కర్నాటక ప్రభుత్వం

గణితం

MATHEMATICS

10

పదవ తరగతి

TENTH STANDARD

తెలుగు మాధ్యమం

TELUGU MEDIUM

భాగం 2

PART - 2

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

జాతీయ విద్యా పరిశోధన మరియు శిక్షణా సంస్థ
శ్రీ అరబిందో మార్గ్, న్యూఢిల్లీ 110016

కర్నాటక పాఠ్య పుస్తక సంఘం (ర)
6వ క్రాస్, మల్లేశ్వరం, బెంగళూరు – 560003

విషయసూచిక

C5D3X2

భాగం 2

క్ర.సం	శీర్షిక	పుట సంఖ్య
8.	త్రికోణమితి పరిచయం	**1 - 22**
9.	త్రికోణమితి యొక్క కొన్ని అనువర్తనాల	**23 - 32**
10.	వృత్తాలు	**33 - 42**
11.	వృత్తాలకు సంబంధించిన వైశాల్యాలు	**43 - 48**
12.	ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమానం	**49 - 59**
13.	సాంఖ్యక శాస్త్రం	**60 - 90**
14.	సంభావ్యత	**91 - 106**
A2.	గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం	**107 - 118**
	జవాబులు	**119 - 126**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

త్రికోణ మితి పరిచయం

8

There is perhaps nothing which so occupies
the middle position of mathematics as trigonometry

-J.F. Herbart (1890)

త్రికోణమితి గణిత శాస్త్రంలో మధ్యమస్థానంను ఆక్రమించుకొన్నంత బహుశః వేరే ఏవిషయాలు లేవు

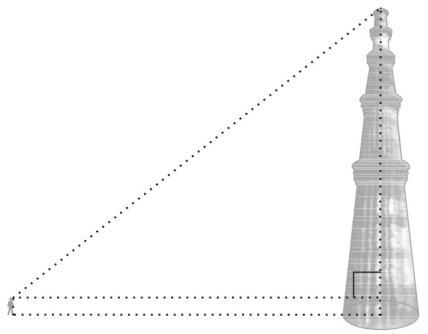
–జె.ఎఫ్. హెర్బార్ట్(1890)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

8.1 పరిచయం

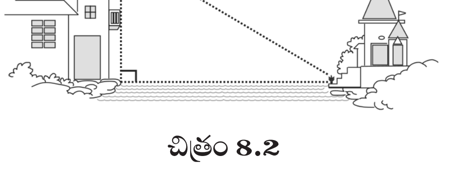
మీరు వెనుకటి తరగతిలో త్రిభుజం మరియు ఖచ్చితమైనలంబకోణ త్రిభుజం గురించి చదివినారు. మన చుట్టూ లంబకోణ త్రిభుజం ఆకారంలో వుండే కొన్ని చిత్రాలను గురించి ఉదాహరణగా తీసుకొందాం.

1. ఒక పాఠశాల విధ్యార్థి కుతుబ్ మినార్‌ను చూడటానికి వెళ్ళాడు. విధ్యార్థి మినార్ యొక్క పైభాగంను చూస్తూవుంటే. 8.1 చిత్రంలో చూపిన విధంగా లంబకోణ త్రిభుజం ఊహాచిత్రంను తయారు చేయవచ్చు. విధ్యార్థి ఖచ్చితంగా కొలవకుండానే మినార్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనవచ్చా?



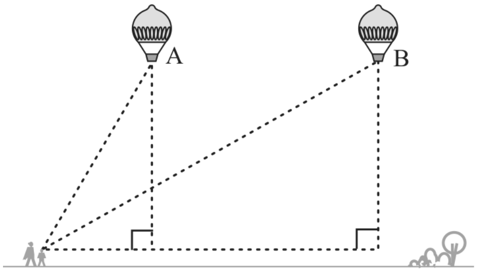
చిత్రం 8.1

2. ఒక అమ్మాయి తన ఇంటివరండాలో కూర్చుంది. ఆ ఇల్లు నది యొక్కబడ్డునవున్నది. నది యొక్క ఇంకొక వైపున దేవాలయం యొక్క మెట్ల మీద వుంచబడిన పూల కుండిని ఆ అమ్మాయి చూస్తూవుంటే చిత్రంలో 8.2 చూపిన విధంగా ఈ సందర్భంలో లంబకోణత్రిభుజం ఏర్పడునని ఉహించవచ్చు. ఒక వేళ నీకు అమ్మాయి కూర్చున్న స్థలం ఎత్తు తెలిసియుంటే నది యొక్క వెడల్పును కనుగొనగలమా?



చిత్రం 8.2

3. ఉదాహరణకు ఒక వేడి బెలూన్ గాలిలో ఎగురుతుంటే. ఒక అమ్మాయి. ఆకాశంలో ఎగిరే ఆ బెలూన్‌ను అమ్మకు చూపించుటకు వెళ్తుంది. వారి అమ్మ ఇంటి బయటికి వచ్చి. ఆ బెలూన్‌ను చూస్తుంది. మొదట ఆ అమ్మాయి బెలూన్ చూడగా A స్థానంలో వుంటుంది. తిరిగి అమ్మ, కూతురు చూడగా ఆ బెలూన్ B స్థానంకు చేరుతుంది. నేల నుండి B బిందువు వరకుగల ఎత్తును కనుగొనగలమా?



చిత్రం 8.3

పై అన్ని సందర్భాలలో గణితంలో ఒక భాగం అయిన త్రికోణమితియందు కొన్ని గణితసూత్రంలను ఉపయోగించి దూరం మరియు ఎత్తునుకనుగొనవచ్చు. ఆంగ్లంలో త్రికోణమితిని (Trigonometry) అని పిలుస్తారు. గ్రీకు పదంనుండి. ట్రై (అర్థం మూడు). గాన్ (అర్థం భుజాలు) మరియు మెట్రాన్ (అర్థం కొలత) నిజంగా త్రికోణమితి అనేది. త్రిభుజం యొక్క భుజాలు మరియు కోణాల మధ్య సంబంధం గురించి తెలిపెది. చాల పురాతన కాలంగా ఈజిప్టు మరియు బాబిలోనియన్‌లలో త్రికోణమితి అనుసరంగా పనులు జరుగుతూవచ్చాయి. ముందు కాలంలో ఖగోళ శాస్త్ర వేత్తలు కూడ భూమినుండి చంద్రుని, నక్షత్రాల దూరంను కనుగొనుటకు ఉపయోగించేవారు. ఈ రోజుల్లో కూడ బౌతిక శాస్త్రవేత్తలు, మరియు ఇంజనీర్లు త్రికోణమితియొక్క ఆధునాతన పద్దతులు ఉపయోగిస్తున్నారు.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

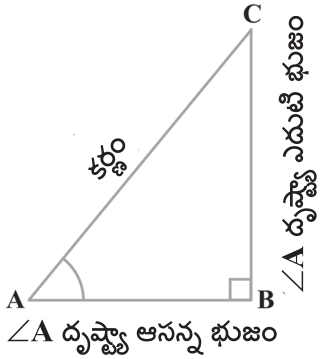
ఈ అధ్యాయంనందు మనము లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాల నిష్పత్తి అదే రీతిలో లఘుకోణంను గురించి చదువు తాము దానినే ''త్రికోణమితి కోణనిష్పత్తులు'' అని పిలుస్తారు. మనము కేవలం లఘుకోణం గురించి చర్చిద్దాం. ఈ నిష్పత్తులు వేరేకోణాలుకు విస్తరించవచ్చు.

0^0 నుండి 90^0 కోణంల కొలతలను త్రికోణమితి నిష్పత్తులు తెలుపుతాయి. నిర్ధిష్టమైన కోణంలు త్రికోణమితి నిష్పత్తులు లెక్కించి ఆ నిష్పతులలోవుండే కొన్ని నిత్య సమీకరణం కనుగొందాం. వీటిని త్రికోణమితి నిత్యసమీకరణంలు అందురు.

8.2 త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

సెక్షన్ 8.1 కొన్నిలంబకోణ త్రిభుజాల యొక్క చిత్రాలను వివిధ రీతులలో ఏర్పడటం మనము చూసాము.

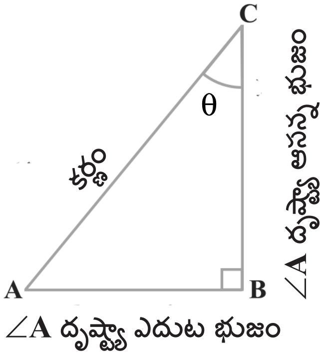
8.4 చిత్రంలో చూపిన విధంగా ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో ఇక్కడ $\angle CAB$ (లేదా విశదంగా కోణం A) అనేది అల్పకోణ త్రిభుజం. A కోణ రీతిలో భుజం BC యొక్క స్థానంను గమనించగా A కోణంను నకు ఎదురుగా వున్న భుజం. కావున A కోణంనకు ఎదుటి భుజం అని



చిత్రం 8.4

పిలుస్తారు. AC అనేది లఘుకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణం మరియు ∠A యొక్క భాగం AB భుజం ఆ భుజంను ∠A దృష్ట్యా ఆ సన్నభుజం అవుతుంది.

కోణం దృష్ట్యా గమనించగా భుజాలు అనేవి మారుతుంటాయి. A స్థానంలో C ఉండగా (చిత్రం 8.5లో) మనం కింది తరగతులలో నేర్చుకొన్నాము. నిష్పత్తుల యొక్క మూల భావనలను తెలుసుకొన్నాము. మనకు తెలుసు లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాలను ఆధారంగా చేసుకొని త్రికోణ మితి నిష్పత్తులను నిర్ధారించవచ్చును. అందుకు వీటనే త్రికోణ మితి నిష్పత్తులు అంటారు.



చిత్రం 8.5

త్రికోణమితి నిష్పత్తులలో ABC అనే లంబకోణ త్రిభుజంలో కోణ A దృష్ట్యా కింది వాటిని నిర్ధారించవచ్చు (చిత్రం 8.4)

$$\text{సైన్ ఆఫ్} \quad \angle A = \frac{\text{కోణం A దృష్ట్యా ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{కాస్ ఆఫ్} \quad \angle A = \frac{\text{కోణం A దృష్ట్యా ఆ సన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{టాన్ ఆఫ్} \quad \angle A = \frac{\text{కోణం A దృష్ట్యా ఎదుటి భుజం}}{\text{కోణం A దృష్ట్యా ఆ సన్న భుజం}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{కోసికెంట్ ఆఫ్ } \angle A = \frac{1}{\text{సైన్ } \angle A} = \frac{\text{కర్ణం}}{} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{సీకెంట్ ఆఫ్ } \angle A = \frac{1}{\text{కోసైన్ } \angle A} = \frac{\text{కర్ణం}}{} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{కాట్ ఆఫ్} \quad \angle A = \frac{1}{\text{టాన్ A}} = \frac{\text{కోణం A దృష్ట్యా ఆ సన్న భుజం}}{\text{కోణం A దృష్ట్యా ఎదుటి భుజం}} = \frac{AB}{BC}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పైన నిష్పత్తులను సంక్షిప్తంగా చూడగా సైన్, A కాస్ A టాన్ A కోసికెంట్ A సీకెంటో A కాట్ A అనివ్రాస్తాము. కోసికెంట్ A సీకెంటో A కాట్ A ఈ నిష్పత్తులు క్రమంగా సైన్ A కోసైన్ A మరియు టాన్ A నిష్పత్తుల యొక్క విలోమాలు అని గమనించవచ్చు.

A ను గమనించగా టాన్ $A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{\text{సైన్ } A}{\text{కాస్ } A}$

మరియు కాట్ $A = \dfrac{\text{కాస్ } A}{\text{సైన్ } A}$

లంబకోణ త్రిభుజంలోని, అల్పకోణ త్రిభుజం త్రికోణమితి నిష్పత్తులు కోణంలు మరియు భుజాల యొక్క పొడవుల మధ్య సంబంధం వ్యక్తపరుచును.

లంబకోణ త్రిభుజంలో C కోణం దృష్ట్యా త్రికోణమితి నిష్పత్తులను ఎందుకు ప్రయత్నం చేయకూడదా? (చిత్రం 8.5).

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

సైన్ మొట్టమొదట (500 AD) ఆర్యభట్టీయం లో ఆర్యభట్ట ఉపయోగించాడు. ఆర్యభట్ట సగంచాపం అనేపదానికి అర్థం – జ్యా అనే పదం ఉపయోగించాడు. అది రాను రాను జ్యాలేక జీయాగా మారిపోయింది దీనిని ఆర్యభట్ట అరబికలో తర్జుమా చేసాడు ముందు దాని యొక్క తర్జుమా సైనస్ **"Sinus"** లాటిన్‌పదం దాని యొక్క అర్థం వక్రం పదం ''సైనస్'' **"Sinus"** ను ఉపయోగించడం మొదటి విస్తరణ **"Sine"** సైన్‌గా ఇంగ్లీషు విద్వాంసుడయ్యి ఖగోళశాస్త్రంలో ''ఎడ్మండ్ గుంటూరు'' (1581–1626) ఉపయోగించాడు.

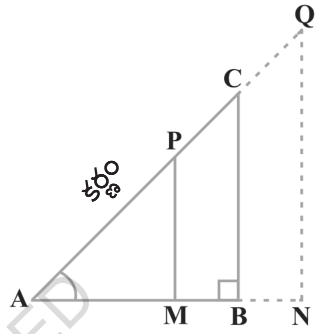
ఆర్యభటా
C.E. 476 - 550

అసలైన పదాలు అయ్యిన కోసైన్ మరియు టాన్ (**'cosine'** and **'tangent'**) తరువాత ఏర్పడాయి. సైన్ యొక్క పూరక కోణాలు దానిలో కోసైన్ (Cosine) ను ఎత్తిపట్టడం జరిగింది. ఆర్యభట్ట దానిని కోటిజ్యా అనిపిలుస్తారు. 1674 ఎడ్మండ్ గుంటూరు అసలైన పేరు కాస్ అనిపేరు పెట్టాడు. ఇంగ్లీషు గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన సర్ జోనస్ మోరే కాస్ అనే పదంను మొదట సంక్షిప్తం చేశాడు.

గమనిక: sin A (సైన్) యొక్క సంకేతంను ఉపయోగించేది 'సైన్ ఆఫ్ ఆంగిల్ ఆఫ్ A "(the sine of the angle A)" యొక్క సంక్షిప్త వివరణ. sin A అనేది sin మరియు A యొక్క లబ్ధం కాదు. A నుండి వేరు చేయడం అర్థం కాదు. కాస్ A కూడ A లబ్ధం కాదు. అదే విధంగా మిగిలిన త్రికోణ మితినిష్పత్తులకు వర్తించును.

ఇపుడు మనము ABC లంబకోణ త్రిభుజం కర్ణం AC మీద P బిందువు తీసుకొందాం లేదా నిర్మిద్ధాం AC మీద Q బిందువును నిర్మిద్ధాం PM $\perp$ AB మరియు QN నిర్మించి Δ PAM లోని $\angle$A మరియు Δ CAB లో $\angle$A అదే విధంగా Δ QAN లో $\angle$A ని ఏవిధంగా త్రికోణ మితినిష్పత్తులను ఏవిధంగా భిన్నాంగావున్నాయో గమనించవచ్చు?

దీనికి జవాబుగా మొదటి ఈ త్రిభుజం Δ PAMను చూడగా అదే రీతిలో Δ CAB సమానంగావున్నాయా? అధ్యాయం 10 నుండి జ్ఞాపకం చేసుకోవడం AA సమాన ప్రమాణంలో ఆ ప్రమాణంను ఉపయోగించగా త్రిభుజం PAM మరియు CAB అనేవి స్వరూపం. కావున సరూప త్రిభుజాల ధర్మాలను ఉపయోగించగా త్రిభుజం యొక్క అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో వుంటాయి.



చిత్రం 8.6

దానినుండి $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$ అవుతుంది

దీని నుండి $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC}$ = సైన్ A (sin A) అని తెలుస్తుంది

అదే విధంగా $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC}$ = కాస్ A (cos A), $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB}$ = టాన్ A (tan A) మొదలగునవి.

ఇది చూపేది ఏమనగా త్రికోణ మితి నిష్పత్తులు Δ PAM లో కోణం A దృష్ట్యా Δ CABలో కోణం A దృష్ట్యా ఏవిధమైన వ్యత్యాసం లేదు.

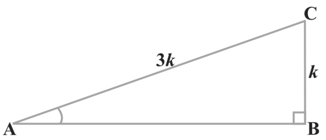
అదే విధంగా సైన్ A (sin A) యొక్క విలువలను పరీక్షించగా (మిగిలిన త్రికోణమితినిష్పత్తులు) Δ QAN లో అదే రీతిలో వుంటాయి.

మన యొక్క పరిశీలనలో విశదంగా తెలిపేది ఏమనగా త్రికోణ మితినిష్పత్తుల యొక్క విలువలు త్రిభుజం యొక్క భుజాల కొలతలపై కాదు కాని అల్పకోణం మీద మాత్రమే ఆధారపడును.

సూచన: మనకు అనుకూలంగా ఒక వేళ మనము ఈ విధంగా రాస్తే $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ మొదలగు $(\sin A)^2$ $(\cos A)^2$ స్థానంలో వ్రాయగా $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (దానిని sin A యొక్క విలోమము A $\sin^{-1}$ అనేది వేరొక అర్థం. దీనిని మనము పై తరగతులలో చర్చించు కొద్దాం. అదేరీతిలో మిగిలిన త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కూడ చర్చించు కొద్దాం. కొన్ని సార్లు గ్రీకు పదం θ (theta) (తీటా) కూడ కోణంనకు బదులుగా ఉపయోగిస్తాము.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనము చర్చిన రీతిలో అల్పకోణ త్రిభుజంలో 6 త్రికోణమితి నిష్పత్తులు కలవు. మనకు ఏదైన ఒక నిష్పత్తి తెలిస్తే. ఇంకొక నిష్పత్తిని కనుగొన గలమా? మనం చూద్దాం.



చిత్రం 8.7

Δ ABC లంబకోణ త్రిభుజం అనుకొంటే $\sin A = \frac{1}{3}$ అయితే దీని అర్థం $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ BC భుజం యొక్క పొడవు మరియు AC యొక్క భుజం పొడవు. ABC త్రిభుజంలో నిష్పత్తి 1 : 3 (చిత్రం (8.7) అయితే BC అనేది kకు సమానం అయితే AC కూడ $3k$ అవుతుంది. ఇక్కడ k అనేది ధనసంఖ్య. మిగిలిన త్రికోణమితినిష్పత్తులను కోణం దృష్ట్యా నిర్ధారించవచ్చును. మూడవ భుజం యొక్క కొలతను కనుగొనాలంటే మీకు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం గుర్తుందా? కావున AB భుజం యొక్క పొడవును కనుగొందాం.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = \left(2\sqrt{2}k\right)^2$$

కావున, $AB = \pm\ 2\sqrt{2}k$

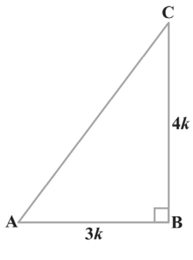
మనం పొందగా $AB = 2\sqrt{2}k$ (ఎందుకు $AB - 2\sqrt{2}k$ సమానంకాదు?)

ఇపుడు $$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

అదే విధంగా A కోణం దృష్ట్యా ఇతర త్రికోణమితినిష్పతుల పొందవచ్చు.

గమనిక: లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం అనేది పెద్ద భుజం. sin A మరియు cos A విలువ ఎప్పుడు 1 కంటె తక్కువ (లేదా ప్రత్యేకంగా 1కి సమానం) కొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

ఉదాహరణ 1: $\tan A = \frac{4}{3}$ అయితే A దృష్ట్యా మిగిలిన త్రికోణ మితినిష్పత్తులను కనుగొందాం.



చిత్రం 8.8

సాధన: మొదట Δ ABC లంబ కోణ త్రిభుజం గీద్దాం (చిత్రం 8.8).

మనకు తెలుసు $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$.

కావున $BC = 4k$ అయితే $AB = 3k$, ఇక్కడ k అనేది ధన సంఖ్య.

పైథాగరస్ సూత్రంను ఉపయోగించి

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2\ AC = 5k$$

మిగిలిన త్రికోణ మితినిష్పత్తులను వాటి యొక్క సూత్రంలను ఉపయోగించి మనం కనుగొందాం

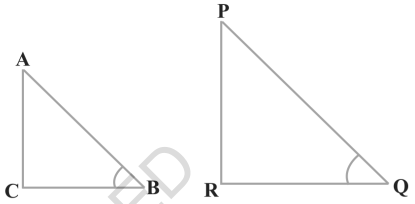
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

కావున $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ మరియు $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

ఉదాహరణ 2: $\angle B$ మరియు $\angle Q$ లు అల్పకోణ త్రిభుజం అయితే $\sin B = \sin Q$ అయితే $\angle B = \angle Q$ అని నిరూపించండి?



చిత్రం 8.9

సాధన: రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు ABC, PQR లు తీసుకొనగా ఇక్కడ $\sin B = \sin Q$ (చిత్రం 8.9)

మనకు $\sin B = \frac{AC}{AB}$

మరియు $\sin Q = \frac{PR}{PQ}$

అయితే $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$

కావున $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$ అనుకొనగా (1)

పైథాగరస్ సూత్రం ఉపయోగించగా

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

కావున $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$ (2)

(1) మరియు (2) లనుండి

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

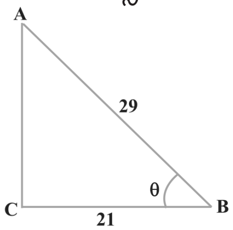
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.4 సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి Δ ACB ~ Δ PRQ కావున ∠B = ∠Q

ఉదాహరణ 3: Δ ACB నందు C అనేది లంబకోణం అయితే దానిలో AB = 29 యూనిట్స్ B = 21 యూనిట్స్ మరియు ∠ABC = θ (చిత్రం 8.10) విలువలను నిర్ధారించగా.

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



చిత్రం 8.10

సాధన: Δ ACB త్రిభుజంలో మనకు తెలుసా.

$$AC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

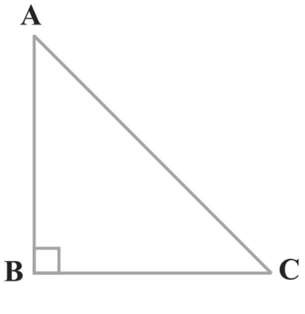
$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ యూనిట్స్}$$

దానినుండి $\sin\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{29}, \cos\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{21}{29}$

ఇపుడు, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \left(\dfrac{21}{29}\right)^2 = \dfrac{20^2 + 21^2}{29^2} = \dfrac{400+441}{841} = \dfrac{841}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\dfrac{21}{29}\right)^2 + \left(\dfrac{20}{29}\right)^2 = \dfrac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \dfrac{41}{841}.$

ఉదాహరణ 4: ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణం B అయితే tan A = 1 అయితే 2 sin A cos A = 1 అవుతుందో పరిక్షించు?



చిత్రం 8.11

సాధన: Δ ABC ఇక్కడ $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = 1$ (చిత్రం 8.11)

$$BC = AB$$

$AB = BC = k$ ఇక్కడ k అనేది ధనసంఖ్య

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

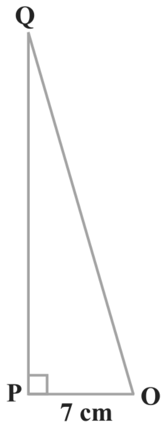
$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ మరియు } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

అయితే $2\sin A\cos A = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ ఇది మనకు కావలసిన విలువ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 5: Δ OPQ అనేది లంబకోణ త్రిభుజం P అనేది లంబకోణం OP = 7 cm. మరియు OQ – PQ = 1cm (చిత్రం 8.12) sin Q మరియు cos Q లను కనుగొనండి?



చిత్రం 8.12

సాధన: Δ OPQ లో

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

$$(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2 \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

అనగా $$1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$$

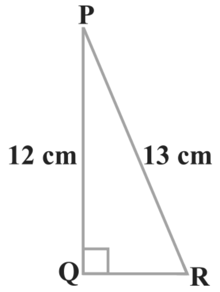
$$1 + 2PQ = 7^2 \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

PQ = 24cm మరియు OQ = 1 + PQ = 25cm

$\sin Q = \frac{7}{25}$ మరియు $\cos Q = \frac{24}{25}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 8.1



చిత్రం 8.13

1. Δ ABC లో లంబకోణం B అయితే AB = 24cm, BC = 7cm

   (i) sin A, cos A

   (ii) sin C, cos C విలువలను కనుగొనండి?

2. చిత్రం 8.13 tan P – cot R ను కనుగొనండి?

3. $\sin A = \frac{3}{4}$, అయితే cos A మరియు tan A ను కనుగొనండి?

4. 15 cot A = 8 అయితే sin A మరియు sec A ను కనుగొనండి?

5. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ అయితే మిగిలిన త్రికోణమితి నిష్పత్తులు కనుగొనండి?

6. $\angle A$ మరియు $\angle B$లు అల్పకోణంలు అయితే cos A = Cos B అయితే $\angle A = \angle B$ అని చూపండి?

7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ అయితే (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$ విలువను కనుగొనండి?

8. 3 cot A = 4 అయితే $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ అవుతుందో పరిశీలించండి?

9. Δ ABC లో B అనేది లంబకోణం $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ అయితే

   (i) sin A, cos C + cos A sin C

   (ii) cos A, cos C – sin A sin C విలువలను కనుగొనండి?

10. Δ PQR లో Q లంబకోణం PR + QR = 25cm మరియు PQ = 5cm, sin P, cosP మరియు tan P విలువలను కనుగొనండి?

11. ఇచ్చిన నిర్వచనాలు సత్యమా లేదా అసత్యనమా తెలుపండి. జవాబు సరియైనదో తెలపండి?

(i) tan A విలువ ఎల్లప్పుడూ 1 కంటె తక్కువ

(ii) కోణం A దృష్ట్యా ఏదైనా విలువ $\sec A = \frac{12}{5}$ అయింది.

(iii) కోణం A దృష్ట్యా cos A ను విశదీకరణగా cosecant A సంక్షిప్తంగా ఉపయోగించబడింది.

(iv) cot A అనేది cot మరియు A ల లబ్ధం

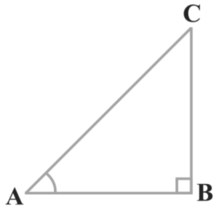
(v) θ యొక్క ఒక విలువకు $\sin\theta = \frac{4}{3}$ అయింది.

8.3 కొన్ని ప్రత్యేక కోణాల దృష్ట్యా త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

రేఖాగణితంలో మీకు ముందే తెలుసు 30^0, 45^0, 60^0 మరియు 90^0 కోణాలను నిర్మించేది. ఈ సెక్షన్ నందు 0^0 కోణంలోవుండే మిగిలిన అన్ని త్రికోణమితి నిష్పత్తులను కనుగొందాం.

త్రికోణ మితి నిష్పత్తి 45^0

Δ ABCలో $\angle B = 90^0$ అనేది లంబకోణం ఒక కోణం 45^0 అయితే ఇంకొక కోణం కూడా 45^0 అవుతుంది. $\angle A = \angle C = 45^0$ (చిత్రం 8.14) చూడండి BC = AB (ఎందుకు?)


చిత్రం 8.14

ఒక వేళ BC = AB = a పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, కావున $AC = a\sqrt{2}$

త్రికోణమితి నిష్పత్తులను నిర్వచనాల ఆధారంగా

$$\sin 45^0 = \frac{\text{ఎదుటిభుజం } 45^0 \text{ కోణం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{\text{ఆసన్నభుజం కోణం } 45^0 \text{ కు}}{\text{కర్ణం}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

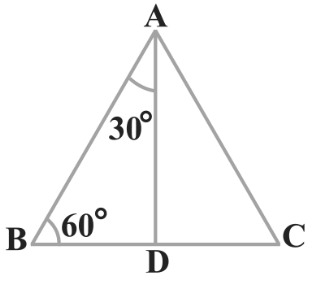
$$\tan 45^0 = \frac{\text{ఎదుటిభుజం కోణం } 45^0 \text{ కు}}{\text{ఆసన్నభుజం కోణం } 45^0 \text{ కు}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

అదే రీతిలో $\text{cosec } 45^0 = \dfrac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$, $\sec 45^0 = \dfrac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$, $\cot 45^0 = \dfrac{1}{\tan 45^0} = 1$

త్రికోణ మితినిష్పత్తి 30^0 మితినిష్పత్తి 60^0

త్రికోణమితినిష్పత్తిలో 30^0 మరియు 60^0 మనం ఇపుడు త్రికోణ మితినిష్పత్తిలో 30^0 మరియు 60^0లకు కనుగొందాం. ABC సమబాహు త్రిభుజం అనుకొంటే కావున ప్రతికోణం సమబాహు త్రిభుజంలో 60^0 కావున. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$



చిత్రం 8.15

AD అనే లంబంను A వద్ద BCకి గీయగా (చిత్రం 8.15లో)

ఇపుడు $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ఎందుకు?)

$BD = DC$

మరియు $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

మనం గమనించగా

ΔABD లంబ కోణం త్రిభుజంలో D లంబకోణం $\angle BAD = 30^0$ మరియు $\angle ABD = 60^0$ (చిత్రం 8.15).

మనకు తెలుసు త్రికోణ మితినిష్పత్తుల కనుగొందాం మనం త్రిభుజంలోని ఇంకొక భుజం యొక్క కొలతను కనుగొన వలయును. $AB = 2a$ అనుకొందాం.

$$BD = \frac{1}{2} BC = a$$

మరియు $$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2,$$

$$AD = a\sqrt{3}$$

$$\sin 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cosec } 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2, \sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$$

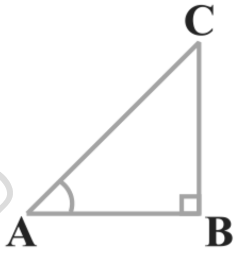
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\sin 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^0 = \frac{1}{2}, \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

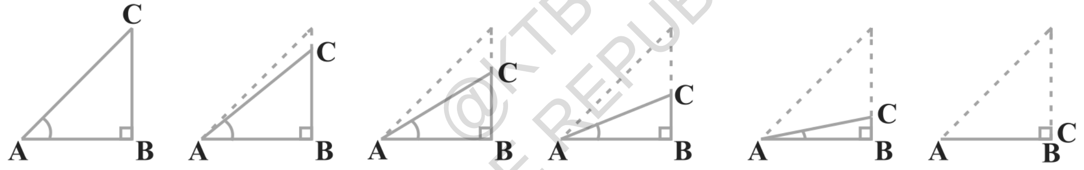
$$\text{cosec } 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^0 = 2 \text{ మరియు } \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

త్రికోణ మితి నిష్పత్తులు 0^0 మరియు 90^0

కోణం A అనేది త్రికోణ మితి నిష్పత్తులలో ఏవిధంగావుండునో మనం గమనించగా Δ ABC నందు ఆకోణం చాలచిన్నదిగా ఏర్పడితే (చిత్రం 8.16) 0 నకు సమానవైంతే $\angle A$ అనేది చాలా చాలాచిన్నది. BC యొక్క భుజం కొలత తగ్గుతూవచ్చును. బిందువు C అనేది బిందువుకు Bకి దగ్గరగా చేరును. $\angle A$ అనేది చాలా దగ్గరగా 0^0 చేరును. AC అనేది AB కి సమానంగా చేరును (చిత్రం 8.17)



చిత్రం 8.16



చిత్రం 8.17

అపుడు $\angle A$ అనేది 0^0నకు దగ్గరగా వుండను. BC అనేది 0కు దగ్గరగా. కావున విలువ $\sin A = \frac{BC}{AC}$ అనేది 0 నకు దగ్గరగావుండును. అంతేగాక $\angle A$ అనేది 0^0కు దగ్గరగావుండును. AC అనేది దగ్గరగా ABకి వుండును. విలువ $\cos A = \frac{AB}{AC}$ అనేది 1కి దగ్గరగావుండును.

$A = 0^0$ అయినపుడు మనం ఏవిధంగా sin A, cos A విలువలను నిర్ధారించుటకు సహాయంచేయును

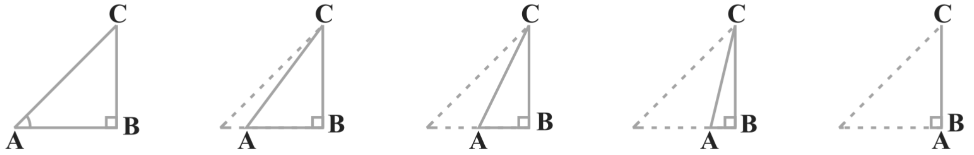
$\sin 0^0 = 0$ మరియు $\cos 0^0 = 1$

$$\tan 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0, \cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0}$$ ఇది నిర్ధారించలేము (ఎందుకు?)

$$\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = 1 \text{ మరియు } \text{cosec } 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0}$$ (ఇది కూడ నిర్ధారించలేము ఎందుకు?)

మనం ఇపుడు త్రికోణ మితినిష్పత్తులలో $\angle A$ను చాల, చాల పెద్దదిగా చేస్తే ఏమవుతుందో గమనిద్దాం Δ ABC 90^0 అయితే $\angle A$ అనేది చాల చాల పెద్దది. $\angle C$ అనేది చాలాచాల చిన్నది. పై సందర్భంలో AB

భుజం యొక్క పొడవు చాలా తగ్గిపోతుంది. బిందువు A అనేది B బిందువు దగ్గరగా చేరును చివరకు $\angle A = 90^0$ చాలదగ్గరగావుండును. $\angle C$ అనేది 0^0నకు దగ్గరగావుండును. భుజం AC అనేది BC భుజం తో కలిసిపోతుంది (చిత్రం 8.18).



చిత్రం 8.18

$\angle C$ అనేది 0^0 కు దగ్గరగా వుంటే, A అనేది 90^0నకు దగ్గరగా వుంటే AC భుజం BC భుజంతో కలిస్తే sin A అనేది '1' నకు దగ్గరగావుండును. $\angle A$ అనేది 90^0నకు దగ్గరగావుండను $\angle C = 0^0$నకు దగ్గరగావుండును. AB భుజం 0 అవును అయితే cos A అనేది 0 నకు దగ్గరగావుండును.

$\sin 90^0 = 1$ మరియు $\cos 90^0 = 0$

ఎందుకు మనం మిగిలిన త్రికోణ మితి నిష్పత్తులను 90^0 వద్ద కనుగొనలేము?

మనం త్రికోణమితి నిష్పత్తులను 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 మరియు 90^0 ల విలువలను పట్టిక 8.1 లో చూపబడ్డాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

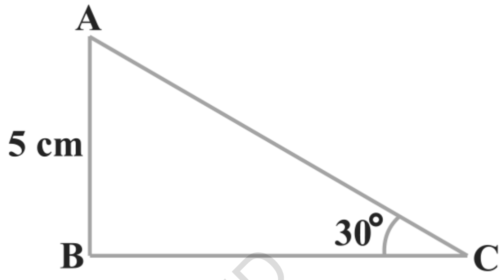
8.1

$\angle A$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not defined
cosec A	N.D	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not defined
cot A	N.D	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

గమనిక: పై పట్టికలో మీరు గమనించగా $\angle A$ అనేవిలువ 0^0 నుండి 90^0 వరకు పెరుగుతుంది. sin A, 0 నుండి 1కి పెరుగును. cos A విలువ 1నుండి 0 తగ్గుతూవుండును.

కొన్ని ఉదాహరణలయందు పైపట్టికలో విలువలను ఉపయోగించి కొన్ని సమస్యలు సాదిద్దాం.

ఉదాహరణ 6: Δ ABC లో $\angle B$ లంబకోణ త్రిభుజం, AB = 5cm మరియు $\angle ACB = 30^0$ (చిత్రం 8.19) లో BC మరియు AC భుజాల పొడవులను కనుగొనండి.



చిత్రం 8.19

సాధన: BC భుజం యొక్క పొడవు కనుగొనలంటే BC మరియు AB ని మిగిలిన త్రికోణమితి నిష్పత్తులను తీసుకొందాం. $\angle C$ కి ఆసన్నభుజం BC మరియు AB ఎదుటిభుజం.

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

$$\frac{5}{BC} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$B = 5\sqrt{3}\ cm$ ఇచ్చును.

మనం దీనిని ఆధారంగా AC యొక్క భుజం పొడవు కనుగొనవచ్చును.

$$\sin 30^0 = \frac{AB}{AC} \text{ (ఎందుకు?)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

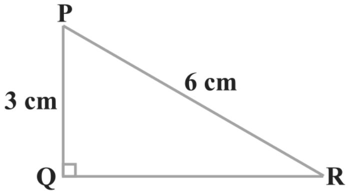
$$AC = 10 \text{ cm}$$

గమనించగా తరువాత మనం పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి మూడవ భుజం యొక్క కొలతను నిర్ధారించవచ్చును.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} \text{ cm} = 10\text{cm}$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణ 7: Δ PQR లో లంబకోణం Q (చిత్రం 8.20) PQ = 3cm PR = 6cm అయితే QPR మరియు PRQను నిర్ధారించండి?



చిత్రం 8.20

సాధన: PQ = 3cm మరియు PR = 6cm

అయితే $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

లేదా $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\angle PQR = 30^0$

$\angle QPR = 60^0$ (ఎందుకు?)

మీకు తెలుసు ఏభాగంలోని ఒక భుజం తెలిస్తే (ఆల్పకోణం త్రిభుజంలో ఒకభుజం) అది లంబకోణం అని తెలుసు. మిగిలినభుజం మరియు కోణంలను త్రిభుజంలో నిర్ధారించవచ్చు.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఉదాహరణ 8: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0^0 < A + B \le 90^0$ $A > B$ అయితే A మరియు Bలను కనుగొనండి?

సాధన: $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ అయితే $A - B = 30^0$ (ఎందుకు) అదేరీతిలో $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ అయితే $A + B = 60^0$ (ఎందుకు?) (1) మరియు (2)లను సాదించగా $A = 45^0$ మరియు $B = 15^0$.

అభ్యాసం 8.2

1. కింది వాటిని లెక్కించండి.

(i) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$ (ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

(iii) $\frac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \text{cosec } 30^0}$ (iv) $\frac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \text{cosec } 60^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

(v) $\frac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. సరియైన సమాధానం ఎన్నుకొని నీ సమాధానంను సరిచూడండి.

(i) $\frac{2\tan 30^0}{1 + \tan^2 30^0} =$

(A) $\sin 60^0$ (B) $\cos 60^0$ (C) $\tan 60^0$ (D) $\sin 30^0$

(ii) $\frac{1 - \tan^2 45^0}{1 + \tan^2 45^0} =$

(A) $\tan 90^0$ (B) 1 (C) $\sin 45^0$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ అనేది A కు ఏ విలువకు సమానం

(A) 0^0 (B) 30^0 (C) 45^0 (D) 60^0

(iv) $\dfrac{2 \tan 30^0}{1 - \tan^2 30^0} =$

(A) $\cos 60^0$ (B) $\sin 60^0$ (C) $\tan 60^0$ (D) $\sin 30^0$

3. $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ మరియు $\tan(A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0^0 < A + B < 90^0$; $A > B$ అయితే A మరియు B లను కనుగొనండి.

4. క్రింది నిర్వచనాలు సత్యమా, అసత్యమాతెల్పండి. మీజవాబును సరిచూడండి.

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

(ii) θ విలువ పెరిగితే $\sin\theta$ విలువ పెరుగుతుంది

(iii) θ విలువ పెరిగితే $\cos\theta$ విలువ పెరుగుతుంది

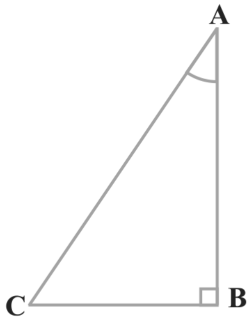
(iv) $\sin\theta = \cos\theta$ యొక్క అన్ని విలువలకు అయ్యింది.

(v) $A = 0^0$ అయిన $\cot A$ విలువ నిర్ధారించలేదు

8.4 త్రికోణమితి తత్సమాలు

మీరు తత్సమాలు యొక్క నిర్వచనం జ్ఞాపకం తెచ్చుకొందాం చలరాశులు రీతిలో అన్నివిలువలు నిజాలు అయితే. అదే రీతిలో త్రికోణ మితి నిష్పత్తులలో ఆధారంగా సమీకరణంను కోణం యొక్క త్రికోణ మితి తత్సమాలు అందురు. కోణం ఆధారంగా అన్ని విలువలకు సత్యంగావుండును.

ఈ సెక్షన్‌లో త్రికోణ మితి తత్సమాలు, నిరూపిద్దాం మిగిలిన వాటని కూడ నిరూపించుటకు తత్సమాలు ఉపయోగించవచ్చు.



చిత్రం 8.21

ΔABC లో B లంబకోణం అయితే (చిత్రం 8.21)

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad (1)$$

AC^2 చేత సమీకరణం 1 ని భాగించగా

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

$$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \quad (2)$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ఇది సత్యం అన్ని A యొక్క విలువలకు $0^0 \leq A \leq 90^0$. ఇది త్రికోణ మితి తత్సమమం

సమీకరణం (1)ని AB^2. చే భాగించగా

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\mathbf{1 + tan^2 A = sec^2 A} \qquad (3)$$

$A = 0^0$ విలువ సమీకరణం. సత్యం ఆవును అది సత్యం $A = 90^0$ ఏమవుతుంది? tan A మరియు sec A అనేవి నిర్ధారించలేదు. $A = 90^0$ అయితే (3) అనేది సత్యం అన్ని A కు $0^0 \leq A \leq 90^0$

సమీకరణం (1)ని BC^2 చే భాగించగా మనం ఈ క్రింది వాని పొందగలము.

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\mathbf{cot^2 A + 1 = cosec^2 A} \qquad (4)$$

$A = 0^0$ వద్ద cosec A మరియు cot A విలువలను నిర్ధారించలేదు. కావున (4) అనేది A యొక్క. $0^0 < A \leq 90^0$ సత్యం.

ఈ తత్సమాలను ఉపయోగించి ఈ త్రికోణమితి నిష్పత్తులను ఉపయోగించి మిగిలిన త్రికోణమితి నిష్పత్తులను. ఏదైన ఒక నిష్పత్తిని తెలుసుకొనుట ద్వారా మిగిలిన విలువలను త్రికోణమితి నిష్పత్తులను నిర్ధారించవచ్చును.

ఈ తత్సమాల ఆధారంగా మనం ఇంక కొన్ని విలువలను కనుగొనవచ్చును. ఒకవేళ మనకు తెలిసి

$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ అయితే } \cot A = \sqrt{3}$$

అయితే $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$,

$$\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ మరియు } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మరియు $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

అయితే cosec A = 2.

ఉదాహరణ 9 : cos A, tan A మరియు sec A పదాలును sin A రూపంలో విస్తరించగా.

సాధన: $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ కావున

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ = i.e., $\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (ఎందుకు?)

ఇంక $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ మరియు $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

ఉదాహరణ 10: sec A (1 – sin A) (sec A + tan A) = 1 అని నిరూపించండి?

సాధన: LHS = sec A (1 – sin A) (sec A + tan A)

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS}$$

ఉదాహరణ 11: $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

సాధన: $\text{LHS} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 12: $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ తత్సమము $\sec^2\theta = 1\ \tan^2\theta$ ను ఉపయోగించి నిరూపించండి?

సాధన: $\sec\theta$ మరియు $\tan\theta$ యొక్క తత్సమాలను మనం ప్రతిక్షేపించగా మొదట LHS ను మార్చ్బగా (తత్సమాలను మననిరూపించగా) లవం మరియు హారం $\cos\theta$ నుండి భాగించగా దానిని $\sec\theta$ మరియు $\tan\theta$ రూపంలో మార్చవచ్చు.

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{\left(\tan^2\theta - \sec^2 - \theta\right) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\} \qquad (\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\} \qquad (\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \text{RHS}$$

ఇది యే RHS యొక్క తత్సమాలు మనకు కావలసిన నిరూపణ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 8.3

1. sin A, sec A, మరియు tan Aను త్రికోణ మితినిష్పత్తులను ఉపయోగించి cot A రూపంలో రాయండి?

2. A కోణం దృష్ట్యా త్రికోణమితి అన్ని నిష్పత్తులు sec A రూపంలో రాయండి?

3. సరియైన సమాధానం ఎన్నుకొని. జవాబును సరిచూడండి.

   (i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$

   (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

   (ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

   (iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

   (A) sec A

   (B) sin A

   (C) cosec A

   (D) cos A

   (iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} =$

   (A) $\sec^2 A$

   (B) -1

   (C) $\cot^2 A$

   (D) $\tan^2 A$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. కోణాలను ఆధారంగా అల్పకోణాలను ఉపయోగించి క్రింది తత్సమాలను విస్తరించి వాటిని నిరూపించండి?

   (i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

   (ii) $\dfrac{\cos A}{1 + \sin A} + \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

   (iii) $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

   (**సూచన:** పదాలను sin θ మరియు cos θ రూపంలో రాయండి)

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ (**సూచన:** ప్రత్యేకంగా LHS మరియు RHS లను సూక్ష్మీకరించు)

(v) $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$, తత్సమమును $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ను ఉపయోగించుకొని.

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

(**సూచన:** LHS మరియు RHS ప్రత్యేకంగా సూక్ష్మీకరించు)

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot}\right)^2 = \tan^2 A$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.5 సంక్షిప్తం

ఈ అధ్యాయం ఈ కింది విషయాలను మనంచదివాము:

1. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో B అనేది లంబకోణం

$$\sin A = \frac{\text{A కోణం దృష్ట్యా ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}}$$

$$\cos A = \frac{\text{A కోణం దృష్ట్యా ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$$

$$\tan A = \frac{\text{A కోణం దృష్ట్యా ఎదుటి భుజం}}{\text{A కోణం దృష్ట్యా ఆసన్న భుజం}}$$

2. $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin}$; $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\tan A = \frac{1}{\cot}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3. అల్పకోణంలో ఒక త్రికోణమితి నిష్పత్తి తెలిస్తే మిగిలిన, త్రికోణమితి నిష్పత్తులను సులభంగా నిర్ధారించవచ్చు.

4. త్రికోణ మితినిష్పత్తులలో కోణాలు 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 మరియు 90^0 యొక్క విలువలు.

5. sin A లేదా cos A యొక్క విలువ 1 కంటే ఎక్కువ లేదు. అక్కడ sec A లేదా cosec A యొక్క విలువ 1 కంటె ఎక్కువ లేదా సమానం.

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ మరియు $0^0 \le A < 90^0$,

   $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ నుండి $0^0 < A \le 90^0$.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

త్రికోణమితి యొక్క కొన్ని అనువర్తనాలు

X3L7X9

9

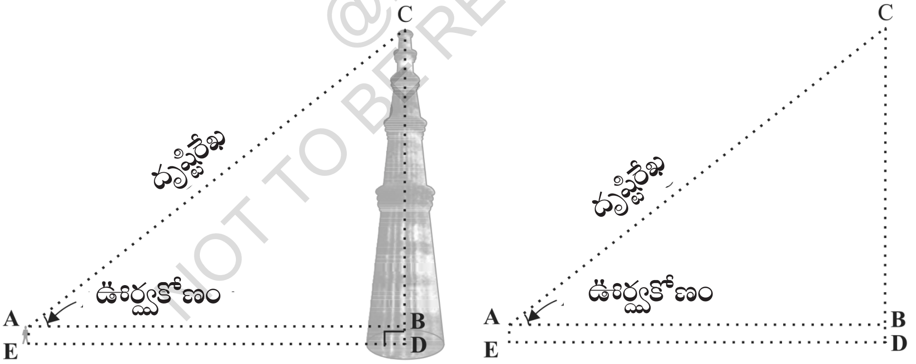
9.1 పరిచయం

వెనుకటి అధ్యాయంలో త్రికోణమితి నిష్పత్తుల గురించి మనము చదువు కొన్నాం. ఈ అధ్యాయంలో మనం దిన నిత్య జీవితంలో త్రికోణ మితి కొన్ని పద్ధతులలో ఉపయోగపడుతుందో మనం చదువుకొందాం. త్రికోణ మితి అనేది చాలా పురాతన విషయము అని ప్రపంచంలో అనేక అధ్యాపకుల ద్వారా చదవబడింది. ఖగోళ సంబంధించిన విషయాలను అభివృద్ధి పరచడానికి త్రికోణమితి కనుగొనబడినదని అధ్యాయం 8 లో చదువుకొన్నాము.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఎత్తులు మరియు దూరాలు

వెనుకటి అధ్యాయం లో చితం 8.1 ను తీసుకొని చిత్రం 9.1లో చూపిన విధంగా తిరిగి గీయగా.

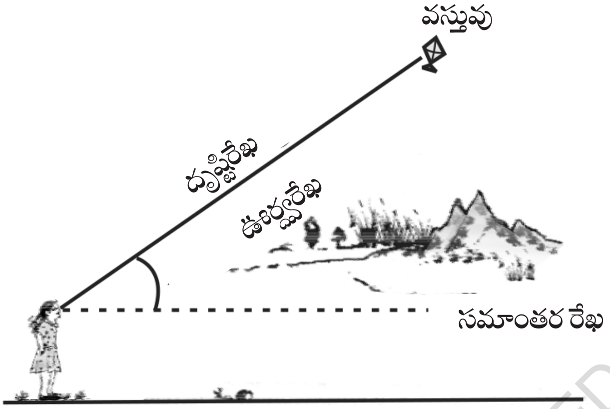


చిత్రం 9.1

ఈ చిత్రంలో AC రేఖ విద్యార్థి యొక్క కంటినుండి మినార్ యొక్క పైనచివరి బిందువును చూచేది. ఆ రేఖను దృష్టి రేఖ అందురు. మినార్ యొక్క పైన చివరి బిందువు చూస్తున్నాడు. కోణం BAC అనేది దృష్టిరేఖకు సమాంతరంగా గీయబడిన రేఖద్వారా ఏర్పడుతుంది. విద్యార్థి యొక్క దృష్టి ఆధారంగా మినార్ పైనచివరి బిందువును చూడటం ద్వారా ఏర్పడేదే ఉన్నతకోణంగా పిలుస్తారు.

అయితే దృష్టి రేఖ అనేది పరిశీలకుడు నిలబడే బిందువునుండి గీయబడేరేఖ పరిశీలకుడు ఆవస్తువును చూస్తూవున్న స్థానం. ఉన్నత కోణం యొక్క బిందువును చూడగా దృష్టిరేఖకు సమాంతరంగా గీయ బడిన

రేఖద్వారా కోణం ఏర్పడినది. ఆ బిందువు చూడగా అది సమాంతరంగానే వుండును కావున మనము వస్తువును తలపైకి ఎత్తుగా వుంచిచూస్తాము. (చిత్రం 9.2)



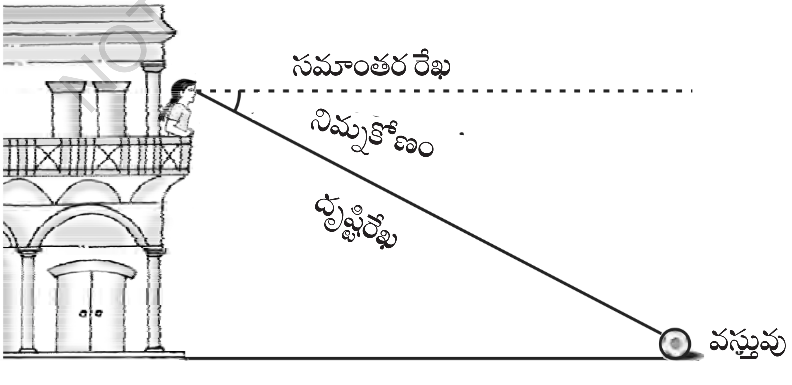
చిత్రం **9.2**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు మనం చిత్రం 9.2 సందర్భంను తీసుకొనగా. వరండాలో కూర్చున్న అమ్మాయి దేవాలయం లోని మెట్లమీద వుంచిన పూలకుండీని క్రిందకువంగి చూస్తూవుంది.

ఈ విషయంలో దృష్టిరేఖ అనేది సమాంతరరేఖకు క్రిందగావుంది. దృష్టిరేఖకు సమాంతరంగా ఏర్పడే కోణంను నిమ్నకోణం అందురు.

నిమ్నకోణం అనేది చూచే బిందువు ఆధారంగా (వస్తువును) దృష్టిరేఖకు సమాంతరంగా వున్న ఆ బిందువు సమాంతర రేఖకు క్రింద ఏర్పడేకోణం కావున ఇప్పుడు మనం ఆబిందువును తలను క్రిందికి వంగి చూడవలసిన వస్తుంది (చిత్రం 9.3)



చిత్రం **9.3**

ఇప్పుడు మీరు గుర్తించగా దృష్టిరేఖ. చిత్రం 9.3 లో ఏర్పడిన కోణం ఊర్ధ్వకోణమా లేదా నిమ్నకోణం మా?

చిత్రం 9.1 పరిశీలించగా నీవు ఖచ్చితంగా, కొలవకుండానే మినార్ యొక్క CD ఎత్తును కనుగొనుటకు మీకు ఏ సమాచారం అవసరం? మీకు ఈ కిందివి తెలిసి యుండవలయును

(i) DE దూరం అనేది విద్యార్థి నిలువ బడివున్న స్థానం నుండి మినార్ యొక్క పాదానికి.

(ii) ఊర్ధ్వకోణం అనేది, $\angle BAC$ మినార్ పైన చివరి బిందువు.

(iii) AE అనేది విధ్యార్థి ఎత్తు.

మనము పైన మూడు షరతులను ఊహించగా, మినార్ ఎత్తును ఏ విధంగా నిర్ధారించగలము?

చిత్రంలో CD = CB + BD ఇక్కడ BD = AE, విధ్యార్థి ఎత్తు.

BC ని కనుగొనుటకు మనం త్రికోణమితినిష్పత్తులను ఉపయోగించి $\angle BAC$ లేదా $\angle A$

Δ ABC లో $\angle A$కి ఆసన్నభుజం BC అని మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు ఏవిధమైన త్రికోణమితి నిష్పత్తి ఉపయోగించెదము? రెండు విలువలలో ఏదైన ఒక విలువ మనం కలిగివున్నాము. ఇంకొక విలువ మనం నిర్ధారించగలమా? మనం వెతికే విలువలలో Tan A లేదా Cot A, ఈ నిష్పత్తులలో AB మరియు BC కలిగివున్నాయి.

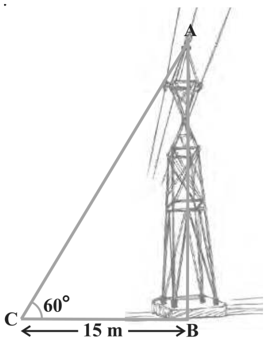
కావున $\tan A = \frac{BC}{AB}$ లేదా $\cot A = \frac{AB}{BC}$,

దీనిని సాధించగా BC ఇస్తుంది. AE నుండి BCకి కలుపగా మనకు మినార్ ఎత్తు దొరుకుతుంది.

ఇప్పుడు మనము విధానంను వివరించగా మనం ఇప్పుడే చర్చించిన రీతిలో కొన్ని సమస్యలు సాధింస్తాం.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 1: ఒక మైదానంలో ఒక టవర్ నిలువుగా వుండును. టవర్ అడుగు భాగంనుండి. 15m దూరంలో మైదానంలో బిందువు వుంది. టవర్ పైభాగం నుండి ఊర్ధ్వకోణం 60^0 వుంది. టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొందాం.



చిత్రం 9.4

సాధన: సమస్యకు అనుగుణంగా ఒక చిన్న చిత్రంను గీద్దాము. (చిత్రం 9.4) ఇక్కడ AB అనేది టవర్‌ను గుర్తిస్తాం. CB అనేది బిందువునుండి టవర్ అడుగు భాగనకు దూరం. మరియు $\angle ACB$ అనేది ఊర్ధ్వ కోణం మనము టవర్ ఎత్తును కనుగొందాం. అనగా AB మరియు ΔABC లో $\angle B = 90^0$

ఈ సమస్యను పరిహరించుటకు త్రికోణ మితి నిష్పత్తులను ఉపయోగించి. $\tan 60^0$ (or $\cot 60^0$) ఈ సమస్యను సాధించడానికి మనము

AB మరియు BC నిష్పత్తులను కలిగివున్నాయి.

ఇపుడు, $\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$

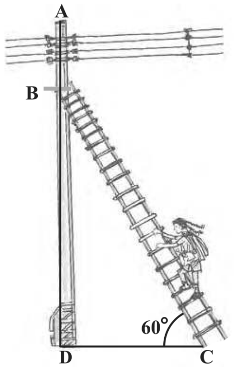
అనగా $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

అనగా $AB = 15\sqrt{3}$

కావున టవర్ ఎత్తు $15\sqrt{3}\ m$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2: $5m$ ఎత్తులోగల ఒక విద్యుత్ ద్వీప స్తంభంలో కొంత రిపేరి చేయుటకు ఎలక్ట్రిషియన్ నియమించబడ్డాడు. $1.3m$ ఎత్తులోరిపేరి ఏర్పడినది. ఆరిపేరి చేయుటకు ఎంత ఎత్తు గల నిచ్చెన ఉపయోగించవలెను. ఆ నిచ్చెన 60^0 కోణంలో సమాంతరంగా వేసినకూడ చేరుకోలేదు. ఆ స్థలం చేరుకొనుటకు ఏ విధమైన కోణంలోవుంచవలయును? అధేవిధంగా నిచ్చెనయుండు అడుగు భాగంను స్తంభం యొక్క అడుగు భాగంనకు ఎంత దూరంలో వుంచవలయును?

(అవసరంమైతే $\sqrt{3} = 1.73$ ను ఉపయోగించవచ్చు)



చిత్రం 9.5

సాధన: చిత్రం 9.5 వాస్తంభం ADలో ఎలక్ట్రిషియన్ చేరవవలసిన (రిపేరి చేయవలసిన) స్థలం B.

కావున, $\quad BD = AD - AB = (5 - 1.3m) = 3.7m.$

ఇక్కడ BC నిచ్చెనను సూచిస్తుంది. మనము నిచ్చెన పొడవు కనుగొనవలయును. అది లంబకోణ త్రిభుజం BDC యొక్క కర్ణం.

మనం ఏవిధమైన త్రికోణమితి నిష్పత్తిని తీసుకొనవచ్చు అని ఆలోచిద్దాం?

అది Sin 60^0 అవచ్చు?

అయితే $$\frac{BD}{BC} = \sin 60^0 \text{ లేదా } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

కావున $$BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ (దాదాపు)}$$

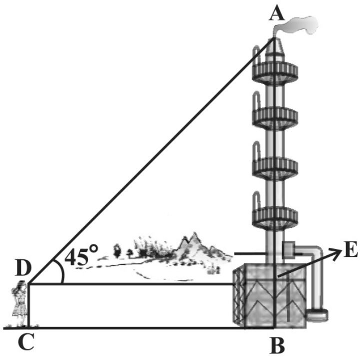
అయితే నిచ్చెన ఎత్తు $4.28m$ అయిందవచ్చు

ఇపుడు $$\frac{DC}{BD} = \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

అనగా $$DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14m \text{ (దాదాపు)}$$

కావున స్తంభం అడుగు భాగంనుండి నిచ్చెన అడుగుభాగంనుకు గల దూరం = $2.14m$ లో వుంచవలయును

ఉదాహరణ 3: ఒక పరిశీలకుడు $1.5m$ పొడవుగల మరియు $28.5m$ దూరంలో చిమ్నివుంది. దాని నుండి పరిశీలకుడు దృష్టితో చూడగా చిమ్నిపైభాగం 45^0 కోణం చేస్తాడు. ఎంత ఎత్తులో చిమ్మీగలదు?



చిత్రం 9.6

సాధన: ఇక్కడ AB అనేది చిమ్ని CD పరిశీలకుడు మరియు $\angle ADE$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అనేది ఊర్ధ్వకోణము (చిత్రం 9.6) ఈ సందర్భంలో ADE ఒక త్రిభుజం. లంబకోణం $\angle E = 90^0$ మరియు మనము చిమ్ని ఎత్తును కనుగొనవలయును.

మనకు AB = AE + BE = AE + 1.5

DE = CB = 28.5*m*

AE ను కనుగొనుటకు, AE మరియు DE లోగల త్రికోణమితి నిష్పత్తిని ఉపయోగించవలయును. ఉన్నత కోణం యొక్క స్పర్శరేఖను (tangent) ఉపయోగించుకొందాం.

ఇప్పుడు $$\tan 45^0 = \frac{AE}{DE}$$

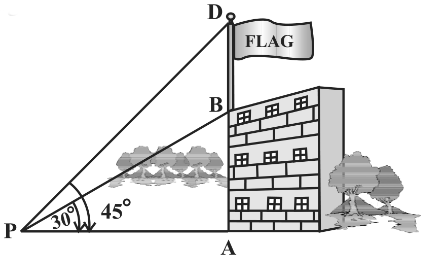
$$1 = \frac{AE}{28.5}$$

$$AE = 28.5$$

కావున చిమ్నీయొక్క ఎత్తు (AB) = (28 - 5 + 1 - 5)*m* = 30 *m*

ఉదాహరణ 4: 10*m* ఎత్తుగల భవనం నుండి మైదానంలో బిందువు P వద్ద ఊర్ధ్వకోణం 30^0 భవనంపై భాగాన గల జెండా చివరి భాగానకు P వద్దనుండి ఊర్ధ్యకోణం 45^0 P బిందువునుండి భవనం అడుగు భాగానకు గల దూరం మరియు జెండా ఎత్తును కనుగొనండి? ($\sqrt{3} = 1.732$ విలువను మీరు ఉపయోగించవచ్చు)

సాధన: చిత్రం 9.7 AB అనేది భవనం ఎత్తు. ఇచ్చిన బిందువు P నుండి BD అనేది జెండా భాగము. కావున దీనిలో గమనించగా PAB మరియు PAD లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజములు. మనం జెండా స్తంభం ఎత్తను కనుగొనవలసినది DB అనేది P అనే బిందువునుండి భవనంనకు గల దూరం అనగా PAను కనుగొనవలయును.



చిత్రం 9.7

ఇంకా మనకు తెలుసు AB అనేది భవనం ఎత్తు మొదట మనము Δ PABని తీసుకొందాం.

ఇపుడు $$\text{Tan } 30^0 = \frac{AB}{AP}$$

అనగా $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

కావున $$AP = 10\sqrt{3}$$

P వద్దనుండి భవనం ఎత్తుకుగల దూరం $10\sqrt{3}m = 17.32m$

ఒక వేళ DB = xm అనుకొనగా అపుడు AD = $(10 + x)\ m$

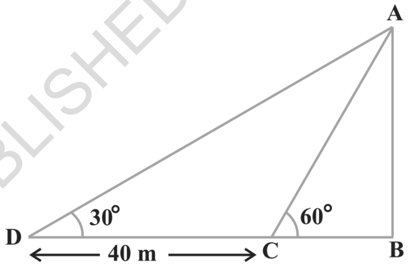
ఇప్పుడు ΔPAD లో $\tan 45^0 = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

కావున $$1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$$x = 10\left(\sqrt{3}-1\right) = 7.3$$

అందువలన జెండాస్తంభం ఎత్తు = $7.32m$

ఉదాహరణ 5: నేలమీద నిటారుగా నిలవబడిన టవరు ఏటవాలు నీడపొడవు సూర్యుని కోణం 60^0 వుండగా ఏర్పడిన నీడపొడవు కోణం 30^0 వుండగా ఏర్పడిన నీడపొడవు $40m$ ఎక్కువ అయింది. అయితే టవరు ఎత్తును కనుగొనండి?



చిత్రం 9.8

సాధన: చిత్రం 9.8 AB అనేది టవర్ BC అనేది టవర్ నీడ సూర్యుని ఏటవాలు ఎత్తు 60^0 ఉన్నప్పుడు. ఊర్ధ్వకోణం టవర్ యొక్క పై ఎత్తులోవున్నప్పుడు. DB అనేది నీడపొడవు. ఊర్ధ్వకోణం 30^0

ఇపుడు DB, BC కంటే $40m$ ఎక్కువైనది.

$$\Delta AB = h\ m$$

$$\Delta DB = (40 + x)\ m$$

ఇక్కడ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు ΔABC, ΔABD

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

లేదా $$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \qquad (1)$$

Δ ABD, $$= \tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$$

$$h = x\sqrt{3} \qquad (2)$$

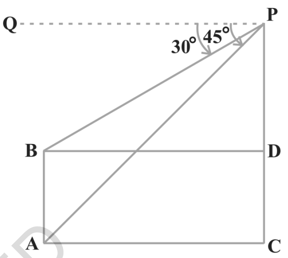
దీనిని (2) లో (1) ని ప్రతి క్షేపించగా

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40 \;\therefore\; 3x = x + 40$$
$$x = 20$$
$$h = 20\sqrt{3} \qquad \text{(1 నుండి)}$$

కావున టవర్ ఎత్తు $20\sqrt{3}\ m$

ఉదాహరణ 6: ఒక రెండంతస్తుల భవనం పై భాగంనుండి $8m$ కట్టడం ఉంటే దానిపైభాగంనుండి పాద భాగంనుచూడగా ఏర్పడే నిమ్నకోణాలు 30^0 మరియు 45^0 అయినవి. అయితే రెండంతస్తుల భవనం ఎత్తు మరియు కట్టడం మధ్యుగల దూరంను కనుగొనండి



చిత్రం 9.9

సాధన: చిత్రం 9.9 లో PC అనేది రెండంతస్తుల భవనం మరియు AB అనేది $8m$ పొడవుగల భవనం. మనకు రెండంతస్తుల భవనం ఎత్తు అనగా PC రెండు భవనాల మధ్యదూరం అనగా AC లెక్కించుటకు ఆసక్తివుంది. చిత్రంను జాగ్రత్తగా గమనించగా PB అనేతిర్యగ్రేఖ PQ, BD అనే సమాంతర రేఖలకు ఏర్పడినది. కావున $\angle$QPB మరియు $\angle$PBD అనేవి ఏకాంతర కోణాలు. సమానం $\angle PBD = 30^0$.

అదేవిధంగా $\angle PAC = 45^0$ Δ PBD లంబకోణంనందు:

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ లేదా } BD = PD\sqrt{3}$$

Δ PAC లంబకోణం అయితే

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^0 = 1,\ PC = PD + DC \text{ కావున } PD + DC = AC$$

అందువలన AC = BD మరియు DC = AB = $8m$ అయినందువల్ల

$PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (ఎందుకు)

దీని నుండి $$PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 4\left(\sqrt{3}+1\right)m$$

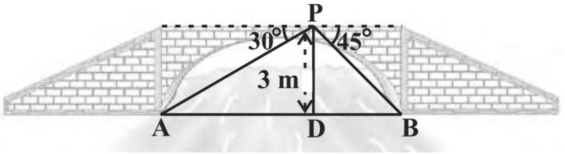
కావున రెండంతస్థుల భవనం ఎత్తు $\left\{4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\right\}m = 4\left(3+\sqrt{3}\right)m$

అయితే రెండు భవనంల మధ్య దూరం $= 4\left(3+\sqrt{3}\right)m$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 7: ఒకనది వైపు వంతెన మీద ఒక బిందువునుండి నదికి ఇరువైపుల పార్శ్వభాగంలను చూడగా ఏర్పడిన నిమ్నకోణాలు 30^0 మరియు 45^0 అయితే నదికి నుండి వంతెన ఎత్తు $3m$ అయితే నది వెడల్పు కనుగొనండి?

సాధన: చిత్రం 9.10 చూపిన విధంగా A, B నదికి ఇరుపుల రెండు బ్యాంక్‌లు ఉన్నాయి. P అనేది వంతెన ఎత్తు $3m$ *i.e.* $DP = 3cm$ మనము ఆసక్తిగా నిర్ధారించవచ్చును నది వెడల్పు ΔAPB లో AB భుజం యొక్క పొడవు.



చిత్రం 9.10

$$AB = AD + DB$$

లంబకోణం ΔAPD నందు $\angle A = 30^0$

$$\tan 30^0 = \frac{PD}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ లేదా } AD = 3\sqrt{3}m$$

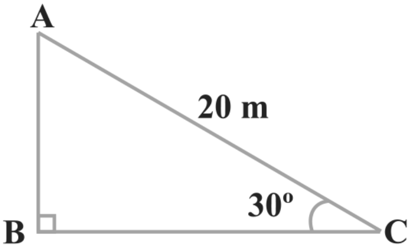
అదే విధంగా $\Delta PBD = \angle B = 45^0$ $BD = PD = 3m$

$$AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3\left(1+\sqrt{3}\right)m$$

కావున నది వెడల్పు $= 3\left(\sqrt{3}+1\right)m$

అభ్యాసం 9.1

1. ఒక సర్కస్‌లోని ఆర్టిస్ట్ పొడవైన స్తంభంనుండిలాగి నేలకు కట్టిన దారం పొడవు $20m$ దానిమీదనడుస్తున్నాడు. నేలకు దారంకు మధ్య కోణం 30^0 అయితే స్తంభం ఎత్తును కనుగొనండి (చిత్రం 9.11)?



చిత్రం 9.11

2. ఒక చెట్టు తుపానువల్ల సగంభాగం విరిగిపోయి. నేలపై ఎడి నేలను తాకుతుంది. ఆ భాగం భూమితో చేసేకోణం 30^0 చెట్టు అడుగుభాగం మరియు విరిగి పడిన చెట్టుభూమినితాకుతున్నస్థళానికి మధ్య దూరం $8m$ అయితే, చెట్టు ఎత్తును కనుగొనండి?
3. ఒక కాంట్రాక్టర్ పిల్లల పార్కులో రెండు జారుడు బల్లలు నిర్మించదలిచినాడు 5 సంవత్సరాల వయస్సు లోపల గలపిల్లలకు $1.5m$ ఎత్తుగల జారుడు బల్ల మరియు ఆ జారుడు బల్ల నేలకు వాలుగా చేసే కోణం 30^0 పెద్దపిల్లలు $3m$ ఎత్తు గల జారుడుబల్ల నేలమీద చేసే కోణం 60^0 ఆ రెండు సంధర్భాలలో జారుడు బల్ల పొడవును కనుగొనండి?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. టవర్ పాదంనుండి $30m$ దూరంలో నేల మీద ఒక బిందువునుండి టవర్ యొక్క పైభాగంను చూడగా ఏర్పడే ఊర్ధ్వకోణం 30^0 అయితే టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొంనండి?

5. నేలకు పైభాగాన $60m$ దూరంలో ఒక గాలిపటం ఎగురుతుంది. తాత్కాలికంగా దానియొక్క దారాన్ని నేలకు ఒక బిందువు వద్ద బిగించడియుండును నేలకు ఏటవాలుగా ఆ దారంచేసేకోణం 60^0 దారం పొడవును కనుగొనండి? ఆ దారం యొక్క మందాన్ని ఊహించండి?

6. $30m$ పొడవుగల భవనానికి కొంత దూరంలో $1.5m$ ఎత్తుగల ఒక అబ్బాయి. నిలబడివున్నాడు అతడు భవనంపై నడుస్తూ వుండగా అతనిదృష్టి రేఖ పరంగా భవనానికి పై భాగానికి చేసే ఊర్ధ్వకోణం 30^0 నుం డి 60^0 పెరిగింది. అతడు భవనం వైపుకు ఎంతదూరం నడిచినాడో కనుగొనండి?

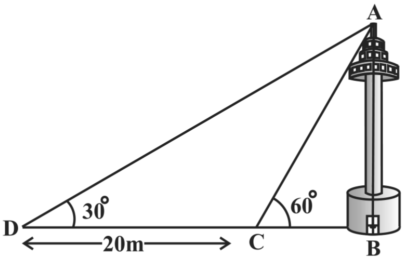
7. నేలమీద ఒక బిందువు వద్ద $20m$ పొడవుగల ఒక భవనం దానిపై ఒక విద్యుత్ టవర్ బిగించబడియున్నది. ఆటవర్ క్రింది భాగం, పైభాగం నేలపై బిందువు వద్ద చేసే ఊర్ధ్వ కోణాలు 45^0 మరియు 60^0 ఆటవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి?

8. $1.6m$ పొడవుగల ఒక స్థూపం అది రహదారి పైభాగానవుంచబడింది. స్థూపం పై భాగంనుండి నేలమీద బిందువుకు చేసే ఊర్ధ్వకోణం 60^0 అదే బిందువుకు రహదారి పైభాగానికి చేసే ఊర్ధ్వకోణం 45^0 అయితే రహదారి ఎత్తును కనుగొనండి?

9. భవనం పైభాగం నుండి టవర్ క్రింది భాగానికి ఊర్ధ్వకోణం 30^0 మరియు భవనం అడుగు భాగంనుండి టవర్ పైభాగంగానికి ఊర్ధ్వకోణం 60^0 అయితే టవర్ ఎత్తు $50m$ భవనం ఎత్తును కనుగొనండి?

10. రోడ్డుకు ఇరువైపుల వ్యతిరేక దిశలో రెండు స్తంభాలు వున్నాయి (సమానంగా) ఆరోడ్డు వద్ద ఆ రెండిం టి మధ్యదూరం $80m$ వెడల్పు వుంటుంది. ఆ స్తంభాల పైభాగంను చేసే ఊర్ధ్వకోణం 60^0 మరియు 30^0 ఆరెండు స్తంభాలు ఎత్తు వాటి మధ్యదూరంను కనుగొనండి?

11. నది కాలువకు అడ్డంగా ఒక T.V. టవర్ నిలబెట్టారు. ఆ టవర్ వ్యతిరేకంగా ఒక బిందువుకు (నేలకు) పైభాగం చేసే ఊర్ధ్వ కోణం 60^0 మరియు $20m$ దూరంలో ఇంకొక ఊర్ధ్వ కోణం 30^0 (అడుగుబాగం టవర్ కు) నది యొక్క కాలువ వెడల్పు మరియు టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి?



చిత్రం 9.12

12. $7m$ పొడవుగల భవనంపైభాగాన కేబుల్ టవర్ కలదు. ఆ టవర్ పైభాగాన్ని ఊర్ధ్వకోణం 60^0 మరియు నిమ్నకోణం 45^0 పాదభాగానికి టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి?

13. సముద్రము పైభాగం నుండి గమనించగా $75m$ ఎత్తుగల లైట్ హౌస్ పైభాగంలో చేసే ఊర్ధ్వ కోణాలు 30^0 మరియు 45^0. లైట్ హౌస్‌కు ఒక వైపున ఒక దాని వెనుక మరొకటి పడవలు ఉన్నాయి. రెండుపడవల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

14. 1.2m ఎత్తుగల బాలిక క్షితిజ రేఖలో 88.2m ఎత్తులో రెండు బెటాన్లులను గాలిలో తేలుతుండటాన్ని గుర్తించింది. ఒక సమయంలో బాలిక కంటితో బెటాన్‌తో ఏర్పడిన ఉన్నత కోణం 60° కొంతసమయం తర్వాత ఉన్నత కొణం 30° అవుతుంది (చిత్రం 9.13ను చూడండి) ఈ సమయపు అంతరంలో బెలూను ప్రయాణించిన దూరయెంత?

15. ఒక నేరు రహదారి గోపురం పాదానికి దారిఅయింది. గోపురం మీద నిలబడిన ఒక వ్యక్తి ఏర రూప వడిలో వస్తున్న ఒక కారును చూచాడు. కారు పతనకోణం 30° 6సెకెన్ల తర్వాత కారు పతనకోణం 60° అవుతుంది ఈ బిందువు నుండి గోపురం పాదానికి రావడానికి తీసుకొను సమయయెంత?

16. ఒక గోపుర పాదంనుండి 4m మరియు 9m దూరంలో ఒకే సరళరేఖయొక్క పై బిందువుల పై బిందువునుండి గోపురం పై తుదికి ఉన్నతకోణాలు పరస్పరం పూరకాలెయ్యాయి. గోపురం ఎత్తు 6m గా సాధించండి.

9.2 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో కింది అంశాలను నేర్చుకొన్నారు.

1. (i) దృష్టి రేఖ వీక్షకుని కంటినుండి వీక్షకుడు గమనిస్తున్న వస్తువు మీద ఒక బిందువు కలిసేటట్లు గీచిన రేఖ అవుతుంది.

   (ii) వీక్షిస్తున్న ఒక వస్తువు క్షితిజ స్థాయి నుండి పై నున్నచఫ అనగా ఒక వస్తువును చూడటానికి మన తలను పైకి ఎత్తిన సందర్భంలో దృష్టి రేఖ మరియు అడ్డ రేఖల మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని, వీక్షిస్తున్న బిందువుయొక్క ఉన్నత కోణం అంటారు.

   (iii) వీక్షిస్తున్న ఒక బిందువు క్షితిజస్థాయికి కిందివున్నచో అనగా ఒక వస్తువును చూడటానికి మనతలను కిందికి చూసిన సందర్భంలో దృష్టి రేఖ మరియు అడ్డ రేఖల మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని వీక్షిస్తున్న బిందువు యొక్క పతనకోణం అంటారు.

2. ఒక వస్తువు ఎత్తు మరియు పొడవు లేదా రెండు వస్తువుల మధ్యగల దూరాన్ని త్రికోణయితి నిష్పత్తుల సహాయంతో కనుగొనవచ్చు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

R6T2W4

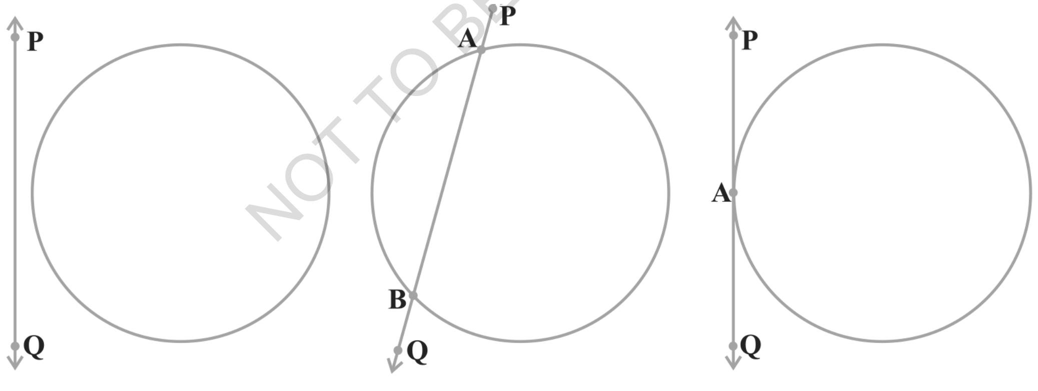
10 వృత్తాలు

10.1 పరిచయం

వృత్తం అనగా ఒక సమతలంలో స్థిర బిందువు (వృత్త కేంద్రం) నుండి, స్థిర అంతరంలో (వ్యాసార్థం)గల బిందువుల సమూహం అని 9 వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. వృత్తానికి సంబంధించిన పదాలైన జ్యా, వృత్తఖండం, వ్యాసార్థాంతర ఖండం మరియు చాపం మొదలగునవి నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు ఒక సమతలంలో వృత్తం మరియు ఒక రేఖను ఇచ్చినప్పుడు ఏర్పడు వివిధ సన్నివేశాలను పరిశీలిద్దాం

ఇప్పుడు ఒక వృత్తం మరియు రేఖ PQ పరిగణిద్దాం. చిత్రం 10.1లో ఇచ్చినట్లుగా మూడు అవకాశాలను మనం పొందవచ్చు.

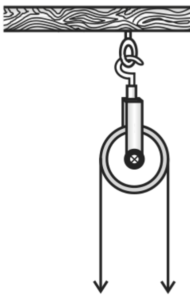
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



చిత్రం 10.1

చిత్రం 10.1(i) లో PQ అను రేఖ మరియు వృత్తానికి ఎటువంటి సామాన్య బిందువులేదు. ఈ ప్రకరణలో వృత్తానికి సంబంధించి PQను **ఖండించని రేఖగా** పిలుస్తాం. చిత్రం 10.1(ii) లో PQ రేఖ మరియు వృత్తానికి రెండు సామాన్య బిందువులు A మరియు Bలు కలిగియున్నాయి. ఈ ప్రకరణలో PQ రేఖను **వృత్త ఖండన రేఖ** అంటారు. చిత్రం 10.1(iii) లో PQ రేఖ మరియు వృత్తం ఒకే ఒక సామాన్య బిందువు Aను కల్గియుంది. ఈ ప్రకరణలో PQ రేఖ వృత్తానికి **స్పర్శ రేఖ** అంటారు.

బావినుండి నుండి నీటిని తోడటానికి, బయటకు తీయడానికి, బావిమీద అమర్చిన కప్పి / గిలక మీరు చూసియుండవచ్చు. చిత్రం 10.2ను చూడండి. అందులో కప్పి రెండు వైపుల గల పగ్గాన్ని కిరణం అని పరిగణించినప్పుడు అది వృత్తాన్ని చూపు కప్పీకి స్పర్శరేఖలు అవుతాయి.



చిత్రం 10.2

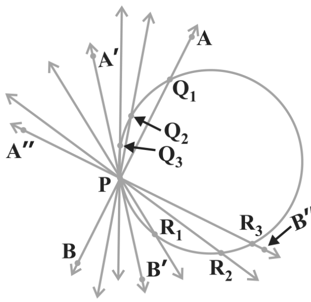
పైన ఇచ్చిన రకాలను మినహాయించి వృత్తానికి సంబంధించి రేఖను వేరే స్థానంలో ఉంచడానికి సాధ్యపడుతుందా? వేరే ఏ స్థానంలో వృత్తానికి సంబంధించి రేఖను ఉంచడానికి అవకాశంలేదని మీరు గమనించవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో వృత్త స్పర్శరేఖలు ఉండుటను మరియు వాటి లక్షణాలను నేర్చుకుందాం.

10.2 ఒక వృత్తానికి స్పర్శ రేఖలు

వెనుకటి విభాగంలో **వృత్తాన్ని ఒకే ఒక బిందువులో ఖండించు రేఖను స్పర్శరేఖ** అని చూశారు. ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖ ఉండుటను అర్థం చేసుకోవడానికి కింది కార్యాచరణాలను చేద్దాం.

కార్యాచరణం 1: ఒక వృత్తాకార తంతిని తీసుకోండి. నేరు తంతి ABలను P బిందువులో వృత్తాకార తంతికి కలపండి. అది సమతలంలో P బిందువుమీద భ్రమించునట్లు ఉండాలి. ఇప్పుడు దీనిని బల్లమీద ఉంచి P బిందువు మీద AB తంతిని మృధువుగా త్రిప్పండి నేరు తంతి యొక్క వివిధ స్థానాలను పొందండి. (చిత్రం 10.3(i) చూడండి)

నేరు తంతి వృత్తాకార తంతిని వివిధ స్థానాలలో అనగా, P మరియు మరొక బిందువు Q లేదా Q_2 లేదా Q_3 మొదలగు బిందువులలో ఖండిస్తుంది. ఒక స్థానంలో తంతి వృత్తాన్ని ఒకే ఒక బిందువు Pలో మాత్రమే ఖండిస్తుంది. (AB యొక్క A'B' స్థానాలను గమనించండి:) అది వృత్తానికి P బిందువులో స్పర్శరేఖ ఉండుటను చూపుతున్నది.



చిత్రం 10.3 (i)

భ్రమించడాన్ని కొనసాగించినప్పుడు, AB యొక్క ఇతర స్థానాలు వృత్తాన్ని P మరియు మరొక బిందువు R_1 లేదా R_2 మొదలగువాటిలో ఖండిస్తుంది. అందువలన **వృత్తానికి ఒక బిందువులో ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ ఉండుటను** గమనించవచ్చు.

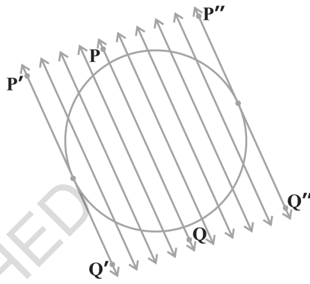
ఈ కార్యాచరణాలు చేయునప్పుడు AB యొక్క స్థానం A'B' వైపుకు తిరుగుచున్నచో AB రేఖయొక్క సామాన్య బిందువు అనగా, Q మరియు వృత్తం క్రమేణ సామాన్య బిందువు P కి దగ్గరవుతూ వస్తుంది.

* స్పర్శరేఖ అనగా ఆంగ్ల భాషలో 'Tangent' ఈ పదం లాటిన్ భాషలోని 'tangere' అను పదంనుండి వచ్చింది. దీని అర్థం స్పర్శించు అని అర్థం. దీనిని డ్యానిష్‌కు చెందిన గణిత నిపుణుడు థామస్ ఫినికె 1583లో మొదటిసారి పరిచయం చేశాడు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అంతిమంగా A"B" యొక్క స్థానాలైన A'B' లో P బిందువు ఐక్యమగుతుంది. ABలను P మీద కుడివైపుకు భ్రమింపజేసినప్పుడు / త్రిప్పినప్పుడు ఏమవుతుంది? అనుటను గమనించండి. సామాన్య బిందువు R_3 క్రమేణ P బిందువుకు దగ్గరవుతూ అంతిమంగా P బిందువులో ఐక్యమవుతుంది. అందువలన మనం ఇక్కడ గమనించవలసినది ఏమనగా, **ఒక ఖండన రేఖ అనురూపమైన జ్యా యొక్క రెండు అంత్య బిందువులు ఐక్యమయినప్పుడు లభించు ఖండన రేఖ యొక్క విశేష ప్రకరణమే వృత్త** స్పర్శరేఖ.

కార్యాచరణం 2: ఒక కాగితం మీద వృత్తం మరియు PQ ఖండన రేఖ గీయండి. ఖండనరేఖ రెండువైపుల, ఖండన రేఖకు సమాంతరంగా ఉండునట్లు రేఖలు గీయండి. కొన్ని దశల తరువాత రేఖలనుండి జ్యా పొడవు క్రమంగా తక్కువ కావడాన్ని కనుగొనగలరు. అనగా, ఖండన రేఖయొక్క రెండు బిందువులు మరియు వృత్తం దగ్గర మళ్ళీ దగ్గరవుతుంది. (చిత్రం 10.3(ii) చూడండి). ఒక ప్రకరణలో ఖండన రేఖ యొక్క ఒక భాగంలో జ్యా పొడవు సున్నా అవుతుంది. మరొక ప్రకరణలో ఖండన రేఖయొక్క మరొక భాగంలో పొడవు సున్నా అవుతుంది. P'Q' ఖండన రేఖ మరియు P"Q" స్థానాలను గమనించండి. (చిత్రం 10.3 (ii) చూడండి) అవి ఇచ్చిన PQ ఖండన రేఖకు సమాంతరమైన స్పర్శరేఖలు అవుతాయి. అది ఒక ఖండనరేఖ రెండు కంటే ఎక్కువ స్పర్శరేఖలు సమాంతరంగా ఉండవు అని తెలుసుకోవడానికి సహాయపడుతుంది.

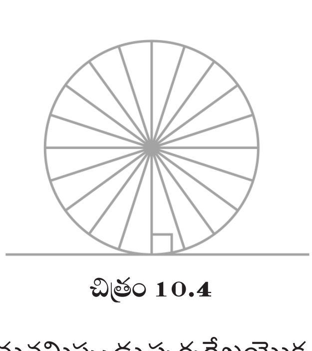


చిత్రం 10.3 (ii)

కార్యాచరణం 1లో మనం ఇదివరకే గమనించిన అంశాలను ఈ కార్యాచరణం స్థాపిస్తుంది. అనగా, ఖండనరేఖకు అనురూపమైన జ్యా అంత్య బిందువులు ఐక్యమయినప్పుడు లభించు ఖండనరేఖే స్పర్శరేఖ.

స్పర్శరేఖ మరియు వృత్తానికిగల సామాన్య బిందువులను **స్పర్శ బిందువులు** అని (చిత్రం 10.3(ii) లోని A బిందువు) మరియు స్పర్శరేఖ వృత్తాన్ని ఆ సామాన్య బిందువులో స్పర్శిస్తుంది.

ఇప్పుడు మీ చుట్టూ చూడండి. మీ బైసైకిల్ లేదా (ప్రయోగిస్తున్న) బండిని చూశారా? వాటి చక్రాలు గమనించండి. చక్రంలోని కడ్డీలన్నియు వాటి వ్యాసార్థపు నేరులో ఉంటుంది. ఇప్పుడు చక్రం చలనాన్ని నేలతో పోల్చండి. వాటి స్థానాన్ని గుర్తించండి. మీరు ఎప్పుడైనా స్పర్శరేఖను చూశారా? (చిత్రం 10.4 చూడండి). వాస్తవంగా, చక్రం ప్రయాణిస్తున్న రేఖ యొక్క నేరు, వృత్తాన్ని చూపు చక్రం యొక్క స్పర్శరేఖ అవుతుంది ప్రతిస్థానంలో నేలమీదగల స్పర్శబిందువు ద్వారా గీచినవ్యాసార్థం స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉండునట్లు చూపుతుందని గమనించండి. (చిత్రం 10.4 చూడండి) మనమిప్పుడు స్పర్శరేఖయొక్క ఈ లక్షణాన్ని సాధిద్దాం.

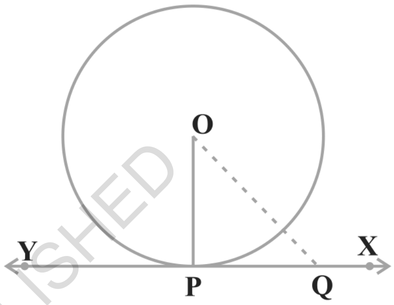

చిత్రం 10.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సిద్ధాంతం 10.1: వృత్తం మీదగల ఏదైనా బిందువులో గీచిన స్పర్శరేఖ, స్పర్శ బిందువులో గీచిన వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుంది.

నిరూపణ: O కేంద్రం మరియు P బిందువులో XY స్పర్శరేఖగా ఉండునట్లు ఒక వృత్తం ఇవ్వబడింది. మనము, OP XYకు లంబంగా ఉందని సాధించాల్సి ఉంది. Pని మినహాయించి XY మీద మరొక బిందువు Q తీసుకోండి. మరియు OQ కలపండి (చిత్రం 10.5 చూడండి).

Q బిందువు వృత్తానికి వెలుపలి భాగంలో ఉండాలి. (ఎందుకు? Q బిందువు వృత్తానికి లోపలి భాగంలో ఉన్నచో, XY వృత్తానికి ఖండన రేఖ అవుతుందే తప్ప, వృత్తానికి స్పర్శరేఖ కాదు)అందువలన OQ అది వృత్తపు వ్యాసార్థం OP కంటే పొడవుగా ఉంటుంది. అనగా OQ > OP



చిత్రం 10.5

P బిందువును మినహాయించి, XY పైగల బిందువులన్నీ అది అన్వయించడం వలన O బిందువునుండి XY మీదగల ఇతర బిందువులు గల దూరం కంటే OP కనిష్ట పొడవును కలిగియుంది. అందువలన OP అనునది XY కి లంబంగా ఉంటుంది. (సిద్ధాంతం A1.7లో చూపినట్లుగా)

గమనించండి:

1. పై సిద్ధాంతం నుండి, వృత్తం మీదగల ఏదైనా ఒక బిందువులో ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయవచ్చునని తీర్మానించవచ్చు.
2. స్పర్శబిందువులో వ్యాసార్థం కలిగియున్న రేఖను కొన్ని సార్లు వృత్తంలోని ఒక బిందువు యొక్క 'లంబకం' (normal) అని అంటారు.

అభ్యాసం 10.1

1. వృత్తంలో ఎన్ని స్పర్శరేఖలు కలిగియుంటాయి?
2. ఖాళీలను పూరించండి.

   (i) వృత్తాన్ని ఒక స్పర్శరేఖ ఖండించు బిందువులు _______________.

   (ii) వృత్తాన్ని రెండు బిందువులలో ఖండించు రేఖ _______________.

   (iii) ఒక వృత్తం కల్గియున్న గరిష్ట సమాంతర స్పర్శరేఖలు _______________.

   (iv) వృత్త స్పర్శరేఖలు మరియు వృత్తం కల్గియున్న సామాన్య బిందువు _______________.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

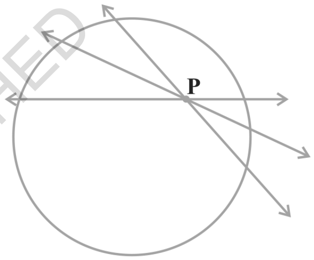
3. 5cm వ్యాసార్థం కలగియున్న వృత్తానికి P బిందువులో గీచిన స్పర్శరేఖ PQ, అది వృత్తం కేంద్రం O నుండి గీచిన రేఖను Q బిందువులో ఖండిస్తుంది. OQ = 12cm అయితే PQ పొడవు
(a) 12 cm (b) 13 cm (c) 8.5 cm (d) $\sqrt{119}$ cm

4. వృత్తం గీయండి. ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతరంగా ఉండునట్లు ఒక రేఖ యొక్క స్పర్శరేఖ మరొక రేఖ ఖండన రేఖ ఉండునట్లు రెండు రేఖలుగీయండి.

10.3 ఒక బిందువునుండి వృత్తానికి పైనగల బిందువుకు గీయదగు స్పర్శరేఖల సంఖ్య.

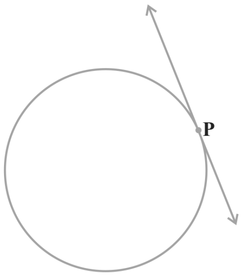
ఒక బిందువునుండి వృత్తం మీదగల బిందువుకు గీచిన స్పర్శరేఖలను కల్పించుకోవడానికి కింది ఒక కార్యాచరణం చేద్దాం.

కార్యాచరణం 3: ఒక కాగితం మీద వృత్తం గీయండి. దాని లోపలి భాగంలో P బిందువును పరిగణించండి. మీరు ఈ బిందువు ద్వారా స్పర్శరేఖ గీయవచ్చా? ఈ బిందువు ద్వారా గీచిన రేఖలన్నీ వృత్తాన్ని రెండు బిందువులలో ఖండించడాన్ని గమనిస్తారు. అందువలన వృత్తం లోపలి బిందువునుండి. వృత్తానికి ఎటువంటి స్పర్శరేఖలను గీయడానికి సాధ్యం కాదు. (చిత్రం 10.6(i) చూడండి)



(i)

ఇప్పుడు వృత్తం మీద ఉన్నట్లుగా P బిందువును తీసుకోండి. ఈ విధమైన వృత్తానికి ఒకే ఒక స్పర్శరేఖ ఉంటుంది అని మీరిదివరకే గమనించారు.



(ii)

అంతిమంగా, P బిందువును వృత్తం వెలుపల గుర్తించండి. ఆ బిందువునుండి వృత్త స్పర్శరేఖలను గీయండి మీరు ఏమేమి గమనించారు? ఈ బిందువునుండి నిర్దిష్టంగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చునని కనుగొంటారు.

పై సత్యాంశాలన్నీ ఈ కిందివిధంగా సారాంశీకరిద్దాం.

1 వ ప్రకరణ: వృత్తంలోపలి బిందువు ద్వారా వృత్తానికి స్పర్శరేఖ గీయడానికి సాధ్యంకాదు.

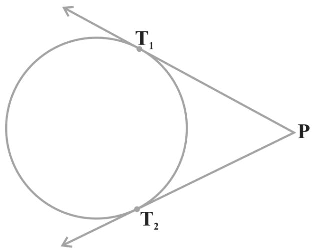
2 వ ప్రకరణ: వృత్తం మీదగల ఒక బిందువులో వృత్తానికి ఒకేఒక స్పర్శరేఖ మాత్రమే గీయవచ్చు.

3 వ ప్రకరణ: వృత్తానికి బాహ్య బిందువునుండి నిర్దిష్టంగా రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చు.

చిత్రం 10.6 (iii) PT_1 మరియు PT_2 స్పర్శరేఖల స్పర్శ బిందువులు వరుసగా T_1 మరియు T_2 అవుతాయి.

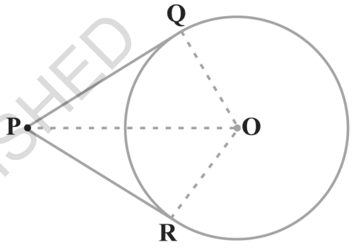
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

బాహ్య బిందువు P మరియు వృత్తంయొక్క స్పర్శ బిందువులను కలుపు స్పర్శరేఖ యొక్క రేఖా ఖండం పొడవును P బిందువునుండి వృత్తానికి గీచిన **స్పర్శరేఖ పొడవు** అంటారు. చిత్రం 10.6 (iii)లో PT_1 మరియు PT_2 లు వృత్తానికి P బిందువు నుండి గీచిన స్పర్శరేఖలు అవుతాయని గమనించండి. PT_1 మరియు PT_2 లు రెండూ ఒక సామాన్య లక్షణం కలిగియుంటాయి. PT_1 మరియు PT_2 పొడవులను కొలవండి. అవి సమానంగా ఉన్నాయా? నిజంగా అవి ఎల్లప్పుడూ సమానంగా ఉంటాయా? మనం ఈ సత్యాంశానికి సాధనను ఈ కింది సిద్ధాంతాన్నిద్దాం.



(iii)
చిత్రం 10.6

సిద్ధాంతం 10.2: బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖలు పొడవు సమానంగా ఉంటుంది.



చిత్రం 10.7

నిరూపణ 3: 'O' వృత్తకేంద్రం మరియు 'P' బాహ్యబిందువు PQ మరియు PRలు బాహ్య బిందువు P నుండి గీచిన సర్శరేఖలు అవుతాయి. మనం PQ = PR గా సాధన చేయాల్సివుంది.

దీనిని సాధించడానికి OP, OQ మరియు OR లను కలపండి. అప్పుడు, $\angle OQP$ మరియు $\angle ORP$ లు లంబకోణాలు. ఎందుకనగా ఈ కోణాలు వృత్తపు వ్యాసార్థం మరియు స్పర్శరేఖల మధ్యగల కోణాలు మరియు సిద్ధాంతం 10.1 నుండి అవి లంబకోణాలు అవుతాయి.

ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజం OQP మరియు ORP లలో

	OQ = OR	(ఒకే వృత్తపు వ్యాసార్థాలు)
	OP = OP	(సామాన్య భుజం)
అందువలన	$\Delta OQP = \Delta ORP$	(లం. వి. భా) (RHS)
దీనివలన	PQ = PR	(స.త్రి అ.భా) (CPCT)

గమనించండి:

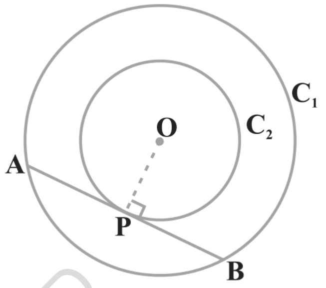
1. ఈ సిద్ధాంతాన్ని పైథాగరస్ సిద్ధాంతం సహాయంతో ఈ కిందివిధంగా సాధించవచ్చు.
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ ($\therefore OQ = OR$)
   దీనివలన PQ = PR

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. $\angle OPQ = \angle OPR$ అనుదానిని గమనించండి. అందువలన OP అనునది $\angle QPR$ కోణార్ధకరేఖ అవుతుంది. అనగా, రెండు స్పర్శరేఖల మధ్యగల కోణం యొక్క కోనార్ధకరేఖమీద వృత్తపు కేంద్రం ఉంటుంది.

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1: రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాలలో పెద్ద వృత్తపు జ్యా చిన్న వృత్తాన్ని స్పర్శించినచో 'జ్యా' స్పర్శ బిందువులో ద్విభాగమవుతుంది అని సాధించం డి.



చిత్రం 10.8

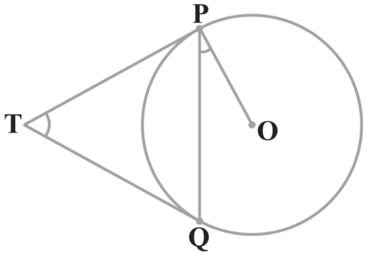
సాధన: మనకు O వృత్తం కేంద్రం కలిగియున్న C_1 మరియు C_2 రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాలనిచ్చింది. పెద్ద వృత్తం C_1 యొక్క జ్యా AB చిన్న వృత్తం C_2ను P బిందువులో స్పర్శిస్తుంది. మనం AP = BP గా సాధించాల్సివుంది.

ఇపుడు మనం OPని కలుపుదాం. అప్పుడు AB అనునది C_2కు P బిందువులో స్పర్శరేఖ అవుతుంది. OP అనునది దాని వ్యాసార్థం అవుతుంది. అందువలన సిద్ధాంతం 10.1 నుండి అనగా, $OP \perp AB$.

ఇప్పుడు AB అయనది C వృత్తం యొక్క 'జ్యా' మరియు $OP \perp AB$ వృత్తం కేంద్రం నుండి 'జ్యా' కు గీచిన 'జ్యా'ను ఖండిస్తుంది. అందువలన OP అనునది జా ABని ద్విభాగిస్తుంది.

అనగా, AP = BP

ఉదాహరణ 2: O వృత్త కేంద్రం కల్గియున్న వృత్తానికి బాహ్యాబిందువు T నుండి TP మరియు TQ రెండు స్పర్శరేఖలను గీయబడ్డాయి. $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$ అని సాధించండి.



చిత్రం 10.9

సాధన: O వృత్త కేంద్రంగా ఉండునట్లు ఒక వృత్తం, బాహ్య బిందువు T మరియు TP అలాగే TQ స్పర్శ బిందువు. P మరియు Qలలో గీచిన రెండు స్పర్శరేఖలను మనం $\angle PTQ = Q$ అయివుండనీయండి.
ఇప్పుడు సిద్ధాంతం 10.2 నుండి, TP = TQ అందువలన TPQ ఒక సమ ద్విబాహు త్రిభుజం.

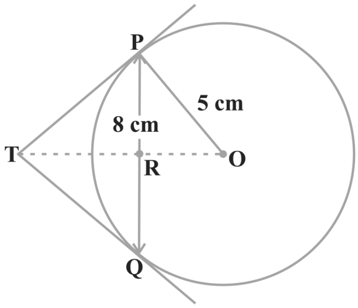
$\therefore \quad \angle TPQ = \angle PQR = \frac{1}{2}(180 - \theta) = 900 - \frac{1}{2}\theta$

$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2} \angle PTQ$

దీనివలన $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 3: 5cm వ్యాసార్ధంగల ఒక వృత్తంలో వ్యాసార్ధం PQ పొడవు 8cm P మరియు Q బిందువులోని స్పర్శకాలు (intersect) T బిందువులో ఖండిస్తాయి. (చిత్రం 10.10 చూడండి) TP యొక్క పొడవును కనుగొనండి.



చిత్రం **10.10**

సాధన: OT కలపండి అది PQ రేఖను R బిందువులో ఖండంచనీయండి. అప్పుడు TPQ ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు TO రేఖ ∠PTQ యొక్క కోణార్థక రేఖ. అందువలన OT ⊥ PQ అందువలన OT రేఖ PQను ఖండిస్తుంది. దీనివలన PR = RQ = 4cm

అదేవిధంగా $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2 cm} = 3cm$

ఇప్పుడు $\angle TPR + \angle RPO = 900 = \angle TPR + \angle PTR$ (ఎందుకు?)

అందువలన $\angle PRO = \angle PTR$

అందువలన లంబకోణ త్రిభుజం TRP అనునది లంబకోణ త్రిభుజం PROకు సమరూపమవుతుంది.

($\therefore$ కోణం – కోణ నిర్ధారక లక్షణం)

దీనివలన $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$ అనగా $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ లేదా $TP = \frac{20}{3}$ cm

గమనించండి: TP ని పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ద్వారా కిందివిధంగా కనుగొనవచ్చు.

TP = x మరియు TR = y అనుకోండి.

అప్పుడు $x^2 = y^2 + 16$ [Δ PRT నుండి] (1)

$x^2 = 5^2 + (y + 3)$ [Δ OPT నుండి] (2)

సమీకరణం 1 ని 2 నుండి తీసివేసినప్పుడు

$25 = 6y - 7$ లేదా $y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

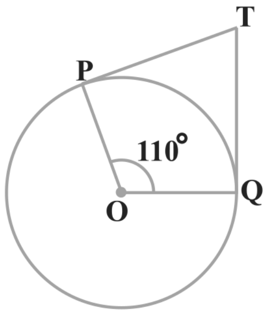
అందువలన $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9}$ [(1) నుండి]

లేదా $x = \frac{20}{3} cm$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 10.2

1 నుండి 3 ప్రశ్న వరకు సరైన ఎంపికను ఎన్నుకొని, జవాబును సమర్థించండి.



చిత్రం 10.11

1. ఒక బిందువు Q నుండి వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖ పొడవు 24 cm మరియు వృత్తకేంద్రం అలాగే Q బిందువు మధ్య గల దూరం 25 cm అయితే, వృత్త వ్యాసార్థం.

   (a) 7 cm (b) 12 cm

   (c) 15 cm (d) 24.5 cm

2. చిత్రం 10.11లో $\angle POQ = 110^0$ అయివుండునట్లు 'O' కేంద్రంగల వృత్తానికి TP మరియు TQ స్పర్శరేఖలు. అలాగయితే, $\angle PTQ$ కొలత.

   (a) 60^0 (b) 70^0

   (c) 80^0 (d) 90^0

3. 'O' వృత్తకేంద్రంగల ఒక వృత్తానికి P బిందువు నుండి గీచిన స్పర్శరేఖలైన PA మరియు PBల మధ్యగల కోణం 80^0 అయినచో, $\angle POA$ కొలత.

   (a) 50^0 (b) 60^0

   (c) 70^0 (d) 80^0

4. ఒక వృత్తానికి వ్యాసపు అంత్య బిందువులో గీచిన స్పర్శ రేఖకు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయని సాధించండి.

5. స్పర్శ బిందువులో స్పర్శరేఖ గీచిన లంబం వృత్త కేంద్రం ద్వారా సాగిపోతుంది. అని సాధించండి.

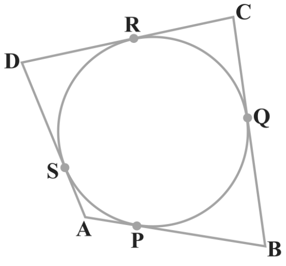
6. వృత్తి కేంద్రం నుండి 5cm దూరంలోగల A బిందువునుండి గీచిన స్పర్శరేఖ పొడవు 4cm వృత్త వ్యాసార్థం పొడవు కనుగొనండి.

7. రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాల వ్యాసార్థాలు 5cm మరియు 3cm చిన్న వృత్తానికి స్పర్శించునట్లు పెద్ద వృత్తంలో గీచిన జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

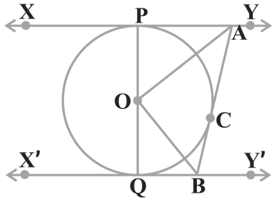
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. ABCD చతుర్భుజంలో వృత్తం అంతస్థమైంది. (చిత్రం 10.12 చూడండి).

AB + CD = AD + BC గా సాధించండి.



చిత్రం 10.12



చిత్రం 10.13

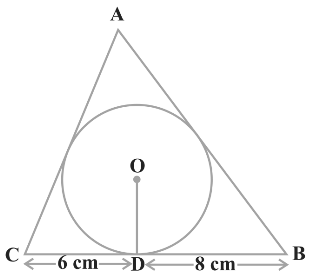
9. చిత్రం 10.3లో 'O' వృత్త కేంద్రం కలిగియున్న ఒక వృత్తానికి XY మరియు XY సమాంతర స్పర్శ రేఖలు మరియు స్పర్శ బిందువు C లో గీచిన మరొక స్పర్శరేఖ AB మరియు XY A బిందువులో మరియు XY ను B బిందువులో ఖండిస్తుంది అలాగయితే $\angle AOB = 90^0$ గా సాధించండి.

10. బాహ్య బిందువు నుండి ఒక వృత్తానికి గీచిన రెండు స్పర్శరేఖల మధ్యగల కోణం మరియు స్పర్శ బిందువులను వృత్తకేంద్రానికి కలుపునట్లు గీచిన రేఖాఖండాల మధ్యగల కోణాలు పరిపూరక కోణాలు అవుతాయని సాధించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో వృత్తం అంతస్తమైనప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం వజ్రాకృతి అవుతుందని సాధించండి.

12. 4cm వ్యాసార్థంగల వృత్తాన్ని అవృతం చేయడానికి ΔABC ని నిర్మాణం చేసింది. అందులో స్పర్శబిందువు D అనునది. BC లను BD మరియు DC వరుసగా 8cm మరియు 6cm ఉండునట్లు విభజించింది. (చిత్రం 10.14 చూడండి) AB మరియు AC భుజాల పొడవును కనుగొనండి.



చిత్రం 10.14

13. ఒక చతుర్భుజంలో అంతస్థమైన వృత్త కేంద్రంలో చతుర్భుజం యొక్క అభిముఖ భుజాలతో ఏర్పడిన కోణాలు పరిపూరకాలు అవుతాయని సాధించండి.

10.4 సారాంశం

మీరు ఈ అధ్యాయంలో కింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

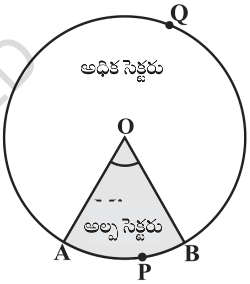
1. ఒక వృత్తం యొక్క స్పర్శరేఖల అర్థం.
2. ఒక వృత్తం యొక్క స్పర్శరేఖ స్పర్శ బిందువులో గీచిన వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుంది.
3. ఒక బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తానికి గీచిన రెండు స్పర్శరేఖలు సమానంగా ఉంటాయి.

వృత్తాలకు సంబంధించిన వైశాల్యాలు 11

C7E5C5

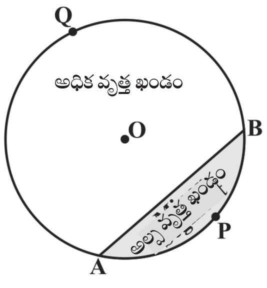
11.1 సెక్టరు (వ్యాసార్థాంతరం) మరియు వృత్త ఖండం వైశాల్యాలు:

కింది తరగతులలో సెక్టరు మరియు వృత్తఖండాల గురించి నేర్చుకున్నారు. ఒక చాపము మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్త కేంద్రంలో కలిపే వ్యాసార్థాల చేత ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని సెక్టరు అంటారు. మరియు చాపం చివరి బిందువులను ఒక జ్యాతో కలిపితే ఆ భాగాన్ని వృత్త ఖండం అంటారు. చిత్రం 11.1లో ఛాయా భాగం OAPB వలయం 'O' వృత్తకేంద్రాన్ని గల ఒక సెక్టరు. $\angle AOB$ సెక్టరుకోణం ఈ చిత్రంలో ఛాయచేయని భాగం OAQB కూడా సెక్టరు. అయినదానిని గమనించండి. భాగాలు ఖచ్చితంగా గుర్తించగలము కనుక OAPB వలయాన్ని అల్ప సెక్టరు అని OAQB ని అధిక సెక్టరు అని అంటారు. అధిక సెక్టరు కోణం $360^0 - \angle AOB$ అని చూడవచ్చు.



చిత్రం 11.1

చిత్రం 11.2లో 'O' కేంద్రంగా గల వృత్త జ్యా AB అయినది కావున ఛాయ చేసిన భాగం APB వృత్తఖండం. మీరు AB జ్యానుండి. ఏర్పడిన ఛాయ చేయని మరొక భాగం AQB మరొక వృత్త ఖండం అని గమనించవచ్చు. భాగాలు ఖచ్చితంగా కనిపిస్తున్నందున. AQBని అల్ప వృత్త ఖండమని మరియు AQBని అధిక వృత్తఖండమని అంటారు.

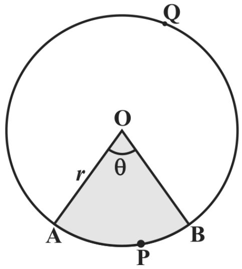


చిత్రం 11.2

గమనిక: మనం వేరొక విధంగా చెప్పాలంటే విభాగం మరియు సెక్టరు అంటే అల్ప విభాగం మరియు అల్పసెక్టరు. అని ప్రత్యేకంగా తెలిపే వరకు తీసుకోవచ్చు.

ఈ అంశాలను బట్టి వృత్తాల వైశాల్యాలను కనుక్కోవడానికి కొన్ని సూత్రాలను కనుగొనే ప్రయత్నం చేద్దాం.

వృత్త కేంద్రం 'O' మరియు r వ్యాసార్థం గాగల సెక్టరు. OAPB అయినది (చిత్రం 11.3) $\angle AOB$ కొలత 'O' వద్దకోణం θ.



చిత్రం 11.3

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఒక వృత్త వైశాల్యం (వాస్తవంగా వృత్తాకార భాగం లేదా డిస్క్). πr^2 అని మీకు తెలుసు.

అలాగే వృత్తాకార వలయం వృత్తకేంద్రం వద్ద 360^0 కోణాన్ని ఏర్పరిచేదిసెక్టరు. ఏకాంశ విధానాన్ని ఉపయోగించి సెక్టర్లు OAPB వైశాల్యం కింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు. వృత్తకేంద్రం వద ఏర్పర చేకోణం 360^0 అయిన సెక్టరు వైశాల్యం $= \pi r^2$

కావున వృత్తకేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణం 1^0 అయినప్పుడు. సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\pi r^2}{360}$

కావున వృత్తకేంద్రం వద్ద ఏర్పడేకోణం θ అయిన సెక్టరు వైశాల్యం

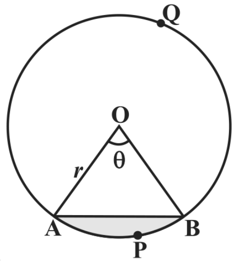
$$= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

వృత్తం యొక్క సెక్టరు వైశాల్యం సూత్రాన్ని కింది విధంగా కనుక్కుంటాము.

θ కోణం గల సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ఇక్కడ r వృత్త వ్యాసార్థం మరియు θ సెక్టరు కోణం (డిగ్రీలలో)

సహజంగా వచ్చే ప్రశ్న ఈ సెక్టరుతో ఏర్పడే చాపం APB పొడవు కనుక్కోవచ్చునా? అవును. ఏకాంశ విధానాన్ని అన్వయించడం ద్వారా. వృత్తం పూర్తీ పొడవును (360^0 కోణానికి) $2\pi r$ అని తీసుకోవడంవల్ల మనకు కావల్సిన చాపం పొడవు APB $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ అనితీసుకోవచ్చు.



చిత్రం 11.4

కావున θ కోణాన్ని కలిగిన సెక్టరు చాపం పొడవు $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

వృత్తకేంద్రం O మరియు వ్యాసార్థం 'r' గాగలిగిన వృత్త ఖండం వైశాల్యాన్ని కనుకుందాం (చిత్రం 11.4).

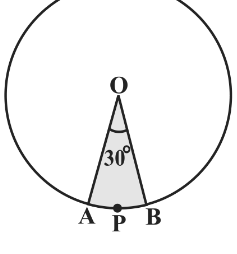
APB వృత్త ఖండం వైశాల్యం = OAPB సెక్టరు వైశాల్యం – ΔOAB వైశాల్యం.

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ వైశాల్యం.}$$

గమనించండి: చిత్రం 11.3 మరియు 11.4 లనుండి క్రమంగా మీరు గమనించే అంశాలు అంటే అధిక వృత్త విభాగం వైశాల్యం AQB = πr^2 – OAPB అల్పవృత్త విభాగం వైశాల్యం. OAQB అధిక సెక్టరు వైశాల్యం = πr^2 – APB సెక్టరు వైశాల్యం.

ఈ పరికల్పనలను అర్థం చేసుకోవడానికి కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1: వృత్త వ్యాసార్థం 4 cm మరియు కోణం 30^0 గాగల సెక్టరు వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. అదేవిధంగా అధిక సెక్టరు వైశాల్యాన్ని కూడా కనుక్కోండి. ($\pi = 3.14$).



చిత్రం11.5

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సాధన: OAPB ఇచ్చిన సెక్టరు (చిత్రం 11.5)

సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4\ cm^2$ (సుమారు)

$= \frac{12.56}{3} cm^2 = 4.19 cm^2$ (సుమారుగా)

అధిక సెక్టరు వైశాల్యం $= \pi r^2$ - OAPB సెక్టరు వైశాల్యం

$= (3.14 \times 16 - 4.19)\ cm^2$

$= 46.05\ cm^2 = 46.1\ cm^2$ (సుమారు)

మరొక విధంగా అధిక సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{360 - \theta}{360} \times \pi r^2$

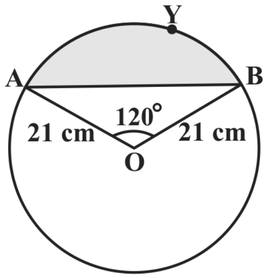
$= \frac{360 - 30}{360} \times 3.14 \times 16\ cm^2$

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16\ cm^2 = 46.05\ cm^2$

$= 46.1\ cm^2$ (సుమారుగా)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 2: చిత్రం 11.6లో ఇచ్చిన వృత్త వ్యాసార్థం 21 cm మరియు $\angle AOB = 120^0$ గల AYB వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి $\pi = \frac{22}{7}$



చిత్రం 11.6

సాధన: AYB వృత్తఖండం వైశాల్యం

= OAYB సెక్టరు వైశాల్యం –OAB త్రిభుజ వైశాల్యం (1)

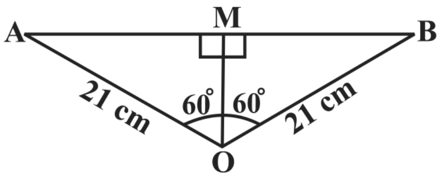
ఇప్పుడు OAYB సెక్టరు వైశాల్యం

$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 cm^2 = 462 cm^2$ (2)

ΔOAB వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి OM $\perp$ AB గీయండి (చిత్రం 11.7) OA = OB అని గమనించండి. కాబట్టి ల.క.భు. త్రిభుజాల సర్వసమానతతో $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ కావున AB యొక్క మధ్యబిందువు M మరియు $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$. OM = x cm అని తీసుకుందాం.

కావున ΔOMA నుండి $\dfrac{OM}{OA} = \cos 60^0$

లేదా $\dfrac{x}{21} = \dfrac{1}{2}\left(\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}\right)$



చిత్రం 11.7

లేదా $x = \dfrac{21}{2}$

అలాగే $OM = \dfrac{21}{2}$ cm

కావున $\dfrac{AM}{OA} = \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$AM = \dfrac{21\sqrt{3}}{2}$ cm

కాబట్టి $AB = 2AM = \dfrac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ cm $= 21\sqrt{3}$cm

ΔOAB వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2} AB \times OM = \dfrac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \dfrac{21}{2}$ cm^2

$= \dfrac{441}{4}\sqrt{3}$cm^2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కావున AYB వృత్త ఖండవైశాల్యం $= \left[462 - \dfrac{441}{4}\sqrt{3}\right]$cm^2 (1), (2), (3)ల నుండి)

$= \dfrac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})cm^2$

అభ్యాసం 11.1

(π విలువ ప్రత్యేకంగా ఇచ్చేవరకు $\pi = \dfrac{22}{7}$)

1. ఒక సెక్టరు వ్యాసార్థం 6 cm. సెక్టరు కోణం 60^0 అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

2. పరిధి 22 cm వున్న ఒక ఒక వృత్తంలో నాల్గవ భాగం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

3. ఒక గడియారపు నిమిషాల ముళ్లు పొడవు 14 cm ఐదునిమిషాలు చలించినప్పుడు ఏర్పడిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

4. 10 cm వ్యాసార్థం గల వృత్తంలో ఒక జ్యా వృత్త కేంద్రం వద్ద లంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. జ్యాతో ఏర్పడే అల్ప వృత్తఖండం (i) అధిక వృత్త సెక్టరు వైశాల్యాలను కనుక్కోండి (π = 3.14).

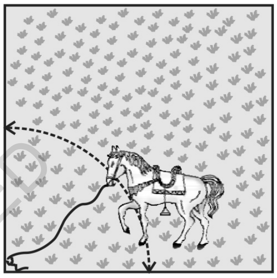
5. 21 cm వ్యాసార్థం గల వృత్తంలో ఒక చాపరేఖ వృత్తకేంద్రం వద్ద 60^0 కోణాన్ని ఏర్పరుచును.

(1) చాపం పొడవు (2) చాపంతో ఏర్పడే సెక్టరు (3) అనురూపజ్యాలతో ఏర్పడే వృత్త ఖండాల వైశాల్యాలను కనుక్కోండి.

6. 15 cm వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్త జ్యా వృత్తకేంద్రం వద్ద 60^0 కోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. జ్యాతోఏర్పడే అల్పవృత్త ఖండం మరియు అధిక వృత్తఖండాల వైశాల్యాలను కనుక్కోండి ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{3} = 1.73$)

7. 12 cm వ్యాసార్థంగా గల ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద 120^0 కోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. ఏర్పడిన వృత్త ఖండ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి ($\pi = 3.14$ మరియు $\sqrt{3} = 1.73$)

8. 15 cm భుజంగా గల చతురస్రాకార గడ్డి మైదానులోవున్న ఒక గుంజ (గూటానికి)కు 5 cm తాడుతో గుర్రాన్ని కట్టినది. (చిత్రం 11.8)



చిత్రం 11.8

(i) గుర్రం గడ్డి మేయగల మైదానం వైశాల్యం

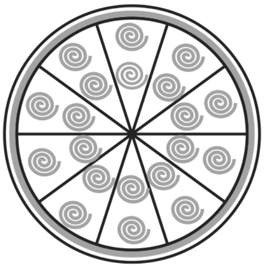
(ii) 5 cm తాడుకు బదులుగా 10m తాడు ఉపయోగించినప్పుడు ఎక్కువగా మేయగల మైదానం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. ($\pi = 3.14$)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. 35 cm వ్యాసంగాగల వృత్తాకార పతకాన్ని వెండితీగతో తయారు చేయబడినది. తీగతో చేసిన 5 వ్యాసాలను ఉపయోగించి వృత్తాన్ని 10 సమాన సెక్టర్లుగా చిత్రం 11.9లో చూపినట్లు. విభజించినది.

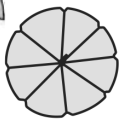
(i) కావాల్సిన వెండి తీగ పొడవు

(ii) పతకంలోని ప్రతి సెక్టరు వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



చిత్రం 11.9

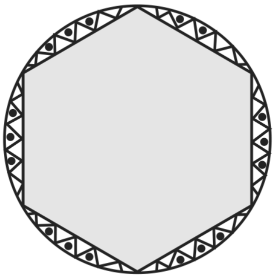
10. ఒక గొడుగు సమాంతరంలో 8 కడ్డీలను కలిగివుంది. (చిత్రం 11.10) గొడుగు 45 cm. వ్యాసార్థం గల సమతల వృత్తం అని భావించి రెండు వరుసకడ్డీల మధ్యవైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



చిత్రం 11.10

11. ఒక కారుకు ఒకదానిపై ఒకటి రాని రెండు వైపర్లు (గాజు శుభ్రపరిచేవి) వున్నాయి. అందులో ఒకదానికి 25 cm పొడవుగల బ్లేడు కలిగి 115^0 కోణంలో తుడుస్తుంది. బ్లేడులు ఒక సారి జారినప్పుడు శుభ్రం చేసే భాగం వైశాల్యాన్నికనుక్కోండి.

12. ఓడలకు నీటి లోపల వున్న రాతి బండలను గురించి హెచ్చరించడానికి ఒక దీపస్తంభం 80^0 కోణంవున్న సెక్టరు 16.5 km దూరం వరకు ఎరుపు రంగు వెలుగును ఇస్తుంది. ఓడలను హెచ్చరించే ఈ భాగం వైశాల్యం కనుక్కోండి.



చిత్రం 11.11

13. చిత్రం 5.14 లో చూపినట్లు ఒక గుండ్రని టేబుల్ (మేజా). చుట్టూ అమర్చిన ఆరు సమాన విన్యాసాలను కలిగివుంది. టేబుల్ వ్యాసార్థం 28 cm అయిన ప్రతి చదరపు మీటరుకు ₹0.35 ప్రకారం విన్యాసానికి అయ్యేఖర్చు ఎంత? ($\sqrt{3} = 1.7$)

14. కిందివాటిలో సరైన జవాబును గుర్తించండి:-

R వ్యాసార్థంగల వృత్తంలో P (డిగ్రీలలో) కోణాన్నికలిగిన సెక్టరువైశాల్యం.

(అ) $\frac{P}{180} \times 2\pi R$ (ఆ) $\frac{P}{180} \times \pi R^2$ (ఇ) $\frac{P}{360} \times 2\pi R$ (ఈ) $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

11.2 సారాంశం:

ఈ పాఠంలో మీరు కింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. ఒక వృత్త వ్యాసార్థం r మరియు θ డిగ్రీలలో కోణం కొలత వున్న సెక్టరులో చాపంపొడవు $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$
2. ఒక వృత్తం వ్యాసార్థం మరియు θ డిగ్రీలలో కోణం కొలత వున్న సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
3. ఒక వృత్తపు వృత్తఖండం వైశాల్యం = అనురూప సెక్టరు వైశాల్యం−అనురూప త్రిభుజవైశాల్యం.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

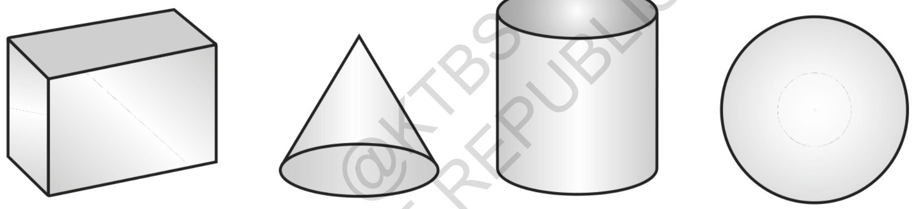
ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమానం

R6V3V7

12

12.1 పరిచయం

9 వ తరగతినుండి, మీరు దీర్ఘ ఘనం శంఖు, సిలెండర్ మరియు గోళాల గురించి తెలుసుకున్నారు అలాగే వాటి ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాల గూర్చి నేర్చుకున్నారు.



(i) (ii) (iii) (iv)

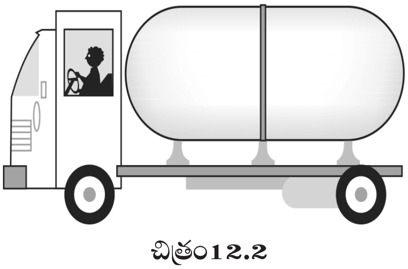
చిత్రం12.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనకు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఆకృతుల కలయికతోవున్న ఘనాకార వస్తువులను చూస్తాము.

నీటి లేదా ఆయిల్‌ను ఒక చోటి నుండి మరొక చోటుకు తీసుకెళ్ళే లారీ వెనుకవున్న భాగాన్ని పరిశీలిద్దాం (చిత్రం 12.1)

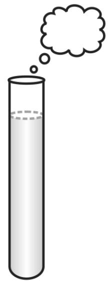
ఇది పైన చూపిన నాలుగు మూల ఆకృతులలో ఏ ఆకృతో పోల్చవచ్చు? మీరు దీన్ని స్థూపం. మరియు రెండు అర్థ గోళములను రెండు చివల చేర్చినదని గమనించవచ్చు.



చిత్రం12.2

మరొక చిత్రం 12.3ని చూసి దానిపేరు చెప్పగలరా? అది ఒక పరీక్ష నాళిక! మీరు దీనిని ప్రయోగశాలల్లలో ఉపయోగించవచ్చు ఈ పరీక్షనాళిక కూడా స్థూపం మరియు ఒక అర్థ గోళాన్ని కలిపితే ఏర్పడింది. ఇదే విధంగా. మనం ప్రయాణించేటప్పుడు పెద్దపెద్ద సుందరమైన కట్టడాలను, స్మారకాలను పైన తెలిపిన ఘనాకృతుల కలయికతో చేసినదాన్ని గమనిస్తారు.

కొన్ని కారణాలలో మీరు ఈ వస్తువుల ఉవరితలవైశాల్యం లేదా ఘనపరిమాణం లేదా సామర్థ్యాన్ని కనుక్కోవాలంటే దీనిని మీరు ఎలాకనుగొనగలరు? ఈ ఘనాకృతులు మనం ఇంతకు ముందే నేర్చుకున్న ఘనాకృతులుగా వర్గీకరించడానికి సాధ్యంకాదు.

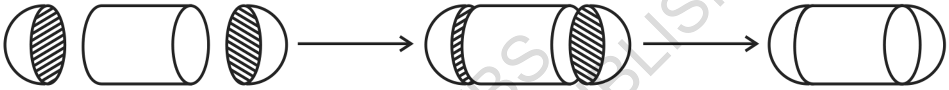


చిత్రం12.3

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఇలాంటి ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలను ఎలాకనుగొనాలి అని నేర్చుకుందాం.

12.2 ఘనాకార వస్తువుల సముదాయ ఉపరితల వైశాల్యం:

చిత్రం 12.2లో చూపిన ట్యాంకర్‌ను తీసుకుందాం. ఇంలాంటి వస్తువుల ఉపరితల వైశాలాన్ని కనుగొనాలంటే మనం ఏమి చేయాలి? ఒక కొత్త సమస్య ఎప్పుడైనా ఎదురైతే దాన్ని మనం ఇదివరకే చూసిన చిన్న సమస్యలుగా చేసుకోవాలి. ఈ ఘనాకృతిలో స్థూపానికి రెండు వైపులా అర్ధగోళాలను చేర్చబడినదాన్ని చూడవచ్చు. ఈ మూడు భాగాలను ఒకటిగా చేర్చిన తరువాత చిత్రం 12.4లో చూపినట్లు కనబడును.



చిత్రం12.4

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

కొత్తగా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం. మనం తీసుకున్న రెండు అర్ధగోళాల వక్రతల వైశాల్యం మరియు స్థూపం వక్రతల వైశాల్యాలను మాత్రమే చూడవచ్చు.

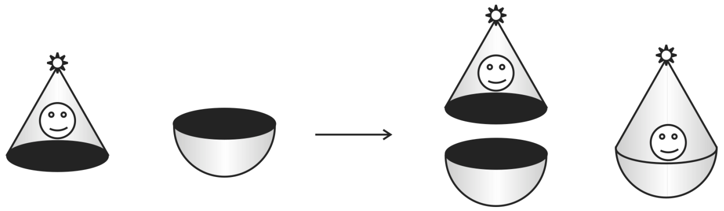
కావున కొత్తగా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము ప్రతి విడి భాగాల వక్రతల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానము.

కొత్తగా ఏర్పడిన ఘనాకార వస్తువు యొక్క మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యం

= (మొదటి అర్ధగోళం వక్రతలవైశాల్యం) + (స్థూపం వక్రతల వైశాల్యం) +

(రెండవ అర్ధగోళం వక్రతలవైశాల్యం).

ఇప్పుడు మరొక సన్నివేశాన్ని పరిశీలిద్దాం. ఒక అర్ధగోళాన్ని మరియు శంఖువును కలిపి ఒక ఆటవస్తువును తయారు చేద్దా మనుకుందాం. ఈ వస్తువును తయారు చేయడానికి వివిధ సోపానాలను పరిశీలిద్దాం. ముందుగా శంఖువు ఆకార భాగము మరియు అర్ధగోళాకార భాగాలను తీసుకొని సమతల భాగాలను చేర్చినప్పుడు ఖచ్చితంగా శంఖువు పాదం యొక్క వ్యాసార్థం మరియు అర్ధగోళం యొక్క వ్యాసార్థం సమానంగావుండేటట్లు తీసుకోవాలి. అప్పుడే ఆ వస్తువు సమతుల్యతను కలిగివుంటుంది. ఈ ఆటబొమ్మను తయారు చేసే విధానంలో వివిధ దశలు చిత్రం 12.5లో చూపబడినది.



చిత్రం12.5

పై క్రమాన్ని అనుసరించడం ద్వారా మనకు చివర గుండ్రంగావున్న అడుగు భాగం కలిగిన ఆట బొమ్మ తయారవుతుంది. ఇప్పుడు ఈ ఆట బొమ్మకు రంగువేయడానికి కావలిసిన రంగు పరిమాణం తెలుసుకోవాలంటే దాని యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం తెలియాలి. ఈ ఉపరితల వైశాల్యం శంఖువు ఆకార భాగం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యంను, అర్ధగోళాకార భాగవైశాల్యమును కలిగివుంటుంది.

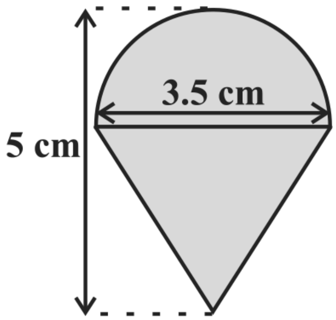
అందుచేత మనం ఏమి చేయాలంటే.

ఆటబొమ్మ యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం = అర్ధగోళం ఉపరితల వైశాల్యం + శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఇప్పుడు మనం కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం:

ఉదాహరణ 1: రషీద్ పుట్టినరోజుకు బహుమతిగా ఒక బొంగరాన్ని కొన్నాడు. బొంగరం యొక్క బయటి ఉపరితల వైశాల్యానికి రంగులేదు. వాడి వద్దవున్న రంగుపెన్సిళ్ళతో (Croyons) రంగు వేయడానికి ప్రయత్నించాడు బొంగరం శంఖువు పాదం పై అర్ధగోళాన్ని ఉంచిన ఇలాగే కనపడును. (చిత్రం 12.6) బొంగరం మొత్తం ఎత్తు 5 cm మరియు వ్యాసము 3.5 cm వుంటే. అతను రంగు వేయగలిగిన ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి).



చిత్రం12.6

సాధన: చిత్రం 12.5 లోవున్నట్లు ఈ బొంగరంలో కూడా రెండు బాగాలతో కూడుకొని వుంది. అందువల్ల ఇక్కడ మనకు వచ్చిన ఫలితాన్ని ఇక్కడ కూడా ఉపయోగిస్తాం.

బొంగరం ఉపరితల వైశాల్యం = అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యం + శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం.

ఇప్పుడు అర్ధగోళం వక్రతల వైశాల్యం $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

అలాగే శంఖువు ఎత్తు = బొంగరం ఎత్తు – అర్ధగోళం ఎత్తు (వ్యాసార్థం)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) = 3.25\text{cm}$$

అయితే శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}\text{ cm} = 3.7\text{cm}$

$= 3.7\text{cm}$ (సుమారు)

అందువలన శంఖువు వక్రతలవైశాల్యం $= \pi rl = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)\text{cm}^2$

దీనివల్ల వచ్చేది బొంగరపు ఉపరితలవైశాల్యం

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)\text{cm}^2$$

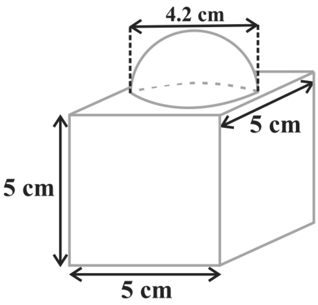
$$+ \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)\text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7)\text{cm}^2 = \frac{11}{2}(3.5 + 3.7)\text{cm}^2$$

$= 39.6\text{ cm}^2$ (సుమారుగా)

బొంగరం మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యం శంఖువు మొత్తం ఉపరితలమైన బొంగరం అర్ధగోళం యొక్క మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానంకాదు అని మీరుగమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 2: చిత్రం 12.7 లో చూపిన అలంకరణ వస్తువు ఒక ఘనాకృతి మరియు ఒక అర్ధగోళాలుగా కలిగిన రెండు ఘనాలతో ఏర్పడినది. వస్తువు 5cm భుజముగా కలిగిన ఒక ఘనాకృతి. దానిపై 4.2cm. వ్యాసం కలిగిన అర్ధగోళాన్ని వుంచిన వస్తువు సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం కనుక్కోండి. . ($\pi = \frac{22}{7}$ అనుకోండి).



చిత్రం12.7

సాధన: ఘనాకృతి యొక్క మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యం

$= 6 \times (\text{భుజం})^2 = 6 \times 5 \times 5 = 150\text{cm}^2$

అర్ధగోళాన్ని చేర్చిన భాగం వైశాల్యాన్ని ఉపరితలవైశాల్యానికి చేర్చ కూడదనేదాన్ని గమనించండి.

కావున వస్తువు ఉపరితల వైశాల్యం = ఘనాకృతి మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యం – అర్ధగోళం పాదం వైశాల్యం + అర్ధగోళం వక్రతల వైశాల్యం

$$= 150 - \pi r^2 - 2\pi r^2$$

$$= \left(150 + \pi r^2\right)\text{cm}^2$$

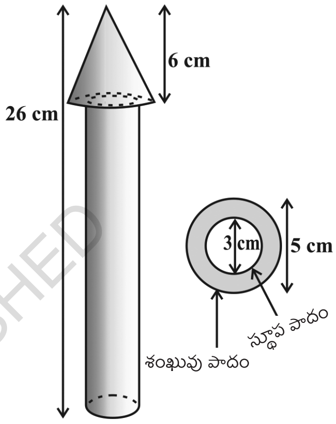
$$= 150\text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)\text{cm}^2$$

$$= (150 + 13.86)\text{cm}^2 = 163.86\text{cm}^2$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 3: చెక్కతో చేసిన ఒక ఆట రాకెట్ చిత్రం 12.8 లో చూపినట్లు ఒక స్థూపం పై శంఖువు పాదాన్ని ఉంచబడినది. రాకెట్ మొత్తం ఎత్తు 26 cm. శంఖువు ఆకారపు ఎత్తు 6 cm శంఖువు పాదం వ్యాసం 5 cm మరియు స్థూపాకార భాగం యొక్క భూవ్యాసం 3 cm శంఖాకృతి భాగమును నారింజరంగు స్థూపాకార భాగమును పసుపురంగు వేస్తే ఈ రంగులు వేయడానికి కావల్సిన రాకెట్ వైశాల్యమును విడివిడిగా కనుగొనుము ($\pi = 3.14$).

సాధన: శంఖువు ఆకారం యొక్క భూ వ్యాసార్థము ('r') మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 'l' అనుకుందాం. శంఖువు ఎత్తు 'h', సూపాకార వ్యాసార్థం 'r' మరియు స్థూపం ఎత్తు 'h' అని సూచిద్దాం.



చిత్రం12.8

$r = 2.5\text{cm}, \text{h} = 6\text{cm}, r' = 1.5\text{cm}, h' = 20\text{cm}$

ఇప్పుడు $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2} = \sqrt{6.25 + 36} = \sqrt{42.25}$

$l = 6.5\text{cm}$

ఇక్కడ శంఖువు యొక్క వృత్తాకార పాదము. స్థూపం యొక్క వృత్తాకార పాదం పైవుంది. అయితే శంఖువు పాదము స్థూపం పాదం కంటే పెద్దదైనందున శంఖువు పాదంలో ఒక భాగానికి (ఉంగరం) మాత్రమే రంగువేయాలి.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇక్కడ నారింజరంగు వేయబడిన భాగము వైశాల్యము = శంఖువు వక్రతలవైశాల్యం + శంఖువు పాదం వైశాల్యం – స్థూపపు పాదం వైశాల్యం

$= \pi rl = \pi r^2 - \pi(r')^2$

$= \pi r\ [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]\text{cm}^2$

$= \pi r\ (20.25)\ \text{cm}^2 = 3.14 \times 20.25\text{cm}^2$

$= 63.585\ \text{cm}^2$

ఇప్పుడు పసుపు రంగు వేయబడిన భాగం వైశాల్యం = స్థూపం యొక్క వక్రతలవైశాల్యం + స్థూపం యొక్క భూ వైశాల్యం

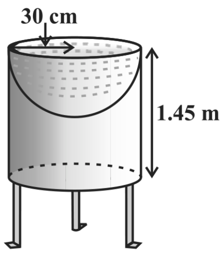
$= 2\pi r' h' + \pi\ (r')^2$

$= \pi r'\ (2h' + r')$

$= (3.14 \times 1.5)\ (2 \times 20 + 1.5)\ \text{cm}^2$

$= 4.71 \times 41.5\ \text{cm}^2 = 195.465\ \text{cm}^2$

ఉదాహరణ 4: మయాంక్ తన తోటలో పక్షులు స్నానం చేయడానికి అనుకూలంగా ఒక స్థూపం పైభాగాన వృత్తాకార పాదంలో అర్ధగోళాన్ని చేర్చి చిత్రం 12.9 లో చూపినట్లు నిర్మించాడు. స్థూపం ఎత్తు 1.45m మరియు దాని పాదపు వ్యాసార్ధం 30cm వుంది. ఈ వస్తువు యొక్క మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



చిత్రం 12.9

సాధన: స్థూపం ఎత్తు h మరియు స్థూపపు పాదం వ్యాసార్ధం, గోళం వ్యాసార్ధం సమానము అయిన అది *'r'* అని తీసుకుందాం.

ఈ వస్తువు యొక్క మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యం = స్థూపం వక్రతల వైశాల్యం + అర్ధగోళపు వక్రతలవైశాల్యం.

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 30(145+30)\,\text{cm}^2$$

$$= 33000\ \text{cm}^2 = 3.3\ \text{m}^2$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 12.1

$\left(\pi\right.$ విలువ ఇచ్చేవరకు $\pi = \frac{22}{7}$ అని పరిగణించండి$\left.\right)$

1. 64 cm^3 ఘనపరిమాణంగల రెండు ఘనాలను కలుపబడినవి. అయిన కొత్తగా ఏర్పడిన దీర్ఘఘనం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత?

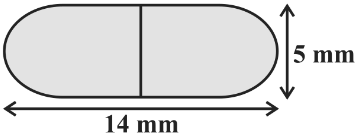
2. ఒక పాత్ర ఆకారం ఖాళీ స్థూపం యొక్క ఒక పాదంపై ఖాళీ అర్ధగోళాకారాన్ని అమర్చి చేయబడినవి. అర్ధగోళం వ్యాసము 14cm మరియు పాత్ర మొత్తం ఎత్తు 13cm వుంది. ఈ పాత్ర యొక్క లోపలి ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

3. ఒక అర్ధ గోళం పై అదే వ్యాసార్ధం కలిగిన శంఖువును వుంచి ఒక ఆటవస్తువును చేయబడినది. ఆ రెండింటి వృత్తాకార పాదపు వ్యాసార్ధం 3.5cm వస్తువు ఎత్తు 15.5cm అయిన ఆట వస్తువు మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

4. ప్రతి భుజము 7cm గా కలిగిన ఘనాకృతి గల ఒక వస్తువు ఒక ముఖాన్ని పూర్తిగా అర్ధగోళం ఆవరించి వుంది. అర్ధగోళం గరిష్ఠ వ్యాసాన్ని కనుక్కోండి? ఈ మొత్తం వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి?

5. ఒక సమ ఘనాకార చెక్క దిమ్మె నుండి దాని భుజము పొడవునకు సమాన పొడవు కలిగిన వ్యాసం గల అర్ధగోళాకారము కత్తిరించబడినది. ఘనం యొక్క భుజము, అర్ధగోళం వ్యాసం *l* కు సమానమైన కొత్తగా ఏర్పడిన ఘనం యొక్క మొత్తం ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

6. ఒక మందు బిళ్ళ రెండు చివరల అర్ధ గోళాకారంలోనున్న స్థూపము వలె వున్నది. మందు బిళ్ళ యొక్క మొత్తం పొడవు 14mm మరియు వెడల్పు 5mm (చిత్రం 12.10) అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత?

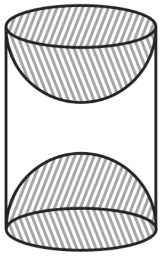


చిత్రం12.10

7. స్థూపపు వృత్తాకార పాదాన్ని శంఖువు పూర్తీగా ఆక్రమించే విధంగా ఒక డేరావుంది. స్థూపం ఎత్తు మరియు వ్యాసము 2.1m మరియు 4m క్రమంగా వుంది మరియు శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు 2.8m అయితే డేరాను నిర్మించడానికి ఉపయోగించే క్యాన్‌వాస్ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. క్యాన్‌వాస్ వెల ₹ 500 ప్రతి చదరపు మీటరు అయిన క్యాన్‌వాస్ కొనడానికి కావల్సిన డబ్బు ఎంత? (డేరా పాదం క్యాన్‌వాస్‌తో పరచబడలేదు అనేదాన్ని గమనించండి)

8. ఒక ఘన స్థూపం ఎత్తు 2.4cm మరియు వ్యాసం1.4cm దీనినుండి. ఒకే ఎత్తు మరియు ఒకే వ్యాసం కలిగిన శంఖువు ఆకారంలో తొలగించి బడినది. కొత్తగా ఏర్పడిన ఘనం యొక్క ఉపరితలవైశాల్యాన్ని అత్యంత సమీప విలువకు cm^2 లలో కనుక్కోండి.

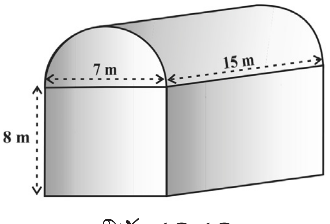
9. చిత్రం 12.11 లో చూపినట్లు ఒక చెక్కతో చేసిన వస్తువు రెండు చివరల నుండి అర్ధగోళాకార భాగములు తొలగించబడిన స్థూపంవలె ఉన్నది. స్థూవము యొక్క ఎత్తు 10 cm దాని భూ వ్యాసార్థము 3.5 cm అయినచో ఆ వస్తువు యొక్క సం పూర్ణతల వైశాల్యం ఎంత?


చిత్రం12.11

12.3 ఘనాకార వస్తు సముదాయ ఘనపరిమాణం:

వెనుకటి విభాగంలో మనం రెండు మూల ఘనాకృతుల సముదాయ అమరిక ఉపరితల వైశాల్యాన్ని ఎలా కనుగొనాలో చర్చించాము. ఇప్పుడు మనం వాటి ఘనపరిమాణము ఎలా కనుక్కోవాలో చూద్దాం. ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొనేటప్పుడు గమనించవలసినది రెండు ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్య భాగాలను కూడడం లేదు. ఎందుకంటే వాటిని కూడే ప్రక్రియలో ఉపరితల వైశాల్యంలోని కొన్ని భాగాలు కనిపించవు. అవి ఏవీ ఘనాకృతి ఘనపరిమాణాన్ని లెక్కించేటప్పుడు అలా జరగదు. రెండు మూల ఘనాకృతులను చేర్చిన వచ్చే ఘనాకృతి ఘనపరిమాణం వాస్తవంగా ఆరెండు ఘనాకృతుల ఘనపరిమాణాల మొత్తానికి సమానము దీనిని కింది ఉదాహరణల ద్వారా చూద్దాం.

ఉదాహరణ 5: శాంత నడుపుతున్న ఫ్యాక్టరీ ఒక దీర్ఘ ఘనంపై నిలబడిన అర్ధ స్థూపము వలె ఉన్నది. (చిత్రం 12.12) ఫ్యాక్టరీషెడ్ యొక్క భూమి కొలతలు 7 m × 15 m మరియు దీర్ఘ ఘనాకృతి ఎత్తు 8 m గావుంది. ఆషెడ్‌లో వున్న గాలి యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని ఏవిధంగా కనుగొంటారు?



చిత్రం12.12

షెడ్‌లో ఉన్న యంత్ర సామాగ్రి 300 m^3 ఘనపరిమాణమును దానిలో పని చేస్తున్న 20 మంది కార్మికుల సగటున 0.80m^3 ఘనపరిమాణాన్ని ఆక్రమిస్తే ఆషెడ్‌లో ఉన్నగాలి ఘనపరిమాణం ఎంత? $\pi = \frac{22}{7}$

సాధన: షెడ్ లోపలవున్న గాలి ఘనపరిమాణం (యంత్రభాగాలు కార్మికులు లేరనుకుంటే), దీర్ఘ ఘనాకార భాగంలోని, గాలి ఘన పరిమాణం, అర్ధభాగ స్థూపాకృతిలోని గాలి ఘనపరిమాణముల మొత్తానికి సమానం. దీర్ఘ ఘనం యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా 15 m, 7m మరియు 8 m అవుతాయి. అంతేకాక అర్ధసిలెండర్ వ్యాసం 7 m మరియు దాని ఎత్తు 15 m అయిన

కావలసిన ఘనపరిమాణం = దీర్ఘ ఘనంఘన పరిమాణం + $\frac{1}{2}$ స్థూపం ఘనపరిమాణం.

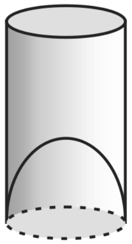
$$=\left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] m^3 = 1128.75\ m^3$$

తరువాత యంత్ర భాగాలచే ఆక్రమించబడిన మొత్తం ఘనపరిమాణం = 300 m^3

20 మంది కార్మికులచే ఆక్రమించబడిన మొత్తం ఘనపరిమాణం

= 20 × 0.08 m^3 = 1.6 m^3

అందుచే యంత్ర భాగాలు మరియు కార్మికులు ఉన్నప్పుడు షెడ్‌లోని గాలి ఘనపరిమాణం = 1128.75 – (300.00 + 1.60) = 827.15 m^3



చిత్రం12.13

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 6: చిత్రం 12.13 లో చూపినట్లు పండ్ల రసం వ్యాపారి వినియోగదారులకు గాజుగ్లాసులో పళ్ళరసాన్ని ఇచ్చేవాడు. స్థూపాకార గాజు గ్లాసు లోపలి వ్యాసము 5 cm వుంది, అయితే గ్లాసు అడుగు భాగాన అర్ధగోళం భాగం ఎత్తుగా ఉబ్బివుంది. ఇది గ్లాసు పరిమాణాన్ని తగ్గిస్తుంది. గ్లాసు ఎత్తు 10 cm అయితే గ్లాసు కంటికి కనిపించే ఘనపరిమాణం మరియు గ్లాసు ఘనపరిమాణాన్నికనుక్కోండి. (π = 3.14).

సాధన: గాజు గ్లాసు యొక్క లోపలి వ్యాసం = 5 cm మరియు ఎత్తు = 10 cm

గ్లాసు కంటికి కనిపించే ఘనపరిమాణం. $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10\ cm^3$

$= 196.25\ cm^3$

గాజు గ్లాసు ఘనపరిమాణం గ్లాసులో వున్న అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం తక్కువైనచో.

తక్కువైన ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi\ r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$

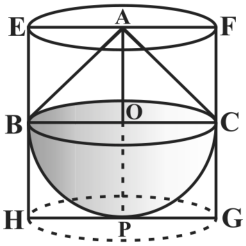
$= 32.71\ cm^3$

అందువల్ల గాజుగ్లాసు ఘనపరిమాణం = కంటికికనిపించే గ్లాసుఘన పరిమాణం – అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం

$= (196.25 - 32.71)\ cm^3$

$= 163.54\ cm^3$

ఉదాహరణ 7: ఒక చివర అర్ధగోళాకారం మరొక చివర క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఆకారంకలిగిన క్రమ వృత్తాకార స్థూపాకార ఘనాకృతి ఆటవస్తువుంది. శంఖువు ఎత్తు 2 cm మరియు పాదపు వ్యాసం 4 cm ఆటవస్తువు ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి. ఒక లంబ వృత్తపాద స్థూపం ఆ వస్తువు పూర్తిగా కప్పబడి వుందంటే స్థూపం మరియు ఆటవస్తువు ఘనపరిమాణాల మధ్యతేడాను కనుక్కోండి ($\pi = 3.14$).



చిత్రం12.14

సాధన: BPC అర్ధగోళం మరియు ABC శంఖువు అయినచో, శంఖువు అర్ధగోళం పాదం పైనిలబడినది. (చిత్రం 12.14) అర్ధగోళం వ్యాసార్ధం BO అయినది. (శంఖువు పాదపు వ్యాసార్ధం) $= \frac{1}{2} \times 4cm = 2cm$

అందువల్ల ఆటవస్తువు ఘనపరిమాణం

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times 2^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 2\right] cm^3$$

$$= 25.12 cm^3$$

EFGH లంబ వృత్తపాద స్థూపము ఆటవస్తువును పూర్తిగా కప్పబడినది

లంబ వృత్త పాద వ్యాసార్ధం = HP = BO = 2 cm

మరియు దాని ఎత్తు EH = AO + OP = (2 + 2) cm = 4 cm

కాబట్టి కావాల్సిన ఘనపరిమాణం = లంబ వృత్తాకార స్థూపం ఘనపరిమాణం ఆటవస్తువు ఘనపరిమాణం

$= (3.14 \times 2^2 \times 4) - 25.12\ cm^3 = 25.12\ cm^3$

కావును మనకు కావల్సిన ఘనపరిమాణంలో తేడా = $25.12\ cm^3$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

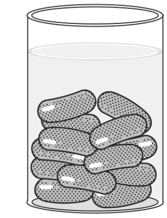
అభ్యాసం 12.2

(π విలువ ఇచ్చేవరకు $\pi = \frac{22}{7}$ అని పరిగణించండి)

1. ఒక ఘనంలో వృత్తాకార అర్ధ గోళం పాదం పై పూర్తిగా కప్పబడేటట్లు శంఖువు నిలబడినది. వాటి వ్యాసార్థాలు 1 cm మరియు శంఖువు ఎత్తు దాని వ్యాసార్థానికి సమానంగావుంది. ఈ ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం πలలో వ్యక్తపరచండి.

2. రేచల్ ఒక ఇంజనీరింగ్ విద్యార్థి. ఆమె ఒక పలుచని పేపరుతో స్థూపం యొక్క రెండు వృత్తపాదాలలో శంఖువును అమర్చి ఒక ఆకారాన్ని తయారు చేసేటప్పుడు. ఈ వస్తువు వ్యాసం 3 cm మరియు దాని మొత్తం పొడవు 12 cm. శంఖువు ఎత్తు 2 cm. అయితే రేచల్ చేసిన ఈ మాదిరి లోపల గాలి ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి. (మాదిరి లోపల మరియు బయటి ఉపరితల కొలతలు సరిసమానంగా ఒకటే అని భావించండి).

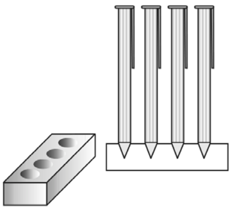
3. ఒక గులాబ్ జ్యామూన్‌లో దాని ఘనపరిమాణంలో 30 శాతం చక్కెర పాకం కలిగివుంది. ప్రతి జ్యామూన్ స్థూపాకారంలో వుండి దాని చివర బాగంలో అర్ధగోళాలున్నాయి. జ్యామూన్ మొత్తం పొడవు 5 cm. మరియు వ్యాసం 2.8 cm. అయితే జ్యామూన్‌లో వున్న చక్కెర పాకాన్ని కనుక్కోండి (చిత్రం 12.15)



చిత్రం12.15

4. 15 cm × 10 cm × 3.5 cm. కొలతలుగాగలిగిన దీర్ఘ ఘనంలో 0.5 cm వ్యాసార్థం మరియు 1.4 cm లోతుతో శంఖువు ఆకారంగల నాలుగు గోతులు తీసి పెన్ను స్టాండుగా మార్చారు. పెన్ను స్టాండులోని కొయ్య ఘనపరిమాణం ఎంత? (చిత్రం 12.16).

5. ఒక పాత్ర బోర్లించిన శంఖువు ఆకారంలోవుంది. దాని ఎత్తు 8 cm. మరియు తెరచిన పై భాగపు వ్యాసార్థం 5 cm. దాని అంచు వరకు పూర్తిగా నీటిని నింపబడి వున్నది. దానిలో 0.5 cm వ్యాసార్థం గల సీసం గుండును పాత్రలోకి వేసిన నాల్గవ వంతు భాగం నీరు బయటికి పోర్లిపోయినవి. పాత్రలోకి వేసిన సీసపుగుండ్లు ఎన్ని?



చిత్రం12.16

6. ఒక ఇనుప స్తంభం ఎత్తు 220 cm. మరియు దాని పాదం వ్యాసము 24 cm. అయిన ఘనస్థూపాకారంలో వుంది. దీనిపై 60 cm. ఎత్తు మరియు వ్యాసార్థం 8 cm గాగల మరొక స్థూపం అమర్చబడినవి. 1 cm^3 ఇనుము ద్రవ్యరాశి సుమారుగా 8 g. అయిన స్తంభంద్రవ్యరాశి కనుక్కోండి ($\pi = 3.14$).

7. 60 cm. వ్యాసార్థం గల అర్ధగోళపు పాదంపై 120 cm. ఎత్తు మరియు 60 cm. వ్యాసార్థంగల క్రమ వృత్తపాద శంఖువును అమర్చబడినది. పూర్తిగా నీటితో నింపిన క్రమ వృత్తపాద స్థూపంలో క్రింది భాగాన్ని తాకేటట్లు నేరుగా ఈ ఘనాకృతిని ముంచబడినది. స్థూపం వ్యాసార్థం 60 cm మరియు ఎత్తు 180 cm. అయిన స్థూపంలో మిగిలిన నీటి ప్రమాణాన్ని కనుక్కోండి.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. 8.5 cm వ్యాసంగల ఒక గోళాకార గాజు పాత్ర 8 cm. పొడవు మరియు 2 cm వ్యాసంగాగల స్థూపాకారపు గుంత వుంది. ఒక పిల్లవాడు దాని వున్ననీటి పరిమాణాన్ని కొలవడంతో దాని ఘనపరిమాణం 345 cm^3 అయినదను కున్నాడు. పైన ఇచ్చిన కొలతలు లోపలి కొలతలని భావించి వాని ఎత్తుకు సరిపోవునని పరీక్షించండి (π = 3.14).

12.4 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు కింది అంశాలను నేర్చుకున్నారు.

1. దీర్ఘ ఘనం, శంఖువు , స్థూపం, గోళం, మరియు అర్ధగోళాలలో ఏవైనా రెండు ఘన వస్తువుల సం యోగంతో ఏర్పడిన వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యాలను లెక్కించడం.

2. దీర్ఘ ఘనం, శంఖువు స్థూపం, గోళం, మరియు, అర్ధగోళాలలో ఏవైనా రెండు ఘనవస్తువుల సంయోగంతో ఏర్పడిన వస్తువుల ఘన పరిమాణాన్ని కనుక్కోవడం.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

G1E7I7

సాంఖ్యక శాస్త్రం

13

13.1 పరిచయం

9వ తరగతిలో మీరు దత్తాంశాలను వర్గీకృత మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశాల మధ్య భేదాలను గూర్చి తెలుసుకున్నారు. దత్తాంశాలను స్తంభచిత్రాలు, పిస్టోగ్రాం (వేరు వేరు వెడల్పులతో కూడిన) మరియు పౌనః పున్య బహుభుజాలు మొదలైన వివిధ చిత్రాల ద్వారా చూపడాన్ని నేర్చుకున్నారు. అంతేకాక అవర్గీకృత దత్తాం శాలను. నిర్దిష్ఠమైన సంఖ్యతో చూపడం, అనగా కేంద్రీయ ప్రవృత్తి కొలతలైన సగటు మధ్యము, మధ్యగతము, బాహుళకములను నేర్చుకున్నారు. ఇదే అధ్యాయంలో ఇవే అంశాలు అంటే సగటు, మధ్యయగతము, బాహు ళకాలను అవర్గీకృత దత్తాంశాలనుండి వర్గీకృత దత్తాంశాల వరకు కొనసాగించి అభ్యాసం చేయాల్సివుంది.

సంచిత పౌనః పున్యం, సంచిత పౌనఃపున్యం విభజన మరియు ఓజివ్స్ (ogives) అని పిలువబడే సంచిత పౌనఃపున్య రేఖలను ఎలా గీయడం అనే విషయాలను చర్చించనున్నాము.

13.2 అవర్గీకృత దత్తాంశాల సగటు (సరాసరి)

ఇవ్వబడిన రాశుల (సరాసరి) యొక్క మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచే భాగించిన ''సగటు'' వస్తుంది! x_1, x_2 .... x_n రాశుల యొక్క పౌనఃపున్యాలు వరుసగా f_1, f_2, ... f_n అనగా x_1 అనేరాశి f_1 సార్లు. x_2 అనే రాశి f_2 సార్లు అదేవిధంగా x_3 .... x_nలు కూడా. పునరావృతం అయిందని 9 వ తరగతిలో నేర్చుకొన్నవాటిని స్మరించుకోండి.

ఇప్పుడు రాశుల మొత్తం $= f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n$ మరియు రాశుల సంఖ్య $= f_1 + f_2 + ... f_n$.

కాబట్టి ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $(\bar{x})$

$$(\bar{x}) = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \mathrm{L} + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \mathrm{L} + f_n}$$

దీనిని మనం మొత్తం అను అర్థాన్నిచ్చే గ్రీకు అక్షరం 'Σ' (సిగ్మా) (Σ అనగా మొత్తం) నుపయోగించి ఎలా సూచి స్తారో తెలుసుకుందాం. $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fi\ xi}{\Sigma_1 fi}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ఇంకా సంక్షిప్తంగా $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ అని రాయవచ్చు ఇందులో అనునది 1నుండి i వరకు మారుతుంది అని అర్థం.

ఉదాహరణ 1: ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థులు గణితంలో పొందిన మార్కులు పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల నగటును కనుగొనండి.

పొందిన మార్కులు (***xi***)	10	20	36	40	50	56	60	72	72	80	88	92	95
విద్యార్థుల సంఖ్య (***fi***)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

సాధన: సరాసరి మార్కులు కనుగొనడానికి ప్రతి x_i మరియు దానికి అనుగుణమైన పౌనఃపున్యం f_i ల గుణలబ్ధపు అవసరం ఉంది అని స్మరించుకోండి. అందువలన వాటిని పట్టిక 13.1లో చూపినట్లుగా నిలువు వరుసలో రాద్దాం.

పట్టిక 13.1

పొందిన మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	***fi xi***
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
మొత్తం	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు, $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fi\ xi}{\Sigma fi} = \frac{1779}{30} = 59.3$

అందువలన పొందిన మార్కుల సగటు 59.3

నిత్య జీవితంలో చాలా సందర్భాలలో. చాలా పెద్ద పెద్ద దత్తాంశాలను సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి. (అవర్గీకృత) దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత దత్తాంశంగా మార్చుకోవాల్సిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. అట్లు మార్చుకొని, దాని సగటును కనుగొనుటకు పద్ధతులను చర్చిద్దాము.

ఉదాహరణ –1 లో ఇవ్వబడిన అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని ''తరగతి అంతరం 15గా ఉండేటట్లుగా వర్గీకరించుకుందాం. ఇవి అవిభాజిత తరగతి అంతరాలు కావున పౌనః పున్యాలను కేటాయించేటప్పుడు ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దుకి సమానమైన దత్తాంశాన్ని పొందిన విద్యార్థులను తరువాత తరగతిలో చూపించాలని గుర్తుంచుకోవాలి. ఉదాహరణకు 40 మార్కులు పొందిన నలుగురు విద్యార్థులు 25–40 తరగతిలో కాక. తరువాత తరగతి 40–55లోకి తీసుకున్నాము. దీనిని దృష్టిలో ఉంచుకొని మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారు చేసుకుందాం. (పట్టిక 13.2 చూడండి).

పట్టిక 13.2

తరగతి అంతరం	10 – 25	25 – 40	40 – 55	55 – 70	70 – 85	85 – 100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు, తరగతి మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక విలువ మనకు అవసరం. ఒక తరగతి పౌనః పున్యము (అనగా తరగతిలోని అన్నిరాశులు) ఆ తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ చుట్టూ కేంద్రీకృతమైనట్లుభావిస్తారు. కాబట్టి ఒక తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ ఆ తరగతి యొక్క అన్ని విలువలను ప్రాతిని ధ్యంగా భావిస్తాము. దీనినే తరగతి 'మార్కు' (Class Mark) లేక మధ్య విలువ అంటారు. ఈ తరగతి మార్కు అనేది ఆ తరగతి యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ అవధుల సరాసరి అని గుర్తుం చుకోవాలి.

$$\textbf{తరగతి మార్కు} = \frac{\textbf{ఆ తరగతి ఎగువ అవధి + ఆ తరగతిదిగువ అవధి}}{2}$$

పట్టిక 13.2లో ఉన్నట్లుగా తరగతి అంతరం 10–25 అనే తరగతి యొక్క ''తరగతి మార్కు $= \frac{10+25}{2} = 17.5$ అదే విధంగా మిగిలిన తరగతుల యొక్క ''తరగతుల మార్కులను కనుగొనవచ్చు. ఈ తరగతి చిహ్నాలను xi గా సూచిస్తూ పట్టికలో పొందుపరుస్తాము. ఇప్పుడు సగటు కనుగొనుటకు పై ఉదాహరణ–1 మాదిరిగా చేద్దాం.

పట్టిక 13.3

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్య విలువ (x_i)	$f_i x_i$
10 – 25	2	17.5	35.0
25 – 40	3	32.5	97.5
40 – 55	7	47.5	332.5
55 – 70	6	62.5	375.0
70 – 85	6	77.5	465.0
85 – 100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

పై పట్టికలో చివరి నిలువ వరుసలలోగల విలువల మొత్తం $\sum f_i x_i$ ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $\left(\bar{x}\right)$.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

సగటును కనుగొనే ఈ కొత్త పద్ధతిని **''ప్రత్యక్ష వద్దతి''** అంటారు.

పట్టిక 13.1 మరియు 13.3 లను గమనించినప్పుడు ఒకే దత్తాంశానికి. ఒకే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సగటును కనుగొన్నప్పుడు వేరు వేరు విలువలు వచ్చాయి. ఈ రెండు సందర్భాలలో సగటు విలువలో బేధం ఎందుకు వచ్చిందో ఆలోచించండి? మరియు ఏది ఖచ్చితమైనది? రెండు విలువలు వేరువేరుగా రావడానికి మధ్యవిలువ గల పట్టిక 13.3లోని 59.3 ఖచ్చితమైన సగటు విలువ, అలానే 62 అనేది సరాసరి సగలువిలువ.

కొన్ని సందర్భాలలో x_i, f_i విలువలు చాలా పెద్దగావుండి, వాటి లబ్దాన్ని గుణించడం కష్టం మరియు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. సగటు కనుగొనుటలో గణనను సులభతరం చేయుటకు ''మరొక పద్ధతిని'' గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

మనము f_i లను మార్చే అవకాశం లేదు కాని x_i, f_i ల లబ్దమును సులభతరం చేయుటకు 'x_i' లను చిన్న విలువలుగా మార్చుకోవచ్చు. కాని ఇది ఎలాచేయగలం. ఒకే సంఖ్యను ప్రతిగణన నుండి తీసివేసిన x_i, లు ఎలావస్తాయి? ప్రయత్నించి చూద్దాం.

మొదటి సోపానంలో x_i లలోని ఒకదాని విలువ ''ఊహించిన సగటు''గా ఎన్నుకుంటాము. దీనినే 'a' చే సూచిస్తాము. గణనలను మున్ముందు మరింత సులభతరం చేయడానికి x_1 x_2 ..... x_n ల మధ్య విలువ 'a' ను ఎంచుకుంటాము. కావున మనం $a = 47.5$ అని ఎన్నుకుందాం.

రెండవ సోపానంలో ప్రతి x_i నుండి a యొక్క దూరము $(x_i - a)$ ను కనుగొందాం. దీని విచలనము 'a', గా సూచిస్తాము.

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మూడవ సోపానంలో d_i మరియు వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యం f_i ల లబ్దాన్ని మరియు $f_i\ d_i$ ల యొక్క మొత్తాన్ని కనుగొంటాము. ఈ గణనలు పట్టిక 13.4 పట్టికలో చూపబడ్డాయి.

పట్టిక 13.4

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	మధ్యబిందువు (x_i)	$d_i = x_i$ 47.5	$f_i d_i$
10 – 25	2	17.5	–30	–60
25 – 40	3	32.5	–15	–45
40 – 55	7	47.5	0	0
55 – 70	6	62.5	15	90
70 – 85	6	77.5	30	182
85 – 100	6	92.5	45	270
మొత్తం	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

అందువలన పట్టిక 13.4 నుండి

పై పట్టికనుండి విచలనాల నగటు $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ఇప్పుడు $\bar{d}$ మరియు $\bar{x}$ ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం! d_i ని పొందడానికి మనకు ప్రతి x_i నుండి 'a' ను తీసివేసినాము. అందువల్ల సగటు $\bar{x}$ ను పొందడానికి 'a' ను $\bar{d}$ కి కూడవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనిని గణితపరంగా క్రింది విధంగా వివరించబడినది.

విచలనాలసగటు $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

అందువల్ల
$$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$
$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$
$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$
$$= \bar{x} - a$$
$$\bar{x} = a + \bar{d}$$

అనగా,
$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} \quad .$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పట్టిక 13.4 లోని a, $\sum f_i d_i$ మరియు $\sum f_i$ ల విలువలను, పై సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

$\therefore$ విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62

పైన చర్చించబడిన విధానాన్ని **''విచలన పద్ధతి''** (Deviation Method) లేదా **''ఊహించిన సగటు పద్ధతి''** (Assumed Mean Method) అంటారు.

కృత్యము 1: పట్టిక 13.3 నుండి ప్రతి x_i (అనగా 17.5, 32.5 మొత్తం) ను a గా తీసుకొని సగటును కనుక్కోండి. మీరు ఏమి గమనించారు. ప్రతి పద్ధతిలో నూ కనుగొన్న సగటు ఒక్కటే అనగా 62. అయినదానిని చూశాం (ఎందుకు?).

(ఎందుకు?) మనం తరగతి వ్యాప్తిలో ఏదైనా ప్రాప్తాంకాన్ని అందాజు సరాసరి $'a'$ విలువగా తీసుకొన్నప్పటికీ సరాసరిలో మార్పుచెందదు. అందువలన పొందెడి సరాసరి విలువ $'a'$ యొక్క ఎంపిక మీద ఆధారపడలేదని మనం చెప్పవచ్చు.

పట్టిక 13.4 ను గమనించినట్లైతే 4 వ నిలువు వరుసలోని విలువలను గమనించగా, ఆ విలువలన్నీ 15 యొక్క గుణిజాలే. అందువల్ల ఒక వేళ మనం 4 వ నిలువు వరుసలోని విలువలను 15 చే భాగించగా, మనకు ఆ విలువలు చిన్న సంఖ్యలో వస్తాయి. అప్పుడు ఆ విలువలను f_i తో గుణించడం సులభం (ఇక్కడ, 15 అనేది తరగతి అంతరం లేదా 4వ నిలువు వరుసలోని విలువల యొక్క గ.సా.కా)

అందువల్ల $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ గా తీసుకుంటాము, ఇచ్చట $'a'$ ఊహించిన సగటు మరియు h అనేవి తరగతి అంతరం పైవిధంగా u_i విలువలను వరుసగా కనుగొనాలి (i.e. f_i, u_i కనుగొనాలి తరువాత $\sum f_i$, u_i విలువలను కనుగొనాలి) $h = 15$ గా తీసుకొని (సాధారణంగా తరగతి పొడవును h గా తీసుకుంటాం కాని h అనేది ప్రతి సందర్భంలో తరగతి పొడవు కానవసరంలేదు) ఇప్పుడు 13.5 పట్టికను నిర్మిద్దాం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

పట్టిక 13.5

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య f_i	తరగతి మధ్య విలువ x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i d_i$
10 – 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 – 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 – 55	7	47.5	0	0	0
55 – 70	6	62.5	15	1	6
70 – 85	6	77.5	30	2	12
85 – 100	6	92.5	45	3	18
మొత్తం	$\sum f_i = 30$				$\sum f_i u_i = 29$

$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$ ఇక్కడ మరలా $\bar{u}$ మరియు $\bar{x}$ మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం

$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \quad \bar{u} = \frac{\Sigma f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a \Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\bar{x} - a\right]$$

$$\therefore \quad h\bar{u} = \bar{x} - a$$

లేదా, $\bar{x} = a + h\,\bar{u}$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పై సమీకరణంలో.$\Sigma f_i u_i$ మరియు Σf_i విలువలను పట్టికనుండి తీసుకొని ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62

పైన చర్చించబడిన పద్ధతిని ‘‘**సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి**’’ లేదా సోపాన **విచలన పద్ధతి** అంటారు.

మనం గమనించినది:

* అన్ని d_1 లకు ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉంటే, సోపాన విచలన పద్ధతి అనేది వినియోగించడానికి అనుకూలమైన పద్ధతి.

* పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొన్న సగటు విలువ ఒకటే.

* ఊహించిన సగటు పద్ధతి మరియు సోపాన–విచలన పద్ధతులు అనేవి ప్రత్యక్ష పద్ధతి యొక్క సులభతరం చేయబడిన పద్ధతులు మాత్రమే.

* ఒకవేళ a మరియు h విలువలు పై విధంగా ఇవ్వనప్పటికినీ. శూన్యేతర సంఖ్యలు అయి $\bar{x} = a + h\,\bar{u}$ అనే సూత్రము వ్యవస్థితం అవుతుంది ఎందుకనగా $u_i \frac{x_i - a}{h}$

ఈ పద్ధతులను మరికొన్ని ఉదాహరణలకు అనువర్తింపజేద్దాం.

ఉదాహరణ 2: భారతదేశంలోని వివిధ రాష్ట్రాలు మరియు కేంద్రపాలిక ప్రాంతాలకు చెందిన గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతముల వివరములు ఈ కింది పట్టికలో పొందుపరచబడినాయి. పైమూడు పద్ధతులను ఉపయోగించి మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతాన్ని కనుక్కోండి.

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65	65 – 75	75 – 85
రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య	6	11	7	4	4	2	1

మూలం: NCERT వారు నిర్వహించిన 7వ అఖిల భారతీయ పాఠశాల విద్యా సర్వే గణాంకాల ప్రకారం.

సాధన: తరగతి మధ్య బిందువు x_1 లను కనుగొని, వాటిని ఒక నిలువు వరుసలో రాద్దాం పట్టిక (13.6 చూడండి).

పట్టిక 13.6

ఉపాధ్యాయును శాతం	రాష్ట్రాల / కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాల (f_i)	x_i
15 – 25	6	20
25 – 35	11	30
35 – 45	7	40
45 – 55	4	50
55 – 65	4	60
65 – 75	2	70
75 – 85	1	80

ఇక్కడ $a = 50$, $h = 10$, అనుకోండి

ఇప్పుడు $d_i = x_i - 50$ మరియు $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ మరియు d_i లను కనుగొని పటటిక u_iలో రాద్దాం.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

పట్టిక 13.7

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	రాష్ట్రాల / కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 – 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 – 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 – 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
మొత్తం	**35**				**1390**	**-360**	**-36**

పై పట్టికనుండి, $\sum f_i = 35, \quad \sum f_i x_i = 1390,$

$\sum f_i d_i = -360, \quad \sum f_i u_i = -36.$

ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$$

ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా $$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \left(\frac{-360}{35}\right) = 39.71$$

సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 50 + \left(\frac{-360}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

అందువలన గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లోగల మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతము = 39.71

గమనించండి: పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా సాధించిన ఫలితం ఒకటేనా? ఒక వేళ x_i మరియు f_iలు మరీచిన్నగా వుంటే అప్పుడు ఏ పద్ధతిని ఎన్నుకోవడం అనుకూల మైనది. x_i మరియు f_iలు చిన్నగావున్నప్పుడు ప్రత్యక్ష పద్ధతి ఉపయోగించవచ్చు. ఒక వేళ x_i మరియు f_i ల విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినప్పుడు ఊహించి న పద్ధతి ద్వారా సులభంగా చేయవచ్చు. లేదా సోపాన విచలన పద్ధతి కూడా అనుకూలమైనదే. తరగతి పొడవులు వేరు వేర్వేరుగా ఉండి. మరియు x_i విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినప్పటికీ d_i ల యొక్క సామాన్య కారణాంకాన్ని h గా తీసుకొని. సంక్షిప్త విచలన పద్ధతిలో సగటు కనుగొనవచ్చును.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 3: వన్‌డే క్రికెట్ ఆటలో బౌలర్లు సాధించిన వికెట్ల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో చూపించడమైనది. సరైన పద్ధతిని ఎంచుకొని బౌలర్లు సాధించిన సగటు వికెట్లను కనుగొనుము ఈ సగటు యొక్క ప్రాముఖ్యత ఏమిటి?

వికెట్ల సంఖ్య	20–60	60–100	100–150	150–250	250–350	350–450
బౌలర్ల సంఖ్య	7	5	16	12	2	3

సాధన: ఇచ్చుట తరగతి పొడవులు వేర్వేరుగా ఉన్నాయి. మరియు x_i విలువలు పెద్దవిగా ఉన్నాయి. అయినప్పటికీ సగటు కనుక్కోవడానికి సంక్షిప్త విచలన పద్ధతినే ఎంచుకుందాం ఇచ్చుట $a = 200$ మరియు $h = 20$

పట్టిక 13.8

వికెట్ల సంఖ్య	బౌలర్ల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 – 60	7	40	–160	–8	–56
60 – 100	5	80	–120	–6	–30
100 – 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 – 250	12	200	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
మొత్తం	$\sum f_i = 45$				$\sum f_i u_i = -106$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇప్పుడు, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ $\therefore$ $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

45 మంది బౌలర్లు వన్‌డే క్రికెట్‌లో సాధించిన వికెట్ల సగటు = 152.89 అని తెలుస్తుంది.

ఇప్పుడు ఇంతవరకు నేర్చుకున్నవాటిని ఎలా ఉపయోగిస్తారో చూద్దాం .

కృత్యము 2: మీ తరగతిలోని విద్యార్థులందరిని మూడు గుంపులుగా చేసి ఒక్కొక్క గుంపుకు కింద ఇచ్చిన కృత్యాలలో ఒక దానిని చేయమనండి.

1. మీ పాఠ శాలలో ఇటీవల నిర్వహించిన పరీక్షల్లో, గణితంలో మీ తరగతి విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల వివరాలను సేకరించండి. దీనికి వర్గీకృత పౌనః పున్యవిభాజన పట్టికను తయారు చేయండి.
2. మీ పట్టణం / గ్రామంలో 30 రోజుల్లో నమోదు అయిన 'గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు' వివరాలను సేకరించండి ఇట్టి దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత పౌనః పున్య విభాజన పట్టికలో చూపండి.
3. మీ తరగతి లోని విద్యార్థుల యొక్క ఎత్తులను కొలిచి. అట్టి సమాచారానికి వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేయండి.

అన్ని గుంపుల నుండి సేకరించిన గణనలను వర్గీకృత పౌనః పున్య పట్టికలను తయారు చేసి, ఎవరికి అనువైన పద్ధతిని వారు ఎన్నుకొని సగటు కనుక్కోండి.

అభ్యాసము 13.1

1. ఒక గ్రామంలో కొంతమంది విద్యార్థుల జట్టు ''పర్యావరణ పరిరక్షణ–అవగాహన'' అనే కార్యక్రమంలో భాగంగా 20 ఇండ్లలో సర్వేని నిర్వహించారు. ఎన్నెన్ని మొక్కలు నాటినారో సమాచారాన్ని సేకరించి. కిందిపట్టికలో నమోదు చేసినారు. సగటున ఒక ఇంటికి ఎన్ని మొక్కలు నాటి నారోకనుక్కోండి.

మొక్కల సంఖ్య	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
ఇండ్ల సంఖ్య	1	2	1	5	6	2	3

ఏపద్ధతిలో సగటును కనుగొంటారు. ఎందుకు?

2. ఒక కర్మాగారంలోని 50 మంది కార్మికుల దినసరి భత్యము ఈ కింది పౌనః పున్యవిభజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

దినసరి భత్యము	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
కార్మికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

తగిన పద్ధతిని ఎంచుకొని ఆ కర్మాగారంలోని కార్మికులకు సగటు భత్యమును కనుక్కోండి.

3. ఒక ఆవాసప్రాంతంలో పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చులు (pocket allowance) వివరాలు ఈ కింద పట్టికలో ఇవ్వబడినది. పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు ₹18 అయిన కింది పట్టికలో లోపించిన పౌనఃపున్యం (f) ను కనుక్కోండి.

పిల్లలరోజువారి చేతి ఖర్చు (₹ లలో)	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

4. ఒక వైద్యశాలలో వైద్యులు 30 మంది స్త్రీలకు పరీక్షలు నిర్వహించి, వారి యొక్క హృదయ స్పందనలను కింది చూపిన పట్టికలో నమోదు చేశారు. తగిన విధానాన్ని ఎన్నుకొని స్త్రీల యొక్క హృదయ స్పందనల సరాసరి ప్రతి నిమిషానికి కనుక్కోండి.

హృదయ స్పందనల సంఖ్య / నిమిషం	65–68	68–71	71–74	74–77	77–80	80–83	883–86
స్త్రీల సంఖ్య	2	4	3	8	7	4	2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. పండ్ల మార్కెట్‌లో, పండ్ల వ్యాపారులు మామిడి పండ్లను పెట్టెలో ఉంచి అమ్ముతారు. ఒక్కొక్క పెట్టెలోవుండే మామిడి పండ్ల సంఖ్య వేరువేరుగా ఉంటాయి. పెట్టెలోని మామిడి పండ్ల పంపకాన్ని ఈ కింది పట్టికలో చూపబడినది.

నారింజ పండ్ల సంఖ్య	50–52	53–55	56–58	59–61	62–64
పెట్టెల సంఖ్య	15	10	135	115	25

ఒక్కొక్కపెట్టెలోని సగటు మామిడి పండ్లను కనుక్కోండి. సగటుకనుక్కోవడానికి ఏ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు.

6. ఒక నివాస ప్రాంతంలోని 25 కుటుంబాలకు సంబంధించిన దినసరి ఆహారపు ఖర్చుల వివరాలను ఈ కిందిపట్టికలో ఇవ్వబడినది.

దినసరి ఆహారపు ఖర్చు (₹ లలో)	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
కుటుంబాల సంఖ్య	4	5	12	2	2

తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని సగటున ఒక్కొక్క కుటుంబానికి అయ్యే ఖర్చుకనుక్కోండి.

7. ఒక పట్టణంలోని 30 నివాస ప్రాంతాలలో గాలిలోగల SO_2 యొక్క గాఢత (In Parts Per Million i.e. PPM) ను ఈ కింది పట్టికలో నమోదు చేయబడినది.

SO_2 యొక్క గాఢత (PPM)	పౌనఃపున్యం
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

గాలిలోగల సగటు SO_2 గాఢతను కనుక్కోండి.

8. ఒక తరగతి ఉపాధ్యాయుడు ఒక టర్మ్‌లో తన తరగతికి చెందిన 40 మంది విద్యార్థుల గైరు హాజరు వివరాలను, ఈ కింది చూపిన పట్టికలో చూపబడినది. ఈ టర్మ్‌లో ఒక విద్యార్థి సగటు గైరు హాజరు కనుగొనండి.

రోజుల సంఖ్య	0–6	6–10	10–14	14–20	20–28	28–38	38–40
విద్యార్థుల సంఖ్య	11	10	7	4	4	3	1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. 35 పట్టణాలకు సంబందించి అక్షరాస్యత రేటు (శాతాలలో) ఈ కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. సగటు అక్షరాస్యతను కనుక్కోండి.

అక్షరాస్యత రేటు (%)	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
పట్టణాల సంఖ్య	3	10	11	8	3

13.3 వర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకం (రూఢి విలువ)

బాహుళకం ఇచ్చిన పరిశీలనల్లో లేదా రాశులలో ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అయ్యేది. అని 9వ తరగతిలో నేర్చుకున్న దాన్ని గుర్తుచేసుకోండి. అనగా పరిశీలనల యొక్క గరిష్ట పౌనఃపున్యము. అంతేకాక అవర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుగొనే దాని గురించి చర్చించాం ఇప్పుడు మనం వర్గీకృత దత్తాంశాల బాహళకాన్ని కనుగొనే విధానాన్ని చర్చిద్దాం. ఒకటి కంటే ఎక్కువ పరిశీలనలు ఒకే సమానమైన గరిష్ట పౌనః పున్యాన్ని కలిగివుండటాన్ని గమనించవచ్చు. ఇలాంటి సందర్బాలలో దత్తాంశాలను బహు బహుళక దత్తాం శాలు అంటారు. ఇలాంటి వర్గీకృత దత్తాంశాలువున్నా మనం ఏక బాహుళక సమస్యలకు మాత్రమే నేర్చుకుం దాం.

కింది ఉదాహరణలతో మొదట అవర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుగొనేదాన్ని గుర్తుచేసుకుందాం

ఉదాహరణ 4: 10 క్రికెట్ మ్యాచ్‌లలో ఒక బౌలర్ తీసిన వికెట్లు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ఈ దత్తాంశానికి ''బాహుళకము'' కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తాంశంలోని అంకెలను (రాశులను) ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చగా ఈ కింది పట్టికలో చూపబడినది.

వికెట్ల సంఖ్య	0	1	2	3	4	5	6
మ్యాచ్‌ల సంఖ్య	1	1	3	2	1	1	1

పైదత్తాంశమును పరిశీలించగా, ఎక్కువ మ్యాచుల్లో బౌలర్ '2' వికెట్లను తీసినట్లుగా స్పష్టంగా తెలుస్తున్నది (అనగా 3 సార్లు) అందువల్ల దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 2.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనానికి (వర్గీకృత దత్తాంశానికి) పౌనఃపున్యాలను పరిశీలించి ''బాహుళకం'' కనుక్కోవడం సాధ్యంకాదు. ఇక్కడ మనం గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం ఉన్న ఒక తరగతిని మాత్రం సూచించగలం, అట్టి తరగతిని **బాహుళక తరగతి** అంటారు బాహుళక తరగతిలో ఉండే ఒక విలువ మరియు దీనిని కింది సూత్రం సహాయం లెక్కించవచ్చును.

$$\text{బాహుళకము} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఇక్కడ l = బాహళక తరగతి దిగువ హద్దు

h = బాహుళక తరగతి పొడవు

f_1 = బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతియొక్క పౌనఃపున్యము.

f_2 = బాహుళక తరగతికి తరువాతవున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము.

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి బాహుళకమును కనుగొనే విధానాన్ని ఈ కింది ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలించుద్దాం.

ఉదాహరణ 5: ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో కొంత మంది విద్యార్థుల బృందం 20 కుటుంబాల సంఖ్యను ఈ కింద చూపిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపబడినది.

కుటుంబ పరిమాణం	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11
కుటుంబాల సంఖ్య	7	8	2	2	1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకం కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చుట గరిష్ఠ తరగతి పౌనః పున్యము 8 ఈ పౌనః పున్యానికి సంబందించిన తరగతి 3–5 అందువల్ల

బాహుళక తరగతి 3 – 5.

ఇప్పుడు బాహుళక తరగతి = 3 – 5.

మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు $l = 3$

తరగతి పొడవు $(h) = 2$

బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం $(f_1) = 8$

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం $f_0 = 7$

బాహుళక తరగతికి తరువాతవున్న తరగతి యొక్క పౌనః పున్యం $f_2 = 2$

విలువలను కింది సూత్రంలో ప్రతిక్షేంచగా.

బాహుళకము $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$$= 3 + \left[\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right] \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7}$$

$$= 3.286$$

$\therefore$ పైదత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 3.286.

ఉదాహరణ 6: ఒక తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కులు ఉదాహరణ –1 పట్టిక 13.3లో ఇవ్వబడినవి. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకం కనుక్కోండి. అదేవిధంగా బాహుళకము మరియు సగటులను పోల్చండి.

సాధన: ఉదాహరణ –1 పట్టిక 13.3లో వున్నట్లు దత్తాంశంలోని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు (7 గురు) 40 – 55 తరగతి అంతరంలోని మార్కులు సాధించి ఉన్నారు. కనుక 40 – 55 అనేది బాహుళకము తరగతి అవుతుంది.

మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు $(l) = 40$

తరగతి పొడవు $(h) = 45$

బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనః పున్యము $(f_1) = 7$

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి పౌనః పున్యం $(f_0) = 3$

బాహుళక తరగతికి తరువాతవున్న పౌనఃపున్యం $(f_2) = 6$

$\therefore$ బాహుళకము $= l + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

బాహుళకము $= 40 + \left[\dfrac{7-3}{14-3-6}\right] \times 15 = 52$

ఉదాహరణ 1 నుండి సగటు 62 అనిమనకు తెలుసు. కావున ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు 52 మార్కులుతెచ్చుకున్నారు. అయితే విద్యార్థుల సగటు మార్కులు 62.

సూచనలు:

1. ఉదాహరణ 6నుండి బాహుళకం సగటు కన్నా తక్కువ కాని కొన్ని సమస్యలలో సమానం కాని లేదా సగటుకన్నా ఎక్కువగాని వుండవచ్చు.
2. సందర్భాన్ని బట్టి విద్యార్థులకు వచ్చిన సరాసరి అంశాలు తేదా ఎక్కువ మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు సరాసరిని కనుగొనే అవసరం. ఈ రెండు పన్ని వేశాలలో ఏదైనా ఒకటి మనం పరిగణిద్దాం. మొదటి సన్నివేశంలో సగటు మరియు రెండవ సన్నివేశంలో బాహుళకము కావాల్సివుంది.

కృత్యము 3: కృత్యం 2లో తీసుకున్న గుంపులను కొనసాగిస్తూ ఆసన్నివేశాలను గుంపులకు ఇవ్వడం. ప్రతి గుంపుకు దాత్తాంశాల బాహుళకాన్ని కనుక్కోమని తెలిపి వారు దాన్ని సరాసరితో పోల్చి రెండింటి అర్థాన్ని వివరించాలి.

సూచన: వేరు వేరు తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశాలకు కూడా వర్గీకృత దత్తాంశాల బాహుళ కొన్ని కనుగొనవచ్చు. అయితే ఇప్పుడు మనం దీని గురించి చర్చించడంలేదు.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం 13.2

1. ఒక సంవత్సరంలో, ఒక వైద్యశాలలో చేరిన రోగుల యొక్క వయసుల వివరాలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

వయసు (సంవత్సరాలు)	5–15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

పై దత్తాంశానికి సగటు మరియు బాహుళకములను కనుక్కోండి. అదే విధంగా కేంద్ర స్థానవిలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించండి.

2. కింది పట్టికలో 225 విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల (గంటలలో) వివరాలు ఇవ్వబడినవి.

జీవితకాలం (గంటలలో)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
పౌనః పున్యం	10	35	52	61	38	29

పై విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

3. ఒక గ్రామంలోని 200 కుటుంబాల యొక్క నెలసరి ఖర్చుల వివరాలను ఈ కింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. ఆ కుటుంబాల నెలసరిఖర్చుల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

నెలసరిఖర్చు (₹ లలో)	కుటుంబాల సంఖ్య
1000–1500	24
1500–2000	40
2000–2500	33
2500–3000	28
3000–3500	30
3500–4000	22
4000–4500	16
4500–5000	7

4. రాష్ట్రాల వారిగా ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలల్లోగల ఉపాధ్యాయ విద్యార్థి నిష్పత్తి విలువలను ఈ కింది పౌనః పున్య విభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినది. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని మరియు సగటును కనుక్కోండి మరియు ఈ రెండు కేంద్రస్థాన విలువలపై వ్యాఖ్యానించండి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పిల్లల సంఖ్య	రాష్ట్రాలు కేం. పా.పా. సంఖ్య
15–20	3
20–25	8
25–30	9
30–35	10
35–40	3
40–45	0
45–50	0
50–55	2

5. అంతర్జాతీయ వన్‌డే క్రికెట్ మ్యాచ్‌ల్లో ప్రపంచంలో అత్యున్నత శ్రేణి బ్యాట్స్‌మెన్‌లు సాధించిన పరుగుల వివరాలును ఈ కింది పౌనః పున్య విభాజనపట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

పరుగులు	బ్యాట్స్‌మెన్‌లసంఖ్య
3000–4000	4
4000–5000	18
5000–6000	9
6000–7000	7
7000–8000	6
8000–9000	3
9000–10,000	1
10,000–11,000	1

పైదత్తాంశానికి ''బాహుళకాన్ని'' కనుక్కోండి

6. ఒక విద్యార్థి రోడ్డుపై ఒక స్థానంనుండి వెళ్ళే కార్ల సంఖ్య ప్రతి 3 నిమిషాలకు ఒకసారి 100 అవధు లెక్కించి. వివరాలను ఈ కింది పట్టికలో నమోదుచేశాడు. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

కార్ల సంఖ్య	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
పౌనః పున్యం	7	14	13	12	20	11	15	8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.4 వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము

IX తరగతిలో చదివినట్లు ''మధ్యగతము'' అనేది కేంద్రస్థాన విలువ లో ఒకటి, ఇది ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని రాశుల లేదా పరిశీలనాంశాల యొక్క ''మధ్యవిలువ''ను ఇస్తుంది. అవర్గీకృత దత్తాంశానికి ''మధ్యగతాన్ని'' కనుగొనే విధానాన్ని ఒక్కసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. అవర్గీకృత దత్తాంశాలకు మధ్యగతమును కనుగొనుటకు ముందుగా దత్తాంశంలోని రాశులను ''ఆరోహణ క్రమంలో'' అ మార్చుకోవాలి అప్పుడు రాశులసంఖ్యే 'n' చేసిన సంఖ్య అయితే, మధ్యగతము అనేది $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వరాశి అవుతుంది.

ఒకవేళ రాశుల సంఖ్య 'n' సరి సంఖ్య అయితే, మధ్యగతము $\left(\frac{n}{2}\right)$ వరాశి మరియు $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశులసరాసరి అవుతుంది.

ఒక పరీక్షలో 50 గరిష్ఠ మార్కులకు, 100 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులను కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. ఈ దత్తాంశాలకు మధ్యగతాన్ని ఎలా కనుక్కోవాలో గమనిద్దాం.

సాధించిన మార్కులు	20	29	28	33	42	38	43	25
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	28	24	15	2	4	1	20

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మొదట, మనం మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి. పౌనఃపున్య పట్టికను ఈ కింది విధంగా తయారు చేయాలి.

పట్టిక 13.9

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనః పున్యము)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
మొత్తం	100

ఇక్కడ n = 100 ఇది ఒక సరిసంఖ్య అప్పుడు మధ్యగతము $\left(\frac{n}{2}\right)$ వరాశి మరియు మొత్తం $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది. అనగా 50వ రాశి 51వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది.

పట్టిక 13.10

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
20	6
25 వరకు	6 + 20 = 26
28 వరకు	26 + 24 = 50
29 వరకు	50 + 28 = 78
33 వరకు	78 + 15= 93
38 వరకు	93 + 4 = 97
42 వరకు	97 + 2 = 99
43 వరకు	99 + 1 = 100

(మధ్యమ విలువ స్థానమును కనుగొనుటకు మనము ‘‘ఆరోహణ సంచిత పౌనః పున్యాలను రాస్తాము.)

ఇప్పుడు పై పట్టిక ఆధారంగా పౌనః పున్య పట్టికకు మరో నిలువు వరుసను కలపడం ద్వారా వచ్చే నూతన పట్టిక సంచిత పౌనః పున్య పట్టికగా పేర్కొంటాము.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పట్టిక 13.11

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనః పున్యము
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

పై పట్టికనుండి కింది విషయాలను గమనించవచ్చు

50 వ పరిశీలనాంశం 28. (ఎందుకు?)

51 వ పరిశీలనాంశం 29.

మధ్యగతము $\frac{28+29}{2} = 28.5$

సూచన: పై పట్టికలో 1వ మరియు 3వ నిలువు వరుసలను కలిపి సంచిత పౌనః పున్య పట్టిక అంటాము. ''మధ్యగత మార్కులు 28.5 అనేది 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 మార్కుల కంటే ఎక్కువగాను 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 కంటే తక్కువ వచ్చాయనే విషయాల్ని తెల్పుతుంది.

కింది పట్టికలోని వర్గీకృత దత్తాంశంలో ఒక పరీక్షలో 100 మార్కులకు గాను 53వుంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఇవ్వబడినవి.

పట్టిక 13.12

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0–10	5
10–20	3
20–30	4
30–40	3
40–50	3
50–60	4
60–70	7
70–80	9
80–90	7
90–100	8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పై పట్టిక ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను చెప్పే ప్రయత్నం చేద్దాం.

10 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎంతమంది? 5 మంది అని మనకు స్పష్టంగా తెలుసు.

20 కంటే తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులలో; 0–10 మార్కులు పొందిన వారు, 10–20 మార్కులు పొందినవారు కూడా కలిసివుంటారు. కాబట్టి 20 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందినవారు 5 + 3 అంటే 8 మంది విద్యార్థులు. అందువల్ల మనం 10–20 అనే తరగతి యొక్క సంచిత పౌనః పున్యము 8గా చెప్పవచ్చు.

అదేవిధంగా మనం మిగిలిన తరగతుల యొక్క సంచిత పౌనః పున్యాలను కూడా కనుగొనవచ్చును. అంటే 30 మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను; 40 మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను; 40 మార్కుల కంటే తక్కువ... 100 మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు.

పట్టిక 13.13

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10 కంటే తక్కువ	5
20 కంటే తక్కువ	5 + 3 = 8
30 కంటే తక్కువ	8 + 4 = 12
40 కంటే తక్కువ	12 + 3 = 15
50 కంటే తక్కువ	15 + 3 = 18
60 కంటే తక్కువ	18 + 4 = 22
70 కంటే తక్కువ	22 + 7 = 29
80 కంటే తక్కువ	29 + 9 = 38
90 కంటే తక్కువ	38 + 7 = 45
100 కంటే తక్కువ	45 + 8 = 53

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పై పట్టికను ''ఆరోహణ సంచిత పౌనః పున్య విభాజన పట్టిక'' అంటాము. ఇక్కడ 10, 20, ...100లు వరుస తరగతులయొక్క ఎగువ హద్దులు అవుతాయి.

పైన చెప్పిన విధంగా 'O' గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య. 10 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య 20 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందినవారి సంఖ్య ఇలా పట్టిక 13.12లో చూసినట్లు 'O' కంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారు 53 మంది ఉన్నారని పరిశీలించవచ్చు.

5 మంది విద్యార్థులు 0 – 10 తరగతిలో 5 గురు విద్యార్థులున్నారు. కాబట్టి 10 కాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 53 – 5 = 48గా నిర్ధారించవచ్చు. ఇదే విధంగా 20 గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 48 – 3 = 45 అవుతుంది. ఇలాగే 30గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 45 – 4 = 41 అవుతుంది. ఇదే విధంగా కింది పట్టిక 13.14 చూపబడినది.

పట్టిక 13.14

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచిత పౌనఃపున్యం)
0 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	53
10 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	53 – 5 = 48
20 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	48 – 3 = 45
30 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	45 – 4 = 41
40 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	41 – 3 = 38
50 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	38 – 3 = 35
60 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	35 – 4 = 31
70 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	31 – 7 = 24
80 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	24 – 9 = 15
90 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ	15 – 7 = 8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పై పట్టికను ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక అంటారు.

ఇక్కడ 0, 10, 20.... 90 లువరుసగా తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు అవుతాయి. దీనికి సరైన దిగువ హద్దులను రాయండి.

ఇప్పుడు వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడంలో ఈ సంచిత పౌనః పున్య విభాజన పట్టికనుండి ఏదైనా ఒక దానిని ఉపయోగించుకోవచ్చు.

పట్టిక 13.12 మరియు పట్టిక 13.13 లనుకలుపగా పట్టిక 13.15 కింద ఇవ్వబడినది.

పట్టిక 13.15

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య *(f)*	సంచిత పౌనః పున్యం *(f)*
0 – 10	5	5
10 – 20	3	8
20 – 30	4	12
30 – 40	3	15
40 – 50	3	18
50 – 60	4	22
60 – 70	7	29
70 – 80	9	38
80 – 90	7	45
90 – 100	8	53

ఇప్పుడు వర్గీకృత దత్తాంశంలో సంచిత పౌనః పున్య పట్టికల నుండి మధ్య విలువ అనేది ఏదో ఒక తరగతి అంతరంలోని ఒక విలువ అవుతుంది. కాబట్టి ఈ మొత్తం విభాజనమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే తరగతిలోని ఒక మధ్య విలువను మనం కనుక్కోవాల్సివుంటుంది కాని అది ఏ తరగతి అవుతుందో ఎలాకనుక్కోవడం.

ఈ తరగతి కనుక్కోవడానికి మనం $\frac{n}{2}$ విలువను మరియు అన్నితరగతుల యొక్క సంచితపౌనఃపున్యాలను కనుక్కుంటాము. తర్వాత ఏ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{n}{2}$ ను మొదటిసారి అధిగమిస్తుందో ఆ తరగతిని మధ్య తరగతిగా గుర్తిస్తాము. పై విభాజనము నందు కావున $n = 53$ $\frac{n}{2} = 26.5$ కన్నా ఎక్కువైన కనీస సంచిత పౌనఃపున్యము గల తరగతి 60 – 70 దీనిని మధ్యగత తరగతి అంటారు. సంచిత పౌనఃపున్యం 29. $\frac{n}{2} = 26.5$ కంటే కొంచెంపెద్దది.

$\therefore$ 60 – 70 అనునది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

మధ్యగత తరగతి కనుక్కున్న తరువాత, కింది సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగ తమును కనుక్కుంటాము.

మధ్యగతం $= l + \left[\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ఇందులో l = మధ్య తరగతి దిగువ హద్దు

n = దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య

cf = మధ్య తరగతికి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనః పున్యము

f = మధ్య తరగతి యొక్క పౌనః పున్యము

h = మధ్య తరగతి పొడవు (తరగతి పొడవు సమానంగావుండే టట్లు చూడాలి)

పట్టిక నుండి $\frac{n}{2} = 26.5, l = 60, cf = 22, f = 7, h = 10$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

మధ్యగతము $= 60 + \left(\dfrac{2605 - 22}{7}\right) \times 10$

$= 60 + \dfrac{45}{7}$

$= 66.4$

$\therefore$ తరగతిలోని సగం మంది విద్యార్థులు 66.4 కన్నా తక్కువ మార్కులు మిగిలిన సగం మంది విద్యార్థులు 66.4 కన్నా ఎక్కువ మార్కులు వచ్చి ఉంటాయి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 7: ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతిలోని 51 మంది బాలికల ఎత్తు (సెం.మీ.లలో) గురించి చేసిన సర్వేఫలితాలు పక్క పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. వారి ఎత్తుల మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి:

ఎత్తు (సెం.మీ.లలో)	బాలికలసంఖ్య
140 కంటే తక్కువ	4
145 కంటే తక్కువ	11
150 కంటే తక్కువ	29
155 కంటే తక్కువ	40
160 కంటే తక్కువ	46
165 కంటే తక్కువ	51

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సాధన: మధ్యగత ఎత్తును కనుక్కోవడానికి మొదట తరగతి అంతరాలను, వాటికి సంబంధించిన పౌనః పున్యాలను కనుక్కోవలెను.

ఇచ్చిన విలువలు ఎగువ హద్దుకన్నా తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యాంలు కావు. ఎత్తులు 140, 145, 150,.... లు ఎగువ హద్దులు. అనగా తరగతి అంతరాలు 140 కన్నా తక్కువ. 140 – 145, 145 – 150...... అవుతాయి. పట్టికను పరిశీలిస్తే 140 కన్నా తక్కువ పొడవుగల బాలికల సంఖ్య 4 అనగా 140కన్నా తక్కువ తరగతి యొక్క పౌనః పున్యము 4. 145 cm కన్నా తక్కువ పొడవుగల వారు 11 మంది అనగా 140–145 ఈ తరగతి అంతరంలోగల బాలికల సంఖ్య 11 – 4 = 7 అవుతుంది. అదేవిధంగా 145 – 150 యొక్క ఈ పౌనః పున్యం 29 – 11 = 18. 50 – 155 యొక్క పౌనః పున్యం 49 – 29 = 11 మొదలగునవి. అందువలన, దత్త సంచిత పౌనఃపున్యాలనుండి మన పౌనః పున్య వితరణా పట్టిక ఈ విధంగా ఉంటుంది.

పట్టిక 13.16

తరగతి అంతరం	పౌనః పున్యము	సంచిత పౌనః పున్యము
140 కన్నా తక్కువ	4	4
140–145	7	11
145–150	18	29
150–155	11	40
155–160	6	46
160–165	5	51

ఇక్కడ $n = 51,\ \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

దత్తాంశంలోని 25.5వరాశి 146 –150 తరగతికి చెందినది.

$\therefore$ 145 –150 మధ్యంతర తరగతి

మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు $l = 145,$

మధ్యగత తరగతి

ముందు తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం $cf = 11$

మధ్య తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం $f = 18$

మధ్యగత తరగతి పొడవు $h = 5$

సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతము $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$\therefore$ బాలికల పొడవుల యొక్క మధ్యగతము 149 – 03 cm

అనగా 50% మంది బాలికలు 149.03 cm కన్నా ఎక్కువ పొడవు కలిగివుంటారు. మిగిలిన 50% మంది 149.03 సెం.మీ కన్నా తక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 8: కింది దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 525 మరియు దత్తాంశంలోని రాశుల మొత్తం 100 అయిన x, y విలువలను కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం
0–100	2
100–200	5
200–300	x
300–400	12
400–500	17
500–600	20
600–700	y
700–800	9
800–900	7
900–1000	4

సాధన:

తరగతి అంతరం	పౌనః పున్యం	సంచిత పౌనః పున్యం
0–100	2	2
100–200	5	7
200–300	x	$7 + x$
300–400	12	$19 + x$
400–500	17	$36 + x$
500–600	20	$56 + x$
600–700	y	$56 + x + y$
700–800	9	$65 + x + y$
800–900	7	$72 + x + y$
900–1000	4	$76 + x + y$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 100$ అని ఇవ్వబడినది.

$76 + x + y = 100$ i.e. $x + y = 24$ (1)

మధ్యగతము 525 అనురాశి 500 – 600 తరగతికి చెందినది.

కావున $l = 500, f = 20, cf = 36 +, h = 100$

సూత్రము ఉపయోగించి

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

$525 - 500 = (14 - x) \times 5$

$25 = 70 - 5x$

$5x = 70 - 25 = 45$

$5x = 45$

$\therefore x = 9$

సమీకరణం (1) నుండి $9 + y = 24$

$\therefore y = 15$

ఇప్పుడు కేంద్రీయ స్థాన విలువలలోని మూడు ముఖ్యమైన అంశాలను గూర్చినేర్చుకున్నాము. 'ప్రత్యేకమైన సందర్భాలలో ఏ అంశం సరైన దని నేర్చుకుందాం.

అంక మధ్యమము దత్తాంశంలోని అన్ని రాశుల విలువలను పరిగణలోనికి తీసుకుంటుంది. కనుక అంకమధ్యమమును అత్యంత విశ్వసనీయమైన కేంద్రీయ స్థాన విలువ అంటారు. దీనిని ఉపయోగించి రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువరాశుల లేక విభాజనములను సులభంగా పోల్చవచ్చును. ఉదాహరణకు రెండు పాఠశాలలలోని విద్యార్థుల పరీక్షా ఫలితాల సరాసరులను కనుగొని పోల్చడం. ద్వారా ఏ పాఠశాల సమర్థవంతంగా పనిచేస్తున్నది అని చెప్పవచ్చును.

కొన్ని దత్తాంశములలో అంత్య విలువలు అంకమధ్యమంపై ఎక్కువ ప్రభావం చూపుతాయి. సాధారణంగా పౌనఃపున్యాలన్నీ దాదాపు సరిసమానంగా ఉన్న తరగతులతో కూడిన దత్తాంశము యొక్క అంక మధ్యమము ఆదత్తాంశానికి సరైన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుంది కాని ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం 2, మిగిలిన పౌనఃపున్యాలు 20, 5, 20, 21, 18 అయినప్పుడు అంక మధ్యమము సరైన ప్రాతినిధ్య విలువకాదు.

దత్తాంశంలోని విడివిడి రాశులు. ప్రత్యేకంగా అంత్యమ రాశుల విలువలకు. ప్రాముఖ్యత లేనప్పుడు దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్య విలువను కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు, ఉదాహరణకు ఒక ప్రాంతంలోని అందరు కార్మికుల వేతనములకు ప్రాతినిధ్య విలువ కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు మధ్యగతమును అనువైన కేంద్రీయ స్థాన విలువగా తీసుకుంటారు.

ఎక్కువసార్లు పునరావృతమయ్యే, బహుప్రాముఖ్యంగల రాశులను గుర్తించవలసిన సందర్భాలలో బాహుళకమును కేంద్రీయ స్థాన విలువగా పరిగణిస్తారు. ఉదాహరణకు ఎక్కువ మంది వీక్షించే టెలివిజన్ ప్రోగ్రాము కనుగొనుటకు, ఎక్కువ అమ్మకముగల వస్తువు కనుగొనుటకు ఎక్కువ మంది ఉపయోగించు వాహనమురంగు కనుక్కోవడానికి బాహుళకం ఉపయోగిస్తారు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనించండి:

1. కేంద్రీయ స్థాన విలువలైన మూడింటి మధ్య సంబంధం ఉంది.

3 మధ్యగతము = బాహుళకము + 2 సగటు.

2. తరగతి అంతరం వేర్వేరుగా వుండే వర్గీకృత దత్తాంశాలకు మధ్యగతము కనుగొనవచ్చును. అయితే ఇప్పుడు మనం దానిని చర్చించడంలేదు.

అభ్యాసం 13.3

1. ఒక నివాస ప్రాంతంలోని 68 మంది వినియోగదారుల యొక్క నెలసరి విద్యుత్ వినియోగం కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ దత్తాంశమునకు అంక మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుక్కొని పోల్చండి.

నెలవారి వినియోగం (యూనిట్లలలో)	వినియోగ దారుల సంఖ్య
65–85	4
85–105	5
105–125	13
125–145	20
145–165	14
165–185	8
185–205	4

2. కింది పట్టికలో ని దత్తాంశాల మధ్యగతం 28.5 అయిన x,y విలువ కనుగొనండి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యము
0–10	5
10–20	x
20–30	20
30–40	15
40–50	y
50–65	5
మొత్తం	60

3. ఒక జీవిత భీమా సంస్థ ఉద్యోగి, పాలసీదారుల వయస్సులను బట్టి తయారు చేసిన విభాజన పట్టిక కింద ఇవ్వబడినది. పాలసీదారుల వయస్సుల మధ్యగతం కనుక్కోండి. 18 సంవత్సరములనుండి 60 సంవత్సరముల వయసుగల వారికి మాత్రమే పాలసీలు ఇస్తారు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

వయస్సు (సం)	పాలసీదారుల సంఖ్య
20 కన్నా తక్కువ	2
25 కన్నా తక్కువ	6
30 కన్నా తక్కువ	24
35 కన్నా తక్కువ	45
40 కన్నా తక్కువ	78
45 కన్నా తక్కువ	89
50 కన్నా తక్కువ	92
55 కన్నా తక్కువ	98
60 కన్నా తక్కువ	100

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. ఒక చెట్టు యొక్క 40 ఆకుల పొడవులు దగ్గర మి.మీ. వరకు కొలిచి తయారు చేసిన కింది పట్టిక నుండి వానిపొడవుల మధ్యగతము చూపబడింది.

పొడవు (మి.మీ)	ఆకుల సంఖ్య
118–126	3
127–135	5
136–144	9
145–153	12
154–162	5
163–171	4
172–180	2

(**సూచన:** ఆకుల పొడవుల మధ్యగతము కనుగొనండి. ధ్యగతము కనుక్కోవడానికి దత్తాంశాన్ని అనుకూలం గా మార్చుకోవాలి, ఎందుకంటే మధ్యగతము సూత్రంలో తరగతి హద్దులు ఒకదాని కొకటి కొనసాగిం పబడుతాయి. తరగతులను 117.5 – 126.5 – 135.5..... 171.5 – 180.5 గా మారుతాయి)

5. ఒక పరిశీలనలో 400 నియాన్ బల్బుల జీవితకాలం కింది విభాజనలో ఇవ్వబడినవి.

జీవితకాలం (గంటలలో)	బల్బుల సంఖ్య
1500–2000	14
2000–2500	56
2500–3000	60
3000–3500	86
3500–4000	4
4000–4500	62
4500–5000	48

బల్బుల జీవితకాలములకు మధ్యగతము కనుక్కోండి.

6. ఒక టెలిఫోను డైరెక్టరీనుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటి పేర్లను తీసుకొని వాటిలోని అక్షరాల సంఖ్యను బట్టి కింది పౌనః పున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేయబడినది.

అక్షరాల సంఖ్య	1–4	4–7	7–10	10–13	13–16	16–19
ఇంటిపేర్ల సంఖ్య	6	30	40	16	4	4

ఇంటి పేర్లలోని అక్షరాల సంఖ్యకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుక్కోండి.

7. కింది విభాజన పట్టికలో 30 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడ్డాయి. వారి బరువుల మధ్యగతము కనుక్కోండి.

బరువు (**kg** లలో)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	8	6	6	3	2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.5 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో కింది అంశాలను నేర్చుకున్నాము:

1. వర్గీకృత విభాజనానికి అంకమధ్యమం లెక్కించడానికి సూత్రాలు.

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) విచలన పద్ధతి $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ లేదా $\bar{x} = a + \bar{d}$

(iii) సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}\right)h$ లేదా $\bar{x} = a + h\bar{x}$

తరగతి అంతరం దాని మధ్య బిందువులలో కేంద్రీకృత మైనదని ఊహించబడినది.

2. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన మునకు బాహుళక సూత్రము

బాహుళకము $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ఇక్కడున్న ప్రతి గుర్తుకు వాటికి అనుగుణంగా అర్థం కలిగివున్నాయి.

3. సంచిత పౌనఃపున్యము కనుగొనడానికి ఆ తరగతి పౌనః పున్యానికి ఐనుకటి తరగతుల పౌనఃపున్యాన్ని కలుపుతూ వచ్చేవి.

4. వర్గీకృత పౌనః పున్య విభాజన మునకు మధ్యగతము సూత్రం.

మధ్యగతము $= l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

ఇక్కడ సంకేతాలు వాటి సామాన్య అర్థాలను కలిగివున్నాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చదివేవారికి సూచన

వర్గీకృత దత్తాంశాల మధ్యగతము, మరియు బాహుళకము కనుగొనేటప్పుడు సూత్రాన్ని ఉపయోగించేముందు. తరగతి అంతరాలు నిరంతరంగా. వున్నాయా అని నిర్ధారించుకోవాలి. ఇదే విధంగా ఓజివ్ వక్రాలను గీసేటప్పుడు కూడా చూసుకోవాలి. ఓజివ్ గీసేటప్పుడుస్కేలు రెండు అక్షాలపైన సమానంగా లేకుండా కూడా వుండవచ్చు.

సంభావ్యత

14

N9A6Z4

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

- R.S. Woodward

సంభావ్యతల సిద్ధాంతం మరియు దోషాలుగల సిద్ధాంతాలు రెండూ కూడా ప్రముఖ లెక్కలలో ఆసక్తి మరియు విశేషమైన ప్రాయోగిక ప్రాముఖ్యతా క్షేత్రాన్ని అసాధారణంగా వ్యాపించింది.

– ఆర్.ఎస్. వుడ్‌వర్డ్

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

14.1 సంభావ్యత సైద్ధాంతిక వివరణ

కింది సన్నివేశాలను గమనిద్దాం:

ఒక నాణ్యాన్ని యాదృచ్ఛికంగా ఎగరవేశామని అనుకుందాం.

> మనం ఒక నాణెము గురించి చెప్పేటప్పుడు అది నిష్పాక్షికయైన (fair) నాణెంగా పరిగణిస్తాం. నాణెన్ని ఎగురవేసినప్పుడు అది కిందికి వచ్చినప్పుడు ఒకే వైపు మరొకవైపుకంటే ఎక్కువ సార్లు పడే ఏకారణం లేకుండా సొష్టవంగావుండాలి. నాణెం ఈ లక్షణాన్ని మన నిష్పాక్షికం అని (unbiased) అంటాము. 'యాదృచ్ఛికం'గా ఎగుర వేయుట ''ఈ పదాన్ని ఒక నాణెన్ని ఏ పక్షపాతం లేదా అడ్డంకులు లేకుండా స్వతంత్రంగా పడేటట్లు వదలబడినది అని అర్థం చేసుకోవాలి.

మనకు మొదటే తెలిసిన దానివల్ల నాణెము బొమ్మ లేదా బొరుసు పడే సంభవములు మాత్రమే ఉన్నాయి. (నాణెం అంచుపై నిలబడే సందర్భాన్ని మనం పరిగణలోనికి తీసుకోము, అయితే కొన్ని సార్లు ఇది సాధ్యమవుతుంది. ఉదాహరణకు ఇసుకపైన పడినప్పుడు). ప్రతి ఫలితంలోనూ బొమ్మ ఎన్ని సార్లు పడుతుందో అన్నే సార్లు బొరుసు కూడా పడే అవకాశాలున్నాయని మన ఊహిస్తాం. బొమ్మ మరియు బొరునులకు ''సమ సంభవ ఘటనలు'' అని అంటారు.

ఒక పాచికను వేసినప్పుడు 'సమసంభవ ఘటనలకు' మరొక ఉదాహరణ అవుతుంది. పాచిక అన్నప్పుడు అది నిష్పాక్షికమైనది అనే అర్థాన్నిస్తుంది. సాధ్యమయ్యే పర్యావసానాలు ఎన్ని అవి ఏవి?

ఆరు సంభవాలు కలిగిన పర్యావసానాలు సాధ్యం అవి 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6 కాబట్టి ప్రతి ఒక సంఖ్య పడే అవకాశాలు సమానం. పాచిక దొర్లించినప్పుడు సమసంభవ ఘటనలు 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6.

ప్రతి ప్రయోగంలోనూ సమాన సంభవాలు వున్నాయా? చూద్దాం.

ఒక సంచిలో 4 ఎరుపు మరియు 1 నీలిరంగు బంతులు వున్నప్పుడు లోపలికి చూడకుండా ఒక బంతిని తీసినప్పుడు వచ్చే ఫలితాలు ఏవి అని ఊహించండి. ఫలితాలు ఏవి?

ఒక ఎరుపు బంతి మరియు ఒక నీలిరంగు బంతి వచ్చే సంభవాలు సమానమా? సంచిలో 4 ఎరుపు మరియు ఒక నీలి బంతి మాత్రమే ఉండడంవల్ల. ఎక్కువ సంభవాలు ఎరుపు రంగు బంతికే అని ఒప్పుకోవాల్సి వస్తుంది. కాబట్టి ఫలితాలు (ఒక ఎరుపు లేదా ఒక నీలి బంతి) సమాన సంభవాలు లేవు. ఏదైనా రంగు ఒక బంతిని సంచినుండి తీసినప్పుడు సమాన సంభవాలున్న ఫలితం ఉండాలని లేదు.

అదేవిధంగా ఈ అధ్యాయంలో వచ్చే **అన్ని ప్రయోగాలు 'సమాన సంభవనీయ ఫలితాలు' వుంటాయని ఊహిస్తాము.**

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9వ తరగతిలో ఒక ఘటన 'E' యొక్క ప్రాయోగిక సంఖ్యావ్యత P(E) ని మనం ఎలా వ్యాఖ్యానించాము.

$$P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూలపర్యావ సానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యావసానాల సంఖ్య}}$$

అనేక సార్లు పునరావృతమైయ్యే ప్రయోగానికి సంబందించిన ఏదైనా ఘటనకు సంభావ్యత ప్రాయోగిక అర్థవివరణను అన్వయించడాని సాధ్యం. ప్రయోగం పునరావృతం చేయడానికి అవకాశాలు కొన్ని పరిమితులను కలిగివుంది. వాటిలో ఇది అధిక ఖర్చు లేదా కార్యరూపంలోనికి రావడానికి అనేక సన్నివేశాలు ఖచ్చితంగావున్నాయి. నాణాన్ని ఎగురవేసినప్పుడు. లేదా పాచికను వేసినప్పుడు ఈ ప్రయోగాలలో ఖచి ్చతమైనది ఉపగ్రహాలని పంపేటప్పుడు. విఫలమయ్యే ప్రాయోగిక సంభావ్యతను లెక్కించడానికి (పయోగాన్ని పునరావృతం చేయడం లేదా భూకంపంలో చాలా అంతస్తుల భవనాలు కూలి పోయే ప్రాయోగిక సం భావ్యతలను లెక్కించడానికి భూకంపం విద్యామానాన్ని పునరావృతం చేయడం ఎలా?

ఇలాంటి ప్రయోగాలలో, ఊహలు నిజం (సిద్దాంతపర) సంభావ్యతను నేరుగా లెక్కించడానికి సహాయపడును కాబట్టి పునరావృతం తప్పించడానికి నిర్దిష్టంగా ఊహించడానికి సిద్ధమైనాము. సమానసాధ్యతలు గలఫలితాలు ఊహమాత్రమే. (ఒక నాణెం మరియు ఒక పాచికపై రెండు ఉదాహరణల ప్రకారం అనేక ప్రయోగాలలో ఇది సరైనది) పైన తెలిపిన ఒక ఊహ, ఘటన సంభావ్యత కింది విధంగా ఇవ్వడానికి కారణమైనది.

ఒక ఘటన సైద్ధాంతిక సంభావ్యత E ను P(E) అని మరియు ఈ విధంగా రాస్తాము.

ఈ ప్రయోగంలో వెలువడే ఫలితాలు సమసంభవమైన విగాను మరియు ప్రతిరూప ఆవరణ పరిమితమైనది గాను పరిగణించబడినవి. దీనిని 1795లో 'ఫైరీ సైమన్ బ్యాప్లాస్' తెలిపినారు.

$$P(E) = \frac{\text{ఘటన E కి అనుకూలించే ఫలితాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగంలోని అన్ని సాధ్యమైన ఫలితాల సంఖ్య}}$$

ఫైరీ సైమన్ లాప్లాస్ (1749 1827)

సంభావ్యత సిద్ధాంతానికి మూలం 16వ శతాబ్దంలో ఇటలీ భౌతిక శాస్త్రవేత్త అయిన జె. కార్డన్ (J.Cardan) "*The Book on games of Chance*" అనే దానిలో ఈ విషయాన్ని మొదట ప్రస్తావించబడినది. దీని తరువాత సంభావ్యత అధ్యయనం ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రజ్ఞుల దృష్టిపడింది. ఈ అంశాలకు గొప్ప ప్రతిపత్తిని కల్పించినవారు 'జేమ్స్ బెర్నలీ' (James Bernoulli, 1654 - 1705), వి.డి. మెవ్రో (Movirre 1667 - 1754) మరియు ఫైరీ సైమన్ లాప్లాస్ (Pierre Simon Laplace) వారు ప్రముఖులు. 1812లో లాప్లాస్ "*Theorie Analytique Des Probabilites*" అనే శీర్షికవున్న పుస్తకం సంభావ్యతా సిద్ధాంతానికి ఒక వ్యక్తి నుండి లభించే గొప్ప సహకారం అని భావింప బడినది. సంభావ్యతను. జీవశాస్త్రం, అర్థశాస్త్రం, జన్యూశాస్త్రం, భౌతిక శాస్త్రం, సమాజ శాస్త్రాలలో అత్యధికంగా ఆధునిక సంవత్సరాలలో ఉపయోగిస్తున్నారు.

ఇప్పుడు సమసంభవము మరియు పరస్పర వర్జిత ఘటనల యొక్క సంభావ్యతను ఎట్లు గమనించవచ్చు కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 1: ఒక నాణెమును ఒక సారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మపడే సంభావ్యతను లెక్కించండి?

సాధన: నాణెమును ఒక సారి ఎగురవేసినప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యావసానాలు రెండు బొమ్మ (H) లేక బొరును (T). బొమ్మపడుట అనే ఘటన E అయితే అనుకూల పర్యవసానాలు 1.

$$P(E) = P\text{ (బొమ్మ)} = \frac{\text{E కి అనుకూల పర్యావ సానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యావసానాల సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

ఇదే విధంగా బొరుసుపడే ఘటన F అయిన

$P(E) = P\text{ (బొమ్మ)} = \frac{1}{2}$ (ఎందుకు చర్చించండి)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 2: ఒక సంచిలో ఒక ఎరుపు బంతి, ఒక నీలంబంతి, ఒక పసుపురంగు బంతి ఉన్నాయి. అన్ని బంతులు ఒకే పరిమాణం కలిగివున్నాయి సంచిలోనికి చూడకుండా ఒక బంతిని తీస్తే ఆ బంతి.

(i) పసుపు రంగు బంతి (ii) ఎరుపు బంతి

(iii) నీలంబంతి కావడానికి సంభావ్యతలు కనుక్కోండి

సాధన: కృతిక చూడకుండా బంతిని తీసుకున్నది. కావున పర్యవసానములు. సమసంభవములు. పసుపురంగు బంతిని తీయు ఘటన y, నీలం బంతి తీయుఘటన B మరియు ఎరుపురంగు బంతి తీయు ఘటన R అయినవి. పర్యవసానములు = 3

(i) y కి అనుకూల పర్యవసానములు = 1

$\therefore \; P(Y) = \frac{1}{3}$ అదే విధంగా

(ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ మరియు $P(B) = \frac{1}{3}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

పరిశీలనలు:

1. ఒక ప్రయోగంలో ఒక ఘటనకు అనుకూల పర్యావసానము ఒక్కటి మాత్రమే అయిన దానిని ప్రాథమిక ఘటన (Elementary Event) అంటారు. 1వ ఉదాహరణలో E మరియు Fల ప్రాథమిక ఘటనలు అట్లే 2వ ఉదాహరణలో Y, B, Rలు కూడా ప్రాథమిక ఘటనలే.

2. ఒకటవ ఉదాహరణ గమనిస్తే : $P(E) + P(F) = 1$

   అదే విధంగా 2వ ఉదాహరణలో : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

   ఒక ప్రయోగంలో అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది. అని నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 3: ఒక పాచికను ఒక సారి వొర్లించినపుడు (i) 4 కన్నా ఎక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యత (ii) 4 లేక అంతకన్నా తక్కువపడు ఘటన సంభావ్యత ఎంత కనుక్కోండి.

సాధన: (i) ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 4 కన్నా ఎక్కువ సంఖ్యలో పడే ఘటన E అయిన. మొత్తం పర్యావసానముల 6, 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6. కాబట్టి E ఘటనను అనుకూలించేపర్యవసానాల సంఖ్య = 2

$$P(E) = P\,(4 \text{ కన్నా పెద్ద సంఖ్య}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) 4 కన్నా తక్కువ లేదా 4కు సమాన సంఖ్య వచ్చే ఘటనలు F అయిన మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 6.

F ఘటన అనుకూలించే ఫలితాలు 1, 2, 3, 4

కావున F అనూకూలించే ఘటనల సంఖ్య = 4

అలాగే $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

పై ఉదాహరణలో ఘటనలు E మరియు F లు ప్రాథమిక ఘటనలా? కావు ఘటన E కు పర్యవసానాలు 2, ఘటన Fకు పర్యవసానాలు 4 కావున E మరియు Fలు ప్రాథమిక ఘటనలుకావు.

గమనిక: ఉదాహరణ 1 నుండి మనం పరిశీలించిన అంశాలు

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

ఇక్కడ E ఒక బొమ్మపడే మరియు F ఒక బొరుసు పడే ఘటనలు. ఉదాహరణలు (1) మరియు (2) లనుండి ఉదాహరణ (3)కు.

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

ఇక్కడ E కు 4కన్నా ఎక్కువ పడే ఘటన మరియు F కు 4 కన్నా తక్కువ లేదా సమానంగా పడే ఘటనలు అయినవి.

4 కన్నా పెద్దదికానిదిపడేది 4 కన్నా తక్కువ లేదా సమానమైన దానిని పడే దానికి సమానం మరియు దీని విలోమము అదే అర్థాన్ని ఇస్తుందని గమనించండి.

పై ఉదాహరణలు (1) మరియు (2) లలో F అనేది E కా నిది అనేదానికి సమానమా? అవును సమానం. మనం E కానది ఘటనమ $\overline{E}$ అనిసూచిస్తాం.

$\therefore$ P (E) + P (E కా నిది) = 1

అంటే $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

$\therefore$ $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

సాధారణంగా E అనేది ఏదైనా ఒక ఘటన అయిన $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

E కానిది అనే ఘటనను $\overline{E}$ అని దీనిని E యొక్క ''పూరక ఘటన'' అంటారు.

ముందుకు వెళ్ళే కన్నా మొదట కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను కనుక్కోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

(i) ఒక పాచికను ఒక సారి దొర్లించినప్పుడు సంఖ్య 8 పడే సంభావ్యత ఎంత?

(ii) ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు 7 కంటే తక్కువ పడే సంభావ్యత ఎంత?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) కి జవాబు చూద్దాం:

ఒక పాచికను ఒక సారి దొర్లించినప్పుడు 6 పర్యవసానాలు మాత్రమే సంభవాలు కానీ 8 గుర్తించబడి ఉండదు కాబట్టి 8 యొక్క అనుకూల పర్యవసనాలు శూన్యం. మరొక విధంగా పాచికను ఒక సారి వేసినప్పుడు 8 వచ్చే ఘటన అసంభవం కాబట్టి ఇటువంటి ఘటననే ''అసాధ్య ఘటన'' అంటారు.

కావున, P (8 పడుట) $= \frac{0}{6} = 0$

అనగా సంభవించడానికి సాధ్యంకాని ఘటనల సంభావ్యత '0' ఇలాంటి ఘటనలను ''అసంభవ ఘటన'' అని అంటారు.

(ii) కి జవాబు చూద్దాం:

ఒక పాచిక ముఖాలపై 7 కన్నా చిన్న సంఖ్యలతో గుర్తించబడి వుంటుంది. దానిని ఒక సారి వేసినప్పుడు ఖచ్చితంగా 7 కన్నా చిన్న సంఖ్య మాత్రమే పడుతుంది కావున అనుకూలించే. పర్యవసానాల సంఖ్య, మొత్తం పర్యవసానాలన సంఖ్య సమానం మరియు 6 అవుతుంది.

కావున P(E) = P (7 కన్నా చిన్న సంఖ్య పడుట) $= \frac{6}{6} = 1$

ఖచ్చితంగా (దృఢంగా) సంభవించే ఒక ఘటన సంభావ్యత 1 ఇటువంటి ఘటనలనే ఖచ్చిత లేక దృడఘటనలు అంటారు.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

గమనిక: సంభావ్యత లవము (ఘటన కి అనూకూలించే ఫలితాలు) ఎల్లప్పుడు హారం (మొత్తం ఫలితాల సంఖ్య) కన్నా తక్కువ లేక సమానం అని తెలుస్తున్నది కావున. $0 \leq P(E) \leq 1$

ఇప్పుడు పేక ముక్కలకు సంబందించిన ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాం. మీరు ఎప్పుడైనా పేక ముక్కలను చూశారా? ఒక కట్టలో 52 కార్డులు వుంటాయి. వాటిలో ఒక్కొక్కటి 13 కార్డులుగల 4 విభాగాలు ఉంటాయి. ఆవిభాగాల గుర్తులు నలుపు స్పేడ్‌లు (♠) ఎరపు హృదయం గుర్తులు (♥), ఎరుపు డైమండులు (♦) మరియు నలుపు కళావరులు (♣) స్పేడ్ మరియు కళావరులు నలుపు రంగులోనూ, హార్ట్ మరియు డైమండ్ ఎరుపురంగు లోనూ ఉంటాయి. ప్రతి ఒక్క గుంపులోనూ ఏస్, రాజ, రాణీ, జాకీ 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 మరియు 2 గుర్తించబడిన 13 కార్డులు ఉంటాయి. రాజ, రాణి, జాక్ కార్డులను ముఖ కార్డులంటారు.

ఉదాహరణ 4: బాగాకలుప బడిన పేకాట కార్డుల కట్టలో 52 కార్డుల నుండి ఒక్కకార్డు తీయుటలో అది.

(i) ఏస్ అగుటకు

(ii) ఏస్ కాక పోవుటకు సంభావ్యతలను లెక్కించండి

సాధన: కార్డులు బాగా కలుపబడ్డాయి. కావున పర్యవనాలన్నీ సమసంభవములుగా పరిగణించాలి.

(i) ఒక కట్టలో 4 ఏస్‌లు ఉంటాయి. తీసుకున్నకార్డు ఏస్ అవడం అనే ఘటన E అయితే Eకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 4

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 (ఎలా ఊహించగలరా)

$\therefore$ కార్డు ఏస్ కావడానికి సంభావ్యత $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) తీసుకున్నకార్డు ఏస్ కాదు అనే ఘటన F అయితే Fకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 52 - 4 = 48 (ఎందుకు)

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 52

$\therefore$ కార్డు ఏస్ కాకపోవడానికి సంభావ్యత $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

గమనిక: ఘటన F అనగా E కానిది $(\overline{E})$ కావున పూరక ఘటనలను ఉపయోగించి F యొక్క సంభావ్యత కనుక్కోవచ్చు

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1\text{-}P(E) = -\ \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

ఉదాహరణ 5: సంగీత, రేష్మాల టెన్నీస్ ఆటను ఆడుతున్నారు. సంగీత గెలిచే సంభావ్యత 0.62 అయినప్పుడు రేష్మ గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన: సంగీత, రేష్మ ఆటను గెలిచే ఘటనలు S, R చే సూచిస్తే సంగీత గెలిచే సంభావ్యత

P(S) = 0.62 (దత్తాంశం) పూరక సంభావ్యతలననుసరించి.

రేష్మ గెలిచే సంఖావ్యత = P(R) = 1– P(S)

= 1– 0.62 = 0.38

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఉదాహరణ 6: సవితా, హమీదా మంచిస్నేహితులు. వారిద్దరి పుట్టిన రోజు పండుగలు సంవత్సరంలో (లీపు సంవత్సరంకాదు) (i) వేరు వేరు రోజు రావడానికి? (ii) ఒకే రోజు రావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి?

సాధన: సంవత్సరంలో 365 రోజులలో ఇద్దరిలో ఎవరి పుట్టినరోజు ఏరోజైనా రావచ్చును. కావున మొత్తం 365 పర్యవసానాలు సమసంభములని పరిగణించాలి.

(i) సవితా, హమీదా వేరువేరు పుట్టిన రోజులు అవడానికి అనుకూల పర్యవసానాలు

= 365 – 1 = 364

$\therefore$ P (వేరు వేరు పుట్టిన రోజులు) $= \frac{364}{365}$

(ii) P (ఒకే రోజు పుట్టినరోజు) = 1–P (వేరు వేరు పుట్టిన రోజులు)

$= 1 - P$ (ఇద్దరు ప్రత్యేక పుట్టిన రోజులు కల్గియుండుట)

$= 1 - \frac{364}{365} \left[\because P\left(\overline{E}\right)=1-P\left(E\right)\right]$

$= \frac{1}{365}$

ఉదాహరణ 7: 40 మంది విద్యార్థులు గల 10వ తరగతిలో 25 మంది బాలికలు, 15 మంది బాలురు వున్నారు. తరగతి ప్రతినిధిని నియమించడానికై దారి ఉపాధ్యాయురాలు అందరి పేర్లను విడివిడి కార్డుల పై రాసి, ఒక పెట్టెలో వేసి బాగా కలిపి, ఒక కార్డును తీసారు. ఆ కార్డుపై పేరు. (i) అమ్మాయి లేక. (ii) అబ్బాయిది కావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

సాధన: కార్డుల సమానమైతే 40 మందిలో ఎవరి పేరు కార్డు అయినా రావచ్చు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య 40.

(i) తీసిన కార్డు అమ్మాయి పేరు కావడానికి అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 25 (ఎందుకు)

∴ P (అమ్మాయి పేరుగల కార్డు) = P (అమ్మాయి) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) తీసిన కార్డు అబ్బాయి పేరు కావడానికి పర్యవసానాల సంఖ్య = 15 (ఎందుకు)

∴ P (అమ్మాయి పేరుగల కార్డు) = P (అబ్బాయి) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

సూచన: P(అబ్బాయి) దీనిని మరోవిధంగా కనుక్కోవచ్చు.

P(అబ్బాయి) = 1 – P (అబ్బాయి కానిది)

= 1 – P (అమ్మాయి)

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 8: ఒక పెట్టెలో 3 నీలం, 2 తెలుపు, 4 ఎరుపు గోళీలు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా పెట్టెనుండి ఒక గోళీను తీసుకుంటే అది

(i) తెలుపు, (ii) నీలం, (iii) ఎరుపు రంగు గోళీ అగుటకు సంభావ్యతలు గమనించండి.

సాధన: యాదృచ్ఛికంగా గోళీలను తీసుకొనుట అనగా అన్ని పర్యవసనాలు సమసంభవాలు.

∴ ప్రతి రూప ఆవరణంలోని పర్యవసనాల సంఖ్య = 3 + 2 + 4 = 9

తెల్లని గోళీ తీయు ఘటనను Wచే. నీలంగోళీ తీయు. ఘటన B చే ఎరుపు గోళీతీయు ఘటనను R చే గుర్తిస్తే.

(i) W కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 2

$\therefore \quad P(W) = \frac{2}{9}$

ఇదే విధంగా (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ మరియు (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

గమనిక P(W) + P(B) + P(R) = 1.

ఉదాహరణ 9: హర్ప్రీత్ రెండు నాణెములను (₹ 1 మరియు ₹ 2) ఒకే సారి ఎగురవేసినాడు కనీసం ఒక బొమ్మ పడుటకు సంభావ్యత కనుక్కోండి?

సాధన: బొమ్మను H తో బొరుసును T తో సూచిస్తే రెండు నాణెములు ఎగరవేసినప్పుడు ఏర్పడే అన్ని పర్యవసానములు (H, H) (H, T) (T, H) (T, T) ఇవి అన్నీ సంభవాలే దీనిలో (H, H) అనగా మొదటి నాణెం ₹ 1 బొమ్మ. రెండవ నాణెం (₹ 2) బొమ్మ అని అర్థం. అట్లే (H, T) అనగా మొటి నాణెం బొమ్మ రెండవ నాణెం బొరుసు అని అర్థం. అట్లే మిగిలిన పర్యవసానాలు.

కనీసం ఒక బొమ్మకు అనుకూల పర్యవ సానాలు = {(H,H), (H,T) (T,H)}

E కు అకూల పర్యవసానాల సంఖ్య n (E) = 3

$P(E) = \frac{3}{4}$ [∴ ప్రతి రూప ఆవరణలో పర్యవసానాలు 4]

అనగా హర్ప్రీత్ కనీసం ఒక బొమ్మ పొందే సంభావ్యత $= \frac{3}{4}$

సూచన: మీరు P(E) ని కింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

[ఎందుకంటే = P (బొమ్మకానిది) $= \frac{1}{4}$]

ఇప్పటి వరకు చర్చించిన అన్ని సందర్భాలలో ప్రతిరూప ఆవరణంలోని పర్యావపానముల సంఖ్య పరిమితము. అనేదాన్ని గమనించారా? అలాకాకపోతే ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాం.

కొన్ని ప్రయోగాలలో పర్యవసానములు రెండు సంఖ్యల మధ్య అన్ని సంఖ్యలు, ఒక వృత్తం లేక దీర్ఘ చతురస్రంలోని అన్ని బిందువులు అయ్యే అవకాశంవుంది. ఇటువంటి సందర్భాలలో పర్యవసానముల సంఖ్యను లెక్కించలేము. అవి అపరిమితములు (రెండు సంఖ్యల మధ్య అపరిమిత వాస్తవ సంఖ్యలు ఉంటాయి, వృత్తం లేక దీర్ఘచతురస్రం లోని బిందువులు అపరిమితం) సంభావ్యత యొక్క సైద్ధాంతిక నిర్వచనం, సూత్ర రూపములు ఈ సందర్భములో ఉపయోగపడవు. అలాగైతే దీనికున్నదారి ఏది? దీనిని చెప్పడానికి కింది ఉదాహరణలను పరిగణిస్తాము.

ఉదాహరణ 10*: మ్యూజికల్ చైర్స్ ఆటలో, ఆట మొదలైన 2 నిమిషాలలోపు ఒక సమయంలో పాట ఆగుతుంది, ఆటగాళ్ళు ఆగాలి. అయితే ఆట మొదలైన $\frac{1}{2}$ నిమిషంలోపు పాట ఆపు ఘటనకు సంభావ్యత లెక్కించండి.

---

* పరీక్షా దృష్టితోకాదు

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాధన: పాట ఆపు సమయం యొక్క పర్యవసనాలు 0 మరియు 2ల మధ్యగల అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు, దీనిని సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తే.

చిత్రం-14.1

$\frac{1}{2}$ నిమిషంలోపు పాట ఆగును అనుఘటనను Eని సూచిస్తే.

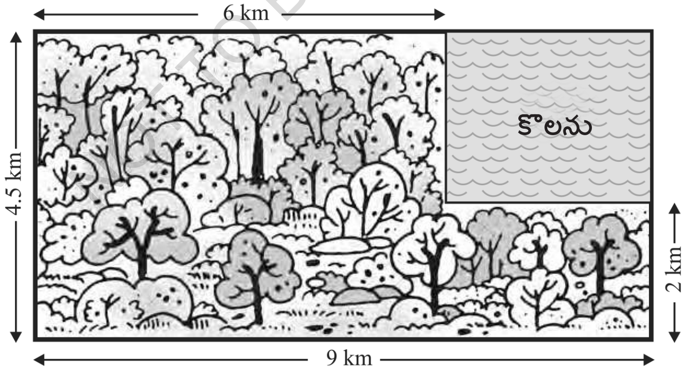
Eకు అనుకూల పర్యావసానములు అనగా సంఖ్యారేఖపై 0, $\frac{1}{2}$ ల మధ్యగల అన్ని బిందువులు 0 కు 2 కు మధ్యగల దూరం 2 అయిన 0, $\frac{1}{2}$ లమధ్యదూరం $\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ప్రయోగంలో అన్ని పర్యవ సానములన్నీ సమసంభవములు కావున మొత్తం దూరం (కాలం) 2 అని, E కు అనుకూల దూరం (కాలం) $\frac{1}{2}$ అని పరిగణించవచ్చును.

$$P(E)=\frac{\text{E కు అనుకూల దూరం}}{\text{మొత్తం దూరం}}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

ఇదే విధమైన మార్పును వైశాల్యము 10లకు కూడా విస్తరించి ఎట్లు ఉపయోగించవచ్చునో కింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 11*: ప్రక్క పటంలో చూపబడిన దీర్ఘ చతురస్రాకార ప్రాంతంలో ఒక హెలికాప్టరు కూలిపోయిందని సమాచారం వచ్చింది. అది కొలను (lake)లో కూలిపోయి వుండుటకు సంభావ్యత ఎంత?



చిత్రం-14.2

సాధన: మొత్తం దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలంలో హెలికాప్టర్ ఏ బిందువు వద్ద అయినా కూలి ఉండవచ్చును.

$\therefore$ ఘటన జరుగుటకు పూర్తి స్థలం వైశాల్యం $n(s) = (4.5 \times 9)\ km^2 = 40.5\ km^2$

ఘటన E జరుగుటకు అనుకూల ప్రాంతం $n(E) = (25 \times 3)\ km^2 = 7.5\ km^2$

$\therefore$ P (హెలికాప్టరు సరుస్సులో కూలుట) $= \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

@KTBS TO BE REPUBLISHED

ఉదాహరణ 12: ఒక పెట్టెలోని 100 చొక్కాలలో 88 సరిగ్గావున్నావి. 8 చొక్కాలు కొద్ది లోపాలుగలవు, 4 చొక్కాలు ఎక్కువ లోపాలను కలిగివున్నాయి. జిమ్మీ అనే వ్యాపారి మంచి చొక్కాలను మాత్రమే కొంటాడు. సుజాత అను మరొక వ్యాపారి ఎక్కువ లోపాలున్న చొక్కాలను మాత్రమే నిరాకరిస్తుంది (కొనదు) పెట్టెలో నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక చొక్కాను తీస్తే ఎవరు కొనే సంభావ్యత ఎంత? (i) జిమ్మీ తీసుకొనేవి? (ii) సుజాత తీసుకొనేవి.

సాధన: పెట్టెలోని 100 చొక్కాలలో నుండి 1 చొక్కా యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినది అనగా పర్యావసానాలు సమ సంభవాలు.

(i) జిమ్మీ కొనుటకు అనుకూల పర్యవసనాలు = 88

$$P\ (\text{జిమ్మీ చొక్కాను కొనుట}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

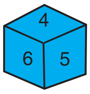
(ii) సుజాత చొక్కా కొనుటకు అనుకూల పర్యవసనాలు = 88 + 8 = 96

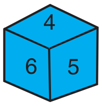
$$\therefore\ P\ (\text{సుజాత చొక్కాను కొనుట}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

ఉదాహరణ 13: రెండు పాచికలు, ఒకటి నీలం, ఒకటి బూడిదరంగు, ఒకేసారి దొర్లించడం జరిగింది. సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానములను పేర్కొనండి? రెండు పాచికలపై కనిపించే సంఖ్యల మొత్తం (i) 8 (ii) 13 మరియు (iii) 12 లేక అంతకన్నా తక్కువ అవడానికి సంభావ్యతలు ఎంత?

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

సాధన: ఎరుపు పాచికపై 1 ఉన్నప్పుడు బూడిదరంగు పాచికపై 1, 2, 3,4, 5 లేక 6 ఏదైనా వుండవచ్చును అట్లే నీలి పాచికపై 2, 3, 4, 5 లేదా 6 ఉన్నప్పుడు కూడా వివిధ పర్యవసానములు ఉంటాయి. ప్రయోగంలో సాధ్యపడు అన్ని పర్యవసానాలు పట్టికలో క్రమ యుగ్మాలుగా చూపబడ్డాయి. ప్రతి క్రయుగ్మంతో మొదటిది నీలి పాచికపై సంఖ్య రెండవది బూడిదరంగు పాచికపై సంఖ్య.





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

చిత్రం-14.3

కావున (1,4) అనేది (4,1) క్రమయుగ్మాలు సమానం కావు

$\therefore$ మొత్తం సాధ్యపడు పర్యవనాసాల సంఖ్య $n(s) = 6 \times 6 = 36$

(i) ఘటన E (రెండు సంఖ్యల మొత్తం 8) యొక్క అనుకూల పర్యవసానాలు

= {(2, 6): (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)} అగును (చిత్రం 14.3)

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య n (E) = 5

$\therefore\ P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) ఘటన F రెండు సంఖ్యల మొత్తం 13 కు అనుకూల పర్యవసానాలు శూన్యం (చిత్రం 14.3)

$\therefore\ P(E) = \frac{0}{36} = 0$

E కు అనుకూల పర్యవ సానాల సంఖ్య n (E) = 5

(iii) ఘటన G (12 లేక అంతకన్నా తక్కువ) కు అన్ని పర్యవసానాలు అనుకూలములే

$\therefore\ P(G) = \frac{36}{36} = 1$

E కు అనుకూల పర్యవ సానాల సంఖ్య n (E) = 5

అభ్యాసం 14.1

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

1. కింది ప్రవచననాలను పూరించండి.

(i) ఘటన E యొక్క సంభావ్యత + ఘటన 'E' కాదు సంభావ్యత = ____________.

(ii) ఎల్లప్పుడు సాధ్యపడని ఘటన యొక్క సంభావ్యత దానిని ____________ ఇలాంటి ఘటన ను ____________ అంటారు.

(iii) ఖచ్చితంగా సంభవించే ఘటన యొక్క సంభావ్యత ____________ దానిని ____________ ఘటన అంటారు.

(iv) ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల యొక్క సంభావ్యతల మొత్తం ____________.

(v) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎల్లప్పుడు ____________ కన్నా ఎక్కువ లేక సమానము మరియు ____________ కన్నా తక్కువ లేక సమానంగా ఉంటుంది.

2. కింది ప్రయోగాలలో దేని పర్యవసానములు సమసంభవములు? వివరించండి.

(i) స్టార్టు చేయబోయిన కారు స్టార్టు అవుతుంది లేక కాదు.

(ii) ఒక ఆటగాడు బాస్కెట్ బాల్‌ను కొట్ట బోతే, అది తగులుతుంది లేక తగలదు.

(iii) తప్పు – ఒప్పు ప్రశ్నకు సమాధానము వ్రాసినప్పుడు అది సరి కావచ్చు కాకపోవచ్చు.

(iv) పుట్టబోయే శిశువు అబ్బాయి లేక అమ్మాయి కావచ్చు.

3. ఒక ఫుట్‌బాల్ ఆట ప్రారంభంలో ఏజట్టు మొదట బంతిని తీసుకోవాలని నిర్ణయించడానికి నాణెన్ని ఎగుర వేయడం ఒక మంచి పద్ధతి. అని ఎందుకు పరిగణించబడినది.

4. కింది వాటిలో ఏది ఘటన సంభావ్యత కావడానికి సాధ్యంకాదు.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) −1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. P(E) = 0.05 అయిన E కాని ఘటన సంభావ్యత ఎంత?

6. ఒక సంచిలో నిమ్మ వాసన గల చాకొలేట్‌లు మాత్రమే ఉన్నాయి. మాలిని చూడకుండా సంచి నుండి ఒక చాక్లెట్‌ను తీస్తే అది.

(i) నారింజ-వాసన గలదికావడానికి?

(ii) నిమ్మ వాసనగలది కావడానికి సంభావ్యతలు లెక్కించండి?

7. ముగ్గురు విద్యార్థులలో ఇద్దరి పుట్టిన రోజులు సంవత్సరములో ఒకే రోజురాని సంభావ్యత 0.992 అయిన ఒకే రోజువచ్చే సంభావ్యత ఎంత?.

8. ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు, 5 నలుపు బంతులు కలవు. సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా బంతిని తీస్తే అది.

(i) ఎరుపుదై ఉండుటకు (ii) ఎరుపుది కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

9. ఒక పెట్టెలో 5 ఎరుపు, 8 తెలుపు, 4 ఆకుపచ్చగోళీలుకలవు. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక గోళీను తీస్తే అది.

(i) ఎరుపు (ii) తెలుపు (iii) ఆకుపచ్చ కానిది అగుటకు సంభావ్యతలు కనుక్కోండి

10. ఒక కిడ్డీ బ్యాంకు డబ్బాలో వంద 50 పై నాణెములు, యాభై ₹1 నాణెములు ఇరవై ₹2 నాణెములు, పది ₹5 నాణెములువున్నాయి. డబ్బాను తలక్రిందులు చేసినప్పిడల్లా యాదృచ్ఛికంగా ఒక్క నాణెం పడుతుంటే అది.

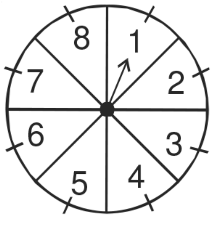
(i) 50 పై నాణెం అగుటకు (ii) ₹ 5 నాణెం కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంత?

11. గోపి అక్వేరియం నుండి ఒక చేపను కొన్నాడు. అక్వేరియంలో 5 మగ చేపలు, 8 ఆడ చేపలు ఉన్నప్పుడు వ్యాపారి యాదృచ్ఛికంగా ఒక చేపను తీసి ఇచ్చివుంటే ఆ చేప మగ చేప అవడానికి సంభావ్యత ఎంత? (చిత్రం 14.4)

చిత్రం-14.4

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

12. ఒక ఆటలో వేగంగా త్రిప్పబడిన బాణపుగుర్తు పటములో 14.5లో చూపినట్లు. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 లేదా 8ని సూచిస్తూ ఆగుతుంది. అన్నిపర్యవసానములు సమసంభవములైతే కింది ఘటనల సంభావ్యతలను లెక్కించండి. బాణపు గుర్తు సూచించేది. (i) 8 (ii) ఒక బేసి సంఖ్య (iii) 2 కన్నా పెద్ద సంఖ్య (iv) 9 కన్నా చిన్న సంఖ్య



చిత్రం-14.5

13. ఒక పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినప్పుడు ఏర్పడు పర్యవసానములతో కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

(i) ప్రధాన సంఖ్య (ii) 2, 6 ల మధ్య సంఖ్య (iii) బేసి సంఖ్య

14. బాగుగా కలిపిన 52 పేక ముక్కల కట్టనుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీస్తే అది కింది కార్డు అనుటకు సంభావ్యతను లెక్కించండి.

(i) ఎరుపు రాజు (ii) ముఖకార్డు (iii) ఎరుపు ముఖకార్డు

(iv) హృదయం గుర్తుగల జాకి (v) స్పేడ్ (vi) డైమండ్ గుర్తుగలరాణి

15. పేక ముక్కలలోని డైమండ్ గుర్తుగల ఐదు కార్డులు; 10 రాజు, రాణీ, జాకీ మరియు ఏస్‌లను మాత్రం తీసుకొని, బాగా కలిపి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును ఎన్నుకొంటే.

(i) ఆ కార్డు రాణి అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

(ii) రాణి కార్డును తొలగించి రెండవ కార్డును ఎన్నుకొంటే అది

(iii) ఎస్ అగుటకు

(iv) రాణి అగుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

16. లోపాలుగల 12 పెన్నులు పొరపాటుగా 132 మంచి పెన్నులలో కలిసిపోయాయి. చూడగానే పెన్నులో నిలోపాన్ని గుర్తించలేము. అయితే యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్నును ఎన్నుకంటే అది మంచి పెన్ను కావడానికి సంభావ్యత ఎంత?

17. (i) 20 విద్యుత్ బల్బులుగల పెట్టెలో 4 బల్బులు లోపాలు కలిగివున్నాయి. పెట్టెనుండి యాధృచ్ఛికంగా తీసిన బల్బులో పాలు కలిగివుండుటకు సంభావ్యత ఎంత?

(ii) ఒక వేళ అది మంచి బల్బు అయివుంది దానిని పెట్టెలో పెట్టకుండా రెండవ బల్బును తీసుకొంటే అది కూడా మంచిది కావడానికి సంభావ్యత ఎంత?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

18. ఒక పెట్టెలో 1 నుండి 90 వరకు వ్రాయబడిన 90 ఫలకాలువున్నాయి. వాటినుండి యాదృచికంగా ఒక ఫలకాన్ని ఎన్నుకుంటే దానిపై కింది సంఖ్యలు ఉండటానికి సంభావ్యత ఎంతెంత?

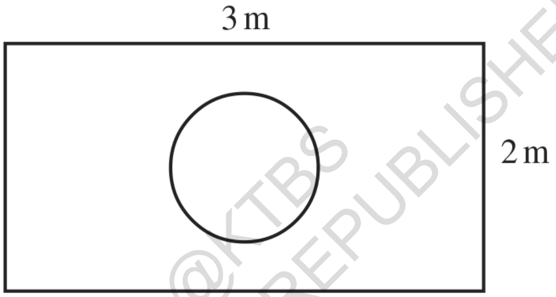
(i) రెండంకెల సంఖ్య (ii) ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య (iii) 5 చే భాగింపబడే సంఖ్య

19. ఒక పాపవద్ద గల పాచిక పై ముఖాలు కింద చూపిన విధంగావున్నాయి.

| A | B | C | D | E | F |

పాచికను ఒక సారి దొర్లించినప్పుడు (i) A (ii) D పడే సంభావ్యతలను లెక్కించండి.

20. పటం 14.6లో చూపినట్లు దీర్ఘ చతురస్రాకార పలకపై 1m వ్యాసంగల వృత్తం గీయబడి ఉన్నది. ఒక పాచికను ఈ పలక పై జార విడిస్తే అది వృత్తంలో పడుటకు సంభావ్యత ఎంత?



చిత్రం-14.6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

21. ఒక వ్యాపారి వద్ద 144 పెన్నులున్నాయి. అందులో 20 లోపాలు కలిగి ఉన్నాయి. సుధ పెన్నుకొనడానికి వస్తే వ్యాపారి యాదృచికంగా ఒక పెన్ను ఇస్తే దానిని (i) సుధ కొనుటకు (ii) కొనలేక పోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

22. (i) కింది పట్టిను పూర్తీ చేయడానికి ఉదాహరణ 13 (i) ని చూడండి.

ఘటన: రెండుపాచికలపై మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ఒక విద్యార్థి ఈ ప్రయోగంలో 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 అనే 11 పర్యవసానములు ఉన్నవి. కావున ఒక్కొక్క పర్యవసానము యొక్క సంభావ్యత $\frac{1}{11}$ ఉన్నాడు. ఈ సమాధానంతో నీవు ఏకీభవిస్తావా వివరించు.

23. ఒక రూపాయి నాణెమును 3 సార్లు ఎగురవేసి బొమ్మ, బొరుసులను పరిశీలించాలనుకొన్నారు. అవి మూడు బొమ్మలు లేక బొరుసులు అయితే హనీఫ్ గెలుస్తాడు. హనీఫ్ ఓడిపోవడానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

24. ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించారు. కనీసం ఒక్కసారి.

(i) 5 పాచికపై కనిపించడానికి (ii) 5 పాచికపై కనిపించక పోవడానికి సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

[**గమనిక:** ఒక పాచికను రెండుసార్లు వేయడం లేదా రెండు పాచికలను ఒకేసారి వేయడంతో సమానంగా తీసుకుంటాం]

25. కింది వాటిలో ఏయే వాదనలు సత్యాలు?

(i) రెండు నాణెములను ఎగురవేసినప్పుడు 3 పర్యవసానాలు ఉంటాయి. రెండు బొమ్మలు, రెండు బొరుసులు, ఒకటి బొమ్మ మరొకటి బొరుసు కనుక ఒక్కొక్క పర్యవసానము యొక్క సంభావ్యత $\frac{1}{3}$.

(ii) ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు పడేది సరి సంఖ్య లేక బేసిసంఖ్య కావున బేసి సంఖ్య పడే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$.

14.2 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో కింది విషయాలను అవగాహన చేసుకున్నాము.

1. ప్రయోగిక సంభావ్యత, సైద్ధాంతిక సంభావ్యతల మధ్య తేడాలను తెలుసుకున్నాము.
2. ఖచ్చిత (లేక ధృడ) ఘటన యొక్క సంభావ్యత '1'
3. అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత '0'
4. ఘటన E యొక్క సంభావ్యత P(E) సంఖ్యాత్మకం మరియు $O \leq P(E) \leq 1$
5. ఒకే అనుకూల పర్యవసానము గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది.
6. E ఒక ఘటన అయిన 'E' కాదు అనే ఘటనను $\overline{E}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని పూరక ఘటన అంటారు. $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చదివే వారికి సూచన

ఒక ఘటన ప్రాయోగిక లేదా సైద్ధాంతిక సంభావ్యతలు వాస్తవంగా ఏమి జరుగుతాయో. వాటినే తీసుకోబడినవి. ఒక ఘటన సైద్ధాంతిక సంభావ్యత కొన్ని ఊహల ఆధారంగా ఏమి జరగవచ్చు అనేదాన్ని ఊహించడానికి ప్రయత్నిస్తాం. ఒక ప్రయోగంలో ప్రయత్నాల సంఖ్య పెరిగే కొద్ది ప్రాయోగిక మరియు సైద్ధాంతిక సంభావ్యతలు సుమారుగా సమానమని నిరీక్షించవచ్చు.

గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం

A2

A2.1 పరిచయం

- ఒక వయోజనుని శరీరం సుమారు 1,50,000 km అంత ధమనులు మరియు సిరలు కలిగియుంటుంది.
- మానవుని హృదయం ప్రతి 60 సెకెండ్లకు 5నుండి 6 లీటర్లంత రక్తాన్ని శరీరంలో పంప్ చేసుంది.
- సూర్యుని ఉపరితల ఉష్ణం సుమారు $6000C^0$ లు ఉంటుంది.

మన శాస్త్రవేత్తలు మరియు గణిత నిపుణులు ఈ ఫలితాలను అందాజు వేయడానికి ఎలా సాధ్యమయిందో మీరు ఎప్పుడైనా ఆశ్చర్యపడ్డారా? వారు వయోజన వ్యక్తులు మరణించిన శరీరాలనుండి ధమనులు మరియు సిరలు బయటకు తీసి కొలిచినచో? ఈ తీర్మానానికి రావడానికి వారు రక్తాన్ని సంపూర్ణంగా ప్రవహించునట్లు చేసినచో? సూర్యుని ఉష్ణాన్ని/వేడిని తెలుసుకోవడానికి వారు ఒక ఉష్ణమాపకంతో సూర్యుని వైపు ప్రయాణించినో? ఖచ్చితంగా లేదు. అలాగయితే, ఈ అంకె-సంఖ్యలను వారు ఎలా పొందారు.

మేము మీకు 9వ తరగతిలో పరిచయంచేసిన **గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ** పరిచయం అధ్యాయంలో వీటన్నింటికి జవాబు దాగివుంది. గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం అనగా నిజజీవన సన్నివేశాలను గణితం సహాయంతో వివరించడం అని జ్ఞాపకం ఉంచుకోండి. గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం అనగా ఒక సమస్యకు గణితశాస్త్ర ఆ కృతీకరణం / నమూనాను నిర్మాణం చేయు విధానమైయుండి, దానిని ఉపయోగించి, సమస్యను విశ్లేషించడం ద్వారా దానిని సాధించు ఒక ప్రక్రియ అని కూడా స్మరించుకోండి.

గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయంలో మనం వాస్తవ ప్రపంచ ఒక సమస్యను తీసుకొని సమానమైన గణితశాస్త్ర సమస్యగా దానిని మార్చుతాం. ఆ తరువాత మనం గణిత శాస్త్ర సమస్యను సాధించి, దాని సాధనను వాస్తవ ప్రపంచ సన్నివేశంలో నిరూపిస్తాం. ఆ తరువాత నిరూపించు దశలో మనకు లభించినటువంటి సాధన అర్థవంతమైనదా అని చూడటం కూడా ముఖ్యం. గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం చాలా ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత పొందిన కొన్ని ఉదాహరణలు.

(i) చేరడానికి సాధ్యమైన స్థళంలో ఒక నది వెడల్పు మరియు లోతును కనుగొనడం.

(ii) భూమి మరియు ఇతర గ్రహాల రాశిని అందాజు వేయడం.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) భూమినుండి గ్రహాలు ఉన్న దూరాన్ని అందాజు వేయడం.
(iv) ఒక దేశంలో తొలకరి ఆగమనాలను ఊహించడం.
(v) షేర్‌మార్కెట్ ప్రవృత్తిని (సమాచారం) ఊహించడం.
(vi) ఒక వ్యక్తి శరీరంలోని రక్త ప్రమాణాన్ని అందాజు వేయడం.
(vii) ఒక నగరంలో 10 సంవత్సరాల తరువాత కాదగు జనాభాను ఊహించడం.
(viii) ఒక చెట్టులోగల ఆకులను అందాజువేయడం.
(ix) ఒక నగర వాతావరణం లోగల వివిధ కాలుష్య కారకాల PPM ను అందాజు వేయడం.
(x) పర్యావరణం మీద కాలుష్య కారకాల పరిణామాలను అందాజు వేయడం.
(xi) సూర్యుని ఉపరితల ఉష్ణాన్ని అందాజు వేయడం.

ఈ అధ్యాయంలో గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయ విధానాలను మనం మరొకసారి సందర్శించడం ద్వారా మన చుట్టు ప్రక్కలగల ప్రపంచంతో దీనికి నిదర్శనాత్మక ఉదాహరణలిద్దాం. విభాగం A2.2 లో నమూనా నిర్మాణపు అన్ని దశలను మేము మీకు పరిచయం చేస్తున్నాం. విభాగం A2.3 లో వైవిధ్యభరితమైన ఉదాహరణలను మనం చర్చిస్తాం. విభాగం A2.4 గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ విషయపు ప్రత్యేకతలకు కారణాలను చూస్తున్నాం.

గుర్తుంచుకోవలసిన మరొక విషయం అనగా, వాస్తవ ప్రపంచ సమస్యలను సాధించడానికి గణితశాస్త్రం ఒక ప్రముఖమైన విధానం అనే దానిని గురించి మీలో జాగృతిని ఏర్పరచడం మన గురి. అదేవిధంగా గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయ సామర్థ్యాలను మీరు నిజంగా ప్రశంసించాలంటే ఇంకా ఎక్కువ గణిత శాస్త్రాన్ని నేర్చుకోవలసి ఉంది. మీ ఉన్నత తరగతులలో ఈ కంపనాన్ని (flavour) చూపెడి కొన్ని ఉదాహరణాలు కనబడుతాయి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

A2.2 గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయ దశలు

ఆకృతీకరణ పరిచయ ఉపయోగాల గురించి 9వ తరగతిలో మనం కొన్ని ఉదాహరణలు ఇచ్చాం. వాటినుండి ఆకృతీకరణ పరిచయ విధానం మరియు ఈ విధానాలలోగల వివిధ దశల గురించి మీకేమైనా ఆధారం / కారణం లభించిందా? గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం యొక్క ప్రముఖ దశల గురించి మనం త్వరగా ఒకసారి పునర్ సందర్శిద్దాం.

1వ దశ : (సమస్యను అర్థం చేసుకోవడం):

నిజమైన సమస్యను వ్యాఖ్యానించండి ఒక జట్టులో పనిచేయాలంటే మీరు అర్థం చేసుకోవడానికి కోరుకొనే విషయాల గురించి చర్చించి, కొన్ని ఊహించుకొని, సమస్యలను సూక్ష్మీకరించండి.

ఉదాహరణకు మన సమస్య ఒక చెరువులోగల చేపలను అందాజు వేయడం అనుకోండి. అక్కడున ప్రతి చేపనుపట్టి, లెక్కించడానికి సాధ్యంకాదు. మనం కొన్ని చేపలను నమూనాగా సేకరించి, వాటి ద్వాదా చెరువులోగల మొత్తం చేపలలను అందాజు వేయడానికి ప్రయత్నించినచో అది సాధ్యపడవచ్చు.

2వ దశ : (గణితశాస్త్ర వివరాలు మరియు రూపించడం):

గణిత శాస్త్ర పదాలలో సమస్యలోని వివిధ అంశాలను వివరించి, లక్షణాలను గణితశాస్త్రపరంగా వివరించు కొన్ని మార్గాలు.

- చర రాశులను / చరాక్షరాలు వ్యాఖ్యానించండి.
- సమీకరణాలు లేదా అసమానతలు రాయండి.
- దత్తాంశాలను సేకరించండి మరియు పట్టికలు నిర్మించండి.
- గ్రాఫ్‌లు చేయండి.
- సంభావ్యతలను లెక్కించండి.

ఉదాహరణకు, 1వ దశలో చెప్పినట్లుగా ఒక నమూనా సేకరించినచో, దీనివలన మనం పూర్తి సముదాయాన్ని ఎలా అందాజువేయవచ్చు? దానికొరకు మనం, నమూనాగా సేకరించిన చేపలమీద గుర్తుపెట్టండి. వాటిని చెరువులోగల మిగిలిన చేపలతో కలసిపోవడానికి వదిలి, మరొకసారి చెరువు నుండి చేపల నమునాను సేకరించండి. నూతన నమూనాలో వెనుకటిసారి గుర్తుపెట్టిన ఎన్ని చేపలున్నాయో చూడాలి. నిష్పత్తి మరియు అనుపాతాలను ఉపయోగించుకొని, మొత్తం చేపల గురించి మనమొక అందాజుకు రావచ్చు. ఉదాహరణకు, చెరువునుండి 20 చేపల ఒక నమూనాను సేకరించి, వాటిని గుర్తుపెట్టుదాం. తరువాత వాటిని ఇతర చేపల జతలో కలిసిపోవడానికి అదే చెరువులో వదులుదాం. తరువాత మనం మరొక నమూనా (50 అనుకోండి) మిశ్రమ సముదాయం నుండి తీసుకొని, వాటిలో గుర్తుపెట్టినవి ఎన్ని ఉన్నాయో చూడాలి. మనం ఈ విధంగా దత్తాంశాలను సేకరించి విశ్లేషించాలి.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

ఇక్కడ మనం చేయు ఒక ప్రముఖ ఊహ అనగా, గుర్తు పెట్టినటువంటి చేపలు మిగిలిన చేపలతో ఒకే విధంగా కలిసిపోతాయి. మనం తీసుకొన్నటువంటి నమూనా పూర్తి సముదాయాన్ని సరిగ్గా చూపుతుంది.

3వ దశ : (గణితశాస్త్ర సమస్యను సాధించడం):

2వ దశలో వృద్ధి చేసి, సూక్ష్మీకరించిన గణిత సమస్యను తరువాత గణిత శాస్త్రంలోని వివిధ తంత్రాలు ఉపయోగించి సాధించాలి. ఉదాహరణకు, పైన చెప్పిన 2వ దశలో, రెండవసారి సేకరించిన నమూనాలో 5 చేపలు గుర్తుపెట్టినవి అనుకొందాం. అప్పుడు, మొత్తం సముదాయంలో $\frac{5}{10}$ అనగా, $\frac{1}{10}$ కి గుర్తు పెట్టబడినది. అది విశేషంగా పూర్తి సముదాయానికి అన్వయించబడేట్లయితే, అప్పుడు సముదాయంలోని $\frac{1}{10}$ భాగం = 20.

అందువలన పూర్తి సముదాయం = 20 × 10 = 200

4వ దశ : (సాధనను వివరించడం):

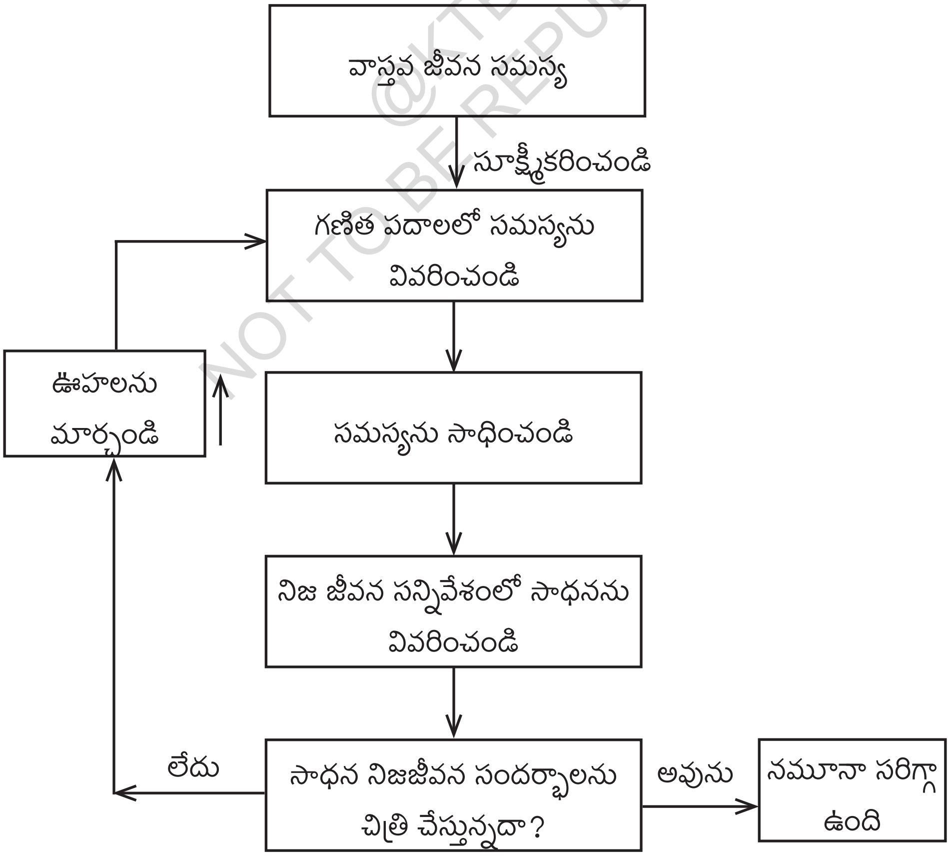
వెనుకటి దశలలో మనం పొందినటువంటి సాధనను 1వ దశ నిజ జీవితంలో సందర్భానికి అనుగుణం గా ఇప్పుడు చూడాలి. ఉదాహరణకు, సమస్యకు 3వదశలో మనకు లభించు సాధన సముదాయాలలోని చేపలు 200 అవుతాయి.

5వ దశ : (ఆకృతీకరణను నిర్ధారించడం):

మనం మొదటి సందర్భానికి వెనుతిరుగుదాం. గణిత కార్య ఫలితాలు అర్థవంతంగా ఉన్నాయా అని చూద్దాం. అవును. అనేటట్లయితే, క్రొత్త వివరాలు లభించేవరకు లేదా ఊహలు మారేవరకు మనం ఈ నమూనాను ఉపయోగిస్తాం.

ఒక్కొక్కసారి మనం ఊహలను సూక్ష్మీరించడం వలన నిజమైన సమస్యల అవసరం యొక్క అంశాన్నే మరచిపోయి, కావలసిన గణితశాస్త్ర వివరాలు ఇవ్వవచ్చు. అలాంటి ప్రకరణలలో సాధన పెరిగి సత్యందూరమై నిజమైన సన్నివేశాలలో అర్థహీనం అనిపిస్తుంది. ఇలా జరిగినప్పుడు, 1వదశ లో మనం చేసిన ఊహను పునర్ పరిశీలించి, సాధ్యమైతే, వెనుక పరిగణించిన కొన్ని అంశాలను కలిపి, అది నిజమైన వాస్తవికంగా ఉండునట్లు పరిష్కరణ చేయాలి.

ఉదాహరణకు 3వ దశలో చేపల పూర్తి సముదాయపు ఒక అందాజు లభించింది. అది చెరువులోగల చేపల నిజమైన సంఖ్య అయివుండవచ్చు. అది సముదాయం యొక్క సరైన అందాజు అవునా అని చెయడానికి 2 మరియు 3వ దశలను కొన్నిసార్లు పునరావర్తనం చేసి, లభించిన ఫలితం యొక్క సరాసరిని పొందుతాం. ఇలా చేయడం వలన చేపల సముదాయపు నికట అందాజును మనం పొందవచ్చు. **గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయాన్ని దృశ్యీకరించు మరొక విధానాన్ని** చిత్రం A 2.1లో ఇవ్వబడినది.



చిత్రం **A2.1**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

నమూనాలు తయారు చేసేవారు సూక్ష్మీకరించడం మరియు నిఖరతల మధ్య ఒక విధమైన సమతోల నాన్ని కాపాడుకొంటారు. (సులభ సాధనకొరకు) వారు నిజానికి చాలా సమీపంలో అందాజువేసి, ప్రగతి సాధించు భరోసాలో ఉంటారు. అత్యుత్తమ ఫలితం అనగా, భవిష్యత్తులో ఏమవుతుందో ఊహించడానికి సాధ్యపడటం లేదా సమ్మతమైన నిఖరతతో ఫలితాలను అందాజు వేయడం. సమస్యను సూక్ష్మీకరించడానికి మనం చేయు విభిన్న ఊహలు, విభిన్న నమూనాలను ఇవ్వవచ్చునని గుర్తుంచుకోండి. అందువలన ఏదైనా పరిపూర్ణ నమూనాలు కాదు. ఉత్తమమైనవి, ఇంకా ఉత్తమమైనవి ఉంటాయి.

అభ్యాసం A2.1

1. కింది సందర్భాలను పరిగణించండి. 13వ శతాబ్దం ప్రారంభంలో రాయబడిన గణితశాస్త్ర సమస్యలు లియోనార్డో ఫిబోనాక్కి అడిగాడు. ప్రారంభంలో కేవలం రెండు కుందేళ్ళు ఉండి, వాటి ద్వారా ప్రత్యుత్పత్తి చేస్తూ వెళ్ళితే, ఎన్ని కుండెళ్ళు ఏర్పడుతాయి? ఒక జత కుందేళ్ళు ప్రతి నెల ఒక జత సంతతిని ఏర్పరుస్తాయి. కుందేళ్ళ ప్రతిజత 2వ నెలలో తమ ప్రథమ సంతతిని ఏర్పరుస్తాయని ఊహించుకోండి. మొదటి నెల వదిలి, ఆ తరువాత ప్రతి నెలలో ఏర్పడు కుందేళ్ళ జతలు. వెనుకటి రెండు నెలలలో ఏర్పడిన కుందేళ్ళ మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

నెల	కుందేళ్ళ జతలు
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

కేవలం 16 నెలల్లో సుమారు 1600 జతల కుందేలు ఏర్పడుతాయి.

ఈ సమస్యను స్పష్టంగా నిరూపించి, ప్రస్తుత సందర్భానికి అనుగుణంగా గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం యొక్క వివిధ దశలను తెల్పండి.

A2.3 కొన్ని దృష్టాంతాలు / నిదర్శనలు

మనమిప్పుడు ఆకృతీకరణ యొక్క కొన్ని ఉదాహరణలు పరిగణిద్దాం.

ఉదాహరణ 1:(ఒక జత పాచికలను దొర్లించవచ్చు):

మీ ఉపాధ్యాయుడు ముందుగానే చెప్పెడి, ఊహించు ఆట సవాలును మీకు ఇస్తాడు అని భావించుకోండి. వారు ఒక జత పాచికలను దొర్లిస్తూ దానికంటే ముందు పాచికల ఉపరితలంలో కనబడు సంఖ్యల మొత్తాన్ని మీరు ఊహించాల్సి వుంటుంది. ప్రతి తప్పు ఊహకు మీరు రెండు మార్కులు పోగొట్టుకుంటారు. ఏ సంఖ్యలు ఉత్తమ ఊహలైయుండవచ్చు?

సాధన:

1వ దశ (సమస్యను అర్థం చేసుకోవడం):

ఉపరితలం (పైముఖం)లో కనబడు సాధ్యత అధికంగానున్న కొన్ని సంఖ్యల గురించి మీరు తెలుసుకోవలసి ఉంటుంది.

2వ దశ (గణిత శాస్త్ర వివరణ):

గణిత శాస్త్ర పదాలలో సమస్యను చెప్పాలంటే, పాచికల మీద కనబడు సంఖ్యలతో అవకాశం ఉన్న మొత్తాల సంభావ్యతలను కనుగొనడం.

పాచికల ప్రతి దొర్లింపు కింది 36 జతల సంఖ్యలలో ఒక యాదృచ్ఛిక ఎంపికను చూపుతుందని ప్రస్తుత సందర్భాన్ని మనం సులభంగా ఆకృతీకరించవచ్చు.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ప్రతిజతలో మొదటి సంఖ్య మొదటి పాచికలో కనబడు సంఖ్యను రెండవ సంఖ్య రెండవ పాచికలో కనబడు సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3వ దశ (గణిత శాస్త్ర సమస్యను సాధించడం):

పై ప్రతి జతలోని సంఖ్యలను కూడినప్పుడు మనకు కనబడునది ఏమనగా, అవకాశమున్న సంఖ్యలు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 మరియు 12 ప్రతి జత సంభవించుట సమాన సాధ్యత కల్గియుంది. అని భావించుకొని, మనం వాటికి సంభావ్యతను కనుగొంటాల. కింది పట్టికలో దానిని మనం చూస్తున్నాం.

మొత్తాం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

మొత్తం 7 లభించు సాధ్యత మరియు అది మిగిలిన సంఖ్యలను మొత్తంగా పొందు సాధ్యత కంటే అధికం అని గమనించండి.

4వ దశ (సాధనను వివరించడం):

మొత్తం 7లభించు సంభావ్యత అధికంగా ఉండటం వలన ఏడు అను సంఖ్య చాలాసార్లు వస్తుందని మీరు ఊహించవచ్చు.

5వ దశ (నమూనా నిర్ధారించడం):

ఒక జత పాచికలను అనేకసార్లు దొర్లించి (చిమ్మి) ఒకసాపేక్ష ఆవృత పట్టికను. నిర్మించండి. సాపేక్ష ఆవృతిని అనురూప సంభావ్యతలతో పోల్చండి. ఈ రెండింటి చాలా వ్యత్యాసాలున్నచో, పాచికలు విరూపం చెందిన అవకాశం ఉంటుంది. అప్పుడు మనం దత్తాంశాలు పొంది, పాచిక ఏ సంఖ్యవైపుకు బలం పొందిందోనని మూల్యాంకనం చేయాలి.

తరువాత ఉదాహరణకు వెళ్ళడానికి ముందు మీకు కొన్ని గత సమాచారాలు (నేపథ్యం) కావాలి.

డబ్బు అవసరం ఉన్నప్పుడు కావలసినంత డబ్బులేని సామాన్య అనుభవం ఎక్కువ మందికి అయివుంటుంది. నిత్య జీవన అవసరమైన వస్తువులుకొనడానికి కావలసిన డబ్బు కావచ్చు. లేదా అనుకూలకరమైన వస్తువులను కొనడానికికావచ్చు. డబ్బు మనకు ఎల్లప్పుడు కావాలి. పరిమిత డబ్బుతో స్కూటర్, ఫ్రిడ్జ్, టి.వి. కారు మొదలగు వస్తువులను వినియోగదారులు కొనేటట్లు చేయడానికి వ్యాపారులు 'కంతుల ప్రణాళిక' అను ఒక ప్రణాళికను పరిచయం చేశారు.

ఒక్కొక్కసారి ఒక వ్యాపారి కంతుల ప్రణాళికను మార్కెట్ తంత్రంగా పరిచయం చేసి, వినియోగదారులు వస్తువులను కొనేటట్లు ప్రేరేపిస్తారు. కంతుల ప్రణాళికలో వస్తువులను కొనేటప్పుడు డబ్బును పూర్తిగా చెల్లించనవసరం లేదు. వినియోగదారులు కొనేసమయంలో మొత్తంలో ఒక భాగం చెల్లించి, మిగిలిన డబ్బును నెల, త్రైమాసిక, అర్థ వార్షిక లేదా వార్షిక కంతులలో చెల్లించవచ్చు. కంతుల ప్రణాళికలో కొనేవారు కొద్దిగా ఎక్కువ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

చెల్లించవలసి ఉంటుంది. ఎందుకనగా, తరువాతి కొన్ని రోజుల తరువాత డబ్బు చెల్లించవలసినందున, అమ్మకం దారులు వడ్డీ విధిస్తారు. (కొనసాగిన చెల్లింపు అనబడుతుంది).

కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని కంతు ప్రణాళికను అర్థం చేసుకుందాం. దానికి ముందు ఈ పరికల్పనకు సంబంధించిన కొన్ని పదాలను వివరించుకుందాం.

ఒక వస్తువు యొక్క నగదు విలువ అనగా, వస్తువును కొనేటప్పుడు వినియోగదారులు పూర్తిగా చెల్లించవలసిన డబ్బు ప్రారంభ చెల్లింపు అనగా, వస్తువును కొనేటప్పుడు చెల్లించేదాని దర / వెలయొక్క ఒక భాగం.

గమనించండి: కంతుల ప్రణాళికలో వస్తువును కొన్న ఒక సంవత్సరం లోపల బాకి డబ్బును చెల్లించేటట్లయితే, కొనసాగిన చెల్లింపుమీద సరళ (బారు) వడ్డీ విధించబడుతుంది.

వెనుకటి కాలంలో వేరొక్కరికి అప్పుగా ఇచ్చిన డబ్బు మీద వడ్డీ విధించడం పాపమని పరిగణించబడేది. చాలా వెనుక అది నిషేధంలో ఉండేది. వడ్డీ పొందకూడదని ఈ పద్ధతికి వ్యతిరేకంగా ప్రజలు కనుగొన్న నూతన విధానం అనగా అప్పుగా పొందిన డబ్బుకు బదులుగా ఆ వెల/విలువకు సరిపోవు ఒక వస్తువును ఇవ్వడం. ఈ పరస్పర మార్పుల యొక్క దరలో వడ్డీ కనుమరుగా ఉండేది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

మనమిప్పుడు దానికి సంబంధించిన గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం యొక్క సమస్యల వైపు వెళ్దాం.

ఉదాహరణ 2: జూహి ఒక బైసైకిల్ కొనాలను కొంది. ఆమె మార్కెట్‌కు వెళ్ళినప్పుడు, ఆమె ఇష్టపడే బైసైకిల్ ₹1800లకు దొరుకుతుందని తెలిసింది. జూహి దగ్గర ₹600 ఉంది. అందువలన ఆమె అంగడి యజమానితో తనకు దానిని కొనడానికి సాధ్యంకాదని చెప్పిందిఈ ఒక చిన్న లెక్కింపు తరువాత, అంగడి యజమాని ఆమె ముందు ఒక ప్రస్తాపం తెచ్చాడు. అతడు జూహికి ఇలా చెప్పాడు. ఆమె ₹600 ప్రారంభంలో చెల్లించి, బైసైకిల్ కొనుక్కోవచ్చు. బాకి డబ్బును ఒక్కొక్క ₹610ల రెండు నెలవారి కంతులలో తీర్చాలి. జూహి ముందు రెండు ఎంపికలున్నాయి. ఒకటికంతు ప్రణాళికలో కొనసాగడం లేదా ఏడాదికి 10% రేటుతో బారు వడ్డీ ప్రకారం బ్యాంకునుండి అప్పుపొంది నగదు చెల్లించడం. ఆమెకు ఏ ఎంపిక ఎక్కువ లాభదాయకం?

సాధన:

1వ దశ (సమస్యను అర్థం చేసుకోవడం):

జూహి నిర్ధారించవలసినది ఏమనగా, అంగడి యజమాని చేసిన ప్రస్తావనను ఒప్పుకోవాలా ఒప్పుకోకూడదా అనునది దానికొరకు ఆమె రెండు ఎంపికల వడ్డీ రేట్లను తెలుసుకోవాలి. ఒకటికంతు ప్రణాళికలో విధించినది, మరొకటి బ్యాంకు విధించినది (అనగా 10%).

2వ దశ (గణితశాస్త్ర వివరణ):

ప్రణాళికను ఒప్పుకోవడం లేదా తిరస్కరించడం. అంగడి యజమాని విధించు వడ్డీరేటును ఆమె తెలుసుకోవాలి. పూర్తి మొత్తాన్ని ఒక సంవత్సరం లోపల చెల్లించడం వలన, బారు (సరళ) వడ్డీని విధించబడుతుందని గమనించండి.

మనకు తెలిసినట్లుగా బైసైకిల్ వెల = ₹ 1800

కంతుల ప్రణాళికలో ప్రారంభ చెల్లింపు = ₹ 600

డబ్బు = ₹ (1800 - 600) = ₹ 1200

అంగడి యజమాని విధించు వార్షిక వడ్డీ రేటు r % అనుకోండి.

ప్రతి కంతు డబ్బు = ₹ 610

కంతులలో చెల్లించిన డబ్బు = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220.

కంతుల ప్రణాళికలో ఇచ్చిన డబ్బు = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20.

జూహి ₹ 1200లను ఒక నెలకు వేయడం వలన, మొదటి నెల అసలు = ₹ 1200

మొదటి నెల అసలు = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

రెండవ అసలు బాకి = ₹ 590 + విధించినవడ్డీ (₹ 20) = నెలవారి కంతు = ₹ (610) = 2 వ కంతు

అందువలన, ఒక నెలకు మొత్తం అసలు = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790.

వడ్డీ = ₹ $\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ .... (2)

3వ దశ (సమస్యను సాధించడం):

(1) మరియు (2) నుండి $\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$

లేదా $r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14$ (అందాజు)

4వ దశ (సాధనను వివరించడం):

కంతుల ప్రణాళికలో విధించిన రేటు = 13.14%

బ్యాంకు విధించిన వడ్డీ రేటు = 10%

అందువలన బైసైకిల్ కొనడానికి బ్యాంకునుండి డబ్బు పొందడానికి ఆమె ప్రాధాన్యతనిచ్చినచో, ఎక్కువ లాభ దాయకం.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5వ దశ (నమూనా నిర్ధారించడం):

ఈ ప్రకరణలో ఈ దశ అంత ముఖ్యంకాదు. ఎందుకనగా అక్కడ సంఖ్యలు స్థిరంగా ఉంటాయి. అలాగున్నప్పటికీ, బ్యాంకునుండి అప్పు పొందడానికి బాండు పేపరు కొనడం మొదలగు విధివిధానాలవలన పరిణామ క్రమ వడ్డీ రేటు కంతుల ప్రణాళిక కంటే ఎక్కువగా ఉండటం వలన, ఆమె తన అభిప్రాయాన్ని మార్చుకోవచ్చుకూడా.

గమనించండి:వడ్డీరేటు ఆకృతీకరణం దాని ప్రారంభ దశలో ఉంది. నిర్ధారణ ఇంకా కూడా ఆర్థిక మార్కెట్ సమస్య అవుతుంది. ఒకవేళ, కంతును నిర్దిష్టపరచునప్పుడు, విభిన్న రకాల వడ్డీరేట్లను చట్టబద్ధం చేస్తే, అప్పుడు నిర్ధారణ ఒక ప్రముఖ సమస్య అవుతుంది.

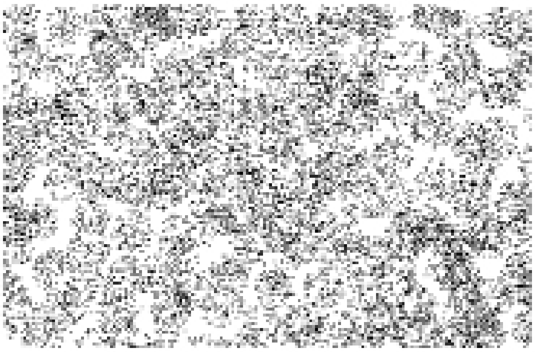
అభ్యాసం A2.2

కింది ప్రతి సమస్యను సాధించడానికి కావలసిన గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణాలైన వివిధ దశలను రాయండి.

1. ఒక పక్షులనిపుణురాలు ఒక ప్రదేశంలోగల రామచిలుకలను అందాజు వేయాలనుకుంది ఆమె కొన్నింటిని పట్టుకోవడానికి ఒక అందాజు వేయాలనుకుంది. ఆమె కొన్నింటిని పట్టుకోవడానికి ఒక వల ఉపయోగించింది. 32 రామచిలుకలను పట్టుకొని వాటికి, గాజులు తొడిగి, వదిలేసింది. తరువాతి వారం 8 రామ చిలుకలు గాజులు కలిగియుంటాయి.

   (i) ఆమె రెండవసారి పట్టిన రామచిలుకలు ఎన్నవ ఒక భాగం గాజులు కలిగియుండేవి.

   (ii) ఆ ప్రదేశంలోగల మొత్తం రామచిలుకలను అందాజు వేయండి.



2. ప్రక్కలో కనబడుతున్నది పై నుండి తీసిన ఒక అడవి ఛాయా చిత్రంఈ అందులో ప్రతి చుక్కకూడా ఒక చెట్టును చూపుతోంది. పరిసరాల గణనలోని ఒక భాగమై, మీరు ఏమి చేయాలంటే ఆ ప్రదేశ ంలోని చెట్లను కనుగొనడం.

3. ఒక టి.వి.ని ₹24000 నగదు దరకు కొనవచ్చు. లేదా ₹8000 ప్రారంభ చెల్లింపుచేసి, ఒక్కొక్కటి ₹ 2800 ఆరు నెలల వారి కంతులలో కొనవచ్చు. ఆలి ₹8000లతో ఒక టి.వి. కొనడానికి మార్కెట్‌కు వెళ్ళాడు. అతనికి ఇప్పుడు రెండు ఎంపికలున్నాయి. ఒకటవది కంతుల ప్రణాళికలో టి.వి. కొనడం లేదా ఏదైనా ఆర్థిక సహకార సంఘంనుండి అప్పు పొంది నగదు చెల్లించడం. సహకార సంఘం ఏడాదికి 18% రేటులో బారు (సరళ) వడ్డీ విధిస్తుంది. అలాగయితే, ఆలీకి ఏ ఎంపిక ఉత్తమమెనది.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2.4 గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణం ఎందుకు ప్రాముఖ్యత చెందింది?

వివిధ ఉదాహరణలలో మనం చూసినట్లుగా గణిత శాస్త్ర ఆకృతీకరణం ఒక అంతరశాస్త్రీయ విషయం. గణితశాస్త్ర నిపుణులు మరియు ఇతర రంగాల నిపుణులు, ప్రస్తుతం ఉన్న ఉత్పత్తుల నాణ్యత పెంచడానికి ఇంకా ఉత్తమమైనవాటిని అభివృద్ధి చేయడానికి లేదా కొన్ని ఉత్పత్తుల స్వభావాలను ఊహించడానికి తమ జ్ఞానం మరియు నైపుణ్యాన్ని పంచుకుంటారు.

ఆకృతీకరణ ప్రాముఖ్యతకు సంబంధించి అనేక నిర్దిష్ట కారణాలుండటం నిజమైనప్పటికీ, వాటిలో ఎక్కువ కింది కారణాల కొరకు ఒకటి కాకపోతే మరొక విధానంలో సంబంధించినవి.

- **అవగాహన పొందడానికి:** వాస్తవ ప్రపంచంలోని వ్యవస్థ యొక్క అవసరమైన స్వభావాలను ప్రతిబింబించు ఒక గణిత శాస్త్ర నమూనా మనలో ఉన్నచో, ఆ నమూనాను విశ్లేషించడం ద్వారా మనం వ్యవస్థను ఇంకా భాగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఇదేగాక, నమూనాను / ఆకృతిని నిర్మాణం చేయునప్పుడు వ్యవస్థలో ఏ అంశాలు ప్రాముఖ్యత పొందాయి మరియు వ్యవస్థలోగల విభిన్న అంశాల మధ్య సంబంధమేమిటిని కూడా మనం కనుగొంటాం.

- **ఊహించడానికి లేదా ముందుగా సూచించడానికి లేదా అనుకరించడానికి:** సామాన్యంగా ఒక వాస్తవ ప్రపంచంలోని వ్యవస్థ భవిష్యత్తులో ఏమి చేయవచ్చో తెలుసుకోవడానికి మనం ఎన్నోసార్లు ఇష్టపడుతాం. అయితే, అది వ్యయంతో కూడియుంటుంది. లావాదేవి అయివుండదు. లేదా వ్యవస్థతో నేరుగా ప్రయోగించడం అసాధ్యంగా ఉంటుంది. దానికి ఉదాహరణలు – వాతావరణ ముందస్తూచన, మానవునిలో ఔషధ పరిణామాల అధ్యయనం, న్యూక్లియార్ రి యాక్టర్ యొక్క అత్యుత్తమ విన్యాసం కనుగొనడం మొదలగునవి.

వివిధ సంస్థలలో ముందస్తూచన చాలా ముఖ్యం. ఎందుకనగా, నిర్ణయం తీసుకొను విధానం, భవిష్యత్ సంఘటనలను ఊహించేదాని మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు,

మార్కెట్ విభాగంలో అవసరాల (డిమ్యాండ్) గురించిన నమ్మకమైన ముందస్తూచన అమ్మక తంత్రాలను నిర్వహించడానికి సహాయపడుతుంది.

ఒక పాఠశాల మండళికి ఎక్కడ, ఎప్పుడు క్రొత్త పాఠశాలలు ప్రారంభించాలో నిర్ణయించుకోవడానికి, వివిధ జిల్లాలలో పాఠశాలకు వెళ్ళు పిల్లల సంఖ్యలోని పెరుగుదలను ముందుగా సూచించడానికి అవకాశముండాలి.

ముందస్తూచనాకారులు ఎక్కువగా వెనుకటి దత్తాంశాలను ఉపయోగించుకొని, భవిష్యత్తును ఊహిస్తారు. దత్తాంశాలను వివరించదగు ఒక విన్యాసాన్ని గుర్తించుకోవడానికి వారు ముందుగా వాటిని విశ్లేషిస్తారు. తరువాత ముందు సూచనను తయారు చేయడానికి ఈ దత్తాంశాలు మరియు విన్యాసాలను

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ఉపయోగించుకొని, భవిష్యత్తును ఊహిస్తారు. చాలా ముందు్సూచనా తంత్రాలలో ఈ ప్రాథమిక ఉపాయం ఉపయోగించబడుతుంది. వెనుక గుర్తించినటువంటి విన్యాసం భవిష్యత్తులో కూడా కొనసాగవచ్చు అను ఊహమీద ఆధారపడిఉంటుంది.

- **అందాజు చేయడానికి:** ఒక్కోసారి మనం పెద్ద విలువలను అందాజు వేయవలసి ఉంటుంది. అడవిలోగల చెట్లు, చెరువులోగల చేపలు మొదలగు ఉదాహరణలను మీరు చూశారు. మరొక ఉదాహరణ అనగా, ఎన్నికల ముందు పోటీ చేయు పక్షాలు, తమ పక్షం ఎన్నికలలో గెలిచే సంభావ్యతలను ఊహించడానికి ఇష్టపడుతారు. నిర్దిష్టంగా చెప్పాలంటే, వారి నియోజక వర్గంలో ఎంతమంది వారి పక్షానికి ఓటు వేస్తారో అందాజు వేయడానికి ఇష్టపడుతారు. వారి ఊహ ఆధారంగా ప్రచార తంత్రాలను నిర్ధారించడం కూడా వారు ఇష్టపడుతారు. ఒక పక్షం ఎన్నికలలో పొందదగు స్థానాలను ఊహించడానికి ఎన్నికలముందు సమీక్షలు. విస్తృతంగా వినియోగంలో ఉంటాయి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసం A2.3

1. గత ఐదు సంవత్సరాల దత్తాంశాలాధారంగా, మీ పాఠశాల సంవత్సరం చివరిలో జరుగు 10వ తరగతి పబ్లిక్ పరీక్షలో గణితంలో పొందదగు సరాసరి శాతాన్ని ముందుగా సూచించడానికి ప్రయత్నించండి.

A2.5 సారాంశం

ఈ అనుబంధంలో మీరు ఈ కింది అంశాలు నేర్చుకున్నారు.

1. గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం అనగా నిజ జీవన సందర్భాలను గణిత శాస్త్ర పదాలలో వివరించడం. గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ అనగా, గణితశాస్త్ర నమూనాలను తయారు చేసి, వాటిని సాధించి, నిజజీవన సమస్యలను దీనిద్వారా అర్థం చేసుకొను విధానం.
2. ఆకృతీకరణానికి లోనగు వివిధ దశలు సమస్యను అర్థం చేసుకోవడం, గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణను రూపించడం, వాటిని సాధించడం, నిజజీవన సన్నివేశంలో వాటిని వివరించడం మరియు అన్నింటికం టే ముఖ్యంగా నమూనాలను నిర్ధారించడం.
3. కొన్ని గణితశాస్త్ర నమూనాలను / ఆకృతీకరణాలను అభివృద్ధిచేయడం.
4. గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ ప్రాముఖ్యత.

జవాబులు / సూచనలు

త్రికోణ మితి పరిచయం

అభ్యాసము - 8.1

1. i) $\sin A=\frac{7}{25}, \cos A=\frac{24}{25}$ ii) $\sin C=\frac{24}{25}, \cos C=\frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A=\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A=\frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A=\frac{15}{17}, \sec A=\frac{17}{8}$

5. $\sin\theta=\frac{5}{13}, \cos\theta=\frac{12}{13}, \tan\theta=\frac{5}{12}, \cot\theta=\frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta=\frac{13}{5}$

7. i) $\frac{49}{64}$ ii) $\frac{49}{64}$

8. అవును **9.** i) 1 ii) 0

10. $\sin P=\frac{12}{13}, \cos P=\frac{5}{13}, \tan P=\frac{12}{5}$

11. i) తప్పు ii) సరి iii) తప్పు iv) తప్పు v) తప్పు

అభ్యాసము 8.2

1. i) 1 ii) 2 iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ v) $\frac{67}{12}$

2. i) A ii) D iii) A iv) C

3. $\angle A = 45^0, \angle B = 15^0$

4. i) తప్పు ii) సరి iii) తప్పు iv) తప్పు v) సరి

అభ్యాసము 8.3

1. $\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}, \tan A=\frac{1}{\cot A}, \sec A=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A=\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sqrt{\sec A}}, \cos A=\frac{1}{\sec A}, \tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\cot A=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$, $\operatorname{cosec} A=\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$

3. i) 1 ii) 1

4. i) B ii) C iii) D iv) D

త్రికోణమితి యొక్క కొన్ని అనువర్తనాలు

అభ్యాసము – 9.1

1. 10m **2.** $8\sqrt{3}$m **3.** 3m, $2\sqrt{3}$m

4. $10\sqrt{3}$m **5.** $40\sqrt{3}$m **6.** $19\sqrt{3}$m

7. $20(\sqrt{3}-1)$m **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$m **9.** $16\frac{2}{3}$m

10. $20\sqrt{3}$m, 20m, 60m **11.** $10\sqrt{3}$m, 10m **12.** $7(\sqrt{3}+1)$m

13. $75(\sqrt{3}-1)$m **14.** $58\sqrt{3}$m **15.** 3 సెకెన్లు

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

వృత్తాలు

అభ్యాసము 10.1

1. చాలా అనంతమైన.

2. i) ఒకటి ii) ఖండనరేఖ

iii) రెండు iv) స్పర్శ బిందువు

3. i) D

అభ్యాసము 10.2

1. A **2.** B **3.** A

6. 3 cm **7.** 8 cm **12.** AB = 15 cm AC = 13 cm

వృత్తాలకు సంబంధించిన వైశాల్యాలు

అభ్యాసము 11.1

1. $\frac{132}{7}$ cm^2 **2.** $\frac{77}{8}$ cm^2 **3.** $\frac{154}{3}$ cm^2

4. (i) 28.5 cm^2 (ii) 235.5 cm^2

5. (i) 22 cm (ii) 231 cm^2 (iii) $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ cm^2

6. 20.4375 cm^2; 686.0625 cm^2 **7.** 88.44 cm^2

8. (i) 19.625 m^2 (ii) 58.875 cm^2 **9.** (i) 285 mm (ii) $\frac{385}{4}$ mm^2

10. $\frac{22275}{28}$ cm^2 **11.** $\frac{158125}{126}$ cm^2 **12.** 189.97 km^2

13. ₹ 162.68 **14.** D

ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమానం

అభ్యాసము 12.1

1. 160 cm^2 **2.** 572 cm^2 **3.** 214.5 cm^2

4. గరిష్ట వ్యాసం = 7cm; ఉపరితల వైశాల్యము = 332.5 cm^2

5. $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ **6.** 220 mm^2 **7.** 44 m^2, ₹ 22000

8. 18 cm^2 **9.** 374 cm^2

అభ్యాసము 12.2

1. π cm^3

2. 66 cm^3 మాదరి లోపలిగల గాలి ఘనపరిమాణము (శంఖము + స్థూపము + శంఖం) వీటి లోపలి యొక్క గాలి ఘనపరిమాణం $=\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, ఇక్కడ r = శంఖం యొక్క వ్యాసార్థము మరియు h_1 = శంఖం ఎత్తు, h_2 = స్థూపం ఎత్తు కావలసిన ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + 3h_2 + h_1)$

3. 338 cm^3 **4.** 523.53 cm^3 **5.** 100 **6.** 892.26 kg

7. 1.131 m^3 (అందాజుగా) **8.** సరి కాదు సరైన జవాబు 346.51 cm^3

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

సాంఖ్యక శాస్త్రం

అభ్యాసము - 13.1

1. 8.1. మొక్కలు, మనం నేర విధానాన్ని ఉపయోగించాం ఎందుకంటే x_1 మరియు f_1 ల విలువలు తక్కువగా ఉన్నాయి.

2. 145.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9 **5.** 57.19

6. ₹ 211 **7.** 0.099 *ppm* **8.** 12.38 రోజులు **9.** 69.43%

అభ్యాసము 13.2

1. బాహుళకము = 36.8 సంవత్సరాలు, సగటు = 35.37 సంవత్సరాలు. 36.8 సంవత్సరాలు (సుమారు) వయస్సు గల గరిష్ఠ సంఖ్యలో రోగులు ఆసుపత్రికి చేరినారు. అలాగే ఆసుపత్రిలో చేరిన రోగుల సరాసరి వయసు 35.37 సంవత్సరాలు.
2. 65.625 గంటలు
3. నెలసరి ఖర్చు బాహుళకము = ₹ 1847.83. నెలసరి ఖర్చు సగటు = ₹ 2662.5
4. బాహుళకం = 30.6, సగటు = 29.2 గరిష్ఠ సంఖ్య రాష్ట్రాలు / కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాలు 30.6 నిష్పత్తిలో విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయులు కలిగివున్నారు. ఈ నిష్పత్తి సగటు 29.2.
5. బాహుళకము = 4608.7 రన్నులు
6. బాహుళకము = 44.7 కార్లు

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

అభ్యాసము 13.3

1. మధ్యగతము = 137 యూనిట్లు, సగటు = 137.05 యూనిట్లు బాహుళకము = 135.76 యూనిట్లు. ఈ సమస్యలో మూడు కొలతలు సుమారు సమానంగానేవున్నాయి.

2. $x = 8, y = 7$ **3.** మధ్యగత వయస్సు = 35.76 సంవత్సరం

4. మధ్యగత పొడవు = 146.75 mm **5.** మధ్యగత నాణ్యత = 3406.98 గంటలు

6. మధ్యగతము = 8.05, సగటు = 8.32, బాహుళకము = 7.88

7. మధ్యగత బరువు = 56.67kg

సంభావ్యత

అభ్యాసము 14.1

1. i) 1 ii) 0, అసాధ్యమైన సంఘటన iii) 1, స్థిర సంఘటన

iv) 1 v) 0, 1

2. iii) మరియు iv) ఈ ప్రయోగాలు సమాన సాధ్యతలు గల ఫలితాలను కలిగి ఉన్నాయి.

3. మనం ఒక నాణ్యాన్ని ఎగురవేసినపుడు, బొమ్మ మరియు బొరుసులను పొందు సాధ్యతలు సమానంగా ఉన్నాయి. కావున ఒక నాణ్యం ఎగురవేసినపుడు లభించు ఫలితము పూర్తిగా ఊహించడానికి సాధ్యం కాదు.

4. B **5.** 0.95 **6.** i) 0 ii) 1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. 0.008 **8.** i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{5}{8}$

9. i) $\frac{5}{17}$ ii) $\frac{8}{17}$ iii) $\frac{13}{17}$ **10.** i) $\frac{5}{9}$ ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ **12.** i) $\frac{1}{8}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{3}{4}$ iv) 1

13. i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{2}$

14. i) $\frac{1}{26}$ ii) $\frac{3}{13}$ iii) $\frac{3}{26}$ iv) $\frac{1}{52}$ v) $\frac{1}{4}$ vi) $\frac{1}{52}$

15. i) $\frac{1}{5}$ ii) a) $\frac{1}{4}$ b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. i) $\frac{1}{5}$ ii) $\frac{15}{19}$ **18.** i) $\frac{9}{10}$ ii) $\frac{1}{10}$ iii) $\frac{1}{5}$

19. i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** i) $\frac{31}{36}$ ii) $\frac{5}{36}$

22. i)

2 పాచికల మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ii) లేదు, 11 మొత్తాల సాధ్యతలు సమానంగా లేవు.

23. $\frac{3}{4}$; ఫలితాల సాధ్యతలు: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH. వీటిలో THH అంటే, మొదట ఎగురవేసినపుడు బొరుసు, రెండవసారి బొమ్మ మరియు మూడవ సారి బొమ్మ మరియు మిగిలిన వాటిని ఇదే విధంగా అర్థం చేసుకోవాలి.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

24. i) $\frac{25}{36}$

ii) $\frac{11}{36}$

25. i) తప్పు. మనం ఫలితాలను ఈ విధంగా వర్గీకరించడానికి సాధ్యమవుతుంది. అయితే వాటి ఫలితాల సాధ్యతలు సమానం కాదు. కారణమేమంటే ప్రతి ఒక నాణ్యంలో ఒకటి అనునది రెండు విధాల ఫలితాంశాలను ఇవ్వవచ్చు. మొదటి నాణ్యంలో బొరుసు లేదా మొదటి నాణ్యంలో బొరుసు మరియు 2 వ నాణ్యంలో బొమ్మ పైకి రావచ్చు. దీని నుండి రెండు బొమ్మలు (లేదా రెండు బొరుసులు) అని రెండు సాధ్యతలు ఏర్పడతాయి.

ii) సరి. ప్రశ్నలో సూచించిన రెండు ఫలితాల సాధ్యతలు సమానంగా ఉన్నాయి.

గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం

అభ్యాసము A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$

   (ii) 160

2. 1cm^2 వైశాల్యాన్ని తీసుకొని, అందులోని చుక్కలను లెక్కించండి. ఈ సంఖ్య మరియు వైశాల్యాల (cm^2 లలో) గుణలబ్ధమే మొత్తం వృక్షాలసంఖ్య అవుతుంది.

3. విడత పథకంలో వడ్డీరేటు 17.74%, ఇది 18% కంటే తక్కువ.

అభ్యాసము A2.3

1. విద్యార్థులు తమ సొంత జవాబులు కనుగొంటారు.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED