angle B = 80^\circ$، متوازی الاضلاع کے باقی زاویوں کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

6۔ دیا ہوا ہے کہ PQRS ایک دائری چار ضلعی ہے اور اس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو اب چار ضلعی کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

7۔ تمام مفرد اعداد p کے لئے $\sqrt{p}$ غیر ناطق دیا ہوا ہے۔ فرض کیجیے 3721 مفرد عدد ہے کیا آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $\sqrt{3721}$ غیر ناطق عدد ہے۔ کیا آپ کا نتیجہ صحیح ہے؟ کیوں؟ اور کیوں نہیں؟

A1.4 قیاس، مسئلے، ثبوت اور ریاضیاتی استدلال



شکل A1.2

شکل A1.2 پر غور کیجئے پہلے دائرہ پر ایک نقطہ ہے، دوسرے پر 2 نقطے، اور تیسرے پر تین نقطے، اور اسی طرح آگے بھی، ہر حالت میں ان نقطوں کو ملانے والے ممکنہ خطوط کھینچئے۔

خطوط دائرہ کو دو یا باہمی اخراجی خطوں (جن میں کوئی مشترک حصہ نہ ہو) میں تقسیم کرتے ہیں، ہم ان کو گنتے ہیں اور ہم ان کو جدول کی شکل میں لکھتے ہیں جیسے دکھایا گیا ہے:

نقطوں کی تعداد	خطوں کی تعداد
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

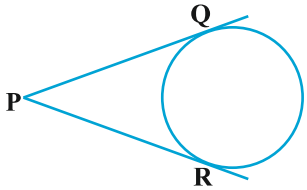
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

آپ ان میں سے کچھ ایک ایسا فارمولہ معلوم کر سکتے ہیں جو دی ہوئی نقطوں کی تعداد کے لئے خطوں کی تعداد کی پیشین گوئی کر سکے۔ نویں کلاس میں آپ کو یہ یاد ہوگا یہ دانشمندانہ اندازہ قیاس کہلاتا ہے۔

مان لیجیے آپ کا قیاس یہ ہے کہ دائرے کے اوپر دئے گئے 'n' نقطوں کے لئے 2^{n-1} باہمی اخراجی نقطے ہوں گے جو ان نقطوں کو تمام ممکنہ خطوط سے ملانے پر بنیں گے۔ یہ ایک بہت ہی دانشمندانہ اندازہ نظر آتا ہے اور اس کی جانچ کی جا سکتی ہے اگر $n = 5$، تو ہمیں 16 خطہ حاصل ہوں گے، اس طرح سے اس فارمولہ کی تصدیق 5 نقطوں سے کرنے کے بعد کیا آپ اسے مطمئن ہیں کے کوئی سے n نقطوں کے لئے 2^{n-1} خطہ ہوں گے؟ اگر ایسا ہے تو اس کا جواب کیا ہوگا۔ اگر کوئی آپ سے پوچھتا ہے کہ آپ $n = 25$ کے لئے اتنے مطمئن کیوں ہو سکتے ہیں؟ ایسے سوالوں کا جواب دینے کے لئے آپ کو ایک ثبوت کی ضرورت ہوئی جو بغیر کسی شبہ کے یہ دکھاتا ہے کہ یہ نتیجہ کچھ n کے لئے درست نہیں ہے۔ حقیقت میں اگر آپ صابر ہیں اور اس کو آپ $n = 6$ کے لئے دیکھیں تو آپ پائیں گے ایسے 31 خطہ ہیں اور $n = 7$ کے 57 خطہ ہیں اسلئے $n = 6$ دئے گئے قیاس کی برعکس مثال ہے۔ اس کے برعکس مثال کی قوت کا مظاہرہ ہوتا ہے یاد کیجئے آپ نے نویں کلاس میں سیکھا تھا کہ **ایک بیان کو ردّ کرنے کے لئے، صرف ایک برعکس مثال پیش کرنا ہی کافی ہے۔**

آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ ہم نے خطوں کی تعداد کے سلسلہ میں ثبوت پر زور دیا حالانکہ ہم نے $n = 1,2,3,4,$ اور 5 کے لئے اس کی تصدیق کر لی تھی۔ آیئے کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ آپ مندرجہ ذیل نتائج سے واقف ہیں (جو باب 5 میں دیے گئے ہیں):

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ اس کی سچائی کو قائم کرنے کے لئے یہ کافی نہیں ہے کہ ہم $n = 1, 2, 3$ کے لئے اس کی تصدیق کریں، کیونکہ کوئی ایسی n کی قدر ہو سکتی ہے جس کے لئے یہ نتیجہ ٹھیک نہ ہو، (جیسا کہ اوپر کی ایک مثال میں نتیجہ $n=6$ کے لئے فیل ہو گیا تھا) لہذا ہمیں ایک ایسے ثبوت کی ضرورت ہے جو سچائی کو بلا شبہ قائم کر سکتا ہے اس کا ثبوت آپ اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔



شکل A1.3

اب شکل A1.3 پر غور کیجئے جہاں PQ اور PR، نقطہ P سے دائرہ پر بنائے گئے مماس ہیں آپ ثابت کر چکے ہیں کہ PQ = PR (مسلہ 10.2) آپ اس سے مطمئن نہیں ہوئے کہ آپ نے بہت سی ایسی شکلیں بنائیں اور ان کے مماسوں کی پیمائش کی اور اس بات کی تصدیق خود کی، کہ نتیجہ ہر ایک حالت میں صحیح ہوا۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کیا آپ کو یاد ہے کہ ثبوت میں کیا کیا ہوتا ہے؟ اس میں بیانات کا تواتر ہوتا ہے (جو **صحیح دلائل** کہلاتے ہیں) جو ثبوت میں پہلے کے بیانوں سے یا پہلے سے ثابت کئے گئے (یا معلوم) نتیجہ جو ثابت کئے جانے والے نتیجہ سے مبّرا یا موضوعوں سے یا تعریفوں سے یا آپ کے بنائے گئے مفروضوں سے سامنے آئے اور آپ نے بیان PQ = PR سے ثبوت اخذ کیا۔ یعنی بیان جو آپ ثابت کرنا چاہتے تھے اب ہم کچھ مثالوں اور مسئلوں پر غور کریں گے اور ان کے ثبوتوں کا تجزیہ کریں گے جس سے ہم اس بات کو بہتر طور پر سمجھ سکیں گے کہ ان کی تشکیل کیسے ہوتی ہے۔

ہم شروعات ثبوت کے نام نہاد راست یا استخراجی طریقوں کو استعمال کر کے کریں گے اس طریقہ میں ہم بہت سے بیانات بناتے ہیں۔ جن کی **بنیاد پچھلے بیانوں پر** ہوتی ہے۔ اگر ہر ایک بیان منطقی طور پر صحیح ہو تو منطقی طور پر صحیح نتیجہ برآمد ہوگا۔

مثال 10: دو ناطق اعداد کا حاصل جمع ناطق عدد ہے۔

حل:

نمبر شمار	بیانات	تجزیہ
1	مان لیجیے x اور y ناطق اعداد ہیں	کیونکہ نتیجہ ناطق اعداد کے بارے میں ہے اس لئے ہم شروعات x اور y سے کرتے ہیں جو ناطق ہیں
2	مان لیجیے $x = \frac{m}{n}$، $n \neq 0$ اور $y = \frac{p}{q}$ $q \neq 0$ جہاں m, n, p اور q صحیح اعداد ہیں	ناطق اعداد کی تعریف استعمال کیجیے۔
3	اس لئے $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	یہ نتیجہ ناطق اعداد کے حاصل جمع کی بات کرتا ہے اس لئے ہم $(x + y)$ پر غور کرتے ہیں
4	صحیح اعداد کی خصوصیات کو استعمال کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ $mq + np$ اور nq صحیح اعداد ہیں۔	صحیح الاعداد کی معلوم خصوصیات کو استعمال کرنے پر
5	کیونکہ $n \neq 0$ اور $q \neq 0$ اس سے ملتا ہے ہے $nq \neq 0$	صحیح الاعداد کی معلوم خصوصیات کو استعمال کرنے پر
6	اس لئے $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ ناطق عدد ہے	ناطق عدد کی تعریف استعمال کرنے پر

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ اوپر دئے گئے ثبوت کا ہر بیان پہلے سے قائم شدہ سچائی یا تعریف پر منحصر ہے۔

مثال 11: 3 سے بڑا ہر مفرد عدد $6k + 1$ یا $6k + 5$ کی شکل کا ہے جہاں k صحیح عدد ہے

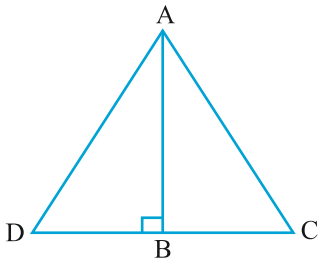
حل:

نمبر شمار	بیانات	تجزیہ (Comments)
1	مان لیجیے p، 3 سے بڑا مفرد عدد ہے	کیونکہ نتیجہ کا تعلق 3 سے بڑا مفرد سے ہے اس لئے ہم ایسے عدد سے شروع کرتے ہیں
2	p کو 6 سے تقسیم کرنے پر ہم پاتے ہیں کہ $6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$ یا $6k+6$ کی شکل کا ہے جہاں k صحیح عدد ہے۔	اقلیدس کا تقسیم معاونہ کے استعمال کرنے پر
3	لیکن $6k+4 = 2(3k+2)$، $6k+2 = 2(3k+1)$، $6k = 2(3k)$ اور $6k+3 = 3(2k+1)$ اس لئے یہ مفرد نہیں ہیں	اب ہم باقی کا تجزیہ کرتے ہیں جس سے ہمیں ملتا ہے کہ p مفرد ہے۔
4	لہذا، P نے $6k+1$ یا اس کی شکل بنایا ہے۔ یہاں k ایک صحیح عدد ہے۔	ہم باقی جوابوں کے اخراج سے اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔

ریمارک: اوپر دی گئی مثال میں ہم مختلف جوابات کے اخراج سے نتیجہ تک پہنچتے ہیں۔ اس طریقہ کو کبھی کبھی ہم اخراج کا ثبوت بھی کہتے ہیں۔

مسلہ A1.1 فیثاغورث کے مسلہ کا معکوس

اگر ایک مثلث میں ایک ضلع کے مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے تو پہلے ضلع کے سامنے کا زاویہ قائمہ ہے۔



شکل A1.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ثبوت:

نمبر شمار	بیانات	تجزیہ
1	مان لیجیے ΔABC مفروضہ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ کو مطمئن کرتا ہے	کیونکہ ہم اسے مثلث کے لئے بیان کو ثابت کر رہے ہیں اس لئے ایسے مثلث کو لے کر شروعات کرتے ہیں
2	AB کا عمودی خط BD بنایئے جب کہ $BD = BC$ اور A کو D سے ملایئے	یہ وجدانی قدم جس کے بارے میں ہم نے بات کی تھی کہ یہ مسئلوں کو ثابت کرنے کے لئے اٹھایا جاتا ہے۔
3	شکلوں کے مطابق ΔABD ایک قائم مثلث ہے اور فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے $AD^2 = AB^2 + BD^2$	ہم نے فیثاغورث کے مسئلہ کا استعمال کیا ہے جو پہلے ہی ثابت کیا جا چکا ہے
4	تشکیل سے $BD = BC$ اس لئے ہمارے پاس ہے $AD^2 = AB^2 + BC^2$	منطقی اخراج
5	اس لئے $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	مفروضہ اور پچھلے بیانوں کا استعمال کرتے ہیں
6	کیونکہ AC اور AD مثبت ہیں $AC = AD$ ہو گا۔	اعداد کی پہلے سے معلوم خصوصیات کے استعمال کرنے پر
7	ہم نے ابھی دکھایا ہے $AC = AD$ اور $BC = BD$ تشکیل ہے اور AB مشترک ہے اس لئے $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ سے SSS	پہلے سے معلوم مسئلہ کے استعمال سے
8	کیونکہ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ $\angle ABC = \angle ABD$ جو کے ایک قائم زاویہ ہے	منطقی استخراج، جس کی بنیاد پہلے سے ہی قائم حقیقت

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ریمارک: اوپر دیا گیا ہر نتیجہ ان اقدام کے تواتر سے ثابت کیا گیا ہے جو تمام ایک دوسرے سے منسلک ہیں ان کی ترتیب اہم ہے ثبوت کا ہر قدم پچھلے اقدام اور پہلے سے معلوم نتائج کو لاگو کرتا ہے (مسئلہ 6.9 دیکھیے)

مشق A1.3

مندرجہ ذیل ہر ایک سوال میں، ہم آپ سے ایک بیان کو ثابت کرنے کے لیے کہتے ہیں، ہر ثبوت میں ملوث اقدام کی فہرست بنائیے اور ہر قدم کی وجہ بھی بتائیے۔

1۔ ثابت کیجیے کہ دو لگاتار طاق اعداد کا حاصل جمع 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔

2۔ دو لگاتار طاق اعداد لیجیے، ان کے مربعوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے اور پھر نتیجہ میں 6 جوڑ دیجیے ثابت کیجیے کہ نیا عدد ہمیشہ 8 سے تقسیم ہوگا۔

3۔ اگر $p \geq 5$ ایک مفرد عدد ہے، دکھائیے کہ $3p^2 + 2$ سے تقسیم ہو جائیگا۔

4۔ مان لیجیے x اور y ناطق اعداد ہیں دکھائیے کہ xy ناطق عدد ہے۔

5۔ اگر a اور b مثبت صحیح اعداد ہیں تب آپ جانتے ہیں کہ $a = bq + r$، $0 \leq r < b$ جہاں q ایک مکمل عدد ہے ثابت کیجیے کہ $\text{HCF}\ (a, b) = \text{HCF}(b, r)$

[اشارہ: مان لیجیے $h = \text{HCF}\ (b, r)$ اس لیے $b = k_1 h$ اور $r = k_2 h$ جہاں k_1 اور k_2 ہم مفرد ہیں۔]

6۔ ایک خط مثلث ABC کے ضلع BC کے متوازی ہے جو AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

A1.5 بیان کا منفی (الٹا)

اس سیکشن میں ہم اس بات پر بحث کریں گے کہ ایک بیان سے انکار سے مراد کیا ہے۔ اس سے پہلے ہم شروع کریں ہم کچھ علامتوں سے آپ کو متعارف کرانا چاہتے ہیں جو ان تصورات کو سمجھنے میں ہماری مدد کریں گے شروع میں آیئے بیان کو ایک واحد اکائی کے طور پر دیکھیے اور اس کو کوئی نام دیجیے مثال کے طور پر ہم بیان، 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں ہوئی بارش، کو p سے ظاہر کرتے ہیں، اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

p: 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش ہوئی

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اسی طرح سے آیئے لکھتے ہیں

تمام ٹیچر خاتون ہیں q:

مائیک کے کتے کی کالی دم ہے r:

$2 + 2 = 4$ s:

مثلث ABC مساوی ضلعی ہے t:

یہ علامتیں اب بیانات کی خصوصیات پر بحث کرنے میں ہماری مدد کریں گی اور یہ دیکھنے میں بھی کہ ہم کس طرح ان کو ملاتے ہیں۔ شروعات میں ہم سادہ بیانات پر کام کریں گے اس کے بعد ہم پیچیدہ بیانات کو لیں گے۔

آیئے اب مندرجہ ذیل جدول پر غور کیجئے جس میں ہم دیے ہوئے ہر ایک بیان سے ایک نیا بیان بناتے ہیں۔

اصل بیان	نیا بیان
1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش ہوئی p:	یہ غلط ہے کہ 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش ہوئی $\sim p$:
تمام ٹیچرس خاتون ہیں q:	یہ غلط ہے کہ تمام ٹیچرس خاتون ہیں $\sim q$:
مائک کے کتے کی دم کالی ہے r:	یہ غلط ہے کہ مائک کے کتے کی دم کالی ہے $\sim r$:
$2+2=4$ s:	یہ غلط ہے کہ $2 + 2 = 4$ $\sim s$:
مثلث ABC مساوی ضلعی ہے t:	یہ غلط ہے کہ مثلث ABC مساوی ضلعی ہے $\sim t$:

جدول میں ہر نیا بیان پرانے نظیری بیان کی نفی نیا انکار ہے یعنی نیا انکار ہے $\sim p, \sim q, \sim r, \sim s$ اور $\sim t$ بیانات بالترتیب p, q, r, s اور t کا انکار ہیں یہاں $\sim p$ کو p نہیں پڑھا جاتا ہے بیان $\sim p$ کے ذریعے بنائے گئے بیان کی نفی کرتا ہے نوٹ کیجئے ہم اپنی عام بات چیت میں $\sim p$ سے ہماری مراد ہوتی ہے۔ کہ 1 ستمبر 2005 کو دہلی میں بارش نہیں ہوئی۔ لیکن ایسا کرنے کے لیے ہمیں بہت ہی احتیاط برتنی ہے۔ آپ سوچ سکتے ہیں کہ کوئی کسی بیان کا منفی حاصل کرنے کے لیے صرف دیے ہوئے بیان میں کسی مناسب جگہ میں نہیں لگا دے لیکن p کے سلسلہ میں یہ ممکن ہے لیکن شکل تب آتی ہے جب بیان تمام سے شروع ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر بیان تمام ٹیچرس خاتون ہیں۔ یہ ایسا ہی بیان ہے جیسے کچھ ٹیچرس ایسے بھی ہیں جو مرد ہیں۔ آیئے اب دیکھتے ہیں کہ کیا ہوگا اگر ہم صرف بیان میں نہیں لگاتے ہیں۔ ہمیں بیان حاصل ہوتا ہے۔ تمام ٹیچرس عورتیں نہیں ہوتیں۔ یا ہم بیان حاصل کر سکتے ہیں تمام ٹیچرس نہیں ہیں عورتیں۔ پہلا بیان لوگوں کو کنفیوز کر سکتا ہے اس کا مطلب ہوسکتا ہے (اگر ہم لفظ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

تمام پرزوردیں) کے تمام ٹیچرس عورتیں ہیں؟ یہ q کا نفی نہیں ہے جبکہ دوسرا بیان q کا مفہوم دیتا ہے یعنی کم سے کم ایک ٹیچر ہے جو عورت نہیں ہے، اس لئے کسی بیان کا منفی لکھتے ہیں آپ کو احتیاط سے کام لینا چاہیے اس لئے ہم کسی طرح طے کریں گے کہ ہم کو صحیح نفی بیان حاصل ہوا ہے؟ ہم مندرجہ ذیل طریقہ اپناتے ہیں مان لیجئے p ایک بیان ہے اور $\sim p$ اس کا نفی بیان ہے تب $\sim p$ غلط ہوتا ہے جب بھی p صحیح ہوتا ہے اور $\sim p$ صحیح ہے جب بھی p غلط ہے۔

مثال کے طور پر اگر یہ صحیح ہے کہ مائک کے کتّے کہ دم کالی ہے۔ تب یہ جھوٹ ہے کہ مائک کے کتے کہ دم کالی نہیں ہے۔ اگر یہ جھوٹ ہے کہ مائک کے کتے کی دم کالی ہے تب یہ سچ ہے کہ مائک کے کتّے کی دم کالی نہیں ہے۔ اسی طرح سے بیانات s اور t کے نفی ہیں۔

s: $2 + 2 = 4$; نفی $\sim s$: $2 + 2 \neq 4$

مثلث ABC مساوی ضلعی نہیں ہے $\sim t$ منفی مثلث ABC مساوی ضلعی ہے: t

اب $\sim(\sim s)$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ یہ $2 + 2 = 4$ ہوگا جو s ہے اور $\sim(\sim t)$ کیا ہے؟ یہ ہوگا ABC Δ مساوی ضلعی ہے یعنی t۔ حقیقت میں کسی بھی بیان p کے لئے $\sim(\sim p), p$ ہے۔

مثال 12: مندرجہ ذیل بیانات کی نفی لکھیے۔

(i) مائک کے کتّے کی دم کالی نہیں ہے۔

(ii) تمام غیر ناطق اعداد حقیقی ہوتے ہیں۔

(iii) $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے

(iv) کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد ہیں۔

(v) تمام ٹیچرس مرد نہیں ہیں۔

(vi) کچھ گھوڑے بھورے نہیں ہیں۔

(vii) کوئی ایسا حقیقی عدد x نہیں ہے جس کے لئے $x^2 = -1$

حل:

(i) یہ غلط ہے کہ مائک کے کتّے کی دم کالی نہیں ہے یعنی مائک کے کتّے کی دم کالی ہے۔

(ii) یہ غلط ہے کے تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں یعنی کچھ (کم سے کم ایک) غیر ناطق عدد حقیقی عدد نہیں ہے۔ اس کو

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد نہیں ہے۔

(iii) یہ غلط ہے کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے یعنی $\sqrt{2}$ ناطق نہیں ہے۔

(iv) یہ غلط ہے کہ کچھ ناطق اعداد صحیح اعداد ہیں یعنی کوئی بھی ناطق عدد صحیح عدد نہیں ہے۔

(v) یہ غلط ہے کہ تمام ٹیچرس مرد نہیں ہین یعنی تمام ٹیچرس مرد ہیں۔

(vi) یہ غلط ہے کہ کچھ گھوڑے بھورے نہیں ہیں یعنی تمام گھوڑے بھورے ہیں۔

(vii) یہ غلط ہے کہ کوئی ایسا حقیقی عدد x نہیں ہے جس کے لیے $x^2 = -1$ یعنی کم سے کم ایک ایسا حقیقی عدد ہے جس کے لیے $x^2 = -1$

ریمارک: مذکورہ بالا بحث سے آپ کسی بیان کی نفی حاصل کرنے کے لیے مندرجہ ذیل قاعدہ حرکت کے قانون تک پہنچتے ہیں۔

(i) پہلے آپ بیان کو 'نہیں' سے لکھیے۔

(ii) اگر کوئی غلط فہمی ہے تو بیان میں مناسب ردوبدل کیجیے خاص طور سے جن بیانات میں 'تمام' یا 'کچھ' شامل ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A1.4

1۔ مندرجہ ذیل بیانات کی نفی معلوم کیجیے

(i) تمام آدمی فانی ہیں۔

(ii) خط l، m کے متوازی ہے

(ii) اس باب میں بہت ساری مشقیں ہیں

(iv) تمام صحیح اعداد ناطق اعداد ہیں۔

(v) کچھ مفرد اعداد طاق ہیں

(vi) کوئی طالب علم کاہل نہیں ہے۔

(ix) 2 مثبت صحیح عدد a کو تقسیم کرتا ہے۔

(x) صحیح اعداد a اور b ہم مفرد ہیں۔

2۔ مندرجہ ذیل سوالات میں دو بیانات ہیں۔ معلوم کیجیے کہ دوسرا بیان پہلے کا منفی ہے یا نہیں۔

(i) ممتاز بھوکا ہے۔
ممتاز بھوکا نہیں ہے

(ii) کچھ بلیاں کالی ہیں
کچھ بلیاں بھوری ہیں

(iii) تمام ہاتھی بڑے ہیں۔
ایک ہاتھی بڑا نہیں

(iv) آگ بجھانے والی سواریوں کے تمام انجن لال ہیں
آگ بجھانے والی سواریوں کے تمام انجن لال نہیں ہے

(v) کوئی بھی آدمی گائے نہیں ہے۔

کچھ آدمی گائے ہیں۔

A1.6 بیان کا معکوس

اب ہم بیان کے معکوس کے سلسلہ میں بحث کریں گے۔اس کے لئے ہمیں یہ معلوم ہونا چاہئے کہ مرکّب بیان کا تصور کیا ہے یعنی ایسے بیان جو دو یا دو سے زیادہ سادہ بیانوں سے مل کر بنے ہوں۔بہت سے طریقے ہیں مرکّب بیانات بنانے کے لیکن ہم صرف اپنی توجہ اسی پر مرکوز کریں گے کہ دو سادہ بیانوں اگر اور تو یا تب (پھر) لگا کر مرکب بیان کی تخلیق کی جائے۔مثال کے طور پر اگر بارش ہو رہی ہے تو سائیکل پر جانا مشکل ہوگا۔دو بیانوں سے مل کر بنا ہے۔

بارش ہو رہی ہے: p

سائیکل پر جانا اس وقت مشکل ہوگا: q

اپنے پچھلے خیال یا تصور کو استعمال کرنے پر ہم کہہ سکتے ہیں اگر p، تو q ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں p کا مطلب ہے q اور اس کو ہم $p \Rightarrow q$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب فرض کیجئے کہ آپ کے پاس ایک بیان ہے۔اگر پانی کا ٹینک کالا ہے تو اس میں پینے کا پانی ہے۔یہ $p \Rightarrow q$ کی شکل کا ہے جہاں مفروضہ p ہے (پانی کا ٹینک کالا ہے) اور نتیجہ q (ٹینک میں پینے کا پانی ہے) اگر ہم مفروضہ اور نتیجہ کو بدل دیں۔

تو ہمیں کیا ملتا ہے؟ ہمیں ملتا ہے $q \Rightarrow p$ یعنی اگر ٹینک میں پینے کا پانی ہے تب ٹینک کالا ہونا چاہیے یہ بیان $p \Rightarrow q$ کا معکوس کہلاتا ہے۔

عمومی طور پر بیان $p \Rightarrow q$ کا معکوس $q \Rightarrow p$ جہاں p اور q بیانات ہیں۔نوٹ کیجئے کہ $p \Rightarrow q$ اور $q \Rightarrow p$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

مثال 13: مندرجہ ذیل بیانات کے معکوس لکھیے۔

(i) اگر جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے تب 17 اگست کو اتوار کا دن ہوگا۔

(ii) اگر 17 اگست کو اتوار ہے تب جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے۔

(iii) اگر پاؤلین غصہ میں ہے تو اس کا چہرہ سرخ ہو جاتا ہے۔

@KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) اگر کسی شخص کے پاس تعلیم کی ڈگری ہے تو وہ پڑھانے کے لئے اہل ہے۔

(v) اگر کسی شخص کو viral infection ہے تو اس کو بہت تیز بخار ہوگا۔

(vi) اگر احمد ممبئی میں ہے تب وہ انڈیا میں ہے۔

(vii) اگر ABC ایک مساوی ضلعی ہے تو اس کے تمام داخلی زاویہ مساوی ہیں۔

(viii) اگر x ایک ناطق عدد ہے تب x کا عشری پھیلاؤ غیر ختم اور غیر تکراری ہے۔

(ix) اگر $x - a$ کا جزو ضربی ہے تب $P(a) = 0$

حل: مندرجہ بالا ہر بیان $p \Rightarrow q$ کی شکل ہے۔اس لئے اس کا معکوس معلوم کرنے کے لیے پہلے ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ p اور q کیا ہیں اور پھر $p \Rightarrow q$ لکھیں گے۔

(i) 17 اگست کو اتوار کا دن ہے: q جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے: p اس لئے اس کا معکوس ہے اگر 17 اگست کو اتوار ہے تو جمیلہ سائیکل چلا رہی ہے۔

(ii) یہ (i) کا معکوس ہے۔اس لئے اس کا معکوس بیان اوپر (i) میں دیا ہوا ہے۔

(iii) اگر پاؤلین کا چہرہ سرخ ہو گیا تو وہ غصہ میں ہے۔

(iv) اگر ایک شخص پڑھانے کا اہل ہے۔تو اس کے پاس تعلیم کی ڈگری ضرور ہوگی۔

(v) اگر ایک شخص کو تیز بخار ہے تو اسے viral infection ہے۔

(vi) اگر احمد انڈیا میں ہے تو وہ ممبئی میں ہے۔

(vii) اگر مثلث ABC کے داخل زاویہ مساوی ہیں تو یہ مساوی ضلعی مثلث ہے۔

(viii) اگر x کا عشری پھیلاؤ غیر ختم اور غیر تکراری ہے تب x غیر ناطق ہے۔

(ix) اگر $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزو ضربی ہے تب $p(a)=0$۔

نوٹ کیجئے کہ ہم نے اس بات کی پرواہ کئے بغیر کہ اوپر دئے گئے بیانات صحیح ہیں یا غلط، ہم نے ہر ایک بیان کا معکوس لکھا مثال کے طور پر مندرجہ ذیل بیان پر غور کیجئے۔: اگر احمد ممبئی میں ہے تب یہ انڈیا میں ہے۔یہ بیان صحیح ہے۔اب اس کا معکوس لکھئے: اگر احمد انڈیا میں ہے تب یہ ممبئی میں ہے یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہے۔کیونکہ وہ ہندوستان کے دوسرے حصہ میں بھی ہوسکتا ہے۔

ریاضی خاص طور سے جیومیٹری میں آپ کا بہت سی ایسی صورت حال سے سامنا ہوگا جہاں $p \Rightarrow q$ صحیح ہے۔اور آپ کو

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہ طے کرنا ہوگا کہ آیا اس کا معکوس یعنی $q \Rightarrow p$ بھی درست ہے۔

مثال 14: مندرجہ ذیل بیانوں کا معکوس معلوم کیجیے پھر سوال میں یہ بھی طے کیجئے کہ آیا معکوس صحیح ہے یا غلط ہے۔

(i) اگر n ایک جفت عدد ہے، تب $2n + 1$ ایک طاق عدد ہے۔

(ii) اگر کسی حقیقی عدد کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے تب عدد ناطق ہے۔

(iii) اگر قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تب نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑا برابر ہے۔

(iv) اگر چار ضلعی کے مقابل ضلعوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہے تب چار ضلعی متوازی الاضلاع ہے۔

(v) اگر دو مثلث متماثل ہیں تب انکے نظیری زاویہ برابر ہیں۔

حل:

(i) معکوس ہے، اگر $2n + 1$ طاق صحیح عدد ہے تب n ایک جفت عدد ہے: یہ ایک غلط بیان ہے (مثال کے طور پر $15 = 2(7) + 1$ اور 7 طاق ہے۔

(ii) اگر ایک حقیقی عدد ناطق ہے تب اس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے، اس کا معکوس بیان ہے۔ یہ ایک غلط بیان ہے کیونکہ غلط بیان ہے کیونکہ ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوسکتا ہے۔

(iii) معکوس ہے اگر ایک قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ نظیری زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہو تب خطوط متوازی ہوں گے۔ نویں کلاس کی نصابی کتاب کے بدیہہ 6.4 سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ بیان درست ہے۔

(iv) اگر چار ضلعی متوازی الاضلاع ہے تب اس کے مخالف اضلاع کا ہر ایک جوڑا مساوی ہے، معکوس ہے: یہ صحیح ہے (نویں کلاس کا مسئلہ 8.1)

(v) اگر دو مثلثوں کے نظیری زاویہ برابر ہیں تب یہ متماثل ہیں؛ معکوس ہے۔ یہ بیان غلط ہے، آپ اس کی ایک مناسب بر عکس مثال معلوم کیجیے۔

مشق A1.5

1۔ مندرجہ ذیل بیانات کے معکوس معلوم کیجیے۔

(i) اگر ٹوکیو میں گرمی ہے تو شرن کو بہت پسینہ آئے گا۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) اگر شالینی بھوکی ہے تب اس کے پیٹ میں چوہے کود رہے ہیں۔

(iii) اگر جسونت کے پاس اسکالرشپ ہے تب اس کو ڈگری مل جائے گی۔

(iv) اگر پودے میں پھول ہیں تو یہ زندہ ہے۔

(v) اگر جانور بلی ہے تو اس کے دم بھی ہوگی۔

2۔ مندرجہ ذیل بیانات کے معکوس لکھئے۔ ہر ایک سوال میں یہ طے کیجئے کہ آیا ان کے معکوس صحیح ہیں یا غلط

(i) اگر مثلث ABC مساوی الساقین ہے تب اس کے قاعدہ کے زاویہ مساوی ہیں۔

(ii) اگر ایک صحیح عدد طاق ہے تب اس کا مربع طاق صحیح عدد ہے۔

(iii) اگر $x^2 = 1$ تب $x = 1$

(iv) اگر ABCD ایک متوازی الاضلاع تب AC اور BD ایک دوسرے کی تنصیف کریں گے۔

(v) اگر a، b اور c مکمل اعداد ہیں تب $a+(b+c)=(a+b)+c$

(vi) اگر x اور y طاق اعداد ہیں تب $(x+y)$ ایک جفت عدد ہے۔

(vii) اگر متوازی الاضلاع کے راس دائرہ پر واقع ہیں تب یہ ایک مستطیل ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A1.7 تضاد کے ذریعے ثبوت

ابھی تک ایسی تمام مثالوں کو ہم نے نتائج کی سچائی کو قائم کرنے کے لئے سیدھے دلائل استعمال کئے اب ہم غیر درست طریقے سے یا خاص طور پر دلائل سے کسی سچائی کو ثابت کریں گے، یہ طریقہ ریاضی میں ایک زبردست اوزار مانا جاتا ہے جسے ہم تضاد کے ذریعے ثبوت کے طور پر جانتے ہیں۔ اس کا استعمال ہم پہلے ہی باب 1 میں بہت سے اعداد کی غیر ناطقیت کو ثابت کرنے کے لئے کر چکے ہیں۔ اور اسی طرح دوسرے بابوں میں کچھ مسئلوں کو ثابت کرنے میں اس کا استعمال کیا ہے۔ یہاں ہم اس تصور کو مزید واضح کرنے کے لئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم آگے بڑھیں آیئے تشریح کرتے ہیں کہ تضاد کیا ہے۔ ریاضی میں تضاد واقع ہوتا ہے جب ہمارے پاس ایک ایسا بیان ہوتا ہے p جس کے p صحیح ہے اور $\sim p$ اس کا نفی بھی صحیح ہے۔ مثال کے طور پر

p : $x = \frac{a}{b}$ جہاں a اور b ہم مفرد ہیں

a، 2 اور b دونوں کو تقسیم کرتا ہے: q

اگر ہم یہ فرض کریں کہ p صحیح ہے اور ہم دلائل سے آگے چل کر یہ بھی دکھا دیں کہ q بھی صحیح ہے تب ہم ایک تضاد تک پہنچتے ہیں۔ کیونکہ q کا مطلب ہے کہ p کا نفی صحیح ہے۔ اگر آپ کو یاد ہو تو $\sqrt{2}$ غیر ناطق ثابت کرنے کے لئے ہم نے بالکل ایسا ہی کیا تھا (باب 1 دیکھیے)

تضاد کا ثبوت کس طرح سے کام کرتا ہے؟ آیئے اس کو ایک مخصوص مثال لے کر سمجھتے ہیں۔

فرض کیجئے ہمیں دیا ہوا ہے۔

تمام عورتیں فانی ہیں۔ A ایک عورت ہے، ثابت کیجئے کہ A فانی ہے۔

حالانکہ یہ ایک کافی آسان مثال ہے۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم تضاد کے ذریعے کس طرح اسے ثابت کرتے ہیں۔

- آیئے فرض کرتے ہیں کہ ہمیں بیان p (یہاں ہمیں دکھانا ہے A کہ A فانی ہے: p)
- اس لئے ہم یہ مانتے ہوئے شروع کرتے ہیں کہ بیان صحیح نہیں ہے یعنی ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ p منفی درست ہے (یعنی A فانی نہیں ہے)
- پھر ہم p کی نفی کی سچائی پر منحصر منطقی استخراج کا ایک سلسلہ معلوم ہوتا ہے (کیونکہ A فانی نہیں ہے اس بیان کی ایک برعکس مثال ہے۔ تمام عورتیں فانی ہیں۔ اس طرح سے یہ غلط ہے کہ تمام عورتیں فانی ہیں) اس سے ہم تضاد تک پہونچتے ہیں۔ اور یہ تضاد ہمیں اس لئے ملتا ہے کہ ہم نے فرض غلط کیا تھا کہ p صحیح نہیں ہے، (ہمارے پاس ایک تضاد ہے: کیونکہ ہم دکھا چکے ہیں کہ بیان: تمام عورتیں فانی ہیں اور اس نفی تمام عورتیں فانی نہیں ہیں، ایک وقت میں صحیح ہے۔ اس سے تضاد پیدا ہوتا ہے کیونکہ ہم نے یہ فرض کیا تھا کہ A فانی نہیں ہے
- اس لیے ہم نے جو فرض کیا تھا وہ غلط تھا یعنی p کو صحیح ہونا چاہئے (اس لئے A فانی ہے) آیئے اب ریاضی کی کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 15: ایک غیر صفر ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب غیر ناطق ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

بیانات	تجزیہ
ہم تضاد کا ثبوت استعمال کریں گے۔ مان لیجیے r ایک غیر صفر ناطق عدد ہے اور x ایک غیر ناطق ہے۔ مان لیجئے $r = \frac{m}{n}$ جہاں m اور n صحیح اعداد ہیں اور $n \neq 0$، $m \neq 0$، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ rx غیر ناطق ہے	
فرض کیجئے x r ناطق ہے	یہاں ہم اس بیان کا نفی فرض کر رہے ہیں جس کو ہمیں ثابت کرنا ہے
تب $rx = \frac{p}{q}$، $q \neq 0$ اور p اور q صحیح اعداد ہیں	یہ پچھلے بیان سے معلوم ہوتا ہے اور ناطق عدد کی تعریف سے بھی
مساوات کو دوبارہ ترتیب دینے پر $q \neq 0$ $rx = \frac{p}{q}$ اور حقیقت $r = \frac{m}{n}$ کو استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ کیونکہ np اور mq صحیح اعداد ہیں اور $mq \neq 0$، x ایک ناطق عدد ہے	صحیح اعداد کی خصوصیات کو استعمال کرنے اور ناطق عدد کی تعریف کو استعمال کرنے سے
یہ ایک تضاد ہے۔ کیونکہ ہم دکھا چکے ہیں کہ x ناطق ہے۔ لیکن ہمارے مفروضہ ہے کہ x غیر ناطق ہے	ہم یہی دیکھنا چاہتے ہیں یعنی تضاد
یہ تضاد اس لئے آیا ہے کیونکہ ہم نے فرض غلط کیا تھا کہ rx ناطق ہے اس لئے rx غیر ناطق ہے	منطقی استخراج

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اب ہم مثال 11 کو اس مرتبہ تضاد کے طریقہ سے ثابت کریں گے۔

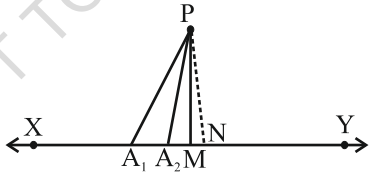
بیانات	تجزیہ
مان لیجئے کہ بیان درست نہیں ہے	جیسے کہ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں یہ کسی بحث کا شروعاتی نقطہ ہے جب ہم تضاد کے ذریعے ثابت کرتے ہیں

اس لئے ہم فرض کرتے ہیں ایک ایسا مفرد عدد موجود ہے $p>3$ جو $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا نہیں ہے جہاں n ایک مکمل عدد ہے	یہ نتیجہ کے بیان کا نفی ہے
6 سے تقسیم کے اقلیدس کے معاونہ کا استعمال کر کے اور اس حقیقت کا استعمال کر کے p، $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا نہیں ہے جس سے ملتا ہے $p=6n$ یا $6n+2$ یا $6n+3$ یا $6n+4$	پہلے سے ثابت کئے گئے نتیجوں کو استعمال کرنے پر
اس لئے p، یا تو 2 سے یا 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے	منطقی استخراج
اس لئے p مفرد نہیں ہے	منطقی استخراج
یہ ایک تضاد ہے کیونکہ ہمارا مفروضہ p مفرد ہے	مختصراً یہی ہم چاہتے ہیں
یہ تضاد اس لئے آیا ہے کیونکہ ہم نے فرض کیا تھا کہ ایک ایسا مفرد $p>3$ ہے جو $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا نہیں ہے	
اس طرح سے 3 سے بڑا ہر مفرد عدد $6n+1$ یا $6n+5$ کی شکل کا ہے۔	ہم نتیجہ تک پہونچ گئے

ریمارک: اوپر دی گئی ثبوت کی مثال سے یہ پتہ چلتا ہے کہ ایک ثبوت کو ثابت کرنے کے بہت سے طریقہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ A1.2: کسی نقطہ سے کسی خط پر کھینچے گئے تمام قطعات خط میں سب سے چھوٹا خط اس خط پر کھینچا گیا عمود ہے۔

ثبوت:



شکل A1.5

بیانات	تجزیہ
مان لیجیے XY دیا ہوا دیا ہوا خط ہے اور P ایک نقطہ جو XY پر نہیں ہے اور PA_1, PA_2, PM ..... وغیرہ نقطہ P سے خط XY پر کھینچے گئے قطعات خط ہیں جن میں PM سب سے چھوٹا ہے (شکل A1.5 دیکھیے)	کیونکہ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ تمام، PM, PA_1, PA_2 .... وغیرہ میں سے سب چھوٹا XY پر عمود ہے۔ ہم ان قطعات خط کو لے کر شروع کرتے ہیں

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مان لیجئے PM ، XY پر عمود نہیں ہے	اس بیان کا نفی ہے جس کو ہمیں تضاد کے ذریعے ثابت کرنا ہے
خط XY پر عمود PN ڈالئے شکل A1.5 میں نقطہ دار سے دکھایا گیا ہے۔	ہم اکثر نتیجوں کو ثابت کرنے کے لئے تشکیل کی ضرورت ہوتی ہے
تمام قطعات خط PM, PA_1, PA_2 .... وغیرہ ہیں PN سب سے چھوٹا ہے، جس کا مطلب ہے $PN > PM$	ایک قائم مثلث ضلع اس کے وتر سے چھوٹا ہوتا ہے اور اعداد کی جانی پہچانی خصوصیات کی رو سے
یہ ہمارے مفروضہ کہ PM، تمام قطعات خط میں سے سے چھوٹا کا تضاد ہے	یہی ہم چاہتے ہیں
اس لئے، قطع خط PM، XY پر عمود ہے	ہم نتیجہ تک پہونچ گئے

مشق A1.6

1۔ فرض کیجیے $a + b = c + d$ اور $a < c$ تضاد کے ثبوت کا استعمال کر کے دکھایئے کہ $b > d$

2۔ مان لیجیے r ایک ناطق عدد ہے اور x ایک غیر ناطق عدد، تضاد کے ثبوت سے دکھایئے کہ $r + x$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

3۔ تضاد کے ثبوت کا استعمال کرتے ہوئے دکھایئے کہ اگر ایک صحیح عدد a کے لئے a^2 جفت ہے تو a بھی جفت ہے۔

[اشارہ: مان لیجیے کہ a جفت نہیں ہے یعنی یہ $2n + 1$ کی شکل کا ہوگا کسی صحیح عدد n کے لئے اور پھر آگے بڑھیے]

4۔ تضاد کے ثبوت سے ثابت کیجیے کہ ایک صحیح عدد a کے لئے a^2 جو 3 سے تقسیم ہوتا ہے۔ تب a بھی 3 سے تقسیم ہوگا۔

5۔ تضاد کے ثبوت کو استعمال کرتے ہوئے دکھایئے کہ n کی کوئی ایسی قدر نہیں ہے جس کے لئے 6^n ہندسہ صفر پر ختم ہو۔

6۔ تضاد کے طریقہ سے ثابت کیجیے کہ ایک مستوی میں دو مختلف خطوط ایک نقطہ سے زیادہ نقطہ پر قطع نہیں کر سکتے۔

A1.8 خلاصہ

اس ضمیمہ میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ ثبوت کے مختلف اجزائے ترکیبی اور نویں کلاس میں سیکھے گئے متعلقہ تصورات

2۔ بیان کا نفی (انکار)

3۔ بیان کا معکوس

4۔ تضاد کے ذریعے ثبوت.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جوابات/اشارے

مشق 1.1

حقیقی اعداد

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

.2 (i) LCM = 182; HCF = 13 (ii) LCM = 23460; HCF = 2 (iii) LCM = 3024; HCF = 6

.3 (i) LCM = 420; HCF = 3 (ii) LCM = 11339; HCF = 1 (iii) LCM = 1800; HCF= 1

4۔ (i) 22338 7۔ 36 منٹ

مشق 2.1

1۔ (i) کوئی صفر نہیں (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

مشق 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

مشق 3.1

دو متغیر والے خطی مساواتوں کے جوڑے:۔

1۔ (i) مطلوبہ خطی مساواتوں کا جوڑا ہے

$x + y = 10;\ x - y = 4$ جہاں x لڑکیوں کی تعداد اور y لڑکوں کی گراف سے حل کرنے کے لئے ان مساواتوں کا

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

گراف ایک ہی گراف پیپر پر بنایئے۔

لڑکیاں=7 ،لڑکے=3

(ii) مطلوبہ خطی مساواتوں کا جوڑا ہے

$5x + 7y = 50;\ 7x + 5y = 46$ جہاں x اور y بالترتیب پین اور پنسلوں کی قیمت (₹ میں) ظاہر کرتے ہیں۔

گراف کی مدد سے حل کرنے کے لئے ایک ہی محوروں پر ان مساواتوں کا گراف بنایئے۔

پنسل کی قیمت= 3 ₹، پین کی قیمت= 5₹

2۔ (i) ایک ہی نقطہ پر قطع کریں گے (ii) منطبق (iii) متوازی

3۔ (i) ہم آہنگ (ii) غیر ہم آہنگ (iii) ہم آہنگ

(iv) ہم آہنگ (v) ہم آہنگ

4۔ (i) ہم آہنگ (ii) غیر ہم آہنگ (iii) ہم آہنگ (iv) غیر ہم آہنگ

اوپر (i) کا حل ہے $y = 5 - x$ جہاں x کوئی بھی قدر لے سکتا ہے یعنی لامحدود حل ہوں گے۔

اوپر (iii) کا حل ہے $x = 2, y = 2$ یعنی یکتا حل

5۔ لمبائی =20m اور چوڑائی =16 m

6۔ تین حصوں کے لئے ایک ممکنہ جواب

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7۔ مثلث کے راس ہیں $(-1, 0)$, $(4, 0)$ اور $(2,3)$

مشق 3.2

1. (i) $x = 9, y = 5$ (ii) $s = 9, t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

جہاں x کی کوئی بھی قدر ہو سکتی ہے۔ یعنی لامحدود حل

(iv) $x = 2, y = 3$ (v) $x = 0, y = 0$ (vi) $x = 2, y = 3$

2. $x = -2$، $y = 5$ ، $m = -1$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3۔ (i) $x - y = 26$ ، $x = 3y$ جہاں x اور y دو اعداد ہیں $(x > y)$; $x = 39, y = 13$

(ii) $x - y = 18$، $x + y = 180$ جہاں x اور y دو زاویوں کی ڈگری پیمائش ہے $x = 99$، $y = 81$

(iii) $3x + 5y = 1750$, $7x + 6y = 3800$ جہاں x اور y بالترتیب ایک بلا اور ایک گیند کی (₹ میں) قیمتیں ہیں $x = 500$ ، $y = 50$

(iv) $x + 10y = 105$، $x + 15y = 155$ جہاں x ₹ میں متعین چارج اور y (₹ فی کلومیٹر) میں کرایہ $x = 5$، $y = 10$، ₹255۔

(vi) $11x - 9y + 4 = 0$، $6x - 5y + 3 = 0$ جہاں x اور y کسر $(x = 7,\ y = 9)$. $\frac{7}{9}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما ہیں۔

(vi) $x - 3y - 10 = 0$، $x - 7y + 30 = 0$ جہاں x اور y جیکب اور اس کے بیٹے ہیں۔ $x = 40, y = 10$

مشق 3.3

1. (i) $x = \frac{19}{5}$ ، $y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2, y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}$ ، $y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2, y = -3$

2۔ (i) $x - y + 2 = 0$ ، $2x - y - 1 = 0$ جہاں x اور y کسر $\frac{3}{5}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما ہیں۔

(ii) $x - 3y + 10 = 0$ ، $x - 2y - 10 = 0$ جہاں x اور y بالترتیب نوری اور سونو کی عمریں ہیں، نوری کی عمر (x) = 50 اور سونو کی عمر $(y) = 20$ ہے

(iii) $x + y = 9$ ، $8x - y = 0$ جہاں x اور y بالترتیب عدد؛ 18 کے دہائی اور اکائی کے ہندسہ ہیں۔

(iv) $x + 2y = 40$ ، $x + y = 25$ جہاں x اور y بالترتیب ₹50 اور ₹100 کے نوٹوں کی تعداد ہے $x = 10$، $y = 15$

(v) $x + 4y = 27$ ، $x + 2y = 21$ جہاں x متعین کرایہ ₹ میں اور y اضافی کرایہ فی دن (₹ میں) $x = 15$، $y = 3$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 4.1

1۔ (i) ہاں (ii) ہاں (iii) نہیں (iv) ہاں
(v) ہاں (vi) نہیں (vii) نہیں (viii) ہاں

2۔ (i) $2x^2 + x - 528 = 0$ جہاں x، پلاٹ کی چوڑائی (میٹروں میں ہے)

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$ جہاں x ایک چھوٹا صحیح عدد ہے

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ جہاں x (سالوں میں) روہن کی موجودہ عمر ہے

(vi) $u^2 - 8u - 1280 = 0$ جہاں u (کلومیٹر فی گھنٹہ) میں ٹرین کی رفتار ہے۔

مشق 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9,36 (ii) 25,30

3۔ اعداد 13 اور 14 ہیں **4۔** مثبت صحیح اعداد 13 اور 14 ہیں

5۔ 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر **6۔** اشیا کی تعداد = 6، ہر شے کی قیمت = ₹15

مشق 4.4

1۔ (i) حقیقی جزر نہیں ہیں (ii) مساوی جزر $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) مختلف جزر $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3۔ ہاں 40 میٹر اور 20 میٹر **4۔** نہیں **5۔** ہاں، 20 میٹر، 20 میٹر

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 5.1

1۔ (i) ہاں 15,23,31..... ایک AP ہے کیونکہ اگلا رکن پچھلے رکن میں 8 جمع کرنے پر حاصل ہو جاتا ہے۔

(ii) نہیں صحیح ہیں $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3V}{4}\right)^2$ (iii) ہاں 150, 200, 250 ..... ایک AP ہے۔

(iv) نہیں، رقم کل زر ہیں $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$,

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$ (iii) $4, 1, -2, -5$

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) $-1.25, -1.50, -1.75, -2.0$

3. (i) $a = 3, d = -2$ (ii) $a = -5, d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6, d = 1.1$

4۔ (i) نہیں (ii) ہاں، $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) ہاں $d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) ہاں $d = 4;\ 6, 10, 14$

(v) ہاں $d = \sqrt{2}; 3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) نہیں

(vii) ہاں، $d = -4; -16, -20, -24$ (viii) ہاں، $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) نہیں (x) ہاں $d = a; 5a, 6a, 7a$

(xi) نہیں (xii) ہاں $d = \sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) نہیں (xiv) نہیں (xv) ہاں $d = 24; 97, 121, 145$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) d = 2 (iii) a = 46 (iv) n = 10 (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}, \boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4}$ (v) $\boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$

4۔ 16واں رکن **5.** (i) 34 (ii) 27

6۔ نہیں **7.** 178 **8.** 64

9۔ 5واں رکن **10.** 1 **11.** 65واں رکن

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17۔ آخر سے 20واں رکن 158 ہے

18. –13, –8, –3 **19۔** 11واں رکن **20.** 10

مشق 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1064\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) –8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, s_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4۔ $a = 9$، $d = 8$، $S = 636$ فارمولہ $s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ میں رکھنے پر ہمیں ایک دودرجی مساوات $4n^2 + 5n - 636 = 0$ ملتی ہے، حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $n = -\frac{53}{4}, 12$ ان میں سے صرف 12 ہی اس کا جزر ہے۔

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38, S = 6973$ **7۔** حاصل جمع = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹27750

16۔ انعاموں کی قیمت ہے (₹ میں) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 سینٹی میٹر

19۔ اوپر کی قطار میں 5 لٹھے رکھنے چاہئیں، قطاریں 16، فارمولہ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ میں $S = 200$، $a = 20$، $5 = 200$ رکھنے پر ہمیں $41n - n^2 = 400$ حاصل ہوتی ہے حل کرنے پر $n = 16, 25$ اس لیے قطاروں کی تعداد یا تو 16 یا 25 ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یعنی 25ویں قطار میں 4 – لٹھے جو ممکن نہیں ہے اس لیے $n = 25$ ممکن نہیں ہے $n = 16$ کے لیے $a_{16} = 5$ اس لئے 16 قطاریں اور 5 لٹھے اوپر کی قطاروں میں رکھے گئے۔

20. 370 میٹر

مشق 5.4 اختیاری

1۔ 32واں رکن **2.** $S_{16} = 2076$ **3.** 385 سینٹی میٹر

4. 35 **5.** 750 مکعب میٹر

مشق 6.1

1۔ (i) مشابہ (ii) مشابہ (iii) مساوی الاضلاع

(iv) مساوی، متناسب **3۔** نہیں

مشق 6.2

1. (i) 2 سینٹی میٹر (ii) 2.4 سینٹی میٹر

2۔ (i) نہیں (ii) ہاں (iii) ہاں

9۔ O سے DC کے متوازی خط کھینچئے جو AD اور BC کو بالترتیب E اور F پر قطع کرے۔

مشق 6.3

1۔ (i) ہاں، AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) ہاں، SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) نہیں (iv) ہاں، SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) نہیں (vi) ہاں، AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14۔ AD کو نقطہ E تک اس طرح بڑھایئے کہ AD = DE اور PM کو اس طرح نقطہ N تک بڑھایئے کہ PM = MN، EC اور NR کو ملایئے۔

15. 42 cm

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

مشق 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 کلومیٹر **3۔** نہیں **4۔** ہاں **5۔** چمپا صحیح ہے۔

6۔ (i) مربع (ii) کوئی چار ضلعی نہیں (iii) متوازی الاضلاع

7. (–7,0) **8.** –9,3 **9.** ± 4, QR = $\sqrt{41}$, PR = $\sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

مشق 7.2

1. (1,3) **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3۔ $\sqrt{61}$ میٹر، 22.5 میٹر کے فاصلہ پر 5واں خط **4.** 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6, y = 3$ **7.** (3,–10)

8۔ $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9۔** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10۔** 24 مربع اکائیاں

مشق 15.2 (اختیاری)

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	4	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 **4.** $\frac{x}{12}$, $x = 3$ **5.** 8

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A1.1

1۔ (i) مبہم (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) مبہم (v) مبہم

2۔ (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح (v) صحیح

3۔ صرف (ii) صحیح ہے۔

4۔ (i) اگر $a<0$ اور $a^2 > b^2$ تب $a>b$

(ii) اگر $xy \geq 0$ اور $x^2 = y^2$، تب $x = y$

(iii) اگر $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ اور $y \neq 0$ تب $x = 0$

(iv) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

مشق A1.2

1۔ A فانی ہے۔ 2. ab ناطق ہیں۔

3۔ $\sqrt{17}$ کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے۔

4۔ $y = 7$ 5۔ $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6۔ PQRS ایک مستطیل ہے۔

7۔ ہاں premise کی وجہ سے، نہیں کیونکہ $\sqrt{3721} = 61$ جو ناطق نہیں ہے کیونکہ Permise غلط تھا۔ اس لئے نتیجہ بھی غلط ہے۔

مشق A1.3

1۔ دو لگاتار اعداد $2n + 1$ اور $2n + 3$ لیجیے جہاں n کوئی صحیح عدد ہے۔

مشق A1.4

1۔ (i) آدمی فانی نہیں ہے۔

(ii) خط l، m کے متوازی نہیں ہے۔

(iii) اس باب میں زیادہ مشقیں نہیں ہیں۔

(iv) تمام صحیح اعداد ناطق اعداد نہیں ہیں

(v) تمام مفرد اعداد طاق نہیں ہیں

(vi) کچھ طلبا کاہل ہیں

(vii) تمام بلّیاں کالی ہیں

(viii) کم سے کم ایک حقیقی عدد ہے $\sqrt{x} = -1$

(ix) 2 مثبت صحیح عدد a کو تقسیم نہیں کرتا۔

(x) صحیح اعداد a اور b ہم مفرد نہیں ہیں۔

2۔ (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں (v) ہاں

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A1.5

1۔ (i) اگر شرن کو بہت پسینہ آتا تب ٹوکیو میں گرمی ہے۔

(ii) اگر شالنی کے پیٹ میں چوہے کُودتے ہیں تب وہ بھوکی ہے۔

(iii) اگر جسونت کو ڈگری ملتی ہے تب اس کے پاس اسکالرشپ ہوئی ہے

(iv) اگر ایک پودا زندہ ہے تب اس میں پھول ہے۔

(v) اگر جانور کی دُم ہے تب یہ بِلّی ہے۔

2۔ (i) اگر ΔABC کے قاعدہ کے زاویہ مساوی ہوں تب یہ مساوی الساقین مثلث ہے۔ صحیح ہے۔

(ii) اگر ایک صحیح عدد کا مربع طاق ہے تب صحیح عدد طاق ہے۔ صحیح ہے۔

(iii) اگر $x = 1$، تب $x^2 = 1$ صحیح ہے۔

(iv) اگر AC اور BD ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تب ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، صحیح ہے۔

(v) اگر $a + (b + c) = (a + b) + c$ تب a, b اور c مکمل اعداد ہیں، غلط۔

(vi) اگر $x + y$ ایک جفت عدد ہے تب x اور y طاق ہیں، غلط۔

(vii) اگر متوازی الاضلاع مستطیل ہے تو اس کے راس دائرہ پر ہیں، صحیح۔

مشق A1.6

1۔ فرض کیجیے اس کے برخلاف $d \leq b$۔

3۔ باب 1 کی مثال 10 دیکھیے۔

6۔ نویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب کا مسئلہ 5.1 دیکھیے۔

@KIBS NOT TO BE REPUBLISHED