



Government of Karnataka

गणित MATHEMATICS

10

दसवीं कक्षा
Tenth Standard
भाग - 1



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)

6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru - 560 003

1063 – गणित

कक्षा 10 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-646-2

प्रथम संस्करण

जनवरी 2007 माघ 1928

पुनर्मुद्रण

अक्तूबर 2007, जनवरी 2009,
दिसंबर 2009, नवंबर 2010,
जनवरी 2012, दिसंबर 2012,
अक्तूबर 2013, जनवरी 2014,
दिसंबर 2014, दिसंबर 2015,
दिसंबर 2016, मार्च 2018,
जनवरी 2019 और सितंबर 2019

संशोधित संस्करण

दिसंबर 2022 पौष 1944

PD 10T RPS

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण
परिषद्, 2007, 2022

₹ 160.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम.
पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक
अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद
मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा
विजय लक्ष्मी प्रिंटिंग वर्क्स प्राइवेट लिमिटेड,
बी-117, सेक्टर-5, नोएडा - 201 301
(उ.प्र.) द्वारा मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की विक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन सी ई आर टी के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग

नयी दिल्ली 110 016

फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड

हेली एक्सटेंशन, होस्टेले

बनाशकरी III इस्टेज

बंगलुरु 560 085

फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन

डाकघर नवजीवन

अहमदाबाद 380 014

फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस

निकट: धनकल बस स्टॉप पन्हीटी

कोलकाता 700 114

फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लेक्स

मालीगांव

गुवाहाटी 781 021

फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : अनूप कुमार राजपूत
मुख्य उत्पादन अधिकारी : अरुण चितकारा
मुख्य व्यापार प्रबंधक : विपिन दिवान
मुख्य संपादक (प्रभारी) : बिज्ञान सुतार
संपादक : रेखा अग्रवाल
सहायक उत्पादन अधिकारी : राजेश पिप्पल

सज्जा एवं आवरण

श्वेता राव

चित्रांकन

ललित कुमार मौर्या

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफी दूर तक ले जाएंगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों व स्रोतों की अनेकखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक जिंदगी और कार्यशैली में काफी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव करने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

(iv)

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक की मुख्य सलाहकार इंदिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की प्रोफ़ेसर पी. सिक्लेयर एवं लखनऊ विश्वविद्यालय के पूर्व प्रोफ़ेसर जी.पी. दीक्षित की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रोफ़ेसर मृणाल मीरी और प्रोफ़ेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित राष्ट्रीय निरीक्षण समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए भी कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों व सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

नयी दिल्ली

20 नवंबर 2006

निदेशक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

प्रस्तावना

कोठारी आयोग के गठन के समय से ही अनेक समितियाँ विद्यालय-पाठ्यक्रम को शिक्षार्थियों के लिए अर्थपूर्ण और रोचक बनाने के लिए नयी-नयी विधियों का पता लगाती आ रही है। वर्षों के विकसित ज्ञान के आधार पर 'राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा' (एन.सी.एफ.) को अंतिम रूप 2005 में दिया गया। इस प्रयास में सरकार ने गणित के शिक्षण से संबंधित एक 'राष्ट्रीय फोकस समूह' का गठन किया। 2005 में जारी की गई राष्ट्रीय फोकस समूह ने अपनी रिपोर्ट में गणित के अध्यापन और अधिगमन को अधिक उत्तम बनाने के लिए एक रचनात्मक दृष्टिकोण प्रस्तुत किया।

इस दृष्टिकोण का सार यही है कि स्कूल में प्रवेश पाने से पहले ही बच्चे जिस गणित को अपने परिवेश में प्रयोग करते रहते हैं, उससे वे स्वाभाविक रूप से परिचित हो जाते हैं। पाठ्यक्रम, शिक्षण, दृष्टिकोण, पाठ्यपुस्तकों इत्यादि का निर्माण इस ज्ञान के आधार पर इस प्रकार होना चाहिए जिससे कि बच्चे गणित का आनंद उठा सकें और यह समझ सकें कि गणित सूत्रों और कलन-विधियों को लागू करने के क्षेत्र की अपेक्षा कहीं अधिक तर्क देने की एक विधि है। विद्यार्थियों और अध्यापकों को चाहिए कि वे गणित को एक स्वाभाविक और अपने आस पास से जुड़ी घटनाओं के रूप में समझने का प्रयास करें। गणित पढ़ाते समय हमारा ध्यान विशेषीकरण और व्यापकीकरण करने की योग्यता विकसित करने, अर्थपूर्ण समस्याओं को प्रस्तुत एवं हल करने, प्रतिरूपों और संबंधों को देखने और गणितीय उपपत्ति का तर्कसंगत चिंतन को लागू करने की ओर केंद्रित करे और उपरोक्त सभी कार्य ऐसे वातावरण में करें जिसमें बच्चे गणित को एक बोझ न समझें।

इसी दर्शन को ध्यान में रखकर कक्षा 1 से लेकर कक्षा 12 तक के गणित का पाठ्यक्रम विकसित किया गया और जिसे पाठ्यपुस्तक विकास समिति ने पाठ्यपुस्तक में प्रस्तुत करने का प्रयास किया है। विशेष रूप से पाठ्यपुस्तक तैयार करते समय मोटे तौर पर निम्नलिखित मार्गनिर्देशों को ध्यान में रखा गया है।

- पुस्तक की पठन-सामग्री बच्चे द्वारा पहले से पढ़ी गई पठन-सामग्री और उसके अनुभवों से संबंधित हो।
- शब्द समस्याओं सहित इस पुस्तक की भाषा स्पष्ट, सरल और असंदिग्ध होनी चाहिए।
- बच्चों के परिवेश में उपस्थित स्थितियों की सहायता से संकल्पनाओं/प्रक्रमों से परिचित कराना चाहिए।
- प्रत्येक संकल्पना/प्रक्रम के लिए भिन्न-भिन्न प्रकार के अनेक उदाहरण और प्रश्न देने चाहिए। इससे यह सुनिश्चित हो जाता है कि अलग-अलग संदर्भ में बच्चे बार-बार संकल्पना/प्रक्रम का प्रयोग कर सकें। यहाँ 'अनेक' का प्रयोग सीमित अर्थ में किया गया है और इतना भी न हो कि वह बच्चों के लिए बोझ बढ़ा दे।

- बच्चों को समस्याओं के विभिन्न हलों को देखने और उन्हें प्राप्त करने के लिए प्रोत्साहित कीजिए।
- जहाँ तक संभव हो सके बच्चों को प्रयुक्त परिणामों का प्रयोग करने के लिए प्रेरित कीजिए।
- सभी उपपत्तियों को अनुदेशात्मक विधि से प्रस्तुत करना चाहिए जिससे कि शिक्षार्थी दिए गए तर्कों के प्रवाह को देख सके। हमारा मुख्य ध्यान उन उपपत्तियों पर होना चाहिए जहाँ लघु और स्पष्ट तर्क गणितीय चिंतन और तर्कण को प्रबल बना देता है।
- जब कभी संभव हो, एक से अधिक उपपत्तियाँ दी जानी चाहिए।
- शिक्षार्थी को अपने तर्क व्यक्त करने की स्पष्ट एवं तार्किक विधि विकसित करने में सहायता देने के लिए प्रयुक्त उपपत्तियों और हलों का प्रयोग माध्यम के रूप में करना चाहिए।
- सभी ज्यामितीय रचनाओं के साथ रचना का विश्लेषण और लागू किए जाने वाले चरणों की उपपत्ति भी होनी चाहिए। तदनुसार रचनाएँ करते समय बच्चों को यही सब करने के लिए प्रशिक्षित करना चाहिए।
- इसके लिए अनेक स्थानों पर ऐसे किस्से-कहानियाँ, चित्र, कार्टून और ऐतिहासिक टिप्पणियाँ देनी चाहिए जो बच्चों के लिए पढ़ाई को अधिक रोचक बना दे।
- अधिक अभिरुचि रखने वाले शिक्षार्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्नावलियों को सम्मिलित करना चाहिए परंतु ये प्रश्न परीक्षा की दृष्टि से नहीं होने चाहिए।
- सभी प्रश्नावलियों की उत्तरमाला दीजिए और उन प्रश्नों के हल/संकेत दीजिए जिनकी बच्चों को आवश्यकता हो।
- जब कभी संभव हो, संवैधानिक मानों को संचरित करना चाहिए।

इस पाठ्यपुस्तक का अध्ययन करते समय आप यह देखेंगे कि पाठ्यपुस्तक विकास समिति ने इन तथ्यों को ध्यान में रखा है। विशेष रूप से इस पुस्तक के सृजन से बच्चों को गणित के अन्वेषण के लिए स्थान उपलब्ध कराने और गणितीय रूप में तर्क देने की योग्यता विकसित करने को ध्यान में रखकर किया गया है। साथ ही इस पुस्तक में दो परिशिष्ट गणित में उपपत्तियाँ और गणितीय निदर्शन दिए गए हैं। इन्हें इस पुस्तक में उन बच्चों के लिए रखा गया है, जो इनके पठन में रुचि रखते हों, और इस समय इसका स्थान केवल ऐच्छिक पठन के लिए ही है। समय अंतराल में इन विषयों को मुख्य पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया जा सकता है।

पहले की भाँति यह पाठ्यपुस्तक भी एक सामूहिक प्रयास है। फिर भी, इस बार टीम के बारे में एक अप्राप्यिक बात यह रही है कि विभिन्न प्रकार के स्कूलों के अध्यापकों को इस पुस्तक के विकास के प्रत्येक चरण पर इसका अभिन्न अंग बनाया गया है। हमारा यह विश्वास है कि शिक्षक अपनी विशेष कक्षाओं के बच्चों की रुचि के अनुसार उदाहरण और प्रश्न देकर इस प्रक्रम में लगातार अपना योगदान देते रहेंगे। अंत में हम यह आशा करते हैं कि इस पाठ्यपुस्तक में सुधार लाने के लिए अध्यापक और शिक्षार्थी एन.सी.ई.आर.टी. को अपना सुझाव भेजते रहेंगे।

परवीन सिक्लेयर
जी.पी. दीक्षित

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष

जयंत विष्णु नारलीकर, इमीरिटस प्रोफेसर, अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए.ए., गणेशखिंड, पूना विश्वविद्यालय, पूणे

मुख्य सलाहकार

पी. सिंकलेयर, निदेशक, रा.शै.अ.प्र.प. एवं प्रोफेसर, गणित, इ.गौ.रा.मु.वि., नयी दिल्ली

जी.पी. दीक्षित, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त) गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

सदस्य

अंजली लाल, पी.जी.टी. (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, सेक्टर-14, गुडगाँव

आशुतोष के. वझलवार, प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

बी. एस. उपाध्याय, प्रोफेसर, आर. आई. ई., मैसूर

जयंती दत्ता, पी.जी.टी., सलवान पब्लिक स्कूल, गुडगाँव

महेन्द्र शंकर, लेक्चरर (एस.जी.) (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

मनिका अग्रवाल, ग्रीन पार्क, नयी दिल्ली

एन. डी. शुक्ला, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

राम अवतार, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त) एवं परामर्शदाता, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

रामा बालाजी, टी.जी.टी. (गणित), के.वी. मेग एंड सेंटर, सेंट जान्स रोड, बंगलौर

शशिधर जगदीशन, शिक्षक और सदस्य, गवरनिंग काउंसिल, सेंटर फॉर लर्निंग, बंगलौर

एस. के. सिंह गौतम, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

वंदिता कालरा, लेक्चरर, सर्वोदय कन्या विद्यालय, डिस्ट्रिक्ट सेंटर विकासपुरी, दिल्ली

वी. ए. सुजाता, टी.जी.टी., केंद्रीय विद्यालय न. 1, वास्को, गोआ

वी. माधवी, टी.जी.टी., संस्कृति स्कूल, चाणक्यपुरी, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक

आर.पी. मौर्य, प्रोफ़ेसर, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

हिंदी रूपांतरकर्ता

जी.पी. दीक्षित, प्रोफ़ेसर (सेवानिवृत्त), गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

महेन्द्र शंकर, लेक्चरर (एस.जी.) (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

एच. पी. सिन्हा, C-210, राजाजीपुरम, लखनऊ

वी. पी. सिंह, प्रोफ़ेसर (सेवानिवृत्त), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

हिंदी-समन्वयक

सुरेश कुमार सिंह गौतम, प्रोफ़ेसर (सेवानिवृत्त), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

आभार

परिषद् पाठ्यपुस्तक की समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों का उनके बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार प्रकट करती है: माला मणी, टी.जी.टी., अमिटी इंटरनेशनल स्कूल, सेक्टर-44 नोएडा; मीरा महादेवन, टी.जी.टी., एटामिक एनर्जी सेंट्रल स्कूल-4, अणुशक्ति नगर, मुंबई; रश्मी राणा, टी.जी.टी., डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, पुष्पांजली एंक्लेव, पीतमपुरा, दिल्ली; मोहम्मद कासिम, टी.जी.टी., एंग्लो अरैबिक सीनियर सेकेंडरी स्कूल, अजमेरी गेट, दिल्ली; एस.सी. राउटो, टी.जी.टी., सेंट्रल स्कूल फार तिब्बतियंस, हैप्पी वैली, मसूरी; राकेश कौशिक, टी.जी.टी., सैनिक स्कूल, कुंजपुरा, करनाल; अशोक कुमार गुप्ता, टी.जी.टी., जवाहर नवोदय विद्यालय, दुधनोई, गोलपाड़ा; शंकर मिश्रा, टी.जी.टी., डी.एम.एस., आर.आई.ई., भुवनेश्वर; उदय सिंह, लेक्चरर, गणित विभाग, बी.एच.यू., वाराणसी; बी.आर.हांडा, इमीरिटस प्रोफेसर, आई.आई.टी. दिल्ली; मोनिका सिंह, लेक्चरर, श्रीराम कॉलेज, (दिल्ली विश्वविद्यालय), लाजपतनगर, नयी दिल्ली; जी. श्रीहरी बाबू, टी.जी.टी., जवाहर नवोदय विद्यालय, सरपुर, कागज़ नगर, अदीलाबाद; अजय कुमार सिंह, टी.जी.टी., रामजस सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं. 3, चाँदनी चौक, दिल्ली; मुकेश कुमार अग्रवाल, टी.जी.टी., एस.एस.ए.पी.जी.बी.एस.एस. स्कूल, सेक्टर-V, डॉ. अंबेडकर नगर, नयी दिल्ली।

परिषद् एन.सी.ई.आर.टी. में हिंदी रूपांतरण के पुनरवलोकन हेतु आयोजित कार्यशाला में निम्नलिखित सहभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है : अजय कुमार सिंह, टी.जी.टी., रामजस सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं. 3, चाँदनी चौक, दिल्ली; प्रोफेसर बिजेन्द्र सिंह, अध्यक्ष, गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन; जी.डी. ढल, रीडर (अ.प्रा.) एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; नंद किशोर वर्मा, लेक्चरर, एच.ई.एस.-II, गणित विभाग, राज्यशैक्षिक अनु. एवं प्रशि. परि., हरियाणा, गुड़गाँव; पी.के. तिवारी, सहायक आयुक्त (अ.प्रा.), केंद्रीय विद्यालय संगठन; सविता गर्ग, पी.जी.टी., सर्वोदय कन्या विद्यालय, चाँद नगर, नयी दिल्ली; सुधा गुप्ता, टी.जी.टी., सर्वोदय कन्या विद्यालय, अवतिका, रोहिणी, प्रोफेसर राम अवतार (अ.प्रा.) परामर्शदाता, एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली, ए.के. वझलवार, प्रोफेसर, एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

परिषद् कंप्यूटर प्रभारी, दीपक कपूर; डी.टी.पी. ऑपरेटर, नरेश कुमार, नरगिस इस्लाम; कॉपी संपादक, एल. आर. भारती, अवध किशोर सिंह, मनोज मोहन; प्रूफ रीडर, रितु झा और बबीता झा, ए.पी.सी. कार्यालय, डी.ई.एस.एम. का प्रशासन, प्रकाशन विभाग और एन.सी.ई.आर.टी. सचिवालय के योगदान के प्रयासों के प्रति भी आभार प्रकट करती है।

परिषद्, इस संस्करण के पुनर्संयोजन के लिए पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक और विषय सामग्री के विश्लेषण हेतु दिए महत्वपूर्ण सहयोग के लिए एन.सी.ई.आर.टी. के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के सदस्यों आशुतोष वझलवार, प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; टी.पी. शर्मा, प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; और राहुल सोफ्ट, पी.जी.टी., एयर फोर्स गोल्डन जुबली स्कूल, सुब्रतो पार्क, नयी दिल्ली; गुरप्रीत भटनागर, रिसोर्स पर्सन, सी.बी.एस.ई. के प्रति आभार व्यक्त करती है।

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक ¹[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक न्याय,

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की स्वतंत्रता,

प्रतिष्ठा और अवसर की समता

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और ²[राष्ट्र की एकता

और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली बंधुता

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर अपनी इस संविधान सभा में आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को एतद्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य" के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "राष्ट्र की एकता" के स्थान पर प्रतिस्थापित।

विषय सूची

आमुख	(iii)
पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन	(v)
प्रस्तावना	(vii)
1. वास्तविक संख्याएँ	1
1.1 भूमिका	1
1.2 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय	2
1.3 अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण	7
1.4 सारांश	11
2. बहुपद	12
2.1 भूमिका	12
2.2 बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ	14
2.3 किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध	20
2.4 सारांश	25
3. दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	27
3.1 भूमिका	27
3.2 रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल	28
3.3 एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधि	33
3.3.1 प्रतिस्थापन विधि	34
3.3.2 विलोपन विधि	40
3.4 सारांश	41

4. द्विघात समीकरण	43
4.1 भूमिका	43
4.2 द्विघात समीकरण	44
4.3 गुणनखंडों द्वारा द्विघात समीकरण का हल	47
4.4 मूलों की प्रकृति	50
4.5 सारांश	53
5. समांतर श्रेढ़ियाँ	55
5.1 भूमिका	55
5.2 समांतर श्रेढ़ियाँ	57
5.3 A.P. का n वाँ पद	63
5.4 A.P. के प्रथम n पदों का योग	71
5.5 सारांश	81
6. त्रिभुज	83
6.1 भूमिका	83
6.2 समरूप आकृतियाँ	84
6.3 त्रिभुजों की समरूपता	89
6.4 त्रिभुजों की समरूपता के लिए कसौटियाँ	96
6.5 सारांश	108
7. निर्देशांक ज्यामिति	110
7.1 भूमिका	112
7.2 दूरी सूत्र	113
7.3 विभाजन सूत्र	118
7.4 सारांश	125
परिशिष्ट 1 – गणितीय उपपत्तियाँ	126
उत्तर/संकेत	151



1063CH01

वास्तविक संख्याएँ

1

1.1 भूमिका

कक्षा 9 में, आपने वास्तविक संख्याओं की खोज प्रारंभ की और इस प्रक्रिया से आपको अपरिमेय संख्याओं को जानने का अवसर मिला। इस अध्याय में, हम वास्तविक संख्याओं के बारे में अपनी चर्चा जारी रखेंगे। यह चर्चा हम अनुच्छेद 1.2 तथा 1.3 में धनात्मक पूर्णाकों के दो अति महत्वपूर्ण गुणों से प्रारंभ करेंगे। ये गुण हैं: यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि) (Euclid's division algorithm) और अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic)।

जैसा कि नाम से विदित होता है, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म पूर्णाकों की विभाज्यता से किसी रूप में संबंधित है। साधारण भाषा में कहा जाए, तो एल्गोरिथ्म के अनुसार, एक धनात्मक पूर्णांक a को किसी अन्य धनात्मक पूर्णांक b से इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है कि शेषफल r प्राप्त हो, जो b से छोटा (कम) है। आप में से अधिकतर लोग शायद इसे सामान्य लंबी विभाजन प्रक्रिया (long division process) के रूप में जानते हैं। यद्यपि यह परिणाम कहने और समझने में बहुत सरल है, परंतु पूर्णाकों की विभाज्यता के गुणों से संबंधित इसके अनेक अनुप्रयोग हैं। हम इनमें से कुछ पर प्रकाश डालेंगे तथा मुख्यतः इसका प्रयोग दो धनात्मक पूर्णाकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) परिकलित करने में करेंगे।

दूसरी ओर, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का संबंध धनात्मक पूर्णाकों के गुणन से है। आप पहले से ही जानते हैं कि प्रत्येक भाज्य संख्या (Composite number) को एक अद्वितीय रूप से अभाज्य संख्याओं (prime numbers) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यही महत्वपूर्ण तथ्य अंकगणित की आधारभूत प्रमेय है। पुनः, यह परिणाम कहने और समझने में बहुत सरल है, परंतु इसके गणित के क्षेत्र में बहुत व्यापक और सार्थक अनुप्रयोग हैं। यहाँ, हम अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के दो मुख्य अनुप्रयोग देखेंगे। एक

तो हम इसका प्रयोग कक्षा IX में अध्ययन की गई कुछ संख्याओं, जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ आदि की अपरिमेयता सिद्ध करने में करेंगे। दूसरे, हम इसका प्रयोग यह खोजने में करेंगे कि किसी परिमेय संख्या, मान लीजिए $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$), का दशमलव प्रसार कब सांत (terminating) होता है तथा कब असांत आवर्ती (non-terminating repeating) होता है। ऐसा हम $\frac{p}{q}$ के हर q के अभाज्य गुणखंडन को देखकर ज्ञात करते हैं। आप देखेंगे कि q के अभाज्य गुणखंडन से $\frac{p}{q}$ के दशमलव प्रसार की प्रकृति का पूर्णतया पता लग जाएगा।

अतः, आइए अपनी खोज प्रारंभ करें।

1.2 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय

आप पिछली कक्षाओं में देख चुके हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या को उसके अभाज्य गुणखंडों के एक गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, इत्यादि। अब, आइए प्राकृत संख्याओं पर एक अन्य दृष्टिकोण से विचार करने का प्रयत्न करें। अर्थात् यह देखें कि क्या अभाज्य संख्याओं को गुणा करके, एक प्राकृत संख्या प्राप्त की जा सकती है। आइए इसकी जाँच करें।

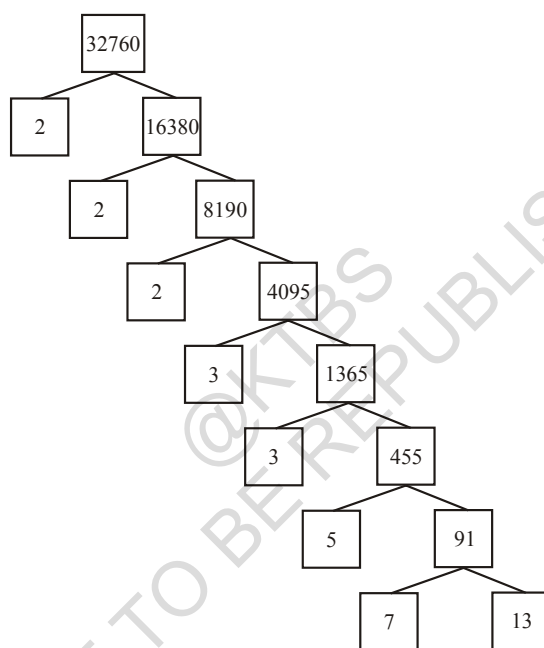
कुछ अभाज्य संख्याओं, मान लीजिए 2, 3, 7, 11 और 23 का कोई संग्रह लीजिए। यदि हम इन संख्याओं में से कुछ या सभी संख्याओं को इस प्रकार गुणा करें कि इन संख्याओं की हम जितनी बार चाहें पुनरावृत्ति कर सकते हैं, तो हम धनात्मक पूर्णाकों का एक बड़ा संग्रह बना सकते हैं (वास्तव में, अपरिमित रूप से अनेक)। आइए इनमें से कुछ की सूची बनाएँ:

$$\begin{aligned} 7 \times 11 \times 23 &= 1771, & 3 \times 7 \times 11 \times 23 &= 5313, \\ 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 &= 10626, & 2^3 \times 3 \times 7^3 &= 8232, \\ 2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 &= 21252 \text{ इत्यादि।} \end{aligned}$$

अब मान लीजिए कि आपके संग्रह में, सभी संभव अभाज्य संख्याएँ सम्मिलित हैं। इस संग्रह की आमाप (size) के बारे में आप क्या अनुमान लगा सकते हैं? क्या इसमें परिमित संख्या में पूर्णांक सम्मिलित हैं अथवा अपरिमित रूप से अनेक पूर्णांक सम्मिलित हैं? वास्तव में, अभाज्य संख्याएँ अपरिमित रूप से अनेक हैं। इसलिए, यदि हम इन अभाज्य संख्याओं को सभी संभव प्रकारों से संयोजित करें तो हमें सभी अभाज्य संख्याओं और अभाज्य संख्याओं के सभी संभव गुणनफलों का एक अनंत संग्रह प्राप्त होगा। अब प्रश्न उठता है, क्या हम इस प्रकार से सभी भाज्य संख्याएँ (composite numbers) प्राप्त कर सकते हैं? आप क्या सोचते

हैं? क्या आप सोचते हैं कि कोई ऐसी भाज्य संख्या हो सकती है जो अभाज्य संख्याओं की घातों (powers) का गुणनफल न हो? इसका उत्तर देने से पहले, आइए धनात्मक पूर्णाकों के गुणनखंडन करें, अर्थात् अभी तक जो हमने किया है उसका उल्टा करें।

हम एक गुणनखंड वृक्ष (factor tree) का प्रयोग करेंगे जिससे आप पूर्व परिचित हैं। आइए, एक बड़ी संख्या, मान लीजिए 32760, लें और उसके गुणनखंड नीचे दर्शाए अनुसार करें:



इस प्रकार, हमने 32760 को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणनखंडित कर लिया है, जो $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ है। अर्थात् $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ है, जो अभाज्य संख्याओं की घातों के रूप में हैं। आइए एक अन्य संख्या, मान लीजिए 123456789 लेकर उसके गुणनखंड लिखें। इसे $3^2 \times 3803 \times 3607$ के रूप में लिखा जा सकता है। निःसंदेह, आपको इसकी जाँच करनी होगी कि 3803 और 3607 अभाज्य संख्याएँ हैं। (ऐसा ही अनेक अन्य प्राकृत संख्याएँ लेकर स्वयं करने का प्रयत्न करें।) इससे हमें यह अनुमान या कंजेक्चर (conjecture) प्राप्त होता है कि प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। वास्तव में, यह कथन सत्य है तथा पूर्णाकों के अध्ययन में यह मूलरूप से एक अति महत्वपूर्ण स्थान रखता है। इसी कारण यह कथन

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic) कहलाता है। आइए इस प्रमेय को औपचारिक रूप से व्यक्त करें।

प्रमेय 1.1 (अंकगणित की आधारभूत प्रमेय): प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के रूप में विख्यात होने से पहले, प्रमेय 1.2 का संभवतया सर्वप्रथम वर्णन यूक्लिड के एलीमेंट्स की पुस्तक IX में साध्य (proposition) 14 के रूप में हुआ था। परंतु इसकी सबसे पहले सही उपपत्ति कार्ल फ्रैड्रिक गॉस (Carl Friedrich Gauss) ने अपनी कृति *डिसक्वीशंस अरिथिमेटिकी (Disquisitiones Arithmeticae)* में दी। कार्ल फ्रैड्रिक गॉस को प्रायः ‘गणितज्ञों का राजकुमार’ कहा जाता है तथा उनका नाम सभी समयकालों के तीन महानतम गणितज्ञों में लिया जाता है, जिनमें आर्किमिडीज़ (Archimedes) और न्यूटन (Newton) भी सम्मिलित हैं। उनका गणित और विज्ञान दोनों में मौलिक योगदान है।



कार्ल फ्रैड्रिक गॉस
(1777 – 1855)

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय कहती है कि प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणनखंडित की जा सकती है। वास्तव में, यह और भी कुछ कहती है। यह कहती है कि एक दी हुई भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में, बिना यह ध्यान दिए कि अभाज्य संख्याएँ किस क्रम में आ रही हैं, एक **अद्वितीय** प्रकार (Unique way) से गुणनखंडित किया जा सकता है। अर्थात् यदि कोई भाज्य संख्या दी हुई है, तो उसे अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने की केवल एक ही विधि है, जब तक कि हम अभाज्य संख्याओं के आने वाले क्रम पर कोई विचार नहीं करते। इसलिए, उदाहरणार्थ, हम $2 \times 3 \times 5 \times 7$ को वही मानते हैं जो $3 \times 5 \times 7 \times 2$, को माना जाता है। इसी प्रकार, इन्हीं अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के किसी अन्य क्रम को भी हम $2 \times 3 \times 5 \times 7$ जैसा ही मानेंगे। इस तथ्य को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जाता है:

एक प्राकृत संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, उसके गुणनखंडों के क्रम को छोड़ते हुए अद्वितीय होता है।

व्यापक रूप में, जब हमें एक भाज्य संख्या x दी हुई हो, तो हम उसे $x = p_1 p_2 \dots p_n$ के रूप में गुणनखंडित करते हैं, जहाँ $p_1, p_2, \dots, p_n$ इत्यादि आरोही क्रम में लिखी अभाज्य संख्याएँ हैं। अर्थात् $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ है। यदि हम समान अभाज्य संख्याओं को एक साथ (मिला) लें, तो हमें अभाज्य संख्याओं की घातें (powers) प्राप्त हो जाती हैं।

$$\text{उदाहरणार्थ, } 32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

एक बार यह निर्णय लेने के बाद कि गुणनखंडों का क्रम आरोही होगा तो दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड अद्वितीय होंगे।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के गणित तथा अन्य क्षेत्रों में भी अनेक अनुप्रयोग हैं। आइए इनके कुछ उदाहरण को देखें।

उदाहरण 1 : संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

हल : यदि किसी n के लिए, संख्या 4^n शून्य पर समाप्त होगी तो वह 5 से विभाज्य होगी। अर्थात् 4^n के अभाज्य गुणनखंडन में अभाज्य संख्या 5 आनी चाहिए। यह संभव नहीं है क्योंकि $4^n = (2)^{2n}$ है। इसी कारण, 4^n के गुणनखंडन में केवल अभाज्य संख्या 2 ही आ सकती है। अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 4^n के गुणनखंडन में 2 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है। इसलिए ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

आप पिछली कक्षाओं में, यह पढ़ चुके हैं कि दो धनात्मक पूर्णाकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। ऐसा करते समय, इस प्रमेय के नाम का उल्लेख नहीं किया गया था। इस विधि को *अभाज्य गुणनखंडन विधि* (prime factorisation method) भी कहते हैं। आइए, एक उदाहरण की सहायता से इस विधि को पुनः याद करें।

उदाहरण 2 : संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

जैसाकि आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, आप $\text{HCF}(6, 20) = 2$ तथा $\text{LCM}(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि $\text{HCF}(6, 20) = 2^1 =$ संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात का गुणनफल तथा

$\text{LCM}(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 =$ संख्याओं में संबद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल

उपरोक्त उदाहरण से आपने यह देख लिया होगा कि $\text{HCF}(6, 20) \times \text{LCM}(6, 20) = 6 \times 20$ है। वास्तव में, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके हम इसकी जाँच कर सकते हैं कि किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, $\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$ होता है। इस परिणाम का प्रयोग करके, हम दो धनात्मक पूर्णांकों का LCM ज्ञात कर सकते हैं, यदि हमने उनका HCF पहले ही ज्ञात कर लिया है।

उदाहरण 3 : अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

हल : 96 और 404 के अभाज्य गुणनखंडन से हमें प्राप्त होता है कि

$$96 = 2^5 \times 3, 404 = 2^2 \times 101$$

इसलिए, इन दोनों पूर्णांकों का $\text{HCF} = 2^2 = 4$

साथ ही
$$\text{LCM}(96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

उदाहरण 4 : संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$$6 = 2 \times 3, 72 = 2^3 \times 3^2 \text{ तथा } 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 और 3^1 प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घातें हैं।

अतः,
$$\text{HCF}(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$$

2^3 , 3^2 और 5^1 प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घातें हैं, जो तीनों संख्याओं से संबद्ध हैं।

अतः,
$$\text{LCM}(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि $6 \times 72 \times 120 \neq \text{HCF}(6, 72, 120) \times \text{LCM}(6, 72, 120)$, अर्थात् तीन संख्याओं का गुणनफल उनके HCF और LCM के गुणनफल के बराबर नहीं होता है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 140

(ii) 156

(iii) 3825

(iv) 5005

(v) 7429

2. पूर्णाकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF $\times$ LCM है।
 - (i) 26 और 91
 - (ii) 510 और 92
 - (iii) 336 और 54
3. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णाकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए:
 - (i) 12, 15 और 21
 - (ii) 17, 23 और 29
 - (iii) 8, 9 और 25
4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।
5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।
6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।
7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

1.3 अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण

कक्षा IX में, आपको अपरिमेय संख्याओं एवं उनके अनेक गुणों से परिचित कराया गया था। आपने इनके अस्तित्व के बारे में अध्ययन किया तथा यह देखा कि किस प्रकार परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ मिलकर वास्तविक संख्याएँ (real numbers) बनाती हैं। आपने यह भी सीखा था कि संख्या रेखा पर किस प्रकार अपरिमित संख्याओं के स्थान निर्धारित करते हैं। तथापि हमने यह सिद्ध नहीं किया था कि ये संख्याएँ अपरिमेय (irrationals) हैं। इस अनुच्छेद में, हम यह सिद्ध करेंगे कि $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ तथा, व्यापक रूप में, $\sqrt{p}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। अपनी उपपत्ति में, हम जिन प्रमेयों का प्रयोग करेंगे उनमें से एक है अंकगणित की आधारभूत प्रमेय।

याद कीजिए कि एक, संख्या ' s ' अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण, जिनसे आप परिचित हैं, निम्नलिखित हैं:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\dots, \text{ इत्यादि।}$$

इससे पहले कि हम $\sqrt{2}$ को अपरिमेय संख्या सिद्ध करें, हमें निम्नलिखित प्रमेय की आवश्यकता पड़ेगी, जिसकी उपपत्ति अंकगणित की आधारभूत प्रमेय पर आधारित है।

प्रमेय 1.2 : मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

***उपपत्ति :** मान लीजिए a के अभाज्य गुणनखंडन निम्नलिखित रूप के हैं: $a = p_1 p_2 \dots p_n$ जहाँ $p_1, p_2, \dots, p_n$ अभाज्य संख्याएँ हैं, परंतु आवश्यक रूप से भिन्न-भिन्न नहीं हैं।

$$\text{अतः, } a^2 = (p_1 p_2 \dots p_n) (p_1 p_2 \dots p_n) = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$$

अब, हमें दिया है कि p, a^2 को विभाजित करती है। इसलिए, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार; p, a^2 का एक अभाज्य गुणनखंड है। परंतु अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता के गुण का प्रयोग करने पर, हम पाएँगे कि a^2 के अभाज्य गुणनखंड केवल $p_1, p_2, \dots, p_n$ हैं। इसलिए p को $p_1, p_2, \dots, p_n$ में से ही एक होना चाहिए।

अब, चूँकि $a = p_1 p_2 \dots p_n$ है, इसलिए p, a को विभाजित अवश्य करेगा।

अब हम इसकी उपपत्ति दे सकते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह उपपत्ति उस तकनीक पर आधारित है जिसे 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' (proof by contradiction) कहते हैं (इस तकनीक की कुछ विस्तृत रूप से चर्चा परिशिष्ट 1 में की गई है)।

प्रमेय 1.3 : $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति : हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम दो पूर्णांक r और s ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ हो तथा $s (\neq 0)$ हो। मान लीजिए r और s में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड है। तब, हम इस उभयनिष्ठ गुणनखंड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ a और b सहअभाज्य (co-prime) हैं।

$$\text{अतः} \quad b\sqrt{2} = a \text{ हुआ।}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2b^2 = a^2$$

अतः $2, a^2$ को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय 1.2 द्वारा $2, a$ को विभाजित करेगा।

अतः हम $a = 2c$ लिख सकते हैं, जहाँ c कोई पूर्णांक है।

a का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें $2b^2 = 4c^2$, अर्थात् $b^2 = 2c^2$ प्राप्त होता है।

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

इसका अर्थ है कि $2, b^2$ को विभाजित करता है और इसीलिए $2, b$ को भी विभाजित करेगा (प्रमेय 1.2 द्वारा $p = 2$ लेने पर)।

अतः a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

यह विरोधाभास हमें इस कारण प्राप्त हुआ है, क्योंकि हमने एक त्रुटिपूर्ण कल्पना कर ली है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। ■

उदाहरण 5 : $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए हम इसके विपरीत यह मान लें कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात्, हम ऐसे दो पूर्णांक a और b ($b \neq 0$) प्राप्त कर सकते हैं कि $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ है।

यदि a और b में, 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देकर a और b को सहअभाज्य बना सकते हैं।

अतः $b\sqrt{3} = a$ है।

दोनों पक्षों का वर्ग करने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें $3b^2 = a^2$ प्राप्त होता है।

अतः $a^2, 3$ से विभाजित है। इसलिए, प्रमेय 1.2 द्वारा $3, a$ को भी विभाजित करेगा।

अतः हम $a = 3c$ लिख सकते हैं, जहाँ c एक पूर्णांक है।

a के इस मान को $3b^2 = a^2$ में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$3b^2 = 9c^2 \text{ अर्थात् } b^2 = 3c^2$$

इसका अर्थ है कि $b^2, 3$ से विभाजित हो जाता है। इसलिए प्रमेय 1.3 द्वारा b भी 3 से विभाजित होगा।

अतः a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य हैं।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

कक्षा IX में हमने बताया था कि:

- एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है तथा
- एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

यहाँ, हम उपरोक्त की कुछ विशिष्ट स्थितियाँ सिद्ध करेंगे।

उदाहरण 6 : दर्शाइए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए इसके विपरीत मान लें कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम सहअभाज्य ऐसी संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ हो।

अतः $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ है।

इस समीकरण को पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b}$$

चूँकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $5 - \frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 7 : दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए इसके विपरीत मान लें कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम ऐसी सहअभाज्य संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ हो।

पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ प्राप्त होगा।

चूँकि 3 , a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी। इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।
अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.2

- सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
- सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
- सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(ii) $7\sqrt{5}$
(iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय:
प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अद्वितीय होता है, इस पर कोई ध्यान दिए बिना कि अभाज्य गुणनखंड किस क्रम में आ रहे हैं।
- यदि p कोई अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।
- उपपत्ति कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि अपरिमेय संख्याएँ हैं।

पाठकों के लिए विशेष

आपने देखा कि:

$\text{HCF}(p, q, r) \times \text{LCM}(p, q, r) \neq p \times q \times r$, जहाँ p, q, r धनात्मक पूर्णांक हैं (उदाहरण 8 देखिए)। जबकि निम्न परिणाम तीन संख्याओं p, q और r पर लागू होता है:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$



1063CH02

बहुपद

2

2.1 भूमिका

कक्षा IX में, आपने एक चर वाले बहुपदों (polynomials) एवं उनकी घातों (degree) के बारे में अध्ययन किया है। याद कीजिए कि चर x के बहुपद $p(x)$ में x की उच्चतम घात (power) **बहुपद की घात (degree)** कहलाती है। उदाहरण के लिए, $4x + 2$ चर x में घात 1 का बहुपद है, $2y^2 - 3y + 4$ चर y में घात 2 का बहुपद है, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ चर x में घात 3 का बहुपद है और $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ चर u में घात 6 का बहुपद है। व्यंजक $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ इत्यादि बहुपद नहीं हैं।

घात 1 के बहुपद को **रैखिक बहुपद (linear polynomial)** कहते हैं। उदाहरण के लिए, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, इत्यादि सभी रैखिक बहुपद हैं। जबकि $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$, आदि प्रकार के बहुपद रैखिक बहुपद नहीं हैं।

घात 2 के बहुपद को **द्विघात बहुपद (quadratic polynomial)** कहते हैं। द्विघात (quadratic) शब्द क्वाड्रेट (quadrate) शब्द से बना है, जिसका अर्थ है 'वर्ग'। $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$, द्विघात बहुपदों के कुछ उदाहरण हैं (जिनके गुणांक वास्तविक संख्याएँ हैं)। अधिक व्यापक रूप में, x में कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के प्रकार का होता है। घात 3 का बहुपद **त्रिघात बहुपद (cubic polynomial)** कहलाता है। त्रिघात बहुपद के कुछ उदाहरण हैं:

$$2 - x^3, x^3, \sqrt{2}x^3, 3 - x^2 + x^3, 3x^3 - 2x^2 + x - 1$$

वास्तव में, त्रिघात बहुपद का सबसे व्यापक रूप है:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

अब बहुपद $p(x) = x^2 - 3x - 4$ पर विचार कीजिए। इस बहुपद में $x = 2$ रखने पर हम $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ पाते हैं। $x^2 - 3x - 4$ में, x को 2 से प्रतिस्थापित करने से प्राप्त मान -6 , $x^2 - 3x - 4$ का $x = 2$ पर मान कहलाता है। इसी प्रकार $p(0), p(x)$ का $x = 0$ पर मान है, जो -4 है।

यदि $p(x)$, x में कोई बहुपद है और k कोई वास्तविक संख्या है, तो $p(x)$ में x को k से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या $p(x)$ का $x = k$ पर मान कहलाती है और इसे $p(k)$ से निरूपित करते हैं।

$p(x) = x^2 - 3x - 4$ का $x = -1$ पर क्या मान है? हम पाते हैं :

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

साथ ही, ध्यान दीजिए कि $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$ है।

क्योंकि $p(-1) = 0$ और $p(4) = 0$ है, इसलिए -1 और 4 द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के शून्यक (zeroes) कहलाते हैं। अधिक व्यापक रूप में, एक वास्तविक संख्या k बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाती है, यदि $p(k) = 0$ है।

आप कक्षा IX में पढ़ चुके हैं कि किसी रैखिक बहुपद का शून्यक कैसे ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $p(x) = 2x + 3$ का शून्यक k है, तो $p(k) = 0$ से, हमें $2k + 3 = 0$ अर्थात् $k = -\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में, यदि $p(x) = ax + b$ का एक शून्यक k है, तो $p(k) = ak + b = 0$, अर्थात्

$$k = \frac{-b}{a} \text{ होगा। अतः, रैखिक बहुपद } ax + b \text{ का शून्यक } \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x \text{ का गुणांक}} \text{ है।}$$

इस प्रकार, रैखिक बहुपद का शून्यक उसके गुणांकों से संबंधित है। क्या यह अन्य बहुपदों में भी होता है? उदाहरण के लिए, क्या द्विघात बहुपद के शून्यक भी उसके गुणांकों से संबंधित होते हैं?

इस अध्याय में, हम इन प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। हम बहुपदों के लिए विभाजन कलन विधि (division algorithm) का भी अध्ययन करेंगे।

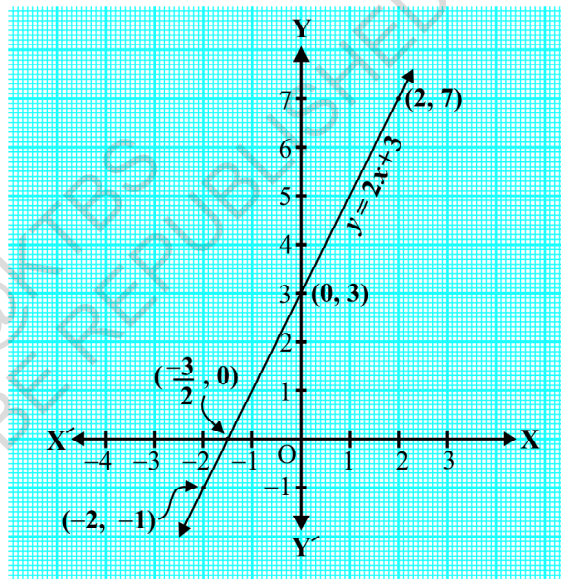
2.2 बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ

आप जानते हैं कि एक वास्तविक संख्या k बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक है, यदि $p(k) = 0$ है। परंतु किसी बहुपद के शून्यक इतने आवश्यक क्यों हैं? इसका उत्तर देने के लिए, सर्वप्रथम हम रैखिक और द्विघात बहुपदों के आलेखीय निरूपण देखेंगे और फिर उनके शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ देखेंगे।

पहले एक रैखिक बहुपद $ax + b$, $a \neq 0$ पर विचार करते हैं। आपने कक्षा IX में पढ़ा है कि $y = ax + b$ का ग्राफ (आलेख) एक सरल रेखा है। उदाहरण के लिए, $y = 2x + 3$ का ग्राफ बिंदुओं $(-2, -1)$ तथा $(2, 7)$ से जाने वाली एक सरल रेखा है।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

आकृति 2.1 से आप देख सकते हैं कि $y = 2x + 3$ का ग्राफ x -अक्ष को $x = -1$ तथा $x = -2$ के बीचो बीच, अर्थात् बिंदु $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ पर प्रतिच्छेद करता है। आप यह भी जानते हैं कि $2x + 3$ का शून्यक $-\frac{3}{2}$ है। अतः बहुपद $2x + 3$ का शून्यक उस बिंदु का x -निर्देशांक है, जहाँ $y = 2x + 3$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।



आकृति 2.1

व्यापक रूप में, एक रैखिक बहुपद $ax + b$, $a \neq 0$ के लिए, $y = ax + b$ का ग्राफ एक सरल रेखा है, जो x -अक्ष को ठीक एक बिंदु $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अतः, रैखिक बहुपद $ax + b$, $a \neq 0$ का केवल एक शून्यक है, जो उस बिंदु का x -निर्देशांक है, जहाँ $y = ax + b$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

अब आइए हम द्विघात बहुपद के किसी शून्यक का ज्यामितीय अर्थ जाने। द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ पर विचार कीजिए। आइए देखें कि $y = x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ* किस प्रकार

* द्विघात या त्रिघात बहुपदों के ग्राफ खींचना विद्यार्थियों के लिए अपेक्षित नहीं है और न ही इनका मूल्यांकन से संबंध है।

का दिखता है। हम x के कुछ मानों के संगत $y = x^2 - 3x - 4$ के कुछ मानों को लेते हैं, जैसे सारणी 2.1 में दिए हैं।

सारणी 2.1

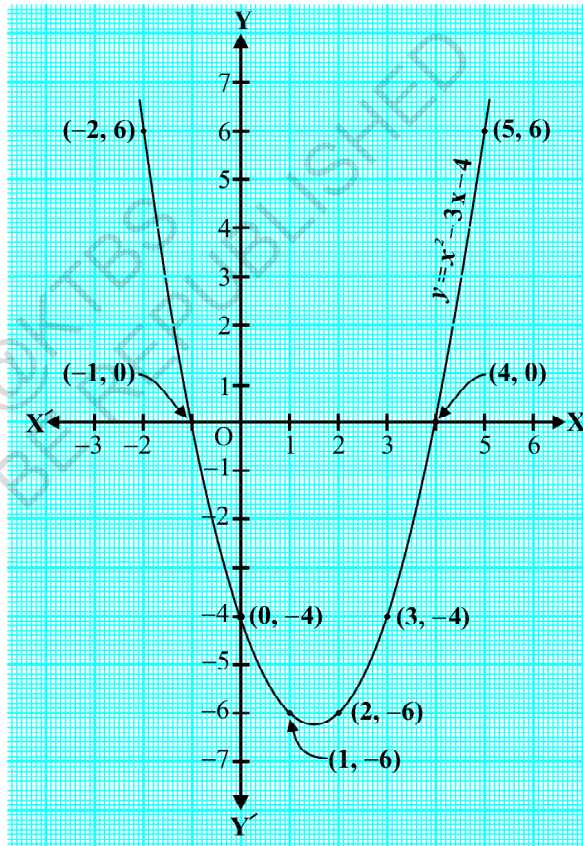
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

यदि हम उपर्युक्त बिंदुओं को एक ग्राफ पेपर पर अंकित करें और ग्राफ खींचें, तो यह आकृति 2.2 में दिए गए जैसा दिखेगा।

वास्तव में किसी द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के लिए संगत समीकरण $y = ax^2 + bx + c$ के ग्राफ का आकार या तो ऊपर की ओर खुला $\cup$ की तरह अथवा नीचे की ओर खुला $\cap$ की तरह का होगा, जो इस पर निर्भर करेगा कि $a > 0$ है या $a < 0$ है (इन वक्रों को **परवलय (parabola)** कहते हैं)।

सारणी 2.1 से आप देख सकते हैं कि द्विघात बहुपद के शून्यक -1 तथा 4 हैं। इस पर भी ध्यान दीजिए कि -1 तथा 4 उन बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार, द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के शून्यक उन बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

यह तथ्य सभी द्विघात बहुपदों के लिए सत्य है, अर्थात् द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक उन बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं, जहाँ $y = ax^2 + bx + c$ को निरूपित करने वाला परवलय x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

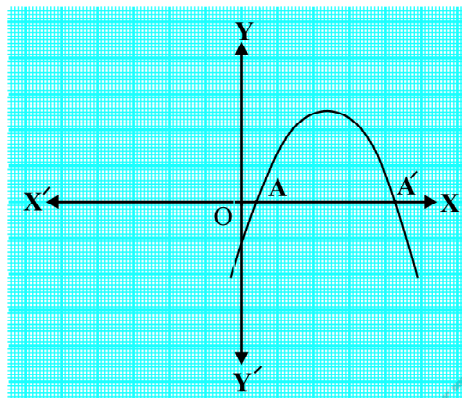


आकृति 2.2

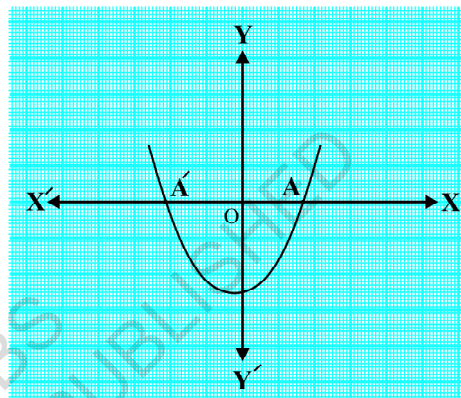
$y = ax^2 + bx + c$ के ग्राफ के आकार का प्रेक्षण करने से तीन निम्नलिखित स्थितियाँ संभावित हैं।

स्थिति (i) : यहाँ ग्राफ x -अक्ष को दो भिन्न बिंदुओं A और A' पर काटता है।

इस स्थिति में, A और A' के x -निर्देशांक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दो शून्यक हैं (देखिए आकृति 2.3)।



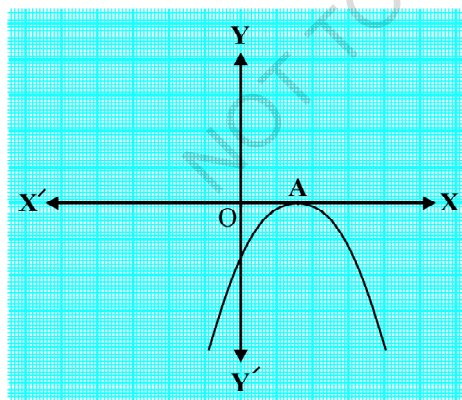
(i)



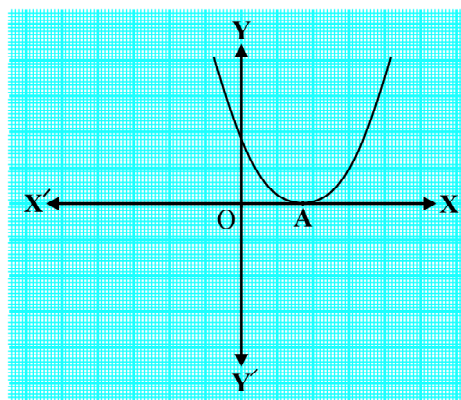
(ii)

आकृति 2.3

स्थिति (ii) : यहाँ ग्राफ x -अक्ष को केवल एक बिंदु पर, अर्थात् दो संपाती बिंदुओं पर काटता है। इसलिए, स्थिति (i) के दो बिंदु A और A' यहाँ पर संपाती होकर एक बिंदु A हो जाते हैं (देखिए आकृति 2.4)।



(i)

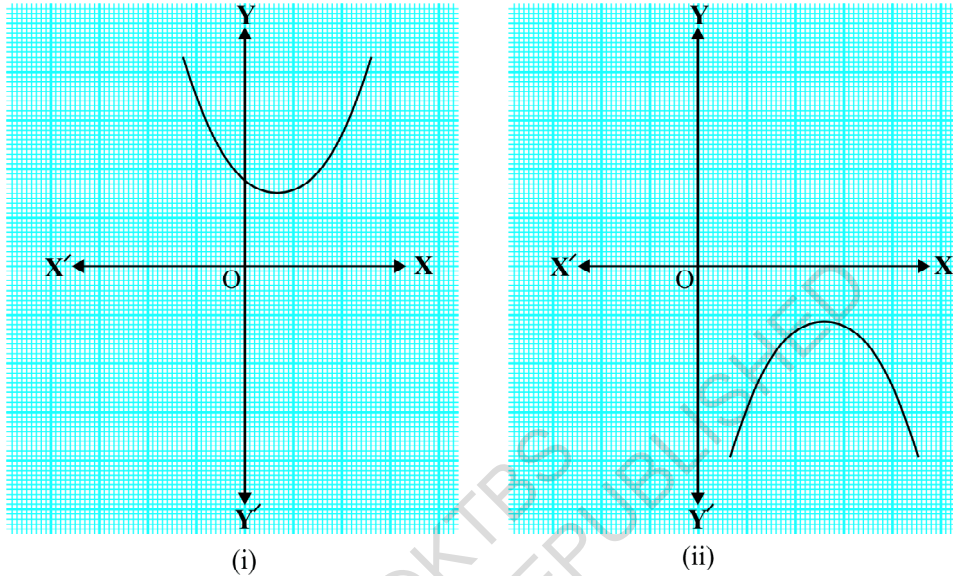


(ii)

आकृति 2.4

इस स्थिति में, A का x -निर्देशांक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का केवल एक शून्यक है।

स्थिति (iii) : यहाँ ग्राफ या तो पूर्ण रूप से x -अक्ष के ऊपर या पूर्ण रूप से x -अक्ष के नीचे है। इसलिए, यह x -अक्ष को कहीं पर नहीं काटता है (देखिए आकृति 2.5)।



आकृति 2.5

अतः, इस स्थिति में द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का कोई शून्यक नहीं है।

इस प्रकार, आप ज्यामितीय रूप में देख सकते हैं कि किसी द्विघात बहुपद के दो भिन्न शून्यक, या दो बराबर शून्यक (अर्थात् एक शून्यक) या कोई भी शून्यक नहीं, हो सकते हैं। इसका यह भी अर्थ है कि घात 2 के किसी बहुपद के अधिकतम दो शून्यक हो सकते हैं।

अब आप एक त्रिघात बहुपद के शून्यकों के ज्यामितीय अर्थ के बारे में क्या आशा कर सकते हैं? आइए इसे ज्ञात करें। त्रिघात बहुपद $x^3 - 4x$ पर विचार कीजिए। इसे देखने के लिए कि $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ कैसा लगता है, आइए x के कुछ मानों के संगत y के कुछ मानों को सारणी 2.2 में सूचीबद्ध करें।

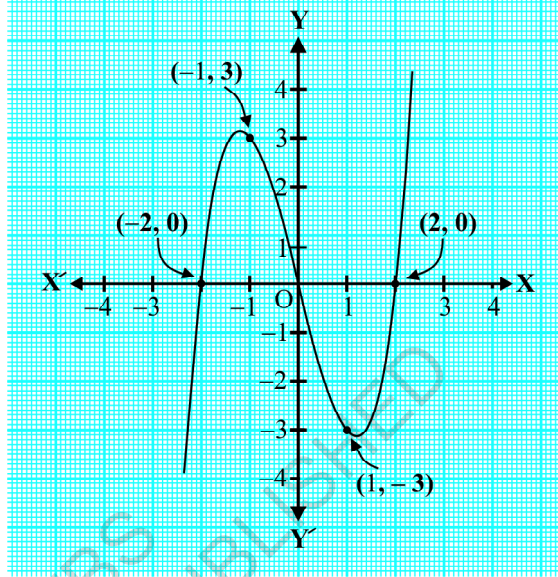
सारणी 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

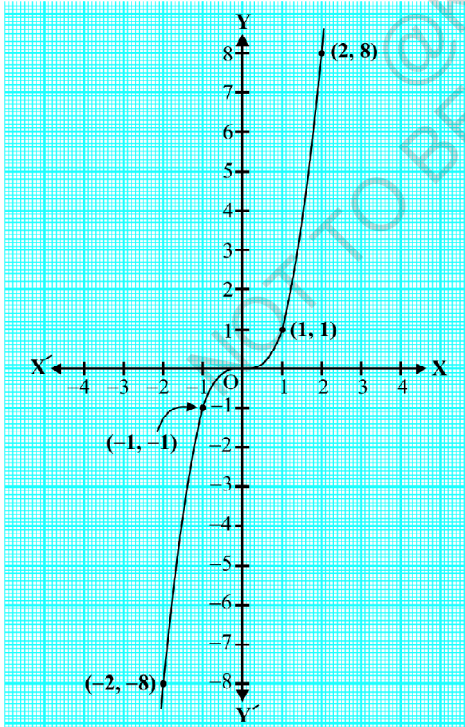
सारणी के बिंदुओं को एक ग्राफ पेपर पर अंकित करने और ग्राफ खींचने पर, हम देखते हैं कि $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ वास्तव में आकृति 2.6 जैसा दिखता है।

उपर्युक्त सारणी से हम देखते हैं कि त्रिघात बहुपद $x^3 - 4x$ के शून्यक $-2, 0$ और 2 हैं। ध्यान दीजिए कि $-2, 0$ और 2 वास्तव में उन बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। क्योंकि वक्र x -अक्ष को केवल इन्हीं तीन बिंदुओं पर काटता है, इसलिए बहुपद के शून्यक केवल इन्हीं बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं।

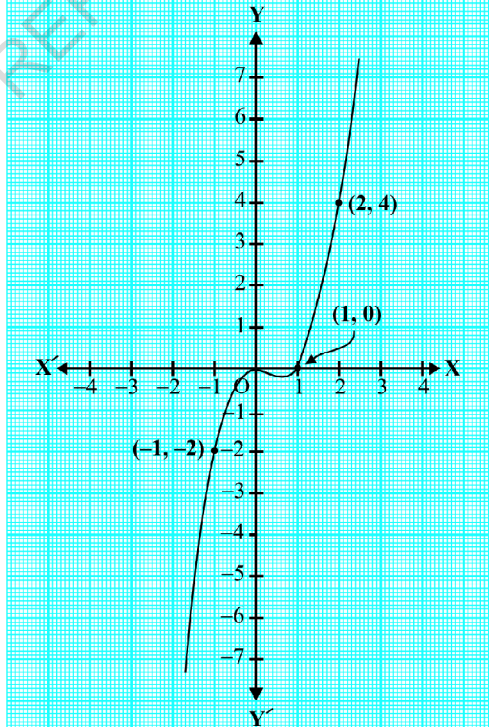
अब हम कुछ अन्य उदाहरण लेते हैं। त्रिघात बहुपदों x^3 और $x^3 - x^2$ पर विचार कीजिए। हम $y = x^3$ तथा $y = x^3 - x^2$ के ग्राफ क्रमशः आकृति 2.7 और आकृति 2.8 में खींचते हैं।



आकृति 2.6



आकृति 2.7



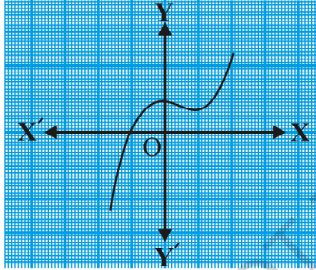
आकृति 2.8

ध्यान दीजिए कि बहुपद x^3 का केवल एक शून्यक 0 है। आकृति 2.7 से भी आप देख सकते हैं कि 0 केवल उस बिंदु का x -निर्देशांक है, जहाँ $y = x^3$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। इसी प्रकार, क्योंकि $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ है, इसलिए बहुपद $x^3 - x^2$ के शून्यक केवल 0 और 1 हैं। आकृति 2.8 से भी ये मान केवल उन बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^3 - x^2$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

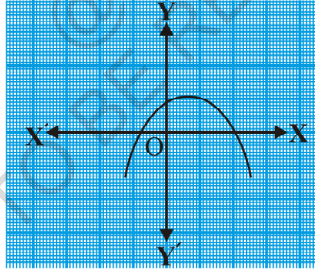
उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि किसी त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक 3 शून्यक हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में, घात 3 के किसी बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।

टिप्पणी : व्यापक रूप में, घात n के दिए गए बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ x -अक्ष को अधिक से अधिक n बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है। अतः घात n के किसी बहुपद के अधिक से अधिक n शून्यक हो सकते हैं।

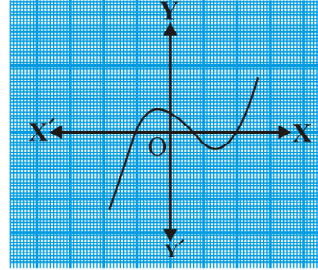
उदाहरण 1 : नीचे दी गई आकृति 2.9 में, ग्राफों को देखिए। प्रत्येक आकृति $y = p(x)$, जहाँ $p(x)$ एक बहुपद है, का ग्राफ है। ग्राफों से प्रत्येक के लिए, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



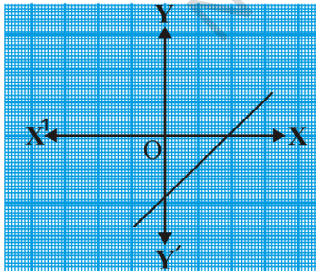
(i)



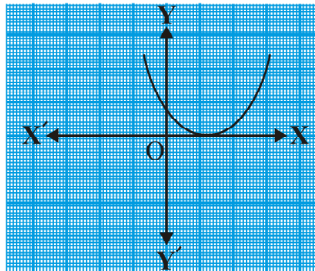
(ii)



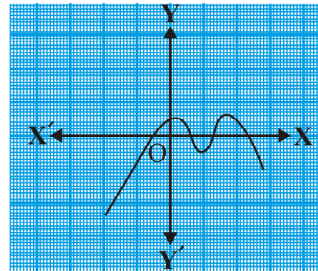
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

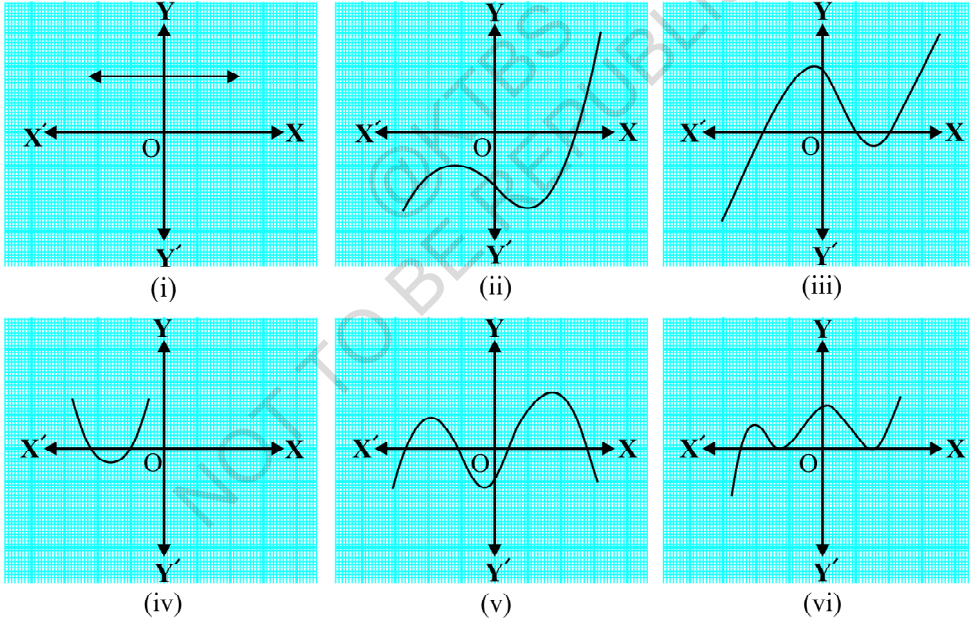
आकृति 2.9

हल :

- (i) शून्यकों की संख्या 1 है, क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।
- (ii) शून्यकों की संख्या 2 है, क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है।
- (iii) शून्यकों की संख्या 3 है। (क्यों?)
- (iv) शून्यकों की संख्या 1 है। (क्यों?)
- (v) शून्यकों की संख्या 1 है। (क्यों?)
- (vi) शून्यकों की संख्या 4 है। (क्यों?)

प्रश्नावली 2.1

1. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति 2.10 में दिया है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.10

2.3 किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

आप पहले ही देख चुके हैं कि रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $-\frac{b}{a}$ होता है। अब हम किसी द्विघात बहुपद के शून्यकों और उसके गुणांकों के संबंध में अनुच्छेद 2.1 में

उठाए गए प्रश्न का उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। इसके लिए एक द्विघात बहुपद माना $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लीजिए। कक्षा IX में, आप सीख चुके हैं कि मध्य पद को विभक्त करके कैसे किसी द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जाते हैं। इसलिए, यहाँ हमें मध्य पद $-8x$ को दो ऐसे पदों के योग के रूप में विभक्त करना है जिनका गुणनफल $6 \times 2x^2 = 12x^2$ हो। अतः, हम लिखते हैं:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

इसलिए, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ का मान शून्य है, जब $x - 1 = 0$ या $x - 3 = 0$ है, अर्थात् जब $x = 1$ या $x = 3$ हो। अतः, $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक 1 और 3 हैं। ध्यान दीजिए :

$$\text{शून्यकों का योग} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

आइए, एक और द्विघात बहुपद, माना $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ लें। मध्य पद के विभक्त करने की विधि से,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (3x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

अतः, $3x^2 + 5x - 2$ का मान शून्य होगा यदि या तो $3x - 1 = 0$ हो या $x + 2 = 0$ हो, अर्थात् जब $x = \frac{1}{3}$ हो या $x = -2$ हो। इसलिए, $3x^2 + 5x - 2$ के शून्यक $\frac{1}{3}$ और -2 हैं। ध्यान दीजिए:

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

व्यापक रूप में, यदि α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हों, तो आप जानते हैं कि $x - \alpha$ और $x - \beta$, $p(x)$ के गुणनखंड होते हैं। अतः,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ जहाँ } k \text{ एक अचर है} \\ &= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] \\ &= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta \end{aligned}$$

* α, β यूनानी भाषा के अक्षर हैं, जिन्हें क्रमशः अल्फा, बीटा द्वारा उच्चरित किया जाता है। बाद में हम एक और अक्षर γ का प्रयोग करेंगे, जिसे 'गामा' से उच्चरित किया जाता है।

दोनों ओर के x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$$a = k, b = -k(\alpha + \beta) \text{ और } c = k\alpha\beta$$

इससे प्राप्त होता है: $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

अर्थात् शून्यकों का योग $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2 : द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : हम पाते हैं:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ है, अर्थात् जब $x = -2$ या $x = -5$ हो। इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -2 और -5 हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण 3 : बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ का स्मरण कीजिए। इसे प्रयोग कर, हम लिख सकते हैं:

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

इसलिए, $x^2 - 3$ का मान शून्य होगा, जब $x = \sqrt{3}$ हो या $x = -\sqrt{3}$ हो।

अतः, $x^2 - 3$ के शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण 4 : एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

$$\text{हम पाते हैं:} \quad \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{और} \quad \alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1$ है, तो $b = 3$ और $c = 2$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 3x + 2$ है।

आप जाँच कर सकते हैं कि अन्य कोई द्विघात बहुपद, जो इन शर्तों को संतुष्ट करता हो, $k(x^2 + 3x + 2)$ की तरह का होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

आइए अब हम त्रिघात बहुपद की ओर दृष्टिपात करें। क्या आप सोचते हैं कि त्रिघात बहुपद के शून्यकों और उसके गुणांकों के बीच इसी प्रकार का संबंध होता है?

आइए $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ पर विचार करें।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $x = 4, -2$ और $\frac{1}{2}$ के लिए $p(x) = 0$ है। क्योंकि $p(x)$ के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं, इसलिए $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ के यही शून्यक हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}},$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

परंतु, यहाँ एक और संबंध भी है। दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों के योग पर विचार करें। हम पाते हैं :

$$\begin{aligned} & \{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\} \\ &= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} \end{aligned}$$

व्यापक रूप में, यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

तथा
$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5* : जाँच कीजिए कि त्रिघात बहुपद $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3, -1 और $-\frac{1}{3}$ हैं। इसके पश्चात् शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : दिए हुए बहुपद की $ax^3 + bx^2 + cx + d$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3 \text{ है। पुनः,}$$

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3 \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

अतः, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3, -1 और $-\frac{1}{3}$ हैं।

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

इसलिए, हम $\alpha = 3$, $\beta = -1$ और $\gamma = -\frac{1}{3}$ लेते हैं। अब,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\text{और } \alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 2.2

- निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $x^2 - 2x - 8$	(ii) $4s^2 - 4s + 1$	(iii) $6x^2 - 3 - 7x$
(iv) $4u^2 + 8u$	(v) $t^2 - 15$	(vi) $3x^2 - x - 4$
- एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं:

(i) $\frac{1}{4}, -1$	(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$	(iii) $0, \sqrt{5}$
(iv) $1, 1$	(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	(vi) $4, 1$

2.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

- घातों 1, 2 और 3 के बहुपद क्रमशः रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
- एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के रूप का होता है।
- एक बहुपद $p(x)$ के शून्यक उन बिंदुओं के x -निर्देशांक होते हैं जहाँ $y = p(x)$ का ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।
- एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।

5. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

और $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED



1063CH03

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

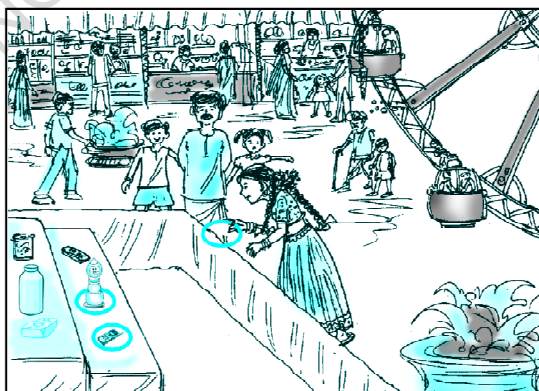
3

3.1 भूमिका

आपने इस प्रकार की स्थिति का सामना अवश्य किया होगा, जैसी नीचे दी गई है:

अखिला अपने गाँव के एक मेले में गई। वह एक चरखी (Giant wheel) की सवारी करना चाहती थी और हूपला (Hoopla) [एक खेल जिसमें आप एक स्टाल में रखी किसी वस्तु पर एक वलय (ring) को फेंकते हैं और यदि वह वस्तु को पूर्णरूप से घेर ले, तो आपको वह वस्तु मिल जाती है] खेलना चाहती थी। जितनी बार उसने हूपला खेल खेला उससे आधी बार उसने चरखी की सवारी की। यदि प्रत्येक बार की सवारी के लिए उसे ₹3 तथा हूपला खेलने के लिए ₹4 खर्च करने पड़े, तो आप कैसे ज्ञात करेंगे कि उसने कितनी बार चरखी की सवारी की और कितनी बार हूपला खेला, जबकि उसने इसके लिए कुल ₹20 खर्च किए?

हो सकता है कि आप इसे ज्ञात करने के लिए अलग-अलग स्थितियाँ लेकर चलें। यदि उसने एक बार सवारी की, क्या यह संभव है? क्या यह भी संभव है कि उसने दो बार



सवारी की? इत्यादि। अथवा आप कक्षा IX के ज्ञान का उपयोग करते हुए, इन स्थितियों को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों द्वारा निरूपित कर सकते हैं।

आइए इस प्रक्रिया को समझें।

अखिला द्वारा सवारी करने की संख्या को x तथा उसके द्वारा हूपला खेल खेलने की संख्या को y से निरूपित कीजिए। अब दी हुई स्थिति को दो समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है :

$$y = \frac{1}{2}x \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

क्या हम इस समीकरण युग्म का हल ज्ञात कर सकते हैं? इन्हें ज्ञात करने की कई विधियाँ हैं, जिनका हम इस अध्याय में अध्ययन करेंगे।

इसलिए, हमने कई स्थितियाँ देखी हैं जिन्हें एक रैखिक समीकरण युग्म द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। हमने उनके बीजगणितीय और ज्यामितीय निरूपण देखे। अगले कुछ अनुच्छेदों में हम चर्चा करेंगे कि कैसे इन निरूपणों को एक रैखिक समीकरण युग्म के हल ज्ञात करने में उपयोग किया जा सकता है।

3.2 रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल

एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका कोई हल नहीं होता, रैखिक समीकरणों का असंगत (inconsistent) युग्म कहलाता है। एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका हल होता है, रैखिक समीकरणों का संगत (consistent) युग्म कहलाता है। तुल्य रैखिक समीकरणों के एक युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इस युग्म को दो चरों के रैखिक समीकरणों का आश्रित (dependent) युग्म कहते हैं। ध्यान दीजिए कि रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म सदैव संगत होता है।

अब हम दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाओं के व्यवहार को तथा हल के अस्तित्व होने को निम्न प्रकार से एक सारांश के रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

- (i) रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरण युग्म का अद्वितीय हल होता है (अविरोधी समीकरण युग्म)।
- (ii) रेखाएँ समांतर हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों का कोई हल नहीं होता है (असंगत समीकरण युग्म)।

(iii) रेखाएँ संपाती हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं [आश्रित (संगत) समीकरण युग्म]।

आइए अब हम निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्मों पर विचार करें।

(i) $x - 2y = 0$ और $3x + 4y - 20 = 0$ (रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ और $4x + 6y - 18 = 0$ (रेखाएँ संपाती हैं)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ (रेखाएँ समांतर हैं)

अब आइए सभी तीनों उदाहरणों में, $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ के मान लिखें और उनकी तुलना करें। यहाँ a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 व्यापक रूप में दिए गए समीकरणों के गुणांक को व्यक्त करते हैं।

सारणी 3.1

क्र. सं.	रेखा युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय)
2	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

सारणी 3.1 से आप देख सकते हैं कि

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

और

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ से निरूपित रेखाएँ:}$$

(i) प्रतिच्छेद करती हैं, तो $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ है।

(ii) संपाती हैं, तो $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ है।

(iii) समांतर हैं, तो $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है।

वास्तव में, इसका विलोम भी किसी भी रेखा युग्म के लिए सत्य है। आप कुछ और उदाहरण लेकर इसकी जाँच कर सकते हैं।

आइए अब इसको स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : ग्राफ द्वारा जाँच कीजिए कि समीकरण युग्म

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$\text{और} \quad 2x - 3y = 12 \quad (2)$$

संगत है। यदि ऐसा है, तो उन्हें ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

हल : आइए समीकरणों (1) और (2) के ग्राफ खींचें। इसके लिए, हम प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करते हैं, जो सारणी 3.2 में दिए हैं:

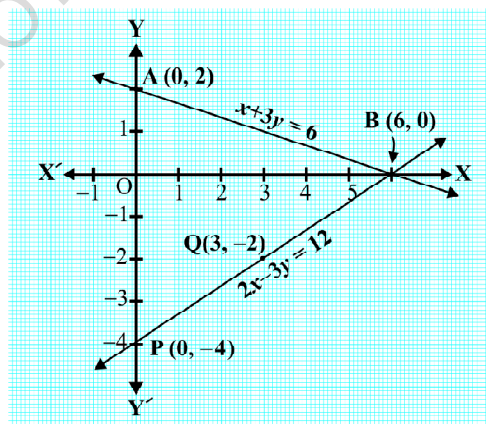
सारणी 3.2

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	-4	-2

एक ग्राफ पेपर पर बिंदुओं A(0, 2), B(6, 0), P(0, -4) और Q(3, -2) को आलेखित कीजिए, और बिंदुओं को मिलाकर रेखा AB और PQ आकृति 3.1 के अनुसार बनाइए।

हम देखते हैं कि रेखाओं AB और PQ में एक उभयनिष्ठ बिंदु B(6, 0) है। इसलिए, रेखिक समीकरण युग्म का एक हल $x = 6, y = 0$ है, अर्थात् समीकरण युग्म संगत है।



आकृति 3.1

उदाहरण 2 : ग्राफ द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म का हल नहीं है, अद्वितीय हल है अथवा अपरिमित रूप से अनेक हल हैं:

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

हल : समीकरण (2) को $\frac{5}{3}$ से गुणा करने पर, हम पाते हैं :

$$5x - 8y + 1 = 0$$

परंतु यह वही है जो समीकरण (1) है। अतः, समीकरणों (1) और (2) से निरूपित रेखाएँ संपाती हैं। इसलिए, समीकरणों (1) और (2) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

ग्राफ पर कुछ बिंदु अंकित कीजिए और स्वयं जाँच कर लीजिए।

उदाहरण 3 : चंपा एक 'सेल' में कुछ पैंट और स्कर्ट खरीदने गई। जब उसकी सहेलियों ने पूछा कि प्रत्येक के कितने नग खरीदे, तो उसने उत्तर दिया, "स्कर्ट की संख्या खरीदी गई पैंटों की संख्या की दो गुनी से दो कम है। स्कर्ट की संख्या खरीदी गई पैंटों की संख्या की चार गुनी से भी चार कम है।" सहेलियों की यह जानने के लिए सहायता कीजिए कि चंपा ने कितनी पैंट और स्कर्ट खरीदीं।

हल : आइए हम पैंटों की संख्या को x तथा स्कर्ट की संख्या को y से निरूपित करें। तब, इनसे बनी समीकरण हैं:

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

और $y = 4x - 4 \quad (2)$

अब आइए समीकरणों (1) और (2) के ग्राफ खींचने के लिए, प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करें। ये सारणी 3.3 में दिए हैं :

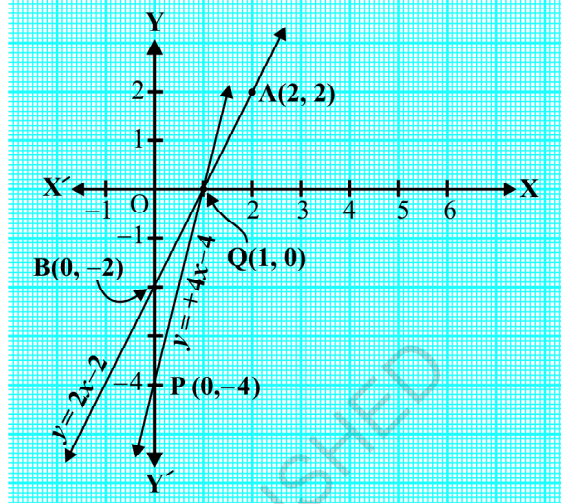
सारणी 3.3

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0

बिंदुओं को आलेखित कीजिए और समीकरणों को निरूपित करने के लिए उनसे जाने वाली रेखाएँ खींचिए, जैसा आकृति 3.2 में दिखाया गया है।

ये दोनों रेखाएँ बिंदु $(1, 0)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। इसलिए $x = 1, y = 0$ रैखिक समीकरण युग्म का अभीष्ट हल है, अर्थात् उसके द्वारा खरीदी गई पैंटों की संख्या 1 है और उसने कोई स्कर्ट नहीं खरीदी है।



आकृति 3.2

जाँच : (1) और (2) में $x = 1$ और $y = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाती हैं।

प्रश्नावली 3.1

- निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।
 - कक्षा X के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लिए लड़कों और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
 - 5 पेंसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य ₹ 50 है, जबकि 7 पेंसिल तथा 5 कलमों का कुल मूल्य ₹ 46 है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।
- अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समांतर हैं अथवा संपाती हैं :

- (i) $5x - 4y + 8 = 0$
 $7x + 6y - 9 = 0$
- (ii) $9x + 3y + 12 = 0$
 $18x + 6y + 24 = 0$
- (iii) $6x - 3y + 10 = 0$
 $2x - y + 9 = 0$
3. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म संगत हैं या असंगत:
- (i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$
- (iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$
- (v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$
4. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से कौन से युग्म संगत/असंगत हैं, यदि संगत हैं तो ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।
- (i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$
5. एक आयताकार बाग, जिसकी लंबाई, चौड़ाई से 4 m अधिक है, का अर्धपरिमाप 36 m है। बाग की विमाएँ ज्ञात कीजिए।
6. एक रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दो चरों में एक ऐसी और रैखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण जैसा कि
- (i) प्रतिच्छेद करती रेखाएँ हों। (ii) समांतर रेखाएँ हों।
(iii) संपाती रेखाएँ हों।
7. समीकरणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए। x -अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

3.3 एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधि

पिछले अनुच्छेद में, हमने एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए ग्राफीय विधि की चर्चा की। ग्राफीय विधि उस स्थिति में सुविधाजनक नहीं होती है, जब रैखिक समीकरणों के हलों को निरूपित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक पूर्णांक न हों, जैसे $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$,

$(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ आदि। इस प्रकार के बिंदुओं को पढ़ने में आवश्यक रूप से त्रुटि होने की संभावना रहती है। क्या हल ज्ञात करने की कोई अन्य विधि भी है? इसकी कई बीजगणितीय (बीजीय) विधियाँ हैं, जिनकी हम अब चर्चा करेंगे।

3.3.1 प्रतिस्थापन विधि : हम प्रतिस्थापन विधि को कुछ उदाहरण लेकर समझाएँगे।

उदाहरण 7 : प्रतिस्थापना विधि द्वारा निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए :

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

हल :

चरण 1 : हम किसी एक समीकरण को लेते हैं और किसी एक चर को दूसरे के पदों में लिखते हैं। आइए समीकरण (2)

$$x + 2y = 3,$$

को लें और इसे $x = 3 - 2y$ के रूप में लिखें। (3)

चरण 2 : x का यह मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित कीजिए। हम पाते हैं:

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$\text{अर्थात्} \quad 21 - 14y - 15y = 2$$

$$\text{अर्थात्} \quad -29y = -19$$

$$\text{इसलिए} \quad y = \frac{19}{29}$$

चरण 3 : y का यह मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

$$\text{अतः हल है:} \quad x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$$

सत्यापन : $x = \frac{49}{29}$ और $y = \frac{19}{29}$ को प्रतिस्थापित करने पर, आप जाँच कर सकते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं।

प्रतिस्थापन विधि को और अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, आइए इस पर चरणबद्ध रूप से विचार करें।

चरण 1 : एक चर का मान, माना y को दूसरे चर, माना x के पदों में किसी भी समीकरण से ज्ञात कीजिए, जो सुविधाजनक हो।

चरण 2 : y के इस मान को दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए और इसको एक चर x के समीकरण के रूप में बदलिए, जिसको हल किया जा सकता है। कभी-कभी, जैसा कि निम्न उदाहरणों 9 तथा 10 में है, आप बिना किसी चर के कथन प्राप्त कर सकते हैं। यदि यह कथन सत्य है, तो आप यह निर्णय कर सकते हैं कि रैखिक समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। यदि चरण 2 में प्राप्त कथन असत्य है, तो रैखिक समीकरण युग्म विरोधी है।

चरण 3 : चरण 2 से प्राप्त x (अथवा y) का मान उस समीकरण, जिसे चरण 1 में प्रयोग किया है, में प्रतिस्थापित करके दूसरे चर का मान प्राप्त कीजिए।

टिप्पणी : हमने एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके, रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए प्रतिस्थापित किया है। इसलिए इस विधि को प्रतिस्थापन विधि कहते हैं।

उदाहरण 5 : निम्नलिखित प्रश्न को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

आफ़ताब अपनी पुत्री से कहता है, 'सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा।' (क्या यह मनोरंजक है?) इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : माना आफ़ताब और उसकी पुत्री की आयु (वर्षों में) क्रमशः s और t हैं। तब, उस स्थिति को निरूपित करने के लिए, रैखिक समीकरण युग्म है:

$$s - 7 = 7(t - 7), \text{ अर्थात् } s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$$

$$\text{तथा } s + 3 = 3(t + 3), \text{ अर्थात् } s - 3t = 6 \quad (2)$$

समीकरण (2) का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं: $s = 3t + 6$

समीकरण (1) में s का मान रखने पर, हम पाते हैं:

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

अर्थात् $4t = 48$, जिससे $t = 12$ प्राप्त होता है।

t के इस मान को समीकरण (2) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

अतः, आफ़ताब और उसकी पुत्री क्रमशः 42 वर्ष और 12 वर्ष के हैं।

इस उत्तर की पुष्टि के लिए, यह जाँच कर लीजिए कि यह दी हुई समस्या के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है या नहीं।

उदाहरण 6 : एक दुकान में, 2 पेंसिल और 3 रबड़ों का मूल्य ₹ 9 है और 4 पेंसिल और 6 रबड़ों का मूल्य ₹ 18 है। प्रत्येक पेंसिल और प्रत्येक रबड़ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : रैखिक समीकरण युग्म जो बने थे वे हैं:

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

हम पहले समीकरण $2x + 3y = 9$ से, x का मान y के पदों में व्यक्त करते हैं और पाते हैं :

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

अब हम x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करके प्राप्त करते हैं:

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

अर्थात् $18 - 6y + 6y = 18$

अर्थात् $18 = 18$

यह कथन y के सभी मानों के लिए सत्य है। यद्यपि, इससे y का कोई मान हल के रूप में नहीं प्राप्त होता है। इसलिए हम x का कोई निश्चित मान नहीं पाते हैं। यह स्थिति इसलिए पैदा हुई है कि दोनों दिए गए समीकरण एक ही हैं। अतः समीकरणों (1) और (2) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। हम एक पेंसिल तथा एक रबड़ का अद्वितीय मूल्य नहीं प्राप्त कर सकते हैं, क्योंकि दी हुई स्थिति में बहुत से सार्व (सर्वनिष्ठ) हल हैं।

उदाहरण 7 : दो रेल पटरियाँ, समीकरणों $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ द्वारा निरूपित की गई हैं। क्या रेल पटरियाँ एक दूसरे को काटेंगी?

हल : इसमें बनाए गए रैखिक समीकरण थे:

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

समीकरण (1) से x को y के पदों में व्यक्त करके, हम पाते हैं:

$$x = 4 - 2y$$

अब, x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करके हम पाते हैं:

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

अर्थात् $8 - 12 = 0$

अर्थात् $-4 = 0$

जो कि एक असत्य कथन है।

अतः, दिए गए समीकरणों का कोई सार्व हल नहीं है। इसलिए, दोनों पटरियाँ एक दूसरे को नहीं काटेंगी।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:

(i) $x + y = 14$

$x - y = 4$

(iii) $3x - y = 3$

$9x - 3y = 9$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$

$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(ii) $s - t = 3$

$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$

$0.4x + 0.5y = 2.3$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो

3. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरण युग्म बनाइए और उनके हल प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए:

(i) दो संख्याओं का अंतर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(ii) दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदें ₹3800 में खरीदीं। बाद में, उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें ₹1750 में खरीदी। प्रत्येक बल्ले और प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दूरी पर भाड़ा सम्मिलित किया जाता है। 10 km दूरी के लिए भाड़ा ₹105 है तथा 15 km के लिए भाड़ा ₹155 है। नियत भाड़ा तथा प्रति km भाड़ा क्या है? एक व्यक्ति को 25 km यात्रा करने के लिए कितना भाड़ा देना होगा?

(v) यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(vi) पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या हैं?

3.3.2 विलोपन विधि

अब आइए एक और विधि पर विचार करें जिसे एक चर को विलुप्त करने की विधि कहा जाता है। यह कभी-कभी प्रतिस्थापन विधि से अधिक सुविधाजनक रहती है। आइए अब देखें कि यह विधि कैसे की जाती है।

उदाहरण 8 : दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चों का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रु बचा लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।

हल : आइए दोनों व्यक्तियों की मासिक आय को क्रमशः $9x$ रु तथा $7x$ रु से निरूपित करें और उनके खर्चों को क्रमशः $4y$ रु और $3y$ रु से निरूपित करें। तब, उस स्थिति में बने समीकरण हैं:

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

$$\text{और} \quad 7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

चरण 1 : y के गुणकों को समान करने के लिए समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा कीजिए। तब हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

चरण 2 : y को विलुप्त करने के लिए समीकरण (3) को समीकरण (4) में से घटाइए, क्योंकि y के गुणांक समान हैं, इसलिए हम पाते हैं:

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

$$\text{अर्थात्} \quad x = 2000$$

चरण 3 : x का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$9(2000) - 4y = 2000$$

$$\text{अर्थात्} \quad y = 4000$$

अतः समीकरणों के युग्म का हल $x = 2000$, $y = 4000$ है। इसलिए, व्यक्तियों की मासिक आय क्रमशः ₹ 18000 तथा ₹ 14000 हैं।

सत्यापन : $18000 : 14000 = 9 : 7$ है। साथ ही, उनके खर्चों का अनुपात

$$18000 - 2000 : 14000 - 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3 \text{ है।}$$

टिप्पणी :

1. उपर्युक्त उदाहरण को हल करने में, उपयोग की गई विधि को **विलोपन विधि (elimination method)** कहते हैं, क्योंकि हम सर्वप्रथम एक चर को विलुप्त करके, एक चर में एक रैखिक समीकरण प्राप्त करते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में, हमने y को विलुप्त किया है। हम x को भी विलुप्त कर सकते थे। इस प्रकार भी समीकरणों को हल करने का प्रयत्न कीजिए।
2. आप इसको हल करने के लिए प्रतिस्थापन विधि या ग्राफीय विधि का प्रयोग भी कर सकते थे। इन विधियों से भी हल कीजिए और देखिए कौन-सी विधि सबसे उपयुक्त है।
आइए अब हम विलोपन विधि के प्रयोग के विभिन्न चरण बताएँ:

चरण 1 : सर्वप्रथम दोनों समीकरणों को उपयुक्त शून्येतर अचरों से, किसी एक चर (x अथवा y) के गुणांकों को संख्यात्मक रूप में समान करने के लिए, गुणा कीजिए।

चरण 2 : पुनः एक समीकरण को दूसरे में जोड़ें या उसमें से घटाएँ जिससे कि एक चर विलुप्त हो जाए। यदि आप एक चर में समीकरण पाते हैं, तो चरण 3 में जाइए।

यदि चरण 2 में, हमें चर रहित एक सत्य कथन प्राप्त हो, तो मूल समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

यदि चरण 2 में, हमें एक चर रहित असत्य कथन मिले, तो मूल समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है, अर्थात् यह असंगत है।

चरण 3 : इस प्रकार एक चर (x या y) में प्राप्त समीकरण को, उस चर का मान ज्ञात करने के लिए, हल कीजिए।

चरण 4 : x (या y) के इस मान को मूल समीकरणों में से किसी एक में, दूसरे चर का मान ज्ञात करने के लिए, प्रतिस्थापित कीजिए।

अब इसे समझाने के लिए, हम कुछ और उदाहरण हल करते हैं :

उदाहरण 9 : विलोपन विधि का प्रयोग करके, निम्न रैखिक समीकरण युग्म के सभी संभव हल ज्ञात कीजिए:

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

हल :

चरण 1 : समीकरण (1) को 2 से तथा समीकरण (2) को 1 से, x के गुणांकों को समान करने के लिए, गुणा करिए। तब हम निम्न समीकरण पाते हैं:

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

चरण 2 : समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाने पर,

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

अर्थात् $0 = 9$, जो एक असत्य कथन है।

अतः, समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है।

उदाहरण 10 : दो अंकों की एक संख्या एवं उसके अंकों को उलटने पर बनी संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी संख्याएँ कितनी हैं?

हल : माना प्रथम संख्या की दहाई तथा इकाई के अंक क्रमशः x और y हैं। इसलिए, प्रथम संख्या को प्रसारित रूप में $10x + y$ लिख सकते हैं [उदाहरण के लिए, $56 = 10(5) + 6$]।

जब अंक उलट जाते हैं, तो x इकाई का अंक बन जाता है तथा y दहाई का अंक। यह संख्या प्रसारित रूप में $10y + x$ है [उदाहरण के लिए, जब 56 को उलट दिया जाता है, तो हम पाते हैं: $65 = 10(6) + 5$]।

दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$\text{अर्थात्} \quad 11(x + y) = 66$$

$$\text{अर्थात्} \quad x + y = 6 \quad (1)$$

हमें यह भी दिया गया है कि अंकों का अंतर 2 है। इसलिए,

$$\text{या तो} \quad x - y = 2 \quad (2)$$

$$\text{या} \quad y - x = 2 \quad (3)$$

यदि $x - y = 2$ है, तो (1) और (2) को विलोपन विधि से हल करने पर, $x = 4$ और $y = 2$ प्राप्त होता है। इस स्थिति में, हमें संख्या 42 प्राप्त होती है।

यदि $y - x = 2$ है, तो (1) और (3) को विलोपन विधि से हल करने पर, हमें $x = 2$ और $y = 4$ प्राप्त होता है। इस स्थिति में, हमें संख्या 24 प्राप्त होती है।

इस प्रकार ऐसी दो संख्याएँ 42 और 24 हैं।

सत्यापन : यहाँ $42 + 24 = 66$ और $4 - 2 = 2$ है तथा $24 + 42 = 66$ और $4 - 2 = 2$ है।

प्रश्नावली 3.3

- निम्न समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि तथा प्रतिस्थापना विधि से हल कीजिए। कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है?
 - $x + y = 5$ और $2x - 3y = 4$
 - $3x + 4y = 10$ और $2x - 2y = 2$
 - $3x - 5y - 4 = 0$ और $9x = 2y + 7$
 - $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ और $x - \frac{y}{3} = 3$
- निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) विलोपन विधि से ज्ञात कीजिए :
 - यदि हम अंश में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दें, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दें, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है?
 - पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है।
 - दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना, संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
 - मीना ₹ 2000 निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजाँची से ₹ 50 तथा ₹ 100 के नोट देने के लिए कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए कि उसने ₹ 50 और ₹ 100 के कितने-कितने नोट प्राप्त किए।
 - किराए पर पुस्तकें देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए ₹ 27 अदा किए, जबकि सूसी ने एक पुस्तक पाँच दिनों तक रखने के ₹ 21 अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

3.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

- एक रैखिक समीकरण युग्म को ग्राफीय रूप में निरूपित किया जा सकता है और हल किया जा सकता है
 - ग्राफीय विधि द्वारा
 - बीजगणितीय विधि द्वारा

2. ग्राफीय विधि:

दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफ दो रेखाएँ निरूपित करता है।

- (i) यदि रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो, वह बिंदु दोनों समीकरण का अद्वितीय हल होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म संगत होता है।
 - (ii) यदि रेखाएँ संपाती हैं, तो उसके अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु हल होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म आश्रित (संगत) होता है।
 - (iii) यदि रेखाएँ समांतर हैं, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म असंगत होता है।
3. बीजगणितीय विधि : हमने एक रैखिक समीकरण युग्म के हल ज्ञात करने के लिए निम्न विधियों की चर्चा की है:
- (i) प्रतिस्थापन विधि
 - (ii) विलोपन विधि
 - (iii) वज्र-गुणन विधि
4. यदि दिए गए रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एक रैखिक समीकरण युग्म को प्रदर्शित करते हैं, तो निम्न स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं:
- (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म संगत होता है।
 - (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म असंगत होता है।
 - (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म आश्रित (संगत) होता है।
5. अनेक स्थितियाँ हैं जिन्हें गणितीय रूप में ऐसी दो समीकरणों से प्रदर्शित किया जा सकता है, जो प्रारंभ में रैखिक नहीं हों। परंतु हम उन्हें परिवर्तित कर एक रैखिक समीकरण युग्म में बदल सकते हैं।



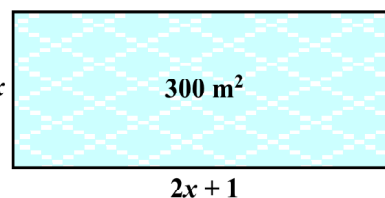
1063CH04

द्विघात समीकरण

4

4.1 भूमिका

अध्याय 2 में, आपने विभिन्न प्रकार के बहुपदों का अध्ययन किया है $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ एक प्रकार का द्विघात बहुपद था। जब हम इस बहुपद को शून्य के तुल्य कर देते हैं, तो हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त हो जाती है। वास्तविक जीवन से संबंधित कई समस्याओं को हल करने में हम द्विघात समीकरणों का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि एक धर्मार्थ ट्रस्ट 300 वर्ग मीटर क्षेत्रफल का प्रार्थना कक्ष बनाना चाहता है, जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई के दो गुने से एक मीटर अधिक हो। कक्ष की लंबाई और चौड़ाई क्या होनी चाहिए? माना कक्ष की चौड़ाई x मीटर है। तब, उसकी लंबाई $(2x + 1)$ मीटर होनी चाहिए। हम इस सूचना को चित्रीय रूप में आकृति 4.1 जैसा दिखा सकते हैं।



आकृति 4.1

अब कक्ष का क्षेत्रफल $= (2x + 1) \cdot x \text{ m}^2 = (2x^2 + x) \text{ m}^2$

इसलिए $2x^2 + x = 300$ (दिया है)

अतः $2x^2 + x - 300 = 0$

इसलिए, कक्ष की चौड़ाई, समीकरण $2x^2 + x - 300 = 0$, जो एक द्विघात समीकरण है, को संतुष्ट करना चाहिए।

अधिकांश लोग विश्वास करते हैं कि बेबीलोनवासियों ने ही सर्वप्रथम द्विघात समीकरणों को हल किया था। उदाहरण के लिए, वे जानते थे कि कैसे दो संख्याओं को ज्ञात किया जा सकता है, जिनका योग तथा गुणनफल दिया हो। ध्यान दीजिए कि यह समस्या

$x^2 - px + q = 0$ के प्रकार के समीकरण को हल करने के तुल्य है। यूनानी गणितज्ञ यूक्लिड ने लंबाईयाँ ज्ञात करने की एक ज्यामितीय विधि विकसित की जिसको हम वर्तमान शब्दावली में द्विघात समीकरण के हल कहते हैं। व्यापक रूप में, द्विघात समीकरणों को हल करने का श्रेय बहुधा प्राचीन भारतीय गणितज्ञों को जाता है। वास्तव में, ब्रह्मगुप्त (सा.यु. 598-665) ने $ax^2 + bx = c$ के रूप के द्विघात समीकरण को हल करने का एक स्पष्ट सूत्र दिया था। बाद में, श्रीधराचार्य (सा.यु. 1025) ने एक सूत्र प्रतिपादित किया, जिसे अब द्विघाती सूत्र के रूप में जाना जाता है, जो पूर्ण वर्ग विधि से द्विघात समीकरण को हल करने पर प्राप्त हुआ (जैसा भास्कर II ने लिखा)। एक अरब गणितज्ञ अल-ख्वारिज़्मी (लगभग सा.यु. 800) ने भी विभिन्न प्रकार के द्विघात समीकरणों का अध्ययन किया। अब्राहम बार हिथ्या हा-नासी यूरो ने 1145 में छपी अपनी पुस्तक 'लिबर इंबाडोरम' में विभिन्न द्विघात समीकरणों के पूर्ण हल दिए।

इस अध्याय में, आप द्विघात समीकरणों और उनके हल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे। दैनिक जीवन की कई स्थितियों में भी आप द्विघात समीकरणों के कुछ उपयोग देखेंगे।

4.2 द्विघात समीकरण

चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार की होती है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है। उदाहरण के लिए, $2x^2 + x - 300 = 0$ एक द्विघात समीकरण है। इसी प्रकार, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ और $1 - x^2 + 300 = 0$ भी द्विघात समीकरण हैं।

वास्तव में, कोई भी समीकरण $p(x) = 0$, जहाँ $p(x)$, घात 2 का एक बहुपद है, एक द्विघात समीकरण कहलाती है। परंतु जब हम $p(x)$ के पद घातों के घटते क्रम में लिखते हैं, तो हमें समीकरण का मानक रूप प्राप्त होता है। अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है।

द्विघात समीकरण हमारे आसपास के परिवेश की अनेक स्थितियों एवं गणित के विभिन्न क्षेत्रों में प्रयुक्त होते हैं। आइए हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्न स्थितियों को गणितीय रूप में व्यक्त कीजिए :

- जॉन और जीवन्ती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि आरंभ में उनके पास कितने-कितने कंचे थे।
- एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता है। प्रत्येक खिलौने का मूल्य (₹ में) 55 में से एक दिन में निर्माण किए गए खिलौने की संख्या को घटाने से

प्राप्त संख्या के बराबर है। किसी एक दिन, कुल निर्माण लागत ₹ 750 थी। हम उस दिन निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या ज्ञात करना चाहेंगे।

हल :

- (i) माना कि जॉन के कंचों की संख्या x थी।

तब जीवन्ती के कंचों की संख्या $= 45 - x$ (क्यों?)

जॉन के पास, 5 कंचे खो देने के बाद, बचे कंचों की संख्या $= x - 5$

जीवन्ती के पास, 5 कंचे खोने के बाद, बचे कंचों की संख्या $= 45 - x - 5$
 $= 40 - x$

$$\begin{aligned}\text{अतः उनका गुणनफल} &= (x - 5)(40 - x) \\ &= 40x - x^2 - 200 + 5x \\ &= -x^2 + 45x - 200\end{aligned}$$

$$\text{अब } -x^2 + 45x - 200 = 124 \quad (\text{दिया है कि गुणनफल} = 124)$$

$$\text{अर्थात् } -x^2 + 45x - 324 = 0$$

$$\text{अर्थात् } x^2 - 45x + 324 = 0$$

अतः जॉन के पास जितने कंचे थे, जो समीकरण

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

को संतुष्ट करते हैं।

- (ii) माना उस दिन निर्मित खिलौनों की संख्या x है।

इसलिए, उस दिन प्रत्येक खिलौने की निर्माण लागत (रुपयों में) $= 55 - x$

अतः, उस दिन कुल निर्माण लागत (रुपयों में) $= x(55 - x)$

$$\text{इसलिए } x(55 - x) = 750$$

$$\text{अर्थात् } 55x - x^2 = 750$$

$$\text{अर्थात् } -x^2 + 55x - 750 = 0$$

$$\text{अर्थात् } x^2 - 55x + 750 = 0$$

अतः उस दिन निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या द्विघात समीकरण

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

को संतुष्ट करती है।

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण हैं या नहीं:

$$(i) (x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$$

$$(ii) x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$$

$$(iii) x(2x + 3) = x^2 + 1$$

$$(iv) (x + 2)^3 = x^3 - 4$$

हल :

$$(i) \text{ बायाँ पक्ष} = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

$$\text{इसलिए } (x - 2)^2 + 1 = 2x - 3 \text{ को}$$

$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3 \text{ लिखा जा सकता है।}$$

अर्थात्

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

$$(ii) \text{ चूँकि } x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8 \text{ और } (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4 \text{ है,}$$

इसलिए

$$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$$

अर्थात्

$$x + 12 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण नहीं है। इसलिए, दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

$$(iii) \text{ यहाँ बायाँ पक्ष} = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$

अतः

$$x(2x + 3) = x^2 + 1 \text{ को लिखा जा सकता है:}$$

$$2x^2 + 3x = x^2 + 1$$

इसलिए

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ हमें प्राप्त होता है।}$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।

अतः, दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

$$(iv) \text{ यहाँ बायाँ पक्ष} = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

अतः

$$(x + 2)^3 = x^3 - 4 \text{ को लिखा जा सकता है:}$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

अर्थात्

$$6x^2 + 12x + 12 = 0 \text{ या } x^2 + 2x + 2 = 0$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त (ii) में, दिया गया समीकरण देखने में द्विघात समीकरण लगता है, परंतु यह द्विघात समीकरण नहीं है।

उपर्युक्त (iv) में, समीकरण देखने में त्रिघात (घात 3 का समीकरण) लगता है और द्विघात नहीं लगता है। परंतु वह द्विघात समीकरण निकलता है। जैसा आप देखते हैं समीकरण को यह तय करने कि वह द्विघात है अथवा नहीं, हमें उसका सरलीकरण करना आवश्यक है।

प्रश्नावली 4.1

1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण हैं :

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| (i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ | (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$ |
| (iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ | (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$ |
| (v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ | (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$ |
| (vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ | (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$ |

2. निम्न स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में निरूपित कीजिए :

- एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 m^2 है। क्षेत्र की लंबाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखंड की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।
- दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णांकों को ज्ञात करना है।
- रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगी। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।
- एक रेलगाड़ी 480 km की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 km/h कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घंटे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

4.3 गुणनखंडों द्वारा द्विघात समीकरण का हल

द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ पर विचार कीजिए। यदि हम इस समीकरण के बाएँ पक्ष में x को 1 से प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है: $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ समीकरण का दायाँ पक्ष। हम कहते हैं कि 1 द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का एक मूल है। इसका यह भी अर्थ है कि 1 द्विघात बहुपद $2x^2 - 3x + 1$ का एक शून्यक है।

व्यापक रूप में, एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। हम यह भी कहते हैं कि $x = \alpha$ द्विघात समीकरण का एक हल है अथवा α द्विघात समीकरण को संतुष्ट करता है। ध्यान दीजिए कि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही हैं।

आपने अध्याय 2 में, देखा है कि एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं। अतः, किसी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो मूल हो सकते हैं।

आपने कक्षा IX में सीखा है कि कैसे मध्य पद को विभक्त करके एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जा सकते हैं। हम इस ज्ञान का प्रयोग द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने में करेंगे। आइए देखें कैसे।

उदाहरण 3 : गुणनखंडन द्वारा समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, हम मध्य पद $-5x$ को $-2x - 3x$ [क्योंकि $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$] के रूप में विभक्त करते हैं।

$$\text{अतः, } 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

इसलिए, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ को $(2x - 3)(x - 1) = 0$ के रूप में पुनः लिखा जा सकता है।

अतः, x के वे मान जिनके लिए $2x^2 - 5x + 3 = 0$ वही है, जो $(2x - 3)(x - 1) = 0$ से प्राप्त है, अर्थात् $2x - 3 = 0$ या $x - 1 = 0$ से प्राप्त होंगे।

अब, $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$ देता है और $x - 1 = 0$, $x = 1$ देता है।

अतः, $x = \frac{3}{2}$ और $x = 1$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

दूसरे शब्दों में, 1 और $\frac{3}{2}$ समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल हैं।

जाँच कीजिए कि ये ही दिए गए समीकरण के मूल हैं।

ध्यान दीजिए कि हमने समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूलों को $2x^2 - 5x + 3$ के दो रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित करके और प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर करके प्राप्त किए हैं।

उदाहरण 4 : द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल x के वे मान हैं, जिनके लिए $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ हो।

इसलिए $3x - 2 = 0$ या $2x + 1 = 0$

अर्थात् $x = \frac{2}{3}$ या $x = -\frac{1}{2}$

अतः $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल $\frac{2}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ हैं।

हम मूलों के सत्यापन के लिए यह जाँच करते हैं कि $\frac{2}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

उदाहरण 5 : द्विघात समीकरण $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल : } 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 &= 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2 \\ &= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})\end{aligned}$$

अतः समीकरण के मूल x के वे मान हैं, जिनके लिए

$$(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$$

अब $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ के लिए, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ है।

अतः यह मूल, गुणनखंड $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ के दो बार आने के कारण, दो बार आता है, अर्थात् इस मूल की पुनरावृत्ति होती है।

इसलिए $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के मूल $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ हैं।

उदाहरण 6 : अनुच्छेद 4.1 में दिए गए प्रार्थना कक्ष की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : अनुच्छेद 4.1 में हमने ज्ञात किया था कि यदि कक्ष की चौड़ाई x m हो, तो x समीकरण $2x^2 + x - 300 = 0$ को संतुष्ट करता है। गुणनखंडन विधि का प्रयोग कर, हम इस समीकरण को निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

या $2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$

अर्थात् $(x - 12)(2x + 25) = 0$

अतः, दिए गए समीकरण के मूल $x = 12$ या $x = -12.5$ हैं। क्योंकि x कक्ष की चौड़ाई है, यह ऋणात्मक नहीं हो सकती।

इसलिए, कक्ष की चौड़ाई 12 m है। इसकी लंबाई $= 2x + 1 = 25$ m होगी।

प्रश्नावली 4.2

- गुणनखंड विधि से निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए:
 - $x^2 - 3x - 10 = 0$
 - $2x^2 + x - 6 = 0$
 - $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
 - $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
 - $100x^2 - 20x + 1 = 0$
- उदाहरण 1 में दी गई समस्याओं को हल कीजिए।
- ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।
- दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।
- एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।
- एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया कि प्रत्येक नग की निर्माण लागत (₹ में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नग की लागत ज्ञात कीजिए।

4.4 मूलों की प्रकृति

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

द्वारा देय होते हैं। यदि $b^2 - 4ac > 0$ है, तो हम दो भिन्न वास्तविक मूल $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

और $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त करते हैं।

यदि $b^2 - 4ac = 0$ है तो $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, अर्थात् $x = -\frac{b}{2a}$ या $-\frac{b}{2a}$ है।

अतः, समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दोनों मूल $-\frac{b}{2a}$ हैं।

इसलिए, हम कहते हैं कि इस स्थिति में द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

यदि $b^2 - 4ac < 0$ है, तो ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग $b^2 - 4ac$ हो। अतः दिए हुए द्विघात समीकरण के इस स्थिति में कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

क्योंकि $b^2 - 4ac$ यह निश्चित करता है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक हैं अथवा नहीं $b^2 - 4ac$ को इस द्विघात समीकरण का **विविक्तकर (Discriminant)** कहते हैं।

अतः, द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के

- (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो
- (ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो
- (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 : द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है, जहाँ $a = 2$, $b = -4$ और $c = 3$ है। इसलिए, विविक्तकर

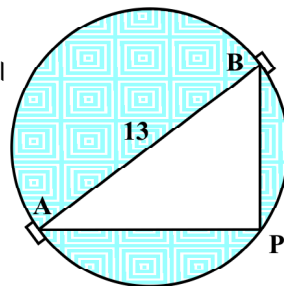
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0 \text{ है।}$$

अतः, दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

उदाहरण 8 : 13 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के एक बिंदु पर एक खंभा इस प्रकार गाड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनों अंत बिंदुओं पर बने फाटकों A और B से खंभे की दूरियों का अंतर 7 मीटर हो। क्या ऐसा करना संभव है? यदि है, तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियों पर खंभा गाड़ना है?

हल : आइए सर्वप्रथम एक चित्र बनाएँ (देखिए आकृति 4.2)।

माना खंभे की अभीष्ट स्थिति P है। माना खंभे की फाटक B से दूरी x m है अर्थात् $BP = x$ m है। अब खंभे की दोनों फाटकों की दूरियों का अंतर = $AP - BP$ (या $BP - AP$) = 7 m है। इसलिए, $AP = (x + 7)$ m होगा।



आकृति 4.2

साथ ही, $AB = 13\text{m}$ है। चूँकि AB व्यास है, इसलिए

$$\angle APB = 90^\circ \quad (\text{क्यों?})$$

इसलिए

$$AP^2 + PB^2 = AB^2 \quad (\text{पाइथागोरस प्रमेय द्वारा})$$

अर्थात्

$$(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$$

अर्थात्

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

अर्थात्

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

अतः, खंभे की फाटक B से दूरी 'x' समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ को संतुष्ट करती है।

यह देखने के लिए कि ऐसा संभव है अथवा नहीं, आइए इसके विविक्तकर पर विचार करें। विविक्तकर है:

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

अतः, दिए गए द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल हैं और इसीलिए खंभे को पार्क की परिसीमा पर गाड़ा जा सकता है।

द्विघात समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ को द्विघाती सूत्र से हल करने पर, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

इसलिए, $x = 5$ या -12 है।

चूँकि x खंभे और फाटक B के बीच की दूरी है, यह धनात्मक होना चाहिए। इसलिए, $x = -12$ को छोड़ देते हैं। अतः, $x = 5$ है।

इस प्रकार, खंभे को पार्क की परिसीमा पर फाटक B से 5m और फाटक A से $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{m}$ की दूरी पर गाड़ना है।

उदाहरण 9 : समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि वे वास्तविक हैं, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$ है।

इसलिए विविक्तकर $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$ है।

अतः द्विघात समीकरण के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

ये मूल $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, अर्थात् $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, अर्थात् $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ हैं।

प्रश्नावली 4.3

- निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए :
 - $2x^2 - 3x + 5 = 0$
 - $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$
 - $2x^2 - 6x + 3 = 0$
- निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।
 - $2x^2 + kx + 3 = 0$
 - $kx(x - 2) + 6 = 0$
- क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना संभव है जिसकी लंबाई, चौड़ाई से दुगुनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 m^2 हो? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
- क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।
- क्या परिमाण 80 m तथा क्षेत्रफल 400 m^2 के एक पार्क को बनाना संभव है? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है:

- चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का होता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।
- एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही होते हैं।
- यदि हम $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के दो रैखिक गुणकों में गुणनखंड कर सकें, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल, प्रत्येक गुणक को शून्य के बराबर करके, प्राप्त कर सकते हैं।
- द्विघाती सूत्र: द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा देय होते हैं, यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो।

5. एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ में,
- (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो।
 - (ii) दो बराबर मूल (अर्थात् संपाती वास्तविक मूल) होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो और
 - (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED



1063CH05

समांतर श्रेढ़ियाँ

5

5.1 भूमिका

आपने इस पर अवश्य ध्यान दिया होगा कि प्रकृति में, अनेक वस्तुएँ एक निश्चित प्रतिरूप (pattern) का अनुसरण करती हैं, जैसे कि सूरजमुखी के फूल की पंखुड़ियाँ, मधु-कोष (या मधु-छत्ते) में छिद्र, एक भुट्टे पर दाने, एक अनन्नास और एक पाइन कोन (pine cone) पर सर्पिल, इत्यादि

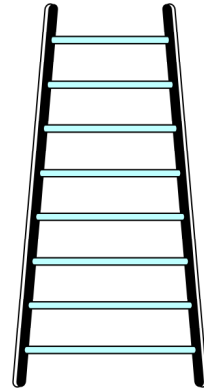
अब हम अपने दैनिक जीवन में आने वाले प्रतिरूपों की ओर देखते हैं। ऐसे कुछ उदाहरण हैं :

- (i) रीना ने एक पद के लिए आवेदन किया और उसका चयन हो गया। उसे यह पद ₹ 8000 के मासिक वेतन और ₹ 500 वार्षिक की वेतन वृद्धि के साथ दिया गया। उसका वेतन (₹ में) पहले वर्ष, दूसरे वर्ष, तीसरे वर्ष, इत्यादि के लिए क्रमशः

8000, 8500, 9000, ... होगा।

- (ii) एक सीढ़ी के डंडों की लंबाइयाँ नीचे से ऊपर की ओर एक समान रूप से 2 cm घटती जाती हैं। (देखिए आकृति 5.1)। सबसे नीचे वाला डंडा लंबाई में 45 cm है। नीचे से, पहले, दूसरे, तीसरे, . . . डंडों की लंबाइयाँ (cm में) क्रमशः

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33 और 31 हैं।



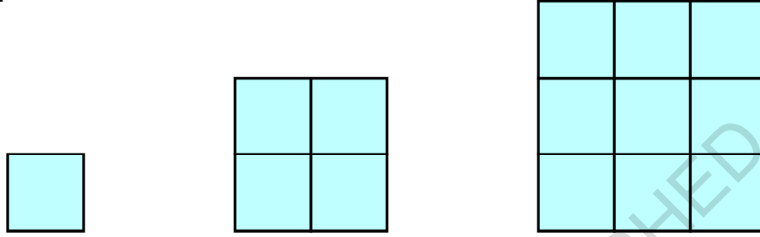
आकृति 5.1

- (iii) किसी बचत योजना में, कोई धनराशि प्रत्येक 3 वर्षों के बाद स्वयं की $\frac{5}{4}$ गुनी हो जाती

है। ₹8000 के निवेश की 3, 6, 9 और 12 वर्षों के बाद परिपक्वता राशियाँ (रुपयों में) क्रमशः

10000, 12500, 15625, और 19531.25 हैं।

- (iv) भुजाओं 1, 2, 3, ... मात्रकों (units) वाले वर्गों में मात्रक वर्गों की संख्याएँ (देखिए आकृति 5.2) क्रमशः $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ हैं।

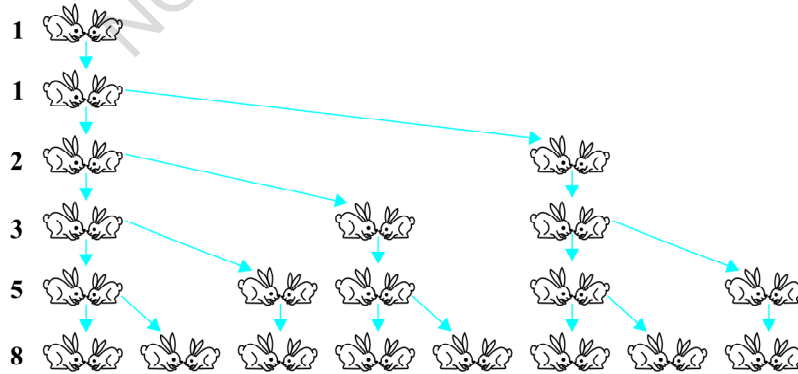


आकृति 5.2

- (v) शकीला अपनी पुत्री की गुल्लक में ₹ 100 तब डालती है, जब वह एक वर्ष की हो जाती है तथा प्रत्येक वर्ष इसमें ₹ 50 की वृद्धि करती जाती है। उसके पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे, ... जन्म दिवसों पर उसकी गुल्लक में डाली गई राशियाँ (रुपयों में) क्रमशः

100, 150, 200, 250, ... होंगी।

- (vi) खरगोशों का एक युग्म अपने पहले महीने में प्रजनन करने के योग्य नहीं है। दूसरे और प्रत्येक आने वाले महीने में वे एक नए युग्म का प्रजनन करते हैं। प्रत्येक नया युग्म अपने दूसरे महीने और प्रत्येक आने वाले महीने में एक नए युग्म का प्रजनन करता है (देखिए आकृति 5.3)। यह मानते हुए कि किसी खरगोश की मृत्यु नहीं होती है, पहले, दूसरे, तीसरे, ... छठे महीने के प्रारंभ में खरगोशों के युग्मों की संख्या क्रमशः 1, 1, 2, 3, 5 और 8 होगी।



आकृति 5.3

उपरोक्त उदाहरणों में, हम कुछ प्रतिरूप देखते हैं। कुछ में, हम देखते हैं कि उत्तरोत्तर पद अपने से पहले पद में एक स्थिर संख्या जोड़ने से प्राप्त होते हैं; कुछ में ये पद अपने से पहले पद को एक निश्चित संख्या से गुणा करके प्राप्त होते हैं तथा कुछ अन्य में हम यह देखते हैं कि ये क्रमागत संख्याओं के वर्ग हैं, इत्यादि।

इस अध्याय में, हम इनमें से एक प्रतिरूप का अध्ययन करेंगे जिसमें उत्तरोत्तर पद अपने से पहले पदों में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त किए जाते हैं। हम यह भी देखेंगे कि इनके n वें पद और n क्रमागत पदों के योग किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं तथा इस ज्ञान का प्रयोग कुछ दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में करेंगे।

5.2 समांतर श्रेढ़ियाँ

संख्याओं की निम्नलिखित सूचियों (lists) पर विचार कीजिए:

- (i) 1, 2, 3, 4, ...
- (ii) 100, 70, 40, 10, ...
- (iii) -3, -2, -1, 0, ...
- (iv) 3, 3, 3, 3, ...
- (v) -1.0, -1.5, -2.0, -2.5, ...

सूची की प्रत्येक संख्या एक **पद (term)** कहलाता है।

उपरोक्त सूचियों में से प्रत्येक सूची में, यदि आपको एक पद दिया हो, तो क्या आप उसका अगला पद लिख सकते हैं? यदि हाँ, तो आप ऐसा कैसे करेंगे? शायद, किसी प्रतिरूप या नियम का अनुसरण करते हुए, आप ऐसा करेंगे। आइए, उपरोक्त सूचियों को देखें और इनमें संबंध नियम को लिखें।

- (i) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद से 1 अधिक है।
- (ii) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद से 30 कम है।
- (iii) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद में 1 जोड़ने से प्राप्त होता है।
- (iv) में सभी पद 3 हैं, अर्थात् प्रत्येक पद अपने पिछले पद में शून्य जोड़कर (या उसमें से शून्य घटा कर प्राप्त होता है।)
- (v) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद में -0.5 जोड़कर (अर्थात् उसमें से 0.5 घटाकर) प्राप्त होता है।

उपरोक्त सूचियों में से प्रत्येक में हम देखते हैं कि उत्तरोत्तर पदों को इनसे पहले पदों

में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त किया जाता है। संख्याओं की ऐसी सूची को यह कहा जाता है कि वे एक **समांतर श्रेणी (Arithmetic Progression या A.P.)** बना रहे हैं।

अतः, एक समांतर श्रेणी संख्याओं की एक ऐसी सूची है जिसमें प्रत्येक पद (पहले पद के अतिरिक्त) अपने पद में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त होता है।

यह निश्चित संख्या A.P. का **सार्व अंतर (common difference)** कहलाती है। याद रखिए, यह सार्व अंतर धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

आइए एक A.P. के पहले पद को a_1 दूसरे पद को $a_2, \dots, n$ वें पद को a_n तथा सार्व अंतर को d से व्यक्त करें। तब, A.P., $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ हो जाती है।

अतः $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$ है।

A.P. के कुछ अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं :

- किसी स्कूल की प्रातःकालीन सभा में एक पंक्ति में खड़े हुए कुछ विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (cm में) 147, 148, 149, ..., 157 हैं।
- किसी शहर में, जनवरी मास में किसी सप्ताह में लिए गए न्यूनतम तापमान (डिग्री सेल्सियस में) आरोही क्रम में लिखने पर
 $-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$ हैं।
- ₹ 1000 के एक ऋण में से प्रत्येक मास 5% ऋण की राशि वापिस करने पर शेष राशियाँ (₹ में) 950, 900, 850, 800, ..., 50 हैं।
- किसी स्कूल द्वारा कक्षाओं I से XII तक के सर्वाधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों को दिए जाने वाले नकद पुरस्कार (₹ में) क्रमशः 200, 250, 300, 350, ..., 750 हैं।
- जब प्रति मास ₹ 50 की बचत की जाती है, तो 10 मास के लिए, प्रत्येक मास के अंत में कुल बचत की राशियाँ (₹ में) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 और 500 हैं।

यह आपके अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है कि आप स्पष्ट करें कि उपरोक्त में प्रत्येक सूची एक A.P. क्यों है।

आप यह देख सकते हैं कि

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

एक समांतर श्रेणी को निरूपित करती है, जहाँ a पहला पद है और d सार्व अंतर है। इसे **A.P. का व्यापक रूप (general form)** कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त उदाहरणों (a) से (e) में, पदों की संख्या परिमित (finite) है। ऐसी A.P. को एक **परिमित A.P.** कहते हैं। आप यह भी देख सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक A.P. का एक **अंतिम पद (last term)** है। इसी अनुच्छेद के उदाहरणों (i) से (v) में दी हुई A.P. परिमित A.P. नहीं हैं। ये **अपरिमित A.P. (Infinite Arithmetic Progressions)** कहलाती हैं। ऐसी A.P. में अंतिम पद नहीं होते।

अब एक A.P. के बारे में जानने के लिए आपको न्यूनतम किस सूचना की आवश्यकता होती है? क्या इसके प्रथम पद की जानकारी पर्याप्त है? या क्या इसके केवल सार्व अंतर की जानकारी पर्याप्त है? आप पाएँगे कि आपको इन दोनों अर्थात् प्रथम पद a और सार्व अंतर d की जानकारी होना आवश्यक है।

उदाहरणार्थ, यदि प्रथम पद $a = 6$ है और सार्व अंतर $d = 3$ है तो

$$6, 9, 12, 15, \dots \text{ A.P. है।}$$

तथा यदि $a = 6$ है और $d = -3$ है तो

$$6, 3, 0, -3, \dots \text{ A.P. है।}$$

इसी प्रकार, जब

$$a = -7, \quad d = -2, \quad \text{तो } -7, -9, -11, -13, \dots \text{ A.P. है।}$$

$$a = 1.0, \quad d = 0.1, \quad \text{तो } 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots \text{ A.P. है।}$$

$$a = 0, \quad d = 1\frac{1}{2}, \quad \text{तो } 0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \dots \text{ A.P. है।}$$

$$a = 2, \quad d = 0, \quad \text{तो } 2, 2, 2, 2, \dots \text{ A.P. है।}$$

अतः यदि आपको a और d ज्ञात हों तो A.P. लिख सकते हैं। इसकी विपरीत प्रक्रिया के बारे में आप क्या कह सकते हैं? अर्थात् यदि आपको संख्याओं की एक सूची दी हुई है, तो क्या आप कह सकते हैं कि यह एक A.P. है और फिर इसके a और d ज्ञात कर सकते हैं? क्योंकि a प्रथम पद है, इसलिए इसे सरलता से लिखा जा सकता है। हम जानते हैं कि एक A.P. में, प्रत्येक उत्तरोत्तर पद अपने से पहले पद में d जोड़कर प्राप्त होता है। अतः, एक A.P. के लिए, उसके प्रत्येक पद को उससे अगले पद में से घटाने से प्राप्त d सभी पदों के लिए एक ही होगा। उदाहरणार्थ, संख्याओं की सूची

$$6, 9, 12, 15, \dots$$

के लिए हमें प्राप्त है:

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

यहाँ, प्रत्येक स्थिति में, किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 3 है। अतः, संख्याओं की उपरोक्त दी हुई चर्चा सूची एक A.P. है, जिसका प्रथम पद $a = 6$ है तथा सार्व अंतर $d = 3$ है।

संख्याओं की सूची : $6, 3, 0, -3, \dots$ के लिए

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$

$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

अतः यह भी एक A.P. है जिसका प्रथम पद 6 है और सार्व अंतर -3 है।

व्यापक रूप में, A.P. $a_1, a_2, \dots, a_n$ के लिए,

$$d = a_{k+1} - a_k$$

जहाँ a_{k+1} और a_k क्रमशः $(k+1)$ वें और k वें पद हैं।

एक दी हुई A.P. का d ज्ञात करने के लिए, हमें $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ में से सभी को ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है। इनमें से किसी एक का ज्ञात करना ही पर्याप्त है।

संख्याओं की सूची $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ पर विचार कीजिए। केवल देखने से ही यह पता चल जाता है कि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर सदैव समान नहीं है। अतः यह एक A.P. नहीं है।

ध्यान दीजिए कि A.P. : $6, 3, 0, -3, \dots$ का d ज्ञात करने के लिए, हमने 3 में से 6 को घटाया था, 6 में से 3 को नहीं घटाया था। अर्थात् d ज्ञात करने के लिए हमें $(k+1)$ वें पद में से, k वें पद को ही घटाना चाहिए, चाहे $(k+1)$ वाँ पद छोटा ही क्यों न हो।

आइए कुछ उदाहरणों की सहायता से इन अवधारणाओं को और अधिक स्पष्ट करें।

उदाहरण 1 : A.P. : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$, के लिए प्रथम पद a और सार्व अंतर d लिखिए।

हल : यहाँ $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ है।

याद रखिए कि यदि हमें यह ज्ञात हो जाए कि संख्याएँ A.P. में हैं, तो हम किन्हीं भी दो क्रमागत पदों का प्रयोग करके d ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 2 : संख्याओं की निम्नलिखित सूचियों में से कौन-कौन से A.P. नहीं हैं? यदि इनसे कोई A.P. है तो उसके अगले दो पद लिखिए।

- (i) 4, 10, 16, 22, ... (ii) 1, -1, -3, -5, ...
 (iii) -2, 2, -2, 2, -2, ... (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

हल : (i) $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$
 $a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$
 $a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

अर्थात्, प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ एक ही है।

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची एक A.P. है जिसका सार्व अंतर $d = 6$ है।

इसके अगले दो पद $22 + 6 = 28$ और $28 + 6 = 34$ हैं।

- (ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$
 $a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$
 $a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

अर्थात्, प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ एक ही है।

अतः, संख्याओं की दी हुई सूची एक A.P. है जिसका सार्व अंतर $d = -2$ है।

इसके अगले दो पद

$$-5 + (-2) = -7 \text{ और } -7 + (-2) = -9 \text{ हैं।}$$

- (iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$
 $a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

चूँकि $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ हैं, इसलिए दी हुई संख्याओं की सूची से एक A.P. नहीं है।

- (iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$, $a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

यहाँ, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ है।

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची से एक A.P. नहीं है।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित स्थितियों में से किन स्थितियों में संबद्ध संख्याओं की सूची A.P. है और क्यों?

- (i) प्रत्येक किलो मीटर के बाद का टैक्सी का किराया, जबकि प्रथम किलो मीटर के लिए किराया ₹ 15 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलो मीटर के लिए किराया ₹ 8 है।

- (ii) किसी बेलन (cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि वायु निकालने वाला पंप प्रत्येक बार बेलन की शेष हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकाल देता है।
- (iii) प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुँआ खोदने में आई लागत, जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत ₹ 150 है और बाद में प्रत्येक मीटर खुदाई की लागत ₹ 50 बढ़ती जाती है।
- (iv) खाते में प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि ₹ 10000 की राशि 8 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की जाती है।
2. दी हुई A.P. के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद a और सार्व अंतर d निम्नलिखित हैं:
- (i) $a = 10$, $d = 10$ (ii) $a = -2$, $d = 0$
- (iii) $a = 4$, $d = -3$ (iv) $a = -1$, $d = \frac{1}{2}$
- (v) $a = -1.25$, $d = -0.25$
3. निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्व अंतर लिखिए :
- (i) $3, 1, -1, -3, \dots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \dots$
- (iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \dots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \dots$
4. निम्नलिखित में से कौन-कौन A.P. हैं? यदि कोई A.P. है, तो इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए और इनके तीन और पद लिखिए।
- (i) $2, 4, 8, 16, \dots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$
- (iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \dots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \dots$
- (v) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \dots$
- (vii) $0, -4, -8, -12, \dots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$
- (ix) $1, 3, 9, 27, \dots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \dots$
- (xi) $a, a^2, a^3, a^4, \dots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \dots$
- (xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \dots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \dots$
- (xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \dots$

5.3 A.P. का n वाँ पद

आइए अनुच्छेद 5.1 में दी हुई उस स्थिति पर पुनः विचार करें जिसमें रीना ने एक पद के लिए आवेदन किया था और वह चुन ली गई थी। उसे यह पद ₹ 8000 के मासिक वेतन और ₹ 500 वार्षिक की वेतन वृद्धि के साथ दिया गया था। पाँचवें वर्ष में उसका मासिक वेतन क्या होगा?

इसका उत्तर देने के लिए, आइए देखें कि उसका मासिक वेतन दूसरे वर्ष में क्या होगा।

यह $(₹ 8000 + ₹ 500) = ₹ 8500$ होगा। इसी प्रकार, हम तीसरे, चौथे और पाँचवें वर्षों के लिए, उसके मासिक वेतन, पिछले वर्ष के वेतन में ₹ 500 जोड़ कर ज्ञात कर सकते हैं। अतः, उसका तीसरे वर्ष का वेतन = ₹ $(8500 + 500)$

$$\begin{aligned} &= ₹ (8000 + 500 + 500) \\ &= ₹ (8000 + 2 \times 500) \\ &= ₹ [8000 + (3 - 1) \times 500] \quad (\text{तीसरे वर्ष के लिए}) \\ &= ₹ 9000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{चौथे वर्ष का वेतन} &= ₹ (9000 + 500) \\ &= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500) \\ &= ₹ (8000 + 3 \times 500) \\ &= ₹ [8000 + (4 - 1) \times 500] \quad (\text{चौथे वर्ष के लिए}) \\ &= ₹ 9500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पाँचवें वर्ष का वेतन} &= ₹ (9500 + 500) \\ &= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500) \\ &= ₹ (8000 + 4 \times 500) \\ &= ₹ [8000 + (5 - 1) \times 500] \quad (\text{पाँचवें वर्ष के लिए}) \\ &= ₹ 10000 \end{aligned}$$

ध्यान दीजिए कि यहाँ हमें संख्याओं की निम्नलिखित सूची मिल रही है :

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, ...

ये संख्याएँ एक A.P. बना रही हैं। (क्यों?)

अब ऊपर बनने वाले प्रतिरूप को देखकर क्या आप उसका छोटे वर्ष का मासिक वेतन ज्ञात कर सकते हैं? क्या 15वें वर्ष का मासिक वेतन ज्ञात कर सकते हैं? साथ ही, यह मानते हुए कि वह इस पद पर आगे भी कार्य करती रहेगी, 25वें वर्ष के लिए उसके मासिक वेतन के विषय में आप क्या कह सकते हैं? इसका उत्तर देने के लिए, आप पिछले वर्ष के वेतन में ₹ 500 जोड़कर वांछित वेतन परिकल्पित करेंगे। क्या आप इस प्रक्रिया को कुछ संक्षिप्त कर सकते हैं? आइए, देखें। जिस प्रकार हमने इन वेतनों को ऊपर प्राप्त किया है, उनसे आपको कुछ आभास तो लग गया होगा।

15वें वर्ष के लिए वेतन

$$= 14\text{वें वर्ष के लिए वेतन} + ₹ 500$$

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \dots + 500}_{13 \text{ बार}} \right] + ₹ 500$$

$$= ₹ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹ [8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹ 15000$$

अर्थात्

$$\text{प्रथम वेतन} + (15 - 1) \times \text{वार्षिक वेतन वृद्धि}$$

इसी प्रकार 25वें साल में उसका वेतन होगा :

$$₹ [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹ 20000$$

$$= \text{प्रथम वेतन} + (25 - 1) \times \text{वार्षिक वेतन वृद्धि}$$

इस उदाहरण से, आपको कुछ आभास तो अवश्य हो गया होगा कि एक A.P. के 15वें पद, 25वें पद और व्यापक रूप में, n वें पद को किस प्रकार लिखा जा सकता है।

मान लीजिए $a_1, a_2, a_3, \dots$ एक A.P. है, जिसका प्रथम पद a है और सार्व अंतर d है।

तब

$$\text{दूसरा पद } a_2 = a + d = a + (2 - 1) d$$

$$\text{तीसरा पद } a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1) d$$

$$\text{चौथा पद } a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1) d$$

.....

.....

इस प्रतिरूप को देखते हुए, हम कह सकते हैं कि n वाँ पद $a_n = a + (n - 1) d$ है।

अतः, प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाली एक A.P. का n वाँ पद $a_n = a + (n - 1) d$ द्वारा प्राप्त होता है।

a_n को A.P. का व्यापक पद (general term) भी कहते हैं। यदि किसी A.P. में m पद हैं, तो a_m इसके अंतिम पद को निरूपित करता है, जिसे कभी-कभी l द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 3 : A.P. : 2, 7, 12, ... का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ और $n = 10$ है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1) d$ है, इसलिए

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$$

अतः दी हुई A.P. का 10वाँ पद 47 है।

उदाहरण 4 : A.P. : 21, 18, 15, ... का कौन-सा पद -81 है? साथ ही क्या इस A.P. का कोई पद शून्य है? सकारण उत्तर दीजिए।

हल : यहाँ, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ और $a_n = -81$ है। हमें n ज्ञात करना है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1) d$,

अतः $-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

या $-81 = 24 - 3n$

या $-105 = -3n$

अतः $n = 35$

इसलिए दी हुई A.P. का 35वाँ पद -81 है।

आगे, हम यह जानना चाहते हैं कि क्या कोई n ऐसा है कि $a_n = 0$ हो। यदि ऐसा कोई n है तो

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

अर्थात् $3(n - 1) = 21$

या $n = 8$
 अतः, 8वाँ पद 0 है।

उदाहरण 5 : वह A.P. निर्धारित कीजिए जिसका तीसरा पद 5 और 7वाँ पद 9 है।

हल : हमें प्राप्त है

$$a_3 = a + (3 - 1)d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

$$\text{और} \quad a_7 = a + (7 - 1)d = a + 6d = 9 \quad (2)$$

समीकरणों (1) और (2) के युग्म को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$a = 3, \quad d = 1$$

अतः वांछित A.P. : 3, 4, 5, 6, 7, ... है।

उदाहरण 6 : क्या संख्याओं की सूची 5, 11, 17, 23, ... का कोई पद 301 है? क्यों?

हल : हमें प्राप्त है :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

चूँकि $k = 1, 2, 3$, आदि के लिए, $a_{k+1} - a_k$ एक समान संख्या होती है, इसलिए दी हुई सूची एक A.P. है।

यहाँ $a = 5$ और $d = 6$

मान लीजिए इस A.P. का n वाँ पद 301 है।

हम जानते हैं कि

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$\text{इसलिए} \quad 301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$\text{अर्थात्} \quad 301 = 6n - 1$$

$$\text{अतः} \quad n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

परंतु n एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए (क्यों?)। अतः, 301 संख्याओं की दी हुई सूची का पद नहीं है।

उदाहरण 7 : दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?

हल : 3 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याओं की सूची है :

$$12, 15, 18, \dots, 99$$

क्या यह एक A.P. है? हाँ, यह है। यहाँ $a = 12$, $d = 3$ और $a_n = 99$ है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1) d,$

इसलिए $99 = 12 + (n - 1) \times 3$

अर्थात् $87 = (n - 1) \times 3$

अर्थात् $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

अर्थात् $n = 29 + 1 = 30$

अतः, 3 से विभाज्य दो अंकों वाली 30 संख्याएँ हैं।

उदाहरण 8 : A.P. : 10, 7, 4, . . . , - 62 का अंतिम पद से (प्रथम पद की ओर) 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

जहाँ $l = a + (n - 1) d$

अंतिम पद से 11वाँ पद ज्ञात करने के लिए, हम इस AP के कुल पदों की संख्या ज्ञात करेंगे।

अतः $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

या $-72 = (n - 1)(-3)$

अर्थात् $n - 1 = 24$

या $n = 25$

अतः, दी हुई A.P. में 25 पद हैं।

अंतिम पद से 11वाँ पद AP का 15वाँ पद होगा। (ध्यान दीजिए कि यह 14वाँ पद नहीं होगा। क्यों?)

अतः, $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

इसलिए, अंतिम पद से 11वाँ पद - 32 है।

वैकल्पिक हल:

यदि हम A.P. को विपरीत ओर से देखें, तो इसका प्रथम पद $a = -62$ है और सार्व अंतर $d = 3$ है। (क्यों?)

अब, प्रश्न यह बन जाता है कि इस AP का 11वाँ पद ज्ञात किया जाए।

अतः $a_{11} = -62 + (11 - 1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

अतः अंतिम पद से 11वाँ वांछित पद -32 है।

उदाहरण 9 : ₹ 1000 की एक धनराशि 8% वार्षिक साधारण ब्याज पर निवेश की जाती है। प्रत्येक वर्ष के अंत में ब्याज परिकलित कीजिए। क्या ये ब्याज एक A.P. बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो इस तथ्य का प्रयोग करते हुए 30 वर्षों के अंत में ब्याज परिकलित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि साधारण ब्याज परिकलित करने के लिए सूत्र निम्नलिखित है:

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

अतः, प्रथम वर्ष के अंत में ब्याज $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹ 80$

दूसरे वर्ष के अंत में ब्याज $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹ 160$

तीसरे वर्ष के अंत में ब्याज $= ₹ \frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹ 240$

इसी प्रकार, हम चौथे, पाँचवें, इत्यादि वर्षों के अंत में ब्याज परिकलित कर सकते हैं।

अतः, पहले, दूसरे, तीसरे, ... वर्षों के अंत में ब्याज (₹ में) क्रमशः हैं :

$$80, 160, 240, \dots$$

यह एक A.P. है, क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 80 है, अर्थात् $d = 80$ है। साथ ही, इसमें $a = 80$ है।

अतः, 30 वर्षों के अंत में ब्याज ज्ञात करने के लिए हम a_{30} ज्ञात करेंगे।

अब $a_{30} = a + (30 - 1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

अतः 30 वर्षों के अंत में ब्याज ₹ 2400 होगा।

उदाहरण 10 : फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 गुलाब के पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 गुलाब के पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 गुलाब के पौधे हैं, इत्यादि। उसकी अंतिम पंक्ति में 5 गुलाब के पौधे हैं। इस क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल : पहली, दूसरी, तीसरी, ... पंक्तियों में गुलाब के पौधों की संख्याएँ क्रमशः निम्नलिखित हैं:

$$23, 21, 19, \dots, 5$$

ये एक A.P. बनाती हैं (क्यों?)। मान लीजिए पंक्तियों की संख्या n है।

तब $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$ और $a_n = 5$ है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1)d$

इसलिए

$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

अर्थात् $-18 = (n - 1)(-2)$

या $n = 10$

अतः फूलों की क्यारी में 10 पंक्तियाँ हैं।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित सारणी में, रिक्त स्थानों को भरिए, जहाँ AP का प्रथम पद a , सार्व अंतर d और n वाँ पद a_n है:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	-18	...	10	0
(iii)	...	-3	18	-5
(iv)	-18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

2. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए और उसका औचित्य दीजिए:

(i) A.P.: $10, 7, 4, \dots$, का 30वाँ पद है:

(A) 97

(B) 77

(C) -77

(D) -87

(ii) A.P.: $-3, -\frac{1}{2}, 2, \dots$, का 11वाँ पद है:

(A) 28

(B) 22

(C) -38

(D) $-48\frac{1}{2}$

3. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में, रिक्त खानों (boxes) के पदों को ज्ञात कीजिए :

(i) 2, , 26

(ii) , 13, , 3

(iii) 5, , , $9\frac{1}{2}$

(iv) -4, , , , , 6

(v) , 38, , , , -22

4. A.P. : 3, 8, 13, 18, ... का कौन सा पद 78 है?

5. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में से प्रत्येक श्रेढ़ी में कितने पद हैं?

(i) 7, 13, 19, ..., 205

(ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \dots, -47$

6. क्या A.P., 11, 8, 5, 2, ... का एक पद -150 है? क्यों?

7. उस A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

8. एक A.P. में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

9. यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और -8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा?

10. किसी A.P. का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

11. A.P. : 3, 15, 27, 39, ... का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा?

12. दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अंतर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अंतर क्या होगा?

13. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

14. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं?

15. n के किस मान के लिए, दोनों समांतर श्रेढ़ियों 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, ... के n वें पद बराबर होंगे?

16. वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

17. A.P. : 3, 8, 13, ..., 253 में अंतिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

18. किसी A.P. के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस A.P. के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।
19. सुब्बा राव ने 1995 में ₹ 5000 के मासिक वेतन पद कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष ₹ 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन ₹ 7000 हो गया?
20. रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में ₹ 50 की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत ₹ 17.5 बढ़ाती गई। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत ₹ 207.50 हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

5.4 A.P. के प्रथम n पदों का योग

आइए अनुच्छेद 5.1 में दी हुई स्थिति पर पुनः विचार करें, जिसमें शकीला अपनी पुत्री की गुल्लक में, उसके 1 वर्ष की हो जाने पर ₹ 100 डालती है, उसके दूसरे जन्म दिवस पर ₹ 150, तीसरे जन्म दिवस पर ₹ 200 डालती है और ऐसा आगे जारी रखती है। जब उसकी पुत्री 21 वर्ष की हो जाएगी, तो उसकी गुल्लक में कितनी धनराशि एकत्रित हो जाएगी?



यहाँ, उसके प्रथम, दूसरे, तीसरे, चौथे, ... जन्म दिवसों पर, उसकी गुल्लक में डाली गई राशियाँ (₹ में) क्रमशः 100, 150, 200, 250, ... हैं तथा यही क्रम उसके 21वें जन्म दिवस तक चलता रहा। 21वें जन्म दिवस तक एकत्रित हुई कुल धनराशि ज्ञात करने के लिए, हमें उपरोक्त सूची की संख्याओं को जोड़ने की आवश्यकता है। क्या आप यह नहीं सोचते कि यह एक जटिल प्रक्रिया होगी और इसमें समय भी अधिक लगेगा? क्या हम इस प्रक्रिया को संक्षिप्त बना सकते हैं? यह तभी संभव होगा, जब हम इसका योग निकालने की कोई विधि ज्ञात कर लें। आइए देखें।

हम गॉस (जिसके बारे में आप अध्याय 1 में पढ़ चुके हैं) को दी गई समस्या पर विचार करते हैं, जो उसे हल करने के लिए उस समय दी गई थी, जब वह केवल 10 वर्ष का था। उससे 1 से 100 तक के धन पूर्णांकों का योग ज्ञात करने को कहा गया। उसने तुरंत उत्तर दिया कि योग 5050 है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उसने ऐसा कैसे किया था? उसने इस प्रकार लिखा:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

फिर, उसने उल्टे क्रम संख्याओं को इस प्रकार लिखा:

$$S = 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$$

उपरोक्त को जोड़ने पर उसने प्राप्त किया:

$$\begin{aligned} 2S &= (100 + 1) + (99 + 2) + \dots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100) \\ &= 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \quad (100 \text{ बार}) \end{aligned}$$

अतः
$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050, \text{ अर्थात् योग} = 5050$$

अब, हम इसी तकनीक का उपयोग करते हुए, एक A.P. के प्रथम n पदों का योग ज्ञात करेंगे। मान लीजिए यह A.P. है :

$$a, a + d, a + 2d, \dots$$

इस A.P. का n वाँ पद $a + (n - 1)d$ है। माना S इस A.P. के प्रथम n पदों के योग को व्यक्त करता है। तब

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] \quad (1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$S = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \dots + (a + d) + a \quad (2)$$

अब, (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2S = \frac{[2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \dots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]}{n \text{ बार}}$$

या $2S = n [2a + (n - 1)d] \quad (\text{चूँकि इसमें } n \text{ पद हैं})$

या $S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$

अतः किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग S निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

हम इसे इस रूप में भी लिख सकते हैं

$$S = \frac{n}{2} [a + a + (n - 1)d]$$

$$\text{अर्थात्} \quad S = \frac{n}{2} (a + a_n) \quad (3)$$

अब, यदि किसी A.P. में केवल n ही पद हैं, तो a_n अंतिम पद l के बराबर होगा।
अतः (3) से हम देखते हैं कि

$$S = \frac{n}{2} (a + l) \quad (4)$$

परिणाम का यह रूप उस स्थिति में उपयोगी है, जब A.P. के प्रथम और अंतिम पद दिए हों तथा सार्व अंतर नहीं दिया गया हो।

अब हम उसी प्रश्न पर वापस आ जाते हैं, जो प्रारंभ में हमसे पूछा गया था। शकीला की पुत्री की गुल्लक में उसके पहले, दूसरे, तीसरे, ..., जन्मदिवसों पर डाली गई धनराशियाँ (₹ में) क्रमशः 100, 150, 200, 250, ... हैं।

यह एक A.P. है। हमें उसके 21वें जन्मदिवस तक एकत्रित हुई कुल धनराशि ज्ञात करनी है, अर्थात् हमें इस A.P. के प्रथम 21 पदों का योग ज्ञात करना है।

यहाँ $a = 100$, $d = 50$ और $n = 21$ है। सूत्र

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \text{ का प्रयोग करने पर,}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{21}{2} [2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2} [200 + 1000] \\ &= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600 \end{aligned}$$

अतः उसके 21वें जन्मदिवस तक एकत्रित हुई गुल्लक में धनराशि ₹ 12600 है।

क्या सूत्र के प्रयोग से प्रश्न हल करना सरल नहीं हो गया है?

किसी A.P. के n पदों के योग को व्यक्त करने के लिए, हम S के स्थान पर S_n का भी प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, हम A.P. के 20 पदों के योग को व्यक्त करने के लिए S_{20} का प्रयोग करते हैं। प्रथम n पदों के योग के सूत्र में, चार राशियाँ S , a , d और n संबद्ध हैं। यदि इनमें से कोई तीन राशियाँ ज्ञात हों, तो चौथी राशि ज्ञात की जा सकती है।

टिप्पणी : किसी A.P. का n वाँ पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग के अंतर के बराबर है। अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$ है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 : A.P. : 8, 3, -2, ... के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$ और $n = 22$ है।

हम जानते हैं कि

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

अतः
$$S = \frac{22}{2} [16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

इसलिए दी हुई A.P. के प्रथम 22 पदों का योग -979 है।

उदाहरण 12 : यदि किसी A.P. के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $S_{14} = 1050$, $n = 14$ और $a = 10$ है।

चूँकि
$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

इसलिए
$$1050 = \frac{14}{2} [20 + 13d] = 140 + 91d$$

अर्थात्
$$910 = 91d$$

या
$$d = 10$$

अतः
$$a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$$

अर्थात् 20वाँ पद 200 है।

उदाहरण 13 : A.P. : 24, 21, 18, ... के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो?

हल : यहाँ $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$ और $S_n = 78$ है। हमें n ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि
$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

अतः
$$78 = \frac{n}{2} [48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2} [51 - 3n]$$

$$\text{या } 3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$\text{या } n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$\text{या } (n - 4)(n - 13) = 0$$

$$\text{अतः } n = 4 \text{ या } 13$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं। अतः, पदों की वांछित संख्या या तो 4 है या 13 है।

टिप्पणी :

1. इस स्थिति में, प्रथम 4 पदों का योग = प्रथम 13 पदों का योग = 78 है।
2. ये दोनों उत्तर संभव हैं, क्योंकि 5वें से 13वें पदों तक का योग शून्य हो जाएगा। यह इसलिए है कि यहाँ a धनात्मक है और d ऋणात्मक है, जिससे कुछ पद धनात्मक और कुछ पद ऋणात्मक हो जाते हैं तथा परस्पर कट जाते हैं।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

- (i) प्रथम 1000 धन पूर्णांक (ii) प्रथम n धन पूर्णांक

हल :

(i) मान लीजिए $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ है।

A.P. के प्रथम n पदों के योग के सूत्र $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$S_{1000} = \frac{1000}{2} (1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

अतः, प्रथम 1000 धन पूर्णांकों का योग 500500 है।

(ii) मान लीजिए $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ है।

यहाँ $a = 1$ और अंतिम पद $l = n$ है।

$$\text{अतः } S_n = \frac{n(1+n)}{2} \text{ या } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

इस प्रकार, प्रथम n धन पूर्णांकों का योग सूत्र

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 15 : संख्याओं की उस सूची के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

हल :

$$\begin{aligned} \text{चूँकि} \quad & a_n = 3 + 2n \text{ है} \\ \text{इसलिए} \quad & a_1 = 3 + 2 = 5 \\ & a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7 \\ & a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9 \\ & \vdots \end{aligned}$$

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूची 5, 7, 9, 11, ... है।

यहाँ $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ इत्यादि हैं।

अतः इनसे एक A.P. बनती है, जिसका सार्व अंतर 2 है।

S_{24} ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है: $n = 24$, $a = 5$, $d = 2$

$$\text{अतः} \quad S_{24} = \frac{24}{2} [2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12 [10 + 46] = 672$$

इसलिए संख्याओं की दी हुई सूची के प्रथम 24 पदों का योग 672 है।

उदाहरण 16 : टी.वी. सेटों का निर्माता तीसरे वर्ष में 600 टी.वी. तथा 7वें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए:

- (i) प्रथम वर्ष में उत्पादन (ii) 10वें वर्ष में उत्पादन
(iii) प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादन

हल : (i) चूँकि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, इसलिए पहले, दूसरे, तीसरे, ... वर्षों में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्याएँ एक AP में होंगी। आइए n वें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या को a_n से व्यक्त करें।

$$\text{अतः} \quad a_3 = 600 \text{ और } a_7 = 700$$

$$\text{या} \quad a + 2d = 600$$

$$\text{और} \quad a + 6d = 700$$

इन्हें हल करने पर, हमें $d = 25$ और $a = 550$ प्राप्त होता है।

अतः प्रथम वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 550 है।

(ii) अब $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

अतः 10वें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 775 है।

(iii) साथ ही
$$S_7 = \frac{7}{2} [2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$

$$= \frac{7}{2} [1100 + 150] = 4375$$

अतः प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादित हुए सभी टी.वी. सेटों की संख्या 4375 है।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) 2, 7, 12, ..., 10 पदों तक

(ii) -37, -33, -29, ..., 12 पदों तक

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, ..., 100 पदों तक

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots$, 11 पदों तक

2. नीचे दिए हुए योगफलों को ज्ञात कीजिए :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \dots + 84$

(ii) $34 + 32 + 30 + \dots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \dots + (-230)$

3. एक A.P. में,

(i) $a = 5, d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है। n और S_n ज्ञात कीजिए।

(ii) $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और S_{13} ज्ञात कीजिए।

(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है। a और S_{12} ज्ञात कीजिए।

(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है। d और a_{10} ज्ञात कीजिए।

(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है। a और a_9 ज्ञात कीजिए।

(vi) $a = 2, d = 8$ और $S_n = 90$ दिया है। n और a_n ज्ञात कीजिए।

(vii) $a = 8, a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।

(viii) $a_n = 4, d = 2$ और $S_n = -14$ दिया है। n और a ज्ञात कीजिए।

(ix) $a = 3, n = 8$ और $S = 192$ दिया है। d ज्ञात कीजिए।

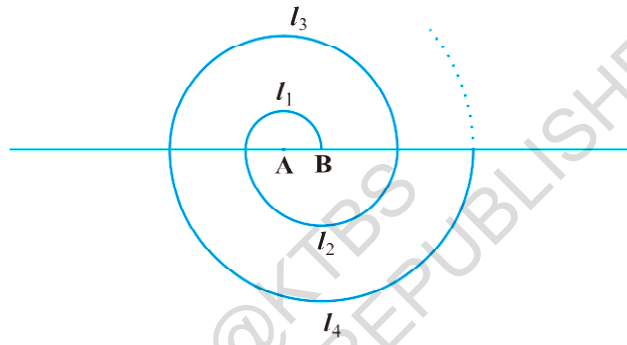
(x) $l = 28, S = 144$ और कुल 9 पद हैं। a ज्ञात कीजिए।

4. 636 योग प्राप्त करने के लिए, A.P. : 9, 17, 25, ... के कितने पद लेने चाहिए?

5. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।
6. किसी A.P. के प्रथम और अंतिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है?
7. उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।
8. उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।
9. यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।
10. दर्शाइए कि $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ से एक A.P. बनती है, यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित है :
 (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$
 साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।
11. यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात् S_1) क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार, तीसरे, 10वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।
12. ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।
13. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।
14. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
15. निर्माण कार्य से संबंधित किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलंब से पूरा करने के लिए, जुर्माना लगाने का प्रावधान इस प्रकार है : पहले दिन के लिए ₹ 200, दूसरे दिन के लिए ₹ 250, तीसरे दिन के लिए ₹ 300 इत्यादि, अर्थात् प्रत्येक उतरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्माने से ₹ 50 अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी, यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलंब कर देता है?
16. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹ 700 की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से ₹ 20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।
17. एक स्कूल के विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए स्कूल के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक अनुभाग अपनी कक्षा की संख्या के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरणार्थ, कक्षा I का एक अनुभाग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा

II का एक अनुभाग 2 पेड़ लगाएगा, कक्षा III का एक अनुभाग 3 पेड़ लगाएगा, इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं। इस स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

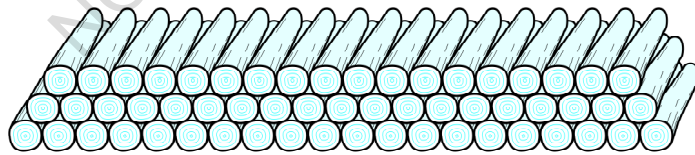
18. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी-बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, ... वाले उतरोत्तर अर्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल(spiral) बनाया गया है, जैसाकि आकृति 5.4 में दर्शाया गया है। तेरह क्रमागत अर्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई क्या है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए!)



आकृति 5.4

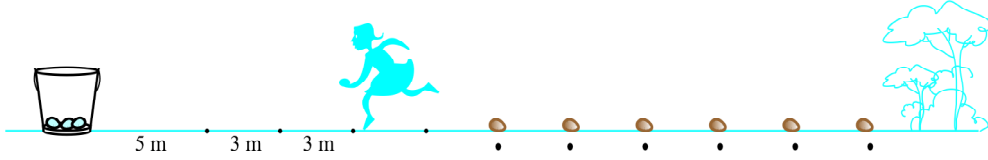
[संकेत : क्रमशः केंद्रों A, B, A, B, ... वाले अर्धवृत्तों की लंबाइयाँ l_1, l_2, l_3, l_4 हैं।]

19. 200 लट्ठों (logs) को ढेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है : सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति 5.5)। ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?



आकृति 5.5

20. एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से 5m की दूरी पर है, तथा अन्य आलूओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3m की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं (देखिए आकृति 5.6)।



आकृति 5.6

प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस आकर दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

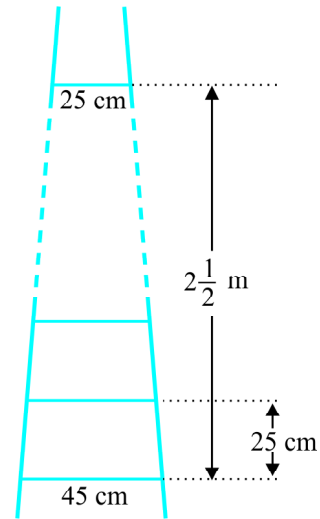
[संकेत : पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$ है।]

प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक)*

1. A.P. : 121, 117, 113, ..., का कौन-सा पद सबसे पहला ऋणात्मक पद होगा?
[संकेत : $a_n < 0$ के लिए n ज्ञात कीजिए।]
2. किसी A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है और उनका गुणनफल 8 है। इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

3. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 cm की दूरी पर हैं (देखिए आकृति 5.7)। डंडों की लंबाई एक समान रूप से घटती जाती हैं तथा सबसे निचले डंडे की लंबाई 45 cm है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लंबाई 25 cm है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी $2\frac{1}{2}$ m है, तो डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की कितनी लंबाई की आवश्यकता होगी?

[संकेत : डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1$ है।]



आकृति 5.7

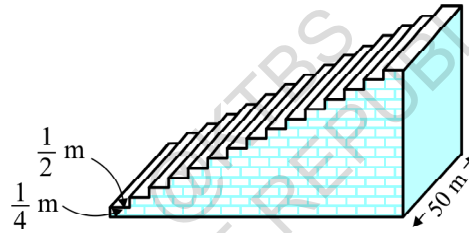
* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

4. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप से संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइए कि x का एक ऐसा मान है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

[संकेत : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ है।]

5. एक फुटबल के मैदान में एक छोटा चबूतरा है जिसमें 15 सीढ़ियाँ बनी हुई हैं। इन सीढ़ियों में से प्रत्येक की लंबाई 50 m है और वह ठोस कंक्रीट (concrete) की बनी है। प्रत्येक सीढ़ी में $\frac{1}{4}$ m की चढ़ाई है और $\frac{1}{2}$ m का फैलाव (चौड़ाई) है। (देखिए आकृति 5.8)। इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन परिकलित कीजिए।

[संकेत : पहली सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 \text{ m}^3$ है।]



आकृति 5.8

5.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. एक समांतर श्रेढ़ी संख्याओं की ऐसी सूची होती है, जिसमें प्रत्येक पद (प्रथम पद के अतिरिक्त) अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या d इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहलाती है।

एक A.P. का व्यापक रूप $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ है।

2. संख्याओं की एक दी हुई सूची A.P. होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ से एक ही (समान) मान प्राप्त हो, अर्थात् k के विभिन्न मानों के लिए $a_{k+1} - a_k$ एक ही हो।
3. प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाली A.P. का n वाँ पद (या व्यापक पद) a_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है:

$$a_n = a + (n - 1)d$$

4. किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग S सूत्र

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \text{ से प्राप्त होता है।}$$

5. यदि एक परिमित A.P. का अंतिम पद (मान लीजिए n वाँ पद) l है, तो इस A.P. के सभी पदों का योग S सूत्र

$$S = \frac{n}{2}(a + l) \text{ से प्राप्त होता है।}$$

पाठकों के लिए विशेष

यदि a, b, c , A.P. में हैं तब $b = \frac{a+c}{2}$ और b, a तथा c का समांतर माध्य कहलाता है।



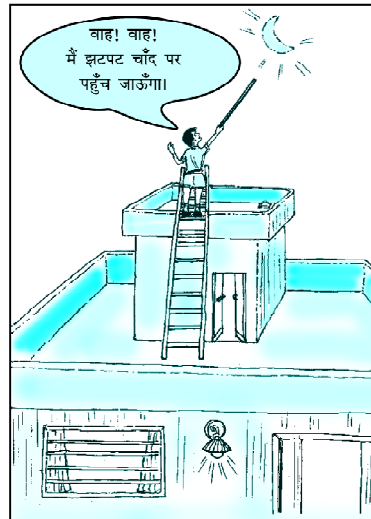
1063CH06

त्रिभुज

6

6.1 भूमिका

आप अपनी पिछली कक्षाओं से, त्रिभुजों और उनके अनेक गुणधर्मों से भली भाँति परिचित हैं। कक्षा IX में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन कर चुके हैं। याद कीजिए कि दो त्रिभुज सर्वांगसम तब कहे जाते हैं जब उनके समान आकार (shape) तथा समान आमाप (size) हों। इस अध्याय में, हम ऐसी आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनके आकार समान हों परंतु उनके आमाप का समान होना आवश्यक नहीं हो। दो आकृतियाँ जिनके समान आकार हों (परंतु समान आमाप होना आवश्यक न हो) *समरूप आकृतियाँ* (similar figures) कहलाती हैं। विशेष रूप से, हम समरूप त्रिभुजों की चर्चा करेंगे तथा इस जानकारी को पहले पढ़ी गई पाइथागोरस प्रमेय की एक सरल उपपत्ति देने में प्रयोग करेंगे।

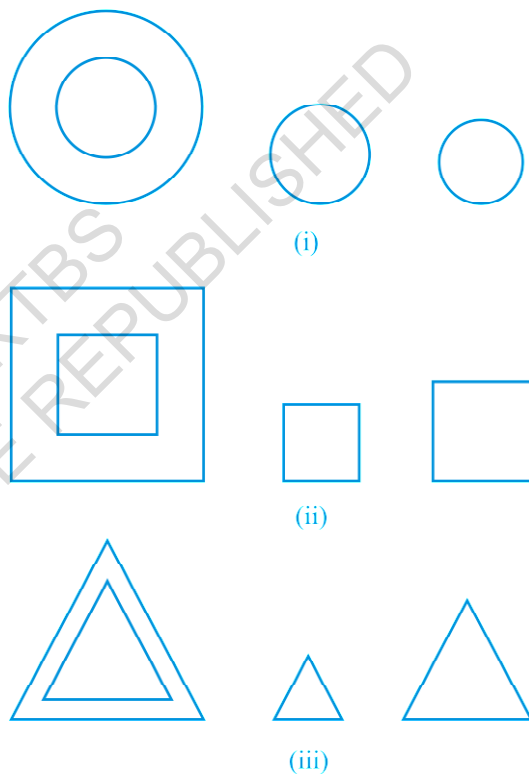


क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि पर्वतों (जैसे माउंट एवरेस्ट) की ऊँचाईयाँ अथवा कुछ दूरस्थ वस्तुओं (जैसे चन्द्रमा) की दूरियाँ किस प्रकार ज्ञात की गई हैं? क्या आप सोचते हैं कि इन्हें एक मापने वाले फीते से सीधा (प्रत्यक्ष) मापा गया है? वास्तव में, इन सभी ऊँचाई और दूरियों को अप्रत्यक्ष मापन (indirect measurement) की अवधारणा का प्रयोग करते हुए ज्ञात किया गया है, जो आकृतियों की समरूपता के सिद्धांत पर आधारित है (देखिए उदाहरण 7, प्रश्नावली 6.3 का प्रश्न 15 तथा साथ ही इस पुस्तक के अध्याय 8 और 9)।

6.2 समरूप आकृतियाँ

कक्षा IX में, आपने देखा था कि समान (एक ही) त्रिज्या वाले सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं, समान लंबाई की भुजा वाले सभी वर्ग सर्वांगसम होते हैं तथा समान लंबाई की भुजा वाले सभी समबाहु त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

अब किन्हीं दो (या अधिक) वृत्तों पर विचार कीजिए [देखिए आकृति 6.1 (i)]। क्या ये सर्वांगसम हैं? चूँकि इनमें से सभी की त्रिज्या समान नहीं है, इसलिए ये परस्पर सर्वांगसम नहीं हैं। ध्यान दीजिए कि इनमें कुछ सर्वांगसम हैं और कुछ सर्वांगसम नहीं हैं, परंतु इनमें से सभी के आकार समान हैं। अतः, ये सभी वे आकृतियाँ हैं जिन्हें हम समरूप (similar) कहते हैं। दो समरूप आकृतियों के आकार समान होते हैं परंतु इनके आमाप समान होने आवश्यक नहीं हैं। अतः, सभी वृत्त समरूप होते हैं। दो (या अधिक) वर्गों के बारे में अथवा दो (या अधिक) समबाहु त्रिभुजों के बारे में आप क्या सोचते हैं [देखिए आकृति 6.1 (ii) और (iii)]? सभी वृत्तों की तरह ही, यहाँ सभी वर्ग समरूप हैं तथा सभी समबाहु त्रिभुज समरूप हैं।

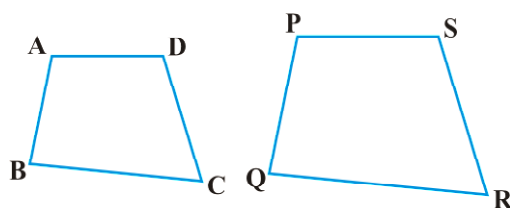


आकृति 6.1

उपरोक्त चर्चा से, हम यह भी कह सकते हैं कि सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परंतु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

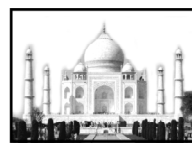
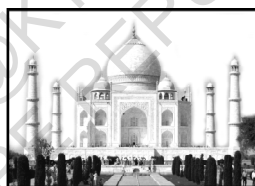
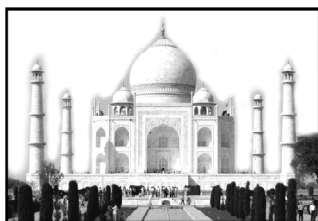
क्या एक वृत्त और एक वर्ग समरूप हो सकते हैं? क्या एक त्रिभुज और एक वर्ग समरूप हो सकते हैं? इन आकृतियों को देखने मात्र से ही आप प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं (देखिए आकृति 6.1)। स्पष्ट शब्दों में, ये आकृतियाँ समरूप नहीं हैं। (क्यों?)

आप दो चतुर्भुजों ABCD और PQRS के बारे में क्या कह सकते हैं (देखिए आकृति 6.2)? क्या ये समरूप हैं? ये आकृतियाँ समरूप-सी प्रतीत हो रही हैं, परंतु हम इसके बारे में निश्चित रूप से



आकृति 6.2

कुछ नहीं कह सकते। इसलिए, यह आवश्यक हो जाता है कि हम आकृतियों की समरूपता के लिए कोई परिभाषा ज्ञात करें तथा इस परिभाषा पर आधारित यह सुनिश्चित करने के लिए कि दो दी हुई आकृतियाँ समरूप हैं या नहीं, कुछ नियम प्राप्त करें। इसके लिए, आइए आकृति 6.3 में चित्रों को देखें:



आकृति 6.3

आप तुरंत यह कहेंगे कि ये एक ही स्मारक (ताजमहल) के चित्र हैं, परंतु ये भिन्न-भिन्न आमापों (sizes) के हैं। क्या आप यह कहेंगे कि ये चित्र समरूप हैं? हाँ, ये हैं। आप एक ही व्यक्ति के एक ही आमाप वाले उन दो चित्रों के बारे में क्या कह सकते हैं, जिनमें से एक उसकी 10 वर्ष की आयु का है तथा दूसरा उसकी 40 वर्ष की आयु का है? क्या ये दोनों चित्र समरूप हैं? ये चित्र समान आमाप के हैं, परंतु निश्चित रूप से ये समान आकार के नहीं हैं। अतः, ये समरूप नहीं हैं।

जब कोई फ़ोटोग्राफ़र एक ही नेगेटिव से विभिन्न मापों के फ़ोटो प्रिंट निकालती है, तो वह क्या करती है? आपने स्टैंप साइज़, पासपोर्ट साइज़ एवं पोस्ट कार्ड साइज़ फ़ोटो (या चित्रों) के बारे में अवश्य सुना होगा। वह सामान्य रूप से एक छोटे आमाप (साइज़) की फ़िल्म (film), मान लीजिए जो 35 mm आमाप वाली फ़िल्म है, पर फ़ोटो खींचती है और फिर उसे एक बड़े आमाप, जैसे 45 mm (या 55 mm) आमाप, वाली फ़ोटो के रूप में आवर्धित

करती है। इस प्रकार, यदि हम छोटे चित्र के किसी एक रेखाखंड को लें, तो बड़े चित्र में इसका संगत रेखाखंड, लंबाई में पहले रेखाखंड का $\frac{45}{35}$ (या $\frac{55}{35}$) गुना होगा। वास्तव में इसका अर्थ यह है कि छोटे चित्र का प्रत्येक रेखाखंड 35:45 (या 35:55) के अनुपात में आवर्धित हो (बढ़) गया है। इसी को इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि बड़े चित्र का प्रत्येक रेखाखंड 45:35 (या 55:35) के अनुपात में घट (कम हो) गया है। साथ ही, यदि आप विभिन्न आमापों के दो चित्रों में संगत रेखाखंडों के किसी भी युग्म के बीच बने झुकावों [अथवा कोणों] को लें, तो आप देखेंगे कि ये झुकाव (या कोण) सदैव बराबर होंगे। यही दो आकृतियों तथा विशेषकर दो बहुभुजों की समरूपता का सार है। हम कहते हैं कि:

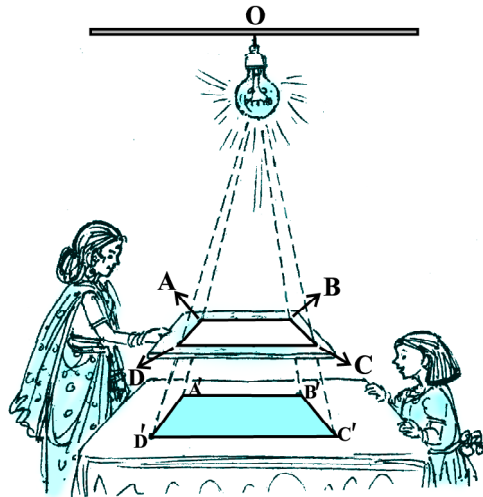
भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा (ii) इनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों।

ध्यान दीजिए कि बहुभुजों के लिए संगत भुजाओं के इस एक ही अनुपात को स्केल गुणक (scale factor) [अथवा प्रतिनिधित्व भिन्न (Representative Fraction)] कहा जाता है। आपने यह अवश्य सुना होगा कि विश्व मानचित्र [अर्थात् ग्लोबल मानचित्र] तथा भवनों के निर्माण के लिए बनाए जाने वाली रूप रेखा एक उपयुक्त स्केल गुणक तथा कुछ परिपाटियों को ध्यान में रखकर बनाए जाते हैं।

आकृतियों की समरूपता को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 1 : अपनी कक्षा के कमरे की छत के किसी बिंदु O पर प्रकाश युक्त बल्ब लगाइए तथा उसके ठीक नीचे एक मेज रखिए। आइए एक समतल कार्डबोर्ड में से एक बहुभुज, मान लीजिए चतुर्भुज ABCD, काट लें तथा इस कार्डबोर्ड को भूमि के समांतर मेज और जलते हुए बल्ब के बीच में रखें। तब, मेज पर ABCD की एक छाया (shadow) पड़ेगी। इस छाया की बाहरी रूपरेखा को A'B'C'D' से चिह्नित कीजिए (देखिए आकृति 6.4)।

ध्यान दीजिए कि चतुर्भुज A'B'C'D' चतुर्भुज



आकृति 6.4

ABCD का एक आकार परिवर्धन (या आवर्धन) है। यह प्रकाश के इस गुणधर्म के कारण है कि प्रकाश सीधी रेखा में चलती है। आप यह भी देख सकते हैं कि A' किरण OA पर स्थित है, B' किरण OB पर स्थित है, C' किरण OC पर स्थित है तथा D' किरण OD पर स्थित है। इस प्रकार, चतुर्भुज A'B'C'D' और ABCD समान आकार के हैं; परंतु इनके माप भिन्न-भिन्न हैं।

अतः चतुर्भुज A'B'C'D' चतुर्भुज ABCD के समरूप है। हम यह भी कह सकते हैं कि चतुर्भुज ABCD चतुर्भुज A'B'C'D' के समरूप है।

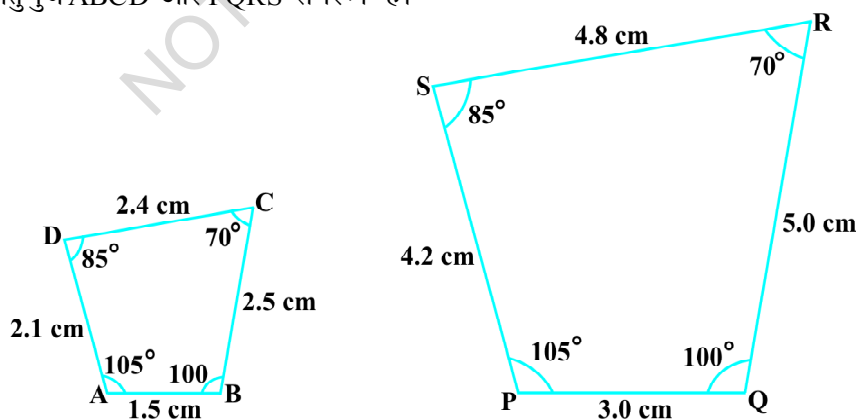
यहाँ, आप यह भी देख सकते हैं कि शीर्ष A' शीर्ष A के संगत है, शीर्ष B' शीर्ष B के संगत है, शीर्ष C' शीर्ष C के संगत है तथा शीर्ष D' शीर्ष D के संगत है। सांकेतिक रूप से इन संगतताओं (correspondences) को $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ और $D' \leftrightarrow D$ से निरूपित किया जाता है। दोनों चतुर्भुजों के कोणों और भुजाओं को वास्तविक रूप से माप कर, आप इसका सत्यापन कर सकते हैं कि

$$(i) \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D' \text{ और}$$

$$(ii) \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}.$$

इससे पुनः यह बात स्पष्ट होती है कि भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके सभी संगत कोण बराबर हों तथा (ii) उनकी सभी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात (समानुपात) में हों।

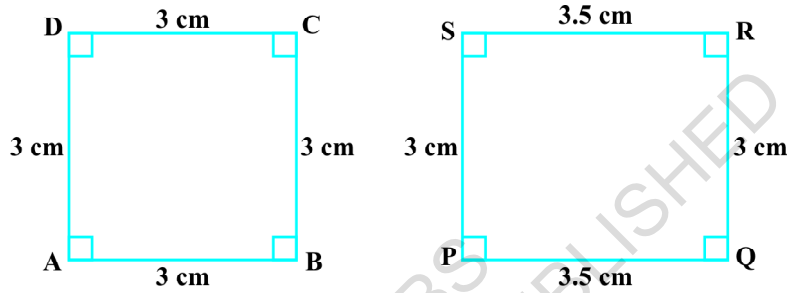
उपरोक्त के आधार पर, आप सरलता से यह कह सकते हैं कि आकृति 6.5 में दिए गए चतुर्भुज ABCD और PQRS समरूप हैं।



आकृति 6.5

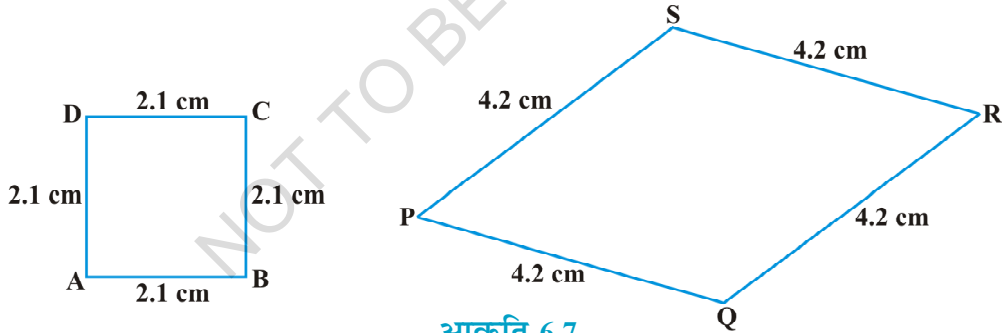
टिप्पणी : आप इसका सत्यापन कर सकते हैं कि यदि एक बहुभुज किसी अन्य बहुभुज के समरूप हो और यह दूसरा बहुभुज एक तीसरे बहुभुज के समरूप हो, तो पहला बहुभुज तीसरे बहुभुज के समरूप होगा।

आप यह देख सकते हैं कि आकृति 6.6 के दो चतुर्भुजों (एक वर्ग और एक आयत) में, संगत कोण बराबर हैं, परंतु इनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में नहीं हैं। अतः, ये दोनों चतुर्भुज समरूप नहीं हैं।



आकृति 6.6

इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि आकृति 6.7 के दो चतुर्भुजों (एक वर्ग और एक समचतुर्भुज) में, संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हैं, परंतु इनके संगत कोण बराबर नहीं हैं। पुनः, दोनों बहुभुज (चतुर्भुज) समरूप नहीं हैं।



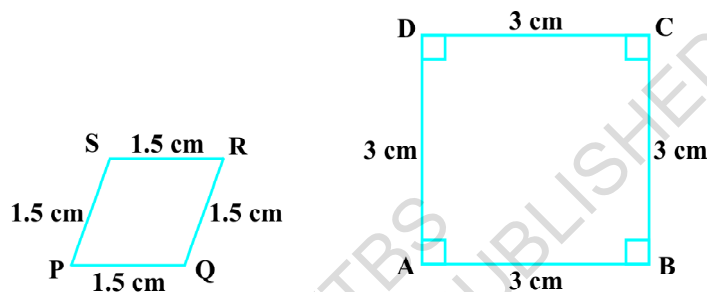
आकृति 6.7

इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि दो बहुभुजों की समरूपता के प्रतिबंधों (i) और (ii) में से किसी एक का ही संतुष्ट होना उनकी समरूपता के लिए पर्याप्त नहीं है।

प्रश्नावली 6.1

- कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए:
 - सभी वृत्त ————— होते हैं। (सर्वांगसम, समरूप)

- (ii) सभी वर्ग ————— होते हैं। (समरूप, सर्वांगसम)
 (iii) सभी ————— त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)
 (iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण ————— हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ ————— हों। (बराबर, समानुपाती)
2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए:
- (i) समरूप आकृतियाँ (ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।
3. बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं:



आकृति 6.8

6.3 त्रिभुजों की समरूपता

आप दो त्रिभुजों की समरूपता के बारे में क्या कह सकते हैं?

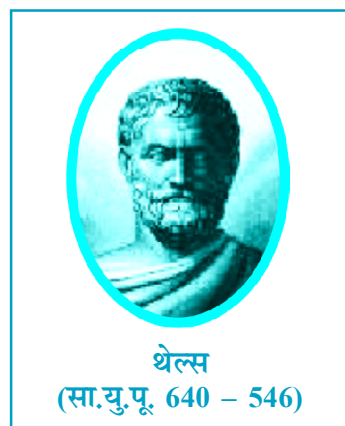
आपको याद होगा कि त्रिभुज भी एक बहुभुज ही है। इसलिए, हम त्रिभुजों की समरूपता के लिए भी वही प्रतिबंध लिख सकते हैं, जो बहुभुजों की समरूपता के लिए लिखे थे। अर्थात्

दो त्रिभुज समरूप होते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा

(ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों।

ध्यान दीजिए कि यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो वे समानकोणिक त्रिभुज (equiangular triangles) कहलाते हैं। एक प्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ थेल्स (Thales) ने दो समानकोणिक त्रिभुजों से संबंधित एक महत्वपूर्ण तथ्य प्रतिपादित किया, जो नीचे दिया जा रहा है:

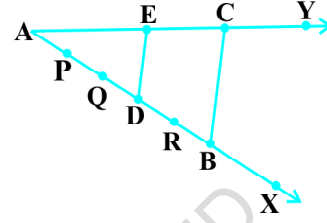


दो समानकोणिक त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान रहता है।

ऐसा विश्वास किया जाता है कि इसके लिए उन्होंने एक परिणाम का प्रयोग किया जिसे आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (आजकल थेल्स प्रमेय) कहा जाता है।

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (Basic Proportionality Theorem) को समझने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 2 : कोई कोण XAY खींचिए तथा उसकी एक भुजा AX पर कुछ बिंदु (मान लीजिए पाँच बिंदु) P, Q, D, R और B इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AP = PQ = QD = DR = RB$ हो।



आकृति 6.9

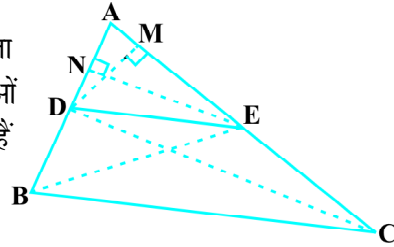
अब, बिंदु B से होती हुई कोई एक रेखा खींचिए, जो भुजा AY को बिंदु C पर काटे (देखिए आकृति 6.9)।

साथ ही, बिंदु D से होकर BC के समांतर एक रेखा खींचिए, जो AC को E पर काटे। क्या आप अपनी रचनाओं से यह देखते हैं कि $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ हैं? AE और EC मापिए। $\frac{AE}{EC}$ क्या है? देखिए $\frac{AE}{EC}$ भी $\frac{3}{2}$ के बराबर है। इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि त्रिभुज ABC में,

$DE \parallel BC$ है तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ है। क्या यह संयोगवश है? नहीं, यह निम्नलिखित प्रमेय के कारण है (जिसे आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय कहा जाता है):

प्रमेय 6.1 : यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

उपपत्ति : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है, जिसमें भुजा BC के समांतर खींची गई एक रेखा अन्य दो भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती है (देखिए आकृति 6.10)।



आकृति 6.10

हमें सिद्ध करना है कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

आइए B और E तथा C और D को मिलाएँ और फिर $DM \perp AC$ एवं $EN \perp AB$ खींचें।

अब, ΔADE का क्षेत्रफल $(= \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}) = \frac{1}{2} AD \times EN$

कक्षा IX से याद कीजिए कि ΔADE के क्षेत्रफल को $\text{ar}(\Delta ADE)$ से व्यक्त किया जाता है।

$$\text{अतः} \quad \text{ar}(\Delta ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$$

$$\text{इसी प्रकार} \quad \text{ar}(\Delta BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN,$$

$$\text{ar}(\Delta ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM \quad \text{तथा} \quad \text{ar}(\Delta DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$$

$$\text{अतः} \quad \frac{\text{ar}(\Delta ADE)}{\text{ar}(\Delta BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad (1)$$

$$\text{तथा} \quad \frac{\text{ar}(\Delta ADE)}{\text{ar}(\Delta DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

ध्यान दीजिए कि ΔBDE और ΔDEC एक ही आधार DE तथा समांतर रेखाओं BC और DE के बीच बने दो त्रिभुज हैं।

$$\text{अतः} \quad \text{ar}(\Delta BDE) = \text{ar}(\Delta DEC) \quad (3)$$

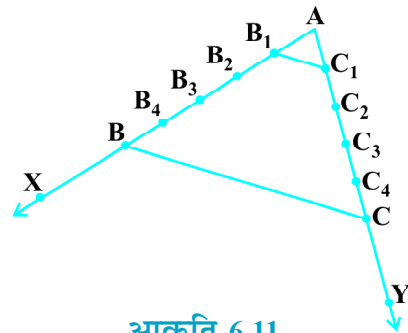
इसलिए (1), (2) और (3), से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

क्या इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है (विलोम के अर्थ के लिए परिशिष्ट 1 देखिए)? इसकी जाँच करने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 3 : अपनी अभ्यासपुस्तिका में एक कोण XAY खींचिए तथा किरण AX पर बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 और B इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ हो।

इसी प्रकार, किरण AY , पर बिंदु C_1, C_2, C_3, C_4 और C इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ हो। फिर B_1C_1 और BC को मिलाइए (देखिए आकृति 6.11)।



आकृति 6.11

ध्यान दीजिए कि $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (प्रत्येक $\frac{1}{4}$ के बराबर है)

आप यह भी देख सकते हैं कि रेखाएँ B_1C_1 और BC परस्पर समांतर हैं, अर्थात्

$$B_1C_1 \parallel BC \quad (1)$$

इसी प्रकार, क्रमशः B_2C_2 , B_3C_3 और B_4C_4 को मिलाकर आप देख सकते हैं कि

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3} \right) \text{ और } B_2C_2 \parallel BC \quad (2)$$

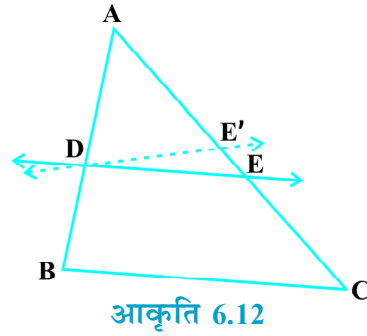
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2} \right) \text{ और } B_3C_3 \parallel BC, \quad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1} \right) \text{ और } B_4C_4 \parallel BC \quad (4)$$

(1), (2), (3) और (4) से, यह देखा जा सकता है कि यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

आप किसी अन्य माप का कोण XAY खींचकर तथा भुजाओं AX और AY पर कितने भी समान भाग अंकित कर, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार, आप एक ही परिणाम पर पहुँचेंगे। इस प्रकार, हम निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त करते हैं, जो प्रमेय 6.1 का विलोम है:

प्रमेय 6.2 : यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।



इस प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है, यदि हम एक रेखा DE इस प्रकार लें कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

हो तथा DE भुजा BC के समांतर न हो (देखिए आकृति 6.12)।

अब यदि DE भुजा BC के समांतर नहीं है, तो BC के समांतर एक रेखा DE' खींचिए।

अतः $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (क्यों?)

इसलिए $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (क्यों?)

उपरोक्त के दोनों पक्षों में 1 जोड़ कर, आप यह देख सकते हैं कि E और E' को अवश्य ही संपाती होना चाहिए (क्यों?)। उपरोक्त प्रमेयों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि कोई रेखा एक $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा भुजा BC के समांतर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा (देखिए आकृति 6.13)।

हल :

$$DE \parallel BC$$

(दिया है)

अतः

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(प्रमेय 6.1)

अर्थात्

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

या

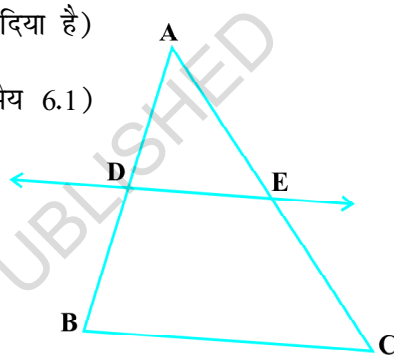
$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

या

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

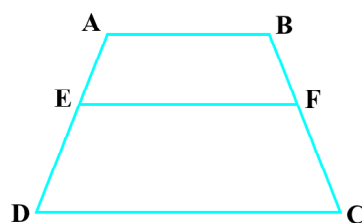
अतः

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



आकृति 6.13

उदाहरण 2 : ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ है। असमांतर भुजाओं AD और BC पर क्रमशः बिंदु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा AB के समांतर है (देखिए आकृति 6.14)। दर्शाइए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ है।

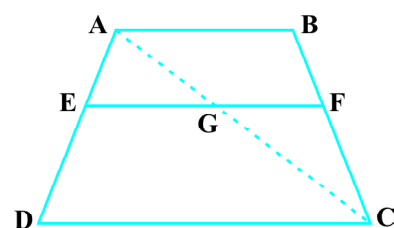


आकृति 6.14

हल : आइए A और C को मिलाएँ जो EF को G पर प्रतिच्छेद करे (देखिए आकृति 6.15)।

$AB \parallel DC$ और $EF \parallel AB$ (दिया है)

इसलिए $EF \parallel DC$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं)



आकृति 6.15

अब ΔADC में,

$$EG \parallel DC \quad (\text{क्योंकि } EF \parallel DC)$$

$$\text{अतः } \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} \quad (\text{प्रमेय 6.1}) \quad (1)$$

इसी प्रकार, ΔCAB में

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

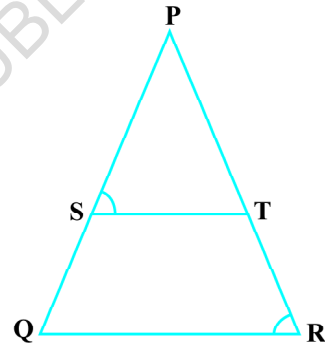
$$\text{अर्थात्} \quad \frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

अतः (1) और (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

उदाहरण 3 : आकृति 6.16 में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है। सिद्ध कीजिए कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : यह दिया है कि, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$



आकृति 6.16

$$\text{अतः} \quad ST \parallel QR \quad (\text{प्रमेय 6.2})$$

$$\text{इसलिए} \quad \angle PST = \angle PQR \quad (\text{संगत कोण}) \quad (1)$$

साथ ही यह दिया है कि

$$\angle PST = \angle PRQ \quad (2)$$

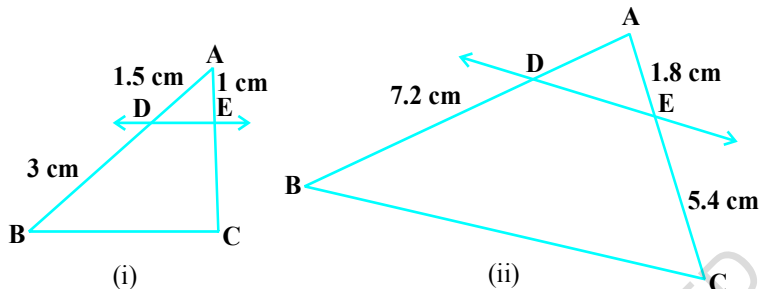
$$\text{अतः} \quad \angle PRQ = \angle PQR \quad [(1) \text{ और } (2) \text{ से}]$$

$$\text{इसलिए} \quad PQ = PR \quad (\text{समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ})$$

अर्थात् ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.17 (i) और (ii) में, $DE \parallel BC$ है। (i) में EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए:



आकृति 6.17

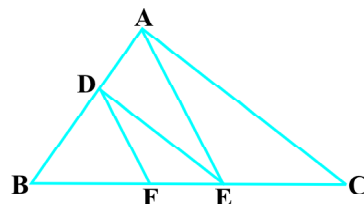
2. किसी $\triangle PQR$ की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिंदु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है:
- (i) $PE = 3.9 \text{ cm}$, $EQ = 3 \text{ cm}$, $PF = 3.6 \text{ cm}$ और $FR = 2.4 \text{ cm}$
 - (ii) $PE = 4 \text{ cm}$, $QE = 4.5 \text{ cm}$, $PF = 8 \text{ cm}$ और $RF = 9 \text{ cm}$
 - (iii) $PQ = 1.28 \text{ cm}$, $PR = 2.56 \text{ cm}$, $PE = 0.18 \text{ cm}$ और $PF = 0.36 \text{ cm}$

आकृति 6.18

3. आकृति 6.18 में यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो

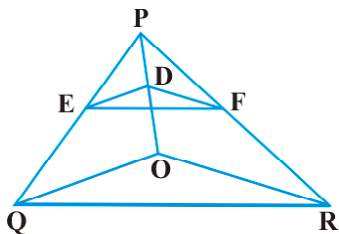
सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।

4. आकृति 6.19 में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।

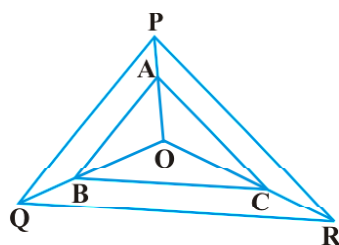


आकृति 6.19

5. आकृति 6.20 में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।
6. आकृति 6.21 में क्रमशः OP , OQ और OR पर स्थित बिंदु A , B और C इस प्रकार हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।



आकृति 6.20



आकृति 6.21

7. प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)
8. प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है। (याद कीजिए कि आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं।)
9. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।
10. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है।

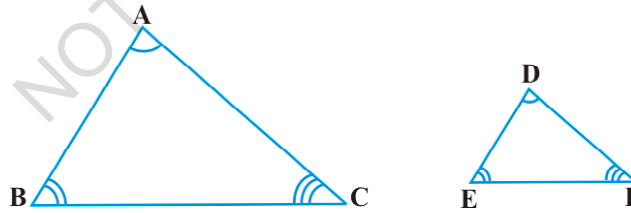
6.4 त्रिभुजों की समरूपता के लिए कसौटियाँ

पिछले अनुच्छेद में हमने कहा था कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती हों)। अर्थात्

यदि $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में,

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ है तथा

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ है तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (देखिए आकृति 6.22)।



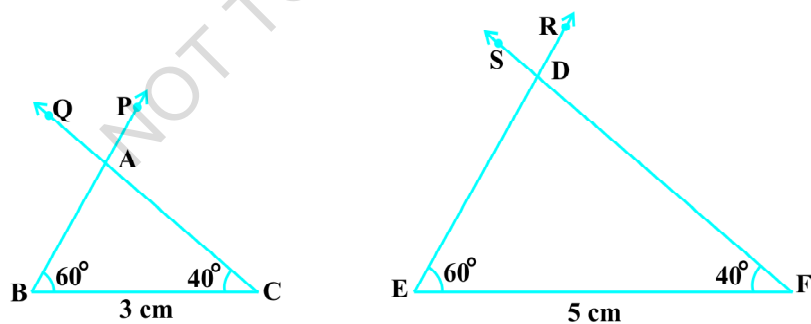
आकृति 6.22

यहाँ आप देख सकते हैं कि A, D के संगत है; B, E के संगत है तथा C, F के संगत है। सांकेतिक रूप से, हम इन त्रिभुजों की समरूपता को ' $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ' लिखते हैं तथा 'त्रिभुज ABC समरूप है त्रिभुज DEF के' पढ़ते हैं। संकेत ' $\sim$ ' 'समरूप' को प्रकट करता है। याद कीजिए कि कक्षा IX में आपने 'सर्वांगसम' के लिए संकेत ' $\cong$ ' का प्रयोग किया था।

इस बात पर अवश्य ध्यान देना चाहिए कि जैसा त्रिभुजों की सर्वांगसमता की स्थिति में किया गया था त्रिभुजों की समरूपता को भी सांकेतिक रूप से व्यक्त करने के लिए, उनके शीर्षों की संगतताओं को सही क्रम में लिखा जाना चाहिए। उदाहरणार्थ, आकृति 6.22 के त्रिभुजों ABC और DEF के लिए, हम $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ अथवा $\triangle ABC \sim \triangle FED$ नहीं लिख सकते। परंतु हम $\triangle BAC \sim \triangle EDF$ लिख सकते हैं।

अब एक प्रश्न यह उठता है: दो त्रिभुजों, मान लीजिए ABC और DEF की समरूपता की जाँच के लिए क्या हम सदैव उनके संगत कोणों के सभी युग्मों की समानता ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) तथा उनकी संगत भुजाओं के सभी युग्मों के अनुपातों की समानता ($\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$) पर विचार करते हैं? आइए इसकी जाँच करें। आपको याद होगा कि कक्षा IX में, आपने दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ ऐसी कसौटियाँ (criteria) प्राप्त की थीं जिनमें दोनों त्रिभुजों के संगत भागों (या अवयवों) के केवल तीन युग्म ही निहित थे। यहाँ भी, आइए हम दो त्रिभुजों की समरूपता के लिए, कुछ ऐसी कसौटियाँ प्राप्त करने का प्रयत्न करें, जिनमें इन दोनों त्रिभुजों के संगत भागों के सभी छः युग्मों के स्थान पर, इन संगत भागों के कम युग्मों के बीच संबंध ही निहित हों। इसके लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 4 : भिन्न-भिन्न लंबाइयों, मान लीजिए 3 cm और 5 cm वाले क्रमशः दो रेखाखंड BC और EF खींचिए। फिर बिंदुओं B और C पर क्रमशः $\angle PBC$ और $\angle QCB$ किन्हीं दो मापों, मान लीजिए 60° और 40° , के खींचिए। साथ ही, बिंदुओं E और F पर क्रमशः $\angle REF = 60^\circ$ और $\angle SFE = 40^\circ$ खींचिए (देखिए आकृति 6.23)।



आकृति 6.23

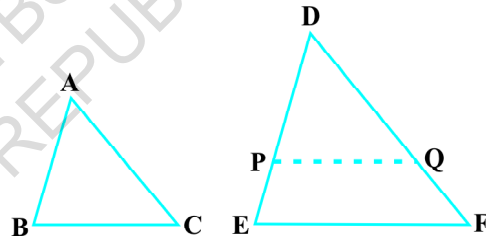
मान लीजिए किरण BP और CQ परस्पर बिंदु A पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा किरण ER और FS परस्पर बिंदु D पर प्रतिच्छेद करती हैं। इन दोनों त्रिभुजों ABC और DEF में, आप देख सकते हैं कि $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और $\angle A = \angle D$ है। अर्थात् इन त्रिभुजों के संगत कोण बराबर

हैं। इनकी संगत भुजाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? ध्यान दीजिए कि $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ है। $\frac{AB}{DE}$ और $\frac{CA}{FD}$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? AB, DE, CA और FD को मापने पर, आप पाएँगे कि $\frac{AB}{DE}$ और $\frac{CA}{FD}$ भी 0.6 के बराबर है (अथवा लगभग 0.6 के बराबर हैं, यदि मापन में कोई त्रुटि है)। इस प्रकार, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ है। आप समान संगत कोण वाले त्रिभुजों के अनेक युग्म खींचकर इस क्रियाकलाप को दुहरा सकते हैं। प्रत्येक बार, आप यह पाएँगे कि उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हैं। यह क्रियाकलाप हमें दो त्रिभुजों की समरूपता की निम्नलिखित कसौटी की ओर अग्रसित करता है:

प्रमेय 6.3 : यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसीलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपरोक्त कसौटी को दो त्रिभुजों की समरूपता की AAA (कोण-कोण-कोण) कसौटी कहा जाता है।

इस प्रमेय को दो ऐसे त्रिभुज ABC और DEF लेकर, जिनमें $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ हो, सिद्ध किया जा सकता है (देखिए आकृति 6.24)।



आकृति 6.24

DP = AB और DQ = AC काटिए तथा P और Q को मिलाइए।

अतः $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$ (क्यों?)

इससे $\angle B = \angle P = \angle E$ और $PQ \parallel EF$ प्राप्त होता है (कैसे?)

अतः $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (क्यों?)

अर्थात् $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (क्यों?)

इसी प्रकार, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ और इसीलिए $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

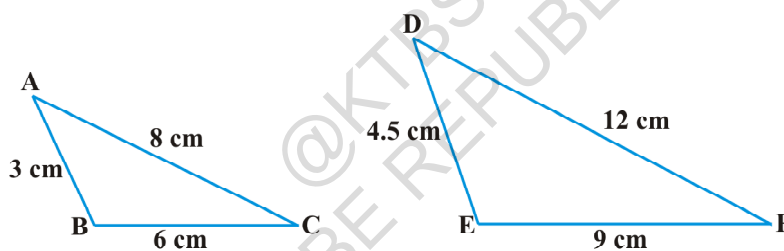
टिप्पणी : यदि एक त्रिभुज के दो कोण किसी अन्य त्रिभुज के दो कोणों के क्रमशः बराबर हों, तो त्रिभुज के कोण योग गुणधर्म के कारण, इनके तीसरे कोण भी बराबर होंगे। इसीलिए, AAA समरूपता कसौटी को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपरोक्त को दो त्रिभुजों की समरूपता की AA कसौटी कहा जाता है।

ऊपर आपने देखा है कि यदि एक त्रिभुज के तीनों कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती (एक ही अनुपात में) होती हैं। इस कथन के विलोम के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या यह विलोम सत्य है? दूसरे शब्दों में, यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों, तो क्या यह सत्य है कि इन त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं? आइए, एक क्रियाकलाप द्वारा जाँच करें।

क्रियाकलाप 5 : दो त्रिभुज ABC और DEF इस प्रकार खींचिए कि $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $CA = 8 \text{ cm}$, $DE = 4.5 \text{ cm}$, $EF = 9 \text{ cm}$ और $FD = 12 \text{ cm}$ हो (देखिए आकृति 6.25)।



आकृति 6.25

तब, आपको प्राप्त है: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (प्रत्येक $\frac{2}{3}$ के बराबर हैं)

अब, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ और $\angle F$ को मापिए। आप देखेंगे कि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है, अर्थात् दोनों त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं।

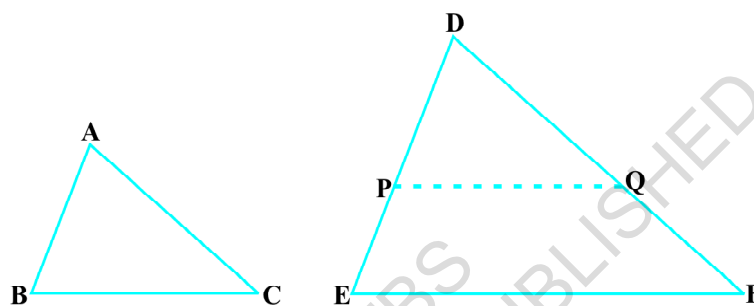
इसी प्रकार के अनेक त्रिभुजों के युग्म खींचकर (जिनमें संगत भुजाओं के अनुपात एक ही हों), आप इस क्रियाकलाप को पुनः कर सकते हैं। प्रत्येक बार आप यह पाएँगे कि इन त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं। यह दो त्रिभुजों की समरूपता की निम्नलिखित कसौटी के कारण है:

प्रमेय 6.4 : यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती (अर्थात् एक ही अनुपात में) हों, तो इनके संगत कोण बराबर होते हैं, और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

इस कसौटी को दो त्रिभुजों की समरूपता की SSS (भुजा-भुजा-भुजा) कसौटी कहा जाता है।

उपरोक्त प्रमेय को ऐसे दो त्रिभुज ABC और DEF लेकर, जिनमें $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ हो, सिद्ध किया जा सकता है (देखिए आकृति 6.26):

ΔDEF में $DP = AB$ और $DQ = AC$ काटिए तथा P और Q को मिलाइए।



आकृति 6.26

यहाँ यह देखा जा सकता है कि $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ और $PQ \parallel EF$ है (कैसे?)

अतः $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$.

इसलिए $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

जिससे $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (क्यों?)

अतः $BC = PQ$ (क्यों?)

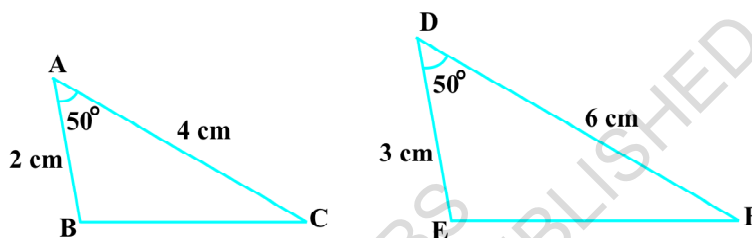
इस प्रकार $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (क्यों?)

अतः $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ (कैसे?)

टिप्पणी : आपको याद होगा कि दो बहुभुजों की समरूपता के दोनों प्रतिबंधों, अर्थात् (i) संगत कोण बराबर हों और (ii) संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, में से केवल किसी एक का ही संतुष्ट होना उनकी समरूपता के लिए पर्याप्त नहीं होता। परंतु प्रमेयों 6.3 और 6.4 के आधार पर, अब आप यह कह सकते हैं कि दो त्रिभुजों की समरूपता की स्थिति में, इन दोनों प्रतिबंधों की जाँच करने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि एक प्रतिबंध से स्वतः ही दूसरा प्रतिबंध प्राप्त हो जाता है।

आइए अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उन कसौटियों को याद करें, जो हमने कक्षा IX में पढ़ी थीं। आप देख सकते हैं कि SSS समरूपता कसौटी की तुलना SSS सर्वांगसमता कसौटी से की जा सकती है। इससे हमें यह संकेत मिलता है कि त्रिभुजों की समरूपता की ऐसी कसौटी प्राप्त करने का प्रयत्न किया जाए जिसकी त्रिभुजों की SAS सर्वांगसमता कसौटी से तुलना की जा सके। इसके लिए, आइए एक क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 6 : दो त्रिभुज ABC और DEF इस प्रकार खींचिए कि $AB = 2 \text{ cm}$, $\angle A = 50^\circ$, $AC = 4 \text{ cm}$, $DE = 3 \text{ cm}$, $\angle D = 50^\circ$ और $DF = 6 \text{ cm}$ हो (देखिए आकृति 6.27)।



आकृति 6.27

यहाँ, आप देख सकते हैं कि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (प्रत्येक $\frac{2}{3}$ के बराबर हैं) तथा $\angle A$ (भुजाओं AB और AC के अंतर्गत कोण) = $\angle D$ (भुजाओं DE और DF के अंतर्गत कोण) है। अर्थात् एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर है तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हैं। अब, आइए $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ और $\angle F$ को मापें।

आप पाएँगे कि $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है। अर्थात्, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है। इसलिए, AAA समरूपता कसौटी से $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है। आप ऐसे अनेक त्रिभुजों के युग्मों को खींचकर, जिनमें एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हों, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार, आप यह पाएँगे कि दोनों त्रिभुज समरूप हैं। यह त्रिभुजों की समरूपता की निम्नलिखित कसौटी के कारण है:

प्रमेय 6.5 : यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

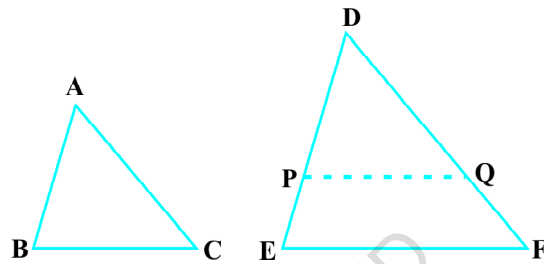
इस कसौटी को दो त्रिभुजों की समरूपता की SAS (भुजा-कोण-भुजा) कसौटी कहा जाता है।

पहले की ही तरह, इस प्रमेय को भी दो त्रिभुज ABC और DEF ऐसे

लेकर कि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) हो तथा

$\angle A = \angle D$ हो (देखिए आकृति 6.28) तो सिद्ध किया जा सकता है।

ΔDEF में $DP = AB$ और $DQ = AC$ काटिए तथा P और Q को मिलाइए।



आकृति 6.28

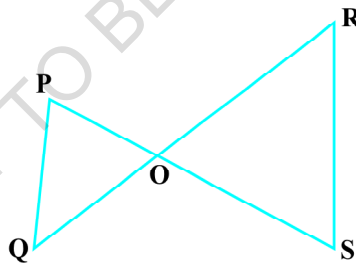
अब $PQ \parallel EF$ और $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (कैसे?)

अतः $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ और $\angle C = \angle Q$ है

इसलिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (क्यों?)

आइए अब हम इन कसौटियों के प्रयोग को प्रदर्शित करने के लिए, कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : आकृति 6.29 में, यदि $PQ \parallel RS$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ है।



आकृति 6.29

हल : $PQ \parallel RS$ (दिया है)

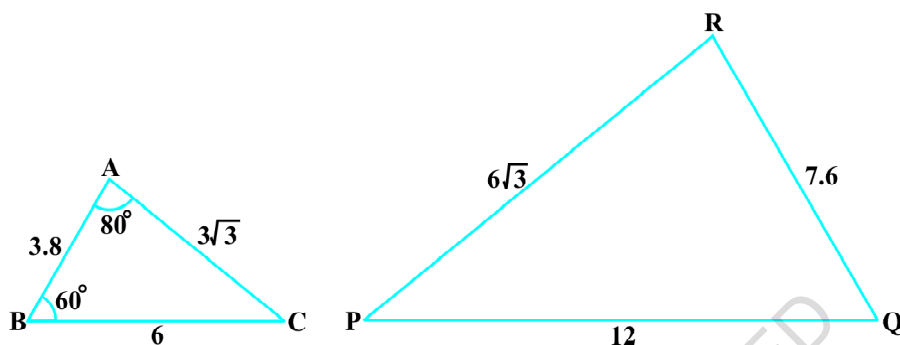
अतः $\angle P = \angle S$ (एकांतर कोण)

और $\angle Q = \angle R$ (एकांतर कोण)

साथ ही $\angle POQ = \angle SOR$ (शीर्षाभिमुख कोण)

इसलिए $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA समरूपता कसौटी)

उदाहरण 5 : आकृति 6.30 में $\angle P$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.30

हल : $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ और } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

इसलिए $\triangle ABC \sim \triangle RQP$ (SSS समरूपता)

इसलिए $\angle C = \angle P$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

परंतु $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$ (त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म)
 $= 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$

अतः $\angle P = 40^\circ$

उदाहरण 6 : आकृति 6.31 में,

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD \text{ है।}$$

दर्शाइए कि $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

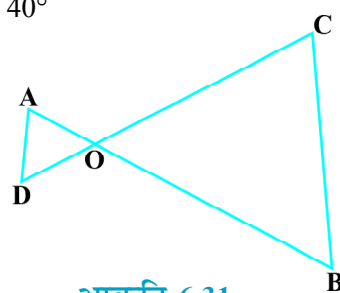
हल : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (दिया है)

अतः $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

साथ ही, हमें प्राप्त है: $\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण) (2)

अतः (1) और (2) से $\triangle AOD \sim \triangle COB$ (SAS समरूपता कसौटी)

इसलिए $\angle A = \angle C$ और $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)



आकृति 6.31

उदाहरण 7 : 90 cm की लंबाई वाली एक लड़की बल्ब लगे एक खंभे के आधार से परे 1.2 m/s की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6m की ऊँचाई पर है, तो 4 सेकंड बाद उस लड़की की छाया की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB बल्ब लगे खंभे को तथा CD लड़की द्वारा खंभे के आधार से परे 4 सेकंड चलने के बाद उसकी स्थिति को प्रकट करते हैं (देखिए आकृति 6.32)।

आकृति से आप देख सकते हैं कि DE लड़की की छाया की लंबाई है। मान लीजिए DE, x m है।

अब, $BD = 1.2 \text{ m} \times 4 = 4.8 \text{ m}$

ध्यान दीजिए कि $\triangle ABE$ और $\triangle CDE$ में,

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येक 90° का है, क्योंकि बल्ब

लगा खंभा और लड़की दोनों ही भूमि से ऊर्ध्वाधर खड़े हैं)

$\angle E = \angle E$ (समान कोण)

तथा

अतः $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ (AA समरूपता कसौटी)

इसलिए $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएं)

अर्थात् $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ ($90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}$)

अर्थात् $4.8 + x = 4x$

अर्थात् $3x = 4.8$

अर्थात् $x = 1.6$

अतः 4 सेकंड चलने के बाद लड़की की छाया की लंबाई 1.6 m है।

उदाहरण 8 : आकृति 6.33 में CM और RN क्रमशः

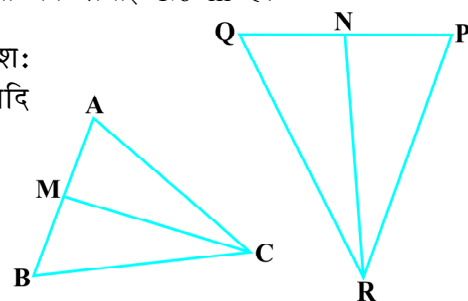
$\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ की माध्यिकाएँ हैं। यदि

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\triangle AMC \sim \triangle PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\triangle CMB \sim \triangle RNQ$



आकृति 6.33

हल : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)

अतः
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \quad (1)$$

तथा $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ (2)

परंतु $AB = 2 AM$ और $PQ = 2 PN$
(क्योंकि CM और RN माध्यिकाएँ हैं)

इसलिए (1) से
$$\frac{2 AM}{2 PN} = \frac{CA}{RP}$$

अर्थात्
$$\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP} \quad (3)$$

साथ ही $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) से] (4)

इसलिए (3) और (4) से,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS समरूपता) (5)

(ii) (5) से
$$\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP} \quad (6)$$

परंतु
$$\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ} \quad [(1) \text{ से}] \quad (7)$$

अतः
$$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} \quad [(6) \text{ और } (7) \text{ से}] \quad (8)$$

(iii) पुनः
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad [(1) \text{ से}]$$

अतः
$$\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} \quad [(8) \text{ से}] \quad (9)$$

साथ ही
$$\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2 BM}{2 QN}$$

अर्थात्
$$\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN} \quad (10)$$

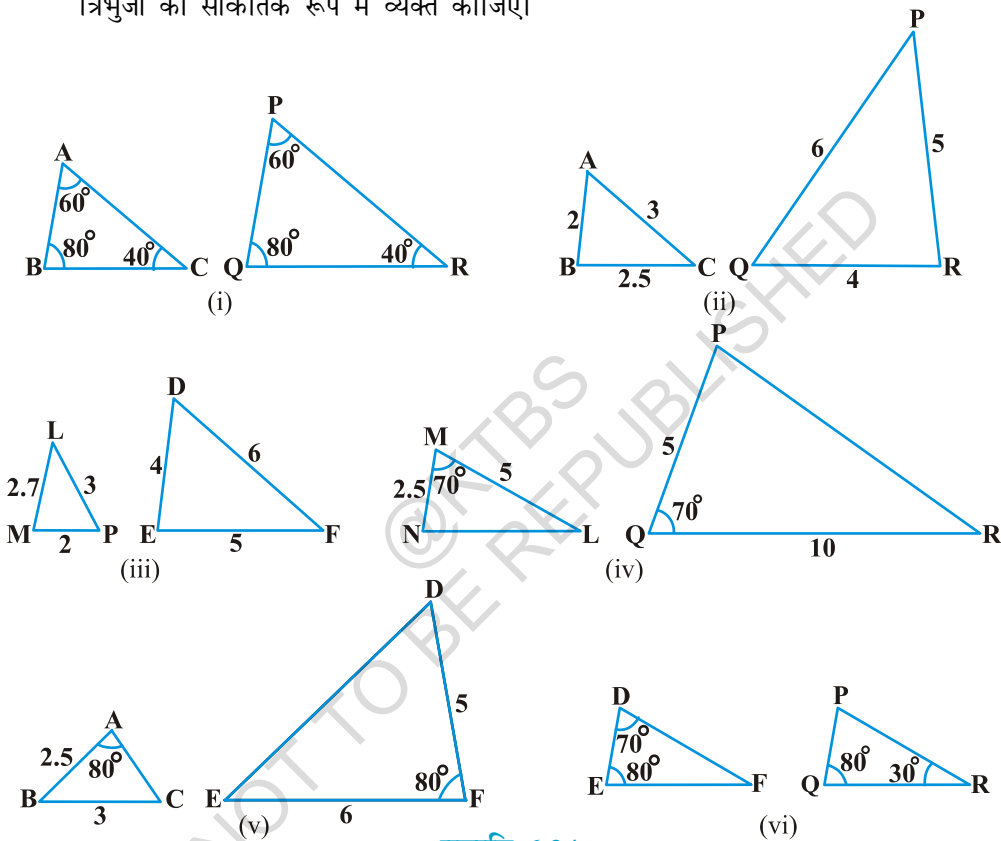
अर्थात्
$$\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN} \quad [(9) \text{ और } (10) \text{ से}]$$

अतः $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (SSS समरूपता)

[टिप्पणी : आप इस प्रश्न के भाग (iii) को भाग (i) में प्रयोग की गई विधि से भी सिद्ध कर सकते हैं।]

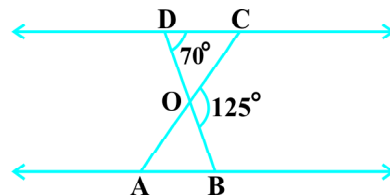
प्रश्नावली 6.3

1. बताइए कि आकृति 6.34 में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।



आकृति 6.34

2. आकृति 6.35 में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।
3. समलंब ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

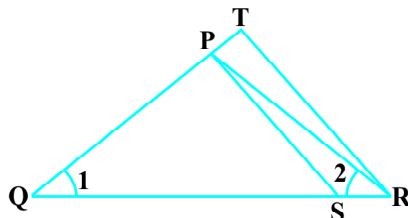


आकृति 6.35

4. आकृति 6.36 में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है।

दर्शाइए कि $\triangle PQS \sim \triangle TQR$ है।

5. $\triangle PQR$ की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$ है।

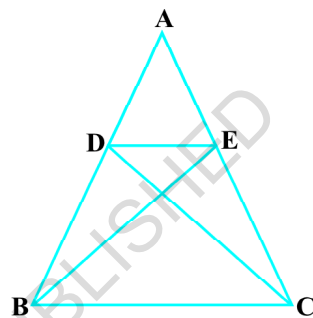


आकृति 6.36

6. आकृति 6.37 में, यदि $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ है।

7. आकृति 6.38 में, $\triangle ABC$ के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि:

- (i) $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
- (ii) $\triangle ABD \sim \triangle CBE$
- (iii) $\triangle AEP \sim \triangle ADB$
- (iv) $\triangle PDC \sim \triangle BEC$



आकृति 6.37

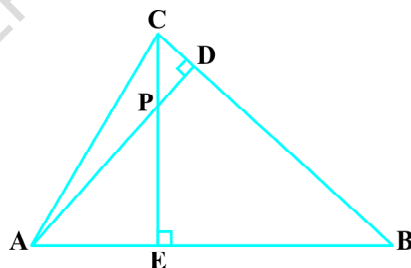
8. समांतर चतुर्भुज $ABCD$ की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ है।

9. आकृति 6.39 में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि:

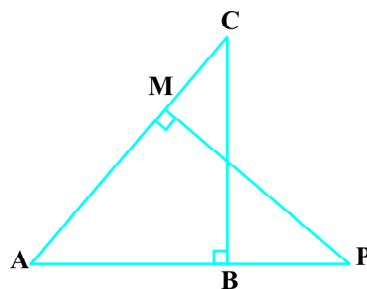
- (i) $\triangle ABC \sim \triangle AMP$
- (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

10. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है, तो दर्शाइए कि:

- (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
- (ii) $\triangle DCB \sim \triangle HGE$
- (iii) $\triangle DCA \sim \triangle HGF$

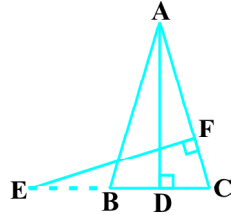


आकृति 6.38

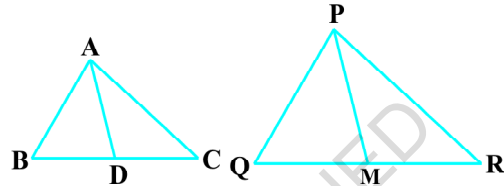


आकृति 6.39

11. आकृति 6.40 में, $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिंदु है। यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABD \sim \triangle ECF$ है।
12. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति 6.41)। दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।



आकृति 6.40



आकृति 6.41

13. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है।
14. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।
15. लंबाई 6 m वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 m है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।

6.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ जिनके आकार समान हों, परंतु आवश्यक रूप से आमाप समान न हों, समरूप आकृतियाँ कहलाती हैं।
2. सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।
3. भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हों।
4. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए, एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

5. यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो यह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।
6. यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में होती हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (AAA समरूपता कसौटी)।
7. यदि दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (AA समरूपता कसौटी)।
8. यदि दो त्रिभुजों में, संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (SSS समरूपता कसौटी)।
9. यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (AS समरूपता कसौटी)।

पाठकों के लिए विशेष

यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण तथा एक भुजा, दूसरे त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा के समानुपाती हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। इसे RHS समरूपता कसौटी कहा जा सकता है।

यदि आप इस कसौटी को अध्याय 8 के उदाहरण 2 में प्रयोग करते हैं तो उपपत्ति और भी सरल हो जाएगी।



1063CH07

निर्देशांक ज्यामिति

7

7.1 भूमिका

कक्षा IX में, आप पढ़ चुके हैं कि एक तल पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए, हमें निर्देशांक अक्षों के एक युग्म की आवश्यकता होती है। किसी बिंदु की y -अक्ष से दूरी उस बिंदु का x -निर्देशांक या **भुज** (abscissa) कहलाती है। किसी बिंदु की x -अक्ष से दूरी, उस बिंदु का y -निर्देशांक या **कोटि** (ordinate) कहलाती है। x -अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होते हैं तथा y -अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होते हैं।

यहाँ आपके लिए एक खेल दिया जा रहा है। एक आलेख कागज़ पर लंबिक अक्षों (perpendicular axes) का एक युग्म खींचिए। अब निम्नलिखित बिंदुओं को आलेखित कीजिए और दिए गए निर्देशों के अनुसार उन्हें मिलाइए। बिंदु A(4, 8) को B(3, 9) से, B को C(3, 8) से, C को D(1, 6) से, D को E(1, 5) से, E को F(3, 3) से, F को G(6, 3) से, G को H(8, 5) से, H को I(8, 6) से, I को J(6, 8) से, J को K(6, 9) से, K को L(5, 8) से और L को A से मिलाइए। इसके बाद, बिंदुओं P(3.5, 7), Q(3, 6) और R(4, 6) को जोड़ कर एक त्रिभुज बनाइए। साथ ही, एक त्रिभुज बनाने के लिए बिंदुओं X(5.5, 7), Y(5, 6) और Z(6, 6) को मिलाइए। अब एक और त्रिभुज बनाने के लिए, बिंदुओं S(4, 5), T(4.5, 4) और U(5, 5) को मिलाइए। अंत में, बिंदु S को बिंदुओं (0, 5) और (0, 6) से मिलाइए तथा बिंदु U को बिंदुओं (9, 5) और (9, 6) से मिलाइए। आपको कौन-सा चित्र प्राप्त होता है?

साथ ही, आप यह भी देख चुके हैं कि $ax + by + c = 0$ (जहाँ a और b एक साथ शून्य न हों) के रूप की दो चरों वाली एक समीकरण को जब आलेखीय रूप से निरूपित करते हैं, तो एक सरल रेखा प्राप्त होती है। साथ ही, अध्याय 2 में आप देख चुके हैं कि

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) का आलेख एक परवलय (parabola) होता है। वस्तुतः, आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन करने के लिए, निर्देशांक ज्यामिति (coordinate geometry) एक बीजीय साधन (algebraic tool) के रूप में विकसित की गई है। यह बीजगणित का प्रयोग करके ज्यामिति का अध्ययन करने में सहायता करती है तथा बीजगणित को ज्यामिति द्वारा समझने में भी सहायक होती है। इसी कारण, निर्देशांक ज्यामिति के विभिन्न क्षेत्रों में व्यापक अनुप्रयोग हैं, जैसे भौतिकी, इंजीनियरिंग, समुद्री-परिवहन (या नौ-गमन) (navigation), भूकंप शास्त्र संबंधी (seismology) और कला।

इस अध्याय में, आप यह सीखेंगे कि दो बिंदुओं, जिनके निर्देशांक दिए हुए हों, के बीच की दूरी किस प्रकार ज्ञात की जाती है तथा तीन दिए हुए बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। आप इसका भी अध्ययन करेंगे कि दिए हुए दो बिंदुओं को मिलाने से बने रेखाखंड को एक दिए गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।

7.2 दूरी सूत्र

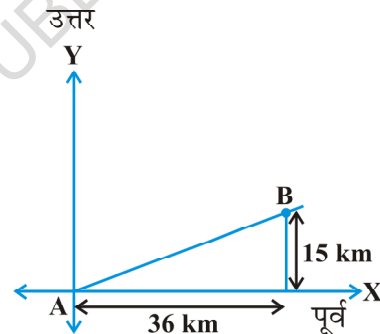
आइए निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

एक शहर B एक अन्य शहर A से 36 km पूर्व (east) और 15 km उत्तर (north) की ओर है। आप शहर B की शहर A से दूरी बिना वास्तविक मापन के किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? आइए देखें। इस स्थिति को, आलेखीय रूप से, आकृति 7.1 की तरह दर्शाया जा सकता है। अब, आप वांछित दूरी ज्ञात करने के लिए, पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं।

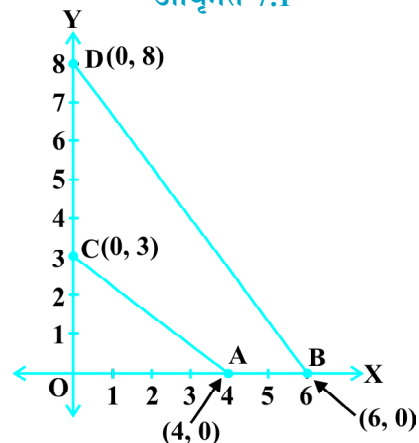
अब, मान लीजिए दो बिंदु x -अक्ष पर स्थित हैं। क्या हम इनके बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरणार्थ, आकृति 7.2 के दो बिंदुओं A(4, 0) और B(6, 0) पर विचार कीजिए। बिंदु A और B, x -अक्ष पर स्थित हैं।

आकृति से आप देख सकते हैं कि OA = 4 मात्रक (इकाई) और OB = 6 मात्रक हैं।

अतः, A से B की दूरी AB = OB - OA = (6 - 4) मात्रक = 2 मात्रक है।



आकृति 7.1



आकृति 7.2

इस प्रकार, यदि दो बिंदु x -अक्ष पर स्थित हों, तो हम उनके बीच की दूरी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

अब, मान लीजिए, हम y -अक्ष पर स्थित कोई दो बिंदु लेते हैं। क्या हम इनके बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? यदि बिंदु $C(0, 3)$ और $D(0, 8)$, y -अक्ष पर स्थित हों, तो हम दूरी ऊपर की भाँति ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् दूरी $CD = (8 - 3)$ मात्रक = 5 मात्रक है (देखिए आकृति 7.2)।

पुनः, क्या आप आकृति 7.2 में, बिंदु C से बिंदु A की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? चूँकि $OA = 4$ मात्रक और $OC = 3$ मात्रक हैं, इसलिए C से A की दूरी $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ मात्रक है। इसी प्रकार, आप D से B की दूरी $BD = 10$ मात्रक ज्ञात कर सकते हैं।

अब, यदि हम ऐसे दो बिंदुओं पर विचार करें, जो निर्देशांक अक्षों पर स्थित नहीं हैं, तो क्या हम इनके बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? हाँ! ऐसा करने के लिए, हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करेंगे। आइए एक उदाहरण लेकर देखें।

आकृति 7.3 में, बिंदु $P(4, 6)$ और $Q(6, 8)$ प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में स्थित हैं। इनके बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए, हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कैसे करते हैं? आइए P और Q से x -अक्ष पर क्रमशः लंब PR और QS खींचें। साथ ही, P से QS पर एक लंब डालिए जो QS को T पर प्रतिच्छेद करे। तब R और S के निर्देशांक क्रमशः $(4, 0)$ और $(6, 0)$ हैं। अतः, $RS = 2$ मात्रक है। साथ ही, $QS = 8$ मात्रक और $TS = PR = 6$ मात्रक है।

स्पष्ट है कि $QT = 2$ मात्रक और $PT = RS = 2$ मात्रक।

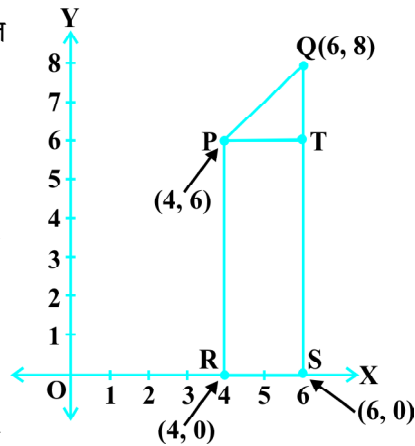
अब, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PT^2 + QT^2 \\ &= 2^2 + 2^2 = 8 \end{aligned}$$

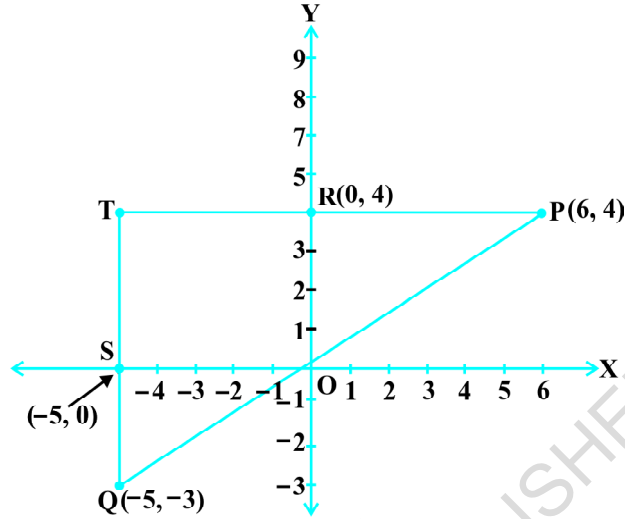
अतः $PQ = 2\sqrt{2}$ मात्रक हुआ।

आप दो भिन्न-भिन्न चतुर्थांशों में स्थित बिंदुओं के बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे?

बिंदुओं $P(6, 4)$ और $Q(-5, -3)$ पर विचार कीजिए (देखिए आकृति 7.4)। x -अक्ष पर लंब QS खींचिए। साथ ही, बिंदु P से बढ़ाई हुई QS पर PT लंब खींचिए जो y -अक्ष को बिंदु R पर प्रतिच्छेद करे।



आकृति 7.3



आकृति 7.4

तब, $PT = 11$ मात्रक और $QT = 7$ मात्रक है (क्यों?)

समकोण त्रिभुज PTQ में, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170} \text{ मात्रक}$$

आइए, अब किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करें। x -अक्ष पर लंब PR और QS खींचिए। P से QS पर एक लंब खींचिए, जो उसे T पर प्रतिच्छेद करे (देखिए आकृति 7.5)।

तब, $OR = x_1$, $OS = x_2$ है। अतः, $RS = x_2 - x_1 = PT$ है।

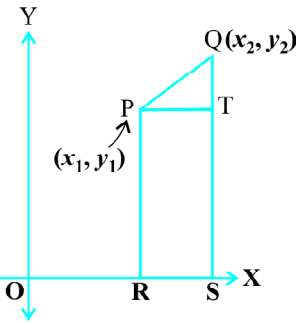
साथ ही, $SQ = y_2$ और $ST = PR = y_1$ है। अतः, $QT = y_2 - y_1$ है।

अब, $\triangle PTQ$ में, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PT^2 + QT^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ध्यान दें कि चूँकि दूरी सदैव ऋणेतर होती है, हम केवल धनात्मक वर्गमूल लेते हैं।



आकृति 7.5

अतः $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बिंदुओं के बीच की दूरी है

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

जो दूरी सूत्र (distance formula) कहलाता है।

टिप्पणियाँ :

1. विशेष रूप से, बिंदु $P(x, y)$ की मूल बिंदु $O(0, 0)$ से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ होती है।}$$

2. हम $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ भी लिख सकते हैं (क्यों?)

उदाहरण 1 : क्या बिंदु $(3, 2)$, $(-2, -3)$ और $(2, 3)$ एक त्रिभुज बनाते हैं? यदि हाँ, तो बताइए कि किस प्रकार का त्रिभुज बनता है।

हल : आइए PQ , QR और PR ज्ञात करने के लिए दूरी सूत्र का प्रयोग करें, जहाँ $P(3, 2)$, $Q(-2, -3)$ और $R(2, 3)$ दिए हुए बिंदु हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$PQ = \sqrt{(3 + 2)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (लगभग)}$$

$$QR = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (लगभग)}$$

$$PR = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (लगभग)}$$

चूँकि इन तीन दूरियों में से किन्हीं दो का योग तीसरी दूरी से अधिक है, इसलिए इन बिंदुओं P , Q और R से एक त्रिभुज बनता है।

साथ ही, यहाँ $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ है। अतः, पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से, हमें ज्ञात होता है कि $\angle P = 90^\circ$ है।

इसलिए, PQR एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि बिंदु $(1, 7)$, $(4, 2)$, $(-1, -1)$ और $(-4, 4)$ एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल : मान लीजिए दिए हुए बिंदु $A(1, 7)$, $B(4, 2)$, $C(-1, -1)$ और $D(-4, 4)$ हैं। $ABCD$ को एक वर्ग दर्शाने की एक विधि यह है कि उसका गुणधर्म जैसा कि वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर तथा दोनों विकर्ण बराबर होती हैं, का प्रयोग किया जाए। अब,

$$AB = \sqrt{(1 - 4)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

यहाँ, $AB = BC = CD = DA$ है और $AC = BD$ है, अर्थात् चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाएँ बराबर हैं और दोनों विकर्ण भी बराबर हैं। अतः चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

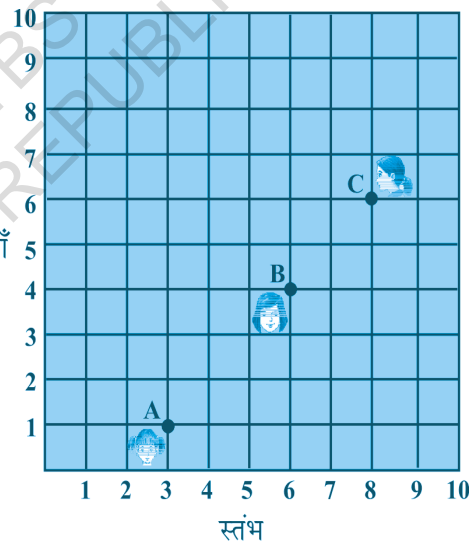
वैकल्पिक हल : हम चारों भुजाएँ और एक विकर्ण, मान लीजिए AC ऊपर की तरह ज्ञात करते हैं। यहाँ $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ है। अतः, पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा $\angle D = 90^\circ$ है। चारों भुजाएँ बराबर होने और एक कोण समकोण होने से चतुर्भुज एक वर्ग हो जाता है। अतः ABCD एक वर्ग है।

उदाहरण 3 : आकृति 7.6 किसी कक्षा में रखे डेस्क (desks) की व्यवस्था दर्शाती है। आशिमा, भारती और कैमिला क्रमशः A(3, 1), B(6, 4) और C(8, 6) पर बैठी हैं। क्या आप सोचते हैं कि वे एक ही सीध (in a line) में बैठी हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

हल : दूरी सूत्र के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है :

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



आकृति 7.6

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

चूँकि $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ है, अतः हम कह सकते हैं कि A, B और C सरेखी (collinear) हैं। अर्थात्, वे तीनों एक ही सीध में बैठी हैं।

उदाहरण 4 : x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, ताकि बिंदु (x, y) बिंदुओं $(7, 1)$ और $(3, 5)$ से समदूरस्थ (equidistant) हो।

हल : मान लीजिए $P(x, y)$ बिंदुओं $A(7, 1)$ और $B(3, 5)$ से समदूरस्थ है।

हमें $AP = BP$ दिया है। अतः, $AP^2 = BP^2$ है।

$$\text{अर्थात्} \quad (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\text{अर्थात्} \quad x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\text{अर्थात्} \quad x - y = 2$$

यही x और y में वांछित संबंध है।

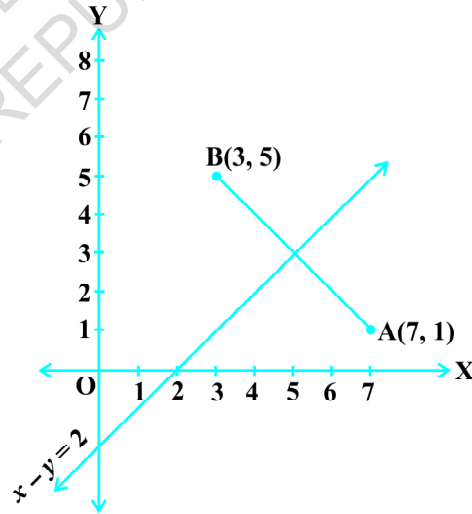
टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि समीकरण $x - y = 2$ का आलेख एक रेखा होता है। आप अपने पिछले अध्ययन से यह जानते हैं कि वह बिंदु जो दो दिए हुए बिंदुओं A और B से समदूरस्थ होता है रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है। अतः, $x - y = 2$ का आलेख रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 7.7)।

उदाहरण 5 : y -अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं $A(6, 5)$ और $B(-4, 3)$ से समदूरस्थ हो।

हल : हम जानते हैं कि y -अक्ष पर स्थित कोई भी बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है। अतः, मान लीजिए कि बिंदु $P(0, y)$ बिंदुओं A और B से समदूरस्थ है। तब,

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$\text{या} \quad 36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$



आकृति 7.7

$$\text{या } 4y = 36$$

$$\text{या } y = 9$$

अतः, वांछित बिंदु (0, 9) है।

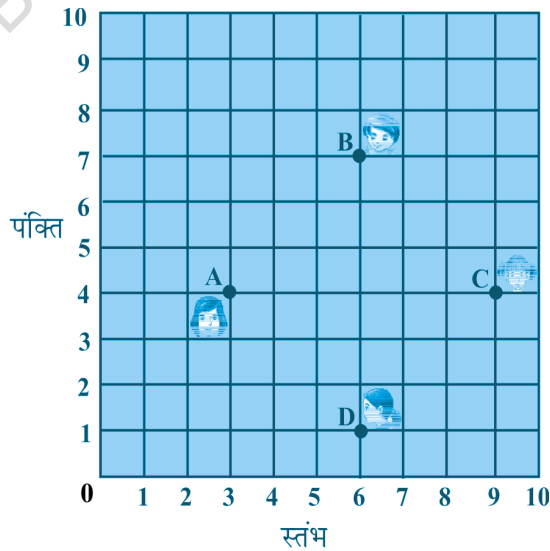
$$\text{आइए अपने हल की जाँच करें: } AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

टिप्पणी : ऊपर दी गई टिप्पणी का प्रयोग करने से, हम देखते हैं कि (0, 9), y -अक्ष और रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिंदु है।

प्रश्नावली 7.1

- बिंदुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए:
 - (2, 3), (4, 1)
 - (-5, 7), (-1, 3)
 - (a, b), ($-a, -b$)
- बिंदुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप अनुच्छेद 7.2 में दिए दोनों शहरों A और B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?
- निर्धारित कीजिए कि क्या बिंदु (1, 5), (2, 3) और (-2, -11) सररेखी हैं।
- जाँच कीजिए कि क्या बिंदु (5, -2), (6, 4) और (7, -2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
- किसी कक्षा में, चार मित्र बिंदुओं A, B, C और D पर बैठे हुए हैं, जैसाकि आकृति 7.8 में दर्शाया गया है। चंपा और चमेली कक्षा के अंदर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि ABCD एक वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके, बताइए कि इनमें कौन सही है।
- निम्नलिखित बिंदुओं द्वारा बने वाले चतुर्भुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने



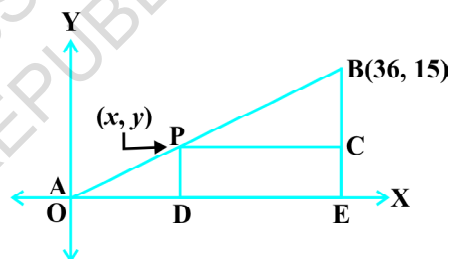
आकृति 7.8

उत्तर के लिए कारण भी दीजिए:

- (i) $(-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$
 - (ii) $(-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$
 - (iii) $(4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)$
7. x -अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ और $(-2, 9)$ से समदूरस्थ हैं।
 8. y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिंदु $P(2, -3)$ और $Q(10, y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।
 9. यदि $Q(0, 1)$ बिंदुओं $P(5, -3)$ और $R(x, 6)$ से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।
 10. x और y में एक ऐसा संबंध ज्ञात कीजिए कि बिंदु (x, y) बिंदुओं $(3, 6)$ और $(-3, 4)$ से समदूरस्थ हो।

7.3 विभाजन सूत्र

आइए अनुच्छेद 7.2 में दी हुई स्थिति को याद करें। मान लीजिए कि टेलीफोन कंपनी शहरों A और B के बीच में एक प्रसारण टॉवर (relay tower) ऐसे स्थान P पर स्थापित करना चाहती है कि टॉवर की B से दूरी उसकी A से दूरी की दुगुनी हो। यदि P रेखाखंड AB पर स्थित



आकृति 7.9

है, तो यह AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करे। (देखिए आकृति 7.9)। यदि हम A को मूलबिंदु O मानें तथा 1 km को दोनों अक्षों पर 1 मात्रक मानें, तो B के निर्देशांक $(36, 15)$ होंगे। P की स्थिति जानने के लिए हमें P के निर्देशांक ज्ञात करने चाहिए। ये निर्देशांक हम किस प्रकार ज्ञात करें?

मान लीजिए P के निर्देशांक (x, y) हैं। P और B से x -अक्ष पर लंब खींचिए जो इसे क्रमशः D और E पर मिलें। BE पर लंब PC खींचिए जो उससे C पर मिले। तब, अध्याय 6 में, पढ़ी गई AA समरूपता कसौटी के प्रयोग से, $\triangle POD$ और $\triangle BPC$ समरूप हैं।

$$\text{अतः } \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2} \quad \text{है।}$$

$$\text{अतः } \frac{x}{36-x} = \frac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2} \quad \text{है।}$$

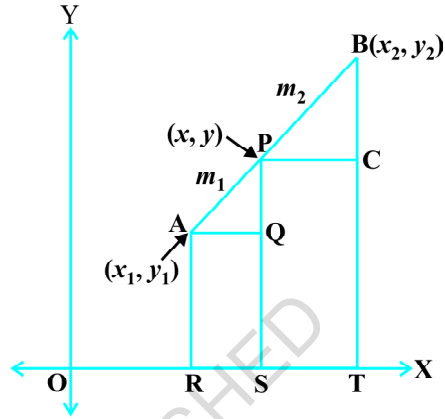
इन समीकरणों से $x = 12$ और $y = 5$ प्राप्त होता है।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $P(12, 5)$ प्रतिबंध $OP : PB = 1 : 2$ को संतुष्ट करता है।

आइए अब उपरोक्त उदाहरण से प्राप्त की गई समझ के आधार पर विभाजन का व्यापक सूत्र प्राप्त करने का प्रयत्न करें।

किन्हीं दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ पर विचार कीजिए और मान लीजिए बिंदु $P(x, y)$ रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से (internally) विभाजित करता है, अर्थात्

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ है (देखिए आकृति 7.10)}।$$



आकृति 7.10

x -अक्ष पर AR , PS और BT लंब खींचिए। x -अक्ष के समांतर AQ और PC खींचिए। तब AA समरूपता कसौटी से,

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

$$\text{अतः} \quad \frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{अब} \quad AQ &= RS = OS - OR = x - x_1 \\ PC &= ST = OT - OS = x_2 - x \\ PQ &= PS - QS = PS - AR = y - y_1 \\ BC &= BT - CT = BT - PS = y_2 - y \end{aligned}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ लेने पर हमें } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\text{इसी प्रकार} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ लेने पर हमें } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \text{ प्राप्त होता है।}$$

अतः, दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले बिंदु $P(x, y)$ के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right) \quad (2)$$

उपरोक्त को **विभाजन सूत्र** (section formula) कहते हैं।

इसी सूत्र को A, P और B से y -अक्ष पर लंब डालकर और ऊपर की भाँति प्रक्रिया अपनाकर भी प्राप्त किया जा सकता है।

यदि P रेखाखंड AB को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करे, तो बिंदु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1} \right) \text{ होंगे।}$$

विशिष्ट स्थिति : एक रेखाखंड का मध्य-बिंदु उसे $1 : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। अतः, बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1 + 1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1 + 1} \right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{ होंगे।}$$

आइए अब विभाजन सूत्र पर आधारित कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 6 : उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $(4, -3)$ और $(8, 5)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से $3 : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है।

हल : मान लीजिए $P(x, y)$ वांछित बिंदु है। विभाजन सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3 + 1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3 + 1} = 3$$

प्राप्त होता है। अतः $(7, 3)$ ही वांछित बिंदु है।

उदाहरण 7 : बिंदु $(-4, 6)$, बिंदुओं $A(-6, 10)$ और $B(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : मान लीजिए $(-4, 6)$ रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है। विभाजन सूत्र के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (1)$$

याद कीजिए कि यदि $(x, y) = (a, b)$ हो, तो $x = a$ और $y = b$ होता है।

अतः $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ और $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$ है।

अब $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ से प्राप्त होता है:

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

अर्थात् $7m_1 = 2m_2$

या $m_1 : m_2 = 2 : 7$

आपको इसकी जाँच कर लेनी चाहिए कि यह अनुपात y -निर्देशांक को भी संतुष्ट करता है।

अब
$$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8 \frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad (m_2 \text{ से ऊपर नीचे भाग देने पर})$$

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

अतः बिंदु $(-4, 6)$, बिंदुओं $A(-6, 10)$ और $B(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $2 : 7$ के अनुपात में विभाजित करता है।

वैकल्पिक हल : अनुपात $m_1 : m_2$ को $\frac{m_1}{m_2} : 1$, या $k : 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। मान

लीजिए बिंदु $(-4, 6)$ रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। विभाजन सूत्र द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1} \right) \quad (2)$$

$$\text{अतः} \quad -4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

$$\text{या} \quad -4k - 4 = 3k - 6$$

$$\text{या} \quad 7k = 2$$

$$\text{या} \quad k : 1 = 2 : 7$$

आप y -निर्देशांक के लिए भी इसकी जाँच कर सकते हैं।

अतः, बिंदु $(-4, 6)$, बिंदुओं $A(-6, 10)$ और $B(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $2 : 7$ के अनुपात में विभाजित करता है।

टिप्पणी : आप इस अनुपात को दूरियाँ PA और PB ज्ञात करके और फिर उनके अनुपात लेकर भी प्राप्त कर सकते हैं, जबकि आपको यह जानकारी हो कि बिंदु A, P और B संरेखी हैं।

उदाहरण 8 : बिंदुओं $A(2, -2)$ और $B(-7, 4)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए रेखाखंड AB को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदु P और Q हैं, अर्थात् $AP = PQ = QB$ है (देखिए आकृति 7.11)।



Fig. 7.11

अतः, P रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $1 : 2$ के अनुपात में विभाजित करता है। अतः, P के निर्देशांक सूत्र द्वारा, निम्नलिखित हैं:

$$\left(\frac{1(-7) + 2(2)}{1 + 2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1 + 2} \right), \text{ अर्थात् } (-1, 0)$$

अब, Q रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $2 : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। अतः Q के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{2(-7) + 1(2)}{2 + 1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2 + 1} \right), \text{ अर्थात् } (-4, 2)$$

अतः, बिंदुओं A और B को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक $(-1, 0)$ और $(-4, 2)$ हैं।

टिप्पणी : हम Q के निर्देशांक उसे PB का मध्य-बिंदु मानते हुए भी ज्ञात कर सकते थे। इसमें हमें मध्य-बिंदु वाले सूत्र का प्रयोग करना पड़ता।

उदाहरण 9 : बिंदुओं $(5, -6)$ और $(-1, -4)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को y -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है? इस प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए वांछित अनुपात $k : 1$ है। तब, विभाजन सूत्र द्वारा, उस रेखाखंड को

$k : 1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक हैं : $\left(\frac{-k + 5}{k + 1}, \frac{-4k - 6}{k + 1} \right)$

यह बिंदु y -अक्ष पर स्थित है और हम जानते हैं कि y -अक्ष पर भुज 0 होता है।

$$\text{अतः} \quad \frac{-k + 5}{k + 1} = 0$$

$$\text{इसलिए} \quad k = 5 \text{ है।}$$

अर्थात् वांछित अनुपात $5 : 1$ है। k का मान 5 रखने पर हमें प्रतिच्छेद बिंदु $\left(0, \frac{-13}{3} \right)$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 : यदि बिंदु $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ और $D(p, 3)$ एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

अतः, विकर्ण AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

$$\text{अर्थात्} \quad \left(\frac{6 + 9}{2}, \frac{1 + 4}{2} \right) = \left(\frac{8 + p}{2}, \frac{2 + 3}{2} \right)$$

$$\text{या} \quad \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{8 + p}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

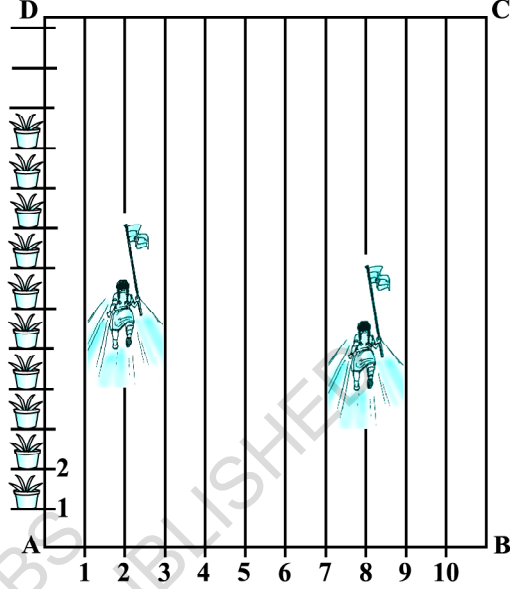
$$\text{अतः} \quad \frac{15}{2} = \frac{8 + p}{2}$$

$$\text{या} \quad p = 7$$

प्रश्नावली 7.2

1. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $2 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है।
2. बिंदुओं $(4, -1)$ और $(-2, -3)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

3. आपके स्कूल में खेल-कूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान ABCD में, चूने से परस्पर 1m की दूरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1m की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं, जैसा कि आकृति 7.12 में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक लाल झंडा गाड़ देती है। दोनों झंडों के बीच की दूरी



आकृति 7.12

क्या है? यदि रश्मि को एक नीला झंडा इन दोनों झंडों को मिलाने वाले रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो उसे अपना झंडा कहाँ गाड़ना चाहिए?

- बिंदुओं $(-3, 10)$ और $(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिंदु $(-1, 6)$ किस अनुपात में विभाजित करता है।
- वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदुओं $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाला रेखाखंड x -अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
- यदि बिंदु $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ और $(3, 5)$, इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।
- बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र $(2, -3)$ है तथा B के निर्देशांक $(1, 4)$ हैं।
- यदि A और B क्रमशः $(-2, -2)$ और $(2, -4)$ हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।
- बिंदुओं $A(-2, 2)$ और $B(2, 8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
- एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, $(3, 0)$, $(4, 5)$, $(-1, 4)$ और $(-2, -1)$ हैं। [संकेत : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणनफल)]

7.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।
2. बिंदु $P(x, y)$ की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ होती है।
3. उस बिंदु $P(x, y)$ के निर्देशांक जो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, निम्नलिखित होते हैं:

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$
4. बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड PQ के मध्यबिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ होते हैं।

पाठकों के लिए विशेष

अनुभाग 7.3 में किसी बिंदु P के लिए जिसके निर्देशांक (x, y) हैं तथा यदि यह बिंदु किन्हीं दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप में $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है तो

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

ध्यान दीजिए कि $PA : PB = m_1 : m_2$

तथापि यदि बिंदु P बिंदुओं A और B के बीच स्थित नहीं है, परंतु यह रेखाखंड के बाह्य में स्थित है जहाँ $PA : PB = m_1 : m_2$ है तब हम कहते हैं कि P बिंदुओं A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को बाह्यतः विभाजित करता है। ऐसी स्थितियों से संबंधित विभाजन सूत्र का अध्ययन आप उच्चतर कक्षाओं में करेंगे।

गणितीय उपपत्तियाँ

A1

A1.1 भूमिका

हमारे दैनिक जीवन में तर्क प्रस्तुत करने और स्पष्ट चिंतन करने की क्षमता अत्यधिक उपयोगी होती है। उदाहरण के लिए मान लीजिए एक राजनीतिज्ञ आप से यह कहता है कि 'यदि आप साफ-सुथरी सरकार चाहते हैं तो आपको मुझे वोट देना चाहिए।' वास्तव में आपके अंदर वह यह विश्वास पैदा करना चाहता है कि यदि आपने उसे वोट नहीं दिया, तो आपको साफ-सुथरी सरकार नहीं मिल सकती है। इसी प्रकार, यदि एक विज्ञापन में यह बताया जाता है कि 'बुद्धिमान व्यक्ति XYZ प्रकार के जूते पहनते हैं' तो कंपनी आपके अंदर यह बात पैदा करना चाहती है कि यदि आप XYZ प्रकार के जूते नहीं पहनते हैं, तो आप एक बुद्धिमान व्यक्ति नहीं हैं। आप स्वयं यह देख सकते हैं कि ऊपर दिए गए दोनों ही कथन आम जनता को बहका सकते हैं। अतः यदि हम तर्क प्रस्तुत करने की प्रक्रिया को सही प्रकार से समझते हैं, तो अनजाने में हम इस प्रकार के जाल में नहीं फँस सकते हैं।

तर्क प्रस्तुत करने का सही प्रयोग गणित का आधार है, विशेष रूप से उपपत्तियाँ प्रस्तुत करने में। कक्षा IX में, आपको उपपत्तियों की संकल्पना से परिचित कराया गया है और वास्तव में आपने अनेक कथनों, विशेष रूप से ज्यामिति के कथनों को सिद्ध भी किया है। स्मरण कीजिए कि एक उपपत्ति में अनेक गणितीय कथन होते हैं, जिनमें से प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या किसी अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित होता है। उपपत्ति की रचना में प्रयुक्त होने वाला हमारा मुख्य साधन निगमनिक तर्कण की प्रक्रिया है।

इस अध्याय में हम सबसे पहले इस बात पर पुनर्विचार करेंगे कि गणितीय कथन क्या होता है। इसके बाद हम अनेक उदाहरणों द्वारा निगमनिक तर्कण देने के कौशल को और

अधिक सक्षम बनाने पर विचार करेंगे। यहाँ हम निषेध की संकल्पना और एक दिए हुए कथन का निषेध ज्ञात करने के बारे में भी चर्चा करेंगे। इसके बाद हम इस बात की चर्चा करेंगे कि किसी दिए हुए कथन का विलोम ज्ञात करने का अर्थ क्या होता है। अंत में, हम अनेक प्रमेयों की उपपत्तियों का विश्लेषण करके कक्षा IX में पढ़ी गई किसी उपपत्ति के अवयवों पर पुनर्विचार करेंगे। यहाँ हम विरोधोक्ति (अंतर्विरोध) द्वारा उपपत्ति की धारणा पर भी विचार करेंगे, जिसे आप कक्षा IX में सीख चुके हैं तथा इस पुस्तक के अनेक अन्य अध्यायों में भी प्रयोग कर चुके हैं।

A1.2 गणितीय कथनों का पुनरीक्षण

स्मरण कीजिए कि 'कथन' एक अर्थपूर्ण वाक्य होता है, जो न तो आदेश होता है, न विस्मयादिबोधक (exclamation) होता है और न ही प्रश्न होता है। उदाहरण के लिए 'वर्ल्ड कप के फाइनल में कौन-सी दो टीमों खेल रही हैं?' एक प्रश्न है, एक कथन नहीं है। 'जाइए और अपना गृहकार्य पूरा कीजिए', एक आदेश है, एक कथन नहीं है। 'क्या ही बढ़िया गोल है!' एक विस्मयादिबोधक है, एक कथन नहीं है।

स्मरण रहे कि व्यापक रूप में वाक्य निम्नलिखित में से कोई एक हो सकता है:

- सत्य
- असत्य
- संदिग्ध

कक्षा IX में, आप यह भी पढ़ चुके हैं कि गणित में, कथन केवल तभी स्वीकार्य होता है जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो। अतः संदिग्ध वाक्यों को गणितीय कथन नहीं माना जाता है।

आइए हम कुछ उदाहरण लेकर अपने ज्ञान को दोहरा लें।

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन है या नहीं है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

- (i) सूर्य पृथ्वी की परिक्रमा करता है।
- (ii) वाहन के चार पहिए होते हैं।
- (iii) प्रकाश की चाल लगभग 3×10^8 km/s है।
- (iv) नवंबर से मार्च तक कोलकाता की सड़क बंद रहेगी।
- (v) सभी मानव नश्वर होते हैं।

हल :

- (i) यह वाक्य असत्य है, क्योंकि खगोलविदों ने यह स्थापित कर दिया है कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है। अतः यह एक कथन है।
- (ii) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि हम यह निर्णय नहीं कर सकते हैं कि यह सत्य है या असत्य है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि वाहन कौन-सा है, क्योंकि वाहन 2, 3, 4, 6, 10, आदि पहियों वाला हो सकता है। अतः यह एक कथन नहीं है।
- (iii) यह वाक्य सत्य है, जैसाकि भौतिकविदों ने सत्यापित किया है। अतः यह एक कथन है।
- (iv) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ किस सड़क के बारे में कहा जा रहा है। अतः यह एक कथन नहीं है।
- (v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि प्रत्येक मानव को कभी न कभी मरना ही है। अतः यह एक कथन है।

उदाहरण 2 : बताइए कि निम्नलिखित वाक्य सत्य हैं या असत्य हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

- (i) सभी समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (ii) कुछ समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (iii) सभी समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।
- (v) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक नहीं होती हैं।
- (vi) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या नहीं होते हैं।
- (vii) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच एक भी परिमेय संख्या नहीं होती है।

हल :

- (i) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ समान होती हैं, अतः ये समद्विबाहु त्रिभुज हैं।
- (ii) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि वे समद्विबाहु त्रिभुज जिसके आधार कोण 60° के हैं, समबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (iii) यह वाक्य असत्य है। इसका एक प्रत्युदाहरण दीजिए।
- (iv) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ p पूर्णांक हैं और $q = 1$, पूर्णांक हैं। (उदाहरण के लिए $3 = \frac{3}{1}$)

- (v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ p, q पूर्णांक हैं और q, p को विभाजित नहीं करता, पूर्णांक नहीं हैं (उदाहरण के लिए $\frac{3}{2}$)
- (vi) यह वाक्य इस कथन के समान है कि 'एक ऐसा पूर्णांक है, जो परिमेय संख्या नहीं है'। यह वाक्य असत्य है, क्योंकि सभी पूर्णांक परिमेय संख्या होते हैं।
- (vii) यह वाक्य असत्य है। जैसाकि आप जानते हैं किन्हीं दो परिमेय संख्याओं r और s के बीच $\frac{r+s}{2}$ होती हैं, जो एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 3 : यदि $x < 4$ है तो निम्नलिखित कथनों में कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $2x > 8$

(ii) $2x < 6$

(iii) $2x < 8$

हल :

- (i) यह कथन असत्य है, क्योंकि, उदाहरण के लिए, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ को संतुष्ट नहीं करता है।
- (ii) यह कथन असत्य है, क्योंकि उदाहरण के लिए $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ को संतुष्ट नहीं करता है।
- (iii) यह कथन सत्य है, क्योंकि यह वही है जो कि $x < 4$ है।

उदाहरण 4 : उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों का पुनर्कथन दीजिए, जिससे कि वे कथन सत्य हो जाएँ?

- (i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।
- (ii) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।
- (iii) सभी धन पूर्णांक p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय होता है।
- (iv) सभी द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल होते हैं।

हल :

- (i) यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।
- (ii) एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(iii) सभी अभाज्य संख्याओं p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय होता है।

(iv) सभी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो वास्तविक मूल होते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के कथनों का पुनःकथन अन्य प्रकार भी दिया जा सकता है। उदाहरण के लिए

(iii) का पुनःकथन ' $\sqrt{p}$ अपरिमेय है, जहाँ p ऐसा धन पूर्णांक है, जो पूर्ण वर्ग नहीं है।'

प्रश्नावली A1.1

- बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन हैं या नहीं। यदि कथन हैं, तो बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
 - गणित की सभी पाठ्य पुस्तकें रोचक होती हैं।
 - पृथ्वी से सूर्य की दूरी लगभग 1.5×10^8 km है।
 - सभी मानव वृद्ध हो जाते हैं।
 - उत्तरकाशी से हर्सिल की यात्रा थका देने वाली है।
 - महिला ने बाइनाकुलर से एक हाथी देखा।
- बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
 - सभी षट्भुज बहुभुज होते हैं।
 - कुछ बहुभुज पंचभुज होते हैं।
 - सभी सम संख्याएँ 2 से भाज्य नहीं होती हैं।
 - कुछ वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।
 - सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय नहीं होती हैं।
- मान लीजिए a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, जहाँ $ab \neq 0$ है, तब बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
 - a और b दोनों अनिवार्यतः शून्य होने चाहिए।
 - a और b दोनों शून्येतर होने चाहिए।
 - या तो a या b शून्येतर होना चाहिए।
- उपयुक्त प्रतिबंधों के साथ निम्नलिखित कथनों का ऐसा पुनःकथन दीजिए जिससे कि वे सत्य हो जाएँ।
 - यदि $a^2 > b^2$, तो $a > b$
 - यदि $x^2 = y^2$, तो $x = y$
 - यदि $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, तो $x = 0$
 - चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

A1.3 निगमनिक तर्कण

कक्षा IX में, आपको निगमनिक तर्कण की संकल्पना से परिचित कराया गया था। यहाँ हम अनेक उदाहरणों द्वारा यह स्पष्ट करेंगे कि किस प्रकार निगमनिक तर्कण के प्रयोग से, सत्य माने गए प्रदत्त कथनों से निष्कर्ष निकालते हैं। इन कथनों को परिकल्पनाएँ या आधार वाक्य (Hypotheses or Premises) कहते हैं। अब हम कुछ उदाहरणों से प्रारंभ करेंगे।

उदाहरण 5 : दिया हुआ है कि बीजापुर कर्नाटक राज्य में है, और मान लीजिए कि शबाना बीजापुर में रहती है। किस राज्य में शबाना रहती है?

हल : यहाँ दो परिकल्पनाएँ हैं :

(i) बीजापुर कर्नाटक राज्य में है।

(ii) शबाना बीजापुर में रहती है।

इन परिकल्पनाओं से हम यह निगमित करते हैं कि शबाना कर्नाटक राज्य में रहती है।

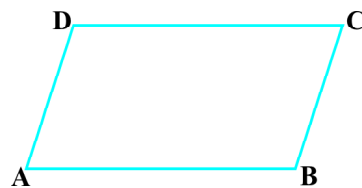
उदाहरण 6 : दिया हुआ है कि गणित की सभी पाठ्य-पुस्तकें रोचक होती हैं और मान लीजिए आप गणित की एक पाठ्य-पुस्तक पढ़ रहे हैं। जो पाठ्य-पुस्तक आप पढ़ रहे हैं उसके बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : दो परिकल्पनाओं का प्रयोग करके हम यह निगमित कर सकते हैं कि आप एक रोचक पाठ्य-पुस्तक पढ़ रहे हैं।

उदाहरण 7 : $y = -6x + 5$ दिया हुआ है और मान लीजिए कि $x = 3$ है, y का मान क्या है?

हल : दोनों परिकल्पनाओं से हमें $y = -6(3) + 5 = -13$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 : दिया हुआ है कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और मान लीजिए कि $AD = 5$ cm, $AB = 7$ cm (आकृति A1.1 देखिए)। DC और BC की लंबाइयों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?



आकृति A1.1

हल : हमें यह दिया हुआ है कि ABCD एक समांतरचतुर्भुज है अतः हम यह निगमित कर लेते हैं कि वे सभी गुणधर्म जो एक समांतरचतुर्भुज के होते हैं, ABCD के भी हैं। इसलिए विशेष रूप से यह गुणधर्म कि 'एक समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ' एक-दूसरे के बराबर होती हैं, ABCD पर भी लागू होता है। क्योंकि हम जानते हैं कि $AD = 5$ cm, इसलिए हम यह निगमित कर सकते हैं कि $BC = 5$ cm है। इसी प्रकार हम यह निगमित कर सकते हैं कि $DC = 7$ cm

टिप्पणी : इस उदाहरण में हम देखते हैं कि किस प्रकार एक दी हुई परिकल्पना में छिपे गुणधर्मों को ज्ञात करने और लागू करने की आवश्यकता प्रायः पड़ती रहती है।

उदाहरण 9 : दिया हुआ है कि सभी अभाज्य संख्याओं p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है और मान लीजिए कि 19423 एक अभाज्य संख्या है। $\sqrt{19423}$ के संबंध में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\sqrt{19423}$ अपरिमेय है।

ऊपर के उदाहरणों में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि हम यह नहीं जानते कि परिकल्पनाएँ सत्य हैं या नहीं। हम यह मानकर चलते हैं कि वे सत्य हैं, और तब निगमनिक तर्कण का प्रयोग करते हैं। दृष्टान्ततः उदाहरण 9 में हमने इस बात की जाँच नहीं की है कि 19423 अभाज्य संख्या है या नहीं। अपने तर्क के लिए हम इसे अभाज्य संख्या मान लेते हैं। इस अनुच्छेद में हम इस बात पर बल देने का प्रयास कर रहे हैं कि यदि एक विशेष कथन दिया हुआ है, तो एक निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हम निगमनिक तर्कण का प्रयोग किस प्रकार करते हैं। वास्तव में यहाँ इस बात का अधिक महत्त्व है कि हम तर्कण की सही प्रक्रिया का प्रयोग करें और तर्कण की यह प्रक्रिया परिकल्पनाओं की सत्यता या असत्यता पर निर्भर नहीं होती है। फिर भी, इस बात की ओर भी ध्यान देना चाहिए कि यदि हम गलत परिकल्पना से प्रारंभ करेंगे, तो हम गलत निष्कर्ष पर भी पहुँच सकते हैं।

प्रश्नावली A1.2

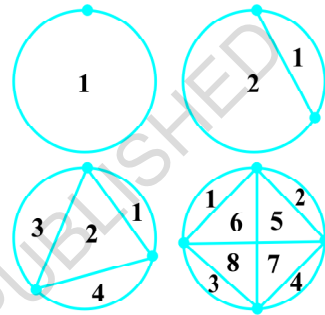
1. दिया हुआ है कि सभी महिलाएँ नश्वर हैं और मान लीजिए A एक महिला है। A के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
2. दिया हुआ है कि दो परिमेय संख्या का गुणनफल परिमेय है और मान लीजिए a और b परिमेय हैं तब ab के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
3. दिया हुआ है कि अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी (non-terminating) और अनावर्ती (non-recurring) है और $\sqrt{17}$ एक अपरिमेय संख्या है। $\sqrt{17}$ के दशमलव प्रसार के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
4. दिया हुआ है कि $y = x^2 + 6$ और $x = -1$ तब y के मान के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
5. दिया हुआ है कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और $\angle B = 80^\circ$ तब समांतर चतुर्भुज के अन्य कोणों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

6. दिया हुआ है कि PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है और इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। चतुर्भुज के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
7. दिया हुआ है कि सभी अभाज्य संख्या p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है और यह भी मान लीजिए कि 3721 एक अभाज्य संख्या है। क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\sqrt{3721}$ एक अपरिमेय संख्या है? क्या आपका निष्कर्ष सही है? क्यों या क्यों नहीं?

A1.4 कंजेक्चर (conjectures), प्रमेय, उपपत्तियाँ और गणितीय तर्कण

आकृति A1.2 पर विचार कीजिए। पहले वृत्त पर एक बिंदु है, दूसरे वृत्त पर दो बिंदु हैं, तीसरे पर तीन, इत्यादि। प्रत्येक स्थिति में बिंदुओं को मिलाने वाली सभी संभव रेखाएँ खींची गई हैं।

रेखाएँ वृत्त को परस्पर अपवर्जी क्षेत्रों (जिनमें कोई उभयनिष्ठ भाग नहीं होता है) में विभाजित करती हैं। हम इन्हें गिन सकते हैं और अपने परिणामों को सारणीबद्ध करते हैं। जैसा नीचे दर्शाया गया है:



आकृति A1.2

बिंदुओं की संख्या	प्रदेशों की संख्या
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

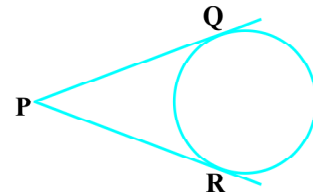
आप में से कुछ लोग उस सूत्र को प्राप्त कर सके होंगे जिसके प्रयोग से बिंदुओं की संख्या ज्ञात होने पर क्षेत्रों की संख्या की प्रागुक्ति कर सकते हैं। आप स्मरण कर सकते हैं कि कक्षा IX में, इस प्रकार के बुद्धिमत्ता पूर्ण अनुमान को 'कंजेक्चर' कहा गया है।

मान लीजिए आपका कंजेक्चर यह है कि यदि वृत्त पर ' n ' बिंदु दिए हुए हैं, तो इन बिंदुओं को समस्त संभव रेखाओं से मिलाने पर 2^{n-1} परस्पर अपवर्जी क्षेत्र बनते हैं। यह एक तर्कसंगत अनुमान लगता है। यह देखा जा सकता है कि यदि $n = 5$, तो हमें 16 क्षेत्र प्राप्त होते हैं। अतः 5 बिंदुओं के लिए इस सूत्र को सत्यापित कर लेने के बाद क्या आप संतुष्ट हैं कि किन्हीं भी n बिंदुओं के लिए 2^{n-1} क्षेत्र होते हैं? यदि ऐसा है, तो यदि कोई व्यक्ति आपसे यह पूछे कि आप $n = 25$ के लिए इसे कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं, तो आपकी प्रतिक्रिया क्या होगी? ऐसे प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए आपको एक ऐसी उपपत्ति की आवश्यकता होती है जो निस्संदेह यह प्रदर्शित करती हो कि यह परिणाम सत्य है या यह प्रदर्शित करने के लिए कि कुछ ' n ' के लिए यह परिणाम असफल हो जाता है, एक प्रत्युदाहरण होना चाहिए। वास्तव में, यदि आपमें धैर्य है और $n = 6$ पर इसे ज्ञात करने का प्रयास करें तो पाएँगे कि $n = 6$ पर 31 क्षेत्र होते हैं और $n = 7$ पर 57 क्षेत्र होते हैं। अतः ऊपर के कंजेक्चर का $n = 6$ एक प्रत्युदाहरण है। यह तथ्य प्रत्युदाहरण की शक्ति को प्रदर्शित करता है। आपको याद होगा कि कक्षा IX में इस बात पर चर्चा की गई है कि किसी कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए एक ही प्रत्युदाहरण पर्याप्त होता है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि $n = 1, 2, 3, 4$ और 5 पर परिणाम का सत्यापन करने के बाद भी हमने क्षेत्रों की संख्या से संबंधित उपपत्ति की आवश्यकता पर बल दिया है। आइए हम कुछ और उदाहरण लें। आप (अध्याय 5 में दिए गए) निम्नलिखित परिणाम से अवश्य परिचित होंगे: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ इसकी मान्यता को स्थापित करने के लिए $n = 1, 2, 3$, आदि के लिए परिणाम को सत्यापित कर देना ही पर्याप्त नहीं होता है, क्योंकि कुछ ऐसे भी ' n ' हो सकते हैं, जिसके लिए यह परिणाम सत्य न हो (जैसा कि ऊपर के उदाहरण में $n = 6$ पर परिणाम असफल हो जाता है)। अतः हमें एक ऐसी उपपत्ति की आवश्यकता होती है जो इसकी सत्यता निस्संदेह स्थापित करे। उच्च कक्षाओं में आप इसकी उपपत्ति के बारे में अध्ययन करेंगे।

अब, आकृति A1.3 पर विचार कीजिए, जहाँ PQ और PR बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं।

आप (प्रमेय 10.2 में) यह सिद्ध कर चुके हैं कि $PQ = PR$ है। आप इस प्रकार की अनेक आकृतियाँ खींच कर और संगत स्पर्श रेखाओं की मापी गई लंबाइयों द्वारा प्रत्येक स्थिति में इस परिणाम को केवल सत्यापित करके आप संतुष्ट नहीं हुए थे।



आकृति A1.3

क्या आपको याद है कि उपपत्ति में क्या-क्या था? यह कथनों (जिन्हें मान्य तर्क कहते हैं) के एक अनुक्रम से मिल कर बना था, जिसमें प्रत्येक कथन, उपपत्ति में आपूर्व कथनों से या प्रमाणित किए जाने वाले परिणाम से स्वतंत्र पहले सिद्ध किए जा चुके परिणामों से या अभिगृहीतों से या परिभाषाओं से या आपके द्वारा की गई कल्पनाओं से प्राप्त होता है और आप अपनी उपपत्ति को कथन $PQ = PR$ से समाप्त करते हैं अर्थात् उस कथन से जिसे आप सिद्ध करना चाहते थे।

उपपत्ति की रचना करने की यही विधि होती है।

अब हम कुछ उदाहरणों और प्रमेयों पर विचार करेंगे और उनकी उपपत्तियों का विश्लेषण करेंगे जिससे हमें यह अधिक अच्छी तरह समझने में सहायता मिलेगी कि इनकी रचना किस प्रकार की जाती है।

सबसे पहले हम उपपत्ति की तथाकथित 'प्रत्यक्ष' या 'निगमनिक' विधि के प्रयोग से प्रारंभ करेंगे। इस विधि में हम अनेक कथन प्रस्तुत करते हैं। **प्रत्येक कथन पिछले कथनों पर आधारित होता है।** यदि प्रत्येक कथन तार्किक रूप से सही है (अर्थात् एक मान्य तर्क है), तो इससे सही निष्कर्ष प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 : दो परिमेय संख्याओं का योगफल एक परिमेय संख्या होती है।

हल :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
1.	मान लीजिए x और y परिमेय संख्याएँ हैं।	क्योंकि परिणाम परिमेय संख्याओं के बारे में है, इसीलिए हम x और y से प्रारंभ करते हैं जो कि परिमेय हैं।
2.	मान लीजिए $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ और $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ जहाँ m, n, p और q पूर्णांक हैं।	परिमेय संख्याओं की परिभाषा प्रयुक्त करें।
3.	अतः $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	क्योंकि परिणाम परिमेय संख्याओं के योगफल के बारे में है, इसलिए हम $x + y$ लेते हैं।

4.	पूर्णाकों के गुणधर्मों को लागू करने पर हम देखते हैं कि $mq + np$ और nq पूर्णांक हैं।	पूर्णाकों के ज्ञात गुणधर्मों के प्रयोग करने पर।
5.	क्योंकि $n \neq 0$ और $q \neq 0$, इसलिए $nq \neq 0$.	पूर्णाकों के ज्ञात गुणधर्मों का प्रयोग करके।
6.	अतः, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ एक परिमेय संख्या है।	परिमेय संख्या की परिभाषा का प्रयोग करके।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर की उपपत्ति का प्रत्येक कथन पहले से स्थापित किए गए तथ्य या परिभाषा पर आधारित है।

उदाहरण 11 : 3 से बड़ी प्रत्येक अभाज्य संख्या $6k + 1$ या $6k + 5$ के रूप की होती है, जहाँ k एक पूर्णांक है।

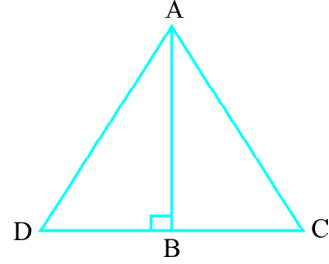
हल :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
1.	मान लीजिए p , 3 से बड़ी एक अभाज्य संख्या है।	क्योंकि परिणाम का संबंध 3 से बड़ी एक अभाज्य संख्या से है, इसलिए सबसे पहले हम इस प्रकार की संख्या से प्रारंभ करते हैं।
2.	p को 6 से भाग देने पर हम यह देखते हैं कि p का रूप $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, या $6k + 5$ हो सकता है, जहाँ k एक पूर्णांक है।	यूक्लिड की विभाजन-प्रमेयिका का प्रयोग करने पर
3.	परंतु $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ और $6k + 3 = 3(2k + 1)$ अतः ये अभाज्य संख्याएँ नहीं हैं।	अब हम शेषफलों का विश्लेषण करेंगे जबकि p एक अभाज्य संख्या हो।
4.	अतः p को अनिवार्यतः $6k + 1$ या $6k + 5$ के रूप का होना होगा, जहाँ k एक पूर्णांक है।	अन्य विकल्पों का निराकरण करने के बाद हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के उदाहरण में विभिन्न विकल्पों का निराकरण कर लेने के बाद हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। इस विधि को कभी-कभी निःशेषण द्वारा उपपत्ति (proof by exhaustion) कहा जाता है।

प्रमेय A1.1 (पाइथागोरस-प्रमेय का विलोम):

यदि एक त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई का वर्ग अन्य दो भुजाओं की लंबाईयों के वर्गों के योगफल के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।



आकृति A1.4

उपपत्ति :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण
1.	मान लीजिए $\triangle ABC$ परिकल्पना $AC^2 = AB^2 + BC^2$ को संतुष्ट करती है।	क्योंकि हम इस प्रकार के त्रिभुज से संबंधित कथन को सिद्ध कर रहे हैं, इसलिए हम इसी को लेकर प्रारंभ करते हैं।
2.	AB पर लंब रेखा BD की रचना कीजिए इस प्रकार कि $BD = BC$ हो और A को D से मिलाइए।	यह वह अंतर्ज्ञान वाला चरण है, जिसके बारे में हम कह चुके हैं कि इसकी आवश्यकता हमें प्रमेयों को सिद्ध करने में प्रायः होगी।
3.	रचना के अनुसार $\triangle ABD$ एक समकोण त्रिभुज है, और पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार $AD^2 = AB^2 + BD^2$	हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हैं जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है।
4.	रचना के अनुसार $BD = BC$ है। अतः $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	तर्कसंगत निगमन
5.	अतः $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	कल्पना और पिछले कथन को लागू करने पर
6.	क्योंकि AC और AD धनात्मक है, इसलिए $AC = AD$	संख्याओं के ज्ञात गुणधर्म को लागू करने पर

7.	अभी ही हमने यह दर्शाया है कि $AC = AD$ और रचना के अनुसार $BC = BD$ और AB उभयनिष्ठ है। अतः SSS के अनुसार $\triangle ABC \cong \triangle ABD$	ज्ञात प्रमेय लागू करने पर
8.	क्योंकि $\triangle ABC \cong \triangle ABD$, इसलिए $\angle ABC = \angle ABD$ जो कि एक समकोण है	पहले स्थापित तथ्य के आधार पर तर्कसंगत निगमन

टिप्पणी : ऊपर दिए गए प्रत्येक परिणाम को एक-दूसरे से शृंखलित चरणों के अनुक्रम से सिद्ध किया गया है। इनके क्रम का महत्त्व है। उपपत्ति का प्रत्येक चरण पिछले चरणों और पहले ज्ञात किए गए परिणामों से प्राप्त होता है (प्रमेय 6.9 भी देखिए)।

प्रश्नावली A1.3

नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में आपको एक कथन सिद्ध करने के लिए कहा गया है। प्रत्येक उपपत्ति में प्रयोग किए गए सभी चरण बताइए और प्रत्येक चरण के लिए कारण बताइए।

- सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल, 4 से भाज्य होता है।
- दो क्रमागत विषम संख्याएँ लीजिए। उनके वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए और तब प्राप्त परिणाम में 6 जोड़ दीजिए। सिद्ध कीजिए कि इस तरह प्राप्त की गई नई संख्या सदा ही 8 से भाज्य होती है।
- यदि $p \geq 5$ एक अभाज्य संख्या हो तो दिखाइए कि $p^2 + 2$, संख्या 3 से भाज्य है।
[संकेत: उदाहरण 11 का प्रयोग कीजिए।]
- मान लीजिए x और y परिमेय संख्याएँ हैं। दिखाइए कि xy एक परिमेय संख्या है।
- यदि a और b धन पूर्णांक हों, तो आप जानते हैं कि $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, जहाँ q एक पूर्ण संख्या है। सिद्ध कीजिए $\text{HCF}(a, b) = \text{HCF}(b, r)$
[संकेत: मान लीजिए $\text{HCF}(b, r) = h$ है। अतः $b = k_1 h$ और $r = k_2 h$, जहाँ k_1 और k_2 असहभाज्य (co-prime) हैं।]
- त्रिभुज ABC की भुजा BC की एक समांतर रेखा भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 कथन का निषेध (Negation)

इस भाग में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि किसी कथन का 'निषेध' करने का क्या अर्थ है, परंतु चर्चा प्रारंभ करने से पहले हम आपको कुछ संकेतन से परिचित करा देना चाहते

हैं, जिनकी सहायता से हम इन संकल्पनाओं को सरलता से समझ सकते हैं। आइए सबसे पहले हम एक कथन को एक एकल इकाई के रूप में लें और उसे एक नाम दे दें। उदाहरण के लिए हम कथन '1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी' को p से प्रकट कर सकते हैं। इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

p : 1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।

इसी प्रकार आइए हम यह भी लिख लें।

q : सभी अध्यापक महिलाएँ हैं।

r : माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।

s : $2 + 2 = 4$.

t : त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है।

यह संकेतन हमें कथनों के गुणधर्मों के बारे में चर्चा करने में सहायता करती है और इस बात में भी सहायता करती है कि हम उन्हें किस प्रकार संयोजित कर सकते हैं। प्रारंभ में उन कथनों का अध्ययन करेंगे, जिन्हें हम 'सरल' कथन कहते हैं और तदुपरांत 'मिश्र' कथनों का अध्ययन करेंगे।

आइए अब हम निम्नलिखित सारणी पर विचार करें जिसमें हम दिए हुए प्रत्येक कथन से एक नया कथन की रचना करेंगे।

मूल कथन	नया कथन
p : 1 सितंबर 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।	$\sim p$: यह असत्य है कि 1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।
q : सभी अध्यापक महिला हैं।	$\sim q$: यह असत्य है कि सभी अध्यापक महिला हैं।
r : माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।	$\sim r$: यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।
s : $2 + 2 = 4$	$\sim s$: यह असत्य है कि $2 + 2 = 4$
t : त्रिभुज ABC समबाहु है।	$\sim t$: यह असत्य है कि त्रिभुज ABC समबाहु है।

सारणी में दिया गया प्रत्येक नया कथन संगत पुराने कथन का निषेध (negation) है। अर्थात् $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ और $\sim t$ क्रमशः कथनों p , q , r , s और t के निषेध हैं। यहाँ $\sim p$ को

‘नहीं p ’ (not p) पढ़ा जाता है। कथन $\sim p$, उस निश्चयात्मक कथन (assertion) का निषेध करता है जिसे कथन p कहता है। ध्यान दीजिए कि अपनी सामान्य बातचीत में $\sim p$ का अर्थ यह है कि ‘1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा नहीं हुई थी।’ फिर भी, ऐसा करते समय हमें सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। आप संभवतः यह सोच सकते हैं कि दिए हुए कथन में किसी उपयुक्त स्थान पर केवल शब्द ‘नहीं’ लगा देने से ही कथन का निषेध प्राप्त किया जा सकता है। यद्यपि यह क्रिया ‘ p ’ के संबंध में तो लागू हो जाती है, परंतु कठिनाई तब होती है जबकि हमारा कथन शब्द ‘सभी’ से प्रारंभ होता है। उदाहरण के लिए कथन q : सभी अध्यापक महिला हैं पर विचार कीजिए। हमने यह कहा है कि इस कथन का निषेध $\sim q$: यह असत्य है कि सभी अध्यापक महिला होती हैं। यह इस कथन के ही समान है कि ‘कुछ अध्यापक ऐसे हैं जो पुरुष हैं।’ आइए अब यह देखें कि जब हम q में केवल ‘नहीं’ लगा देते हैं तब क्या होता है। तब हमें यह कथन प्राप्त होता है कि “सभी अध्यापक महिला नहीं हैं” या हम यह कथन प्राप्त कर सकते हैं कि “नहीं हैं सभी अध्यापक महिला”। पहले कथन से लोग भ्रम में पड़ सकते हैं, इससे यह अर्थ निकलता है कि सभी अध्यापक पुरुष हैं (यदि हम शब्द ‘सभी’ पर बल देते हैं)। यह निश्चय ही q का निषेध नहीं है। तथापि दूसरे कथन से $\sim q$ का अर्थ प्राप्त हो जाता है अर्थात् कम से कम एक अध्यापक ऐसा है जो महिला नहीं है। अतः किसी कथन का निषेध लिखते समय सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है।

अब, हम इस बात का निर्णय कैसे करें कि जो निषेध हमने प्राप्त किया है वह सही है या नहीं? इसके लिए हम निम्नलिखित कसौटी का प्रयोग करते हैं।

मान लीजिए p एक कथन है और $\sim p$ इसका निषेध है। तब $\sim p$ असत्य होता है जब कभी p सत्य होता है और $\sim p$ सत्य होता है जब कभी p असत्य होता है।

उदाहरण के लिए, यदि यह सत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है, तो यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है। यदि यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है, तो यह सत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है।

इसी प्रकार कथनों s और t के निषेध ये हैं:

$$s : 2 + 2 = 4; \text{ निषेध } \sim s : 2 + 2 \neq 4$$

$$t : \text{त्रिभुज ABC समबाहु है, } \sim t : \text{त्रिभुज ABC समबाहु नहीं है।}$$

अब, $\sim(\sim s)$ क्या है? यह $2 + 2 = 4$ होगा जो कि s है और $\sim(\sim t)$ क्या है? यह त्रिभुज ABC समबाहु है’ अर्थात् t होगा। वस्तुतः यदि कोई कथन p हो, तो $\sim(\sim p)$ स्वयं कथन p होता है।

उदाहरण 12 : निम्नलिखित कथनों के निषेध बताइए:

- (i) माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है।
- (ii) सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।
- (iii) $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।
- (iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।
- (v) सभी अध्यापक पुरुष नहीं हैं।
- (vi) कुछ घड़े भूरे नहीं हैं।
- (vii) ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$

हल :

- (i) यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है अर्थात् माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।
- (ii) यह असत्य है कि सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ हैं अर्थात् कुछ (कम से कम एक) अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं हैं। इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है 'सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं हैं।'
- (iii) यह असत्य है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है अर्थात् $\sqrt{2}$ अपरिमेय नहीं है।
- (iv) यह असत्य है कि कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं अर्थात् कोई भी परिमेय संख्या पूर्णांक नहीं है।
- (v) यह असत्य है कि सभी अध्यापक पुरुष नहीं हैं अर्थात् सभी अध्यापक पुरुष हैं।
- (vi) यह असत्य है कि कुछ घड़े भूरे नहीं हैं अर्थात् सभी घड़े भूरे हैं।
- (vii) यह असत्य है कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$ अर्थात् कम से कम एक वास्तविक संख्या x है जिससे कि $x^2 = -1$

टिप्पणी : ऊपर की चर्चा से किसी कथन का निषेध प्राप्त करने का निम्नलिखित **कार्यकारी नियम** (working rule) प्राप्त कर सकते हैं:

- (i) पहले 'नहीं' के साथ कथन लिखिए।
- (ii) यदि कोई भ्रम हो, तो आप कुछ उपयुक्त संशोधन (modification) कर सकते हैं, विशेष रूप से 'सभी' या 'कुछ' से संबंधित कथनों में।

प्रश्नावली A1.4

1. निम्नलिखित कथनों के निषेध लिखिए:

- (i) मनुष्य नश्वर (mortal) है।
- (ii) रेखा l रेखा m के समांतर है।
- (iii) इस अध्याय में अनेक प्रश्नावलियाँ हैं।
- (iv) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या है।
- (v) कुछ अभाज्य संख्याएँ विषम है।
- (vi) कोई छात्र आलसी नहीं है।
- (vii) कुछ बिल्लियाँ काली नहीं है।
- (viii) ऐसी कोई संख्या x नहीं है जिससे कि $\sqrt{x} = -1$
- (ix) संख्या 2, धन पूर्णांक a को विभाजित करती है।
- (x) पूर्णांक a और b असहभाज्य है।

2. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में दो कथन हैं। बताइए कि दूसरा कथन पहले कथन का निषेध है या नहीं

- (i) मुमताज भूखी है,
मुमताज भूखी नहीं है।
- (ii) कुछ बिल्लियाँ काली हैं,
कुछ बिल्लियाँ भूरी हैं।
- (iii) सभी हाथी विशाल हैं।
एक हाथी विशाल नहीं है।
- (iv) सभी अग्निशामक यंत्र लाल हैं।
सभी अग्निशामक यंत्र लाल नहीं हैं।
- (v) कोई आदमी गाय नहीं है।
कुछ आदमी गाय हैं।

A1.6 कथन का विलोम

अब हम एक कथन के विलोम की अभिधारणा (notion) का पता लगाएँगे। इसके लिए हमें 'मिश्र (compound)' कथन की अर्थात् एक ऐसे कथन की आवश्यकता होती है जो एक या अधिक 'सरल' कथनों का संयोजन होता है। ऐसे तो मिश्र कथन बनाने की अनेक विधियाँ हैं, परंतु यहाँ हम उन विधियों पर ध्यान केंद्रित करेंगे जो शब्दों 'यदि' और 'तो' के प्रयोग द्वारा दो सरल कथनों को जोड़कर प्राप्त किए जाते हैं। उदाहरण के लिए कथन

कथन 'यदि वर्षा हो रही है, तो साइकिल से जाना कठिन है' निम्नलिखित दो कथनों से बना है।

p : वर्षा हो रही है।

q : साइकिल से जाना कठिन।

पूर्व में बताए गए संकेतन का प्रयोग करके हम यह कह सकते हैं: यहाँ, तो q है। हम यह भी कह सकते हैं कि ' p से तात्पर्य q प्राप्त होता है'। और इसे हम $p \Rightarrow q$ से प्रकट करते हैं।

अब, मान लीजिए कि कथन यह है कि 'यदि पानी की टंकी काली है, तो इसमें पीने

का पानी है।' यह $p \Rightarrow q$ के रूप का है जहाँ परिकल्पना p है (पानी की टंकी काली है) और निष्कर्ष q है (टंकी में पीने का पानी है)। मान लीजिए हम परिकल्पना और निष्कर्ष का विनिमय (Interchange) कर दें, तब ऐसी स्थिति में हमें क्या प्राप्त होता है? हमें $q \Rightarrow p$ प्राप्त होता है अर्थात् यदि टंकी में पीने वाला पानी है, तो टंकी अवश्य काली होगी। इस कथन को कथन $p \Rightarrow q$ का **विलोम** (converse) कहते हैं।

व्यापक रूप में कथन $p \Rightarrow q$ का **विलोम** $q \Rightarrow p$ होता है जहाँ p और q कथन हैं। ध्यान दीजिए कि $p \Rightarrow q$ और $q \Rightarrow p$ एक-दूसरे के विलोम हैं।

उदाहरण 13 : निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:

- (i) यदि जमीला साइकिल चला रही है, तो 17 अगस्त रविवार को पड़ता है।
- (ii) यदि 17 अगस्त रविवार है, तो जमीला साइकिल चला रही है।
- (iii) यदि पौलिने क्रोधित होती है, तो उसका चेहरा लाल हो जाता है।
- (iv) यदि एक व्यक्ति के पास शिक्षा में स्नातक की डिग्री है, तो उसे शिक्षण की अनुमति होती है।
- (v) यदि एक व्यक्ति को वायरल संक्रमण है, तो उसे तेज बुखार होता है।
- (vi) यदि अहमद मुंबई में है, तो वह भारत में है।
- (vii) यदि त्रिभुज ABC समबाहु है, तो उसके सभी अंतःकोण बराबर होते हैं।
- (viii) यदि x एक अपरिमेय संख्या है, तो x का दशमलव प्रसार अनवसानी (non-terminating) अनावर्ती (non-recurring) होता है।
- (ix) यदि $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणखंड है, तो $p(a) = 0$ ।

हल : ऊपर दिया गया प्रत्येक कथन $p \Rightarrow q$ के रूप का है। अतः विलोम ज्ञात करने के लिए पहले हम p और q को पहचानते हैं और तब $q \Rightarrow p$ लिखते हैं।

- (i) p : जमीला साइकिल चला रही है और q : 17 अगस्त रविवार को पड़ता है। अतः विलोम यह है यदि 17 अगस्त रविवार को पड़ता है, तो जमीला साइकिल चला रही है।
- (ii) यह (i) का विलोम है। अतः इसका विलोम ऊपर (i) में दिया गया कथन है।
- (iii) यदि पौलीन का चेहरा लाल हो जाता है, तो वह क्रोधित है।
- (iv) यदि एक व्यक्ति को पढ़ाने की अनुमति है, तो उसके पास शिक्षा में स्नातक की डिग्री है।
- (v) यदि एक व्यक्ति को तेज बुखार है तो, उसे वायरल संक्रमण है।
- (vi) यदि अहमद भारत में है, तो वह मुंबई में है।
- (vii) यदि त्रिभुज ABC के सभी अंतःकोण बराबर हैं, तो वह समबाहु त्रिभुज है।

(viii) यदि x का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, तो x एक परिमेय संख्या है।

(ix) यदि $p(a) = 0$, तो $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

ध्यान दीजिए कि इस बात की चिंता किए बिना कि कथन सत्य है या असत्य, हमने ऊपर दिए गए प्रत्येक कथन का केवल विलोम लिख दिया है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए। यदि अहमद मुंबई में है, तो वह भारत में है। यह कथन सत्य है। आइए अब हम इसका विलोम लें। यदि अहमद भारत में है, तो वह मुंबई में है। यह आवश्यक नहीं है कि यह सदा सत्य ही हो-वह भारत के किसी भी भाग में हो सकता है।

गणित में, विशेष रूप से ज्यामिति में आपको ऐसी अनेक स्थितियाँ मिलती हैं, जहाँ $p \Rightarrow q$ सत्य होता है और आपको यह निर्णय लेना होता है कि क्या विलोम अर्थात् $q \Rightarrow p$ भी सत्य है।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित कथनों के विलोम बताइए। प्रत्येक स्थिति में यह भी निर्णय लीजिए कि विलोम सत्य है या असत्य।

- (i) यदि n एक सम पूर्णांक है, तो $2n + 1$ एक विषम पूर्णांक होता है।
- (ii) यदि एक वास्तविक संख्या का दशमलव-प्रसार सांत (terminating) है, तो संख्या परिमेय है।
- (iii) यदि एक तिर्यक् छेदी रेखा (transversal) दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
- (iv) यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख-भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।
- (v) यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं।

हल :

- (i) विलोम यह है कि 'यदि $2n + 1$ एक विषम पूर्णांक है, तो n एक सम पूर्णांक होता है।' यह एक असत्य कथन है (उदाहरण के लिए $15 = 2(7) + 1$, और 7 विषम है।)
- (ii) 'यदि एक वास्तविक संख्या परिमेय है, तो इसका दशमलव प्रसार सांत होता है।' यह विलोम है। यह एक असत्य कथन है। क्योंकि परिमेय संख्या का एक अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार भी हो सकता है।
- (iii) विलोम यह है कि 'यदि एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती हो कि संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।' कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक के अभिगृहीत 6.4 के अनुसार हमने यह मान लिया है कि यह कथन सत्य है।
- (iv) 'यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो, तो इसके सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।' यह विलोम है। यह सत्य है (प्रमेय 8.1, कक्षा IX)।

- (v) 'यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो वे सर्वांगसम होते हैं' विलोम है। यह कथन असत्य है। यह हम आप पर छोड़ रहे हैं कि आप इनके लिए एक उपयुक्त प्रत्युदाहरण ज्ञात करें।

प्रश्नावली A1.5

- निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए
 - यदि टोकियो में गर्मी हो, तो शरन के शरीर से अधिक पसीना निकलने लगता है।
 - यदि शालिनी भूखी हो, तो उसका पेट कुड़कुड़ाने लगता है।
 - यदि यशवंत को छात्र-वृत्ति मिल रही हो, तो उसे एक डिग्री मिल सकती है।
 - यदि पौधे में फूल लगे हुए हों, तो वह सजीव होता है।
 - यदि जानवर एक बिल्ली है, तो इसकी एक पूँछ होती है।
- निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए। प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि विलोम सत्य है या असत्य
 - यदि त्रिभुज ABC समद्विबाहु हो, तो इसके आधार कोण बराबर होते हैं।
 - यदि एक पूर्णांक विषम हो, तो इसका वर्ग एक विषम पूर्णांक होता है।
 - यदि $x^2 = 1$, तो $x = 1$
 - यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज हो, तो AC तथा BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
 - यदि a , b और c पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - यदि x और y दो विषम संख्याएँ हैं, तो $x + y$ एक सम संख्या होती है।
 - यदि एक समांतर चतुर्भुज PQRS के शीर्ष बिंदु एक वृत्त पर स्थित हों, तो वह एक आयत होता है।

A1.7 विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति

अभी तक आपने सभी उदाहरणों में परिणामों की सत्यता स्थापित करने के लिए प्रत्यक्ष तर्क का प्रयोग किया था। अब हम 'परोक्ष' तर्कों विशेषरूप से 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' (proof by contradiction) नामक गणित के एक अति शक्तिशाली साधन का पता लगाएँगे। हम इस विधि का प्रयोग अध्याय 1 में अनेक संख्याओं की अपरिमितता स्थापित करने और अन्य अध्यायों में कुछ प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए कर चुके हैं। यहाँ हम इस अभिधारणा को स्पष्ट करने के लिए अनेक उदाहरण लेंगे।

आगे अध्ययन करने से पहले आइए हम इस बात पर चर्चा करें कि विरोधोक्ति क्या है। गणित में विरोध तब होता है जबकि हमें एक ऐसा कथन p प्राप्त होता है कि p सत्य होता है और इसका निषेध $\sim p$ भी सत्य होता है। उदाहरण के लिए,

p : , जहाँ a और b असहभाज्य संख्याएँ हैं।

q : संख्या 2 'a' और 'b' दोनों को विभाजित करती है।

यदि हम यह मान लें कि p सत्य है और हम यह भी दर्शा सकें कि q भी सत्य है, तो, हमें एक विरोधोक्ति प्राप्त होती है क्योंकि q का यह तात्पर्य है कि p का निषेध सत्य है। यदि आपको याद हो कि यही बात यथातथ्य तब घटी थी जब हम यह सिद्ध करने का प्रयास कर रहे थे कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है (देखिए अध्याय 1)।

विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति किस प्रकार कार्य करती है? आइए एक विशिष्ट उदाहरण लेकर इस पर हम विचार करें। मान लीजिए निम्नलिखित दिया हुआ है:

सभी महिलाएँ नश्वर होती हैं। A एक महिला है। सिद्ध कीजिए कि महिला A नश्वर है।

यद्यपि यह एक सरल उदाहरण है, फिर भी आइए हम देखें कि विरोधोक्ति से इसे हम कैसे सिद्ध कर सकते हैं।

- आइए हम यह मान लें कि हम कथन p की सत्यता स्थापित करना चाहते हैं (यहाँ हम यह दर्शाना चाहते हैं कि p : 'महिला A नश्वर है' सत्य है)
- अतः सबसे पहले हम यह मान लेते हैं कि कथन सत्य नहीं है अर्थात् हम यह मान लेते हैं कि p का निषेध सत्य है। (अर्थात् महिला A नश्वर नहीं है)।
- तब हम p के निषेध की सत्यता पर आधारित अनेक तर्कसंगत निगमन करते हैं। (क्योंकि 'महिला A नश्वर नहीं है' इसलिए हमें कथन 'सभी महिलाएँ नश्वर हैं' का एक प्रत्युदाहरण प्राप्त हो जाता है। अतः यह असत्य है कि सभी महिलाएँ नश्वर हैं)।
- यदि इससे विरोधोक्ति उत्पन्न होती है, तो यह विरोधोक्ति हमारी दोषपूर्ण मान्यता कि ' p सत्य नहीं है' के कारण होता है। (यह एक विरोधोक्ति है क्योंकि हमने यह दर्शाया है कि कथन 'सभी महिलाएँ नश्वर हैं' और इसका निषेध कि 'सभी महिलाएँ नश्वर नहीं हैं', सत्य है। यह विरोधोक्ति इसलिए होती है, क्योंकि हम यह मानकर चले थे कि A नश्वर नहीं है)।
- अतः हमारी कल्पना गलत है अर्थात् p को सत्य होना ही है (अतः A नश्वर है)।

उदाहरण 15 : एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल अपरिमेय होता है।

हल :

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
हम विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए r एक शून्येतर परिमेय संख्या है और x एक अपरिमेय संख्या है। मान लीजिए, $r = \frac{m}{n}$ जहाँ m, n पूर्णांक है और $m \neq 0$, $n \neq 0$ हमें यह सिद्ध करना है कि rx अपरिमेय है।	
मान लीजिए rx परिमेय है।	यहाँ हम उस कथन का निषेध सत्य मान ले रहे हैं जिसे हमें सिद्ध करना है।
तब, $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, जहाँ p और q पूर्णांक है।	यह पिछले कथन और परिमेय संख्या की परिभाषा से प्राप्त होता है।
समीकरण $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, और $r = \frac{m}{n}$, का प्रयोग करने पर हमें $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ प्राप्त होता है।	
क्योंकि np और mq पूर्णांक हैं और $mq \neq 0$, इसलिए x एक परिमेय संख्या है।	पूर्णाकों के गुणधर्मों और परिमेय संख्या की परिभाषा का प्रयोग करने पर
यह एक विरोधोक्ति है क्योंकि हमने x को परिमेय दिखाया है, परंतु हमारी परिकल्पना के अनुसार x अपरिमेय है।	इसी विरोधोक्ति को हम ढूँढ़ रहे थे।
विरोधोक्ति इस दोषपूर्ण कल्पना, कि rx परिमेय है के कारण होता है।	तर्कसंगत निगमन

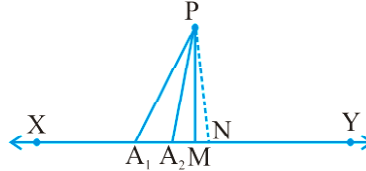
अब हम उदाहरण 11 सिद्ध करेंगे, परंतु इस बार हम विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करेंगे। परिणाम नीचे दिया गया है।

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
आइए हम यह मान लें कि कथन सत्य नहीं है।	जैसाकि हम पहले देख चुके हैं कि यह विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति की सहायता से तर्क देने का प्रारंभ है।
अतः हम यह मान लेते हैं कि एक ऐसी अभाज्य संख्या $p > 3$ होती है जो $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप का होता है, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।	यह परिणाम के कथन का निषेध है।
6 के भाग पर यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने और इस तथ्य का प्रयोग करने पर कि p , $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप का नहीं है, हमें $p = 6n$ या $6n + 2$ या $6n + 3$ या $6n + 4$ प्राप्त होता है।	पहले सिद्ध किए गए परिणामों का प्रयोग करने पर।
अतः p या तो 2 या 3 से भाज्य है।	तर्कसंगत निगमन
इसलिए, p अभाज्य नहीं है।	तर्कसंगत निगमन
यह एक विरोधोक्ति है, क्योंकि हमारी परिकल्पना के अनुसार p अभाज्य है।	तथ्यतः हम यही चाहते हैं
विरोधोक्ति इसलिए होती है क्योंकि हम यह मानकर चले थे कि एक ऐसी अभाज्य संख्या $p > 3$ होती है, जो $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप की नहीं होती।	
परिणामतः 3 से बड़ी प्रत्येक अभाज्य संख्या $6n + 1$ या $6n + 5$ रूप की है।	यह निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

टिप्पणी : ऊपर की उपपत्ति के उदाहरण से यह पता चलता है कि एक परिणाम को अनेक विधियों से सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय A1.2 : एक बिंदु से उस रेखा के, जो उस बिंदु से होकर नहीं जाती है, बिंदुओं को मिलाने वाले सभी रेखा-खंडों में लघुतम रेखा-खंड रेखा पर लंब होता है।

उपपत्ति :



आकृति A1.5

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
मान लीजिए XY दी हुई रेखा है, P एक बिंदु है, जो XY पर स्थित नहीं है और PM, PA_1 , $PA_2, \dots$ आदि, बिंदु P से रेखा XY के बिंदुओं तक खींचे गए रेखा-खंड हैं जिनमें PM लघुतम रेखा-खंड है (आकृति A 1.5 देखिए)	क्योंकि हमें यह सिद्ध करना है कि सभी रेखा-खंडों PM, PA_1 , $PA_2, \dots$ आदि में लघुतम रेखा-खंड, XY पर लंब होता है, अतः सबसे पहले हम इन रेखा-खंडों को लेते हैं।
मान लीजिए PM, XY पर लंब नहीं है।	यह विरोधोक्ति द्वारा सिद्ध किए जाने वाले कथन का निषेध है।
रेखा XY पर PN लंब डालिए, जैसाकि आकृति A1.5 में बिंदुकि रेखा से दिखाया गया है।	परिणामों को सिद्ध करने के लिए हमें प्रायः रचना करने की आवश्यकता पड़ती है।
सभी रेखा-खंडों PM, PN, PA_1 , $PA_2, \dots$ आदि में PN लघुतम रेखा-खंड है, जिसका अर्थ यह है कि $PN < PM$	समकोण त्रिभुज की भुजा कर्ण से छोटी होती है और संख्याओं के ज्ञात गुणधर्म।
यह हमारे इस परिकल्पना की विरोधोक्ति है कि ऐसी सभी रेखा-खंडों में PM लघुतम रेखा-खंड है।	यथातथ्य हम यही चाहते हैं।
अतः रेखा-खंड PM, XY पर लंब है।	हम निष्कर्ष पर आ जाते हैं।

प्रश्नावली A1.6

- मान लीजिए $a + b = c + d$, और $a < c$, तो विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $b > d$
- मान लीजिए r एक परिमेय संख्या है और x एक अपरिमेय संख्या है। विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $r + x$ एक अपरिमेय संख्या है।
- विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि यदि किसी पूर्णांक a के लिए a^2 सम है, तो a भी सम होता है।
[संकेत: मान लीजिए a सम नहीं है, अर्थात् यह $2n + 1$ के रूप का है, जहाँ n एक पूर्णांक है और तब आगे बढ़िए।]
- ‘विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति’ का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि यदि पूर्णांक a के लिए $a^2, 3$ से भाज्य हो, तो a , भी 3 से भाज्य है।
- विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि n का ऐसा कोई मान नहीं होता जिसके लिए 6^n का अंतिम अंक शून्य हो।
- विरोधोक्ति का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि एक समतल की दो रेखाएँ एक से अधिक बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकती हैं।

A1.8 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

- किसी उपपत्ति के विभिन्न अवयव और कक्षा 9 में पढ़ी गई अन्य संबंधित संकल्पनाएँ।
- किसी कथन का निषेध।
- किसी कथन का विलोम।
- विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति।

उत्तर/संकेत

प्रश्नावली 1.1

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) LCM = 182; HCF = 13 (ii) LCM = 23460; HCF = 2 (iii) LCM = 3024; HCF = 6
3. (i) LCM = 420; HCF = 3 (ii) LCM = 11339; HCF = 1 (iii) LCM = 1800; HCF = 1
4. 22338
7. 36 मिनट

प्रश्नावली 2.1

1. (i) कोई शून्यक नहीं (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

प्रश्नावली 2.2

1. (i) -2, 4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
(iv) -2, 0 (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$
2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) रैखिक समीकरणों का वांछित युग्म है :

$$x + y = 10; x - y = 4, \text{ जहाँ } x \text{ लड़कियों की संख्या है तथा } y \text{ लड़कों की संख्या है।}$$

ग्राफीय हल के लिए ग्राफ पेपर पर एक ही अक्ष को लेते हुए इन समीकरणों का ग्राफ खींचिए।

$$\text{लड़कियाँ} = 7, \text{ लड़के} = 3.$$

- (ii) रैखिक समीकरणों का वांछित युग्म है:

$$5x + 7y = 50; 7x + 5y = 46, \text{ जहाँ } x \text{ और } y \text{ क्रमशः एक पेंसिल और एक कलम के मूल्य (₹ में) हैं।}$$

ग्राफीय हल के लिए ग्राफ पेपर पर समान अक्षों को लेते हुए इन समीकरणों का ग्राफ खींचिए।

$$\text{एक पेंसिल का मूल्य} = ₹ 3, \text{ एक कलम का मूल्य} = ₹ 5$$

2. (i) एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है। (ii) संपाती (iii) समांतर
3. (i) संगत (ii) असंगत (iii) संगत
(iv) संगत (v) संगत
4. (i) संगत (ii) असंगत (iii) संगत (iv) असंगत

उपरोक्त (i) का हल, $y = 5 - x$ द्वारा प्रदत्त है, जहाँ x का कोई भी मान हो सकता है। अर्थात् अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

उपरोक्त (iii) का हल $x = 2, y = 2$ है अर्थात् अद्वितीय हल है।

5. लंबाई = 20 m और चौड़ाई = 16 m.

6. तीनों भागों के लिए एक संभावित हल है :

$$(i) 3x + 2y - 7 = 0$$

$$(ii) 2x + 3y - 12 = 0$$

$$(iii) 4x + 6y - 16 = 0$$

7. त्रिभुज के शीर्ष $(-1, 0), (4, 0)$ और $(2, 3)$ हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $x=9, y=5$ (ii) $s=9, t=6$ (iii) $y=3x-3$,
जहाँ x कोई भी मान ले सकता है अर्थात् अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।
(iv) $x=2, y=3$ (v) $x=0, y=0$ (vi) $x=2, y=3$
2. $x=-2, y=5; m=-1$.
3. (i) $x-y=26, x=3y$, जहाँ x और y ($x > y$) दो संख्याएँ हैं; $x=39, y=13$.
(ii) $x-y=18, x+y=180$, जहाँ x और y अंशों में दो कोणों की माप हैं; $x=99, y=81$.
(iii) $7x+6y=3800, 3x+5y=1750$, जहाँ x और y क्रमशः एक बल्ला तथा एक गेंद के मूल्य (₹ में) हैं; $x=500, y=50$.
(iv) $x+10y=105, x+15y=155$, जहाँ x (₹ में) नियत भाड़ा है और y (₹ में) प्रति km भाड़ा है; $x=5, y=10$; ₹ 255।
(v) $11x-9y+4=0, 6x-5y+3=0$, जहाँ x और y क्रमशः भिन्न के अंश और हर हैं; $\frac{7}{9}$ ($x=7, y=9$)।
(vi) $x-3y-10=0, x-7y+30=0$, जहाँ x और y क्रमशः जैकब और उसके पुत्र की वर्षों में आयु है; $x=40, y=10$.

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $x=\frac{19}{5}, y=\frac{6}{5}$ (ii) $x=2, y=1$ (iii) $x=\frac{9}{13}, y=-\frac{5}{13}$,
(iv) $x=2, y=-3$
2. (i) $x-y+2=0, 2x-y-1=0$, जहाँ x और y भिन्न के अंश और हर हैं; $\frac{3}{5}$.
(ii) $x-3y+10=0, x-2y-10=0$, जहाँ x और y क्रमशः नूरी और सोनू की उम्र (वर्षों में) हैं। नूरी की उम्र (x) = 50, सोनू की उम्र (y) = 20.

- (iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$, जहाँ x और y क्रमशः संख्या के दहाई और इकाई के अंक हैं; 18.
- (iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, जहाँ x और y क्रमशः ₹ 50 और ₹ 100 के नोटों की संख्याएँ हैं; $x = 10$, $y = 15$.
- (v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, जहाँ x नियत भाड़ा (₹ में) है और y अतिरिक्त भाड़ा (₹ में) प्रतिदिन का है; $x = 15$, $y = 3$.

प्रश्नावली 4.1

- हाँ
 - हाँ
 - नहीं
 - हाँ
 - हाँ
 - नहीं
 - नहीं
 - हाँ
- $2x^2 + x - 528 = 0$, जहाँ x (मीटर में) भूखंड की चौड़ाई है।
 - $x^2 + x - 306 = 0$, जहाँ x लघुतर पूर्णांक है।
 - $x^2 + 32x - 273 = 0$, जहाँ x (वर्षों में) रोहन की वर्तमान आयु है।
 - $u^2 - 8u - 1280 = 0$, जहाँ u (km/h में) ट्रेन की चाल है।

प्रश्नावली 4.2

- 2, 5
 - $-2, \frac{3}{2}$
 - $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$
 - $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$
- 9, 36
 - 25, 30
- संख्याएँ 13 और 14 हैं।
- धनात्मक पूर्णांक 13 और 14 हैं।
- 5 cm और 12 cm
- वस्तुओं की संख्या = 6, प्रत्येक वस्तु का मूल्य = ₹ 15

प्रश्नावली 4.3

1. (i) वास्तविक मूलों का अस्तित्व नहीं है। (ii) बराबर मूल; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
 (iii) विभिन्न मूल; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$
3. हाँ; 40 m, 20 m.
4. नहीं
5. हाँ; 20 m, 20 m

प्रश्नावली 5.1

1. (i) हाँ; 15, 23, 31, ... एक A.P. बनाते हैं क्योंकि प्रत्येक अगला पद पिछले पद में 8 जोड़ने से प्राप्त होता है।
 (ii) नहीं, आयतन $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \dots$ हैं।
 (iii) हाँ; 150, 200, 250, ... एक A.P. बनाते हैं।
 (iv) नहीं, राशियाँ $10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right), 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2, 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3, \dots$ हैं।
2. (i) 10, 20, 30, 40
 (ii) -2, -2, -2, -2
 (iii) 4, 1, -2, -5
 (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$
 (v) -1.25, -1.50, -1.75, -2.0
3. (i) $a = 3, d = -2$
 (ii) $a = -5, d = 4$

$$(iii) \quad a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$$

$$(iv) \quad a = 0.6, d = 1.1$$

4. (i) नहीं

$$(ii) \quad \text{हाँ, } d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$$

$$(iii) \quad \text{हाँ, } d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$$

$$(iv) \quad \text{हाँ, } d = 4; 6, 10, 14$$

$$(v) \quad \text{हाँ, } d = \sqrt{2}; 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$$

(vi) नहीं

$$(vii) \quad \text{हाँ, } d = -4; -16, -20, -24$$

$$(viii) \quad \text{हाँ, } d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

(ix) नहीं

$$(x) \quad \text{हाँ, } d = a; 5a, 6a, 7a$$

(xi) नहीं

$$(xii) \quad \text{हाँ, } d = \sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$$

(xiii) नहीं

(xiv) नहीं

$$(xv) \quad \text{हाँ, } d = 24; 97, 121, 145$$

प्रश्नावली 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) C (ii) B
3. (i) 14
(ii) 18, 8
(iii) $6\frac{1}{2}$, 8
(iv) -2, 0, 2, 4
(v) 53, 23, 8, -7
4. 16वाँ पद
5. (i) 34 (ii) 27
6. नहीं
7. 178
8. 64
9. 5वाँ पद
10. 1
11. 65वाँ पद
12. 100
13. 128
14. 60

15. 13
16. 4, 10, 16, 22, ...
17. अंतिम पद से 20वाँ पद 158 है।
18. -13, -8, -3
19. 11वाँ वर्ष
20. 10

प्रश्नावली 5.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$
2. (i) $1046\frac{1}{2}$
- (ii) 286
- (iii) -8930
3. (i) $n=16, S_n=440$ (ii) $d=\frac{7}{3}, S_{13}=273$ (iii) $a=4, S_{12}=246$
- (iv) $d=-1, a_{10}=8$ (v) $a=-\frac{35}{3}, a_9=\frac{85}{3}$ (vi) $n=5, a_n=34$
- (vii) $n=6, d=\frac{54}{5}$ (viii) $n=7, a=-8$ (ix) $d=6$
- (x) $a=4$
4. 12. सूत्र $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में $a=9, d=8, S=636$ रखने पर हम द्विघात समीकरण $4n^2 + 5n - 636 = 0$ प्राप्त करते हैं। हल करने पर मूल $n = -\frac{53}{4}, 12$ पाते हैं। इन दोनों मूलों में केवल एक मूल 12 ही स्वीकार्य है।
5. $n=16, d=\frac{8}{3}$
6. $n=38, S=6973$

7. योग= 1661
8. $S_{51} = 5610$
9. n^2
10. (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$
11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
 $a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$
12. 4920
13. 960
14. 625
15. ₹ 27750
16. पुरस्कारों का मूल्य(₹ में) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 हैं।
17. 234
18. 143 cm
19. 16 पंक्तियाँ, 5 लट्ठों को सबसे ऊपरी पंक्ति में रखते हैं। $S = 200, a = 20, d = -1$ सूत्र
 $S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ में रखने पर हम $41n - n^2 = 400$ प्राप्त करते हैं। हल करने पर $n = 16, 25$
 है। अतः पंक्तियों की संख्या 16 या 25 है। अब $a_{25} = a + 24d = -4$ अर्थात् 25 वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या
 -4 है जो संभव नहीं है। अतः $n = 25$ संभव नहीं है। $n = 16$ के लिए, $a_{16} = 5$. अतः 16 पंक्तियाँ हैं और
 सबसे ऊपर वाली पंक्ति में 5 लट्ठे रखे हैं।
20. 370m

प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक)*

- | | | |
|-------------|----------------------|-----------|
| 1. 32वाँ पद | 2. $S_{16} = 20, 76$ | 3. 385 cm |
| 4. 35 | 5. 750 m^3 | |

प्रश्नावली 6.1

1. (i) समरूप (ii) समरूप (iii) समबाहु
(iv) बराबर, समानुपाती 3. नहीं

प्रश्नावली 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm
2. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ
9. बिंदु O से होते हुए DC के समांतर एक रेखा खींचिए जो AD और BC को क्रमशः बिंदु E और F पर प्रतिच्छेदित करे।

प्रश्नावली 6.3

1. (i) हाँ, AAA, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (ii) हाँ, SSS, $\triangle ABC \sim \triangle QRP$
(iii) नहीं (iv) हाँ, SAS, $\triangle MNL \sim \triangle QPR$
(v) नहीं (vi) हाँ, AA, $\triangle DEF \sim \triangle PQR$
2. $55^\circ, 55^\circ, 55^\circ$
14. AD को बिंदु E तक बढ़ाए ताकि $AD = DE$ और PM को बिंदु N तक बढ़ाए ताकि $PM = MN$ हो। EC और NR को मिलाइए।
15. 42m

प्रश्नावली 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2 + b^2}$
2. 39; 39km 3. नहीं 4. हाँ 5. चम्पा सही है।
6. (i) वर्ग (ii) चतुर्भुज नहीं है (iii) समांतर चतुर्भुज

7. $(-7, 0)$ 8. $-9, 3$ 9. ± 4 , $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$
10. $3x + y - 5 = 0$

प्रश्नावली 7.2

1. $(1, 3)$ 2. $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$
3. $\sqrt{61} \text{ m}$; 5वीं रेखा में 22.5 m दूरी पर 4. $2:7$
5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 6. $x=6, y=3$ 7. $(3, -10)$
8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ 9. $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ 10. 24 वर्ग मात्रक

प्रश्नावली A1.1

1. (i) संदिग्ध (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) संदिग्ध (v) संदिग्ध
2. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य
3. केवल (ii) ही सत्य है
4. (i) यदि $a > 0$ और $a^2 > b^2$, तब $a > b$.
- (ii) यदि $xy \geq 0$ और $x^2 = y^2$, तब $x = y$.
- (iii) यदि $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ और $y \neq 0$, तब $x = 0$.
- (iv) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली A1.2

1. A नश्वर है। 2. ab परिमेय संख्या है।
3. $\sqrt{17}$ का दशमलव प्रसारण अनवसानी और अनावर्ती है।
4. $y=7$ 5. $\angle A = 100^\circ, \angle C = 100^\circ, \angle D = 180^\circ$
6. PQRS एक आयत है।

7. हाँ, परिकल्पना के आधार पर। नहीं, क्योंकि $\sqrt{3721} = 61$ है जो अपरिमेय नहीं है। चूँकि परिकल्पना गलत थी इसलिए निष्कर्ष असत्य है।

प्रश्नावली A1.3

1. किसी पूर्णांक n के लिए क्रमागत विषम संख्याएँ $2n + 1$ और $2n + 3$ लीजिए।

प्रश्नावली A1.4

1. (i) मनुष्य नश्वर नहीं है।
 (ii) रेखा l रेखा m के समांतर नहीं है।
 (iii) अध्याय में बहुत प्रश्नावलियाँ नहीं हैं।
 (iv) सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ नहीं हैं।
 (v) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम नहीं हैं।
 (vi) कुछ छात्र सुस्त हैं।
 (vii) सभी बिल्लियाँ काली हैं।
 (viii) कम से कम एक वास्तविक संख्या x ऐसी है ताकि $\sqrt{x} = -1$.
 (ix) धनात्मक पूर्णांक a को 2 विभाजित नहीं करता है।
 (x) पूर्णांक a और b सहअविभाज्य हैं।
2. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं (v) हाँ

प्रश्नावली A1.5

1. (i) यदि शरन को अधिक पसीना आता है, तो टोक्यो में गर्मी है।
 (ii) यदि शालीनी का पेट कुड़कुड़ाता है, तब वह भूखी है।
 (iii) यदि जसवंत डिग्री प्राप्त कर सकता है, तो वह छात्रवृत्ति पाता है।

- (iv) यदि पौधा जीवित है, तब इसमें फूल हैं।
- (v) यदि जानवर के पूँछ है, तब यह बिल्ली है।
- 2. (i) यदि त्रिभुज ABC के आधार पर बने कोण बराबर हैं तो यह समद्विबाहु त्रिभुज है। सत्य
- (ii) यदि किसी पूर्णांक का वर्ग विषम है तो पूर्णांक भी विषम है। सत्य
- (iii) यदि $x = 1$, तब $x^2 = 1$. सत्य
- (iv) यदि AC और BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। सत्य
- (v) यदि $a + (b + c) = (a + b) + c$, तब a , b और c पूर्ण संख्याएँ हैं। असत्य
- (vi) यदि $x + y$ एक सम संख्या है तब x और y विषम संख्याएँ हैं। असत्य
- (vii) यदि समांतर चतुर्भुज एक आयत है तब इसके शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं। सत्य

प्रश्नावली A1.6

1. $b \leq d$ के विपरीत मान लीजिए।
3. अध्याय 1 के उदाहरण 10 को देखें।
6. कक्षा IX की गणित पाठ्य पुस्तक में प्रमेय 5.1 देखें।

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED