कर्नाटक सरकार

गणित प्रकाश

इयत्ता 8 वी साठी गणिताचे पाठ्यपुस्तक

इयत्ता

8

भाग-2

मराठी माध्यम

EIGHTH STANDARD
MARATHI MEDIUM

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003

अनुक्रमणिका

भाग - 2

S3I2R6

अ.नं.	प्रकरण	पृष्ठ क्रमांक
8	अपूर्णांकांचे स्वरूप बदलणे (वेषांतर) (FRACTIONS IN DISGUISE)	1 - 38
9	बौद्धायन पायथॅगोरसचा प्रमेय (THE BAUDHĀYANA - PYTHAGORAS THEOREM)	39 - 61
10	प्रमाणातील तर्क-2 (PROPORTIONAL Reasoning–2)	62 - 77
11	कांही भौमितिक संकल्पनाचा शोध (EXPLORING SOME GEOMETRIC THEMES)	78 - 113
12	बिंदू आणि रेषांच्या गोष्टी (TALES BY DOTS AND LINES)	114 - 148
13	बीजगणितीय खेळ (ALGEBRA PLAY)	149 - 163
14	क्षेत्रफळ (AREA)	164 - 190

8 अपूर्णांकांचे स्वरूप बदलणे (वेषांतर)
(FRACTIONS IN DISGUISE)

VZN9X5

8.1. अपूर्णांकांचे टक्केवारीमध्ये (Fractions as percentage)

''50% पर्यंत महा सूट'' किंवा ''हियाने बोर्डाच्या परीक्षेमध्ये 83 गुण मिळविले'' यासारखी अनेक विधाने तुम्ही ऐकली असणार. तुम्हाला % या चिन्हांचा अर्थ माहित आहे का?

हे चिन्ह टक्केवारी असे वाचले जाते. 'per cent' हा शब्द लॅटिन शब्द per centum (प्रतिशत) पासून देण्यात आला असून त्याचा अर्थ 'प्रति शंभर' किंवा 'शंभर पैकी' असा घेतला जातो.

त्यामुळे 25 टक्के (25%) म्हणजे प्रत्येकी 100 पैकी 25 असा होतो जसे की 100 पैकी 25 लोक, 100 पैकी 25 रुपये किंवा 100 गुणापैकी 25 गुण असा होतो.

जर आपण कांही प्रमाण S चे 50% म्हटले तर त्याचा अर्थ असा होतो की,

$$S \text{ चे } 50\% = 50 \times \frac{1}{100} \times S \quad (S \text{ या एकक अपूर्णांकाच्या 50 पट})$$

$$= \frac{50}{100} \times S = \frac{1}{2} S$$

म्हणून टक्केवारी हे फक्त अपूर्णांक आहेत जेथे छेद हा 100 आहे.

उदाहरणार्थ :

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

$$33\% = \frac{33}{100}.$$

आपण पाहिले आहे की टक्केवारी हे फक्त अपूर्णांक आहे. दिलेला कोणत्याही अपूर्णांक आपण टक्केवारीमध्ये व्यक्त करू शकतो का? होय, तर ते कसे ते आपण पाहूया.

अपूर्णांक टक्केवारीमध्ये व्यक्त करणे

उदाहरण 1: सूर्याला सूर्यास्त टिपण्यासाठी गडद नारंगी रंगाचा उपयोग करायचा आहे. हा रंग बनविण्यासाठी त्याने थोडा लाल आणि पिवळा रंग मिसळला आहे. लाल रंग हा मिश्रणाचा $\frac{3}{4}$ भाग

आहे तर रंग बनविण्यासाठी लाल रंगाची टक्केवारी किती?

$\frac{3}{4}$ हे प्रत्येक 4 पैकी 3 हे आहे.
म्हणजेच प्रत्येक 8 पैकी 6 (सममूल्य अपूर्णांक)
म्हणजेच प्रत्येक 40 पैकी 30
म्हणजेच प्रत्येक 100 पैकी 75
याचाच अर्थ 75% असा होतो.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{75}{100}$$

याचे वेगळ्या पद्धतीने स्पष्टीकरण करताना आपल्याला $\frac{3}{4}$ हे टक्केवारीमध्ये व्यक्त करताना त्याचा छेद 100 होईल, याप्रमाणे सममूल्य अपूर्णांकात मांडावे लागेल. असे करण्याच्या दोन पध्दती पुढील प्रमाणे आहेत.

पद्धत-1

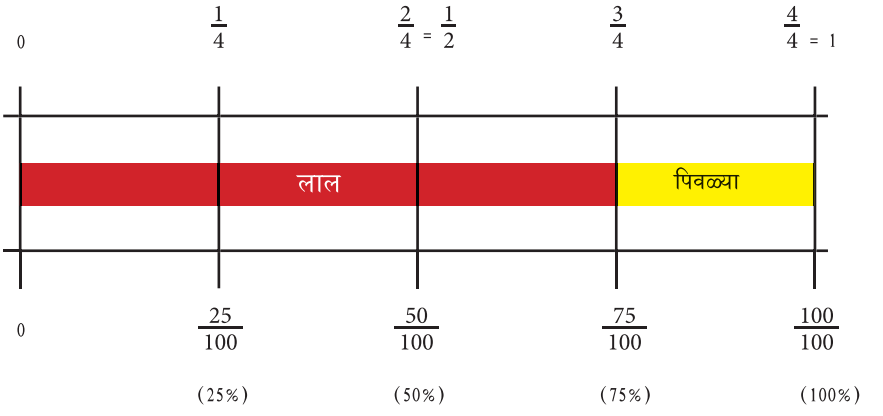
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25}$$
$$= \frac{75}{100} = 75\%$$

पद्धत-2

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100}$$
$$\frac{3}{4} \times 100 = \frac{x}{100} \times 100$$
(दोन्ही बाजूना 100 ने गुणले)
$$x = \frac{3}{4} \times 100$$
$$= 75$$

अशारितीने $\frac{3}{4}$ हे 75% मध्ये व्यक्त केले जाऊ शकते.

खालील $\frac{3}{4}$ आणि 75% मधील सममूल्य अपूर्णांक दर्शविणाऱ्या स्तंभ नमुना आकृतीचे निरीक्षण करा.



? पिवळ्या रंगाचा वापर करून किती टक्के रंग बनविला आहे हे तुम्ही सांगू शकाल का?

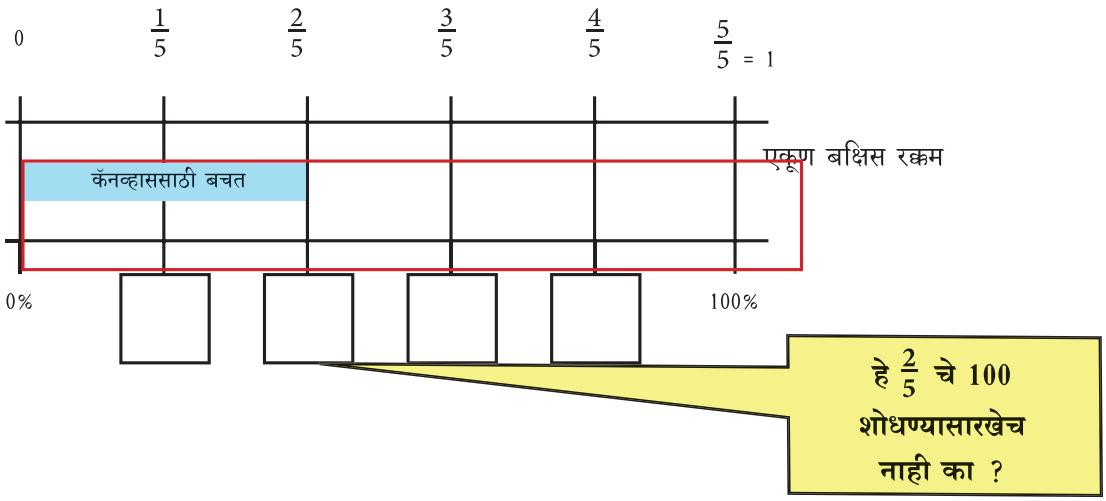
? **उदाहरण 2:** सूर्याने एका स्पर्धेत कांही बक्षिसांची रक्कम जिंकली आहे त्याला नवीन कॅनव्हास खरेदी करण्यासाठी $\frac{2}{5}$ पैशांची बचत करायची आहे तर हे प्रमाण टक्केवारीमध्ये व्यक्त करा.

हे उदाहरण सोडविण्याच्या वेगवेगळ्या पध्दती समजून घेण्याचा प्रयत्न करा.

पध्दत-2	पध्दत-2
$\frac{2}{5} = \frac{20}{50} = \frac{40}{100}$	$\frac{2}{5} = \frac{x}{100}$
$= 40\%$	$x = \frac{2}{5} \times 100 = 40$

? चौकटी भरुन पध्दत, 3 पूर्ण करण्याचा प्रयत्न करा.

पध्दत-3





गणितामधील अनेक समस्या वेगवेगळ्या पध्दतीनी सोडविल्या जाऊ शकतात. तुम्ही वापरलेली पध्दत जरी तुम्हाला प्रिय वाटत असली तरी इतरानी त्याविषयी काय विचार केला आहे हे जाणून घेणे मनोरंजक आणि अधिक महत्वाचे आहे.

अपूर्णांक हे एकक तर टक्केवारी ही प्रति 100 ला असते. म्हणून अपूर्णांकाला टक्केवारीमध्ये व्यक्त करताना आम्ही अपूर्णांकाला केवळ 100 ने गुणाकार करु शकतो.

उदाहरण 3: टक्केवारी दिली असता तुम्ही अपूर्णांकात व्यक्त करु शकता का?

24% हे अपूर्णांकात व्यक्त करा.

ज्याअर्थी टक्केवारी ही अपूर्णांक आहे, 24% हे $\frac{24}{100}$ शी समान आहे.

आम्ही $\frac{24}{100}$ चे इतर सममूल्य अपूर्णांक शोधू शकतो $\frac{12}{50} = \frac{6}{25} = \frac{48}{200}$

सामान्यपणे आम्ही म्हणू शकतो की Z% हे $\frac{Z}{100}$ शी सममूल्य असलेल्या अपूर्णांकामध्ये व्यक्त केले जाऊ शकते.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील अपूर्णांक हे टक्केवारीत व्यक्त करा.

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{14}$ (iii) $\frac{9}{20}$

(iv) $\frac{72}{150}$ (v) $\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{5}{11}$

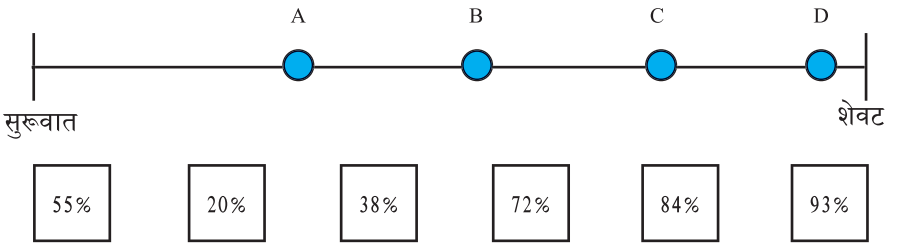
2. नंदिनीजवळ 25 गोट्या आहेत, त्यापैकी 15 पांढऱ्या आहेत. तर पांढऱ्या गोट्यांची टक्केवारी किती असेल ?

(i) 10% (ii) 15% (iii) 25%

(iv) 60% (v) 40% (vi) यापैकी कोणतेही नाही

3. एका शाळेतील 80 विद्यार्थ्यांपैकी 15 विद्यार्थी शाळेला चालत येतात. तर चालत शाळेला येणाऱ्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी किती ?

4. एका लांब पल्याच्या धावण्याच्या स्पर्धेमध्ये (मॅरेथॉनमध्ये) मित्रांचा एक गट सहभागी आहे. खालील चित्रामध्ये 15 मिनिटानंतरची प्रत्येकाची स्थिती दर्शविली आहे. (दिलेल्या पर्यायामधून) प्रत्येकाने धावणे पूर्ण केलेल्या स्पर्धेची अंदाजे टक्केवारीची जोडी जुळवा.



5. खालीलप्रमाणे टक्केवारीच्या राशी दिलेल्या आहेत. योग्य ते चिन्ह '>', '<', '=' ओळखा आणि रिकाम्या जागेमध्ये भरा. गणना न करता लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

(i) 50% _____ 5%

(ii) $\frac{5}{10}$ _____ 50%

(iii) $\frac{3}{11}$ _____ 61%

(iv) 30% ____ $\frac{1}{3}$

? बर, जर टक्केवारी ही फक्त ठराविक प्रकारचा अपूर्णांक आहे तर त्याची आपल्याला गरज का आहे? आपण अपूर्णांक वापरणे सूरू का ठेवू शकत नाही? चला तर एका उदाहरणाचा विचार करुया.

एक बिस्किटे बनविण्याचा कारखाना हा दोन नवीन प्रकारची बिस्किटे बनविण्याचा प्रयोग करत आहे. एका प्रकारच्या बिस्किटामध्ये साखरेचे प्रमाण $\frac{9}{34}$ आणि दुसऱ्यामध्ये $\frac{13}{45}$ इतके आहे. तर कोणता बिस्किटचा प्रकार अधिक साखरेचा आहे? पाहता क्षणी आपल्याला हे स्पष्ट होत नाही आणि आपल्याला कांही हिशेब करावा लागेल. परंतु जेव्हा हीच माहिती प्रकार-1 मध्ये 26.4% साखर आहे आणि प्रकार-2 मध्ये 28.88% साखर आहे असे दर्शविते तेव्हा त्वरीतपणे हे स्पष्ट होते की कोणत्या प्रकारामध्ये अधिक साखर आहे.

जर आपल्याला छेद समान हवा असेल तर 100 हे ठराविकपणे का निवडायचे? 10, 50, 1000 किंवा 43 हे का नाही? विचार करा.

तत्वामध्ये, आम्ही छेद म्हणून कोणतीही संख्या निवडू शकतो. परंतु 100 घेतल्यामुळे कांही फायदे होतात. ज्या अर्थी आपली संख्या पध्दत 10 आधारांकाची आहे दशांशामध्ये 10,100 आणि 1000 या संख्या सहजपणे येऊ शकतात. उदाहरणार्थ $31\% = \frac{31}{100} = 0.31$

अपूर्णांक, दशांश आणि टक्केवारीमध्ये रुपांतरीत करणे जलद आणि सहजपणे होते.

100 ही पूर्ण संख्या आहे आणि ती समजण्यास आणि कार्य करण्यास सोपी आहे. आम्ही 'प्रति 1000' किंवा प्रति 100,000 असे म्हणू शकतो. (हा वापर 'प्रत्येकी' (दर) हजार लोक' किंवा दर लाख लोक अशा आकडेवारीमध्ये आढळतो.) परंतु 100 हा योग्य जागा घेतो. तो सविस्तर माहितीकरीता पुरेसा मोठा आहे तरीपण ज्ञानात्मकदृष्ट्या समजण्यास सोपा आहे. अनेक कारणांसाठी दर 10 हे खूपच लहान होते.

$\frac{9}{34}$ = 26.47 टक्के (दर 100)

$\frac{9}{34}$ = 2.647 दर दशक (दर 10)

$\frac{9}{34}$ = 264.7 दर मैल (दर 1000)

दशांश अपूर्णांकाचा परिचय होण्यापूर्वी दहावा, विसावा आणि शंभरावा भाग मोजण्यासाठी याची आवश्यकता होती. इ.स. पूर्व चौथ्या शतकात कौटिल्याच्या अर्थशास्त्रात 'दर शंभरला' ही कल्पना आढळून येते. ''एक पना आणि एक चतुर्थांश दर महिन्याला व्याज हे फक्त होते. होते. पाच पना टक्के दर महिन्याला हे व्यवहारीक व्याज होते. दहा पना टक्केवारी दर महा ही जंगलामध्ये होती. समुद्री व्यापारामध्ये विस पना दर महा ही टक्केवारी त्यावेळी होती.

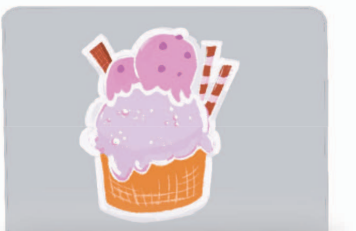
त्याच काळामध्ये रोमन लोक $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$ ही कर प्रणाली व्यापार आणि लिलाव संदर्भात वापरत असत. 15 व्या शतकात इटलीच्या हस्तलेखामध्ये *'xx p cento'*, *'x p cento'*, *'vii p cento'* या सारखी व्यक्त करण्याची पध्दत होती. (ते आपल्या 20%, 10% आणि 7% शी सममूल्य आहेत.)

आपल्या सभोवतालची टक्केवारी (Percentage Around Us)

टक्केवारीचा वेगवेगळ्या संदर्भात मोठ्या प्रमाणात वापर केला जातो. येथे टक्केवारीशी संबंधित कांही मनोरंजक शोध आहेत.



मानवी शरीरामध्ये सरासरी 60% वजन पाण्याचे असते.



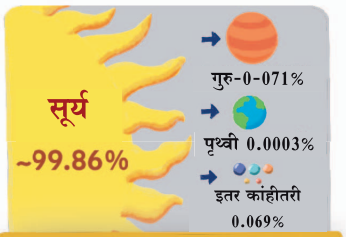
आईस्क्रिममध्ये सुमारे 30-50% घनफळ हवेचे असते



2022 चा फिफा विश्वचषक जगातील किमान 45% लोकांनी पाहिला.



जगातील 80% पेक्षा अधिक किशोर वयातील मुले दररोज किमान एक तास शारिरीक व्यायाम करण्याची शिफारस पूर्ण करत नाहीत.



सूर्यमालेच्या वस्तुमानाचा सुमारे 99.85% भाग सूर्याचा आहे.



जगातील अंदाजे 52% जमीन ही नापीक झाली आहे.

8.2 कांही प्रमाणांची (राशींची) टक्केवारी (Percentage of some quantity)



उदाहरण 1: मधु आणि माधव यांनी वेगवेगळ्या प्रकारची बिस्किटे खाल्ली. मधुच्या बिस्किटामध्ये 25% साखर होती आणि माधवच्या बिस्किटामध्ये 35% साखर होती. तर कोणी जास्त साखर खाल्ली हे सांगता येईल का?

आताच आपण पाहिले आहे की, टक्केवारी ही प्रमाणाचा भाग किंवा प्रमाण दर्शविते. जेव्हा वेगवेगळ्या प्रमाणात किंवा पूर्णच्या स्वरुपात घेतले जाते तेव्हा फक्त टक्केवारीची तुलना करणे हे अयोग्य असेल. म्हणजेच त्या दोघांजवळ 100 ग्रॅमची बिस्किटे असतील तर हे स्पष्ट आहे की, माधवने जास्त साखर खाल्ली आहे. 35 ग्रॅम (100 ग्रॅमची 35% ही दर 100 ग्रॅमला 35 ग्रॅम आहे.) त्याच्या विरुध्द मधु-25 ग्रॅम (100 ग्रॅमची 25% ही दर 100 ग्रॅमला 25 ग्रॅम आहे.)

(?) समजा की मधूने 120 ग्रॅम बिस्किटे खाल्ली आणि माधवने 95 ग्रॅम बिस्कीटे खाल्ली तर कोणी जास्त साखर खाल्ली? हे शोधण्याचा प्रयत्न करा.

आम्हाला माहित आहे की, साखरेचे वजन हे खाल्लेल्या बिस्किटच्या प्रमाणात आहे. मधुने 25% साखर असलेली 120 ग्रॅम बिस्किटे खाल्ली आहेत. म्हणून त्याने खाल्लेल्या साखरेचे प्रमाण हे रिकाम्या जागी दिलेले मूल्य आहे.

$$25 : 100 :: \_\_\_\_ : 120$$

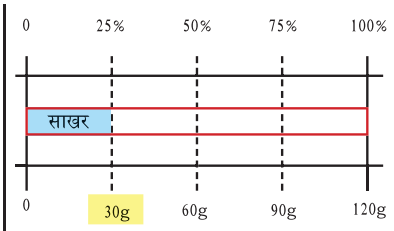
पुढे सोडविण्याचे कांही मार्ग दाखविलेले आहेत.

25% साखर म्हणजे ___ दर 100 ग्रॅमच्या बिस्किटला 25 ग्रॅम साखर, त्याचा अर्थ दर 20 ग्रॅम बिस्किटला 5 ग्रॅम साखर म्हणून दर 120 ग्रॅम बिस्किटला 30 ग्रॅम साखर असा आहे.

प्रमाणातील संबंध असा लिहीला जाऊ शकतो.

$$\frac{25}{100} = \frac{S}{120}$$

$$S = \frac{25}{100} \times 120 = 30$$



तुमच्या विचाराशी कोणती तरी पध्दत जुळते का? तुम्हाला सर्व पध्दती समजल्या का?

आता, आपण माधवने किती साखर खाल्ली आहे ते शोधूया. त्याने 35% साखर असलेली 95 ग्रॅम बिस्किटे खाल्ली आहेत. कधीकधी आम्ही यापूर्वी केल्याप्रमाणे वेगवेगळ्या पध्दती वापरून संख्या मोजणे सोयीस्कर नसते. त्याने खाल्लेल्या 100 ग्रॅम बिस्किटमध्ये 35 ग्रॅम साखर आहे. याचा अर्थ

$$\frac{35}{100} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{35}{100}$$

1 ग्रॅम बिस्किटमध्ये $\frac{35}{100}$ ग्रॅम साखर आहे.

त्यामुळे आम्ही म्हणू शकतो की 95 ग्रॅम बिस्किटमध्ये

$\frac{35}{100}$ ग्रॅम $\times$ 95 = 33.25 ग्रॅम

हे आपण $\frac{35}{100} = \frac{S}{95}$

या प्रमाणातील संबंधामध्ये S ची किंमत शोधून सुध्दा सोडवू शकतो.

म्हणून माधवने जास्त साखर खाल्ली आहे.

अधिक सामान्यपणे, कांही मूल्याची Y% ही 80 असे समजा, ते $\frac{Y}{100} \times 80$ आहे.
आपण असेही म्हणू शकतो की कांही मूल्याची 45% म्हणजे Z ही $\frac{45}{100} \times Z$ ने दिली जाते.

मुक्तपणे गणना (Free hand computation)

आपण आताच 120चे 25% चा हिशेब केला आहे. 25% हे $\frac{1}{4}$ (एक चतकोर) शी सारखेच आहे का? आपल्याला 40चे 25% शोधायचे आहे असे समजू. 25% हे 40 चे $\frac{1}{4}$ शी समान आहे का? होय, ज्याअर्थी 25 हा 100 चा $\frac{1}{4}$ वा (एक चतकोर) $\left(\frac{25}{100} = \frac{1}{4}\right)$

म्हणून 25% हे 40 = $\frac{25}{100} \times 40$ हे $\frac{1}{4} \times 40$ शी समान आहे.

? खालील तक्त्यामध्ये दर्शविलेली टक्केवारीची मूल्ये (पेन व कागदाचा वापर न करता) सोडविण्याचा प्रयत्न करा. तुमचे उत्तर कोष्टकामध्ये लिहा.

	100	200	50	80	10	35	287
25%	25						
10%							
20%							
5%							

? तुम्ही ही मूल्ये कशी शोधाल? तुमच्या वर्गामध्ये पध्दतीची चर्चा करा. या कोष्टकामध्ये तुम्हाला कांहीतरी मनोरंजक आढळले का?

गणिती बोल

तुमच्या ध्यानात आले असेलच की, सारख्याच मूल्याचे 20% मूल्य हे 10% मूल्याच्या दुप्पट आहे. हे नेहमीच घडून येईल. कारण 20% (100 चा 20 वा भाग) हा 10% (100 चा 10 भाग) च्या दुप्पट असतो.

? या आकलनाचा वापर करून वरील कोष्टकातील 40% चे किती मूल्य होईल याचा ज्ञानात्मकदृष्ट्या हिशेब करा.

20% 5% आणि 25% मूल्याविषयी तुम्ही कोणत्या संबंधाचे निरीक्षण केले आहे? हे असे घडते की (y चे 20%) + (y चे 5%) = Y चे 25% आपण पडताळून पाहू शकतो की हा गुणधर्म नेहमीच लागू होतो. $\left(\frac{20}{100} \times y\right) + \left(\frac{5}{100} \times y\right) = \left(\frac{25}{100} \times y\right)$

? या निरीक्षणांचा वापर करून मानसिकदृष्ट्या कोष्टकातील 40% चे मूल्य किती होईल?

? समजा की, मानसिकदृष्ट्या पुढील कांही मूल्यांची टक्केवारी यांची गणना तुम्हाला करायची आहे, 75%, 90% 90%, 70%, 55% तुम्ही हे कसे करू शकाल? याची चर्चा करा.



FDP त्रिकुट - अपूर्णांक दशांश आणि टक्केवारी

(The FDP Trio - Fractions, Decimals, and percentage)

? **उदाहरण 2:** मुल्याला $\frac{1}{2}$ ने गुणून आम्ही मूल्याची 50% किंमत शोधू शकतो. मूल्याला 0.5 ने गुणले असता सुध्दा येणारे उत्तर हे मुल्याच्या 50% असेल का?

होय. ज्याअर्थी $\frac{1}{2} = 0.5$

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

24 चे 50% = 12
$0.5 \times 24 = 12$

? याचप्रमाणे प्रमाणाचे 10% शोधत असताना कोणते दशांश मूल्य गुणायला हवे?

? खालील कोष्टक पूर्ण करा.

टक्केवारी	50%	100%	25%	75%	10%	1%	5%	43%
अपूर्णांक	$\frac{50}{100}$							
दशांश	0.5							

कृती: तुम्ही किती जवळ जाऊ शकाल?

एक जोडी बनवा तुम्ही प्रत्येकी एक संख्या निवडा. समजा की तुम्ही निवडलेल्या संख्या 'a' आणि 'b' आहेत. तुमच्या संख्या एकमेकांना सांगा तुम्ही दोघांनी ही $\frac{a}{b}$ या अपूर्णांकाशी सममूल्य टक्केवारीचा अंदाज करा. (जेथे $a < b$) 5 मिनिटाची वेळ निश्चित करून तुमचे उत्तर घोषित करा. ज्याचे उत्तर त्याच्या जवळपास आहे तो ही फेरी जिंकतो. हा खेळ 10 फेऱ्यापर्यंत खेळा.

उदाहरण 3: परीक्षेमधील कमाल गुण 75 आहेत. जर एक विधार्थी 80% पेक्षा जास्त गुण मिळवितो तेव्हा त्याला A श्रेणी मिळते. तर झुबिनला A श्रेणी मिळविण्यासाठी किमान किती गुण मिळवावे लागतील?

तुम्ही अपूर्णांक आणि दशांशाचा गुणाकार तसेच प्रमाणाचे सुध्दा आकलन करून वेगवेगळ्या पध्दतीने 75 चे 80% शोधू शकता.

अपूर्णांकाचा गुणाकार $\rightarrow \frac{80}{100} \times 75$

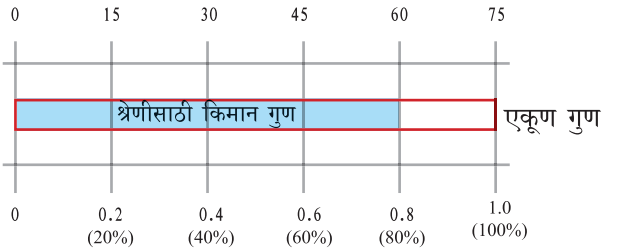
$= \frac{4}{5} \times 75 = 60$

दशांशांचा गुणाकार $\rightarrow 0.8 \times 75 = 60$

प्रमाणाचा तर्क $\rightarrow$

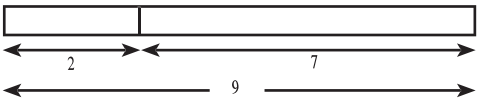
100 पैकी किमान गुण 80 आहेत.

तर 75 पैकी गुण $= \frac{75 \times 80}{100} = 60$



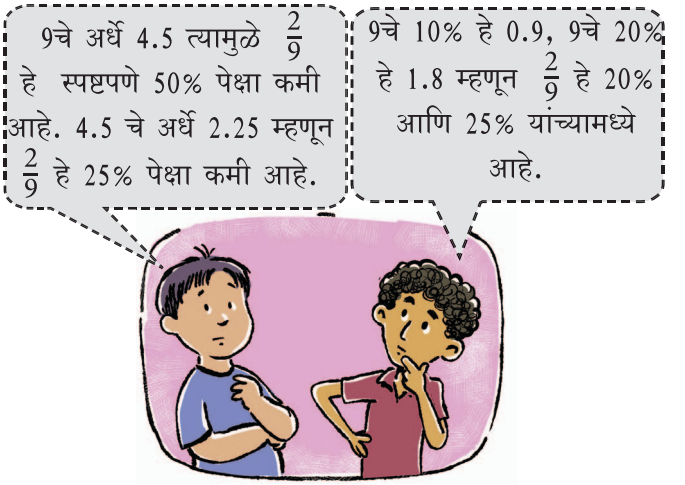
उदाहरण 4: एक विशिष्ट प्रकारची बाजरीची कांजी (लापशी) तयार करण्यासाठी, समजा की बाजरी आणि पाणी यांचे मिश्रण 2:7 गुणोत्तरात मिसळून उकळले तर त्या मिश्रणात बाजरीची टक्केवारी किती? जर 500ml इतके मिश्रण बनवायचे आहे तर त्यामध्ये बाजरीचा वापर किती करावा?

या परिस्थितीचा नमुना उजव्या बाजूला दर्शविलेल्या स्तंभ नमुन्याप्रमाणे केला जाऊ शकतो. बाजरीचे घनफळाशी मिश्रणामध्ये असलेले गुणोत्तर 2:9 हे आहे. दुसऱ्या शब्दामध्ये एकक मिश्रणामध्ये बाजरी $\frac{2}{9}$ एकक आणि पाणी $\frac{7}{9}$ एकक व्यापते.



प्रथमतः $\frac{2}{9}$ ची टक्केवारी किती होते याचा अंदाज करा.

मिश्रणातील बाजरीची टक्केवारी (म्हणजेच अशा 100 एककामध्ये)



$\frac{2}{9} \times 100 = 22.22\%$

मिश्रणामधील पाण्याची टक्केवारी $100-22.22=77.88\%$

22.22% बाजरी असलेल्या मिश्रणाचा अर्थ 100ml मिश्रणामध्ये 22.22ml बाजरी आहे असा होतो. म्हणून 22.22% बाजरी असलेल्या 500ml मध्ये $5 \times 22.22 = 111.1$ ml बाजरी असेल.

दिलेल्या गुणोत्तराचे रुपांतर अपूर्णांकामध्ये आणि नंतर टक्केवारीमध्ये केले जाऊ शकते.

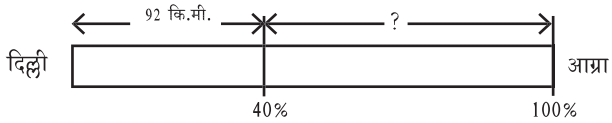


गणना करण्यापूर्वी अंदाज करण्याच्या पध्दतीमुळे संख्याबद्दलची समज सुधारते आणि चूका कमी होण्यास मदत होते बऱ्याचवेळा आपल्याला अचूक मूल्य हवे नसते. त्यावेळी जलदपणे अंदाज करण्याची पध्दत उपयोगी पडते.

शिक्षकांसाठी सुचना : समस्या सोडविण्याच्या प्रक्रियेचा भाग समजून गणना करण्यापूर्वी किंवा सोडविण्यापूर्वी अंदाज करण्याची पध्दत लागू करा. आवश्यकता भासल्यास तुम्ही आठवण करून देऊ शकता आणि त्यांना प्रोत्साहीत करु शकता.

? **उदाहरण 5:** एक सायकलस्वार दिल्ली ते आग्रा पर्यंत सायकल चालवितो आणि 40% इतका प्रवास पूर्ण करतो. जर त्याने 92 कि.मी. इतके अंतर कापले आहे. तर आग्राला पोहोचण्यासाठी त्याला अजून किती अधिक किलोमीटर प्रवास करावा लागेल?

प्रथम आपण स्तंभ नमुन्यामध्ये ही परिस्थिती मांडण्याचा प्रयत्न करुया.



? पुढे सोडविण्यापूर्वी अगोदर अंदाज करा.

ही समस्या सोडविण्याच्या कांही पध्दती खालीलप्रमाणे दिलेल्या आहेत. तुमची पध्दत दिलेल्या कोणत्याही चूका पद्धतीशी जुळते का? तुम्हाला यापैकी इतर कोणती पध्दत आवडली आहे का?

पध्दत-1

40% हे 92 कि.मी. आहे. म्हणून 20% हे 46 कि.मी. होईल. याचे 60% हे टक्के इतके 92+46=138 कि.मी. होते.

पध्दत-2

जर 40% हे 92 आहे तर 60% हे किती होईल?

42:92::60?

$\frac{40}{92} = \frac{60}{r}$

(r हे राहिलेले अंतर आहे.)

$r = 60 \times \frac{92}{40} = 138$ कि.मी.

पध्दत-3

$\frac{40}{100} = \frac{92}{d}$

(d हे एकूण अंतर आहे)

हे शिल्लक अंतर आहे

d= 230 कि.मी. – 92 कि.मी.

= 138 कि.मी.

पध्दत-4

जर 'x' हे शिल्लक अंतर आहे, तर दिल्ली ते आग्रा यामधील एकूण अंतर x+92 हे आहे. ज्याअर्थी आपल्याला माहित आहे की एकूण अंतराचे 40% हे 92 कि.मी. आहे.

$\frac{40}{100} \times (x + 92) = 92$

$(x + 92) = 92 \times \frac{100}{40}$

$x = 230 - 92 = 138$ कि.मी.



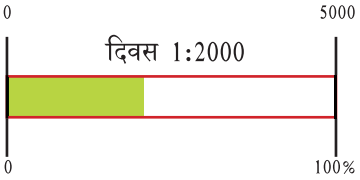
कच्ची आकृती काढल्यामुळे परिस्थिती अधिक उत्तमपणे समजण्यास मदत होते आणि समस्येविषयी अधिक विचार करण्यास सोपे बनविते.

100 पेक्षा जास्त असलेली टक्केवारी (Percentages Greater than 100)

आत्तापर्यंत आपण 100 किंवा 100 पेक्षा कमी असलेली टक्केवारी पाहिली. 100 पेक्षा जास्त मूल्य असलेली टक्केवारी असू शकते का? जेव्हा टक्केवारी 100 पेक्षा जास्त असेल तर त्याचा अर्थ काय असतो? चला तर शोध घेऊया.

उदाहरण 6: कृष्णलालने हल्लीच एक कपड्याचे दुकान उघडले आहे. त्याचे दररोज ₹5000 ची किमान विक्री करण्याचे ध्येय आहे. पहिल्या दोन दिवसातील विक्री ₹2000 आणि ₹3600 झाली आहे. तर त्याने त्यांच्या उद्दिष्टाचे किती टक्के ध्येय साधले?

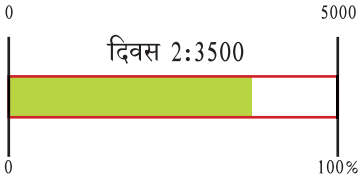
साध्य केलेली टक्केवारी खालीलप्रमाणे दर्शविलेली आहे.



%लक्ष्याची टक्केवारी:

$\frac{2000}{5000} \times 100 = 40\%$

$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$



% लक्ष्याची टक्केवारी:

$\frac{3500}{5000} \times 100 = 70\%$

$70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0.7$

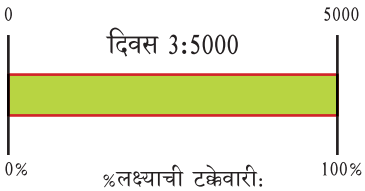
पहिल्या दिवशी 40% आणि दुसऱ्या दिवशी 70% आहे.

हे दुसऱ्या शब्दात सांगायचे असेल तर पहिल्या दिवशी ध्येयापासून 60% ने कमी आणि दुसऱ्या दिवशी लक्ष्यापासून 30% कमी विक्री झाली.

(?) पुढील दोन दिवसामध्ये त्याने अनुक्रमे ₹5000 आणि ₹6000 वी विक्री केली. तर ही मूल्ये लक्ष्यापासून किती टक्केवारीची आहे ?

त्याचे ध्येय (लक्ष) ₹5000 चे होते आणि ते तिसऱ्या दिवशी ₹5000 साध्य झाले म्हणजेच 100% झाले. चौथ्या दिवशी ₹6000 ची विक्री झाली जी लक्ष्यापेक्षा ₹1000 ने जास्त झाली.

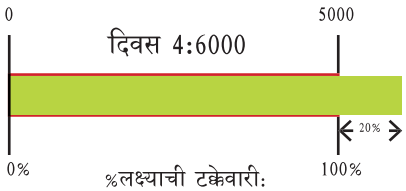
(?) चौथ्या दिवशी लक्ष्याचे किती टक्के साध्य झाले?



%लक्ष्याची टक्केवारी:

$\frac{5000}{5000} \times 100 = 100\%$

$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1.0$



%लक्ष्याची टक्केवारी:

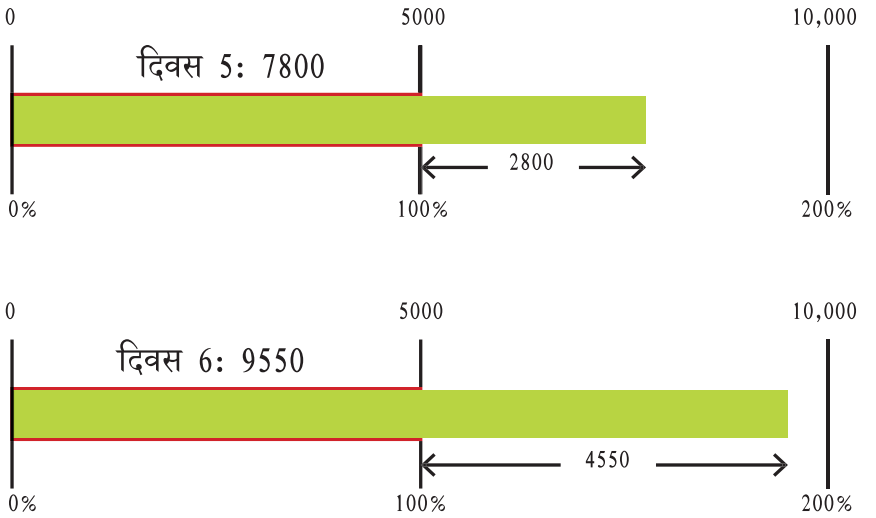
$\frac{6000}{5000} \times 100 = 120\%$

$120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = 1.2$

1000 हे 5000 चे 20% आहे. म्हणून 6000 (5000+1000) ही 100 ही 100% +20% = 5000 चे 120% आहे. त्याची गणना $\frac{6000}{5000} \times 100 = \frac{6}{5} \times 100 = 120\%$. अशी केली जाते.

याचा अर्थ आपल्या लक्ष्यापेक्षा 120% साध्य केले, म्हणजेच लक्ष्यापेक्षा 20% अधिक आहे.

(?) 5व्या आणि 6व्या दिवशाची विक्री अनुक्रमे ₹7800 आणि ₹9590 आहे. तर त्या दिवशी साध्य केलेल्या लक्ष्याची टक्केवारी याची गणना करा.

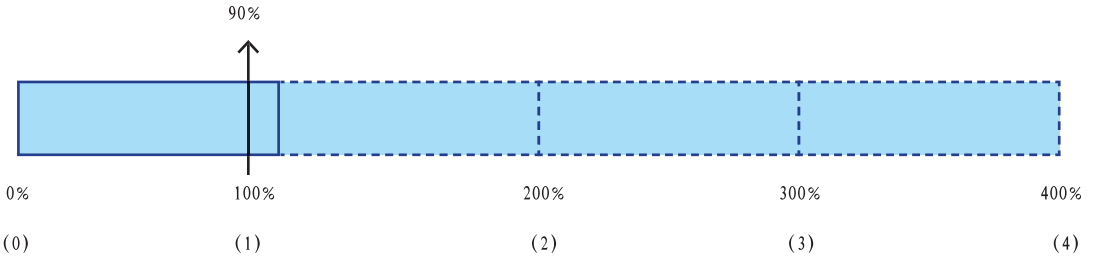


? 7व्या दिवशी लक्ष्याच्या 150% साध्य केले. 8 व्या दिवशी आपले लक्ष 210% ने साध्य केले. तर त्या दोन दिवसात झालेली विक्री किती?

समजा की एखाद्या दिवशी ₹2500 ची विक्री झाली. ''त्याने लक्ष्याचे $\frac{1}{2}$ साध्य केले'' असे आपण व्यक्त करु शकतो किंवा 50% लक्ष्य साध्य केले किंवा त्याने लक्ष्याचे 0.5 साध्य केले. एखाद्या दिवशी ₹10,000 ची विक्री केली. तेव्हा आपण म्हणू शकतो की आपल्या लक्ष्याच्या 2 पट/ दुप्पट /दुहेरी साध्य केले'' किंवा त्याने 200% आपल्या लक्ष्याच्या साध्य केले.

? खालील कोष्टक पूर्ण करा. खालील आकृतीमध्ये अंदाजे स्थाने चिन्हांकीत करा.

टक्केवारी	90%	110%	200%	250%	15%	173%	358%	28.9%	305%
अपूर्णांक									
दशांश									



उदाहरण 7 : एका शेतकऱ्याने मागील वर्षी 260kg गहू पिकविला. यावर्षी त्याने 650kg गहू पिकविला. गेल्या वर्षीच्या गहूच्या पिकाची या वर्षीच्या पिकाशी असलेली टक्केवारी किती?

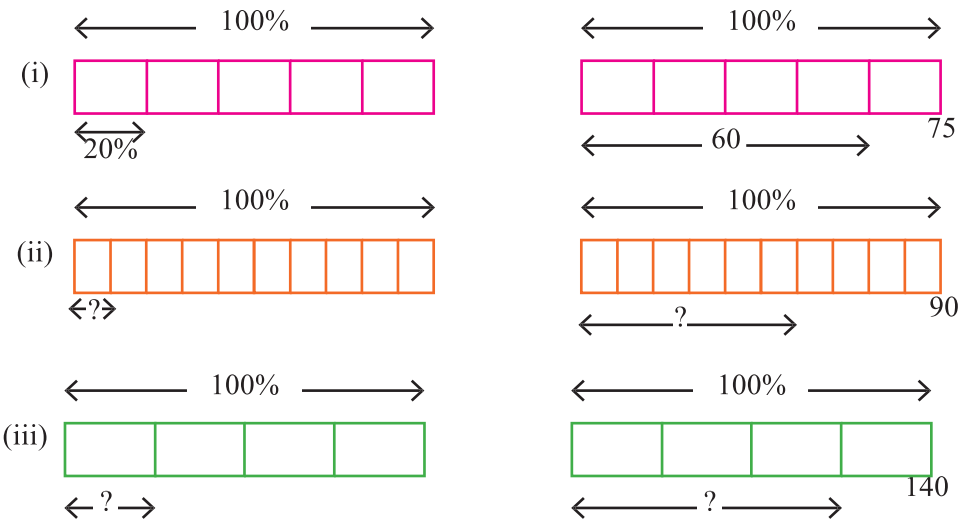
यावर्षीचे पिक = $\frac{650}{260} \times 100$ हे मागील वर्षाच्या पिकाच्या 250% आहे.

हे सुरवातीच्या मूल्याच्या 2.5 पट असल्याचे दर्शविते.

शोधा पाहू. (Figure it out)

खालील प्रश्नांची उत्तरे सोडविण्यापूर्वी अंदाज करा. मानसिक गणनेचा समावेश असलेल्या वेगवेगळ्या पद्धतीचा प्रयत्न करा.

1. गाळलेल्या संख्या शोधा. पहिले उदाहरण सोडविलेले आहे.



2. खालील मुल्यांच्या किंमती शोधा आणि त्यांचा स्तंभ नमुना सुध्दा काढा.

(i) 160 चे 25% (ii) 250 चे 16% (iii) 360 चे 62%

(iv) 40 चे 140% (v)1 तासाचे 1% (vi) 10 कि.ग्रॅ. चे 7%

3. सूर्याने 60 मि.लि. गडद नारंगी रंग बनविला. जर त्याने $\frac{3}{4}$ गडद नारंगी रंग बनविला असेल तर त्यामध्ये किती लाल रंग वापरला असेल?

4. रांशींची जोडी खालीलप्रमाणे दर्शविली आहे. चौकटीमध्ये वापरलेली योग्य चिन्हे '>', '<', '=' ओळखा आणि लिहा. दृश्यमान किंवा अंदाज करण्यास मदत करु शकते का? आवश्यकता असेल तर फक्त पडताळून गणना करा.

(i) 510 चा 50% ☐ 515 चा 50%

(ii) 148 चा 37% ☐ 148 चा 73%

(iii) 43 चा 29% ☐ 110 चा 92%

(iv) 40 चा 30% ☐ 50 चा 40%

(v) 200 चा 45% ☐ 490 चा 10%

(vi) 80 चा 30% ☐ 64 चा 24%

5. योग्यरित्या मोकळ्या जागा भरा.

(i) k चे 30% हे 70, k चे 60% हे ___ k चे 90% हे ___ k चे ___ k चे 120% हे ___ आहे.

(ii) m चे 100% हे 215 आहे, m चे 10% हे ____ m चे 1% हे ____ m चे 6% हे ___ आहे.

(iii) n चे 90% हे 270 आहे, n चे 9% हे _____ n चे 18% हे ____ n चे 100% हे ___ आहे.

(iv) असे आणखी दोन प्रश्न बनवा आणि तुमच्या समवयष्कांना आव्हान द्या.

6. रिकाम्या जागा भरा.

(i) 300 चा ____ % of हा 3 आहे.

(ii) 4 चा 40 % हा ____ आहे.

(iii) ____ चा 80 % हा 40 आहे.

7. दिवसाचा 10% हा आठवड्याच्या 1% पेक्षा मोठा आहे का? अशा प्रकारचे प्रश्न तयार करा आणि समवयस्कांना आव्हान द्या.

8. मरियमच्या शेतामध्ये एक विलक्षण बैल आहे. एके दिवशी तिने त्या बैलाला 2 एकके चारा दिला आणि त्याने 1 एकक चारा खाल्ला. दुसऱ्या दिवशी तिने त्याला 3 एकक चारा दिला आणि बैलाने 2 एकके चारा खाल्ला. त्यानंतर पुढील दिवशी तिने बैलाला 4 एकके चारा दिला आणि बैलाने 3 एकके चारा खाल्ला. हे असेच सुरु राहिले आणि 99 व्या दिवशी तिने 100 एकके चारा बैलाला दिला आणि बैलाने 99 एकके चारा खाल्ला. या राशी टक्केवारीमध्ये दर्शवा. हे कार्य वर्गातीन मुलांमध्ये विभागून द्या. तुम्ही कोणते निरीक्षण केले?



9. कॉफीच्या मळ्यातील कामगारांना 20% मळ्यातील कॉफीची फळे गोळा करण्यास 18 दिवस लागतात. जर कामाचा वेग सारखाच राहिला तर संपूर्ण मळ्यातील कॉफींची फळे गोळा करण्यास त्यांना किती दिवस लागतील? हे गृहीत धरणे का गरजेचे आहे?

10. एका बॅडमिंटन प्रशिक्षकाने सराव सत्राचे नियोजन अशारितीने केले की कवायत: खेळ : विश्रांती यांचे गुणोत्तर 10%:80%:10% राहिल. जर त्याला 90 मिनिटे प्रशिक्षण घ्यायचे असेल तर प्रत्येक कृतीसाठी त्यांना किती वेळ द्यावा लागेल?



11. जगाची अंदाजे 90% लोकसंख्या ही उत्तर गोलार्धात राहते. या वर्षीच्या जगाच्या लोकसंख्येच्या आधारे उत्तर गोलार्धात राहणाऱ्या लोकांची संख्या (अंदाजे) शोधा.

12. 4 लोकांसाठी असलेल्या हालव्याच्या खाद्यपदार्थामध्ये खालील घटक दिलेल्या प्रमाणामध्ये आहेत. रवा 40%, साखर 40% आणि तूप 20% आहे.

    (i) जर तुम्हाला 8 लोकांसाठी हालवा हा खाद्यपदार्थ बनवायचा असेल तर वरील सर्व घटकांचे प्रमाण किती असेल ?

    (ii) जर एकूण सर्व घटकांचे वजन 2kg असेल तर त्या हालव्यामध्ये रवा, साखर आणि तूप किती असेल ?

8.3 टक्केवारी वापरणे (Using percentages)

प्रमाणांची तुलना करण्यासाठी (To compare proportions)

उदाहरण 1: ईशाने परिक्षेमध्ये इंग्रजीमध्ये 50 पैकी 42 आणि विज्ञानमध्ये 80 पैकी 70 गुण मिळविले आहेत. जरी तिने इंग्रजीमध्ये फक्त 9 गुण आणि विज्ञानमध्ये 10 गुण गमाविले आहेत तरी तिला वाटते की इंग्रजीमध्ये तिने उत्तम कार्य केले आहे. रीमाची याच्याशी सहमत नाही. तिने युक्तीवाद केला की ईशाने विज्ञानमध्ये जास्त गुण मिळविले आहेत. त्यामुळे तिने विज्ञानमध्ये उत्तम प्रगती केली आहे. विष्णूला वाटले दोन्ही विषयात मिळविलेले गुण वेगवेगळे आहेत त्यामुळे त्यांची तुलना होऊ शकत नाही, तुम्हाला कोणते बरोबर आहे असे वाटते?

जर जास्तीत जास्त गुण सारखेच असतील तर तुलना करणे सोपे जाते. या प्रकारची तुलना करत असताना आपल्याला दोन्ही मुल्यांचे टक्केवारीमध्ये रुपांतर करणे गरजेचे आहे.

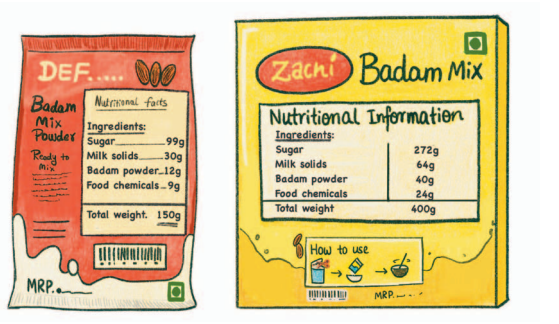
इंग्रजीमधील गुणांची टक्केवारी $= \frac{42}{50} \times 100 = 84\%$

विज्ञानमधील गुणांची टक्केवारी $= \frac{70}{80} \times 100 = 87.5\%$

विज्ञानमधील गुणांची टक्केवारी ही इंग्रजीमधील गुणांच्या टक्केवारीपेक्षा जास्त आहे म्हणून आम्ही असा निष्कर्ष काढू शकतो की ईशाने विज्ञानमध्ये मिळविलेले गुण जास्त आहेत. त्यामुळे तिचे विज्ञानमधील गुण उत्तम आहेत.

तुमची सामग्री जाणून घ्या (KYC)

उदाहरण 2: मधु आणि माधव यांना अलीकडेच प्रक्रिया केलेले अन्न खरेदी करण्यापूर्वी त्यावरील नोंदी वाचण्याचे महत्व समजून आले. ते बदाम पेय मिश्रण खरेदी करण्यासाठी एका दुकानात आहेत. ते दोन उत्पादनाचे निरीक्षण करत आहेत आणि कोणत्या पाकिटमध्ये बदाम जास्त आहे ते पाहात आहेत. तुम्ही ते शोधू शकता का? कोणत्या उत्पादनात अन्न रसायनांचा वापर कमी प्रमाणात केला आहे?



जर घटकांचे टक्केवारीत रुपांतर केले तर त्यांची तुलना करणे सोपे जाते.

उदाहरणार्थ, एकूण वजनाच्या तुलनेनुसार DEF मधील साखरेच्या प्रमाणाची टक्केवारी

$$= \frac{99}{150} \times 100 = 66\%.$$

प्रश्नांची उत्तरे देण्यासाठी टक्केवारी काढून कोष्टक भरा.

	साखर	दूध घनपदार्थ	बदाम पावडर	अन्नातील रसायने
DEF	66%			
झॅकनी				



प्रत्येक उत्पदनातील घटकांच्या टक्केवारीची बेरीज 100 होते का ते तपासून पहा.

टक्केवारीतील वाढ किंवा घट (Percentage Increase or decrease)

बहुतेकवेळा प्रमाणाच्या बदलाच्या दराचे वर्णन (स्पष्टीकरण) करण्यासाठी टक्केवारीचा उपयोग केला जातो. उदाहरणार्थ,

1. समजा की 3 वर्षापूर्वी 1kg टोमॅटोची किंमत ₹30 होती आणि आत्ता ती किंमत ₹ 42 झाली आहे. किंमतीमध्ये ₹12 ने वाढ झाली आहे.

$$\text{टक्केवारीतील वाढ} = \frac{\text{वाढीची रक्कम}}{\text{मूळ रक्कम किंवा पायाभूत रक्कम}} \times 100$$

$$= \frac{12}{30} \times 100 = 40\%$$

म्हणून आम्ही म्हणू शकतो की गेल्या 3 वर्षामध्ये टोमॅटोच्या किंमत 40% नी वाढली आहे.

2. कोविडच्या अगोदर थिएटरमध्ये सरासरी 160 लोक जात होते. आता ते फक्त 100 इतके झाले आहेत. तर घट (कमी) झालेली संख्या 60 आहे.

$$\text{टक्केवारीतील घट} = \frac{\text{घट झालेली किंमत (प्रमाण)}}{\text{मूळ किंवा पायाभूत किंमत}} \times 100$$

$$= \frac{60}{160} \times 100 = 37.5\%$$

म्हणून आम्ही म्हणू शकतो की कोविडनंतर थिएटरमधील कमी (घट) झालेल्या लोकांची टक्केवारी 37.5% ही आहे

उदाहरण 3: खालील दोन विधानांचा अर्थ सारखाच आहे का?

(i) 1991 मधील राज्याची लोकसंख्या ही 1961 च्या लोकसंख्येच्या 165% झाली आहे.

(ii) 1961 पासून 1991 पर्यंत राज्याची लोकसंख्या 65% नी वाढली आहे हो. या दोन्ही विधानांचा अर्थ सारखाच आहे. समजा की 'P' ही 1961 ची लोकसंख्या आणि 'q' ही 1991 ची लोकसंख्या आहे.

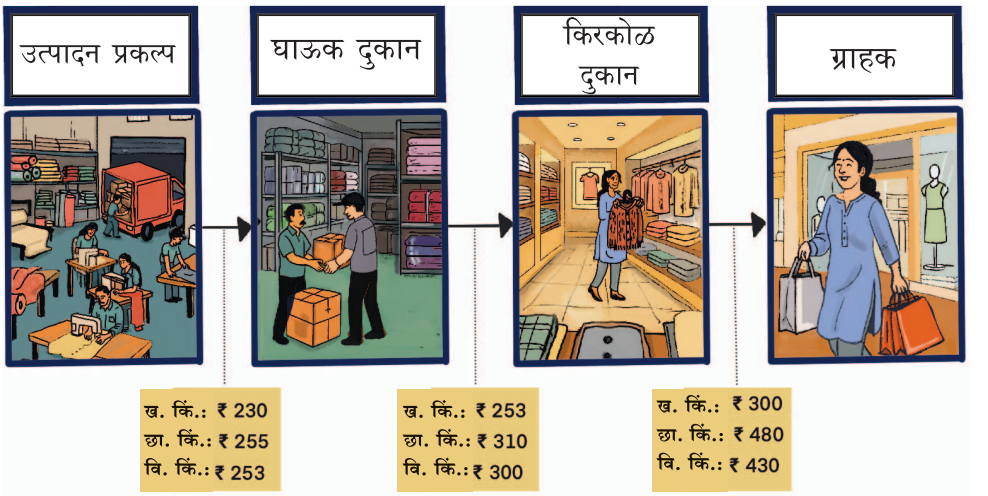
Aहे विधान असे सुचविते की	Bहे विधान असे सुचविते की
q = 165% चे p	q = p + 65% चे p
$q = \frac{165}{100} \times p = 1.65p$	$q = p + 0.65 \times p = 1.65p$

दुसऱ्या शब्दात सांगायचे झाले तर राज्याची 1991 ची लोकसंख्या 1961 च्या लोकसंस्थेपेक्षा 1.65 पट आहे.

नफा आणि तोटा (Profit and Loss)

नाश्ता, किरणा सामान, कपडे, खेळणी इ. वस्तू खरेदी करण्याचा अनुभव तुम्हाला आलेला आहे. बऱ्याचवेळा दुकानदार एक किंमत सांगतो आणि कांही सौदेबाजी करून ग्राहकाबरोबर वाटाघाटी करून एक रक्कम ठरविली जाऊन, वस्तू खरेदी केल्या जातात. दुकानदाराने सांगितलेल्या किंमतीला छापिल किंमत असे म्हणतात (कधीकधी त्या किंमतीला वस्तूची MRP असे समजले जाते.) सवलतीनंतर ग्राहकांना दिलेल्या किंमतीला विक्रीची किंमत म्हणतात. वस्तू खरेदी करत असताना दुकानदाराने दिलेल्या किंमतीला खरेदीची किंमत म्हणतात. या नोंद केलेल्या किंमती कशा सापेक्ष आहेत ते एक उदाहरण घेऊन पाहूया.

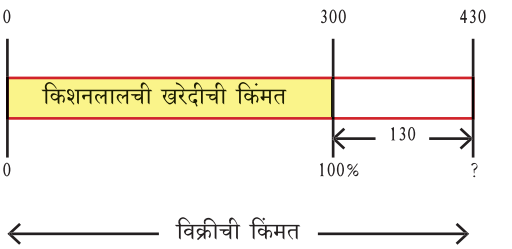
खालील चित्र स्वेटर्सच्या उत्पादनापासून ते ग्राहकापर्यंतचा प्रवास दर्शविला आहे आणि प्रत्येक टप्यातील खरेदीची किंमत (CP) छापिल किंमत (MP) आणि विक्रीची किंमत (SP) याचा अर्थ काय तो दर्शविला आहे.



किशोरलाल (किरकोळ विक्रेता) हा एका घाऊक विक्रेत्याकडून प्रत्येक स्वेटर ₹300 ने स्वेटर्स खरेदी करतो. तो आपल्या गिऱ्हाईकना ₹480 ही छापिल किंमत लावतो. सौदा करून तो गिऱ्हाईकाला ₹430 ला विकतो. लक्षात घ्या की, विक्रीची किंमत ही खरेदीच्या किमतीपेक्षा जास्त आहे. त्यामुळे नफा होतो. ₹430-₹300=₹130. जर विक्रीची किंमत खरेदीच्या किंमती पेक्षा कमी असेल तर तोटा होतो.

उदाहरण 4 : या स्वेटरच्या विक्रीवर किशनलालला किती टक्के नफा झाला तो शोधा.

खरेदीच्या किंमतीच्या संदर्भात नफ्याची टक्केवारी शोधताना आपण खरेदीची किंमत 100% मांनू. खालील कच्ची आकृती परिस्थीतीचे वर्णन करते.



नफ्याची रक्कम ₹130 आहे.

म्हणून नफ्याची टक्केवारी = $\frac{130}{300} \times 100 = 43.3\%$

(?) घाऊक विक्रेता आणि उत्पादनकर्ता यांच्या नफ्याची टक्केवारी शोधा.

(?) शांभवीचे स्टेशनरीचे दुकान आहे. ती 200 पानी वहीला प्रत्येकी ₹36 दर लावते. ती त्या वह्या 20% नफ्याने विक्री करते. तर त्याची विक्रीची किंमत काढा.

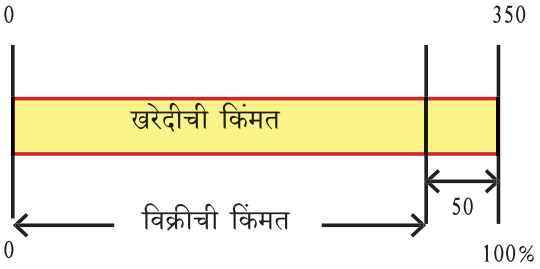
(?) क्रेयॉन बॉक्स ₹50 प्रत्येकी विकल्यामुळे तिला 25% नफा मिळतो. तर शांभवीने तो घाऊक विक्रेत्याकडून किती किंमतीला खरेदी केला असेल?

उदाहरण 5: रघुच्या अन्नपुरवठा दुकानामधील तांदळाचा साठा जुना होत चालला आहे. त्याने ₹35 दर किलो प्रमाणे तांदुळ खरेदी केला होता. तो साठा संपविण्यासाठी 10 किलो तांदूळ ₹300 ला विकतो. तर त्याला झालेला शेकडा तोटा किती?

रघुने 10 किलो तांदुळ खरेदी करणासाठी ₹350 दिले होते आणि त्यांची विक्री ₹300ला केली आहे.

त्यामुळे त्याला झालेला तोटा = ₹350-₹300

= ₹50



शेकडा तोटा हा $\frac{50}{350} \times 100 = 14.28\%$. आहे.

(?) त्याऐवजी आपण केवळ प्रति किलो तोट्याची टक्केवारीची गणना करु शकलो असतो का? तेही सारखेच राहिले असते का?

(?) **उदाहरण 6 :** शामलाने सजावटीच्या फुलदाण्या ₹2350 प्रत्येक नग या दराने खरेदी केल्या त्यापैकी एका नगाचे थोडे नुकसान झाले होते. तो नग ती 18% तोट्याने विकण्याचे ठरविते. तर ती फुलदाणी विकल्याने तिला किती रक्कम मिळेल?

(?) अंदाजे किंमत काढण्याचा प्रयत्न करा. दिलेल्या परिस्थितीचे वर्णन करणारी कच्ची आकृती काढा.

हे सोडविण्याच्या दोन पद्धती दर्शविलेल्या आहेत.

खरेदीची किंमत 100% असल्यामुळे विक्रीची किंमत खरेदीच्या किंमतीपेक्षा 18% ने कमी आहे.

म्हणजे विक्रीची किंमत 82% आहे.

2650 चे 82% = 2650×0.82=2173

तोटा रक्कम ही 2650 च्या 18% आहे.

म्हणजेच $\frac{18}{100} \times 2650 = 477.$

ही खरेदीच्या किंमतीमधून वजा केली असता

2650-477=2173

म्हणून खराब झालेल्या फुलदाणीची विक्रीची किंमत ₹2173 इतकी आहे.

? मुसळधार पाऊसामध्ये स्नेहल आपल्या पाचगणी येथील शेतातील स्ट्रॉबेरीची वाहतूक हैद्राबादला करु शकला नाही. तो आपला साठा प्रत्येक किलोला ₹80 या दराने 12% खरेदीच्या तोट्याने विकतो तर त्याची किंमत किती असेल?



ज्यावेळी दुकाने सवलती देतात त्यावेळी केलेला टक्केवारीचा उल्लेख तुम्ही पाहिला असेल 30% सवलत (30% सूट) देतात म्हणजे काय तुम्हाला माहित आहे का? याचा अर्थ असा होतो की दुकानदार स्वतः हून वस्तूंची किंमत 30% ने कमी करतो.

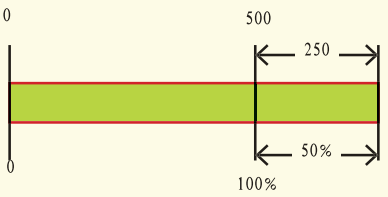
? एका भांड्याच्या दुकानामध्ये ₹1800 च्या छापिल किंमतीच्या कुकरवर 35% सुट दिली गेली. तर त्याची विक्रीची किंमत किती असेल? जर त्याची खरेदीची किंमत ₹900 असेल तर विक्रीनंतर त्याना किती टक्के नफा झाला?

समजा की किशनलालने मागच्या महिन्यामध्ये ₹80,000 ची विक्री केली. यापैकी त्या महिन्यात विकलेल्या वस्तू खरेदी करण्यासाठी ₹48,000 ही रक्कम खर्च केली आहे ₹80,000 - ₹48,000 = ₹32,000 या रक्कमेला एकूण नफा असे म्हणतात.

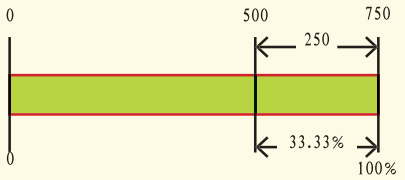
त्याने केलेला इतर खर्च (जसा की वाहतूक खर्च, कर्मचाऱ्यांचा पगार, वीज बील इ. वजा केल्यानंतर ₹8000 ही शिल्लक रक्कम आहे, त्याला निव्वळ नफा असे म्हणतात. ती ₹32,000 - ₹8000 = ₹24000 आहे.

टीप: या प्रकरणामध्ये नफा या शब्दाचा संदर्भ एकूण नफा दर्शवितो.

मनिषा ही खताची विक्री करते. ती 50 किलोची प्रत्येक पिशवी ₹500 ने खरेदी करते आणि ती प्रत्येक पिशवी ₹750 ने विकते.



तिला मिळालेला नफा $\frac{250}{500} \times 100 = 50\%$. तरीपण, ₹750 या रक्कमेशी संबंधीत, तिने पिशवीची विक्री करून मिळविलेली नफ्याची टक्केवारी $\frac{250}{500} \times 100 = 33.33\%$ आहे.



नफ्याची टक्केवारी ही वस्तूंची खरेदी करण्यासाठी ''मी गुंतविलेल्या गुंतवणूकीच्या तुलनेत मला किती नफा झाला आहे''. हे जाणून घ्यायचे असते, तेव्हा खरेदी केलेल्या वस्तूंच्या किंमतीवर आधारित नफ्याची टक्केवारी मोजली जाते.

जेव्हा आपल्याला ''माझ्या एकूण महसूलावर मला किती (निव्वळ) नफा झाला?'' हे जाणून घ्यायचे असते तेव्हा नफ्याची टक्केवारी महसूल (विक्रीची किंमत) वर आधारित मोजली जाते.

समजा, की तिने एका महिन्यामध्ये ₹1,50,000 ची विक्री केली. वस्तूची खरेदीची किंमत ₹1,00,000 आहे. म्हणून एकूण नफा ₹50,000 चा आहे. महिन्याच्या खर्चाची रक्कम ₹5000 आहे. म्हणून निव्वळ नफा ₹45,000 झाला.

मासिक महसूलापैकी (1,50,000) निव्वळ नफ्याची टक्केवारी ही $\frac{45000}{150000} \times 100 = \frac{3}{10} \times 100 = 30\%$.

कर (Taxes)

जीएसटी (वस्तू आणि सेवा कर) सारख्या करांचा दर किंवा आयकराचा दर यासारखे कर देखील टक्केवारी म्हणून निर्दिष्ट केले आहेत. तुमच्या हे ही लक्षात आले असेल की जी.एस.टी. चा उपयोग बिलाचा भाग म्हणून उल्लेख केला जातो. याचा अर्थ कर हा आम्ही दिलेल्या रक्कमेचा भाग आहे आणि ही रक्कम सरकारला जमा होते.

XY ELECTRICALS
SALES RECEIPT

Date:			06/07/2025
Item	Qty.	Price.	Amount
CFL Bulb	3	₹150.00	₹450.00
		Sub Total	₹450.00
		CGST 9%	₹40.50
		SGST 9%	₹40.50
TOTAL			₹531.00

THANK YOU

? बाजूला दिलेल्या बिलामधील गणना बरोबर आहे का ते तपासा.

? तुमच्या घरातील कोणतीही बिले तुम्ही वर्गात नेऊन चर्चा करा. बिलातील विविध घटकांचे निरीक्षण करा. त्या बिलामध्ये कांही समानता किंवा फरक आहेत का?



शोधा पाहू. (Figure it out)

1. एका दुकानदार कंपास पेटी ₹75 ला खरेदी करून ₹110 ला विकतो. तर त्याच्या किंमतीच्या तुलनेत त्याला नफा किती झाला?
2. मी सुतार आहे आणि मी खुर्च्या बनवितो. खुर्च्या बनविण्यासाठी लागणारे साहित्य ₹475 आणि मला त्यामध्ये 50% नफा हवा आहे. तेव्हा मला खुर्ची किती किंमतीला विकावी लागेल?
3. एका कंपनीची मागील वर्षाची एकूण विक्री (त्याला महसूल सुध्दा म्हणतात) ₹2.5 कोटी होती. त्यांच्या नफ्याचा भाग 25% तर मागील वर्षी कंपनीचा एकूण खर्च किती असेल ?
4. एका कपड्याच्या दुकानामध्ये सर्व शर्टावर 25% ची सूट दिली जाते. जर शर्टाची मूळ किंमत ₹300 असेल तर अन्वरला शर्ट खरेदी करण्यासाठी किती रक्कम द्यावी लागेल?
5. 2015 मध्ये पेट्रोलची किंमत ₹60 आणि 2025 मध्ये ती ₹100 आहे. तर पेट्रोलच्या किंमतीमध्ये किती टक्के वाढ झाली आहे?

   (i) 50% *(ii) 40%* *(iii) 60%*

   (iv) 66.66% *(v) 140%* *(vi) 160.66%*
6. सॅमसनने एका कार विक्रेत्याकडून 15% सूट घेवून ₹ 4,40,000 ला एक कार खरेदी केली तर त्या कारची मूळ किंमत किती असेल?
7. एका निवडणूकीमध्ये 1600 लोकांनी मतदान केले आणि विजेत्याला 500 मते मिळाली. तर विजेत्याला एकूण मतापैकी किती टक्के मते मिळाली? तसेच निवडणुकीला उभे राहिलेल्या उमेदवारांची किमान संख्या किती असेल याचा अंदाज करू शकाल का?
8. 2024 मध्ये 1kg तांदळाची किंमत ₹38 होती. 2025 मध्ये ती ₹42 झाली. महागाईचा दर किती असेल? (महागाई म्हणजे किंमतीमधील टक्केवारामधील वाढ आहे)
9. एक संख्या 20% ने वाढविली असता 90 होते तर ती संख्या कोणती?
10. एका गवळ्याने दोन म्हशी प्रत्येकी ₹80,000 ला एक प्रमाणे विकल्या. त्यापैकी एकाला 5% नफा मिळाला आणि एकाला 10% तोटा झाला तर त्याला एकूण नफा किंवा तोटा झाला तो काढा.
11. गेल्या 10 वर्षामध्ये राष्ट्रीय उद्यानामधील हत्तींची संख्या 5% ने वाढली आहे. जर गेल्या दशकातील हत्तीची संख्या 'P' असेल तर आताची हत्तींची लोकसंख्या ही आहे.

    (i) $p \times 0.5$ *(ii) $p \times 0.05$* *(iii) $p \times 1.5$*

    (iv) $p \times 1.05$ *(v) $p + 1.50$*
12. खालीलपैकी कोणत्या विधानाचा अर्थ 'गेल्या दशकात कॅमेऱ्याची मागणी 85% ने कमी झाली आहे.' याच्याशी सारखाच आहे.

(i) आताची मागणी ही दशकापूर्वीच्या मागणीच्या 85% आहे.

(ii) दशकापूर्वीची मागणी ही आताच्या मागणीच्या 85% होती.

(iii) आताची मागणी ही दशकापूर्वीच्या मागणीच्या 15% आहे.

(iv) दशकापूर्वीची मागणी ही आताच्या मागणीच्या 15% होती.

(v) दशकापूर्वीची मागणी ही आताच्या मागणीच्या 185% होती.

(vi) आताची मागणी ही दशकापूर्वीच्या मागणीच्या 185% आहे.

वाढ आणि चक्रवाढ (Growth and Compounding)

बँकेतील मुदत ठेव (FD) साठी वार्षिक व्याजाचा दर 6% किंवा बचत खात्यावरील वार्षिक व्याजाचा दर 2.5% आहे. याप्रकारची विधाने ऐकली असणार, व्याज म्हणजे संस्था, बँका किंवा पोष्ट ऑफिसकडून ठेव ठेवलेल्या रक्कमेवर दिले जाणारे जादाचे पैसे आहेत.

जेव्हा लोक संस्था किंवा बॅंकेकडून रक्कम घेतात तेव्हा व्याज द्यावे लागते.

मुदत ठेवीमध्ये (FD) तुम्ही कांही रक्कम एका ठराविक काळासाठी एक पूर्व निश्चित व्याज दराने बॅंकेत ठेवली आहे. तुम्ही निवडलेल्या कालावधीसाठी पैसे बंदिस्त (locked) होतात आणि बँक तुम्हाला त्या पैशावर व्याज देते. तुम्ही मुदती पूर्वी तारखेच्या अगोदर रक्कम काढू शकत नाही आणि त्याला दंड भरावा लागत नाही. दिलेल्या मुदतीच्या शेवटी तुम्हाला तुमची मूळ ठेव आणि त्यावरील व्याज हे दोन्ही मिळतात.

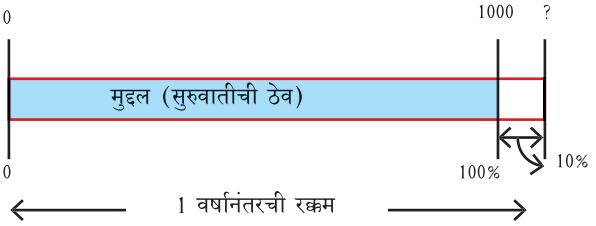
उदाहरणार्थ, एका बँकेने सांगितले की एका वर्षासाठी मुदत ठेवीवर व्याज दर 10% आहे. या विधानाचा अर्थ तुम्हाला कोणता होतो ? टक्केवारी समोर द.सा. (p.a.) म्हणजे काय?

द.सा. हे दर सालचे लघु रूप आहे त्याचा अर्थ प्रत्येक वर्षी असा आहे. निर्दिष्ट केलेले व्याज दर दर्शविते जर तुम्ही ₹6000 बँकेमध्ये एक वर्षासाठी ठेवले तर तुम्हाला त्यावर ₹ 600 हे व्याज मिळते. व्याजाचा दर 10% हा आहे आणि ₹6000 ही मुद्दल आहे ज्यावर व्याजाची गणना होते. 1 वर्षानंतर तुमच्या बँकेच्या खात्यावर होणारे व्याज.

$6000+(0.10\times6000)$

(मुद्दल) + (मुद्दलावर 10% व्याज)

$=6000+600=6600$



दुसऱ्या शब्दात, बँकेमध्ये ठेवलेली ₹6000 ही रक्कम त्याच्या 110% (किंवा 10% नी वाढते)

$6000 \times 110\% = 6000 \times \frac{110}{100} = 6000 \times 1.1 = 6600.$

हे असे सुद्धा व्यक्त केले जाऊ शकते.

1 वर्षानंतरची रक्कम = मुद्दल (P) + P वरील व्याजाचा दर

उदाहरण 7: जर एखाद्याने बँकेमध्ये ₹6000 जमा केले तर 3 वर्षानंतर होणारी रक्कम किती? मुदत ठेवी (FD)च्या निवडीनुसार येथे दोन शक्यता आहेत.

1. **पर्याय 1:** नियमितपणे व्याज दिले जाते (उदाहरणार्थ, प्रत्येक वर्षी) मुदतपूर्तीच्या कालावधीनंतर मूळ रक्कम परत केली जाते.

		दिलेले व्याज (10% द.सा.)	मुदत ठेवीवरील रक्कम
वर्ष 1	सुरूवातीची	× 0.10	₹6000
	शेवटची	₹600 परत केलेले	₹6000
वर्ष 2	सुरूवातीची	× 0.10	₹6000
	शेवटची	₹600 परत केलेले	₹6000
वर्ष 3	सुरूवातीची	× 0.10	₹6000
	शेवटची	₹600 परत केलेले	₹6000
एकूण मिळालेली रक्कम		₹1800 + ₹6000 = ₹7800	

2. **पर्याय 2:** प्रत्येक वर्षी (प्रत्येक वर्षानंतर) मिळालेले व्याज हे मुदत ठेवीवर (FD) वरून मिळवून दिले जाते त्यामुळे पढील वर्षाची मुद्दल वाढते. मुदतपुर्तीनंतर संपूर्ण रक्कम मिळते. या गुणधर्माला चक्रवाढ म्हणतात.

		दिलेले व्याज (10% द.सा.)	मुदत ठेवीवरील रक्कम	
वर्ष-1	सुरूवातीची		₹6000	× 1.10
	शेवटची	₹600 जमा केलेले	₹6600	
वर्ष-2	सुरूवातीची		₹6600	× 1.10
	शेवटची	₹660 जमा केलेले	₹7200	
वर्ष-3	सुरूवातीची		₹7260	× 1.10
	शेवटची	₹720	₹7986	
एकूण मिळालेली रक्कम		₹7986 परत केलेली रक्कम		
		₹7986		

× 0.10 (applied between each pair of rows)

उदाहरण 8: दोन्ही पर्यायामध्ये जमा केलेल्या रक्कमेच्या तुलनेत एकूण मिळालेली रक्कम किती टक्के आहे.

हे $\frac{\text{एकूण मिळालेली रक्कम}}{\text{जमा केलेली रक्कम}} \times 100$ ने शोधून गणना केली जाऊ शकते.

चक्रवाढीशिवाय

$\frac{7800}{6000} \times 100 = 130\% = 1.3$

दुसऱ्या शब्दात, एकूण मिळालेली रक्कम $= 6000 \times (1+0.1+0.1+0.1)$

$= 6000 \times 1.3$

3 वर्षामध्ये टक्केवारीमध्ये झालेली वाढ 33.1% आहे.

चक्रवाढीने

$\frac{7986}{6000} \times 100 = 133.1\% = 1.331$

दुसऱ्या शब्दात, एकूण मिळालेली रक्कम

$= 6000 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1$

$= 6000 \times 1.331$

3 वर्षामध्ये टक्केवारीमध्ये झालेली वाढ 33.1% आहे.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. बँक ऑफ वाहापूर ही 10% द.सा. व्याज येते. जर एखाद्या व्यक्तीने वार्षिक चक्रवाढीने आणि वार्षिक चक्रवाढ न घेता ₹ 20,000 हे 2 वर्षासाठी बँकेमध्ये ठेवले तर किती व्याज मिळते याची तुलना करा.
2. बँक ऑफ वाहापूर ही 5% द.सा. वार्षिक व्याज देते. जर एखाद्याने 4 वर्षाच्या कालावधीसाठी वार्षिक चक्रवाढ व्याजाने आणि चक्रवाढ वाढ न घेता बँकेत ₹20,000 जमा केले तर किती मिळतात याची तुलना करा.

3. वरील दोन प्रश्नाच्या उकलामध्ये तुम्हाला कांही मनोरंजक आढळते का? इतराबरोबर मागिदारी करून चर्चा करा.

प्रत्येक पर्यायात आढळलेल्या नमुन्यांचे सामान्यीकरण करण्याचा प्रयत्न करा.

उदाहरण 9: जर ₹6000 हे 10% द.सा. व्याज दराने 't' वर्षासाठी गुंतविले तर मिळणारी रक्कम किती असेल?

चक्रवाढ व्याज नाही (No Compounding)

येथे प्रत्येक कालावधीसाठी मिळालेले व्याज दिले जाते. त्यामुळे प्रत्येक कालावधीसाठी मुद्दलाची रक्कम सारखीच राहते त्यामुळे प्रत्येक कालावधीसाठी मिळालेले व्याज सारखेच राहते.

एका कालावधीसाठी मिळणारे व्याज
6000×0.1 आहे.
3 कालावधीसाठी मिळणारे व्याज
$6000 \times 0.1 \times 3$ आहे.
3 वर्षाच्या मुदत ठेवीच्या शेवटी होणारी एकूण खकम $6000 + (6000 \times 0.1 \times 3)$ आहे.

एका वर्षासाठी मिळविलेले व्याज $P \times r$
(P ही मुद्दल आणि r हा टक्केवारीमधील व्याजाचा दर आहे)
$'t'$ वर्षात मिळालेले व्याज $p \times r \times t$
$'t'$ वर्षात मुदत ठेवीवर मिळालेले एकूण व्याज
$p + (p \times r \times t) = p + prt$
$= p\,(1 + rt).$

चक्रवाढ व्याजाने (With Compounding)

येथे, प्रत्येक कालावधी/वर्षासाठी चे व्याज मुदत ठेवीवर (FD) वर मिळविले जाते. म्हणून प्रत्येक कालावधीनंतर मुद्दलाच्या रक्कमेमध्ये वाढ होते याचा परिणाम म्हणून प्रत्येक कालावधीच्या प्रमाणामध्ये व्याज वाढते.

1 वर्षानंतर मुदत ठेवीवर एकूण रक्कम ही
6000×1.1
(1 वर्षाची मुद्दल होते.)
2 वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील एकूण रक्कम ही
$(6000 \times 1.1) \times 1.1$
(2 वर्षाची मुद्दल होते.)
3 वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील एकूण रक्कम ही
$(6000 \times 1.1 \times 1.1) \times 1.1$
(3 वर्षाची मुद्दल होते.)
t वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील एकूण व्याज ही
$6000 \times (1.1 \times 1.1 \times 1.1 \ldots\ldots \times 1.1)$
't' वेळा
$6000 \times (1.1)^t$

1 वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील (FD) एकूण रक्कम ही
$P \times (1 + r)$
(1 वर्षाची मुद्दल आहे.)
2 वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील (FD) एकूण रक्कम ही
1 वर्षाची
$p \times (1 + r) \times (1 + r)$ आहे.
(2 ऱ्या वर्षाची मुद्दल आहे.)
3 वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील (FD) एकूण रक्कम ही
$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times (1 + r)$ आहे.
(3 ऱ्या वर्षाची मुद्दल आहे.)
t वर्षानंतर मुदत ठेवीवरील (FD) एकूण रक्कम ही
$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times \ldots\ldots \times (1 + r)$
t वेळा
$p \times (1 + r)^t$

(?) समजा की, आपल्याला मुदतपुर्ती कालावधीनंतर मिळणारे एकूण व्याज शोधण्यासाठीची राशी किंवा सूत्राची माहिती करुन घ्यायचे असेल तर प्रत्येक पर्यायासाठी असलेले सूत्र कोणते ?

गणिती बोल

शोधा पाहू. (Figure it out)

4. जास्मीनने 'P' ही मुद्दल 6% द.सा. व्याज दराने 4 वर्षासाठी गुंतविली, तर चक्रवाढ व्याज न करता 4 वर्षानंतर तिला मिळणारी एकूण रक्कम दर्शविणारे खालीलपैकी कोणते सूत्र आहे?

(i) $p \times 6 \times 4$ (ii) $p \times 0.6 \times 4$ (iii) $p \times \frac{0.6}{100} \times 4$

(iv) $p \times \frac{0.06}{100} \times 4$ (v) $p \times 1.6 \times 4$ (vi) $p \times 1.06 \times 4$

(vii) $p + (p \times 0.06 \times 4)$

5. पोस्ट ऑफिसने 7% द.सा. व्याज देण्याची तयारी केली तर चक्रवाढ व्याज न घेता एखाद्याने ₹50,000 गुंतविले तर त्याला 4 वर्षात किती व्याज मिळेल. जर त्याने चक्रवाढ व्याज घेतले तर त्याला किती जास्त व्याज मिळेल ?

6. गिरीधरने ₹12,500 चे 12% द. सा. दराने 3 वर्षासाठी चक्रवाढ व्याज न करता कर्ज घेतले आणि राधवने चक्रवाढ व्याज्याने तीच रक्कम त्याच समान कालावधीसाठी कर्ज म्हणून घेतली. तर कोण अधिक व्याज आकारेल आणि किती व्याज भरेल ?

7. ₹1000 या राशीचा विचार करा. जर त्याची वाढ दरवर्षी 10% द.सा. व्याजाने होत असेल तर चक्रवाढ व्याजाने ती रक्कम (रास) दुप्पट होण्यासाठी किती वेळ लागेल. त्याच्या विरुध्द चक्रवाढ व्याज घेतले नाही तर किती वेळ लागेल? चक्रवाढ व्याज ही घातांकीय वाढीचे उदाहरण आहे का आणि चक्रवाढ व्याज नसलेले रेषीय वाढीचे उदाहरण आहे का?

गणिती बोल

8. एका शहराची लोकसंख्या प्रत्येक वर्षी 3% ने वाढते. जर त्याची आताची लोकसंख्या 1.5 कोटी असेल तर 3 वर्षानंतर अपेक्षित लोकसंख्या किती असेल?

9. एका प्रयोगशाळेमध्ये एका विशिष्ट प्रयोगामध्ये जीवाणूंची संख्या दर तासाला 2.5% दराने वाढते. जर सुरूवातीची संख्या 5,06,000 असेल तर 2 तासानंतर जीवाणूंची संख्या किती होईल ?

घट (कमी) होणे (Decline)

अनेक वस्तू किंवा साहित्य यांचे कालांतराने आर्थिक मूल्य गमावितात. समजा की, तुमच्या घरी कोणीतरी एक मोटर सायकल (दूचाकी) ₹1,00,000 ला खरेदी केली आणि कांही वर्षानंतर त्यांना ती विकायची आहे. त्यावेळी त्या मोटर सायकलची (दूचाकीची) किंमत (मुल्य) ₹1,00,000 पेक्षा कमी असेल. ते विविध घटकावर अवलंबून असते. जसे की वाहन खरेदी करून किती वर्षे झाली, वाहन किती किलो मीटर प्रवास करण्यास वापरले आहे, त्याचे कांही नुकसान झाले आहे किंवा त्याचे कोणतेही भाग बदलले आहेत. याला वाहनाचे अवमूल्यन (किंमतीत उत्तार) असे म्हणतात. वस्तूचा वापर आणि वयामुळे मूल्यातील घट आहे.

उदाहरण 10 : एक दूरदर्शन संच (TV) ₹21,000 किंमतीला खरेदी केला. 1 वर्षानंतर TV चे मूल्य 5% घटते तर एक वर्षानंतर होणारे TV चे मूल्य (किंमत) किती?

मूल्यामध्ये कमी झालेली रक्कम ₹21,000 च्या 5% = 1050 सध्याचे मूल्य 21,000-1050 = 19,950	1 वर्षानंतर TV चे आताचे मूल्य 95% = 21,000 चे 95% = 0.95 ×21,000 =19,950

म्हणून 1 वर्षानंतर TV चे मूल्य =₹19,950 होते.

उदाहरण 11: एका गांवाची लोकांची लोकसंख्या दर दशकात सुमारे 10% ने कमी होत असल्याचे दिसून आले. जर आताची लोकसंख्या 1250 असेल तर 3 दशकानंतर अपेक्षित लोकसंख्या किती ?

1-दशकांनंतरची लोकसंख्या सध्याच्या लोक संख्येच्या 0.9 पट आहे. म्हणून 1 दशकानंतरची लोकसंख्या ही 1250×0.9 आहे. 2-दशकानंतरची लोकसंख्या ही 1250×0.9×0.9 होते. 3-दशकानंतर लोकसंख्या ही 1250 × 0.9 ×0.9×0.9 = 911.25	पहिल्या दशकातील घट = 0.1×1250 =125 1-दशकानंतरची लोकसंख्या = 1250-125 = 1125 दुसऱ्या दशकातील घट = 0.1×1125 =112.5=112 2 ऱ्या दशकानंतरची लोकसंख्या = 1125-112 = 1013 3 ऱ्या दशकातील घट = 0.1×1013 = 101.3≅101 3 ऱ्या दशकानंतरची लोकसंख्या = 1013-101=912

म्हणून, आपण असे म्हणू शकतो की 3-या दशकानंतर अपेक्षित लोकसंख्या जवळपास 910 इतकी आहे.

अवघड टक्केवारी (Tricky Percentage)

गणिती बोल

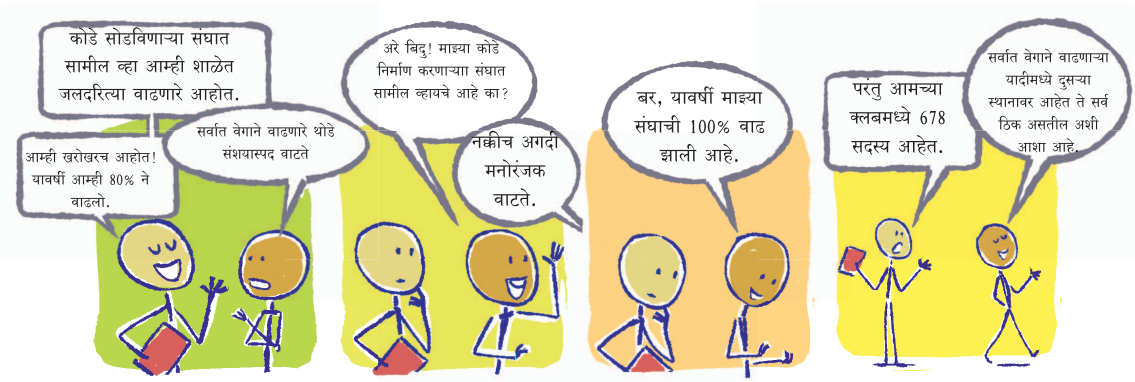
तुम्हे असे कराल का?

तुम्ही एक स्पर्धा जिंकली आहे. आयोजक निवडण्यासाठी दोन पर्याय देतात.

पर्याय A : जर तुम्ही ₹100 जमा केले तर तुम्हाला ₹300 परत मिळतात.

पर्याय B : जर तुम्ही ₹1000 जमा केले तर तुम्हाला ₹1500 परत मिळतात.

प्रत्येक पर्याय किती टक्के नफा देतो? तुम्ही कोणताही पर्याय फक्त एकदाच निवडू शकता. तर तुम्ही कोणत्या पर्यायाची निवड कराल? का?



टक्केवारीची तुलना करताना, आपण हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, आपण निरपेक्ष मूल्यांची नाही तर अपूर्णांकांची किंवा प्रमाणांची तुलना करत आहोत.

? एका पुरवठा करणाऱ्या दुकानदाराने साठा खाली करण्यासाठी सवलत दिली. ग्राहक ₹150 च्या खरेदीवर ₹50 सूट किंवा 20% सूट यापैकी एका पर्यायाची निवड करु शकतात.

(i) ₹180 च्या वस्तूंची खरेदी करण्यासाठी,

(ii) ₹225 किंमतीच्या वस्तू खरेदी करण्यासाठी,

(iii) ₹300 च्या वस्तूंची खरेदी करण्यासाठी तर वरीलपैकी कोणत्या पर्यायाची निवड तुम्ही करू शकाल?

? **उदाहरण 12:** केकली नावाची बेकरी सर्व केकवर 30% + 20% सूट देत आहे. कॅकिफाय नावाची आणखी एक बेकरी सर्व केकवर 50% सवलत देत आहे. जर तुम्हाला केक कमी किंमतीत खरेदी करायचा असेल तर केकली किंवा कॅकिफाय यापैकी कोणती बेकरी निवडाल?



असे दिसून येते की दोन्ही पर्यायांचा फायदा सारखाच आहे. तरीपण गणितीदृष्ट्या 30%+20% हे 50% शी सारखेच आहे, पण खरेदीमध्ये 30%+20% चा वापर म्हणजे चक्रवाढ.

समजा की, तुम्हाला ₹200 चा केक खरेदी करायचा आहे.
केकलीज 30% + 20% → 30% सवलत लागू केली तर केकची किंमत ही ₹200-₹60 = ₹140 होईल.
₹200-₹60 = ₹140 होईल.
आता ₹140 वर 20% सूट लागू केली तर केकची किंमत ही ₹140-₹ 28 = ₹112 होते.
केकीफाय 50% →
50% सूट दिली तर केकची किंमत ₹100 होते.



एक अपघात (Mishap)

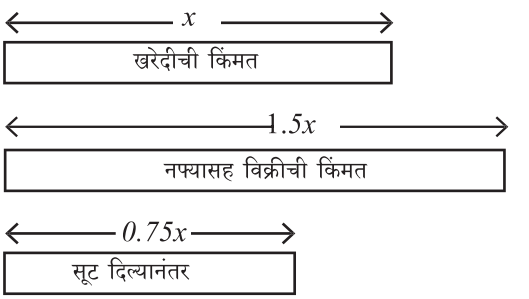
उदाहरण 13: सुरभीने घाऊक विक्रेत्याकडून स्वयंपाकाची भांडी खरेदी केल्यानंतर तिने सर्व उत्पादनावर 50% नफा घेतला. राहिलेला साठा कमी करण्यासाठी तिने 50% सूट देण्याचा विचार केला तसेच कोणताही तोटा होणार नाही याची काळजी घेतली.

(i) तुम्हाला वाटते का तिला कोणताही तोटा झाला नाही ?

(ii) जर तिने वस्तू ₹12000 (मूळ किंमतीत) विकल्या असतील तर किती नुकसान झाले असेल? तोट्याची टक्केवारी किती असेल ?

(iii) तिने खरेदी केलेल्या किंमतीला (नफा किंवा तोटा नसताना) वस्तू विकण्यासाठी तिने किती टक्के सूट दिली असावी?

पहिल्या परिस्थितीचा नमुना बनवूया.
समजा, घाऊक विक्रेत्याकडून तिने खरेदी केलेल्या उत्पादनाची किंमत 'x' आहे.
विक्रीच्या किंमतीशी संबंधीत मूल्य (50% जास्त आकारुन) हे $1.5x$ होते.
या किंमतीवर 50% सूट दिल्यास तिचे मूल्य $0.75x$ होईल.



(i) याचा अर्थ वस्तूची विक्रीची किंमत ही घेतलेल्या वस्तूच्या खरेदीच्या किंमतीच्या $\frac{3}{4}$ आहे म्हणजेच 25% तोटा आहे.

(ii) जर तिने ₹12000 च्या वस्तू विकल्या, तर

$$0.75x = 12000$$

$$x = 16.000$$

तिला ₹4000 चा तोटा झाला.

(iii) जर खरेदीच्या किंमतीलाच वस्तू विकल्या तर दिलेली सूट ही

$$1.5x - d \times (1.5x) = x$$

$$d = \frac{1}{3} = 0.33$$

तिला मिळालेली सूट 33.33% आहे.

अरिबा आणि अरुणकडे कांही गोट्या आहेत, अरिबा म्हणते की, तिच्याजवळ असलेल्या गोट्या या अरुणकडे असलेल्या गोट्याच्या 120% आहेत. तर अरुण आपल्या जवळील गोट्यांची तुलना अरिबकडे असलेल्या गोट्यांशी कशी करु शकेल आणि त्याचे बरोबर विधान कोणते असेल ?



शोधा पाहू. (Figure it out)

1. 2025 मधील बेंगळूरुची लोकसंख्या 2000 च्या लोकसंख्येच्या सुमारे 250% आहे. जर 2000 मधील लोकसंख्या 50 लाख असेल तर 2025 मधील लोकसंख्या किती असेल?

2. 2025 मध्ये जगाची लोकसंख्या सुमारे 8.2 अब्ज (मिलीयन) होईल. 2025 मधील कांही देशांची लोकसंख्या दिली आहे तर जागतिक लोकसंख्येच्या टक्केवारीशी त्यांची अंदाजे जोडी जुळवा.

(**सुचना:** या संख्या प्रमाणित नमुन्यामध्ये लिहिल्या असता अंदाज करण्यास मदत करतात.)

जर्मनी 83 दशलक्ष	भारत 1.46 अब्ज	बांगलादेश 175 दशलक्ष	अमेरिका 347 दशलक्ष

13%	8%	18%	10%	1%	35%	2%	2%	0.1%

3. भ्रमण यंत्र (मोबाईल) ची किंमत ₹8,250 आहे. त्यामध्ये 18% जी. एस. टी. मिळविला पाहिजे. जी.एस.टी. च्या समावेशासह खालीलपैकी मोबाईलची अंतिम किंमत कोणती?

(i) $8250 + 18$ (ii) $8250 + 1800$

(iii) $8250 + \frac{18}{100}$ (iv) 8250×18

(v) 8250×1.18 (vi) $8250 + 8250 \times 0.18$

(vii) 1.8×8250

4. एका प्रयोगशाळेतील उंदिरांच्या लोकसंख्येतील मासिक टक्केवारीमधील बदल (मागिल महिन्याच्या तुलनेत) दिलेला आहे. 1ल्या महिन्यातील बदल + 5% दुसऱ्या महिन्यातील बदल -2% आणि 3 च्या महिन्यातील बदल -3% आहेत. जर सुरवातीची लोकसंख्या 'P' असेल तर खालीलपैकी कोणती विधाने बरोबर आहेत.

(i) 3 महिन्यानंतरची लोकसंख्या $p \times 0.05 \times 0.02 \times 0.03$ होती.

(i) 3 महिन्यानंतरची लोकसंख्या $p \times 1.05 \times 0.98 \times 0.97$ होती.

(iii) 3 महिन्यानंतरची लोकसंख्या $p + 0.05 - 0.02 - 0.03$ होती.

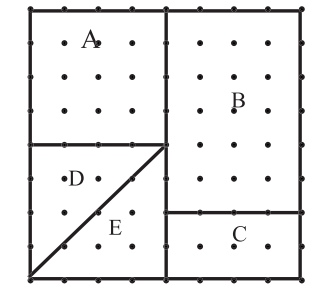
(iv) 3 महिन्यानंतरची लोकसंख्या p होती

(v) 3 महिन्यानंतरची लोकसंख्या p पेक्षा जास्त होती.

(vi) 3 महिन्यानंतरची लोकसंख्या p पेक्षा कमी होती.

5. एका दुकानदाराने एका उत्पादनाची सुरूवातीची किंमत 35% नफ्यासह निश्चित केली. विक्री कमी झाल्यामुळे त्याने त्या वस्तूच्या विक्रीच्या किंमतीवर 30% सूट जाहीर केली. तर त्याला नफा किंवा तोटा होईल? तुमच्या उत्तराचे कारण लिहा.

6. आकृतीमध्ये 'E' क्षेत्राने खुणा केलेल्या भागाने व्यापलेल्या क्षेत्रफळाची टक्केवारी किती?



7. 40चे 5% किती होतात? 5 चे 40% किती होतात?
12चे 25% म्हणजे किती? 25 चे 12% म्हणजे किती?
60चे 15% म्हणजे किती? 15 चे 60% म्हणजे किती?
तुम्ही कोणते निरीक्षण केले आहे?
y च्या x% आणि x च्या y% यांची तुलना करून बीजगणिताच्या सहाय्याने सामान्य विधान करु शकता का? याचे समर्थन करा.

8. एका शाळेने विद्यार्थ्यांच्या सहलीचे आयोजन केले आहे. त्यापैकी 40% विद्यार्थी इयत्ता 8 वी चे आहेत आणि राहिलेले विद्यार्थी इ.9 वी चे आहेत. इ. 8 वींच्या विद्यार्थ्यांपैकी 60% मुली आहेत.

(**सुचना :** कच्ची आकृती काढली असता ती तुम्हाला मदत करेल)

(i) सहलीला जाणाऱ्या विद्यार्थ्यापैकी इयत्ता 8वी च्या मुलींची टक्केवारी किती ?

(ii) जर सहलीला जाणाऱ्या एकूण विद्यार्थ्यांची संख्या 160 असेल तर त्यापैकी इयत्ता 8 वीच्या मुलींची संख्या किती?

9. एक दुकानदार पेन्सिलची विक्री अशी करतो की, 3 पेन्सिलच्या विक्रीची किंमत ही 2 पेन्सिलच्या खरेदीच्या किंमती इतकी आहे. तर त्याला नफा किंवा तोटा होतो? त्याच्या नफा किंवा तोट्याची टक्केवारी किती?

हे प्रयत्न करा

10. बसच्या भाड्यामध्ये मागील वर्षी 3% आणि चालू वर्षी 4% ने वाढ झाली आहे. तर गेल्या दोन वर्षात दराच्या किंमतीमध्ये एकूण कितीने वाढ झाली?

11. जर आयताची लांबी 10%ने वाढविली आणि त्याचे क्षेत्रफळ तेच राहिले तर त्याच्या रुंदीमध्ये किती टक्क्यानी घट (कमी) होते?

12. आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे चिप्सच्या पाकिटमधील घटकांची टक्केवारी दिली आहे. तर त्या पाकिटमधील प्रत्येक घटकाचे वजन किती असेल ते काढा.

13. तीन दुकाने सारख्याच वस्तू सारख्याच दराने (किंमतीने) विकतात. दुकाने खालीलप्रमाणे सवलती जाहीर करतात.

दुकान A : एका वस्तूच्या खरेदी वर 1 वस्तू मोफत मिळवा.

दुकान B : दोन वस्तू खरेदी करा आणि 1 वस्तू मोफत मिळवा.

दुकान C : तीन वस्तू खरेदी करा आणि 1 वस्तू मोफत मिळवा.



खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) जर एका वस्तूची किंमत ₹100 असेल तर प्रत्येक दुकानातील परिणामी, वस्तूची किंमत किती असेल? तर त्या दुकानांची सर्वात स्वस्त किंमत ते सर्वात महाग किंमत याप्रमाणे मांडणी करा.

(ii) प्रत्येक दुकानाने वस्तूवर दिलेल्या सुटीची टक्केवारी काढा.

(**सूचना** : तुम्हाला मिळालेल्या वस्तूंची मोफत वस्तूंशी तुलना करा.)

(iii) जर तुम्हाला 5 वस्तूंची आवश्यकता आहे. त्यावेळी तुम्ही कोणत्या दुकानाची निवड कराल? का?

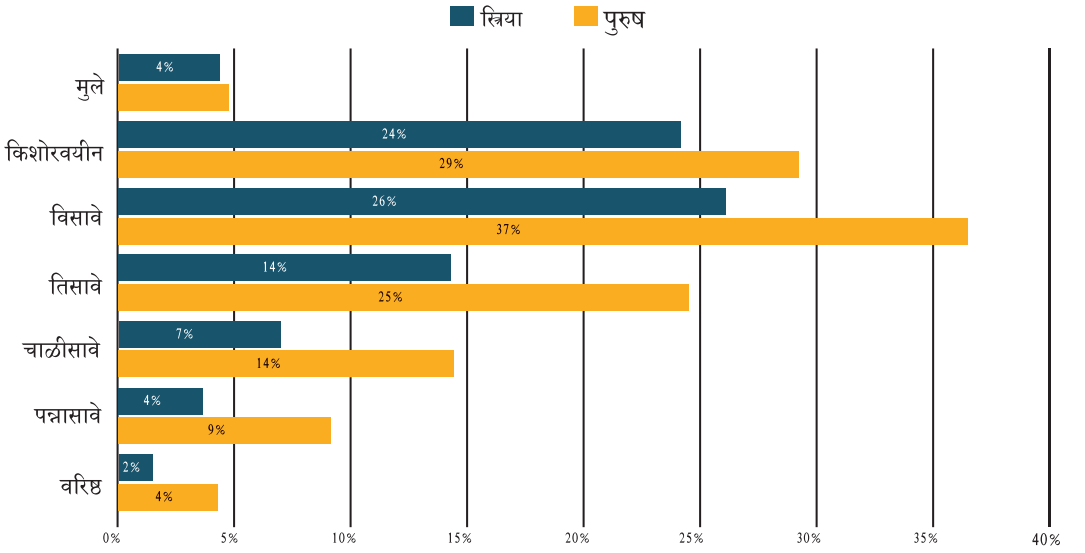
14. 100 लोकांच्या एका खोलीमध्ये 99 लोक डावखुरे आहेत. ही टक्केवारी 98% पर्यंत कमी करण्यासाठी किती लोकांना खोली सोडून जावे लागेल?

हे प्रयत्न करा

15. खालील आलेखाचे निरीक्षण करा.

वय आणि लिंगानुसार संगणक वापरण्याची क्षमता (2023)

20 वर्षाच्या आणि किशोरवयीन मुलांमध्ये संगणक वापरण्याची क्षमता सर्वाधिक आहे.



स्त्रोत: NNS विभाग 79, व्यापात्मक वार्षिक विभागवार सर्वेक्षण, राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय

Data For India

आलेखावर आधारित खालीलपैकी कोणती विधाने वैध आहेत.

(i) सर्व वयोगटातील लोकामध्ये विसाव्या वर्षावरील लोक सर्वात जास्त संगणक साक्षर आहेत.

(ii) वयानुसार संगणकाच्या वापराच्या क्षमतेमध्ये महिला गटात मागे आहेत.

(iii) किशोरवयीन मुलापेक्षा विसाव्या वर्षाच्या वयाच्या लोकांची संख्या अधिक आहे.

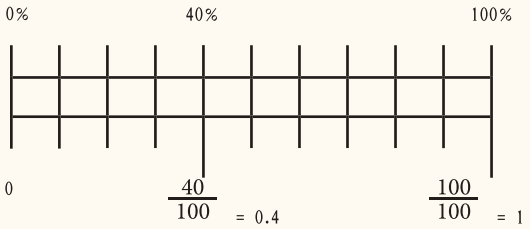
(iv) तिसाव्या वर्षे वयावरील एक चतुर्थांश पेक्षा जास्त लोक संगणकाचा वापर करु शकतात.

(v) साठव्या वर्षे आणि त्यावरील वयाचे 10 पैकी 1 पेक्षा कमी लोक संगणक वापरु शकतात.

(vi) विसाव्या वर्षावरील निम्मे लोक संगणकाचा वापर करु शकतात.

सारांश

- आपल्या दैनंदिन जीवनात टक्केवारीचा उपयोग मोठ्या प्रमाणात होतो.
- टक्केवारी ही छेद 100 असलेला अपूर्णांक आहे. टक्केवारी ही % या चिन्हाचा वापर करुन दर्शविली जाते. ज्याचा उच्चार दर शंभराला असा आहे. $x\% = \frac{x}{100}$
- अपूर्णांकाचे रुपांतर टक्केवारी आणि उलटपक्षी शक्य आहे. दशांशाचे सुध्दा टक्केवारीत रुपांतर होते आणि उलटपक्षी. उदा. 4/10 = 0.4 = 40%



- एकूण संख्येची विशिष्ट टक्केवारी दिली असता अचूक संख्या कशी शोधायची याचा अभ्यास आपण केला आहे.
- जेव्हा राशीचा कांही भाग गुणोत्तरात दिलेला असेल तर त्याला टक्केवारीमध्ये कसे बदलायचे हे आपण पाहिले आहे.
- कांही राशींची वाढ किंवा घट ही सुध्दा टक्केवारीमध्ये व्यक्त केली जाऊ शकते.
- व्यवहारामध्ये होणारा नफा किंवा तोटा आणि कराचा दर टक्केवारीच्या स्वरुपात व्यक्त केला जाऊ शकतो.
- आपण पाहिले आहे की, एखादी रक्कम किंवा संख्या चक्रवाढीने वाढते तर व्याजाचा दर हे चक्रवाढीचे सामान्य उदाहरण आहे. जर 'P' ही मुद्दल, 'r' हा व्याजाचा दर आणि 't' ही कालावधीची संख्या असेल तर मुदतपुर्ती नंतर होणारी एकूण रक्कम ही

चक्रवाढ न करता	चक्रवाढ वाढीने
$P(1+r)$ संपूर्ण कालावधीसाठी 'P' ही मुद्दलच राहते.	$p \times (1 + r) \times (1 + r) \times \ldots \times (1 + r) = p\,(1 + r)^t$ पहिल्या वर्षाची मुद्दल 2-या वर्षाची मुद्दल 3-या वर्षाची मुद्दल ⋮ t वर्षाची मुद्दल

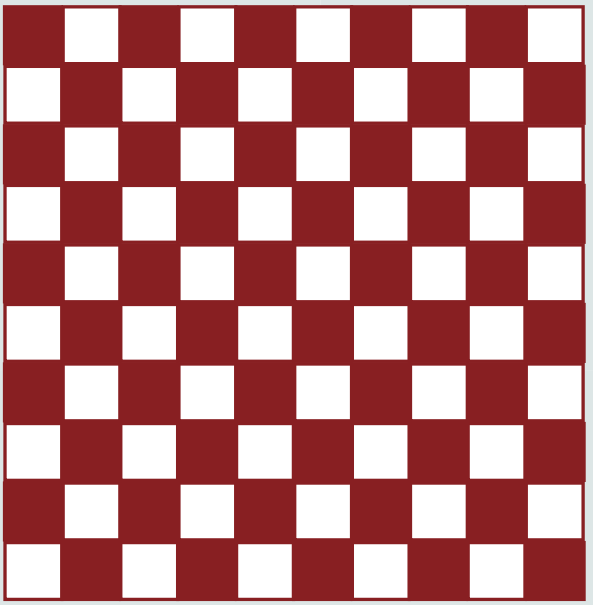
- एखादी परिस्थिती किंवा समस्या अनेक वेळा कच्च्या आकृतीचा वापर करून तिचे वर्णन करुन सोडविता येते. टक्केवारीशी संबंधित समस्या सोडविण्यासाठी अंदाज करून अंतरज्ञानाने गणना करण्याचे आपण अभ्यासले आहे.

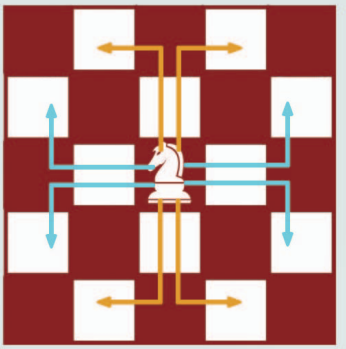


ही कोड्याची वेळ

शांत शूरवीर (सैनिक)

बुद्धीबळाच्या पटावर 8 शूरवीर (सैनिक) ठेवा, जेणेकरून कोणतेही सैनिक दुसऱ्यावर हल्ला करणार नाहीत. एक सैनिक L आकारामध्ये हालचाल करतो. तो अशी हालचाल करते की (a) दोन पावले उभी आणि एक पाऊल आडवे किंवा (b) दोन पावले आडवी आणि एक पाऊल उभे. सैनिकांच्या संभाव्य हालचाली खालीलप्रमाणे दर्शविलेल्या आहेत.







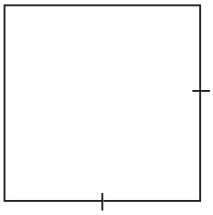
9 बौद्धायन पायथॅगोरसचा प्रमेय
(THE BAUDHĀYANA - PYTHAGORAS THEOREM)

I6U3D7

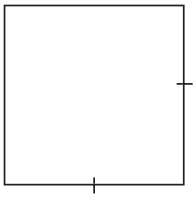
9.1 चौरस दुप्पट करणे (Doubling a square)

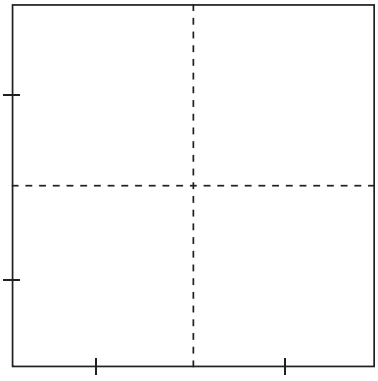
बौध्दायन सुलबा-सूत्रामध्ये (Śulba-Sūtra) (c. 800 BCE) बौध्दायनने खालील प्रश्नांचा विचार केला.

? दिलेल्या चौरसाच्या दुप्पट क्षेत्रफळ असलेल्या चौरसाची रचना कशी केली जाऊ शकते?



प्रथम तर्क असा असेल की, चौरसाची प्रत्येक बाजूची लांबी फक्त दुप्पट करुन या नवीन चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट असेल का? हे पाहण्यास कठीण नाही. नवीन चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या $2 \times 2 = 4$ पट होईल.

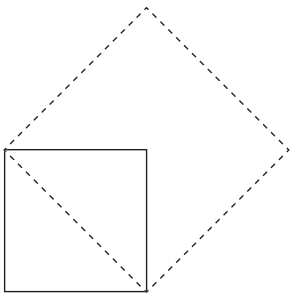




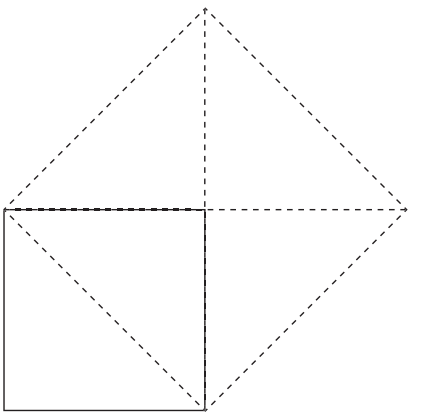
तर मग दुप्पट क्षेत्रफळ असणारा चौरस कसा बनविता येईल? बौध्दायन या त्यांच्या सुलबा-सूत्रामध्ये (श्लोक 1.9) या प्रश्नांचे सुंदर असे उत्तर दिले आहे.

चौरसाचा कर्ण मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट चौरस तयार करतो.

बोधायन म्हणतात की, मूळ चौरसाच्या कर्णावर चौरसाची रचना करणे ही गुरुकिल्ली आहे.



(?) नवीन ठिपकेयुक्त चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे का?



सूलबा-सूत्रामधील अनेक रचनामध्ये आवश्यतेनुसार बौध्दायन त्याना 'पूर्व-पश्चिम' आणि उत्तर-दक्षिण रेषा म्हणतात म्हणजेच एकमेकांला लंब असणाऱ्या आडव्या आणि उभ्या रेषा आहेत. नवीन चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट असणाऱ्या कांही आडव्या आणि उभ्या रेषा तुम्ही काढू शकाल का? उजवीकडे दाखविल्याप्रमाणे तुम्ही कांही आडव्या आणि उभ्या रेषा काढाल का?

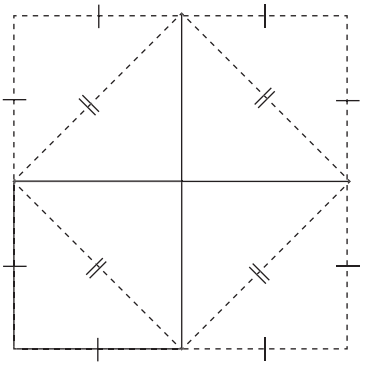
(?) मूळ चौरसाच्या उभ्या आणि आडव्या बाजू या वाढविलेल्या ठिपके युक्त चौरसाच्या शिरोबिंदूतून का गेल्या पाहिजेत? (सुचना: चौरसाच्या कर्णाच्या गुणधर्मावरून, कोनाला दुभागणारी रेषा ही विरुद्ध शिरोबिंदूतून जाते. मूळ चौरसाच्या आडव्या आणि उभ्या बाजू या ठिपकेयुक्त चौरसाचे दोन कोनाना दुभागातात.)

गणिती बोल

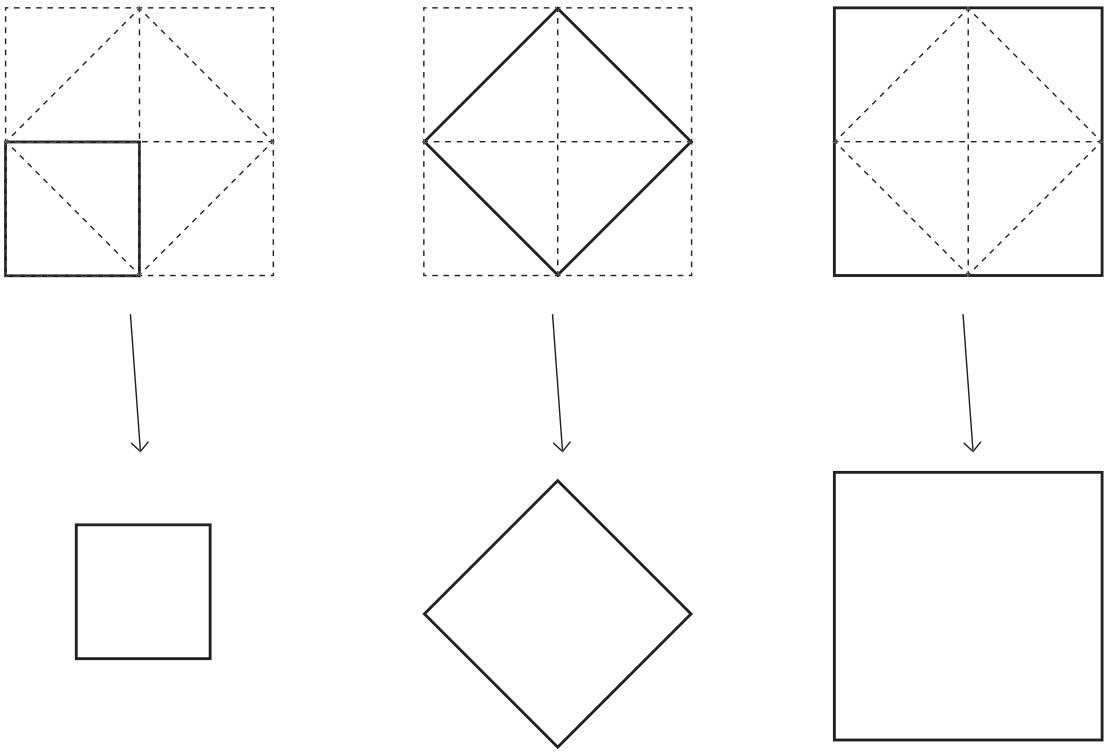
त्यामुळे नवीन चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट होते. कारण मूळ चौकोन हा दोन लहान त्रिकोणापासून बनलेला आहे तर नवीन चौरस हा चार त्रिकोणानी बनलेला आहे.

(?) तरीपण, सर्व लहान त्रिकोण हे एकमेकाला एकरूप आहेत का? ते तुम्ही कसे स्पष्ट करू शकाल?

कांही अधिक आडव्या आणि उभ्या रेषा काढून परिस्थिती आणखी स्पष्ट होऊ शकते.



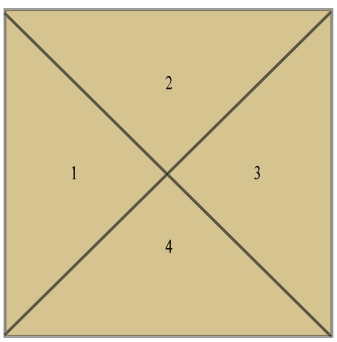
म्हणून आम्ही खालील चौरसांचा क्रम तयार करु शकतो.



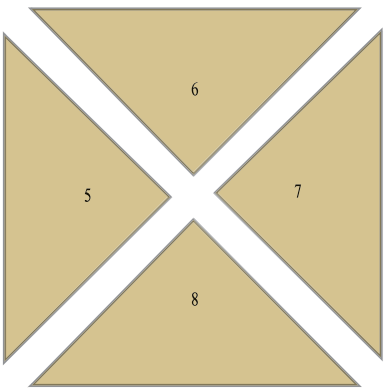
प्रत्येक चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मागील चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे कारण ते अनुक्रमे 2,4 आणि 8 लहान त्रिकोणांनी बनलेले आहेत.

कागदाचा वापर करून चौरस दुप्पट करणे (Doubling a Square Using paper)

? कागदाचे दोन सारखेच चौरस कापा. नांवे द्या आणि खालीलप्रमाणे कापा.



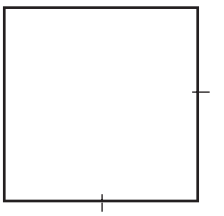
चौरस 1



सारखाच चौरस 2

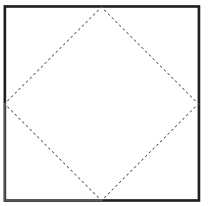
आता 5,6,7 आणि 8 हे तुकडे चौरस 1 वर ठेवले असता दुप्पट क्षेत्रफळ असलेला चौरस मिळतो.

9.2. चौरस निम्मा (अर्धा) करणे (Halving a Square)

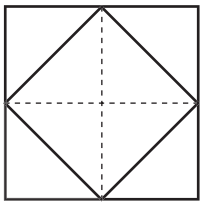


आता तुम्हाला एक चौरस दिलेला आहे असे समजा आणि आम्हाला मूळ चौरसाच्या निम्म्या क्षेत्रफळाच्या चौरसाची रचना करायची आहे. ती तुम्ही कशी कराल?

असे करण्याची एक पध्दत म्हणजे मागील भागात केलेली रचना उलट करणे होय. आम्ही मोठ्या चौरसाच्या आत वाकलेला लहान चौरस रचून करु शकतो.



आतील लहान चौरस मोठ्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मा का आहे?

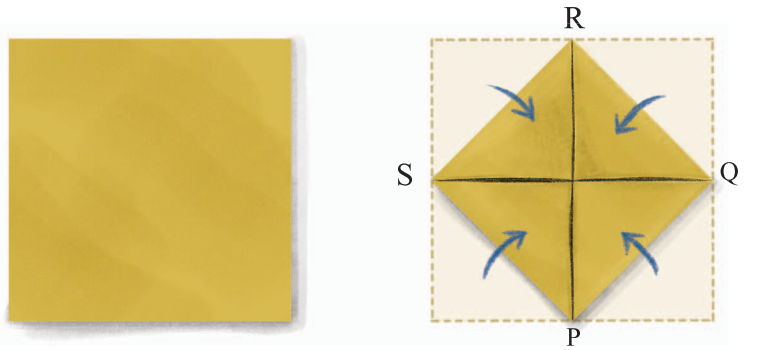


कागद वापरुन चौरस अर्धा बनविणे (Halving the square by using paper)

कागदाच्या पानावर एक चौरस कापा. आता एक असा चौरस बनवा ज्याचे क्षेत्रफळ पहिल्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे आहे.

ज्या चौरसाची लांबी अर्धी आहे त्याचे क्षेत्रफळ अर्धे असेल का? का नाही? अशा किती चौरसानी मूळ चौरस भरेल (पूर्ण होईल)?

आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे चौरसाकृती कागदाची घडी आतील बाजूला अशी घाला की दुमडलेली रेषा बाजूच्या मध्यबिंदूतून जाते. PQRS हा अर्ध्या क्षेत्रफळाचा आवश्यक चौरस असेल.



(?) PQRS हा चौरस का आहे? त्याचे क्षेत्रफळ मूळ कागदाच्या निम्मे का आहे?

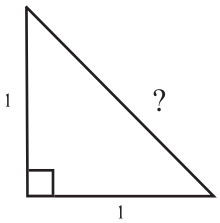
QS आणि PR जोडून वेगवेगळे कोन तयार करा आणि नंतर त्रिकोणाची एकरुपता वापरुन स्पष्टीकरण द्या.

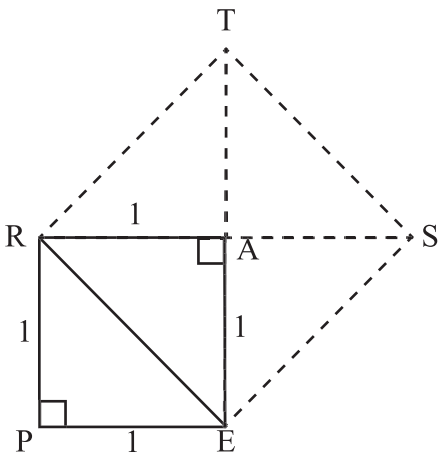
9.3. समद्विभूज काटकोन त्रिकोणाचे कर्ण (Hypotenuse of Isosceles Right Triangle)

स्मरण करा की, काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोनाच्या विरुध्द बाजूला कर्ण असे म्हणतात.

? या समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण शोधा.

आपल्याला माहित आहे की बाजू 1 एकक असणारा चौरस हा अशा दोन समद्विभूज काटकोन त्रिकोणापासून बनलेला असतो. आम्हाला हे सुध्दा माहित आहे की, या चौरसाच्या कर्णावर रचलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे.





अद्याप आपल्याला कर्णाची लांबी माहित नाही, परंतु आम्हाला REST या त्यावरील चौरसाचे क्षेत्रफळ माहित आहे.

REST चे क्षेत्रफळ = 2 × PEAR चे क्षेत्रफळ

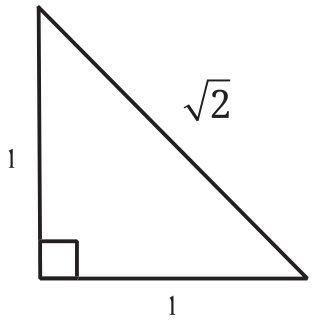
= 2 × 1 = 2 चौ. एकक

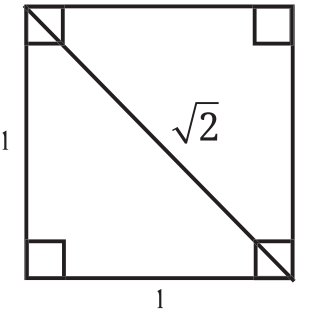
आम्हाला चौरसाच्या बाजू आणि क्षेत्रफळ यामधील संबंधाची माहिती आहे. जर कर्ण ER ही c असेल तर

REST चे क्षेत्रफळ = $c \times c = c^2$

म्हणून $c^2 = 2$

$\therefore C = \sqrt{2}$ त्यामुळे कर्णाची लांबी ही $\sqrt{2}$ एकक आहे.





या प्रकरणाच्या राहिलेल्या भागामध्ये जर निर्दिष्ट केलेले नसेल, तर आपण असे गृहित धरु की सर्व लांबी या एका निश्चित एककामध्ये आहेत.

? $\sqrt{2}$ ची किंमत (मूल्य) किती ?

$\sqrt{2}$ हे दशांशामध्ये दर्शविणे (Decimal Representation of $\sqrt{2}$)

खालील युक्तीवादाच्या मदतीने $\sqrt{2}$ हे दशांशात दर्शविले जाऊ शकते.

? $\sqrt{2}$ हे 1 पेक्षा लहान किंवा मोठे आहे?

चौरसाच्या बाजूची लांबी 1 एकक असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ 1 चौ. एकक असते. चौरसाच्या बाजूची लांबी $\sqrt{2}$ असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ 2 चौ एकक असते. म्हणून 2 हे $\sqrt{2}$ पेक्षा लहान आहे.

त्यामुळे 1हे $\sqrt{2}$ पेक्षा लहान आहे.

दुसऱ्या शब्दात $1^2=1$ आणि $\sqrt{2}^2=2$

म्हणून, $1<\sqrt{2}$

? $\sqrt{2}$ हे 2 पेक्षा लहान किंवा मोठे आहे?

चौरसाच्या बाजूची लांबी 2 एकक असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ 4 चौ. एकक असते. चौरसाच्या बाजूची लांबी $\sqrt{2}$ असेल, तर त्याचे क्षेत्रफळ 2 चौ. एकक असते.

म्हणून 2 हे $\sqrt{2}$ पेक्षा मोठे आहेत.

दुसऱ्या शब्दात $\sqrt{2}^2 = 2$ आणि $2^2=4$

म्हणून $\sqrt{2} < 2$

त्यामुळे $1<\sqrt{2}<2$

आपण 1ला $\sqrt{2}$ ची खालील सीमा आणि 2 ला वरील सीमा असे म्हणतो.

$1.1^2 = 1.21$

$1.2^2 = 1.44$

$1.3^2 = 1.69$

$1.4^2 = 1.96$

$1.5^2 = 2.25$

म्हणून $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$1.41^2 = 1.9881$

$1.42^2 = 2.0164$

म्हणून $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$1.411^2 = 1.990921$

$1.412^2 = 1.993744$

$1.413^2 = 1.996569$

$1.414^2 = 1.999396$

$1.415^2 = 2.002225$

म्हणून $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

? आपल्याला कधी तरी अशी संख्या मिळेल का ज्याचा वर्ग 2 असेल आणि सांत दशांश होतो.

जर 1.414....ने सूरु होणारा असा शेवटचा दशांश असेल ज्याचा वर्ग 2 असेल, तर त्याचा शेवटचा अंक शून्यरहित असेल. जर याप्रमाणे असेल तर त्याच्या वर्गाच्या दशांश दर्शविण्यामध्ये दशांश बिंदू शून्यरहीत असेल. उदाहरणार्थ, जर $\sqrt{2}$ हा 1.414....4 स्वरुपात असेल तर त्याच्या वर्गाचे स्वरूप असे असेल.

□ . □ □ ... □ 6

म्हणून सांत दशांशाच्या वर्गामध्ये 2 किंवा 2.000 असू शकत नाहीत.

त्यामुळे $\sqrt{2}$ चा दशांश विस्तार पुढे चालू राहिला पाहिजे, म्हणजेच त्याला पुनरावर्तित दशांश असला पाहिजे.

? $\sqrt{2}$ हे $\frac{m}{n}$ या अपूर्णांकामध्ये व्यक्त केले जाऊ शकते का, जेथे m आणि n या मोजसंख्या आहेत.

हे प्रयत्न करा

जर $\sqrt{2}$ हे $\frac{m}{n}$ मध्ये व्यक्त केले जात असेल तर आपल्याला मिळेल,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2$$

स्मरण करा की, वर्ग संख्येच्या मूळ गुणाकारात प्रत्येक मूळ संख्या सम संख्येने येते म्हणून समीकरण $2n^2 = m^2$, मूळ 2 हे डाव्या बाजूला विषम संख्येच्या पटीत आणि उजव्या बाजूला सम संख्येच्या पटीत येते. हे अशक्य आहे. त्यामुळे $\sqrt{2}$ हे $\frac{m}{n}$ च्या स्वरुपात व्यक्त करता येत नाही.

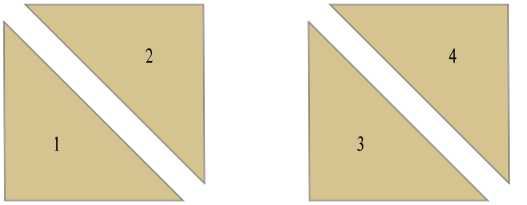
हा मनोरंजक सिद्धांत आहे की, $\sqrt{2}$ ही $\frac{m}{n}$ मध्ये व्यक्त करता येत नाही जेथे m आणि n या मोजसंख्या आहेत असे युक्लिडनी एलिमेंटस या पुस्तकामध्ये (सुमारे 300 इ.स.पूर्व) मध्ये दिले आहे. आपण याविषयी पुढील वर्गात सविस्तर चर्चा करणार आहोत.

त्यामुळे $\sqrt{2}$ ही संख्या सांत दशांश किंवा अपूर्णांक म्हणून व्यक्त करता येत नाही. परंतु आपण एक सांत नसणारे दशांश म्हणून विचार करु शकतो. $\sqrt{2}$ =1.41421356...

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. पूर्वी, आपण दिलेल्या चौरस कागदाच्या दुप्पट क्षेत्रफळ असलेला चौरस तयार करण्याची पद्धत पाहिली आहे. असे करण्याची आणखी एक पध्दत आहे. ज्यामध्ये दोन समान चौरस कागद खालील पद्धती प्रमाणे कापले जातात.

गणिती बोल



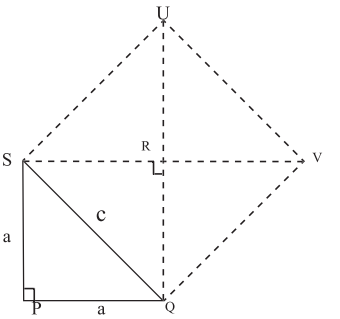
तुम्ही या कागदाच्या तुकड्यांची मांडणी करुन दुप्पट क्षेत्रफळाचा चौरस बनवू शकता का?

2. समद्वीभूज काटकोन त्रिकोणाच्या दोन समान बाजूंची लांबी दिलेली आहे. तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा. कर्णाच्या लांबीच्या सीमा अशारितीने शोधा की दशांश बिंदूनंतर कमीतकमी एक अंक असेल. (a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 9

3. समद्वीभुज काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण 10 आहे. तर त्याच्या इतर दोन बाजू किती आहेत? (सुचना अशा दोन काटकोन त्रिकोणांनी बनलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ शोधा.)

सामान्य उकल (General solution)

चौरसाचे क्षेत्रफळ आणि चौरसाचे कर्ण यामधील संबंधाचे सूत्र वापरून कर्ण बाजू आणि समुद्वीभूज काटकोन त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजूमधील साधारण संबंध काढला जातो.



समान बाजूंची लांबी 'a' आणि कर्णाची लांबी c मानू

SQVU चे क्षेत्रफळ = 2 × PQRS चे क्षेत्रफळ

म्हणून $c^2 = 2a^2$

जेव्हा 'a' माहित असेल तर किंवा 'c' माहित असेल तर वरील सूत्र वापरुन 'c' किंवा 'a' शोधले जाऊ शकते.

उदाहरण 1: समद्वीभुज काटकोन त्रिकोणाच्या समान बाजूंची लांबी 12 असेल तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

आपल्याकडे आहे a=12, तर सूत्र वापरून आपल्याला मिळेल,

$$c = \sqrt{2\times12^2} = \sqrt{288}$$

आपल्याकडे आहे $16^2=256$ आणि $17^2=289$

म्हणून $\sqrt{288}$ हे 16 आणि 17 यांच्यामध्ये आहे. समद्वीभूज काटकोन त्रिकोणाच्या समान बाजूंची लांबी 12 एकक असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी 16 आणि 17 एककाच्यामध्ये असते.

उदाहरण 2: जर समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी $\sqrt{72}$ आहे तर त्याच्या इतर दोन बाजू काढा.

आपल्याकडे आहे $C=\sqrt{72}$

सूत्र वापरुन आपल्याला मिळत $c^2 = 2a^2$

$$\text{त्यामुळे } (\sqrt{72})^2 = 2a^2$$

$$72 = 2a^2$$

$$\text{म्हणून } a^2 = \frac{72}{2} = 36$$

$$\text{त्यामुळे } a = \sqrt{36} = 6$$

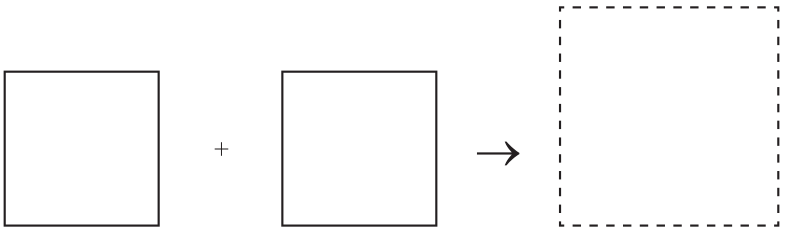
म्हणून त्याच्या इतर दोन प्रत्येक बाजूंची लांबी 6 आहे.

शोधा पाहू पान 9.3 मध्ये हे सूत्र वापरून उत्तर तपासून पहा.

9.4 दोन वेगवेगळे चौरस एकत्रित करणे (जोडणे)

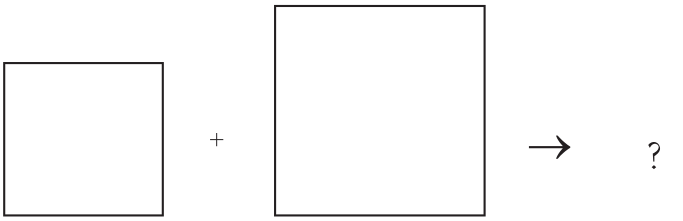
(Combining Two different Squares)

आपण यापूर्वीच्या विभागात पाहिले आहे की एकाच चौरसाच्या दोन प्रती एकत्रित करून मोठा चौरस कसा केला जातो आणि ज्याचे क्षेत्रफळ हे दोन लहान चौरसांच्या बेरजेइतके आहे.



मोठ्या चौरसाच्या बाजूची लांबी ही त्याच्या लहान चौरसाच्या कोणत्याही एका कर्णाची लांबी असते.

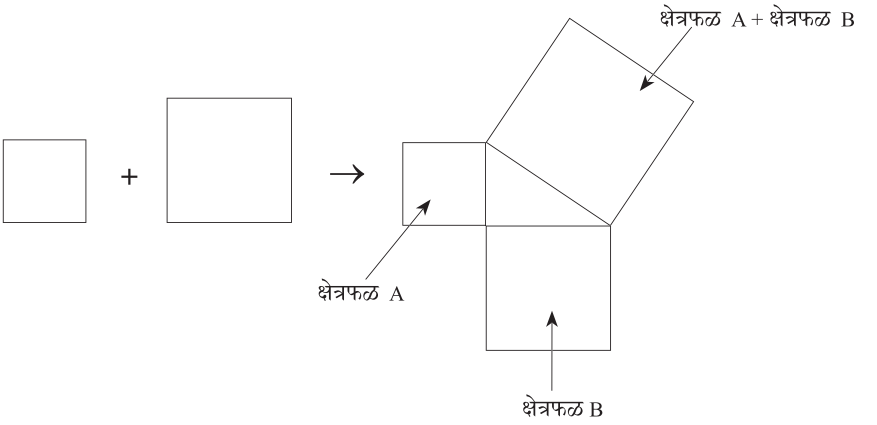
? जर आपल्याला 'वेगवेगळ्या' आकाराचे दोन चौरस एकत्र करून एक मोठा चौरस तयार करायचा असेल, ज्याचे क्षेत्रफळ हे दोन लहान चौरसांच्या बेरजेइतके आहे.



बौध्दायन यांच्या सूलबा-सूत्र (श्लोक 1.12) यामध्ये दोन वेगवेगळ्या आकाराच्या चौरसाना एकत्र करण्याच्या या सामान्य समस्येवर उल्लेखनीय असे उपाय दिलेले आहेत ते लिहितात.

कर्णावर तयार झालेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या इतर दोन बाजूवर तयार होणाऱ्या चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके असते.

म्हणजेच, दोन वेगवेगळे चौरस एकत्र करण्यासाठी, एक काटकोन त्रिकोण तयार करा, ज्याच्या लंब बाजू या दोन चौरसांच्या बाजूंची लांबी आहेत. ज्या चौरसाच्या बाजूंची लांबी ही काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आहे आणि त्याचे क्षेत्रफळ हे मूळ चौरसाच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके आहे.



? बौध्दायन यांची पध्दत का कार्य करते?

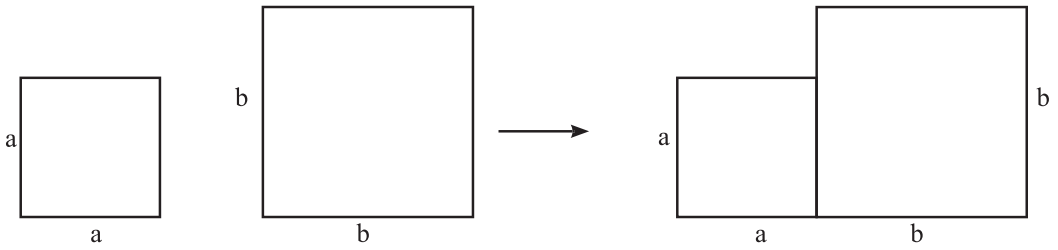
? समान आकाराच्या दोन चौरसांच्या घटनेत ही पध्दत का कार्य करते हे तुम्ही पाहू शकाल का? दोन समान आकाराचे चौरस एकत्र करून मोठ्या चौरसाला जोडण्यासाठी आपण यापूर्वी वापरलेल्या पध्दतीशी हे जुळते का?

त्यानंतर बौध्दायनच्या सुलबा सूत्र (श्लोक 2.1) मध्ये आणखी एक श्लोक दिला आहे, जो ही पध्दत सामान्यपणे का कार्य करते हे स्पष्ट करण्यास मदत करतो.

वेगवेगळे चौरस एकत्रित करण्यासाठी लहान चौरसाच्या बाजूंचा वापर करुन मोठ्या चौरसाच्या आयताकृती भागांना खुणा करा. या आयताचा कर्ण ही एका चौरसाची बाजू असून त्याचे क्षेत्रफळ हे लहान चौरसाच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके असते.

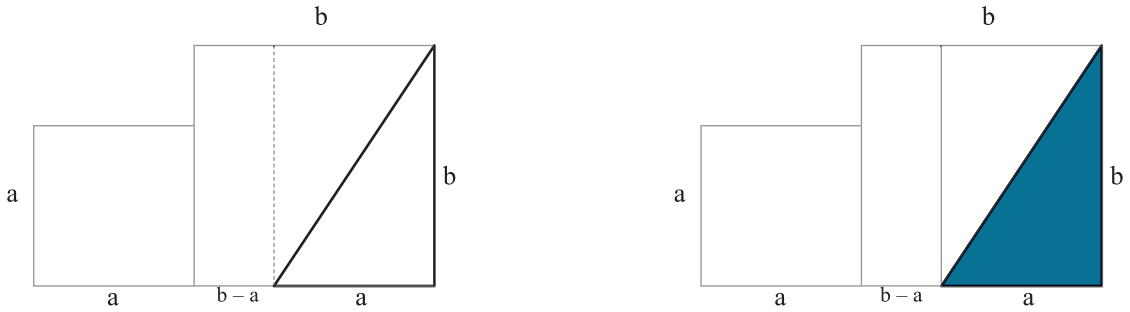
चला तर बौद्धायन यांच्या सुचनांचे पालन करुया.

- दोन चौरस जोडणे.



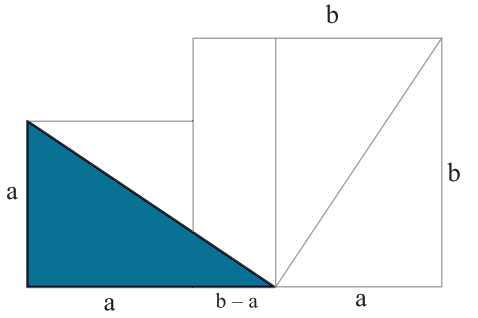
- लहान चौरसाची एक बाजू वापरुन मोठ्या चौरसाच्या आयताकृती भागाला खूण करा आणि त्याचे कर्ण काढा. असे केल्यामुळे तुम्हाला 'a' आणि 'b' लंब बाजू असलेला काटकोन त्रिकोण मिळतो.

1.

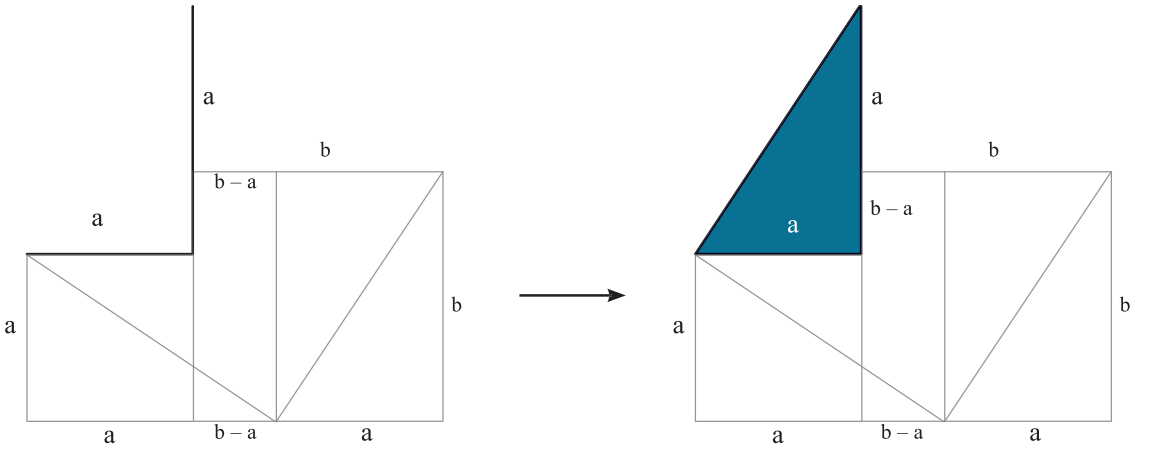


- कर्णावर असे तीन काटकोन त्रिकोण रचून एक चार बाजूंच्या आकृतीला खुणा करा.

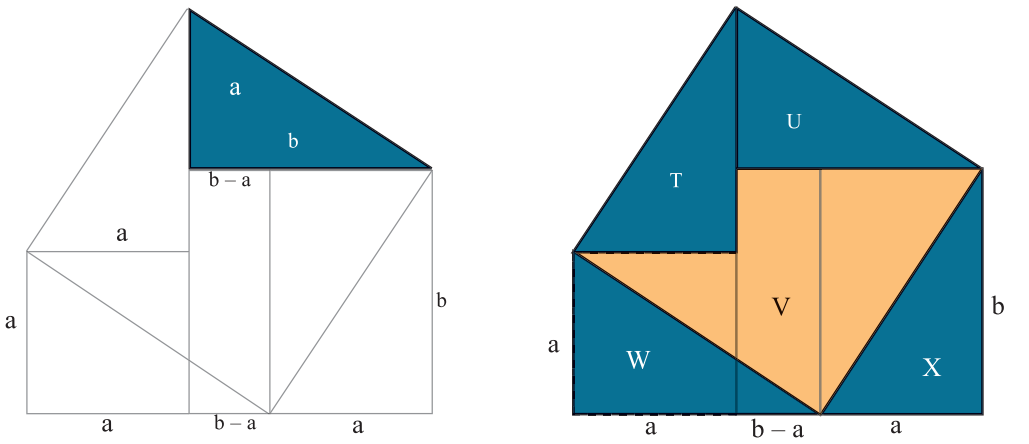
2.



3.



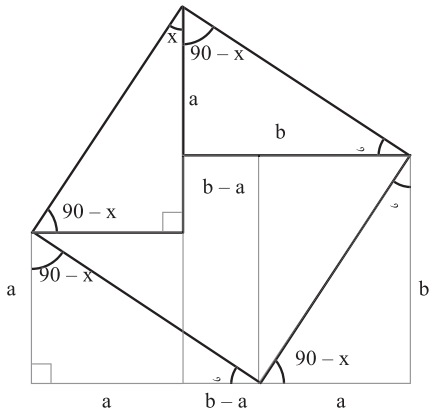
4.



- मिळालेली चार बाजूंची आकृती (T+U+V) प्रत्यक्षात एक चौरस आहे ज्याचे क्षेत्रफळ हे दोन लहान चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके आहे.

का ?

- T, U, X आणि W हे सर्व एकरूप आहेत, या नवीन 4-बाजूंच्या आकृतीच्या सर्व बाजूंची लांबी समान आहे. त्यांच्या कोनाकडे लक्ष द्या.

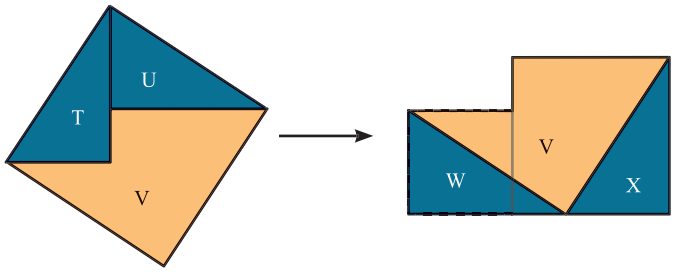


या नवीन 4-बाजूंच्या आकृतीचे सर्व कोन काटकोन आहेत आणि त्यामुळे तो चौरस आहे का? याचे स्पष्टीकरण करा.

लक्षात घ्या की, नवीन चौरसाला त्याची बाजूंची लांबी ही बाजू a आणि बाजू b काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आहे.

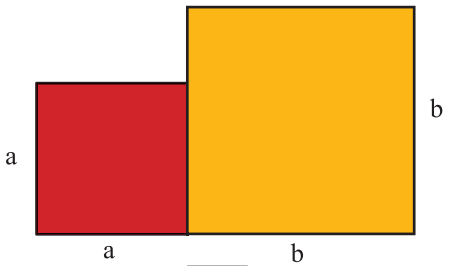
- बौध्दायन याचे विधान आता स्पष्ट झाले आहे.

कर्णावरील चौरसाचे क्षेत्रफळ = U, T आणि Vच्या क्षेत्रफळांची बेरीज = V, W आणि X च्या क्षेत्रफळांची बेरीज = दिलेल्या दोन चौरसांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज.

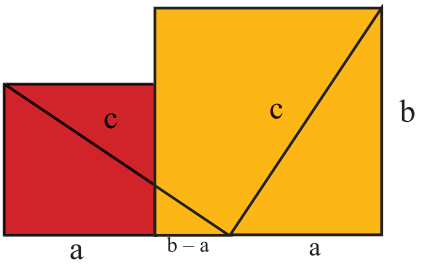


कागद वापरून दोन चौरस एकत्र करणे (Combining Two Squares Using Papers)

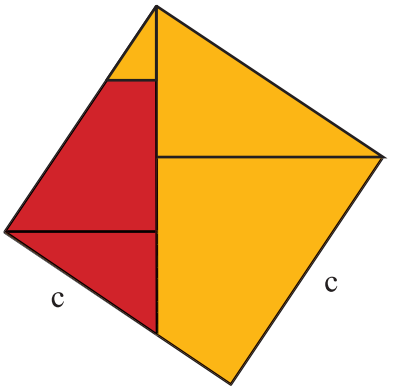
खाली दर्शविल्याप्रमाणे दोन वेगवेगळ्या आकाराचे चौरस कापून जोडा.



आता दोन वेळा कापून तीन तुकडे (भाग) करा.



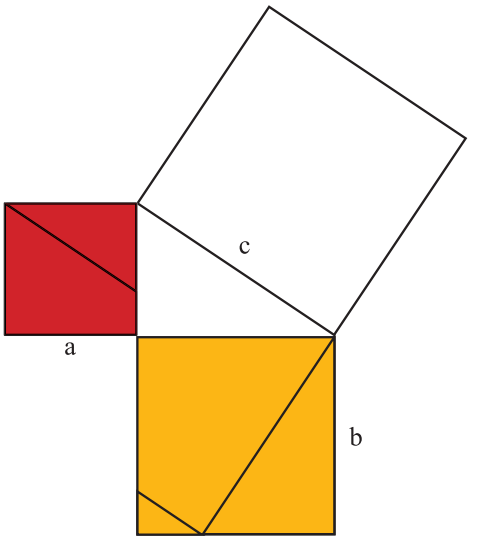
या तीन तुकड्यांची पुर्नमांडणी करुन मोठा चौरस बनवा.



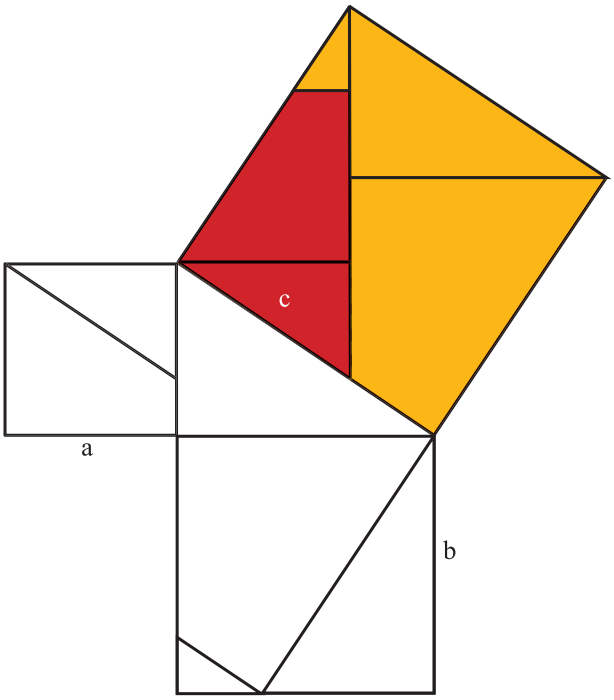
आता तुम्ही दोन लहान चौरसांना एकत्रित जोडून मोठा चौरस केला!

आता दोन लहान चौरस वापरुन काटकोन त्रिकोण रचा. त्याच्या कर्णावर एक चौरस रचा.

या तीन तुकड्यांची पुर्नमांडणी करून मोठा चौरस तयार करा.



तुमचे कागदाचे तुकडे वापरून कर्णावरील चौरसाना झाका.



यावरुन असे दिसून येते की, जर काटकोन त्रिकोणाच्या लहान बाजूंची लांबी a आणि b आणि कर्ण बाजूची लांबी c आहे. तर दोन लहान चौरसांचे क्षेत्रफळ a^2 आणि b^2 हे मोठ्या चौरसाचे क्षेत्रफळ c^2 शी जोडले जाते.

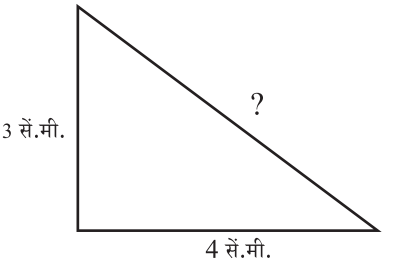
$$a^2 + b^2 = c^2$$

हा बौध्दायनांचा काटकोन त्रिकोणावरील मूलभूत प्रमेय आहे.

बौध्दायनांचा काटकोन त्रिकोणावरील प्रमेय: जर काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी a, b आणि c आहे, जेथे 'c' ही कर्णाची लांबी आहे तर $a^2 + b^2 = c^2$

बौध्दायन ही इतिहासातील अशी पहिली व्यक्ती आहेत, ज्यानी सामान्यरित्या मूलभूत प्रमेय आधुनिक रुपात मांडला. ग्रीक तत्वज्ञानी-गणिततज्ञ पायथॅगोरस (सुमारे 500 इ.स. पूर्व) यांच्या नांवावरून या प्रमेयाला पायथॅगोरस म्हणून ओळखले जाते. ज्यानी या प्रमेयाचे तोंड भरून कौतुक केले आणि त्याचा अभ्यास केला आणि बौध्दायननंतर 200 वर्षे जगले. याला अनेकवेळा 'बौध्दायन-पायथॅगोरस प्रमेय' असे संक्रमणकालीन नांव देखील घेतले जाते ज्यामुळे सर्वांना समजेल की कोणत्या प्रमेयाचा उल्लेख केला जात आहे.

बौध्द्धायन प्रमेयाचा वापर (Using Baudhayana's Theorem)



तुमच्या वहीमध्ये एका काटकोन त्रिकोणाच्या लहान बाजूंची लांबी 3सें.मी. आणि 4सें.मी. घेऊन रचना करा. आता कर्णाची लांबी मोजा. ही सुमारे 5सें.मी. असल्याचे समजून येईल.

प्रत्यक्षात बौध्दायनाच्या प्रमेयाचा उपयोग करून कर्ण बाजू 5 सें.मी. असेल हे भाकीत करु शकलो असतो. दोन लहान बाजूंची लांबी a=3 आणि b=4 आहेत हे समजा तर बौध्दायन प्रमेयानुसार लांबी c ही कर्णासाठी समीकरणाचे समाधान करणे

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 = c^2$$

$$9 + 16 = c^2$$

$$25 = c^2$$

म्हणून $c = 5$ सें.मी.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. जर काटकोन त्रिकोणाच्या लहान बाजूंची लांबी 5सें.मी. आणि 12सें.मी. असेल तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती? प्रथमतः या मापाच्या काटकोन त्रिकोणाची रचना बाजूंच्या लांबी घेऊन करा आणि कर्ण बाजू मोजा. त्यानंतर बौध्दायन प्रमेय वापरुन तपासून पहा.
2. जर काटकोन त्रिकोणाची लहान बाजूची लांबी 8सें.मी. आणि कर्णाची लांबी 17सें.मी. असेल तर त्याच्या तिसऱ्या बाजूची लांबी किती? पुन्हा त्रिकोणाची रचना करून बाजू मोजा आणि नंतर बौध्दायन प्रमेयाने तुमचे उत्तर तपासा .
3. रचना करुन तुम्ही पाहिले आहे की, दिलेल्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या तिप्पट क्षेत्रफळ असणाऱ्या चौरसाची रचना कशी केली जाते? दिलेल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या पाच पट? (बौध्दायनाच्या सुलबा-सूत्र श्लोक 1.10)
4. जर a, b आणि c या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी आहे, त्यामध्ये c ही कर्ण बाजूची लांबी आहे. तर खालील प्रत्येक घटनेतील गाळलेल्या बाजूची लांबी शोधा.

   (a) $a = 5, b = 7$ (b) $a = 8, b = 12$ (c) $a = 9, c = 15$

   (d) $a = 7, b = 12$ (e) $a = 1.5, b = 3.5$

9.5 बाजूची लांबी पूर्णांक असलेले काटकोन त्रिकोण
(Right-Triangles Having Integer sidelengths)

बौध्दायन याच्या सुलबा सूत्र (श्लोक 1.13) मध्ये पूर्णांक संख्यांची यादी त्रिके (a,b,c) ही काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूच्या लांबीच्या रुपात असतात आणि म्हणून $a^2 + b^2 = c^2$ चे समाधान करतात. त्यामध्ये (3,4,5), (5, 12, 13) (8,15,17), (7,24,25), (12, 35, 37) आणि (15, 36, 39) यांचा समावेश आहे.

याच कारणामुळे, त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी बनविणाऱ्या अशा त्रिके (a,b,c) (सममूल्यपणे $a^2 + b^2 = c^2$ चे समाधान करतात) त्यांना बौध्दायनची त्रिके म्हणतात. त्याना **बौध्दायन – पायथॅगोरसची त्रिके,** पायथॅगोरसचीत्रिके आणि काटकोन त्रिकोणाची त्रिके असे सुध्दा म्हणतात.

? 20 पेक्षा लहान किंवा 20 शी समान असलेल्या सर्व बौध्दायन त्रिकेंची यादी करा.

गणिती बोल

? येथे बौद्धायन त्रिकेचा कांही अंतहीन क्रम आहे का?

गणिततज्ञानी या प्रश्नाचे उत्तर दिले आणि अशा सर्व त्रिकेंची निर्मिती करण्याची पध्दत शोधून काढली आहे. चला तर या दिशेने कांही पाऊले उचलूया. आपल्याला माहित आहे की (3,4,5) ही बौध्दायनची त्रिके आहेत.

? (30,40, 50) ही बौध्दायनाची त्रिके आहेत का?

(300, 400,500) ही बौध्दायनाची त्रिके आहेत का? 20 पेक्षा कमी किंवा समान असलेल्या सर्व बौद्धायन त्रिकेची यादी-

(3,4,5) (6,8,10) (9,12,15), (12, 16,20) ही आहे.

? यामध्ये तुम्हाला कांही नमुना दिसतो का?

(3,4,5) ला एका निश्चित धन पूर्णांकाने प्रत्येक पदाला गुणाकार केल्याने ही सर्व त्रिके मिळतात.

? या निरीक्षणावर आधारीत बौध्दायन त्रिकेचे अनुमान करु शकतो का? अनुमान: (3k, 4k, 5k) ही बौध्दायनाची त्रिके आहेत. जेथे k हा कोणताही धन पुर्णांक आहे.

? हे सत्य आहे का?

जर $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ हे आपण तपासले पाहिजे आपल्याकडे आहे $(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$ हे $(5k)^2$ शी समान आहे.

म्हणून (3k, 4k, 5k) हे खरोखर बौद्धायन त्रिके आहेत. हे दर्शविते की येथे अमर्यादित अनेक बौध्दायनची त्रिके आहेत. या अनुमानाचे आम्ही पुढे सामान्यीकरण करू शकतो का?

? जर (a,b,c) ही बौद्धायनाची त्रिके आहेत तर (ka, kb. kc) ही सुद्धा बौध्दायनाची त्रिके आहेत. जेथे '(k' हा धन पूर्णांक आहे. हे विधान सत्य आहे का?

सारख्याच पद्धतीने हे विधान सत्य असल्याचे दाखविले जाऊ शकते. ज्याअर्थी (a,b,c) ही बौध्दायनाची त्रिके आहेत. आपल्याकडे आहे $a^2 + b^2 = c^2$ आम्हाला $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$ हे तपासणे गरजेचे आहे.

$$(ka)^2 = ka \times ka = k^2 a^2 \text{ आणि } (kb)^2 = kb \times kb = k^2 b^2$$

$$\text{म्हणून } (ka)^2 + (kb)^2 = k^2 a^2 + k^2 b^2$$

समाईक अवयव घेतल्यास आम्हाला मिळेल

$$(ka)^2+(kb)^2 = k^2 (a^2 + b^2)$$

ज्याअर्थी $a^2 + b^2 = c^2$ आपल्याकडे आहे

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2 c^2 = (kc)^2$$

म्हणून जर (a,b,c) ही बौद्धायनाची त्रिके आहेत. तर (ka, kb, kc) ही बौध्दायनाची त्रिके आहेत. आम्ही (ka, kb, kc) ही (a,b,c) ची मोठी आवृती म्हणतो.

बौध्दायन त्रिके ज्यामध्ये 1 पेक्षा मोठा अवयव नाही त्याला मूळ बौध्दायन त्रिके म्हणतात. म्हणून (3,4,5) ही मूळ बौध्दायन त्रिके आहेत तर (9,12,15) हे नाही.

? (5,12,13) ही मूळ (प्राचीन) बौद्धायनाची त्रिके आहेत का? 20 पेक्षा लहान किंवा 20 ही समान संख्यासाठी इतर मूळ बौध्दायनाची त्रिके कोणती ?

? प्रत्येक मूळ बौध्दायनाच्या त्रिकेच्या 5 मोठ्या आकृत्या तयार करा. या मोठ्या आवृत्या मूळ आहेत का?

? जर (a,b,c) हे मूळ नाहीत आणि पूर्णांकामध्ये f हा 1 पेक्षा मोठा अवयव आहे तर $\left(\frac{a}{f}, \frac{b}{f}, \frac{c}{f}\right)$ ही बौध्दायनाची त्रिके आहेत का? हे विधान (9, 12, 15) साठी तपासून पहा आणि विधानाचे समर्थन करा.

जर आम्ही सर्व मूळ त्रिके शोधली, तर आपण सर्व बौध्दायनाची त्रिके शोधू शकतो.

? जादाची मूळ त्रिके आम्ही कशी तयार करु शकतो?

आपल्याला क्रमवार विषम संख्यांची बेरीज आणि वर्ग संख्या यामधील संबंध माहित आहे.

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

पहिल्या n विषम संख्यांची बेरीज n^2. चला तर आपण हे बैजिकरित्या व्यक्त करुया.

? याकरीता आम्हाला n विषम संख्येची माहिती असणे गरजेचे आहे. ते काय आहे. n वी विषम संख्या $2n-1$ आहे. म्हणून,

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-3)}_{\text{पहिल्या } (n-1) \text{ विषम संख्याची बेरीज.}}+(2n-1)=n^2$$

? पहिल्या $(n-1)$ विषम संख्याची बेरीज किती ?

$$(n-1)^2+(2n-1) = n^2$$

लक्षात घ्या $(n-1)^2$चा विस्तार करुन $2n-1$ मिळविले असता मिळणारे समीकरण प्रत्यक्षपणे घेऊन सुध्दा सोडवू शकतो.

जर n वी विषम संख्या $2n-1$ ही वर्ग संख्या आहे, तर दोन वर्ग संख्याची बेरीज ही तिसरी (आणखी एक) वर्ग संख्या असते. आपण ही कल्पना वापरून बौध्दायन त्रिके बनवू शकतो.

1) 9 हा विषम वर्ग आहे. ही 5 वी विषम संख्या $(9=2\times5-1)$

त्यामुळे आपल्याकडे आहेत $1+3+5+7+9=5^2$

$$4^3+3^2=5^2$$

? आपण ही त्रिके $(n-1)^2+(2n-1) = n^2$ वापरून मिळवू शकतो का? ज्याअर्थी आपण 5वी विषम संख्या घेतली आहे, त्याअर्थी nही 5 आहे. समीकरण n=5 घेऊन आम्हाला मिळेल

$$(5-1)^2+9=5^2$$

$$4^2+3^2=5^2$$

2) 25 हा विषम वर्ग आहे. ती 13 वी विषम संख्या $(25=2\times13-1)$ आहे. म्हणून

$1+3+5+\ldots+23+25=13^2$ $12^2+5^2=13^2$	आपल्याकडे आहे $n=13$ ही किंमत समीकरणामध्ये वापरुन आपल्याला मिळते $(13-1)^2+25=13^2$ $122+5^2=13^2$

? शोधा पाहू (Figure it Out)

1. या कल्पना वापरुन आणखी 5 बौध्दायनाची त्रिके शोधा.
2. ही पध्दत मूळरहीत (प्राचीनरहीत) बौध्दायनाची त्रिके देतात का? (सुचना: तयार केलेल्या त्रिकेचे निरीक्षण करा. एका लहान बाजूची लांबी ही कर्ण बाजूपेक्षा 1ने कमी असते.)
3. या पध्दतीने न मिळणारी मूळ त्रिके आहेत का? जर होय असेल तर उदाहरण द्या.

गणिती बोल

9.6. एक दीर्घकालीन खुली समस्या (Long standing open problem)

17 व्या शतकातील महान फ्रेंच गणितज्ञ फरमॉन यांना बौध्यायनाच्या त्रिकेने प्रेरित होऊन धन पूर्णांकाच्या घातांकाच्या बेरजेविषयी सर्वसाधारण विधान मांडले.

आपण पाहिले आहे की दोन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज लिहिण्यासाठी वर्ग संख्या अमर्यादित संख्येने आहेत. यामुळे फरमॅट चकित झाले की, एक पूर्ण घन हा दोन पूर्ण घनांच्या बेरजेमध्ये लिहीला जात असेल तर चौथा घातांक हा दोन चौथ्या घातांकाच्या बेरजेत लिहीला जातो आणि पुढे चालू. दुसऱ्या शब्दामध्ये, त्याना प्रश्न पडला की,

$x^n + y^n = z^n$ या समीकरणाचे उकल असेल का?

जेथे x, y, z या नैसर्गिक संख्या आणि $n > 2$

धन पूर्णांकाच्या नमुन्याच्या गुणधर्माशी संबंधित पुस्तकामध्ये (बौध्दायनाच्या त्रिकेसारख्या) फरमॅटनी लिहीले की, अंतहीन संख्यांच्या क्रमामध्ये दोन पूर्ण घनांची बेरीज असलेला पूर्ण घन, दोन पूर्ण चौथ्या घातांकाची बेरीज असलेला चौथा घातांक सापडत नाही. म्हणून समीकरणामध्ये 2 पेक्षा जास्त घातांक असेल तर उकल नाही हे सांगण्या व्यतीरिक्त त्यांनी लिहिले की ''मला या विधानाचा अदभूत पुरावा मिळाला आहे, परंतु हे सामावून घेणारी सीमा अत्यंत लहान आहे.''





या फरमॅट यांच्या विधानाच्या सिद्धतेचा पुरावा कोणालाही मिळाला नाही, जो आहे त्याला फरमॅटचा शेवटचा प्रमेय म्हणतात.

त्यांच्या मृत्यूनंतर अनेक महान गणितज्ञानी हा प्रमेय सिद्ध करण्याचा प्रयत्न केला. त्यानंतर सुमारे 300 हून अधिक काळापर्यंत तो सिद्ध करण्याचा अयशस्वी प्रयत्न करण्यात आला.

1963 मध्ये अँड्रयू वाइल्स नावाच्या 10 वर्षाच्या मुलाने फरमॅट यांच्या शेवटच्या प्रमेयाविषयी आणि इतिहासाबद्दल (इरिक बेल यांचे द लास्ट प्रॉब्लेम) हे पुस्तक वाचले. अनेक महान गणितज्ञांच्या अपयशाविषयी वाचून सुध्दा त्या तरुण मुलाने प्रमेय सिद्ध करण्याच्या समस्या सोडविण्याचा प्रयत्न केला. अखेर 1994 हा प्रमेय सिध्द करण्यात यश आले!

9.7 बौध्दायन-पायथॅगोरस प्रमेयाचे पुढील उपयोग

(Further -applications of the Baudhayana pythagoras Theorem)

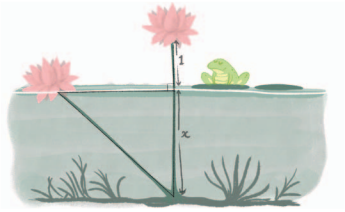
बौध्दायन-पायथॅगोरसचा प्रमेय हा एक भूमितीमधील मूलभूत प्रमेय आहे. आपण त्याचे कांही उपयोग पाहूया.

भास्कराचार्यांच्या लिलावतीमधील उदाहरण

(A problem from Bhaskaracharya's Lilavati)

भास्कराचार्यांच्या लिलावतीमधील एका उदाहरणाचे भाषांतर खालीलप्रमाणे आहे. ज्याचे तुम्ही वाचन करत त्याचे दृश्यमान करण्याचा प्रयत्न करा.

चक्र आणि क्रयूंनचा पक्ष्यानी वेढलेल्या तलावामध्ये पाण्यातून एक कमळ फूल वर डोकावत होते, ज्यांच्या देठाचे वरील टोक पाण्यावर 1 एकक होते. सावकाशपणे वाऱ्याने हलल्यानंतर त्याच्या सुरूवातीच्या स्थानापासून 3 एकक अंतरावर पाण्याला स्पर्श करते. तर पटकन त्या तलावाची खोली सांगा.



प्रथम दर्शनी असे आढळते की, उपाय शोधण्यासाठी माहिती पुरेशी नाही. परंतु त्याचे उकल शक्य आहे. समजा की, पाण्यातील देठाची लांबी x आहे. ही त्या तलावाची आवश्यक खोली आहे. ज्याअर्थी कमळाचे देठ पाण्यापासून 1 एकक वर आहे, त्याअर्थी देठाची एकूण उंची $(x+1)$ आहे.

आपण असे गृहीत धरु शकतो की पहिल्या स्थानावर कमळाचा देठ पाण्याच्या पृष्ठभागावर लंब रुपात आहे, यामुळे आपल्याला बाजू 3, x आणि $x+1$ असलेला काटकोन त्रिकोण मिळतो. ते बौध्दायन-पायथॅगोरस प्रमेयाला पूर्ण करते. म्हणून आपल्याकडे आहे.

$$3^2 + x^2 = (x + 1)^2$$

$$9 + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

दोन्ही बाजूमधून x^2 वजा केले असता आम्हाला मिळते.

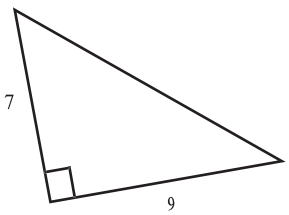
$$9=2x+1$$

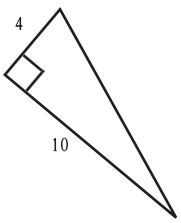
$$x = 4$$

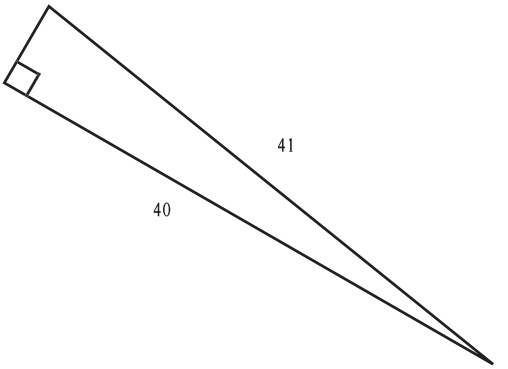
म्हणून त्या तलावाची खोली 4 एकक आहे.

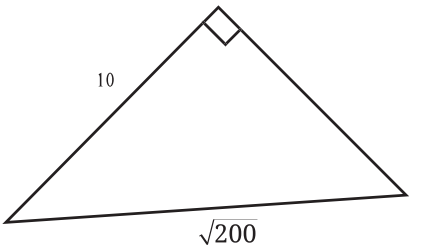
शोधा पाहू. (Figure it out)

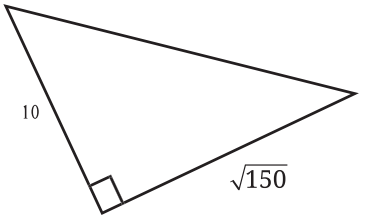
1. 5 सें.मी. बाजूची लांबी असणाऱ्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.
2. खालील काटकोन त्रिकोणामधील गाळलेल्या बाजूची लांबी काढा.

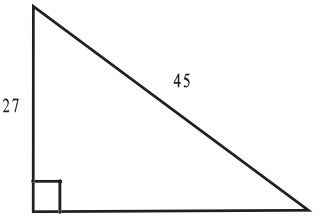










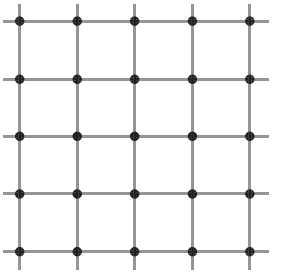


3. कर्णाची लांबी 24 एकके आणि 70 एकके असणाऱ्या समभूज चौकोनाच्या बाजूची लांबी शोधा.
4. कर्ण ही काटकोन त्रिकोणाची सर्वात लांब बाजू असते का? तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण करा.
5. चूक की बरोबर, प्रत्येक बौध्दायनाची त्रिके हे एकतर मूळ त्रिके किंवा मूळ त्रिकेच्या मोठ्या आवृत्या आहेत.
6. बाजूची लांबी आणि कर्ण सर्व पूर्णांक असलेल्या आयताची 5 उदाहरणे द्या.
7. चौरस असा रचा की ज्याचे क्षेत्रफळ हे 5 एकक बाजू आणि 7 एकक बाजू असलेल्या क्षेत्रफळामधील फरकाशी समान आहे.
8. (i) बिंदू चौकट हे शिरोबिंदू वापरुन

   (a) 2 चौ. एकके (b) 3 चौ. एकके

   (c) 4 चौ. एकके (d) 5 चौ. एकके

   इतके क्षेत्रफळ असणारे चौरस तयार करु शकता का?



गणिती बोल

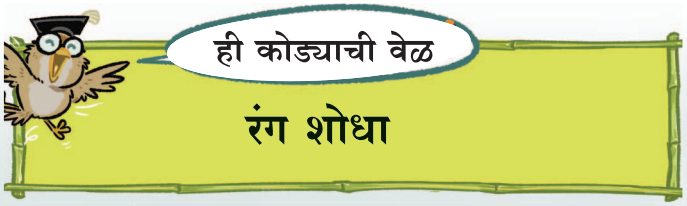
हे प्रयत्न करा

   (ii) जर ही चौकट अमर्यादितपणे वाढविली तर या पध्दतीने निर्माण केलेल्या पूर्णांक मूल्य चौरसांची शक्य असलेली क्षेत्रफळे किती?
9. 6 एकके बाजूंची लांबी असलेल्या समभूज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा. (सुचना: मध्यगा विरुद्ध बाजूला दुभागते हे दाखवा. उंची काढण्यासाठी याचा उपयोग करा.)

हे प्रयत्न करा

सारांश

- बौध्दायन-पायथॅगोरसचा प्रमेय हा भूमितीमधील एक अत्यंत महत्वाचा मूलभूत प्रमेय आहे. तो काटकोन त्रिकोणाच्या तीन बाजूमधील संबंध व्यक्त करतो.
- जर a, b, c या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी आहेत, जेथे 'c' ही कर्ण बाजूची लांबी आहे तर $a^2 + b^2 = c^2$
- समद्विभूज त्रिकोणामध्ये a, a, c, या बाजू असतील तर त्यामधील संबंध $a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2$ म्हणजेच $c = a\sqrt{2}$
- $\sqrt{2}$. हे 1.414 आणि 1.415 यांच्यामध्ये येते. तरि पण तो सांत दशांश म्हणून व्यक्त केला जात नाही. त्याला m/n या अपूर्णांकामध्ये सुद्धा व्यक्त केले जात नाही, जेथे m व n हे धन पूर्णांक आहेत.
- (a,b,c) या धन पूर्णांकाची त्रिके $a^2 + b^2 + c^2$ चे समाधान करते याला बौद्धायन - पायथॅगोरसचा प्रमेय म्हणतात. (3,4,5), (6,8,10) आणि (5,12,13) या उदाहरणांचा समावेश आहे. अमर्यादितपणे अशी अनेक त्रिके रचली जाऊ शकतात.
- समीकरण $a^n + b^n = c^n$ धन पूर्णांकामध्ये उकली नाहीत, जेव्हा $n > 2$ याला 'फरमॅटचा अंतिम प्रमेय' तो 1994 मध्ये अँड्रयू वाईल्स यानी सिध्द केले.



तेथे तीन बंद पेट्या आहेत. पहिल्यामध्ये फक्त लाल चेंडू, दुसऱ्यामध्ये फक्त निळे चेंडू आणि तिसऱ्यामध्ये फक्त हिरवे चेंडू आहेत. त्या पेट्याना लाल, निळा आणि हिरवा अशी नांवे दिलेली आहेत अशारितीने की कोणत्याही पेटीला बरोबर नांवे नाहीत. आम्हाला कोणती पेटी कोणत्या नावाची आहे हे शोधायचे आहे. जर आपल्याला एकच पेटी उघडता आली तर हे कसे केले जाऊ शकते.



10 प्रमाणातील तर्क - 2
(PROPORTIONAL REASONING–2)

N9K1J7

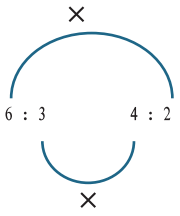
10.1 प्रमाणबध्दता - एक जलद पुनरावलोकन (Proportionality - A quick Recap)

मागील प्रकरणामध्ये, आपण प्रमाणातील रांशीचा शोध घेतला आणि असे संबंध दर्शविण्यासाठी गुणोत्तर चिन्हाचा वापर केला आहे.

जेव्हा दोन किंवा अधिक राशी सारख्याच घटकाने (अवयवाने) बदलतात तेव्हा आपण अशा संबंधाला प्रमाणातील संबंध असे म्हणतो. उदाहरणार्थ, इडलीचे पीठ हे तांदुळ आणि उडीद डाळ मिसळून बनविले जाते. या दोन्हींच्या प्रमाणात प्रादेशिक बदल असू शकतो. वापरलेले एक प्रमाण म्हणजे, 2 कप तांदुळासाठी आम्ही एक कप उडीद डाळ मिसळतो. आपण हा संबंध गुणोत्तर वापरुन 2:1 असा दर्शवितो.

? विश्वनाथने 6 कप तांदुळामध्ये 3 कप उडीद डाळ मिसळून इडल्या बनविल्या, तर पुनितने कप तांदुळामध्ये 2 कप उडीद डाळ मिसळून इडल्या बनविल्या. जर त्यानी सारख्याच पध्दतीने शिजविल्या तर इडलींची चव सारखीच असेल का?

विश्वनाथचे मिश्रण 6:3 आणि पुनितचे मिश्रण 4:2 ने दर्शविले. स्मरण करा की दोन्ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत ते पडताळून पहा. आपण असे करण्यासाठी तिरकस गुणाकार पध्दत वापरतो.



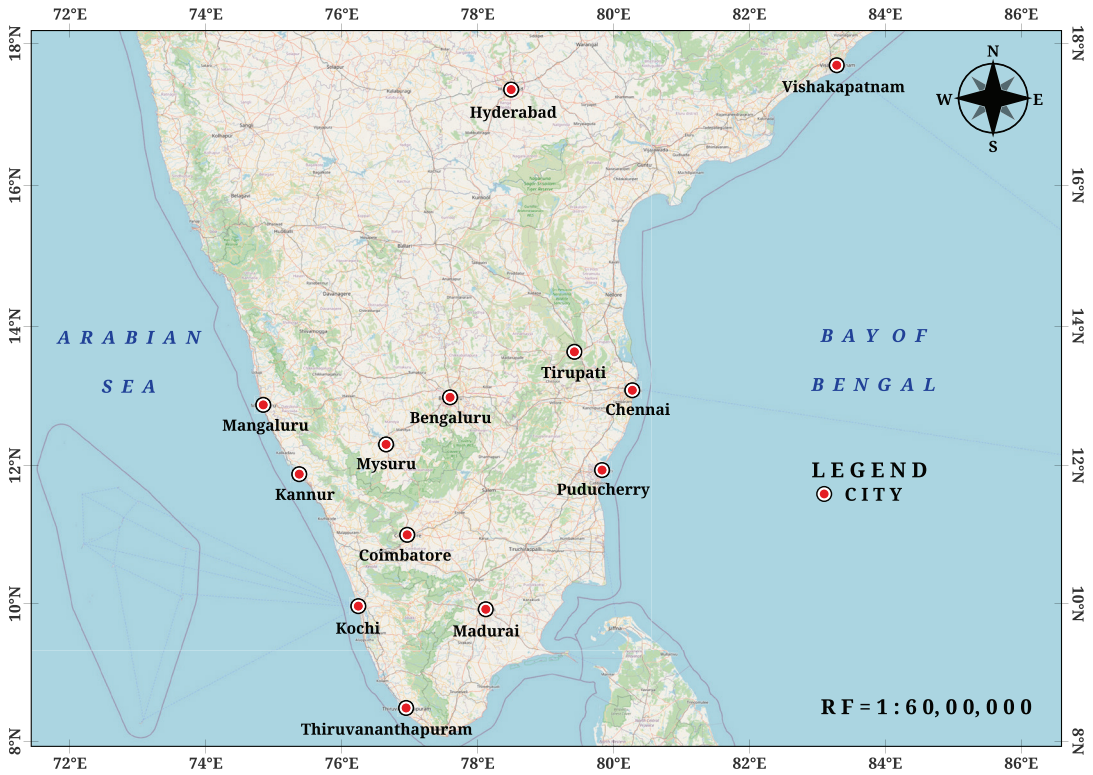
दोन्हीचा गुणाकार सारखाच (12) आहे. त्यामुळे दोन्ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत. जर सर्व घटक प्रमाणात असतील तर साहजीकपणे दोन्ही इडल्यांची चव सारखीच असेल!

सामान्यपणे, आपण म्हणतो की, जर दोन गुणोत्तरे $a : b$ आणि c : d ही प्रमाणात असतील तर

$$a \times d = b \times c, \text{ किंवा}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

10.2 नकाशामधील गुणोत्तरे (Ratios in Maps)



? तुम्ही निरीक्षण केले आहे की, बऱ्याच नकाशामध्ये सामान्यपणे नकाशाच्या खालील उजव्या कोपऱ्यात गुणोत्तरे दिलेली असतात. सामान्यपणे त्यामध्ये एक आणि एक मोठी संख्या असते, जसे की 1:60,00,000. RF1:60,00,000 चा अर्थ काय? ते काय दर्शविते? तुम्ही कल्पना करु शकता का?

RF (Representative Fraction) दर्शविणारा अपूर्णांक (RF) ही एक अशी राशी आहे जी नकाशातील अंतर आणि जमिनीवरील अंतर यामधील गुणोत्तर दर्शविते.

उदाहरणार्थ, जर नकाशातील गुणोत्तर 1:60,00,000 आहे, याचा अर्थ नकाशामधील 1cm अंतर हे भौगोलीक अंतर 60,00,000 शी सममूल्य आहे. लक्षात ठेवा की हे भौगोलीक अंतर आहे रस्त्यावरील अंतर नाही.

? 60,00,000 सें.मी. चे रुपांतर किलो मीटरमध्ये करा ते 60 कि.मी. आहे. तपासून पहा.

? वरील नकाशा वापरुन बेंगलुरु आणि चेन्नाई मधील भौगोलिक अंतर किती ते शोधा? मंगळुरु आणि चेन्नाई मधील सुध्दा भौगोलिक अंतर काढा.

(**सुचना :** शहरामधील अंतर नकाशामध्ये मोजण्यासाठी मोजपट्टी वापरा नंतर नकाशामध्ये दिलेले गुणोत्तर वापरुन अचूक भौगोलिक अंतर शोधा)

? वेगवेगळ्या नकाशांवर वेगवेगळे प्रमाण असलेल्या समान दोन जोड्यांच्या शहरामधील अंतर शोधण्याचा प्रयत्न करा. ते सर्व अंदाजे समान भौगोलिक अंतर देतात का?

शिक्षकांना सूचना: वर्गामध्ये नकाशे आणि ॲटलास आणा आणि विद्यार्थ्यांना गुणोत्तर म्हणून दिलेले प्रमाण (सामान्यपणे खालील उजव्या कोपऱ्यात) पाहण्यासाठी प्रोत्साहीत करा. ग्रंथालयामधील नकाशा आणि ॲटलास वापरुन विद्यार्थ्यांना नकाशामधील आपल्या आवडीच्या दोन ठिकाणामधील भौगोलिक अंतर शोधण्यास सांगा. ते एकमेकाला पडताळून तपासण्यास सांगा ते सारखेच आहे का आणि जर अंतर वेगवेगळे असेल तर त्याचे कारण शोधण्यास सांगा.

नकाशा बनविण्याची कृती: विद्यार्थ्यांना त्यांच्या वर्गाचे अचूक प्रमाण वापरुन (1:50 गुणोत्तर) रेखाचित्र तयार करण्यास मार्गदर्शन करा. त्यांना वर्गातील शिक्षकांचे टेबल, फळा, पंखे आणि दिवे यासारख्या विविध वस्तूंचे स्थान प्रमाणानुसार खुणा करण्यास सांगणे. विद्यार्थी पंखे, दिवे, टेबल खुर्च्या इत्यादी विविध वस्तू दर्शविण्यासाठी योग्य चिन्हे वापरुन खुणा करु शकतात.

10.3 दोन पेक्षा अधिक पदांचे गुणोत्तर (Ratios with More than 2 terms)

विश्वनाथ मसाला मिश्रणाच्या पावडरचा प्रयोग करत आहे. तो 4 चमचे धन्याचे धान्य, 4 लाल मिरच्या, 2 चमचे तूरडाळ, 1 चमचा मेथीच्या बीया वापरुन दळून पावडर बनवितो. या मसाल्याच्या पावडरीमध्ये धने, लाल मिरच्या, तूरडाळ आणि मेथीच्या प्रमाणाचे गुणोत्तर



$$8 : 4 : 2 : 1$$

तुम्ही पाहिले असेल की गुणोत्तरामध्ये 4 पदे आहेत.

जर प्रत्येक राशी एकाच घटकाने बदलत असतील प्रमाणातील संबंध राखण्यासाठी गुणोत्तरामध्ये अनेक पदे असू शकतात,

? पुनीतच्या स्वयंपाक घरात फक्त 2 लाल मिरच्या आहेत. परंतु त्याला विश्वनाथच्या मसाला मिश्रणाच्या पावडरीसारखीच चव असलेला मसाला बनवायचा आहे. तर पुनित मसाल्याच्या पावडरीचे मिश्रण बनविण्यासाठी इतर घटकांचा वापर कसा करेल?

पुनितच्या मसाल्याची मिश्रण पावडर विश्वनाथच्या मसाल्याच्या मिश्रण पावडरी सारखी होण्यासाठी सर्व घटकांचे प्रमाण विश्वनाथच्या मसाला मिश्रण पावडरी सारखेच असायला हवे. पुनितकडे फक्त

2 लाल मिरच्या आहेत. त्याच्याजवळील लाल मिरच्यांची संख्या विश्वनाथने वापरलेल्या मिश्रणातील संख्येच्या निम्मी आहे. म्हणून मिश्रणात वापरलेल्या इतर घटकांची संख्या सुद्धा अर्धी झाली पाहिजे.

म्हणून पुनितने 4 चमचे धने, 2 लाल मिरच्या, 1 चमचा तूरडाळ आणि ½ चमचा मेथी मिसळली पाहिजे. त्याचे गुणोत्तर

$$4 : 2 :: 1 : 0.5$$

दोन्ही गुणोत्तरे एकमेकाला प्रमाणात आहेत. ते आपण असे दर्शवितो.

$$8 : 4 : 2 : 1 :: 4 : 2 : 1 : 0.5.$$

सामान्यपणे अनेक पदासह दोन गुणोतरे प्रमाणात असतात.

$$a : b : c : d :: p : q : r : s$$

तेव्हा, $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{d}{s}$

उदाहरण 1 : विशेष जांभळ्या रंगाची छटा बनविण्यासाठी लाल, निळा, पांढरा हे रंग 2:3:5 या गुणोत्तरात मिसळले पाहिजेत. जर यास्मिनकडे 10 लिटरचा पांढरा रंग असेल तर जांभळा रंग मिळविण्यासाठी तिला किती लिटर लाल आणि निळा रंग मिसळावा लागेल?

2:3:5 या गुणोत्तरात पांढरा रंग 5 भागांशी जुळतो.

जर 5 भाग हे 10 लिटर चे आहेत. तर 1 भाग हा 10÷5 लिटर आहे.

लाल रंग = 2 भाग = $2 \times 2 = 4$ लिटर

निळा रंग = 3 भाग = $3 \times 2 = 6$ लिटर

म्हणून, जांभळ्या रंगामध्ये 4 लिटर लाल, 6 लिटर निळा आणि 10 लिटर पांढरा रंग आहे.

एकूण किती जांभळा रंग बनतो,

एकूण जांभळा रंग = 4+6+10=20 लिटर.

उदाहरण 2 : सिमेंट काँक्रिट हे सिमेंट, वाळू आणि खडी याचे बांधकामासाठी मोठ्या प्रमाणात वापरले जाणारे मिश्रण आहे. रचना किती मजबूत हवी आहे त्यानुसार गुणोत्तरातील घटकांचे मिश्रण अवलंबून असते. खांब, तुळ्या आणि छप्पर यासारख्या अधिक मजबूतीच्या आवश्यकतेसाठी गुणोत्तर 1 : 1.5 : 3, असते आणि बांधकाम स्टील (लोखंडी) सळ्यांनी मजबूत बनविले जाते. हे गुणोत्तर वापरुन जर आपल्याकडे 3 सिमेंटच्या पिशव्या असतील तर हे मिश्रण किती पिशव्यांचे बनविले जाते?

काँक्रिटच्या मिश्रणाचे गुणोत्तर

सिमेंटची पिशवी : वाळूची पिशवी : खडीची पिशवी :: 1:1.5:3 जर आपल्याकडे सिमेंटच्या 3 पिशव्या आहेत, आपल्याला इतर पदाना 3 ने गुणावे लागेल, त्यामुळे गुणोत्तर हे सिमेंट : वाळू : खडी :: 3 : 4.5 : 9 एकूण मिश्रण 3+4.5+9= 16.5 पिशव्यांचे काँक्रिट.

10.4 पूर्णला दिलेल्या गुणोत्तराने विभागणे (Dividing a Whole in Given Ratio)

मागील प्रकरणामध्ये, आपण पूर्णांकाला कसे विभागायचे हे अभ्यासलेले आहे. 12 हे 2:1 मध्ये विभागा. हे करत असताना, आम्ही (2+1=3) यांची बेरीज करतो आणि त्या पूर्णला बेरजेने भागतो (12÷3=4), आपण प्रत्येक पदाला या भागाकाराने गुणतो.

2×4=8 आणि 1×4=4 म्हणू 12 हे 2:1 गुणोत्तरात भागले तर 8:4 मिळते.

आपण गुणित (अनेक) पदासाठी हे गुणोत्तर वाढवू शकतो. काँक्रिटचे मिश्रण बनविण्याच्या मागील उदाहरणाकडे पहा. आपल्याला सिमेंट, वाळू आणि खडी यांचे 1:1.5:3 या गुणोत्तरात काँक्रिट मिळवावे लागेल.

उदाहरण 3 : एका बांधकामासाठी 100 एकक काँक्रिटची आवश्यकता आहे.

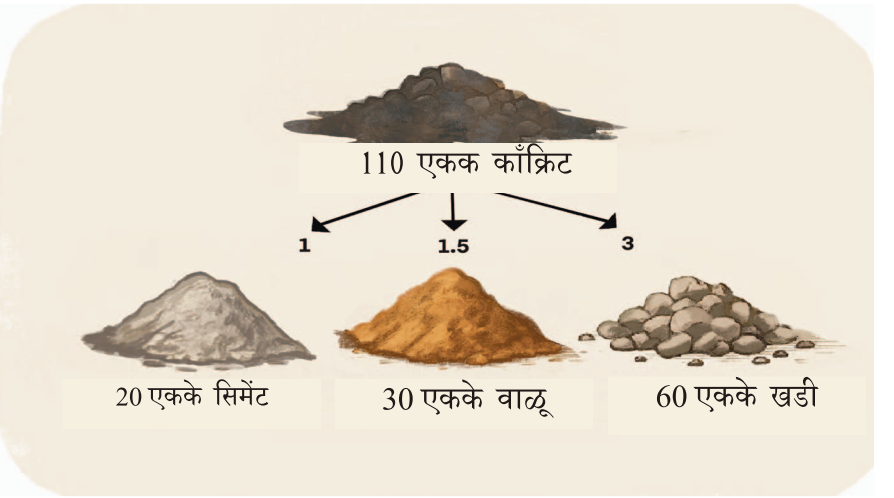
जर मिश्रणाचे गुणोत्तर 1:1.5:3 असेल तर सिमेंट, वाळू आणि खडी यांच्या किती एककांची गरज असेल ?

1 एकक सिमेंटसाठी आपल्याला 1.5 एकक वाळू आणि 3 एकक खडीची गरज आहे. एकत्रितपणे काँक्रिट 5.5 एकके आहे. आपल्याला 110 एकक काँक्रिट पाहिजेत त्यासाठी आपल्याला ते 20 पटीने (110 ÷ 5.5 = 20) घ्यावे लागेल, त्यामुळे प्रत्येक घटकाला 20 ने गुणणे 1×20 = 20 एकके सिमेंट

$1 \times 20 = 20$ एकके सिमेंट

$1.5 \times 20 = 30$ एकके वाळू

$3 \times 20 = 60$ एकके खड़ी



म्हणून आम्हाला 20 एकके सिमेंट, 30 एकके वाळू आणि 60 एकके खडी यांची काँक्रिट बनविण्यासाठी गरज आहे.

जेव्हा आपण राशीला a:b:c या गुणोत्तरात विभागतो तेव्हा त्या गुणोत्तरातील पदे

$x \times \frac{a}{(a+b+c+\cdots)}$, $x \times \frac{b}{(a+b+c+\cdots)}$, $x \times \frac{c}{(a+b+c+\cdots)}$ आणि पुढे चालू.

उदाहरण 4 : लाल, निळा आणि पांढरा हे रंग 2:3:5 या गुणोत्तरात मिसळल्याने विशिष्ट रंगछटा असलेला जांभळा रंग मिळतो. जर तुम्हाला 50 मि.ली. जांभळा रंग पाहिजे असेल तर त्यामध्ये किती मि.लि. लाल, निळा आणि पांढरा रंग एकत्रितपणे मिसळावा लागेल?

लाल रंग = $50 \times \frac{2}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{2}{10} = 10$ मि.लि.

निळा रंग = $50 \times \frac{3}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{3}{10} = 15$ मि.लि.

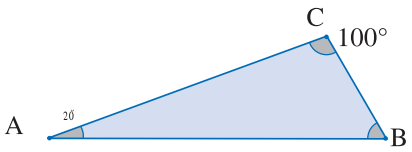
पांढरा रंग == $50 \times \frac{5}{(2+3+5)} = 50 \times \frac{5}{10} = 25$ मि.लि.

उदाहरण 5: त्रिकोणाचे कोन 1:3:5 या गुणोत्तरात आहेत तर त्रिकोण रचा. आम्हाला माहित आहे की त्रिकोणाच्या सर्व कोनांची बेरीज 180^0 असते. त्यामुळे त्याचे कोन हे,

$\angle A = 180° \times \frac{1}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{1}{9} = 20°$

$\angle B = 180° \times \frac{3}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{3}{9} = 60°$

$\angle C = 180° \times \frac{5}{(1+3+5)} = 180° \times \frac{5}{9} = 100°$



शोधा पाहू (Figure it out)

1. एका क्रिकेट प्रशिक्षकाने सराव सत्राचे वेळापत्रक केले ज्यामध्ये वेगवेगळ्या कृतींचा विशेष गुणोत्तरात समावेश आहे. ते म्हणजे व्यायाम/विश्रांती वेळ : फलंदाजीवेळ : गोलंदाजीची वेळ : क्षेत्र रक्षणाची वेळ::3:4:3:5 जर प्रत्येक सत्र 150 मिनिटाचे आहे. तर प्रत्येक कृतीसाठी घालविलेला वेळ किती?
2. एका शाळेतील ग्रंथालयामध्ये वेगवेगळ्या भाषेची पुस्तके खालील गुणोत्तरात आहेत, उडिया पुस्तकांची संख्या : हिंदी पुस्तकांची संख्या : इंग्लिश पुस्तकांची संख्या :: 4:3:5 जर ग्रंथालयामध्ये 288 उडिया पुस्तके आहेत तर हिंदी आणि इंग्लिश पुस्तकांची संख्या किती असेल?
3. माझ्या जवळ ₹ 10 च्या नाण्यांची संख्या : ₹ 5 च्या नाण्यांची संख्या: ₹ 2 च्या नाण्यांची संख्या : ₹1 च्या नाण्यांची संख्या :: 4:3:2:1 या गुणोत्तरात 100 नाणी आहेत. तर माझ्याजवळील नाण्यांची किती रक्कम आहे?
4. त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी 3:4:5 या गुणोत्तरात असणारा त्रिकोण रचा. बाजूंची लांबी या गुणोत्तरात घेवून रचलेले सर्व त्रिकोण एकमेकाला एकरुप असतात का? का किंवा का नाही?



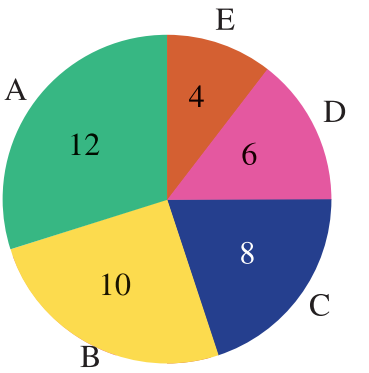
5. त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी 1:3:5 या गुणोत्तरात असेल तर त्या त्रिकोणाची रचना शक्य आहे का? का किंवा का नाही?

10.5 त्रिज्यांतर खंडालेखाचे विभाग (A Slice of Pie)

तुम्ही आकृतीमध्ये दर्शविलेल्या सारखा त्रिज्यांतर खंडालेख पाहिला आहे का? त्रिज्यांतर खंडालेख हा पूर्णचे वेगवेगळे भाग दर्शवितो. हा आलेख विद्यार्थ्यांच्या मौल्यमापनचे वेगवेगळ्या श्रेणीमधील मिळविलेल्या गुणांचे प्रमाण दर्शवितो. या प्रकारच्या दृश्यामुळे आपल्याला जलदपणे अर्थ लावण्यास मदत होते.

चला हा त्रिज्यांतर खंडालेख रचण्याचा प्रयत्न करुया. येथे विद्यार्थ्यानी मिळविलेल्या गुणांच्या श्रेणीचे कोष्टक आहे.

40 विद्यार्थ्यांचे श्रेणीचे वितरण



श्रेणी	A	B	C	D	E
विद्यार्थी	12	10	8	6	4

? त्रिज्यांतर खंडालेखाच्या विविध भागांना तुम्ही खुणा कशा कराल?

त्रिज्यांतर खंडालेखाच्या विभागाना खुणा करण्यासाठी श्रेणी संबंधित कोन हा श्रेणी मिळविलेल्या विद्यार्थ्यांच्या संख्येच्या प्रमाणात असला पाहिजेत. वर्तुळाचा एकूण कोन 360^0 असतो. त्यामुळे आपल्याला 360^0 ला 12:10:8:6:4 या गुणोत्तरात विभागावे लागेल.

? हे गुणोत्तर आपण संक्षिप्त रुपात लिहू शकतो का?

दोन पदांच्या गुणोत्तराला कमी करून त्याला संक्षिप्त रुपात आणण्यासाठी आपण जी पद्धत वापरली होती तीच पध्दत वापरु शकतो. सर्वात सोपे रूप मिळविण्यासाठी सर्व पदाना त्यांच्या म.सा.वि.ने भागले जाते.

या उदाहरणामध्ये 2 हा म.सा.वि आहे सर्व पदांना 2ने भाग दिला तर आपल्याला सुलभरूप मिळते. त्यामुळे येणारे गुणोत्तर 6:5:4:3:2 आहे त्यामुळे येणारे कोन आहेत.

श्रेणी $A = \frac{6}{(6+5+4+3+2)} \times 360° = \frac{6}{20} \times 360° = 6 \times 18 = 108°$

श्रेणी $B = \frac{5}{(6+5+4+3+2)} \times 360° = 5 \times 18 = 90°$

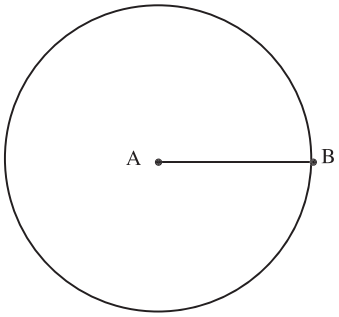
श्रेणी $C = 4 \times 18 = 72°$

श्रेणी $D = 3 \times 18 = 54°$

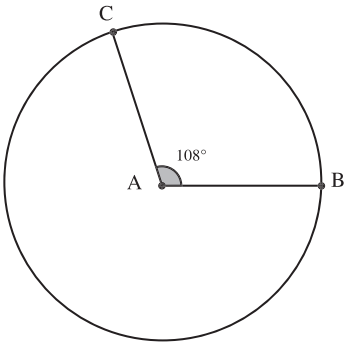
श्रेणी $E = 2 \times 18 = 36°$

आता हे कोन वापरून त्रिज्यांतर खंडालेखाची रचना करूया चला.

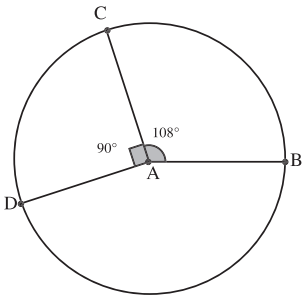
पायरी-1 : खालीलप्रमाणे दर्शविल्यानुसार एक वर्तुळ रचा आणि त्यामध्ये त्रिज्या AB ची खुण करा.



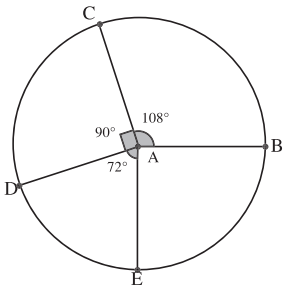
पायरी-2: A श्रेणी मिळविलेल्या विद्यार्थ्यांचे प्रमाण दर्शविण्यासाठी 108^0 चा कोन AB रेखाखंडावर A बिंदूतून (घड्याळाच्या विरुध्द) एक भाग करा आणि नवीन त्रिज्या ACची खुण करा.



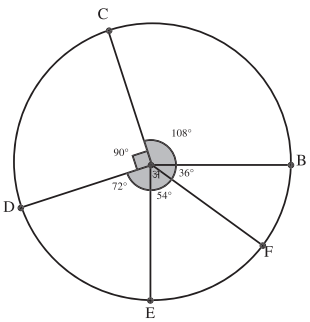
पायरी-3 : AC पासून 90^0 मोजा आणि AD काढा.



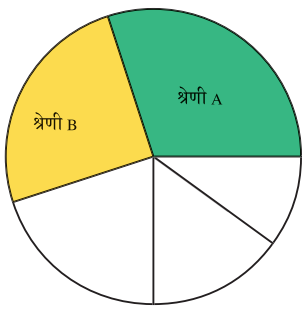
पायरी-4 : AD पासून 72^0 मोजा आणि AE काढा.



पायरी-5 : याचप्रमाणे राहिलेला त्रिज्यांतर खंडालेख रचून पूर्ण करा.



पायरी-6 : तुम्ही प्रत्येक विभागाला वेगवेगळा रंग देवून त्रिज्यांतर खंडाच्या विभागांना नांवे द्या.



शोधा पाहू. (Figure it out)

1. एका 360 लोकांच्या गटाला आपल्या आवडीचे तीन ऋतु-पावसाळा, हिंवाळा आणि उन्हाळा यामधून एकाला मतदान करण्यास सांगितले. 90 जणांना उन्हाळा आवडतो, 120 जणांना पावसाळा आवडतो आणि राहिलेल्याना हिंवाळा आवडतो तर ही माहिती दर्शविणारा त्रिज्यांतर खंडालेख काढा.

2. आपल्या आवडीचा TV चॅनल पाहणाऱ्या प्रेक्षकांची माहिती खाली दिलेली आहे. त्याचा त्रिज्यांतर खंडालेख रचा. मनोरंजन 50%, खेळ-25%, बातम्या-15%, माहिती-10%.

3. तुमच्या वर्गातील आवडीच्या विषयाचा तक्ता दर्शविणारा त्रिज्यांतर खंडालेख तयार करा. कोष्टकामध्ये दर्शविलेल्या प्रत्येक विषयामधील विद्यार्थ्यांच्या संख्येची माहिती तुम्ही एकत्रित करा. (प्रत्येक विद्यार्थ्याने फक्त एकच विषयाची निवड करावी) या संख्या कोष्टकामध्ये लिहा आणि त्रिज्यांतर खेडालेख रचा.

विषय	भाषा	कला शिक्षण	व्यवसायिक शिक्षण	समाज विज्ञान	शारिरीक विज्ञान	गणित	विज्ञान
विद्यार्थ्यांची संख्या							

10.6 व्यस्त प्रमाण (Inverse proportions)

तुम्ही तीन नियमांचे स्मरण केले का? जेव्हा दोन गुणोत्तर प्रमाणात असतात, म्हणजेच, जेव्हा a :b :: c : d तेव्हा $d=\frac{bc}{a}$

आम्ही अशा प्रमाणाला सम (d) प्रमाण म्हणतो. आम्ही या आकलनाचा वापर करुन जर तीन राशी (a, b आणि c) दिलेल्या असतील तर चौथी राशी (d) चे मूल्य शोधू शकतो.

उदाहरण 1: एका दिवसामध्ये 5 कामगार 4500 विटा हालवू शकतात. तर एका दिवसामध्ये 18000 विटा हलविण्यासाठी किती कामगारांची आवश्यकता आहे? हे आपण प्रमाणबद्धतेच्या विधानामध्ये दर्शवू शकतो.

$$4500 : 18000 :: 5 : x$$

आपण x ची किंमत काढण्यासाठी $x = \frac{18000 \times 5}{4500} = 20$

म्हणून आवश्यक असलेल्या कामगारांची संख्या 20 आहे.

उदाहरण 2 : पुनीतचे वडिल मोटर सायकल 30 कि.मी./तास वेगाने चालवून 3 तासात लखनौ पासून कानपूरला जातात. जर त्यांनी मोटर सायकली ऐवजी कारगाडी घेवून 60 कि.मी./तास वेगाने चालविली तर त्यांना कानपूरला जाण्यास किती वेळ लागेल?

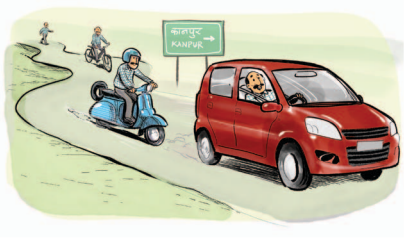
गणिती बोल

(?) तुम्ही हे उदाहरण प्रमाणबध्दतेच्या विधानाने खालील प्रमाणे दर्शवू शकाल का? — $30 : 60 :: 3 : x$ मोटरसायकलचा वेग वाढला असता प्रवासाचा वेळ वाढेल किंवा कमी होईल?

वाहतूकीच्या वेगवेगळ्या पद्धती वापरुन लखनौ ते कानपूर हे अंतर प्रवास करण्यासाठी घेतलेली वेळ दर्शविणारे कोष्टक खालीलप्रमाणे आहे.

	चालत	सायकल	मोटरसायकल	कारगाडी
वेग किमी/ता.	5	15	30	60
वेळ (तासांमध्ये)	18	6	3	1.5

या कोष्टकावरून हे स्पष्ट होते की जेव्हा **वेग वाढतो** तेव्हा सारखेच अंतर आक्रमिण्यासाठी लागणारा **वेळ कमी** होतो.



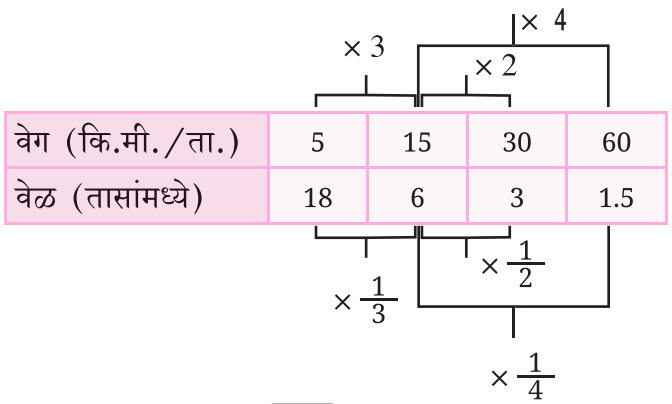
(?) सारख्याच दराने (किंवा अवयवाने) ते कमी होते का?

सायकलवरून जाणे हे चालत जाण्यापेक्षा 3 तासांने जलद आहे (15÷5) त्यामुळे वेग 3 पटीने वाढतो. त्यामुळे प्रवासाला लागणारा वेळ सुध्दा 3 तासांनी कमी होतो. (18÷6) ज्या दराने प्रवासाची वेळ कमी होते त्याच दराने वेग वाढतो.

(?) इतर वाहतूकीच्या पध्दतीने असेच घडते का ते तपासून पहा. ज्याअर्थी वेग आणि वेळ या दोन्ही राशी, एका समान अवयवाने बदलतात म्हणजेच ते प्रमाणात आहेत. जर ते विरुद्ध दिशेने किंवा व्यस्तरीत्या बदलत असेल तर अशा प्रमाणाला **व्यस्त प्रमाण** असे म्हणतात.

वरील कोष्टकात आपण पाहू शकतो की सर्व वाहतूकीच्या साधनासाठी वेग आणि वेळ यांचा गुणाकार सारखाच आहे तो 90 कि.मी. आहे.

x आणि y या दोन राशी व्यस्त प्रमाणात बदलत असतील तर तेथे $xy=k$ हा संबंध आढळतो. तेव्हा K हा स्थिरांक असून लखनौ आणि कानपूर यामधील अंतर आहे.



म्हणून x आणि y या राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत. आणि x_1 आणि x_2 ही 'x' ची मूल्ये असून y_1 आणि y_2 ही y यी संगत मूल्ये आहेत.

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = k \text{ (एक स्थिरांक)}$$

यावरून आपण पाहू शकतो की $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

आपण हे इतर वाहतुकीच्या साधनासाठी जसे की चालण्यासाठी / कारसाठी सत्य आहे का ते तपासू चला. वेग x ने आणि वेळ y ने दर्शविलेला आहे असे मानू.

$$x_1 = 5, x_2 = 60, y_1 = 18, y_2 = 1.5$$

ची किंमत किती आहे. ती $\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{60} = 0.08333$

$\frac{1.5}{18}$ $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ हीच आहे.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालीलपैकी कोणती व्यस्त प्रमाणे आहेत?

(i)

x	40	80	25	16
y	20	10	32	50

(ii)

x	40	80	25	16
y	20	10	12.5	8

(iii)

x	30	90	150	10
y	15	5	3	45

2. जर x आणि y हे व्यस्त प्रमाणात आहेत तर रिकाम्या जागा भरा.

x	16	12		36
y	9		48	

उदाहरण 3: 20 कामगार 4 दिवसात एक रस्ता पूर्ण करतात. जर त्याच लांबीचा रस्ता करण्यासाठी 10 कामगार लावले तर ते किती दिवसात पूर्ण करतील?

जर आपण कामगारांची संख्या कमी केली तर ते काम पूर्ण करण्यासाठी लागणाऱ्या दिवसांची संख्या त्याच अवयवाने (घटकाने) वाढते. म्हणून, या राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

म्हणून , $20 \times 4 = 10 \times y_2$

$$y_2 = \frac{20 \times 4}{10} = 8$$

म्हणून ते काम 10 कामगारांना पूर्ण करण्यासाठी 8 दिवस लागतात.

आम्हाला असे दिसून येते की, जेव्हा कामगारांची संख्या निम्मी होते, तेव्हा ते काम पूर्ण करण्यासाठी लागणाऱ्या दिवसांची संख्या दुप्पट होते. जर एखादी राशी ही n अवयवाने बदलते तर दुसरी राशी त्याचा व्यस्त $\frac{1}{n}$ ने बदलत असतील तर त्या राशी व्यस्त प्रमाणात असतात.

उदाहरण 4: दोन विद्युत पंपानी एक टाकी 18 तासात भरते. जर त्याच प्रकारचे आणखी दोन पंप वाढविले तर ती टाकी भरण्यासाठी किती वेळ लागेल?

जर आपण दोन पंप वाढविले तर आपल्याकडे 4 पंप आहेत. 4 पंपानी टाकी भरण्यासाठी लागणारा वेळ 'x' मानू जर पंपाची संख्या 'n' ने वाढविली तर टाकी भरण्यासाठी लागणारा वेळ 'n' या सारख्याच अवयवाने कमी होतो. त्यामूळे या राशी (ही प्रमाणे) व्यस्त प्रमाणात आहेत. ज्याअर्थी राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत त्यामुळे गुणाकार स्थिर असतो.

$$2 \times 18 = 4 \times x$$

$$x = \frac{2 \times 18}{4} = 9$$

ती टाकी भरण्यासाठी 9 तास लागतात.

उदाहरण 5: एका शाळेमध्ये 80 विद्यार्थ्यांना 15 दिवसापर्यंत पुरेल इतक्या आहाराची तरतूद आहे. जर शाळेतील विद्यार्थ्यांची संख्या 20 ने वाढविली तर त्या आहाराची तरतूद किती दिवसापर्यंत होईल?

विद्यार्थ्यांची संख्या वाढली, आहाराच्या तूरतूदीची संख्या कांही प्रमाणात कमी होते. राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत. जर 'x' ही दिवसांची संख्या आहे.

$$80 \times 15 = 100 \times x$$

$$x = \frac{80 \times 15}{100} = 12$$

म्हणून आहाराची तरतूद 12 दिवसापर्यंत राहिल.

उदाहरण 6: राम दिलेल्या भाज्या कापण्यासाठी 1 तास घेतो आणि श्यामला त्याच प्रमाणातील भाज्या कापण्यासाठी 1.5 तास जर त्या दोघांनी एकत्रितपणे भाज्या कापल्या तर त्यांना किती वेळ लागेल?

दिलेल्या प्रमाणातील भाज्या कापण्यासाठी केलेले काम 1 एकक म्हणून समजा. तर प्रत्येक व्यक्तीने 1 तासामध्ये केलेले कार्य शोधूया चला.

- राम 1 तासात काम पूर्ण करतो म्हणून 1 तासामध्ये तो 1 एकक कार्य करतो.
- श्याम 1.5 तासात ते काम पूर्ण करतो म्हणून तो एका तासामध्ये $\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3}$ एकक काम करतो.

म्हणून त्या दोघांनी 1 तासामध्ये एकत्रितपणे केलेले कार्य $=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ एकक काम.

म्हणून, $\frac{5}{3}$ एकक काम पूर्ण करणासाठी त्या दोघांनी एकत्रितपणे जर 1 तास घेतला तर कामाचा 1 एकक पूर्ण करण्यासाठी किती वेळ लागेल?

गणिती बोल

कामाची राशी आणि काम पूर्ण करण्यासाठी घेतलेली वेळ ही सम प्रमाणात की व्यस्त प्रमाणात असेल का?

ही सम प्रमाणात आहे, त्यामुळे ती,

$\frac{5}{3}:1::1:x$ असे दर्शवितात येथे x ही घेतलेली वेळ आहे.

ज्या अर्थी ते सम प्रमाणात आहेत, आपल्याला माहित आहे की,

$$\frac{5}{3}\times x=1\times 1$$

$$x=\frac{1\times 1}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

जर त्या दोघांनी एकत्रितपणे काम केले तर ते काम $\frac{3}{5}$ तासात पूर्ण केले असते.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालीलपैकी कोणत्या राशींच्या जोड्या व्यस्त प्रमाणात आहेत?
   (i) पाण्याची टाकी भरण्यासाठी नळांची संख्या आणि ती भरण्यासाठी लागणारा वेळ.
   (ii) निश्चित आकाराची भिंत रंगविण्यासाठी लागणाऱ्या पेंटरची संख्या आणि रंगविण्यासाठी लागणारे दिवस.

(iii) कारगाडीने आक्रमिलेले अंतर आणि टाकीमधील पेट्रोलचे प्रमाण.

(iv) सायकलस्वाराचा वेग आणि निश्चित मार्ग पूर्ण करण्यासाठी लागणारा वेळ.

(v) खरेदी केलेल्या कपड्याची लांबी आणि ठराविक दराने दर मीटरला दिलेली रक्कम.

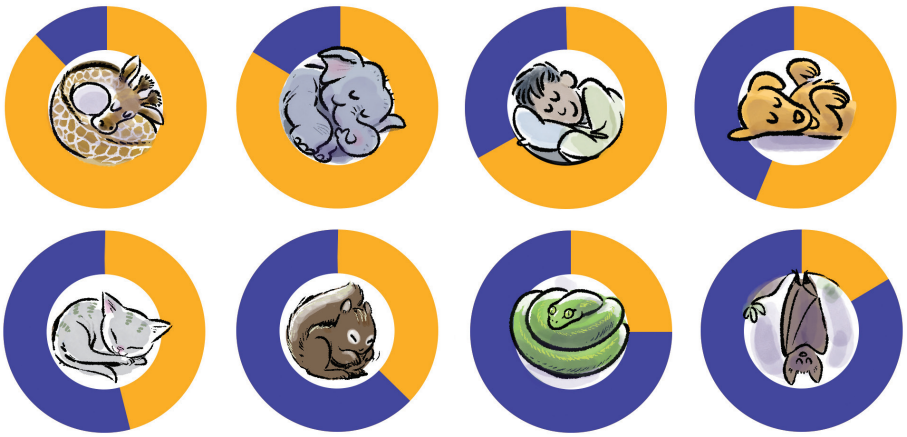
(vi) पुस्तकांमधील पानांची संख्या आणि एका निश्चित वेगाने वाचण्यासाठी लागणारा वेळ.

2. जर 24 पेन्सिलची किंमत ₹120 असेल तर अशा 20 पेन्सिलची किंमत किती?

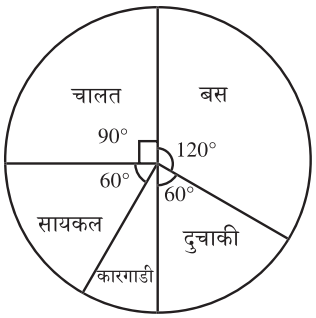
3. एका इमारतीवर असलेल्या पाण्याच्या टाकीमध्ये तेथे राहणाऱ्या 20 कुटुंबांना 6 दिवसापर्यंत पाणी साठा पुरतो. जर तेथे आणखी 10 कुटुंबे राहण्यासाठी आली तर पाणी किती काळापर्यंत पुरेल? हे उदाहरण सोडविण्यासाठी तुम्हाला कोणते गृहीतक करावे लागेल?

गणिती बोल

4. तक्ता पाहून प्रत्येक सजीव दिवसभरामध्ये झोपतो ते सरासरी तास भरा. 15, 2.5, 20, 8, 3.5, 13, 10.5, 18 या यादीमधील योग्य तासांची निवड करा.



5. उजव्या बाजूला दर्शविलेल्या त्रिज्यांतर खंडालेखामध्ये मुले शाळेला जाण्यासाठी वापरत असलेल्या वाहतुकीच्या साधनांचा शोध घेण्यासाठी केलेल्या सर्वेक्षणाचा निकाल दर्शवितो. तर या त्रिज्यांतर खंडालेखाचा अभ्यास करा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(i) वाहतुकीसाठी सामान्यपणे वापरलेली पद्धत कोणती ?

(ii) कारगाडीने प्रवास करणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या किती?

(iii) जर 18 विद्यार्थी कारगाडीने प्रवास करतात. तर किती विद्यार्थ्यांनी सर्वेक्षणामध्ये भाग घेतला होता? किती विद्यार्थ्यांनी शाळेला जाणासाठी टॅक्सीचा वापर केला?

(iv) वाहतुकीच्या कोणत्या दोन प्रकारेद्वारे विद्यार्थी समान संख्येने प्रवास करतात?

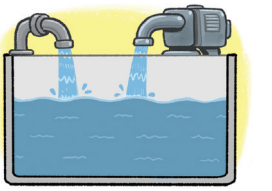
6. एका कंपनीची भिंत रंगविण्यासाठी 3 कामगारांना 4 दिवस लागतात. जर त्याच्यांमध्ये आणखी एक जास्त कामगार जाऊन मिळाला तर ते काम पूर्ण करण्यास त्यांना किती वेळ लागेल? तुम्हाला कोणते गृहीत धरून सोडविण्यांची गरज आहे.

7. एका समान आकाराच्या दोन टाक्या एका पंपाने भरण्यासाठी 6 तास लागतात. तर त्याच पंपाने अशा 5 टाक्या भरण्यासाठी किती वेळ लागेल?

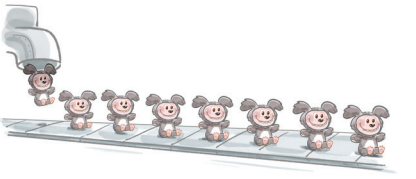
8. एका ओळीमध्ये 12 खुर्च्या घेवून अशा 25 ओळीमध्ये खुर्च्यांच्या सटाची मांडणी करण्यात आली. जर खुच्यांची पुनर्मांडणी करून प्रत्येक ओळीत 20 खुर्च्या ठेवल्या तर नविन मांडणीच्या किती ओळी होतील?

9. एका शाळेमध्ये 45 मिनिटे कालावधीच्या एका दिवसामध्ये 8 तासिका आहेत. जर दिवसाचे शाळेचे तास समान असतील तर त्या शाळेमध्ये 9 तासिका गृहीत धरल्या असल्यास प्रत्येक तासिका किती मोठी असेल ?

10. एक लहान पंप एक टाकी 3 तासात भरतो आणि मोठा पंप तिच टाकी 2 तासात भरतो. जर ते दोन्ही पंप एकत्रित वापरले तर ती टाकी किती वेळात भरेल?



11. एका कारखान्यामध्ये 63 दिवसामध्ये दिलेल्या संख्येची खेळणी बनविण्यासाठी 42 यंत्राची गरज आहे. तर 54 दिवसामध्ये तितक्याच संख्येने खेळणी बनविण्यासाठी किती यंत्राची आवश्यकता आहे.



12. एक कारगाडी 60 कि.मी./तास वेगाने आपल्या मुक्कामाला पोहोचण्यासाठी 2 तास घेते. जर त्या कारगाडीचा वेग 80 किमी/तास केला तर तिला मुक्कामाच्या ठिकाणी जाण्यास किती वेळ लागेल.

सारांश

- a : b : c : d : ... या स्वरुपातील गुणोत्तर दर्शविते की, पहिल्या राशीच्या प्रत्येकी *'a'* एककासाठी तेथे दुसरी राशी *'b'* एककासाठी, तिसऱ्या राशीसाठी *'c'* एककासाठी आणि पुढे चालू अशा स्वरुपात असतात.
- जर x मला $p : q : r : s :$ ..., अशा अनेक भागातील गुणोत्तरात विभागले तर पहिल्या भागाची राशी $x \times \frac{p}{(p+q+r+s+\cdots)}$, आणि दुसऱ्या भागाची राशी $x \times \frac{q}{(p+q+r+s+\cdots)}$, आणि पुढे चालू.
- दोन राशी एकाच घटकात बदलतात. तेव्हा त्या सम प्रमाणात असतात आणि त्यांचा भागाकार समान राहतो. जर x आणि y या दोन राशी सम प्रमाणात असतील आणि $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ आणि $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ या x आणि y ची संगत मूल्ये असतील तर $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = k$, येथे k हा स्थिरांक आहे.
- जेव्हा एक राशी n या घटकाने आणि दुसरी राशी त्याचा व्यस्त $\frac{1}{n}$ ने बदलत असेल, तर ते व्यस्त प्रमाणात असतात. उदाहरणार्थ, जर x आणि y या दोन व्यस्त प्रमाणातील राशी आणि $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ आणि $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ या x आणि y च्या संगत किंमती (मूल्ये) असतील तर $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \ldots = n$, जेथे *'n'* हा स्थिरांक आहे.

11 कांही भौमितिक संकल्पनाचा शोध
(EXPLORING SOME GEOMETRIC THEMES)

या प्रकरणामध्ये आपण दोन भौमितिक विषयांचा अभ्यास करणार आहोत आपण फॅक्टल्स (Fractals) (भग्न) बद्दल जाणून घेऊ जे 'स्व-समान' आकाराचे असतात. यामध्ये एकच नमुना पुन्हा पुन्हा दिसतो परंतु तो लहान लहान होत जातो. त्यानंतर आपण घन आकृत्यांच्या सादरीकरणाच्या विविध पध्दती पाहणार आहोत.

11.1 भग्न (Fractals)



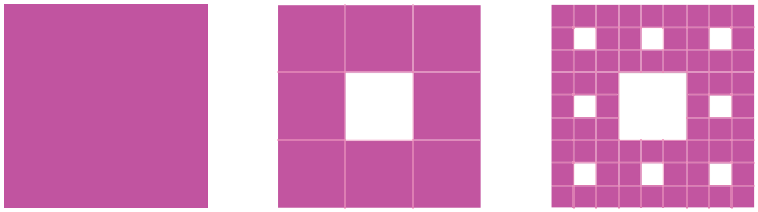
निसर्गात आढळणाऱ्या भग्नाच्या सर्वोत्तम उदाहरणांपैकी एक म्हणजे नेचे (Fern) नावाचे झाड. नेचेच्या पानामध्ये त्यांचीच लहान प्रतिकृती असल्यासारखी पाने असतात आणि त्या उप-पानांमध्ये त्याहूनही लहान पाने असतात.

अशाच प्रकारचे 'स्व-समानतेचे' दर्शन झाडांमध्ये (जेथे खोडाला फांद्या असतात आणि फांद्यांना उप-फांद्या असतात), ढगांमध्ये, समुद्र किनाऱ्यामध्ये, डोंगरांमध्ये, वीज आणि निसर्गातील इतर अनेक वस्तूंमध्ये घडते.

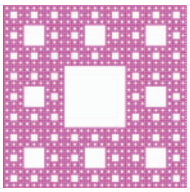
इतर गणितीय भग्न देखील खूप सुंदर असू शकतात. आपण येथे त्यापैकी कांहीचा अभ्यास करूया.

सिएरपिन्स्की गालिचा (Sierpinaki Carpet)

पोलिश गणितज्ञ सिएरपिन्स्की यांनी **'सिएरपिन्स्की गालिचा'** नांवाच्या एका भग्नाचा शोध लावला. हा आकार तयार करण्यासाठी एक चौरस घेतला जातो, त्याचे 9 समान लहान चौरसांत विभाजन केले जाते आणि मधला चौरस काढून टाकला जातो. (खालील आकृती पहा) उरलेल्या 8 चौरसांवर हीच प्रक्रिया वारंवार केली जाते. यामुळे तोच नमुना अधिकाधिक लहान आकारात पाहायला मिळतो.



पायरी 0 पायरी 1 पायरी 2 . . .



सिएरपिन्स्की गालिचा

? सिएरपिन्स्की गालिचा तयार होणाऱ्या आकाराच्या क्रमातील सुरूवातीच्या कांही पायऱ्या (किमान पायरी 2 पर्यंत) काढा.

त्याच्या रचनेनुसार, क्रमातील प्रत्येक पायरीमध्ये :

i) आकृतीत रचलेले चौरस एकाच आकाराचे असतात आणि पायरीचा क्रमांक जसा वाढतो, तसा या चौरसांचा आकार लहान-लहान होत जातो, आणि

ii) चौरसाकृती भाग काढून टाकल्यामुळे चौरसाकृती छिद्रे तयार होतात.

? प्रत्येक पायरीवर शिल्लक राहणाऱ्या चौरसांच्या आणि छिद्रांच्या संख्येत तुम्हाला कांही नमुना दिसतो का?

समजा R_n ही n व्या पायरीवर शिल्लक राहिलेल्या चौरसांची संख्या दर्शविते आणि H_n ही n व्या पायरीवरील छिद्रांची संख्या दर्शविते.

मागील पायरीवरून छिद्रे आणि शिल्लक राहिलेले चौरस कसे तयार होतात, याचे विश्लेषण करून या संख्या कशा वाढतात ते समजून घेऊया.

दिलेल्या पायरीवर (समजा पायरी n) शिल्लक राहिलेला प्रत्येक चौरस, पुढील पायरीवर (n+1 वी पायरी) 8 चौरसांना निर्माण करतो. म्हणून, आपल्याकडे आहे.

$$R_{n+1} = 8R_n$$

? याचा वापर R_n साठी सूत्र मिळविण्यासाठी केला जाऊ शकतो का? आपल्याकडे आहे.

$$R_0 = 1$$
$$R_1 = 8 \times 1 = 8$$
$$R_2 = 8 \times 8 = 8^2$$

सामान्यत: $R_n = 8^n$

(?) त्याचप्रमाणे, दिलेल्या पायरीवरील छिद्रांची संख्या आपण कशी शोधू शकतो ?

n व्या पायरीवर शिल्लक राहिलेला प्रत्येक चौरस (n+1) या पायरीत एक छिद्र निर्माण करतो. n व्या पायरीवर असलेली सर्व छिद्रे (n+1) व्या पायरीवर देखील तशीच राहतात. म्हणून,

$$H_{n+1} = H_n + R_n.$$

त्यामुळे आपल्याकडे आहे,

$R_0 = 1$ $\quad$ $H^0 = 0$

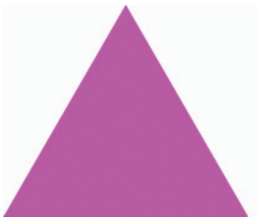
$R_1 = 8$ $\quad$ $H_1 = 1$

$R_2 = 8^2$ $\quad$ $H_2 = 1 + 8$

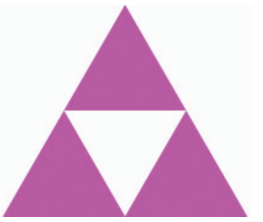
$R_3 = 8^3$ $\quad$ $H_3 = 1 + 8 + 82$

सिएरपिन्स्कीची त्रिकोणरूपातील चाळण : (sierpinski Gasket)

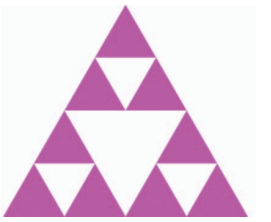
सिएरपिन्स्की अशाच पध्दतीने तयार केलेला आणखी एक 'भग्न'(Fractal) शोधून काढला. एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू जोडून त्याचे 4 एकसमान समभुज त्रिकोणांमध्ये विभाजन केले जाते आणि त्यानंतर मधला त्रिकोण काढून टाकला जातो. ही प्रक्रिया उरलेल्या 3 त्रिकोणांवर पुन्हा पुन्हा केली जाते.



पायरी 0

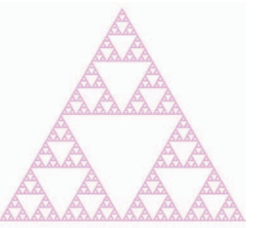


पायरी 1



पायरी 2

. . .



सिएरपिन्स्कीचा त्रिकोण

(?) एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदू जोडल्यास त्याचे 4 एक समान समभुज त्रिकोणांमध्ये विभाजन होते, हे दाखवा.

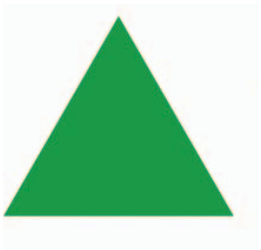
(**सूचना** : लक्षात घ्या की, कोपऱ्यातील त्रिकोण समद्वीभुज आहेत.) या भग्नला सिएरपिन्स्कीची त्रिकोणी चाळण म्हणतात.

शोधा पाहू. (Figure it out) :

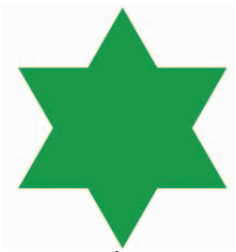
1. सिएरपिन्स्कीचा त्रिकोण तयार होणाऱ्या आकृत्यांच्या क्रमाच्या सुरूवातीच्या कांही पायऱ्या (किमान पायरी 2 पर्यंत) काढा.
2. सिएरपिन्स्कीचा त्रिकोण तयार होणाऱ्या क्रमाच्या प्रत्येक पायरीवर किती 'छिद्र' तयार होतात आणि किती त्रिकोण शिल्लक राहतात ते शोधा.
3. सिएरपिन्स्कीचे भग्न तयार होणाऱ्या प्रत्येक क्रमामध्ये n व्या पायरीवर रचलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा. सुरूवातीच्या चौरस /त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक (1sq. unit) मानू.

कोच स्नोफ्लेक (Koch Snowflake)

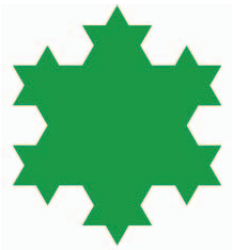
कोच स्नोफ्लेक हे आणखी एक भग्न आहे, ज्याला स्वीडिश गणितज्ञ 'वॉन कोच' यांचे नाव देण्यात आले आहे. ज्यांनी 1904 मध्ये प्रथम याचे वर्णन केले होते. आपण इयत्ता 6वीच्या 'गणित प्रकाश' मध्ये या भग्नांचा अभ्यास केला आहे.



पायरी 0

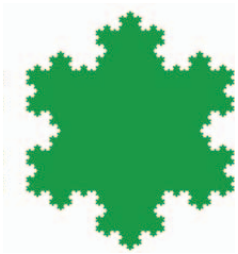


पायरी 1



पायरी 2

. . .



कोच स्नोफ्लेक

हे तयार करण्यासाठी, आपण समभुज त्रिकोणापासून सुरूवात करू. त्याच्या प्रत्येक बाजू

i) 3 समान भागांमध्ये विभागले जातात आणि

ii) मधल्या भागावर एक समभुज त्रिकोण उभा केला जातो आणि नंतर मधला भाग काढून टाकला जातो.

थोडक्यात, प्रत्येक बाजूची जागा एक उंचवठा (bump) सारख्या ⌒ आकाराने घेतली जाते. हीच प्रक्रिया नवीन तयार झालेल्या आकाराच्या सर्व बाजूंवर पुन्हा पुन्हा केली जाते.

शोधा पाहू. (Figure it out) :

1. कोच स्नोफ्लेक तयार करणाऱ्या आकृती क्रमाच्या सुरूवातीच्या कांही पायऱ्या (किमान पायरी 2 पर्यंत) काढा.
2. कोच स्नोफ्लेक तयार करणाऱ्या या आकृती क्रमाच्या n व्या पायरीवर असणाऱ्या बाजूंची संख्या शोधा.
3. या क्रमाच्या nव्या पायरीवर असलेल्या आकृतीची परिमिती शोधा. सुरूवातीच्या समभुज त्रिकोणाची बाजू 1 एकक आहे असे समजा.

कलेतील भग्नता (Fractals in Art)

मानवनिर्मित कलेमध्ये भग्नचा वापर फार पूर्वीपासून केला जात आहे! कदाचित अशा फॅक्टल्सची (भग्नची) उदाहरणे सर्वात जुनी भारतातील मंदिरांमध्ये पाहायला मिळतात. याचे एक उदाहरण मध्यप्रदेशातील खजुराहो येथील कंदरिया महादेव मंदिरात दिसते, ज्याचे बांधकाम सुमारे 1025 इ.स. मध्ये पूर्ण झाले होते; तिथे एका उंच मंदिराची रचना दिसते, जी मूळ रचनेच्याच लहान प्रतिकृतींपासून बनलेली आहे, ज्यावर त्याहीपेक्षा लहान अशा समान संरचनेच्या प्रतिकृती आहेत आणि हे असेच पुढे चालू राहते. फ्रॅक्टल्ससारखे नमुने मदुराई, हंपी, रामेश्वरम, वाराणसी आणि इतर अनेक मंदिरामध्ये देखील आढळतात.



कंदरिया महादेव मंदिर

पारंपारीक आफ्रिकन संस्कृतीमध्ये देखील फ्रॅक्टल्स (भग्न) सामान्य आहेत. उदाहरणार्थ, नायजेरियन फुलानी लग्नातील उपरण्यावरील नमुन्यांमध्ये अनेकदा फॅक्टल (भग्न) रचना दिसून येतात.



नायजेरियन फुलानी लग्नातील उपरणे

आकृतीमध्ये दाखविलेल्या उपरण्यामध्ये हिऱ्याच्या आकाराचे नमुने आहेत, ज्यामध्ये पुन्हा लहान हिऱ्याच्या आकाराचे नमुने आहेत.

फ्रॅक्टल (भग्न) कलांचे आधुनिक उस्ताद कलाकार निःसंशयपणे डच कलाकार एम. सी. एशर हे आहेत. आपण यापूर्वीच पाहिले आहे की, त्यांच्या कांही कलाकृतींमधून 'फरशीकाम' (Tiling) या गणितीय संकल्पनेचा शोध घेतला आहे. फ्रॅक्टल्सचा समावेश असलेले त्यांचे एक प्रसिध्द उदाहरण म्हणजे 'लहान आणि अधिक लहान' ही कलाकृती, ज्यामध्ये सरड्यांचे एकसमान नमुने लहान आणि अधिक लहान स्वरूपात दिसतात. येथे एशरच्या 'लहान आणि अधिक लहान' पासून प्रेरित झालेली एक कलाकृती दिली आहे.



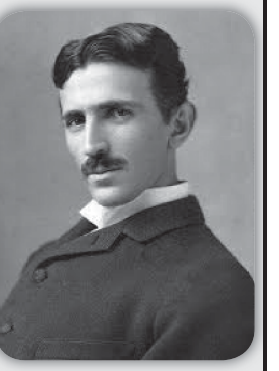
11.2 घनाकृतींचे दृश्यीकरण (Visualising Solids)

तुमच्या कल्पनेत याची निर्मिती करा (Build it in your Imagination)

? आम्ही या भागाची सुरूवात दृश्यीकरणाच्या सरावाने करू. प्रत्येक सुचनेसाठी आपल्या जोडीदाराशी बोलण्यास हावभाव करण्यास किंवा हवेत चित्र काढा, पण प्रत्यक्षात कागदावर चित्र काढू नका!

माझी पध्दत वेगळी आहे. मी प्रत्यक्ष कामात घाई करत नाही. जेव्हा मला एखादी कल्पना सुचते, तेव्हा मी लगेच माझ्या कल्पनेत ती तयार करण्यास सुरूवात करतो. मी त्या रचनेत बदल करतो, सुधारणा करतो आणि ते उपकरण पूर्णपणे माझ्या मनात चालवून पाहतो.

निकोला टेस्ला (1856-1943), एक महान सर्बियन-अमेरिकन अभियंता आणि संशोधक, ज्यांनी इलेक्ट्रिकल इंजिनीअरिंग आणि इतर क्षेत्रांत मूलभूत योगदान दिले.



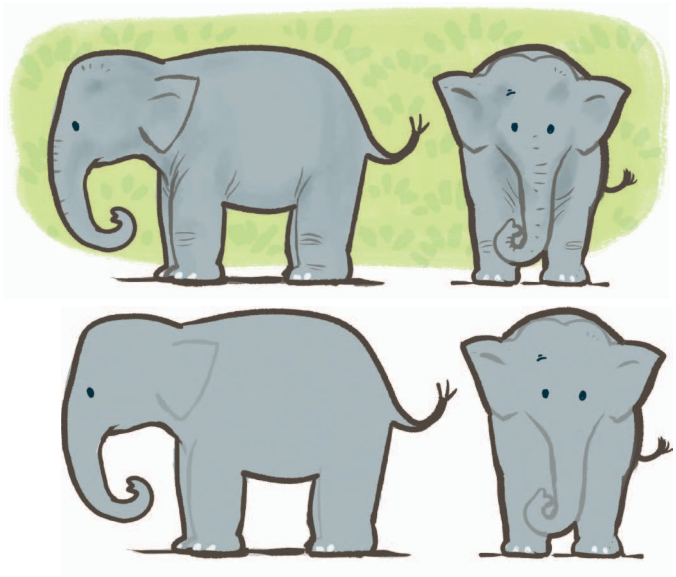
1. तुमच्या नांवाचे चित्र डोळ्यांसमोर आणा आणि त्यानंतर त्यातील अक्षरे उलट क्रमाने वाचा. हे आवाजाच्या मदतीने न करता प्रत्यक्ष पाहून करा. तुमचे नांव खरोखर डोळयांसमोर पहा ! आता तुमच्या मित्राच्या नावावर हा प्रयोग करून पहा.

2. एका काल्पनिक चौरसाचे चार कोपरे अशा प्रकारे कापून काढा की, प्रत्येक काप हा लगतच्या कडांच्या मध्यबिंदूना जोडणारा असेल. उरलेला आकार कोणता असेल? तुम्ही ते कापलेले चार कोपरे पुन्हा जोडून दुसरा चौरस कसा बनवू शकाल?

3. एका समभुज त्रिकोणाच्या बाजूंचे तीन समान भाग करा. त्रिकोणाचे प्रत्येक टोक (कोपरा) त्या खुणांपर्यंत कापून काढा. तुम्हाला कोणता आकार मिळेल ?

4. एका चौरसाच्या बाजूंचे तीन समान भाग करा आणि त्याचे प्रत्येक टोक त्या खुणांपर्यंत कापून काढा. कोणता आकार शिल्लक राहतो?

जेव्हा आपण एखादी घन वस्तू पाहतो, तेव्हा आपण खरोखरच एका विशिष्ट दृष्टिकोनातून तिचे पार्श्वचित्र (Profile) पाहत असतो. आपल्या दृष्टिकोनावर अवलंबून या पार्श्वचित्राची बाह्यरेषा नाटकीयपणे बदलू शकते!



कदाचित तुम्ही स्वत: एखाद्या वस्तूचे छायाचित्रण काढताना किंवा एखाद्या वस्तूची सावली पाहताना असे मनोरंजक पार्श्वचित्र पाहिले असतील? किंवा कदाचित तुम्ही खालीलप्रमाणे एखादे व्यंगचित्र पाहिले असेल. ज्यामध्ये एखादे पात्र भिंतीतून बाहेर पडते आणि मागे त्यांच्या बाह्य रेषेसारखे छिद्र सोडते!



मागील इयत्तांमध्ये तुम्ही हत्ती किंवा मांजरापेक्षा खूप सोपे घन आकार पाहिले आहेत, जसे की घन, गोल, वृत्तचिती आणि शंकू. वेगवेगळ्या दृष्टिकोनातून यांचे पार्श्वचित्र कसे दिसतील?

? तुम्ही एखादा घन आकार आणि असा दृष्टिकोन सांगू शकता का ज्याचा परिणाम खालीलपैकी प्रत्येक स्थितीत होईल? तुम्हाला मदत हवी असल्यास, मांजराने केल्याप्रमाणे तो घन आकार एका भिंतीतून आरपार जात आहे आणि त्या भिंतीला योग्य आकाराचे छिद्र पडले आहे, अशी कल्पना तुम्ही करू शकता.

5. असा घन आकार ज्याची बाह्यरेषा चौरस आहे.

6. असा घन आकार ज्याची बाह्यरेषा वर्तुळाकार आहे.

7. असा घन आकार ज्याची बाह्यरेषा त्रिकोणी आहे.

? आपण हत्तीचे उदाहरण पाहिल्याप्रमाणे, एकाच घन आकाराचे निरीक्षण वेगवेगळ्या दृष्टिकोनातून पाहिले असता, खूप वेगळे आकार दिसू शकतात. तुम्ही खालीलप्रमाणे परस्परविरोधी आकार दिसणाऱ्या घन आकारांची कल्पना करू शकता का?

यावर थोडा वेळ विचार करा, जर तुम्हाला कल्पना करणे कठीण जात असेल, तर तुम्ही तुमच्या आजूबाजूच्या वस्तू पाहू शकता किंवा पुढील भागात तुम्ही स्वतः आकार बनवू शकता. कोणत्याही दिशेने (वस्तूच्या अगदी करून देखील) पाहण्याचा विचार करण्यास हरकत नाही.

8. एका बाजूने पाहिल्यास आयताकृती आणि दुसऱ्या बाजूने पाहिल्यास वर्तुळाकार दिसणारा घन आकार.

9. एका बाजूने पाहिल्यास वर्तुळकार आणि दुसऱ्या बाजूने पाहिल्यास त्रिकोणी आकार दिसणारा घन.

10. एका बाजूने पाहिल्यास आयताकृती आणि दुसऱ्या बाजूने पाहिल्यास त्रिकोणी आकार दिसणारा घन.

11. एका बाजूने पाहिल्यास समलंब चौकोनी आणि दुसऱ्या बाजूने पाहिल्यास वर्तुळकार दिसणारा घन आकार.

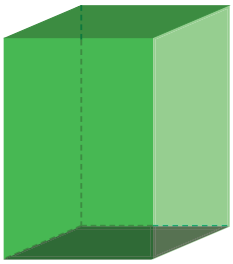
12. एका बाजूने पाहिल्यास पंचकोनी आणि दुसऱ्या बाजूने पाहिल्यास आयताकृती दिसणारा घन आकार

? प्रत्येक परिस्थितीसाठी फक्त एकच अद्वितीय घन आकार असू शकतो का, की तुम्ही अनेक शक्यतांचा विचार करू शकता?

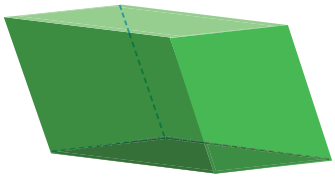
घन आकार बनविणे (Making Solids)

घनायत, समांतरभुज वृतचिती, दंडगोल, शंकू, त्रिकोणी लोलक आणि पिरॅमिड यासारखे अनेक मूलभूत घन आकार कागद, पुठ्ठा आणि धातूच्या पत्र्यांसारख्या घडी घालता येणाऱ्या सपाट साहित्यापासून बनविता.

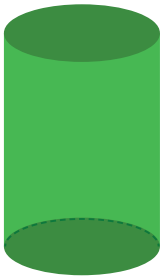
येतात ! पोकळ घन आकार तयार करण्याची ही एक पध्दत आहे.



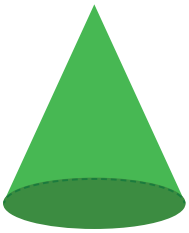
घन



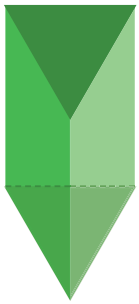
समांतरभुज इष्टिकाचिती



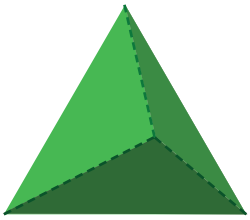
दंडगोल
(वृत्तचित्ती)



शंकू

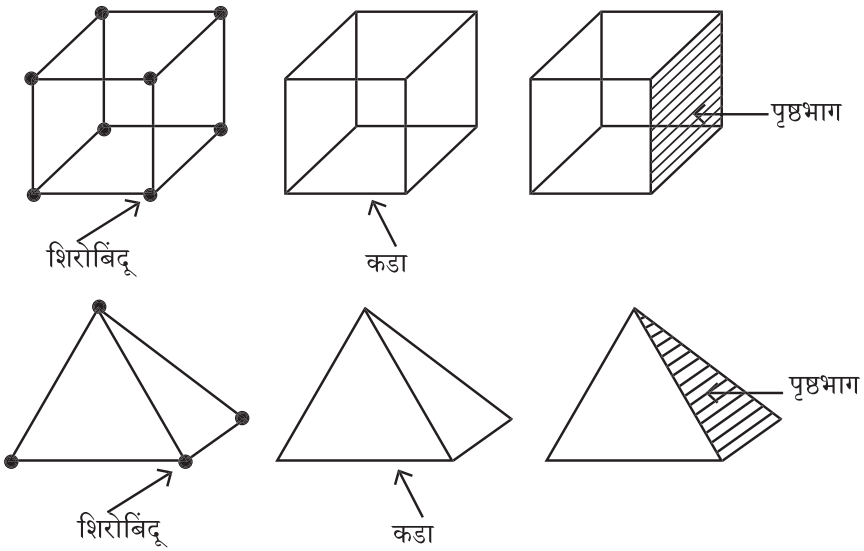


त्रिकोणी लोलक



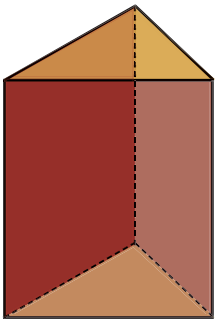
त्रिकोणी पिरॅमिड

ज्या घन वस्तूंच्या सीमांमध्ये एक प्रतलीय (सपाट) पृष्ठभाग असतात, त्याच्याबद्दल चर्चा करताना पृष्ठे, कडा आणि शिरोबिंदू या संकल्पना उपयुक्त ठरतात.

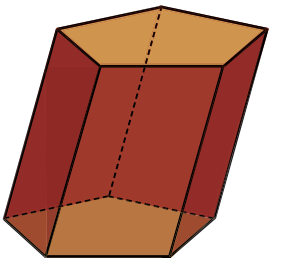


पृष्ठभाग म्हणजे घन वस्तूच्या सीमेवर असलेला सपाट भाग. **कडा** म्हणजे पृष्ठांच्या बाजूंना जोडणारे रेषाखंड आणि **शिरोबिंदू** म्हणजे ज्या बिंदूवर कडा एकमेकांना मिळतात.

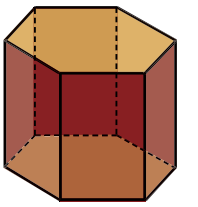
उदाहरणार्थ: एका घनाला 6 पृष्ठभाग, 12 कडा आणि 8 शिरोबिंदू असतात. लोलक आणि पिरॅमिड्सचे अनेक प्रकार आहेत, ज्यांची नांवे त्यांच्या पृष्ठांच्या आकारावर अवलंबून असतात.



त्रिकोणी
लोलक



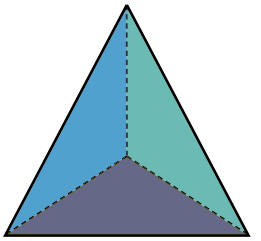
पंचकोनी
लोलक



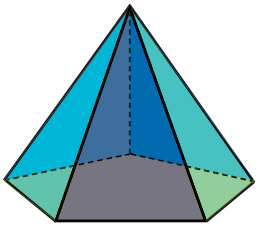
षटकोनी
लोलक

लोलक (Prism) : सामान्यपणे लोलकामध्ये दोन एकरूप बहुभुजाकृतीला समोरासमोरील पृष्ठे असतात, ज्यांच्या शिरोबिंदूंना जोडणाऱ्या कडा समांतर असतात. इतर सर्व पृष्ठे समांतरभुज चौकोन असतात. एकरूप बहुभुजाकृतींच्या आकारावरून लोलकाला त्रिकोणी लोलक, पंचकोनी लोलक असे म्हटले जाते.

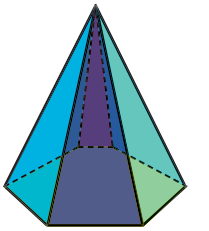
पिरॅमिड (Pyramid): सामान्यपणे पिरॅमिडला बहुभुजाकृती पाया असतो आणि बाहेरील बाजूला एक बिंदू असतो. पायाच्या प्रत्येक शिरोबिंदूला त्या बिंदूशी जोडणाऱ्या कडा असतात. पायाच्या आकारावरून पिरॅमिडला त्रिकोणी पिरॅमिड, चौकोनी पिरॅमिड, पंचकोनी पिरॅमिड इ. म्हटले जाते. त्रिकोणी पिरॅमिडला चतुःसमपृष्ठक (Tetrahedron) असे म्हणतात.



त्रिकोणी
पिरॅमिड



पंचकोनी
पिरॅमिड



षटकोनी
पिरॅमिड

? जर लोलकाच्या एकरूप बहुभुजाकृतींना 10 बाजू असतील, तर त्या लोलकाला किती पृष्ठभाग, कडा आणि शिरोबिंदू असतील? तर त्या बहुभुजाकृतींना बाजू असतील?

? जर पिरॅमिडच्या पायाला 10 बाजू असतील, तर त्या पिरॅमिडला किती पृष्ठभाग, कडा आणि शिरोबिंदू असतील? जर पाया n बाजूंनी बनलेली बहुभुजाकृती असेल तर पृष्ठभाग, कडा आणि शिरोबिंदू किती असतील?

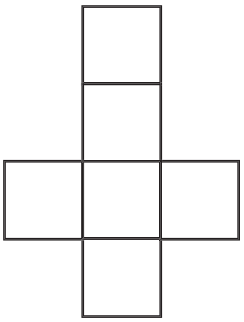
आता आपण कागद, पुठ्ठा इत्यादी दुमडता येणाऱ्या पृष्ठभागाचा वापर करून वेगवेगळे घन आकार कसे बनवायचे ते पाहू.

मूळ कल्पना अशी आहे की, सपाट पृष्ठभागावर असा आकार तयार करणे जो दुमडून ठोस आकार बनविता येईल, अशा आकाराला जालाकृती असे म्हणतात. दुसऱ्या शब्दांत एखाद्या ठोस आकाराला उलगडून जो सपाट आकार मिळतो त्याला जालाकृती म्हणतात.

? घनाची जालाकृती म्हणजे काय?

आकृती 11.1 मध्ये एका घनाचे जालाकृती आहे.

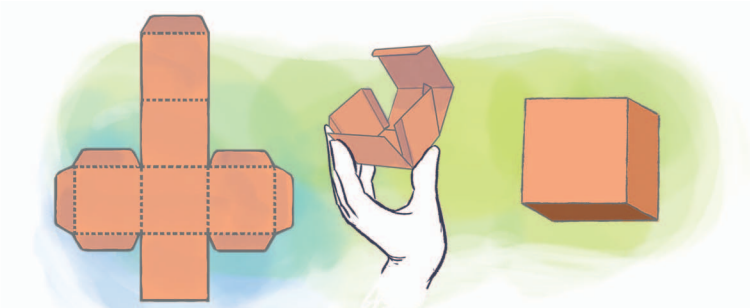
? तो कसे घडी करून घन बनविता येईल याची कल्पना करा.



आकृती 11.1

जालाकृती वापरण्याचे व्यवहारिक पैलू (Practical Aspects of Using a Net)

जालाकृतीपासून प्रत्यक्ष घन तयार करण्यासाठी कांही व्यवहारिक गोष्टी लक्षात ठेवाव्या लागतात. एक म्हणजे घन उभा राहण्यासाठी वापरलेले साहित्य पुरेसे मजबूत असावे. दुसरी गोष्ट म्हणजे पृष्ठे एकमेकांना जोडण्यासाठी कांहीतरी सोय असावी. जर पुठ्ठा किंवा तत्सम साहित्य वापरलेले असेल तर कडा जोडण्यासाठी सेलो (चिकटपट्टी) टेप हा एक मार्ग आहे. कमी मजबूत साहित्यासाठी जसे की चार्ट पेपर, शेजारच्या पृष्ठांना चिकटवण्यासाठी कांही जादा 'घड्या' असणे उपयुक्त ठरते. तुम्ही पॅकेजिंग बॉक्समध्ये ही पध्दत पाहिली असेल.



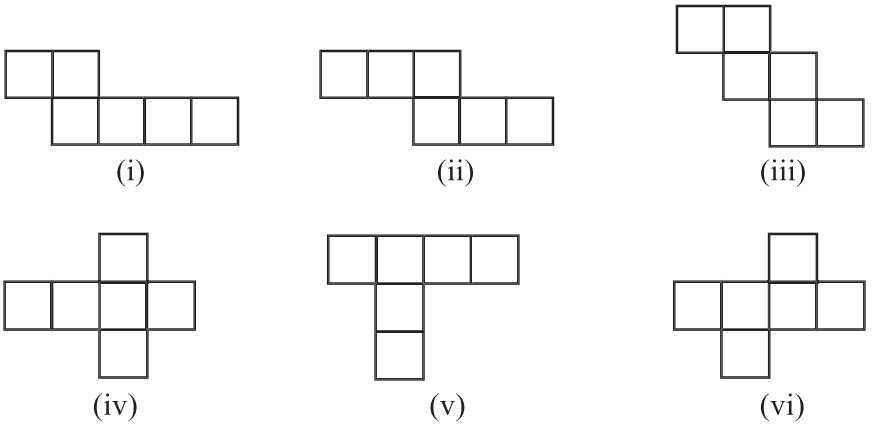
(i) (ii) (iii)

तथापि, जेव्हा आपण घनाच्या जालाकृतीबद्दल बोलतो, तेव्हा आपण फक्त घन आकार उलगडल्याने तयार होणाऱ्या आकाराचा विचार करतो, त्याला जोडण्यासाठी लागणाऱ्या घड्याचा नाही.

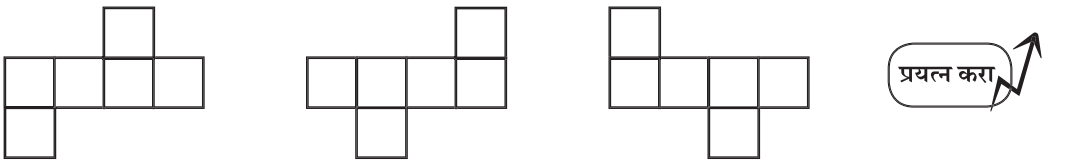
जालाकृती वापरण्याव्यतिरिक्त, कागदापासून घन बनविण्याचे इतरही मार्ग आहेत. घन बनवण्यासाठी एकापेक्षा जास्त अनेक शक्यता असू शकतात.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालीलपैकी कोणत्या घनांच्या जालाकृती आहेत? प्रथम दृश्याकृती वापरून उत्तर देण्याचा प्रयत्न करा. त्यानंतर तुम्ही कागदाचे कापीव कात्रण वापरून प्रयत्न करू शकता.



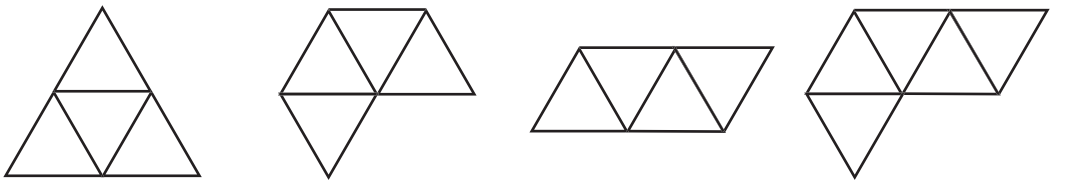
2. एका घनाच्या एकूण 11 संभाव्य जालाकृती रचना असू शकतात. या गणनेत जर एका जालाकृतीला फिरवून किंवा उलटवून दुसरी जालाकृती मिळत असेल, तर त्या दोन्ही जालाकृती सारख्याच मानल्या जातात. उदाहरणार्थ, खालील सर्व जालाकृती समान मानल्या जातात.



घनाच्या सर्व 11 जालाकृती शोधा.

3. खालील बाजूंची लांबी असलेल्या घनाची जालाकृती काढा.
   i) 5 सें.मी., 3 सें.मी. आणि 1सें.मी. ii) 6 सें.मी., 3 सें.मी. आणि 2सें.मी.
   इतर घन वस्तूंच्या जालाकृती शोधूया.
   ज्या चतुः समपृष्ठकाचे सर्व पृष्ठभाग समभुज त्रिकोण असतात त्याला **नियमित चतुः समपृष्ठक** म्हणतात.

नियमित चतुः समपृष्ठकाची जालाकृती म्हणजे काय? खालीलपैकी कोणत्या नियमित **चतुः समपृष्ठक** जालाकृती आहेत?



? इतर कांही संभाव्य जालाकृती आहेत का?
नियमित चतु:समपृष्ठकाच्या फक्त 2 संभाव्य जालाकृती असतात.

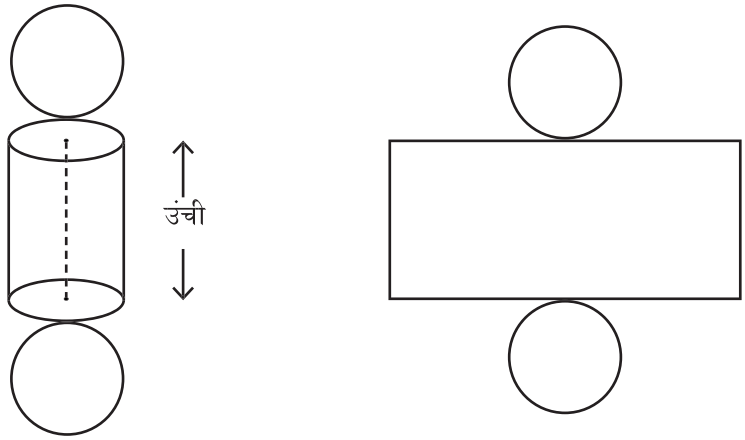
? योग्य मापे घेऊन एक जालाकृती काढा जी नियमित चतु:समपृष्ठामध्ये दुमडली जाऊ शकते. प्रत्यक्ष कागद कापून ती तयार होते का याची पडताळणी करा.

गणिती बोल

? योग्य मापे घेऊन एक जालाकृती काढा जी चौकोनी पिरॅमिड मध्ये ! दुमडली जाऊ शकते. प्रत्यक्ष कागद कापून ती तयार होते का याची पडताळणी करा.

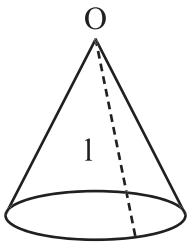
? सिलेंडरला (दंडगोलाला) जाल किती आहेत?

जर वृत्तचितीचे (दंडगोल) वर्तुळाकार भाग उघडले आणि खाली आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे वृत्तचितीच्या उंचीच्या बाजूने कापला असेल, तर आपल्याला मिळेल.



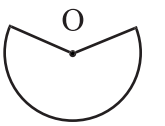
? मिळालेल्या आयताच्या बाजूंची लांबी किती असेल?

? शंक्वाकृती वस्तूची जालाकृती कशी दिसेल?



? जर शंकू 'l' या रेषेवरून कापला आणि उघडला, तर आपल्याला काय मिळेल?

हे लक्षात घ्या की, तळाच्या वर्तुळाच्या कडेवरील सर्व बिंदू '0' पासून समान अंतरावर आहेत. म्हणून शंकू उघडल्यानंतर त्या जालाकृतीच्या सीमा '0' केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा एक भाग असेल.

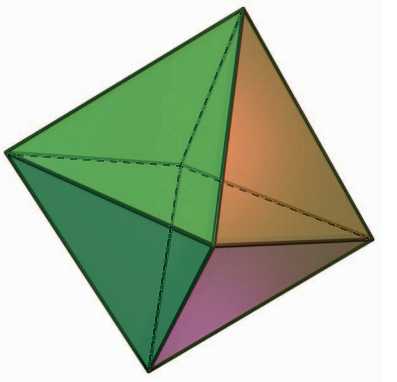


? जर तुम्ही वरील जालाकृती वापरून अशी पृष्ठभाग तयार केले ज्यामध्ये '0' ही सीमा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू नसेल, तर कोणता आकार तयार होईल? हे उत्तर शोधण्यासाठी एक प्रत्यक्ष नमुना तयार करा!

गणिती बोल

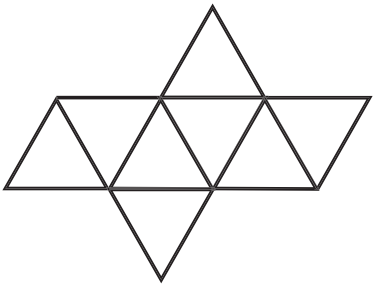
? योग्य मापे घेऊन एक जालाकृती काढा जी दुमडल्यावर त्रिकोणी लोलक तयार होईल. प्रत्यक्ष कागदाची कात्रण वापरून या कार्याची पडताळणी करा.

येथे अष्टभुजाकृती नांवाचा एक घन आकार आहे, जो दोन चौरस पिरॅमिड्सना त्यांच्या तळाशी जोडून तयार केला जातो.



अष्टभुजाकृती

तुम्ही त्याच्या जालाकृतीची (उलगडलेल्या आकाराची) कल्पना करू शकता का? हे त्याच्या जालाकृतीपैकी एक आहे.

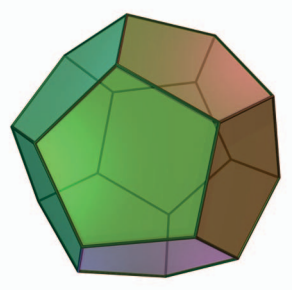


? या जालाकृतीमधील सर्व त्रिकोण समभुज आहेत असे मानून या जालाकृतीची एक कागदी कात्रण तयार करा आणि ती दुमडून अष्टभुजाकृती बनवा.

गणिती बोल

जसे घनाला 11 वेगवेगळ्या प्रकारच्या जालाकृती असतात. तसेच अष्टभुजाकृती देखील 11 वेगवेगळ्या जालाकृती असतात. आतापर्यंत आपण असे घन आकार पाहिले आहेत ज्यांचे सर्व पृष्ठभाग समभुज त्रिकोण आहेत आणि ज्यांचे सर्व पृष्ठभाग चौरस आहेत. असा एखादा घन आकार अस्तित्वात आहे का ज्याचे सर्व पृष्ठभाग पंचकोनाकृती आहेत? विशेष म्हणजे याचे उत्तर हो असे आहे!

या आकाराला द्वादशसमपृष्ठक (Dodecahedron) म्हणतात. हा घन आकार सुद्धा एका जालाकृतीपासून बनविला जाऊ शकतो! गणितज्ञांनी द्वादशसमपृष्ठकाला नक्की किती जालाकृती असतात हे देखील शोधून काढले आहे - 43380.



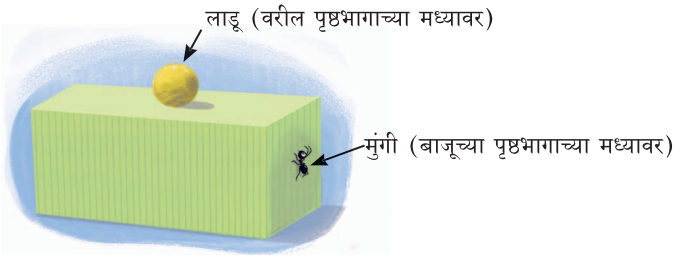
द्वादशसमपृष्ठक

? **गोलाची जालाकृती?** एक प्रयोग करून पहा. तुम्ही कागदाचा असा एखादा तुकडा तयार करू शकता का, जो कोणत्याही सुरकुत्या न पडता, मध्ये मोकळी जागा न सोडता किंवा एकावर एक न चढ़ता एखाद्या चेंडू भोवती अचूकपणे गुंडाळला जाऊ शकेल?

घनावरील सर्वात लहान मार्ग (Shortest Paths on a Cubs)

आतापर्यंत झालेल्या चर्चेवर आधारित एक मनोरंजक प्रश्नाचा विचार करूया आपल्याला माहित आहे की, एका सपाट पृष्ठभागावर (प्रतल), दोन बिंदूमधील सर्वात लहान मार्ग म्हणजे त्यांना जोडणारी सरळ रेषा असते. आता, जर आपल्याला फक्त पृष्ठभागावरून प्रवास करण्याची परवानगी असेल, तर घनाच्या पृष्ठभागावरील दोन बिंदूमधील सर्वात लहान मार्ग कोणता असेल?

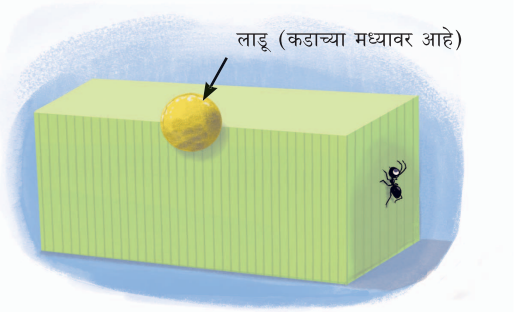
कल्पना करा की घनाच्या पृष्ठभागावर एक भुकेलली मुंगी राहते. तिच्या नशिबाने त्या पृष्ठभागावर एक 'लाडू' आहे.



गणिती बोल

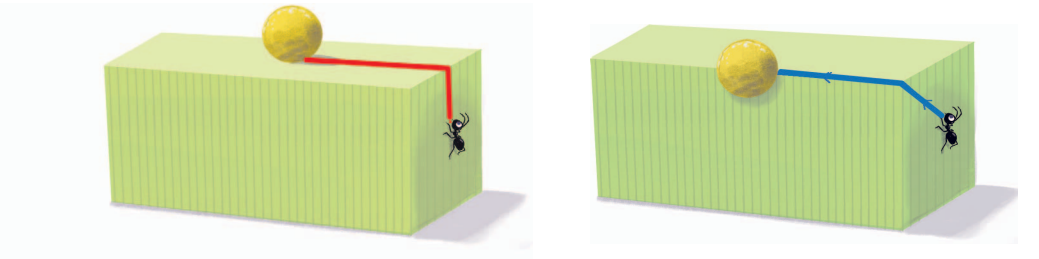
? मुंगीला लाडूपर्यंत पोहोचण्यासाठी सर्वात लहान मार्ग कोणता आहे?

? खालील परिस्थितीमध्ये काय होईल?

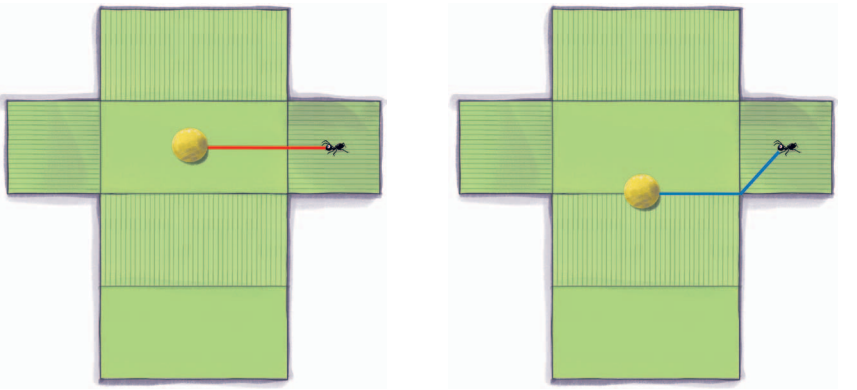


? जर आपल्याला वाटत असेल की एखादा विशिष्ट मार्ग सर्वात लहान आहे, तर अनंत शक्यतांपैकी तोच खरोखर लहान मार्ग आहे. याची खात्री आपण कशी देऊ शकतो?

? उदाहरणार्थ, खालीलपैकी कोणता मार्ग सर्वात लहान आहे?



(सूचना : जालाकृती काढा आणि पहा की हे मार्ग जालाकृतीवर कसे दिसतात.)

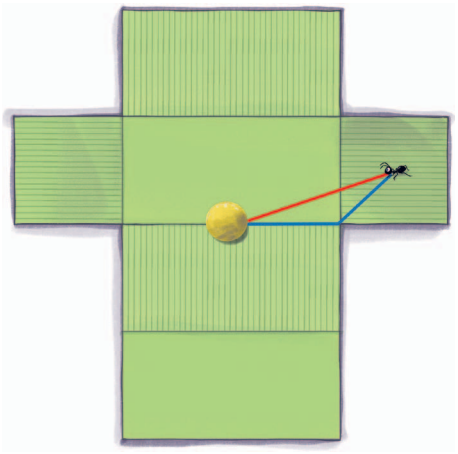


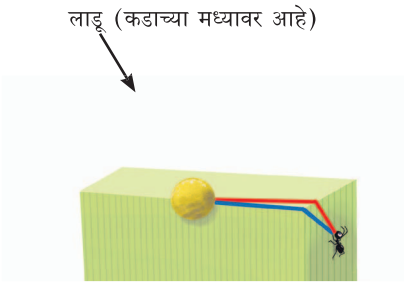
? हे काय दर्शविते ?

घनाच्या पृष्ठभागावरील मार्ग जालाकृतीवरील समान लांबीच्या मार्गामध्ये रूपांतरित केला जाऊ शकतो. याउलट जालाकृतीवरील प्रत्येक मार्ग घनाच्या पृष्ठभागावरील समान लांबीच्या मार्गामध्ये रूपांतरीत होतो.

पहिल्या स्थितीत, घनावर चिन्हांकित केलेला मार्ग सर्वात लहान आहे, कारण तो जालाकृतीवरील मुंगी आणि लाडू यांच्यातील एक सरळ रेषेत रूपांतरीत होतो, जो यांच्यामधील सर्वात लहान मार्ग आहे.

दुसऱ्या स्थितीत, घनावर चिन्हांकित केलेला मार्ग जालाकृतीवरील सरळ रेषेच्या मार्गामध्ये रूपांतरीत होत नाही आणि म्हणूनच मुंगीसाठी तो सर्वात लहान मार्ग नाही.



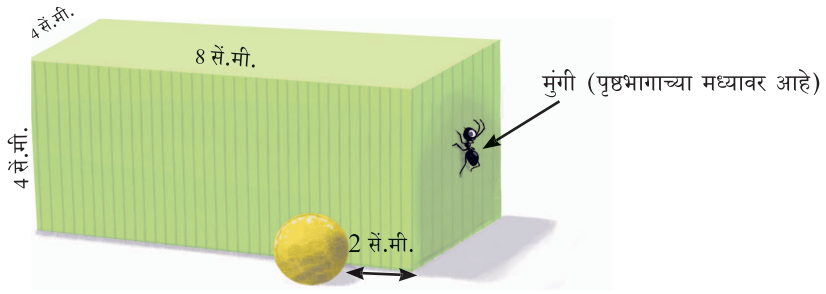


लाल मार्ग हा सर्वात लहान आहे

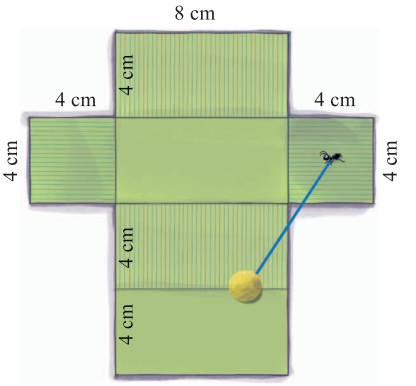
अशाप्रकारे, जालाकृतीचा वापर करून आपण घनावरील सर्वात लहान मार्ग शोधण्याच्या समस्येचे रूपांतर जालाकृतीवरील सर्वात लहान मार्ग शोधण्याच्या समस्येत करतो.

आता आपण घनावरील दोन बिंदूमधील सर्वात लहान मार्ग शोधण्याच्या समस्येचे पूर्णपणे विश्लेषण केले आहे का ?

? खालीलपैकी मुंगी आणि लाडू यांमधील सर्वात लहान मार्ग शोधा.



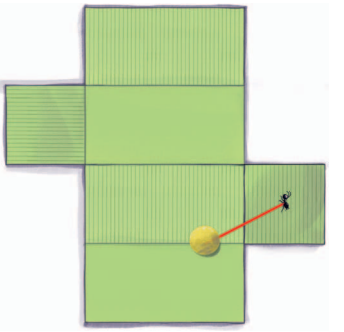
जर आपण पूर्वीप्रमाणे घन उलगडला तर आपल्याला मिळेल.



येथे मुंगी आणि लाडू यांना जोडणारा रेषाखंड जालाकृतीच्या वाहेरुन जात आहे ! साहजिकच, हा मार्ग घनावरील असू शकत नाही.

? तर आता आपण काय करायचे ?

जर जालाकृती खालील पध्दतीने उलगडली तर आपल्याला घनावर एक मार्ग मिळेल.

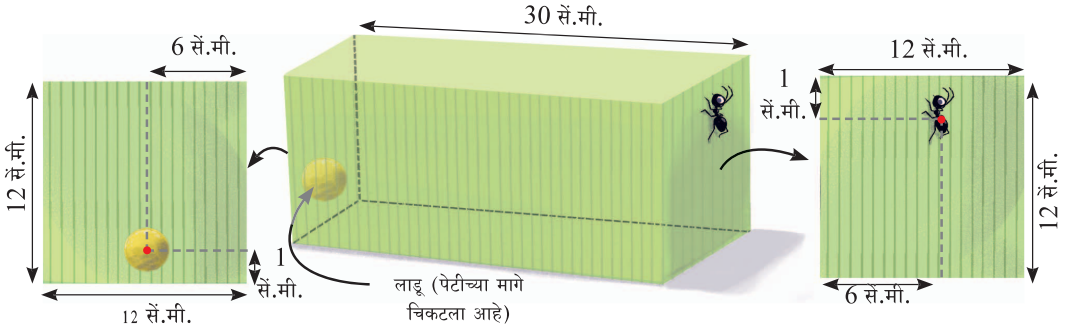


लहानात लहान मार्ग

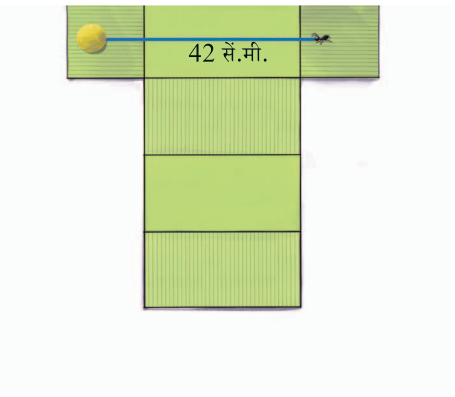
म्हणून, घन कसे उलगडले जाते हे महत्वाचे आहे.

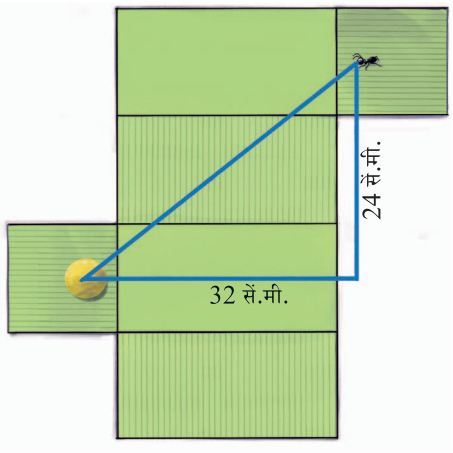
? मुंगी आणि लाडू यांमधील सर्वात लहान (कमी) लांबीचा मार्ग कोणता ?

प्रयत्न करा



येथे घन उलगडण्याच्या कांही पध्दती दिल्या आहेत.





दुसऱ्या पध्दतीमध्ये, मुंगी आणि लाडू यांमधील अंतर d हे पायथॅगोरसचा प्रमेय वापरून काढता येते, कारण येथे आपल्याला एक काटकोन त्रिकोण मिळतो.

$$d^2 = 24^2 + 32^2$$

$$d = \sqrt{1600} = 40 \text{ सें.मी.}$$

आपण पाहू शकतो की, घन उलगडण्याच्या प्रत्येक पद्धतीनुसार मुंगी आणि लाडू यांच्यातील रेषाखंडांची लांबी वेगवेगळी येते! त्यामुळे अचूक उत्तर शोधण्यासाठी आपल्याला सर्व संभाव्य पध्दतींचा काळजीपूर्वक विचार करावा लागेल.

समतल पृष्ठभागावर त्रिमितीय वस्तूंचे सादरीकरण
(Representation of Solids on a Plane Surface)

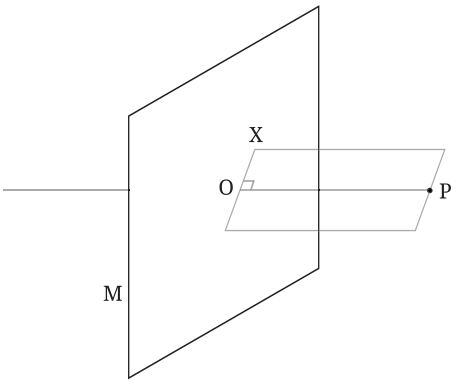
रेखाचित्र ही मानवाच्या सर्वात जुन्या क्रियांपैकी एक आहे. लोक हजारो वर्षापासून सौंदर्यासाठी तसेच व्यवहारीक आणि अभियांत्रिकी कारणांसाठी रेखाचित्र काढत आलेला आहेत. व्यवहारिक दृष्टीकोनातून विचार करता एखाद्या वस्तूचे चित्र काढणे ही त्याबद्दलची माहिती नोंदविण्याची किंवा ती दुसऱ्यांपर्यंत पोहोचविण्याची एक उपयुक्त पध्दत आहे.

दृश्य सादरीकरणामुळे आपल्याला ज्या वस्तूचे चित्र काढायचे आहे त्याबद्दल विचार करण्यास मदत होते. अभियांत्रिकीमध्ये अशा गरजा वारंवार उदभवतात. जसे की इमारतीचे बांधकाम करताना, मशीनची रचना करताना इत्यादी शिवाय अभियांत्रिकीना रेखाचित्रांच्या अचूकतेची आवश्यकता असते. ते इतके सविस्तर असावे की त्यावरून एखादी व्यक्ती त्यामध्ये दर्शविलेल्या वस्तू प्रत्यक्षात तयार करू शकेल. आपण आता सपाट प्रतलावर घन वस्तू दर्शविण्याच्या कांही पध्दती शोधूया.

प्रक्षेपण (Projections)

एखाद्या घन वस्तूच्या जालाकृती (जेव्हा ते अस्तित्वात असते) तर तो घन पृष्ठभागावर (प्रतलावर) दर्शविण्याचा एक मार्ग आहे. परंतु प्रत्यक्षात जालाकृती न कापता किंवा न दुमडता त्यावरून घन आकृतीची कल्पना करणे कठीण असू शकते.

घन वस्तू दर्शविण्याचा दुसरा मार्ग म्हणजे त्याच्या सर्व बिंदूचे प्रतलावरील **प्रक्षेपणाचे** निरीक्षण करणे. ही कल्पना घनाच्या एका विशिष्ट दृष्टिकोनातून दिसणाऱ्या बाह्यरेषेशी संबंधित आहे. ज्याबद्दल आपण आधी चर्चा केली आहे. ही पध्दत कशी कार्य करते ते पाहूया.

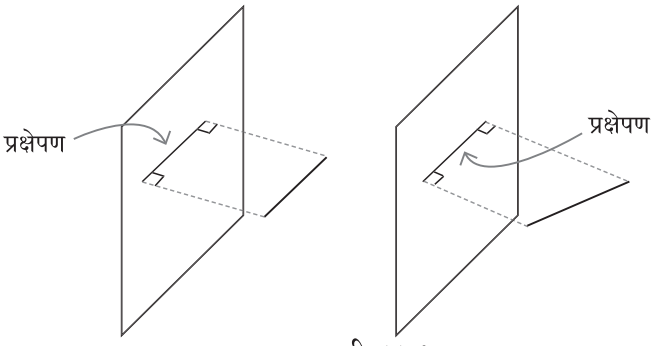


O हे P चे प्रक्षेपण आहे

अवकाशातील एक बिंदू P आणि एक प्रतल M चा विचार करा. बिंदू P पासून एक रेषा प्रतल M ला O बिंदूमध्ये छेदते अशी कल्पना करा.

जर प्रतलावरील कोणत्याही OX रेषेसाठी $\angle POX = 90^0$. असेल, तर आपण असे म्हणतो की OP ही रेषा प्रतलाला लंब आहे. या स्थितीत आपण म्हणतो की, बिंदू O हे बिंदू P चे प्रतलावरील प्रक्षेपण आहे. एखाद्या वस्तूच्या सर्व बिंदूंच्या प्रक्षेपणांमधून एकत्रितपणे त्या वस्तूचे प्रतलावरील प्रक्षेपण तयार होते.

? रेषेच्या प्रक्षेपणाची कल्पना करूया.



आकृती 11.2

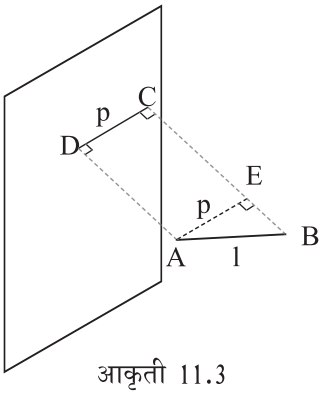
? प्रक्षेपणामध्ये रेषेच्या लांबीचे काय होते?

आकृती 4.3 मधील प्रक्षेपणांचा विचार करूया.

उदाहरणार्थ, l ही रेषेची वास्तविक लांबी आहे आणि P ही l च्या प्रक्षेपणाची लांबी आहे.

$AE \perp BC$ काढा AECD हा एक आयत आहे (का?)

म्हणून, $AE = DC = p$. तसेच, $\angle AEB = 90°$.



आकृती 11.3

? आता तुम्ही P आणि l या लांबींची तुलना करू शकता का?

? प्रक्षेपित रेषेची लांबी तिच्या प्रत्यक्ष लांबीइतकी केव्हा असते?

? चौरसाच्या स्थितीनुसार आपल्याला त्याचे कोणकोणते संभाव्य प्रक्षेपण मिळू शकतात असे तुम्हाला वाटते ?

गणिती बोल

? वेगवेगळ्या स्थितींमध्ये समांतरभुज चौकोनाचे प्रक्षेपण काय असेल असे तुम्हाला वाटते?

हा असा चौकोन कधी असू शकतो का जो समांतरभुज नाही? म्हणून, तुम्ही समांतर रेषांच्या जोडीच्या प्रक्षेपणाबद्दल विचार करू शकता.

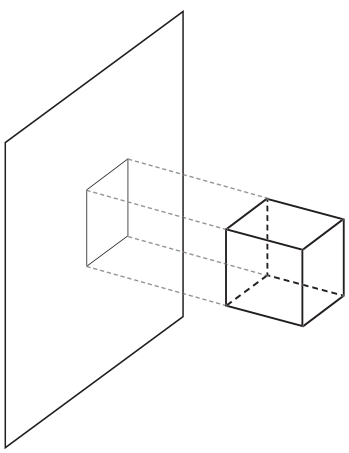
? n- बाजू असलेल्या नियमित बहुभुजाकृतीच्या प्रक्षेपणाबद्दल तुम्ही काय सांगू शकता?

गणिती बोल

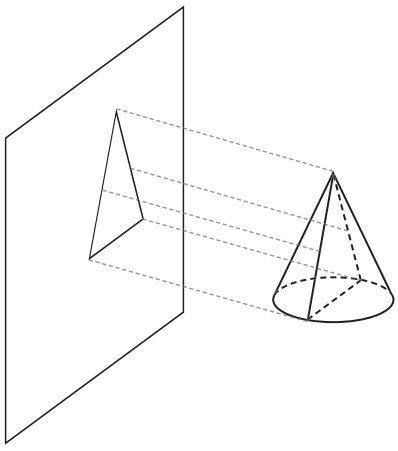
(सूचना: बहुभुजाकृतीचे प्रक्षेपण हे त्याच्या बाजूंच्या प्रक्षेपणांनी बनलेले असते.)

आता आपण घन वस्तूंच्या प्रक्षेपणांचा विचार करूया.

? घन आणि शंकू यांचे प्रक्षेपण कसे दिसेल?



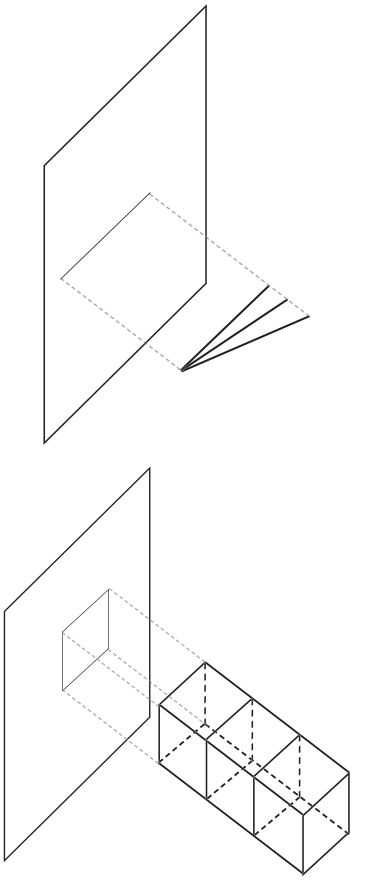
आकृती 11.4



आकृती 11.5

जर एखादी वस्तू एखाद्या प्रतलातून छेदून गेली आणि तिथे एक छिद्र तयार झाले तर त्या छिद्राचा आकार हा त्या वस्तूच्या प्रक्षेपणासारखाच असेल.

? आकृती 4.2 ते 4.5 पहा. प्रत्येक बाबतीत तुम्ही अशा दुसऱ्या एखाद्या वस्तूची कल्पना करू शकता का, ज्याचे प्रक्षेपण सारखेच असेल?



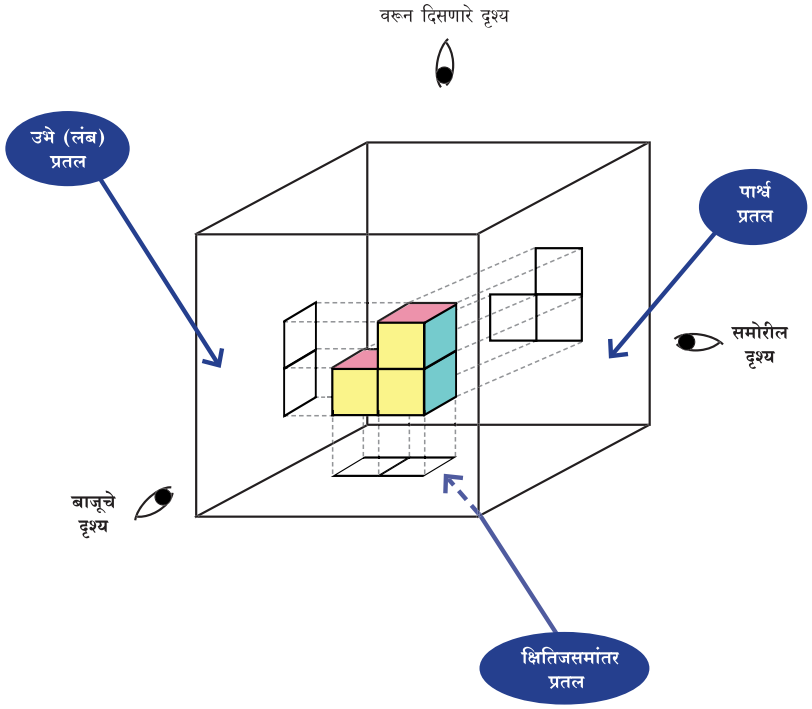
आकृती 11.6

वेगवेगळ्या रेषा आणि वेगवेगळे घनायत जे समान प्रक्षेपण दर्शवतात.

आपण पाहतो की, दिलेले प्रक्षेपण हे केवळ एका विशिष्ट वस्तूद्वारेच तयार होते असे नाही.

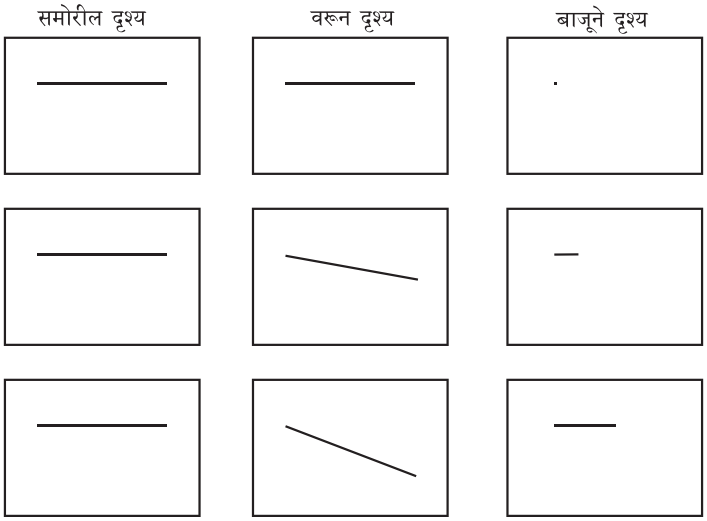
? दिलेल्या शंकूच्या प्रक्षेपणासारखेच प्रक्षेपण असणारी दुसरी एखादी वस्तू शोधा.

या कारणामुळेच, आपण अनेकदा एखाद्या वस्तूची तीन एकमेकांना लंब असलेली प्रक्षेपणे घेतो. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, आपण वस्तूच्या समोरील प्रतलाला उभे प्रतल म्हणतो, वस्तूच्या खाली असलेल्या प्रतलाला क्षितिज समांतर प्रतल आणि वस्तूच्या बाजूला असलेल्या प्रतलाचा अर्थ पार्श्व प्रतल म्हणतो,

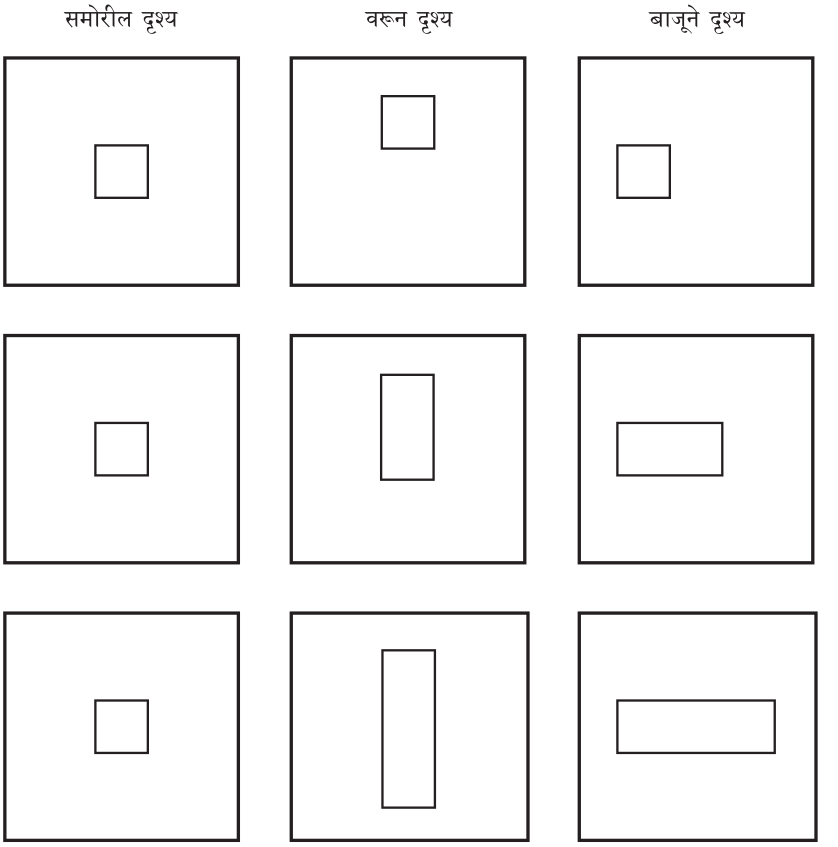


वस्तू ज्या दिशेने पाहिली जाते, या दिशांवरून आपण या तीन प्रतलांवरील प्रक्षेपणांना नांवे देतो. उभ्या प्रतलावरील प्रक्षेपणाला **समोरील दृश्य**, क्षितिजसमांतर प्रतलावरील प्रक्षेपणाला वरून दिसणारे दृश्य आणि पार्श्व प्रतलावरील प्रक्षेपणाला **बाजूचे दृश्य** असे म्हणतात. ही प्रक्षेपणे आपण मागील भागात अभ्यासलेल्या 'पार्श्वचित्राच्या कल्पनेला अधिक स्पष्ट करतात.

? जेव्हा दाखविलेली प्रतले 'उभी प्रतले' मानली जातात तेव्हा आकृती 4.6 मध्ये दर्शवलेल्या वस्तूंसाठी ही प्रक्षेपणे कशी असतील ते पाहूया.



आकृती 4.6 मधील वेगवेगळ्या रेषांचे प्रक्षेपण.



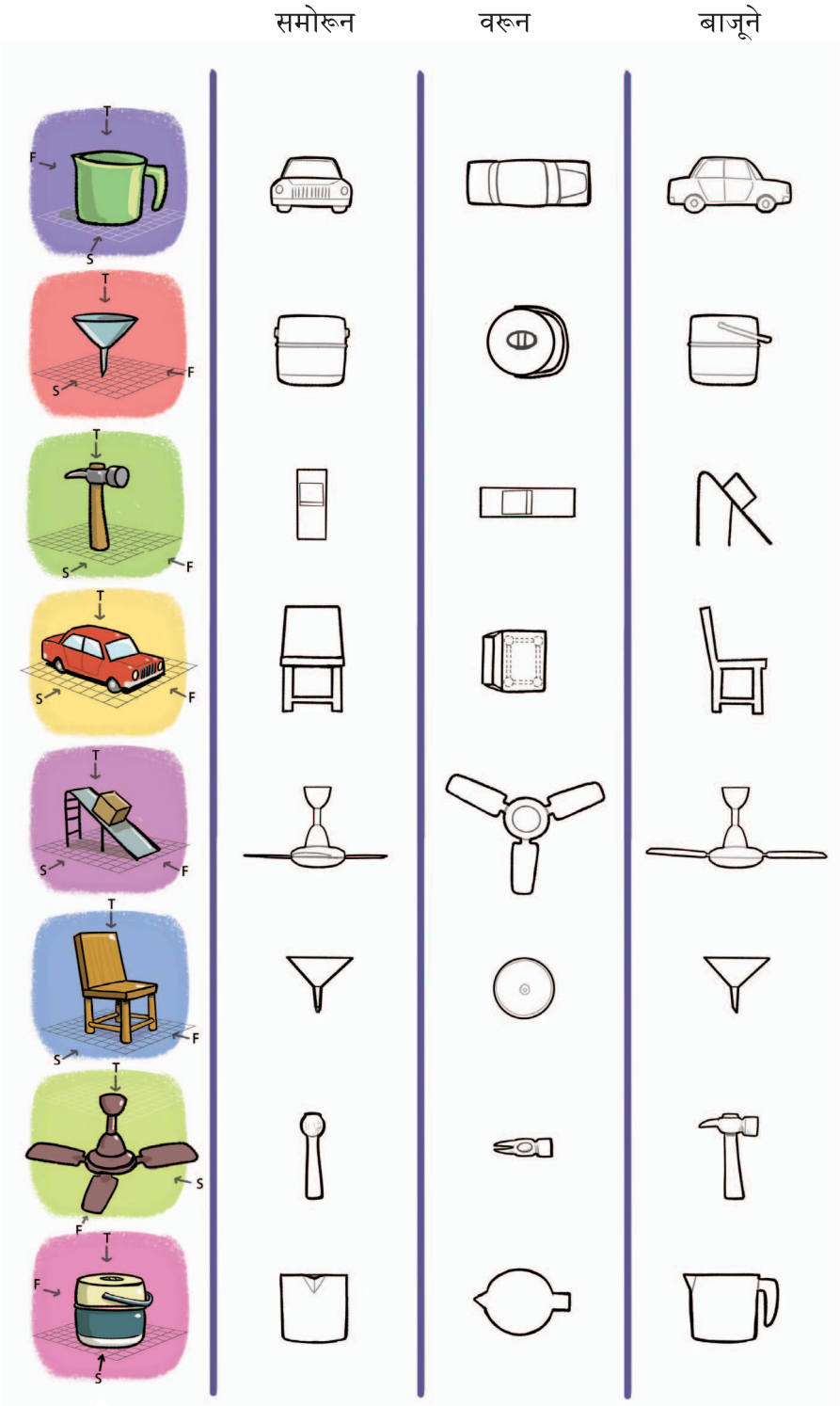
शोध्या पाहू. (Figure it out)

1. आकृती 11.6 मधील वेगवेगळ्या रेषांचे समोरून दृश्य, वरून दृश्य आणि बाजूने दृश्याचे निरीक्षण करा. त्यांच्या लांबीमध्ये कांही संबंध आहेत का?

2. खालीलपैकी प्रत्येक घन वस्तूचे समोरून दृश्य, वरून दृश्य आणि बाजूने दृश्य शोधा; त्यांची स्थिती उभ्या, आडव्या आणि बाजूच्या प्रतलांच्या संदर्भात निश्चित करा. घन, घनायत, समांतरभुज बहूभूजाकृती, वृत्तचिती (दंडगोल), शंकू, लोलक, आणि पिरॅमिड, आवश्यक असल्यास संकेतांसाठी पुढील उदाहरणे पहा.

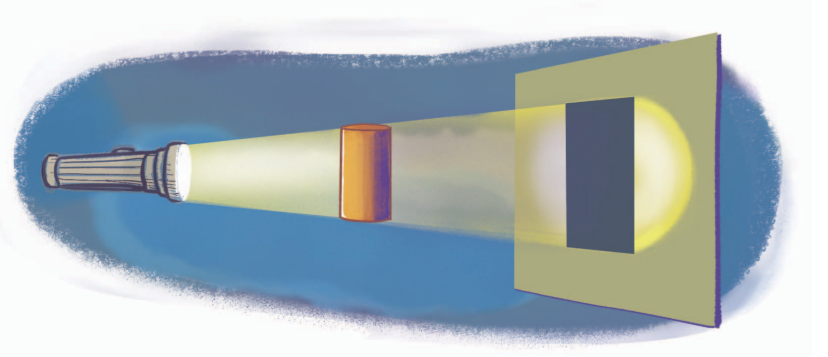


3. खालील प्रत्येक वस्तूची त्यांच्या प्रक्षेपणांशी जोडी लावा.



सावली (Shadows)

एखाद्या प्रतलासमोर, जसे की, तुमच्या खोलीची भिंती समोर एक वस्तू ठेवा. टॉर्चचा प्रकाश त्या वस्तूवर भिंतीला लंब असलेल्या दिशेने टाका.



? तुम्हाला काय दिसते?

आपल्याला असे दिसेल की, प्रतलावरील सावलीचा आकार हा त्या प्रतलावरील प्रक्षेपणाशी अगदी मिळताजुळता असतो! मात्र वस्तू कशी धरली आहे यानुसार सावली मोठी, ताणलेली किंवा थोडी विद्रूप असू शकते.

? तुमचे टॉर्च आणि वस्तू यामधील अंतर बदलल्यावर सावलीच्या आकारात काय बदल होतो याचे निरीक्षण करा.

? असे का होते?

प्रयत्न करा

आता कल्पना करा की, तुमचा टॉर्च अत्यंत शक्तिशाली आहे आणि तुम्ही तो कितीही मागे घेऊन गेलात तरी तो भिंतीवर वस्तूची सावली पाडत राहतो.

जर हा काल्पनिक टॉर्च नेहमी भिंतीला लंब दिशेने असेल, तर टॉर्च आणि वस्तू मधील अंतर वाढल्यास वस्तूची सावली ही भिंतीच्या पृष्ठभागावरील प्रक्षेपणासारखीच दिसेल!

जरी हा प्रयोग काल्पनिक वाटत असला तरी, तुम्ही याआधी अशाच एका अत्यंत शक्तिशाली आणि दूरवर असलेल्या टॉर्चचा अनुभव घेतला आहे. तो म्हणजे सूर्य! खरचं जेव्हा सुर्यप्रकाश एखाद्या सपाट पृष्ठभागाला लंब असतो, तेव्हा त्याने पडलेल्या सावल्या प्रक्षेपणापेक्षा वेगळ्या असतात.

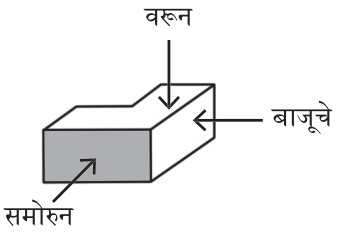
आधी आपण विचारले होते की, समांतरभुज चौकोनाचे प्रक्षेपण कसे दिसेल. आता तुम्ही समांतरभुज चौकोनाची एक कागदी कात्रण बनवून आणि सूर्यप्रकाशात त्याची सावली पाहून या प्रश्नाचे प्रत्यक्ष उत्तर देऊ शकता. तुम्ही तो समांतरभुज चौकोन कोणत्याही स्थितीत धरला तरी तुम्हाला दिसेल की त्याची सावली नेहमी समांतरभुज चौकोनच राहते!

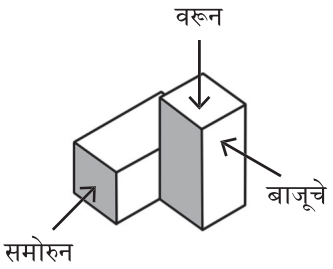
अधिक सामान्यपणे समांतर रेषांच्या जोडीचे प्रक्षेपण नेहमी समांतरच राहते.

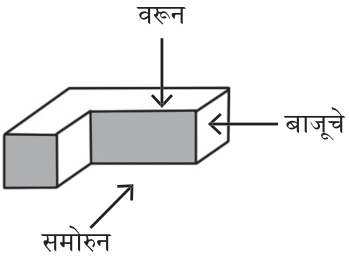
हे गुणधर्म वस्तूंचे प्रक्षेपण काढण्यासाठी उपयुक्त आहे.

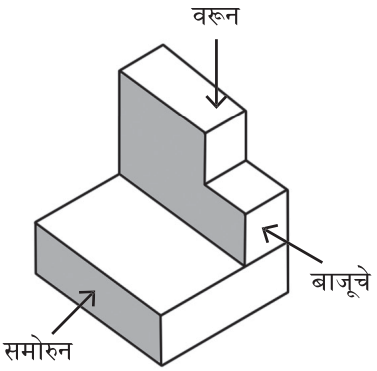
शोधा पाहू. (Figure it out)

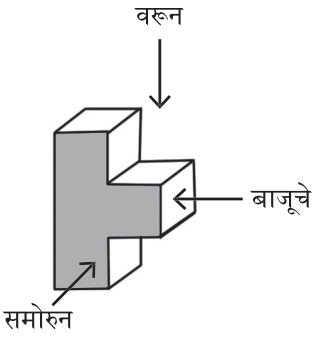
1. खालील प्रत्येक एकसारख्या (समान) घनांच्या संचाचे वरचे दृश्य, समोरचे दृश्य आणि बाजूचे दृश्य काढा.

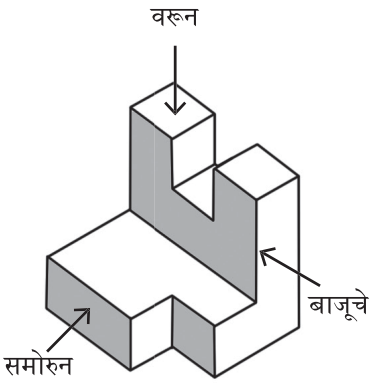












2. कल्पना करा की आठ समान घन एकमेकांना जोडून '  ' हे अक्षर तयार केले आहे. गणिती बोल

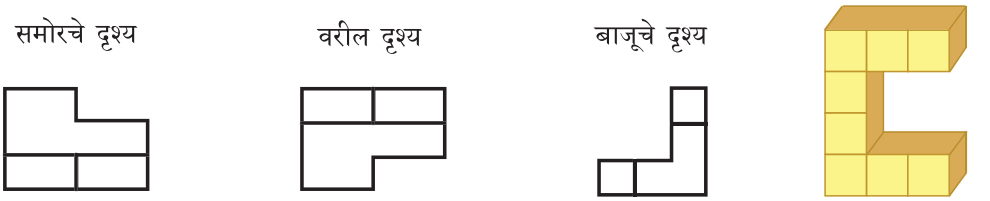
   i) हे समोरून '  ' सारखे दिसते. मग हे बाजूने कसे दिसेल? आणि वरून कसे दिसेल?

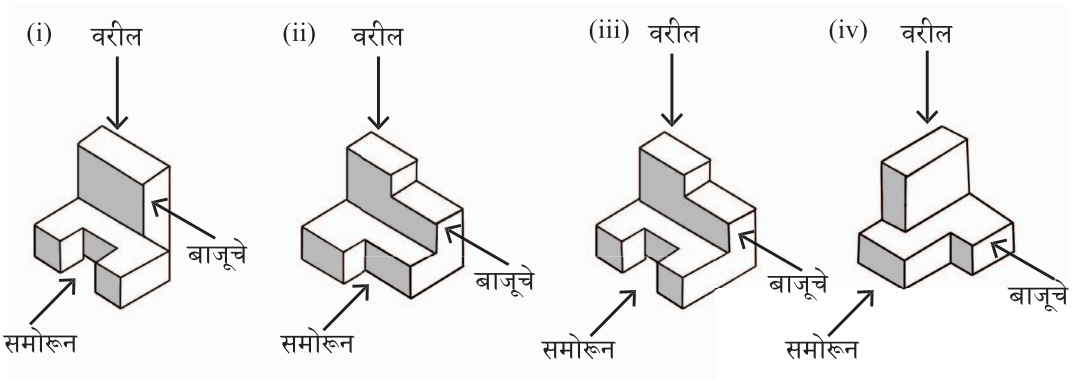
   ii) अजून कांही घन अशाप्रकारे जोडा की ते समोरून '  ' सारखे आणि वरून '  ' सारखे दिसेल.

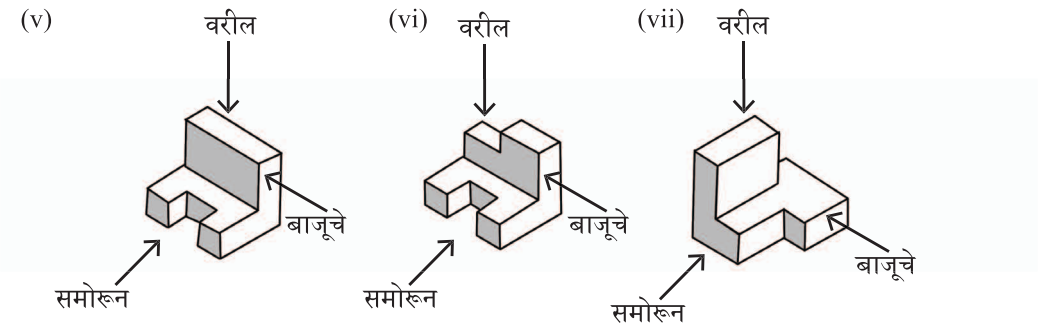
   iii) आता, तुम्ही आणखी घन जोडून अशी आकृती बनवू शकता का, जी समोरून '  ' सारखी, वरून '  ' सारखी आणि बाजूने '  ' सारखी दिसेल?

   iv) अशा प्रकारे घनांच्या एकाच मांडणीतून तयार होऊ शकणाऱ्या अक्षरांच्या इतर कांही जोड्यांचा तुम्ही विचार करू शकता का?

3. दिलेल्या वरच्या दृश्याशी, समोरच्या दृश्याशी आणि बाजूचे दृश्याशी कोणता घन वस्तू जुळतो?

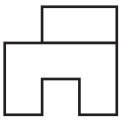






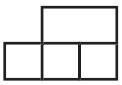
4. सारख्याच आकाराच्या घनांचा वापर करून एक अशी आकृती तयार करा ज्याचे खालीलप्रमाणे प्रक्षेपण असेल.

(i)



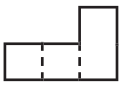
वरील दृश्य

(ii)



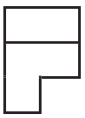
समोरील दृश्य

(iii)



बाजूचे दृश्य

(iv)



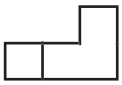
वरील दृश्य

(v)



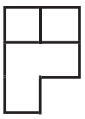
समोरील दृश्य

(vi)



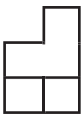
बाजूचे दृश्य

(vii)



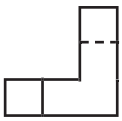
वरील दृश्य

(viii)



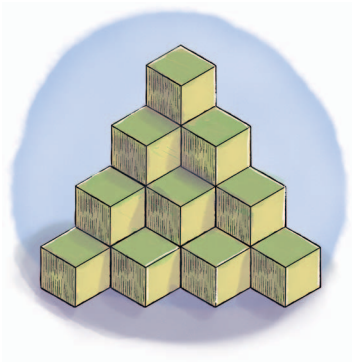
समोरील दृश्य

(ix)



बाजूचे दृश्य

5. एकसारख्या घनांच्या या थप्पीमध्ये एकूण किती घन आहेत ते शोधा.



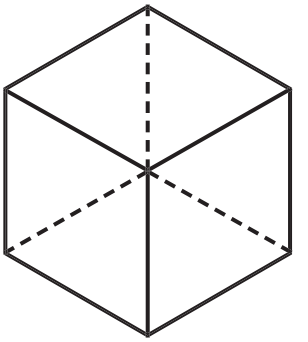
6. वेगवेगळ्या कोनांतून पाहिल्यास घनाचे प्रक्षेपण कोणते वेगवेगळे आकार बनवू शकते ? गणिती बोल

सममितीय प्रक्षेपण (Isometric Projections)

साधारणपणे, एखाद्या त्रिमितीय वस्तूचे द्विमितीय प्रतलावर प्रक्षेपण करतो तेव्हा कांही माहिती गहाळ होते. परंतु वस्तूच्या स्थितीनुसार आपण गहाळ झालेली बरीचशी माहिती पुन्हा मिळवू शकतो.

घनाच्या अशा स्थितीचा विचार करूया ज्यामध्ये घनांच्या सर्व कडांच्या प्रक्षेपणाची लांबी समान असते. अशा प्रक्षेपणाला घनाचे '**सममितीय**' प्रक्षेपण म्हणतात. ग्रीक भाषेत सममितीय शब्दाचा अर्थ समान मापन असा होतो.

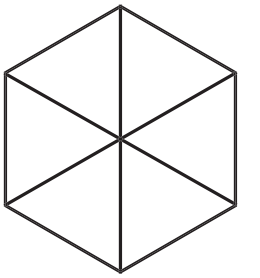
कल्पना करा की एका घनाला त्याच्या एका कोपऱ्याच्या शिरोबिंदूवर अचूकपणे संतुलित केला आहे आणि नंतर ते जमिनीच्या समतलावर प्रक्षेपित करत आहे. हे प्रक्षेपण सममितीय असते आणि ते खाली दाखविल्याप्रमाणे दिसते.



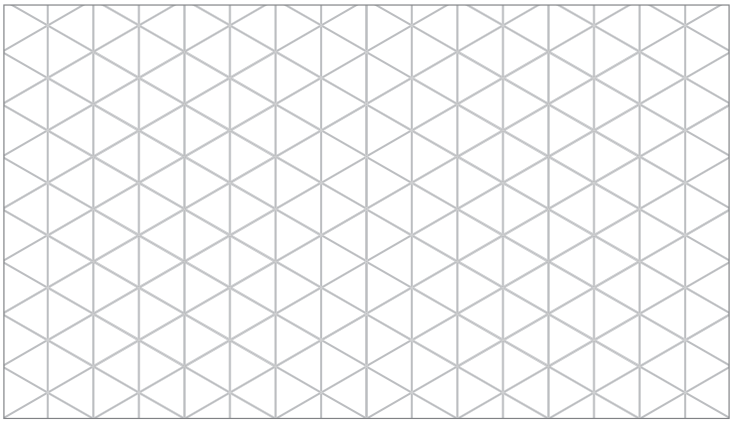
? घनाची एक प्रतिकृती तयार करा आणि ती तुमच्या हाताने एका शिरोबिंदूवर संतुलित ठेवण्याचा प्रयत्न करा. सर्व प्रक्षेपित कडांची लांबी समान का असते? हे समजून घेण्याचा प्रयत्न करा.

गणिती बोल

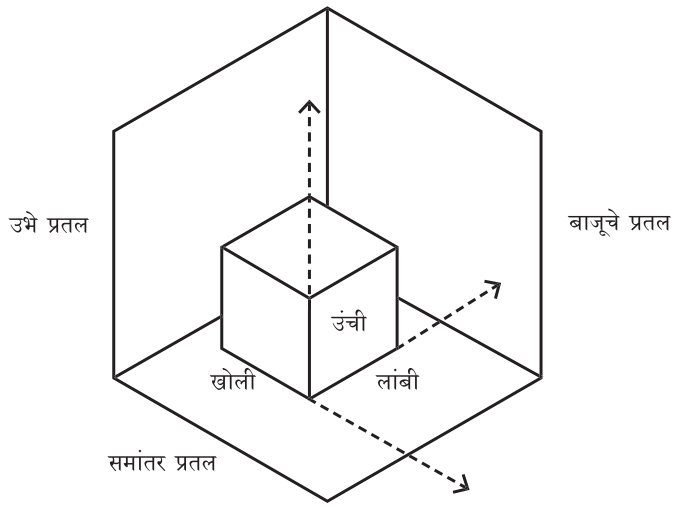
घनाचे सममितीय सादरीकरण हे एका नियमित षटकोनासारखे असते. जर घन काचेचा बनलेला असेल, तर त्याच्या सर्व कडा दिसू शकतील. ही रचना **सममितीय चित्राकृतीचा** आधार आहे.



या षटकोनांनी प्रतल व्यापले की आपल्याला **सममितीय चित्राकृती** विषयी अधिक माहिती देण्यात मदत करू शकते.



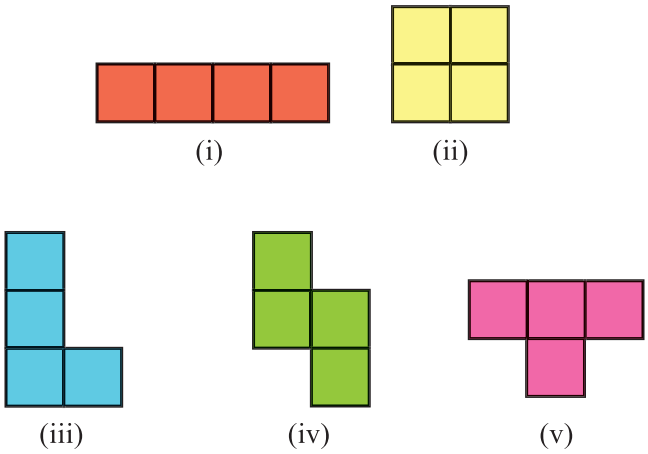
अभियांत्रिकीमध्ये सममितीय चौकट मोठ्या प्रमाणावर वापरले जातात. घन वस्तूचे प्रक्षेपण काढणे आणि लांबी, खोली आणि उंची या तिन्ही प्राथमिक दिशांमधील लांबी मोजणे यामुळे सोपे होते, जसे की आकृती 4.7 मध्ये दाखविले आहे.



आकृती 11.7

सममितीय चौकटीचे रेखाटने (Drawing on Isometric Grids)

? तुम्ही कधी टेट्रिस (Tetris) खेळला आहात का? टेट्रिसमध्ये पाच मूलभूत आकार असतात, जे चार चौरसांची वेगवेगळ्या प्रकारे मांडणी करून तयार होतात.

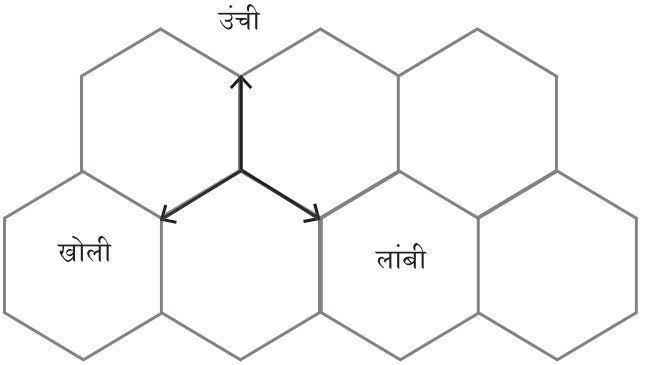


आकृती 11.8

? कल्पना करा की, हे चौरस नाहीत हे घन (ठोकळे) आहेत. तुमच्या सममितीय कागदावर यांपैकी प्रत्येकाची आकृती काढा.

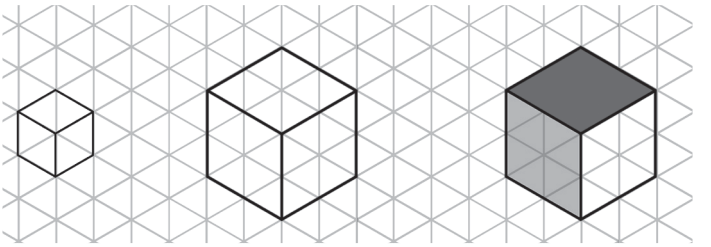
आकृती 4.7 मध्ये पाहिल्याप्रमाणे घन आकाराचे तीन मुख्य अक्ष आहेत. ज्यांना आपण खोल अक्ष, लांबी अक्ष आणि उंची अक्ष म्हणू.

चौकटीच्या कडा तीन वेगवगेळ्या दिशांनी दिसतात त्या अशा आहेत. /, \ आणि |. आपण | ला उंची, / ला खोली (Depth) आणि \ ला लांबीशी जोडणार आहोत.



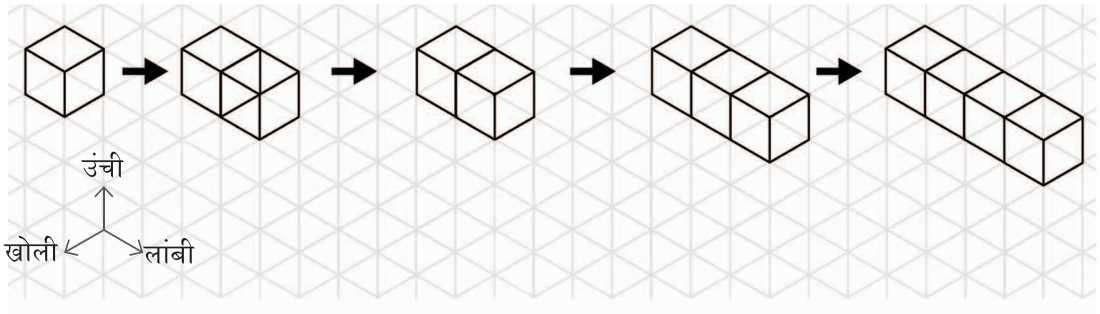
चौकट आकृती काढताना, प्रत्येक कडा ते कडा काढणे आणि तुम्हाला ज्या अक्षाच्या दिशेने जायचे आहे त्या एककांची संख्या मोजणे सोपे पडू शकते.

उदाहरणार्थ, तुम्ही $1 \times 1 \times 1$ चा घन खालीलप्रमाणे काढू शकता. तुम्ही $2 \times 2 \times 2$ चा घन कसा काढाल? जर तुम्हाला घनाचे दृश्यमान करण्यास मदत होत असेल, तर तुम्ही त्यात सावली देखील देऊ शकता.

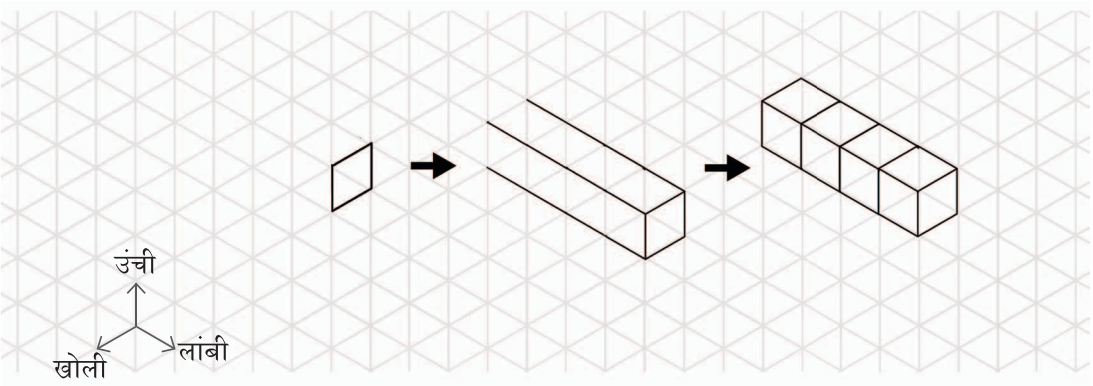


पहिली 'टेट्रिस' आकृती ही समोरासमोर जोडलेल्या चार घनांच्या रांगेचा आहे. हे घन रेखाटण्यासाठी, तुम्हाला चार घनांच्या रांगेसाठी एक दिशा निवडावी लागेल.

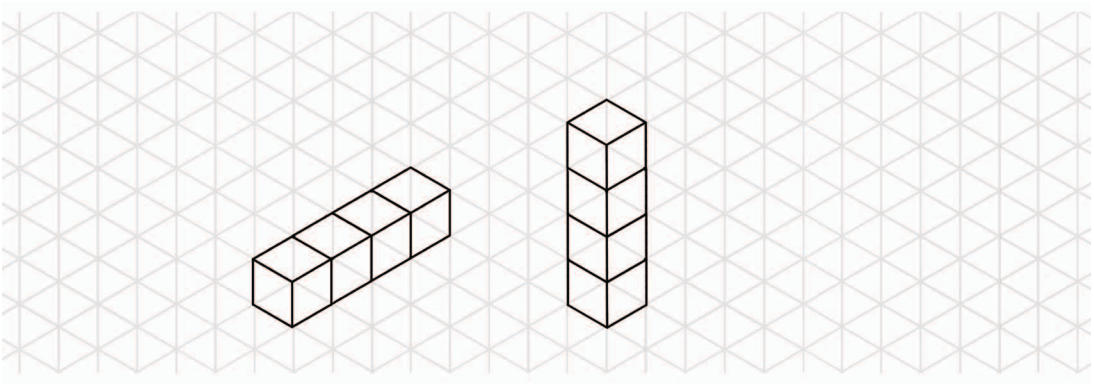
चला आपण ती खोली (Depth) अक्षाच्या दिशेने काढूया. तुम्ही ती एक एक घन करून काढू शकता, परंतु अशा वेळी तुम्हाला नवीन घनांमुळे झाकल्या गेलेल्या रेषा पुसाव्या लागतील. (जर तुमच्याकडे खोडरबर नसेल, तर तुम्ही सुरूवातीला फिकट रेषा काढू शकता आणि नंतर दिसणाऱ्या रेषा गडद करू शकता.)



तुम्ही कडा मोजून हे सर्व एकाच वेळी देखील काढू शकताः



त्याचप्रमाणे तुम्ही हा आकार उंचीच्या अक्षावर किंवा लांबीच्या अक्षावर केंद्रित करून काढू शकता.



तुमच्या रेखाटनामध्ये सममितीय कागदावर उभ्या दिशेने जाणे म्हणजे घनाच्या वस्तूच्या उंचीच्या अक्षावर चालण्यासारखे आहे. त्याचप्रमाणे कागदावर या रेषांच्या \ किंवा / दिशेने जाणे म्हणजे अनुक्रमे घन वस्तूच्या 'लांबी' किंवा 'खोली' च्या अक्षावर जाणे असे आहे.

? सममितीय कागदावरील दिशा आणि घन वस्तूचे अक्ष यांच्यातील हा परस्पर संबंध वस्तूंचा आकार स्पष्ट करण्यासाठी इतका प्रभावी का आहे?

आपण यापूर्वी पाहिले आहे की समांतर रेषांचे प्रक्षेपण समांतर रेषांमध्येच होते. ही भूमितीय वस्तुस्थिती हे सुनिश्चित करते की घन वस्तूवरील समांतर कडांचे तीन गट (जे उंची, लांबी आणि खोली दर्शवितात) सममितीय कागदावरील समांतर कडांच्या तीन गटांमध्ये (|, / आणि \) प्रक्षेपित होतात. शिवाय सममितीय प्रक्षेपणामुळे हे सुनिश्चित होते की, तिन्ही अक्षांवरील एकक अंतराचे प्रक्षेपण समान असते.

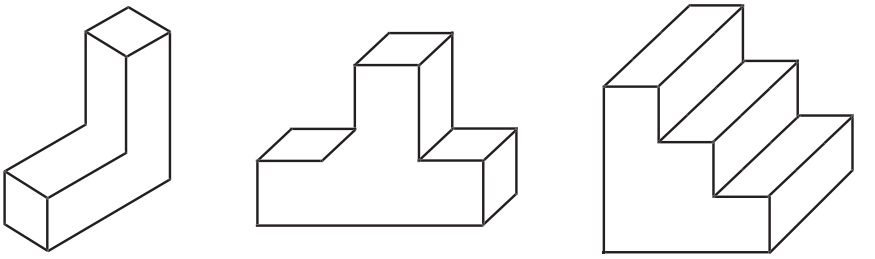
तुम्ही इतर 'टेट्रिस' आकार सममितीय कागदावर काढण्याचा प्रयत्न करू शकता का?

? शोधा पाहू. (Figure it out)

गणिती बोल

1. आकृती 11.8 मध्ये दाखविलेल्या 5 पध्दती व्यतिरिक्त, चार घन त्यांच्या पृष्ठभागांना जोडून तयार करण्याच्या आणखी कांही पध्दती आहेत का? तुम्ही त्यांची कल्पना करून ती रेखाटू शकता का?

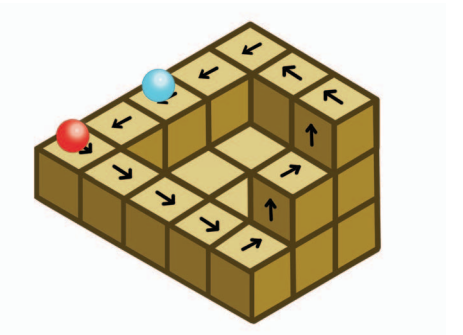
2. खालील आकृत्या सममितीय चौकटीवर काढा.



(**सूचना :** आता काढली जाणारी कडा समजा, उंचीच्या बाजूने खालून वर जात आहे की वरून खाली जात आहे, हे ठरविणे उपयुक्त ठरू शकते. त्यानुसार चौकटीवर रेषेचा छेद उंचीच्या अक्षाच्या दिशेने किंवा त्याच्या विरूद्ध दिशेने काढा.)

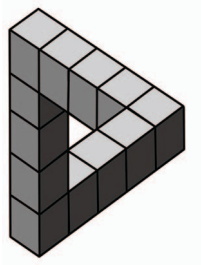
3. या चेंडूच्या मार्गाबद्दल कांही विचित्र वाटते का? सममितीय चौकटी वर त्याची पुनर्रचना करा.

गणिती बोल



(**सूचना :** या आकृतीचा असा एक भाग विचारात घ्या. जो प्रत्यक्षात तयार करणे शक्य आहे आणि 3 मुख्य दिशा ओळखा.)

4. या त्रिकोणाचे निरीक्षण करा.



i) वास्तविक घनांपासून याचे नमुने बनविणे शक्य आहे का? या अशक्य त्रिकोणाचे समोरचे वरचे आणि बाजूचे चित्र कसे असतील?

ii) हे सममितीय चौकटीवर पुन्हा तयार करा.

iii) हा भास काम का करतो ?

गणिती बोल

सारांश

- भग्न हे निसर्गात आणि कलेमध्ये आढळणारे स्व-समान भूमितीय आकार आहेत.
- सिअरपिन्स्की गालिचा, सिअरपिन्स्कीची त्रिकोण रूपातील चाळण आणि कोच स्नोफ्लेक ही गणितीय भग्नाची कांही उदाहरणे आहेत. विशिष्ट भूमितीय क्रियांची वारंवार पुनरावृत्ती करून ते मिळविता येतात, ज्यामुळे चतु:समपृष्ठकासारखे आकार तयार होतात.
- योग्य जालाकृती दुमडून घनायत, चतु:समपृष्ठक, वृत्तचिती, शंकू लोलक, पिरॅमिडस आणि अष्ठभुजाकृती यांसारखे कांही घन आकार मिळविता येतात.
- घनायताच्या पृष्ठभागावरील दोन बिंदूमधील सर्वात कमी अंतर शोधण्यासाठी त्याच्या योग्य जालाकृती (Net) चा वापर केला जाऊ शकतो.
- कोणतीही वस्तू सपाट पृष्ठभागावर तिच्या प्रक्षेपणांचा वापर करून दर्शविली जाऊ शकते. या उद्देशासाठी आपण सामान्यत: वस्तूचे समोरील दृश्य (उभ्या प्रतलावर प्रक्षेपण), वरचे दृश्य (क्षितिज समांतर प्रतलावर प्रक्षेपण) आणि बाजूचे दृश्य (बाजूच्या प्रतलावर प्रक्षेपण) वापरतो.
- एका घनाची मांडणी अशा प्रकारे केली जाऊ शकते की, त्याच्या सर्व कडांची लांबी प्रक्षेपणामध्ये समान दिसेल. अशा प्रक्षेपणाला सममितीय प्रक्षेपण म्हणतात. वेगवेगळ्या घन आकारांचे सममितीय प्रक्षेपण चौकटी कागदचा वापर करून काढता येतात.

12 बिंदू आणि रेषांच्या गोष्टी
(TALES BY DOTS AND LINES)

P3K7F9

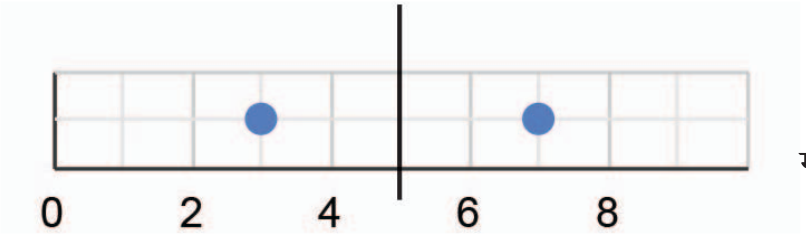
12.1. संतुलनाचा खेळ (The Balancing - Act)

मागील वर्षी आपण मध्य आणि मध्यांक बद्दल शिकलो. आठवून पहा, दिलेल्या माहितीतील सर्व मूल्यांची बेरीज करून त्याला मूल्यांच्या एकूण संख्येने भागले असता 'मध्य' मिळतो. जेव्हा माहिती चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडली जाते, तेव्हा त्यातील मधल्या मूल्याला किंवा संख्येला 'मध्यांक' म्हणतात.

आता आपण मध्य आणि मध्यांक यांच्याकडे एका वेगळ्या दृष्टीकोनातून पाहूया आणि माहिती बदलल्यावर मध्य कसा बदलतो याचा अभ्यास करुया.

? कोणत्याही 2 संख्या घ्या. त्यांचा सरासरी/मध्य शोधा. इतर जोड्या घेऊन ही कृती पुन्हा करा. तुम्हाला काय दिसून येते? उदाहरणार्थ, समजा 3 आणि 7 या दोन संख्या आहेत. त्यांची सरासरी /मध्य = $\frac{3+7}{2} = 5$ दुसरी जोडी 8 आणि 9 या संख्यांची जोडी घेऊया.

त्यांची सरासरी = $\frac{8+9}{2} = 8.5$ आहे. यांना बिंदू आलेख म्हणून पाहिल्यास आपल्याला मिळते.

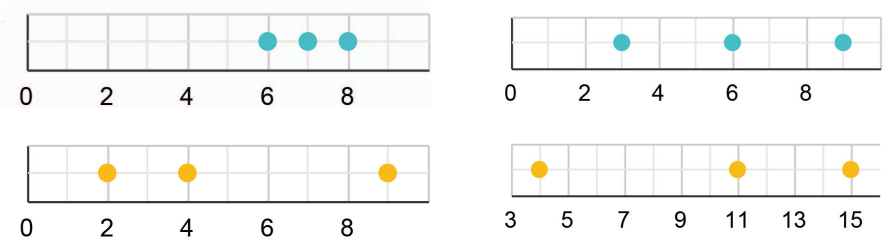


मध्य = 5

लक्षात घ्या की, मध्य हे दोन संख्यामधील अगदी अर्ध्या अंतरावर आहे.

आपण आधी शिकलो आहोत की अंकगणितीय मध्य हे मध्यवर्ती प्रवृत्तीचे परिमाण (मोजमाप) आहे आणि ते माहितीचे 'केंद्र' दर्शविते. 3 संख्यांच्या बाबतीत मध्य 'केंद्र' कसे दर्शवितात ते पाहूया.

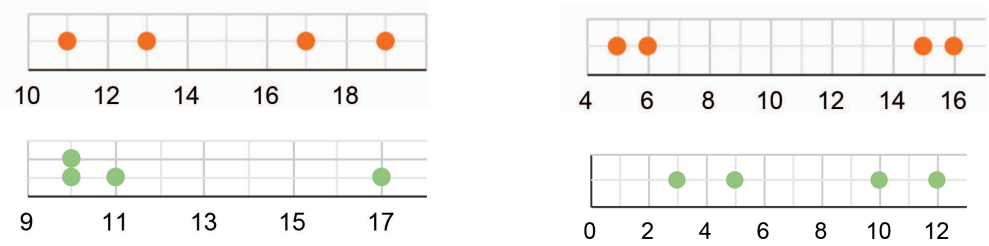
? खालील प्रत्येक माहिती संग्रहाचा मध्य काढा आणि ते चिन्हांकित करा.



? तुम्ही स्पष्ट करू शकता का की, 'मध्य' हा प्रत्येक संग्रहाचा केंद्रबिंदू कसा असतो?

गणिती बोल

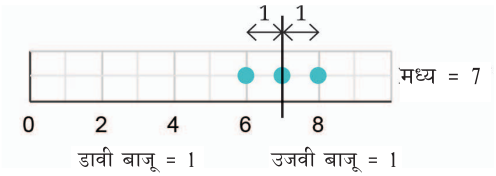
? खालील संग्रहांसाठी मध्य चिन्हांकित करा.

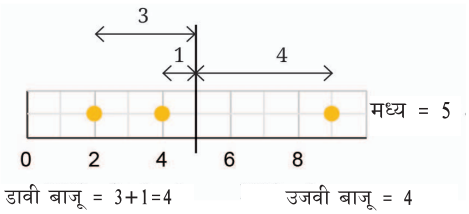


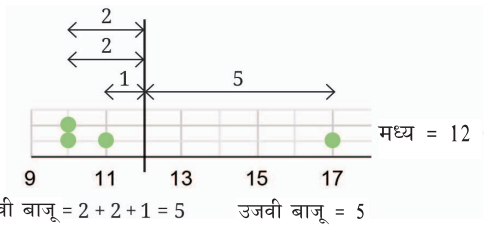
? तुम्ही स्पष्ट करू शकता का की, 'मध्य' हा प्रत्येक संग्रहाचा केंद्रबिंदू कसा असतो?

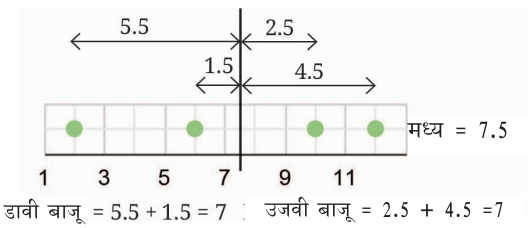
गणिती बोल

माहितीच्या दोन टोकांचा/शेवटच्या बिंदूचा मध्य आहे का? हे नेहमीच खरे नसते. त्याऐवजी मध्याच्या दोन्ही बाजूंकडील एकूण अंतरे सारखीच असतात. हे खालील बिंदू आलेखाद्वारे स्पष्ट केले आहे.









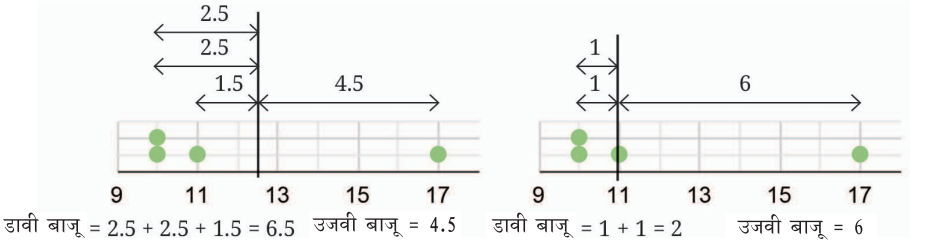
? आधी दर्शविलेल्या सर्व माहिती संग्रहांसाठी हे लागू होते का हे पडताळून पहा.

? असे एकापेक्षा जास्त 'केंद्र' असू शकतात का? दुसऱ्या शब्दांत ज्यासाठी सापेक्ष लहान असलेल्या संख्यांच्या अंतरांची बेरीज आणि त्यापेक्षा मोठ्या असलेल्या संख्यांच्या अंतरांची बेरीज अजूनही समान असेल अशी कोणतीही दुसरी मूल्ये आहेत का?

? 10, 10, 11 आणि 17 या संग्रहाच्या बाबतीतील घटना ज्यांचा मध्य 12 आहे; समजा 12 पेक्षा की, तेथे जास्त वेगळा केंद्रबिंदू आहे.

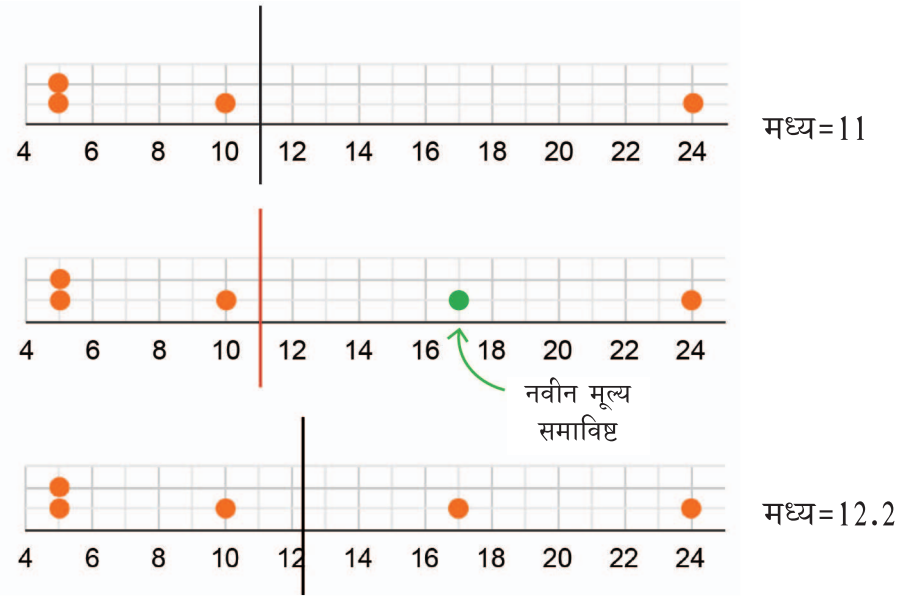
स्पष्टपणे, डावीकडील (LHS) सर्व अंतरे वाढतील आणि उजवी कडील (RHS) अंतरे कमी होतील. त्यामुळे तो आता केंद्र राहणार नाही, त्याचप्रमाणे 12 पेक्षा लहान कोणत्याही मूल्यासाठी डावीकडील अंतरे कमी होतील तर उजवीकडील अंतरे वाढतील.

ही दोन्ही उदाहरणे खालील आकृतीमध्ये स्पष्ट केलेली आहेत. म्हणून त्यांना फक्त एकच केंद्र आहे.



? माहितीमध्ये नवीन मूल्ये समाविष्ट केल्यास मध्य वाढेल की कमी होईल?

जेव्हा मध्यापेक्षा मोठे असलेल्या नवीन मूल्याचा समावेश केला जातो तेव्हा डाव्या बाजूच्या आणि उजव्या बाजूच्या अंतराची बेरीज संतुलित राखण्यासाठी मध्य वाढतो, जसे खाली स्पष्ट केले आहे.



त्याचप्रमाणे, जर मध्यापेक्षा लहान मूल्याचा समावेश केला जात असेल तर पूर्वीपेक्षा नवीन मध्य कमी होईल.

? जेव्हा एखादे अस्तित्वात असलेले मूल्य काढून टाकले जाते तेव्हा मध्यचे काय होते? मध्य कधी वाढेल, कधी कमी होईल किंवा कधी तोच राहील?

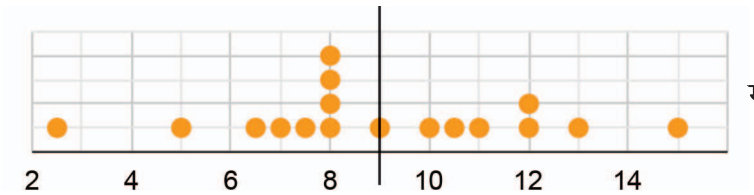
गणिती बोल

? जर मध्याच्या बरोबरीचे मूल्य समाविष्ट केले किंवा काढून टाकले तर मध्याचे काय होईल? मागील वर्षी आपण अभ्यासलेल्या 'समान वाटप' या मध्याच्या व्याख्येचा वापर करून हे स्पष्ट करण्याचा प्रयत्न करा.

न बदलणारा मध्य (Unchanging Mean)

एखाद्या मूल्याचा समावेश केल्यावर किंवा काढून टाकल्यावर मध्य कसा बदलतो हे आपण आधी पाहिले आहे.

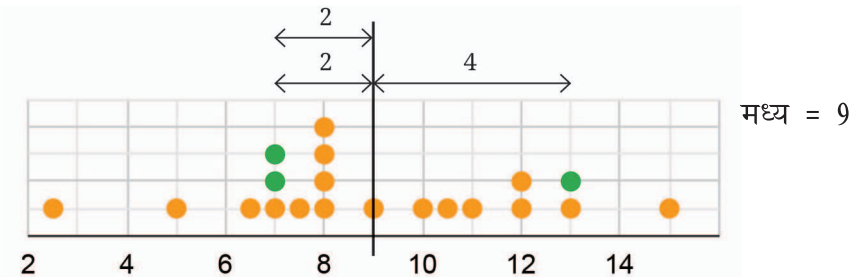
? संख्या समाविष्ट केल्यावर किंवा काढून टाकल्यावर मध्य बदलणार नाही. असे करणे शक्य आहे का? याचा शोध घ्या प्रयोग करण्यासाठी तुम्ही खालील माहिती वापरू शकता.



? मध्य न बदलता 3 संख्या समाविष्ट करणे किंवा काढून टाकणे याबद्दल काय सांगाल? हे शक्य आहे का?

? आपण अशा 2 संख्या समाविष्ट करू शकतो का ज्या मध्यापेक्षा लहान आहेत आणि 1 संख्या मध्य पेक्षा मोठी आहे, जेणेकरून मध्य समान राहील?

यातील एक शक्यता येथे दर्शविली आहे.



? मध्यापेक्षा मोठ्या 2 संख्या आणि मध्यापेक्षा लहान 1 संख्या समाविष्ट करण्याचा प्रयत्न करा, जेणेकरून मध्य समान राहील.

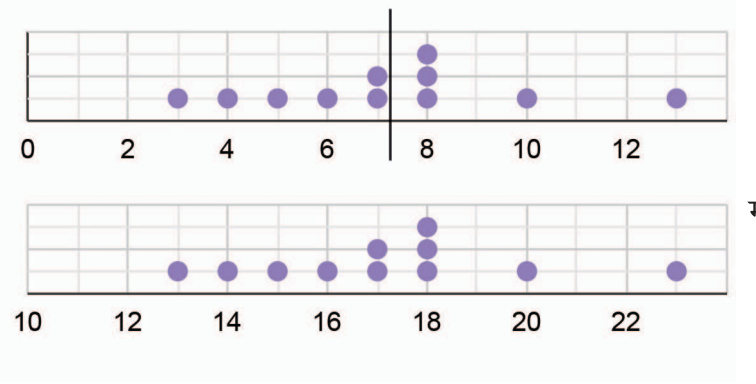
सापेक्षपणे न बदलणारी (Relatively Unchanged)

? आपण पाहिले की जेव्हा संग्रहात संख्या समाविष्ट केल्या जातात किंवा काढून टाकल्या जातात तेव्हा मध्य/सरासरी चे काय होते. जर संग्रहातील प्रत्येक संख्या एका ठराविक अंकाने वाढविली, तर मध्याचे काय होईल?

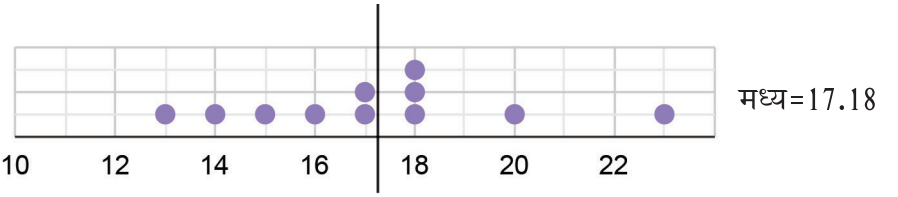
? खालील माहितीचा विचार करा: 8, 3, 10, 13, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 5. यांचा मध्य काढा.

? आता प्रत्येक संख्या 10 ने वाढविलेल्या या माहितीचा विचार करा: 10: 18, 13, 20, 23, 14, 16, 17, 17, 18, 18, 15. यांचा मध्य किती आहे? हे शोधण्याचा जलद मार्ग आहे का?

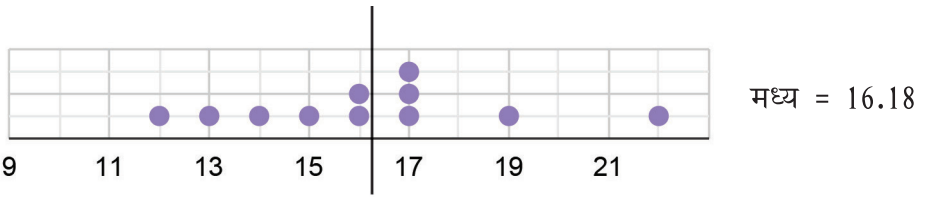
(**सूचना:** खालील दोन माहिती संग्रहांच्या बिंदू-आलेखांचे निरीक्षण करा.)



नवीन संग्रहाचा मध्य देखील 10 ने वाढतो. लक्षात घ्या की मध्याचे सापेक्ष स्थान सारखेच राहते.



जर आपण प्रत्येक मूल्य 1 ने कमी केले, तर आपल्याला खालील बिंदू आलेख मिळतो.



हे बीजगणिताच्या सहाय्याने स्पष्ट केले जाऊ शकते.

समजा की, संग्रहात n मूल्ये आहेत. ती मूल्ये, $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ दर्शविली आहेत असे मानू. तर त्यांची सरासरी/मध्य खालीलप्रमाणे दिला जातो.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = a$$

जेव्हा संग्रहातील प्रत्येक मूल्यात एक ठराविक संख्या, उदाहरणार्थ, 3 मिळविली जाते, तेव्हा नवीन मध्य,

$$\frac{(x_1 + 3) + (x_2 + 3) + (x_3 + 3) + \ldots + (x_n + 3)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + 3n}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} + \frac{3n}{n}$$

$$= a + 3$$

म्हणजेच नवीन मध्य हा मागील मध्यापेक्षा 3ने जास्त आहे.

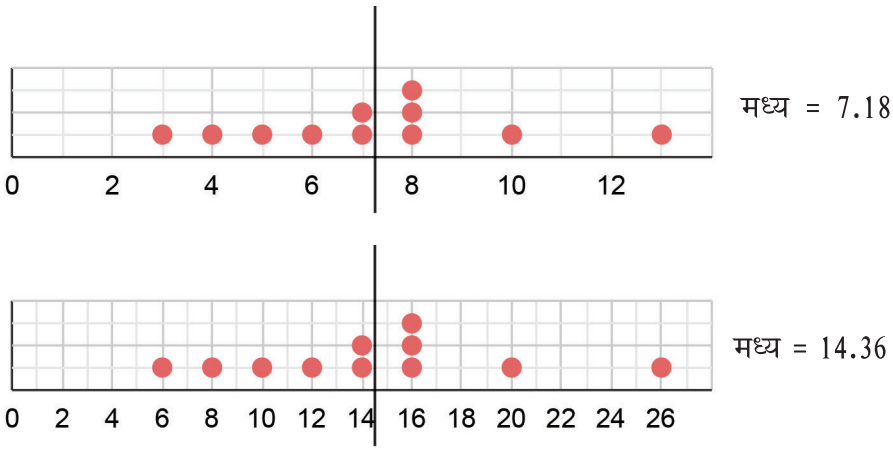
? जेव्हा संग्रहातील प्रत्येक मूल्यातून एक ठराविक संख्या, उदा. 2 वजा केली जाते, तेव्हा मध्य काय असेल हे बीजगणिताचा वापर करून स्पष्ट करण्याचा प्रयत्न करा.

प्रयत्न करा

? मागील वर्षी तुम्ही शिकलेल्या मध्यच्या 'समान वाटणी' या संकल्पनेचा वापर करून हे स्पष्ट करण्याचा प्रयत्न करा.

? जर संग्रहातील प्रत्येक मूल्य दुप्पट केले तर मध्याचे काय होईल?

तुमचा अंदाज असेल की मध्य देखील दुप्पट होईल. आपण आधी पाहिलेल्या माहितीचे एक उदाहरण खाली दिले आहे.



आपण पाहू शकतो की मध्य दुप्पट झाला आहे. चला आपण बीजगणिताचा वापर करून हे सिद्ध करूया. समजा संग्रहामध्ये n मूल्ये आहेत. ती मुल्ये $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ने दर्शवूया तर त्यांची सरासरी आहे.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = a$$

जेव्हा संग्रहातील प्रत्येक मूल्याला एका ठराविक संस्थेने उदाहरणार्थ 5 ने गुणले जाते, तेव्हा नवीन मध्य होतो.

$$\frac{(5x_1) + (5x_2) + (5x_3) + \ldots + (5x_n)}{n}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)}{n} \times 5. \text{(वितरण गुणधर्म वापरुन)}$$

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) \times 5}{n}$$

$$= 5a$$

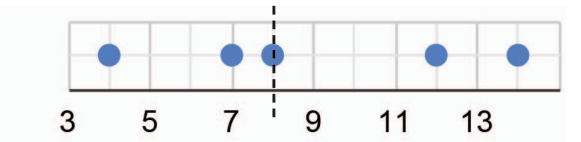
म्हणजेच, नवीन मध्य मागील मध्यापेक्षा 5 पट जास्त आहे.

मध्यांकासोबत प्रयोग (Tinkering Median)

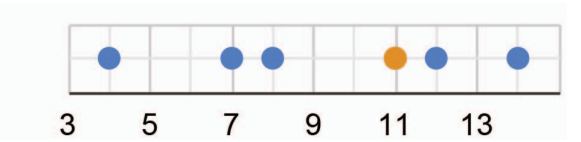
आम्हाला माहित आहे की मध्यांक हे क्रमवार लावलेल्या माहितीमधील मधले मूल्य असते त्यापेक्षा कमी आणि जास्त मूल्यांची संख्या समान असते.

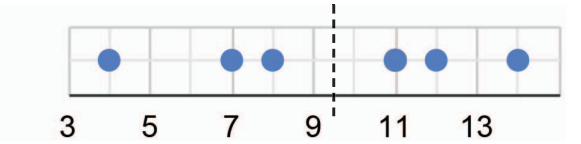
? माहितीमध्ये नवीन मूल्य समाविष्ट केल्याने मध्यांक वाढेल की कमी होईल?

चला, खालील माहितीचा विचार करूया. या माहितीचा मध्यांक 8 आहे?



मध्यांक = 8



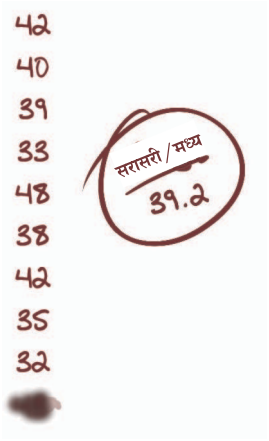


मध्यांक = 9.5

समजा की आपण 11 या मूल्याचा समावेश केला आहे. समावेश केलेले हे (नवीन मूल्य पूर्वीच्या त्यामधील) मध्यांकापेक्षा मोठे 8 असू शकत नाही. म्हणून मध्यांक देखील वाढेल. आता मध्यांक हा दोन मध्यम मूल्ये 8 आणि 11 चा मध्य आहे तो 9.5 असेल.

आपण असाच युक्तिवाद करू शकतो की जेव्हा मध्यांकापेक्षा कमी मूल्य समाविष्ट केले जाते तेव्हा मध्यांक कमी होईल.

अज्ञात शोधणे (Finding the Unknown)



? प्रशिक्षक बलवान यांनी कुस्तीपटूच्या वजनांची नोंद केली आणि खाली दाखविल्याप्रमाणे मध्य काढले. परंतु त्यांनी लिहिलेली एक संख्या पुसट झाली. तुम्ही ती पुसट झालेली संख्या शोधू शकता का?

$$\text{खेळाडूंचे सरासरी वजन} = \frac{\text{सर्व खेळाडूंच्या वजनांची बेरीज}}{\text{खेळाडूंची संख्या}}$$

समजा अज्ञात वजन w किलो आहे.

$$= \frac{42 + 40 + 39 + 33 + 48 + 38 + 42 + 35 + 32 + w}{10} = 39.2$$

याला सरळरुप दिल्यानंतर आपल्याला मिळते,

$349 + w = 392,$

$w = 392 - 349 = 43$

पुसट झालेली संख्या 43 किलो आहे.



? व्यंकय्या त्याच्या शेतातील नारळाच्या उत्पन्नांची नोंद ठेवतो. तो प्रति झाड सरासरी उत्पन्न 25.6 काढतो. त्याचा मुलगा मोजणीची पडताळणी करतो आणि त्याला आढळते की एका झाडाच्या उत्पन्नांची नोंद प्रत्यक्ष संख्येपेक्षा 3 ने जास्त आहे. जर झाडांची संख्या 15 असेल तर तुम्ही योग्य सरासरी शोधू शकता का?

$$\text{प्रति झाड सरासरी उत्पन्न} = \frac{\text{काढलेल्या नारळांची एकूण संख्या}}{\text{झाडांची संख्या}}$$

प्रति झाडांच्या उत्पन्नाची माहिती दिलेली नाही.

? तरीसुद्धा, आपण काढलेल्या नारळांची एकूण संख्या शोधू शकतो का? समजा, काढलेल्या नारळांची संख्या z मानू, दिलेल्या माहितीनुसार, सुरूवातीला

$$25.6 = \frac{z}{15},$$

सरळरूप दिल्यास, $z = 25.6 \times 15 = 384$

सुरूवातीला मोजलेली नारळ काढलेली एकूण संख्या 384 आहे.

आपल्याला माहित आहे की एका झाडाची मोजणी प्रत्यक्ष संख्येपेक्षा 3 ने जास्त आहे. म्हणून प्रत्यक्ष एकूण उत्पन्न 384-3=381 आहे.

योग्य सरासरी उत्पन्न = $\frac{381}{15}$ = 25.4 आहे.

वारंवारतेसह मध्य आणि मध्यांक (Mean and Median with Frequencies)

? तुमच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या कुटुंबाच्या सदस्यांची सरासरी किती आहे? तुम्ही ते कसे शोधाल?

आपण प्रत्येक विद्यार्थ्यांच्या कुटुंबात किती सदस्य आहेत याची माहिती गोळा करू शकतो, त्यांची बेरीज करू शकतो आणि त्याला विद्यार्थ्यांच्या संख्येने भागू शकतो. एका वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या कुटुंबांच्या आकाराची माहिती येथे तक्त्यामध्ये दर्शविली आहे.

संख्या	वारंवारता
3	3
4	11
5	9
6	7
7	3
8	1
9	1
10	1

? या वर्गाच्या कुटुंबाच्या सदस्यांची सरासरी किती आहे?

तुमच्यापैकी कांहीना वाटले असेल की ते ''सोपे आहे! हे असे असेल''.

$\frac{3+4+5+6+7+8+9+10}{8} = \frac{52}{8} = 6.5$."

लक्षात ठेवा की सरासरी काढताना माहितीमधील सर्व मूल्यांची बेरीज करणे आवश्यक असते. '3' हा अंक तीन वेळा येतो, '4' हा अंक अकरा वेळा येतो आणि असेच पुढे. हे तुमच्या गणनेत हे दिसून येते का?

आपल्याला माहित आहे की सरासरी = $\frac{\text{माहितीतील सर्व मूल्यांची बेरीज}}{\text{माहितीतील मुल्यांची संख्या}}$

प्रत्येक मूल्याच्या वारंवारतेचा विचार करता, सरासरी अशी असेल.

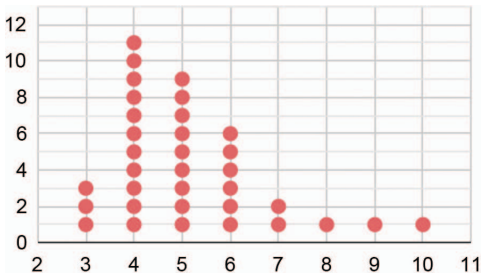
$$\frac{(3\times3)+(4\times11)+(5\times9)+(6\times7)+(7\times3)+(8\times1)+(9\times1)+(10\times1)}{3+11+9+7+3+1+1+1}$$

$$= \frac{9+44+45+42+21+8+9+10}{36}$$

$$= \frac{188}{36} = 5.22$$

या वर्गाच्या कुटुंबांच्या सदस्याचा सरासरी आकार 5.22 आहे.

या वर्गाच्या कुटुंबाच्या सदस्याचा मध्यांक किती आहे?



आपल्याला माहित आहे की, माहितीमध्ये एकूण 36 मूल्ये आहेत. जेव्हा माहिती क्रमाने लावली जाते, तेव्हा मध्यांक ही 18 व्या आणि 19 व्या मूल्यांची सरासरी असेल.

आपल्याला सर्व 36 संख्या क्रमाने लिहिण्याची गरज आहे का? हे शोधण्याचा कांही जलद मार्ग आहे का?

आपण वारंवारता दिलेल्या तक्त्याचा वापर करू शकतो. जोपर्यंत आपण 18 आणि 19 पर्यंत पोहोचत नाही, तो पर्यंत आम्ही लहानापासून मोठ्या मूल्याकडे त्यांची बेरीज करत राहू.

संख्या	3	4	5	6	7	8	9	10
वारंवारता	3	11	9	7	3	1	1	1

3 आणि 4 च्या वारंवारतेची बेरीज केल्यास आपल्याला 3+11=14 मिळते. याचा अर्थ असा की जेव्हा माहिती क्रमाने मांडली जाते. तेव्हा 14 व्या स्थानावर असलेली संख्या 4 आहे. 3,4, आणि 5 च्या वारंवारतेची बेरीज केल्यास आपल्याला 3+11+9=23 मिळते. याचा अर्थ माहिती क्रमाने मांडल्यावर 23 व्या स्थानावर असलेली संख्या 5 आहे. आपण पाहू शकतो की 15 ते 23 व्या स्थानांवरील सर्व मूल्ये 5 आहेत. म्हणून या माहितीचा मध्यांक 5 आहे.

कोष्टकप्रणाली (Spreadsheets)

सुधाकर यांनी त्यांच्या इयत्ता 8वी च्या वर्गातील विद्यार्थ्यांनी सहामाही परीक्षेत मिळविलेले गुण खालील तक्त्यात मांडले आहेत.

नांव	ओडिया	तेलगू	इंग्रजी	गणित	समाज विज्ञान	विज्ञान
रत्ना	25	39	29	36	34	37
नागेश	41	43	48	39	40	39
अश्विन	29	31	33	34	30	28
फारुख	47	46	38	42	49	44
मृणाल	33	35	28	32	30	36
गौरी	27	29	34	31	32	30
पंकज	16	19	22	17	18	20
जया	31	38	40	50	43	46
गणेश	39	37	35	38	36	40
श्रावण	12	17	21	20	14	18

ऐश्वर्या	48	45	46	47	44	43
हरी	25	28	24	21	23	26
तृप्ती	29	36	30	33	27	33
वीरेश	23	25	28	31	19	22
विद्या	34	36	37	40	32	34
संस्कृती	35	42	41	46	38	40
शंकर	42	45	39	36	31	39
वैष्णवी	37	32	29	33	31	35
गोविंद	15	18	12	20	20	18
शिवा	29	24	32	34	28	30
तरूण	41	44	39	43	37	42
ज्योती	29	30	33	28	34	29

सुधाकरला प्रत्येक विद्यार्थ्याने मिळविलेले एकूण गुण मोजायचे आहेत. त्याला प्रत्येक विषयातील सरासरी गुणांची माहिती जाणून घेण्यात रस आहे. पण तिथे खूप संख्या आहेत. हे काम पूर्ण करण्यासाठी त्याला खूप वेळ आणि मेहनत घ्यावी लागेल. अर्थात कामाचा वेग वाढविण्यासाठी तो गणनयंत्र वापरू शकतो.

ही प्रक्रिया अधिक जलद करण्याचा कांही मार्ग आहे का? एक मार्ग म्हणजे संगणकाचा वापर करणे. संगणकामध्ये विविध अनुप्रयोग/(ॲप)/साधने असतात ज्यांचा वापर कामे पूर्ण करण्यासाठी केला जाऊ शकतो. असाच एक अनुप्रयोग (ॲप) म्हणजे कोष्टकप्रणाली. हे पंक्ती (Rows) आणि स्तंभ (columns) असलेले डिजिटल नोटबुक सारखे असते, ज्यामध्ये कक्ष (cells) नांवाचे लहान बॉक्स असतात. प्रत्येक कक्षामध्ये आपण मजकूर किंवा संख्या टाईप करू शकतो. खालील चित्र एका कोष्टकाचा नमुना दर्शविते जिथे सुधाकरने त्याच्या वर्गातील गुणांची माहिती भरली आहे. पुढे जाण्यापूर्वी संगणक वापरण्याचा प्रयन करा.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**नांव**	**ओडिया (R1)**	**तेलगू (R2)**	**इंग्रजी**	**गणित**	**समाज विज्ञान**	**विज्ञान**	**एकूण**
2	रत्ना	25	39	29	36	34	37	
3	नागेश	41	43	48	39	40	39	
4	अश्विन	29	31	33	34	30	28	
5	फारुख	47	46	38	49	49	44	
6	मृणाल	33	35	28	30	30	36	
7	गौरी	27	29	34	32	32	30	
8	पंकज	16	19	22	18	20	20	

सरासरी गुण आणि एकूण गुण कसे काढायचे हे शिकण्यापूर्वी, प्रथम कोष्टकाची रचना आणि ती कशी वाचायची हे समजून घेऊया.

(?) फारूखला गणितात मिळालेले गुण कोणत्या कक्षामध्ये आहेत हे तुम्ही सांगू शकता का?

कक्षांना स्तंभ (A, B, C, ...) आणि पंक्ती (1,2,3,...) वापरून नांवे दिली जातात. फारूखचे गणितातील गुण E5 या कक्षामध्ये आहेत.

(?) कक्ष B7 मध्ये कोणती माहिती आहे, हे तुम्ही सांगू शकता का?

(?) अश्विनला कोणत्या विषयांत 30 पेक्षा जास्त गुण मिळाले आहेत?

एकूण बेरीज आणि सरासरी लवकर मोजण्यासाठी आपण कोष्टकचा वापर कसा करू शकतो? मजकूर आणि संख्यांव्यतिरिक्त, आपण कक्षामध्ये सूत्रे देखील लिहू शकतो. आपण पंक्ती किंवा स्तंभातील संख्यांची बेरीज किंवा सरासरी मोजणारे सूत्र लिहू शकतो.

आपण कक्षाच्या ओळीचे वर्णन करुन सुरूवात : शेवट या स्वरूपात करू शकतो. उदाहरणार्थ, नागेशचे गुण B3:G3 या स्वरूपात दर्शविले आहेत, तर गौरीचे ओडीया, तेलगू आणि इंग्रजीमधील गुण B7:D7 या स्वरूपात दर्शविले आहेत. आपण स्तंभांचे वर्णन करण्यासाठी देखील असेच वापरू शकतो. उदाहरणार्थ, D2:D6 हे पहिल्या पाच विद्यार्थ्यांचे इंग्रजी विषयातील गुण दर्शविते.

त्यानंतर आपण बेरीज किंवा सरासरी मोजण्यासाठी सूत्र लिहू शकतो. उदाहरणार्थ, = SUM (B3:G3) / बेरीज, नागेशचे सर्व विषयांचे एकूण गुण मोजते, तर = AVERAGE/सरासरी (B7:D7) गौरीचे ओडीया, तेलगू आणि इंग्रजीमधील सरासरी गुण मोजते.

H3 ▾ | f_x =SUM(B3:G3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**नांव**	**ओडिया (R1)**	**तेलगू (R2)**	**इंग्रजी**	**गणित**	**समाज विज्ञान**	**विज्ञान**	**एकूण**
2	रत्ना	25	39	29	36	34	37	250 ×
3	नागेश	41	43	48	39	40	39	=SUM(B3:G3)
4	अश्विन	29	31	33	34	30	28	
5	फारुख	47	46	38	49	49	44	
6	मृणाल	33	35	28	30	30	36	
7	गौरी	27	29	34	32	32	30	
8	पंकज	16	19	22	18	20	20	

(?) विज्ञान विषयातील वर्गाची सरासरी गुण काढण्यासाठी तुम्ही कोणते सूत्र टाईप कराल?

(?) ओडिया भाषेतील वर्गाचे सरासरी गुण हे तेलगू भाषेमधील सरासरी गुणांपेक्षा जास्त आहेत का ते शोधा.

(?) शेवटच्या पंक्तीनंतर योग्य सूत्रे टाईप करून इतर विषयांचे सरासरी गुण दाखवा. हे संगणकावर करून पहा. तुम्ही या QR कोडवरून तक्त्या/टेबलमधील माहिती डाउनलोड करू शकता.

? योग्य सूत्रे टाईप करून प्रत्येक विद्यार्थ्याचे एकूण गुण मिळवा.

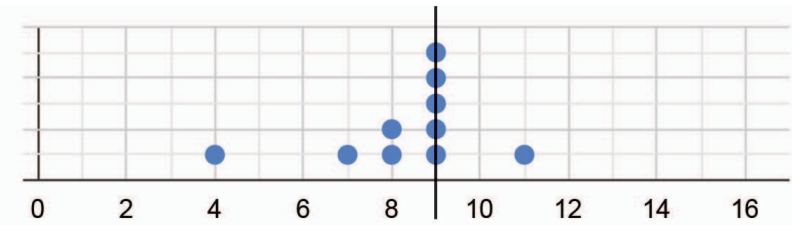
शिक्षकांसाठी सूचना: तुम्ही मायक्रोसॉफ्ट एक्सेल (Microsoft Excel), गुगल शीटस (Google Sheets), लिब्रे ऑफिस कॅल्क (Libre Office Calc,) यासारखे कोणतेही कोष्टक सॉफ्टवेअर वापरुन करु शकता. प्रत्येक विद्यार्थ्यासाठी पुरेसे संगणक नसल्यास, विद्यार्थी गटात संगणक शेअर करू शकतात. ते शक्य नसल्यास फक्त एकच संगणक उपलब्ध असल्यास संगणकाची स्क्रीन संपूर्ण वर्गाला प्रोजेक्टवर दाखविता येईल.

गणिती बोल

? शोधा पाहू. (Figure it out)

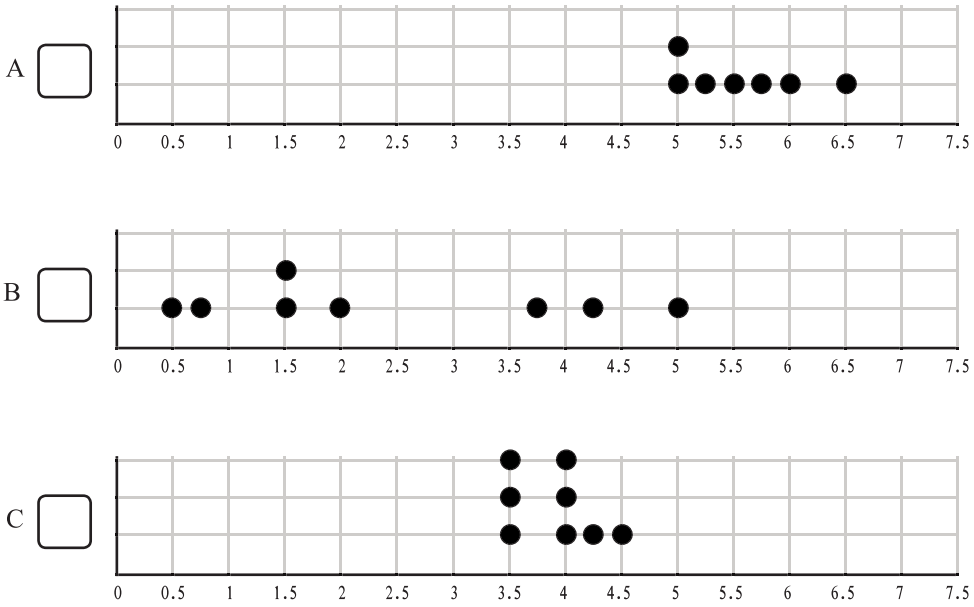
1. खालील माहितीचा मध्य काढा आणि तुमची निरीक्षणे नोंदवा.
   i) पहिल्या 50 नैसर्गिक संख्या.
   ii) पहिल्या 50 विषम संख्या.
   iii) 4च्या पटीतील पहिल्या 50 संख्या.

2. खालील बिंदू आलेख माहितीचा संग्रह आणि त्याची सरासरी दर्शवितो; पण एक बिंदू गहाळ आहे. गहाळ मूल्य अशा प्रकारे चिन्हांकीत करा की, जेणेकरून मध्य 9 होईल (खाली दाखविल्याप्रमाणे)



3. सुधाकर हे वर्गशिक्षक आहेत. ते श्रेयसला त्यांच्या वर्गातील 24 विद्यार्थ्याची उंची मोजायला आणि सरासरी उंची काढण्यास सांगतात. श्रेयस शिक्षकांना सांगतो की सरासरी उंची 150.2 सें.मी. आहे. सुधाकर यांना नंतर समजते की जेव्हा उंची मोजली गेली, तेव्हा विद्यार्थ्यांनी गणवेशाचे बूट घातले होते आणि त्या बूटांमुळे उंचीमध्ये 1 सें.मी. ची वाढ झाली आहे.
   i) योग्य/अचूक सरासरी उंची सोधण्यासाठी शिक्षकांनी पुन्हा सर्व विद्यार्थ्याची उंची बूट न घालता मोजावीत का? की कांही सोपी पद्धत आहे का?
   ii) वर्गाची सरासरी उंची किती आहे?
   a) 174.2 सें.मी. b) 126.2 सें.मी. c) 150.2 सें.मी.
   d) 149.2 सें.मी. e) 151.2सें.मी. f) वरीलपैकी कोणतेही नाही
   g) अपुरी माहिती

4. खालील तीन बिंदूंच्या आलेखामध्ये वेगवेगळ्या अल्बममधील गाण्यांची लांबी (मिनिटात) दर्शवितात. यापैकी कोणाची सरासरी/मध्य 5.57 मिनिटे आहे? तुम्ही उत्तरापर्यंत कसे पोहोचलात हे स्पष्ट करा.



5. 8, 10, 19, 23, 26, 34, 40, 41, 41, 48, 51, 55, 70, 84, 91, 92, या संख्यांचा मध्यांक काढा.

गणिती बोल

i) जर आपण दिलेल्या यादीत आणखी एक संख्या मिळविली, ज्यामुळे मध्यांक बदलणार नाही, तर ती संख्या कोणती असू शकते?

ii) जर आपण दिलेल्या माहितीमध्ये दोन संख्या मिळविल्या, ज्यामुळे मध्यांक बदलणार नाही तर त्या दोन संख्या कोणत्या असू शकतात?

iii) जर आपण दिलेल्या माहितीमधून एक संख्या काढून टाकली, त्यामुळे मध्यांक बदलणार नाही, तर ती संख्या कोणती असू शकते?

6. खालील विधाने तपासून पहा आणि ती विधाने 'नेहमी सत्य' 'कधी कधी सत्य' किंवा 'कधीही सत्य नाही' आहेत का ते सिद्ध करा.

i) मध्यांकापेक्षा लहान असलेली संख्या काढून टाकल्यास मध्यांक कमी होईल का?

ii) मध्यापेक्षा लहान असलेली संख्या समाविष्ट केल्यास मध्य कमी होईल का?

iii) कोणत्याही 4 संख्या समाविष्ट केल्यास मध्यांकावर कोणताही परिणाम होणार नाही?

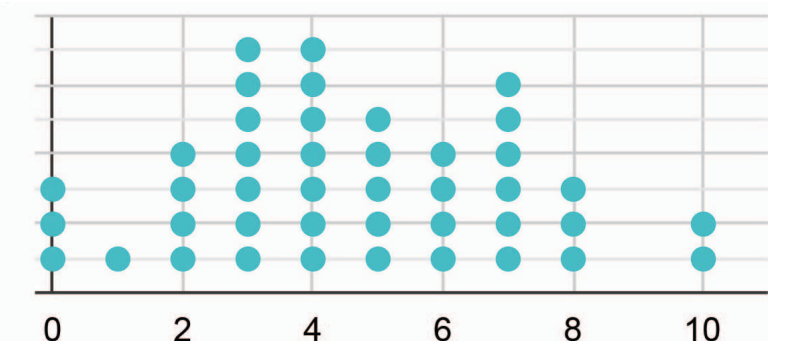
iv) मध्यांकापेक्षा लहान असलेल्या 4 संख्या समाविष्ट केल्यास मध्यांक वाढेल का?

7. 8, 13, 10, 4, 5, 20, y, 10 या संख्यांचा मध्य 10.375 आहे. तर y ची किंमत शोधा.

8. 15 संख्या असलेल्या एका माहितीच्या संचाचा मध्य 134 आहे. तर त्या माहितीची एकूण बेरीज शोधा.

9. दिलेल्या माहितीचा विचार करा. 12, 47, 8, 73, 18, 35, 39, 8, 29, 25, P. जर या माहितीचा मध्यांक 29 असेल तर खालीलपैकी कोणती संख्या P असू शकते?
(i) 10 (ii) 25 (iii) 40 (iv) 100
(v) 29 (vi) 47 (vii) 30

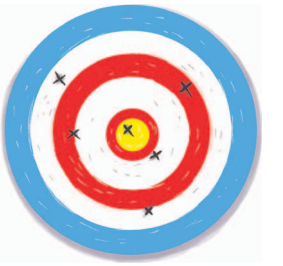
10. विद्यार्थ्यांनी एका आठवड्यात किती वेळा सायकल चालविली आहे हे खालील बिंदू आलेखामध्ये दर्शविलेले आहे. त्या आठवड्यात चार विद्यार्थ्यांनी दोनदा सायकल चालविली आहे.



(i) विद्यार्थ्यांनी सायकल चालविल्याच्या संख्येचा सरासरी/मध्य काढा.
(ii) विद्यार्थ्यांनी सायकल चालविलेल्या संख्येचा मध्यांक काढा.
(iii) खालीलपैकी कोणते विधाने बरोबर आहेत? का?

a) प्रत्येकाने किमान एकदा तरी त्यांची सायकल वापरली आहे.
b) जवळपास प्रत्येकाने कांही वेळा सायकल वापरली आहे.
c) कांही विद्यार्थी असे आहेत जे कांही दिवसांत एकापेक्षा जास्त वेळा सायकल चालवितात.
d) अगदी 5 विद्यार्थ्यांनी कांही दिवसांत एकापेक्षा जास्त वेळा त्यांच्या सायकलचा वापर केला आहे.
e) पुढील आठवड्यात, जर या सर्वांनी मागील आठवड्यापेक्षा 1 वेळा अधिक सायकल चालविली असेल तर पुढच्या आठवड्यातील माहितीचा सरासरी/मध्य आणि मध्यांक किती असेल?

11. एका शाळेत बाण मारण्याची स्पर्धा आयोजित करण्यात आली होती. स्पर्धकांनी मध्यवर्ती वर्तुळ (bull's eye) वर अचूक निशाणा साधण्यासाठी घेतलेल्या प्रयत्नांची संख्या खालील तक्त्यामध्ये दिली आहे. किमान, कमाल, मध्य आणि मध्यांक वापरून माहितीचे वर्णन करा.

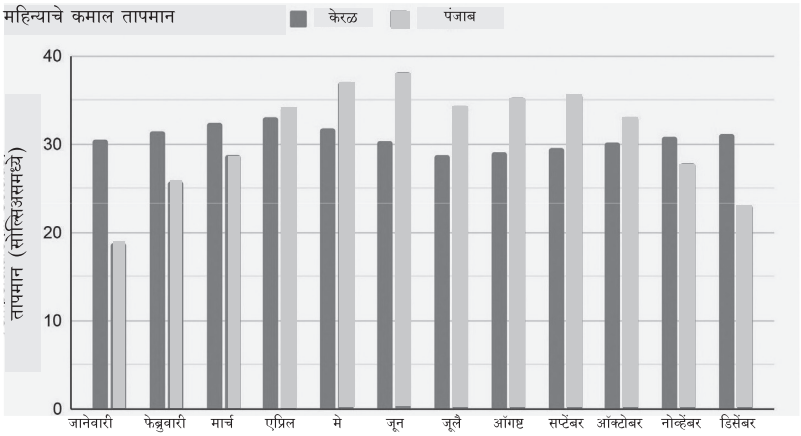


प्रयत्नांची संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थ्यांची संख्या	1	0	0	1	4	9	12	15	10	10

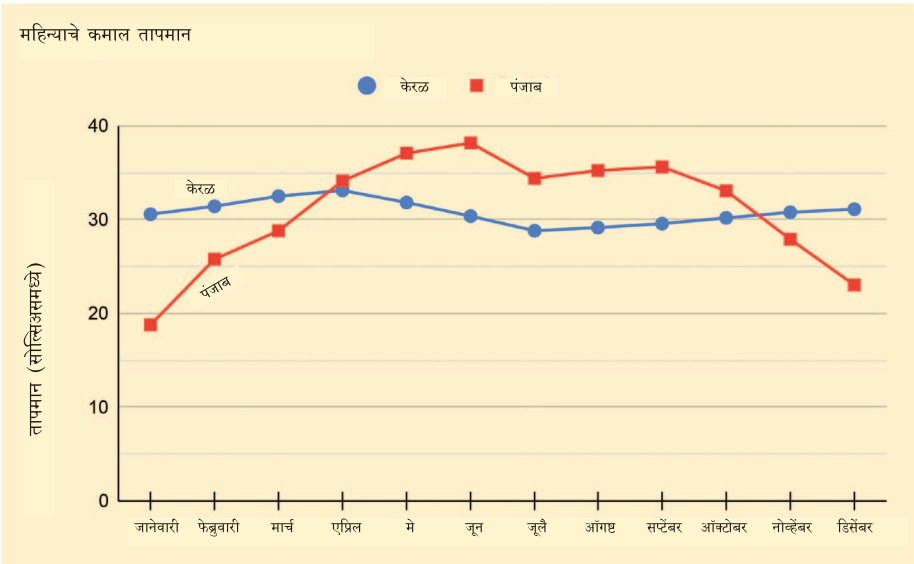
5.2. माहितीचे दृश्थीकरण आणि विश्लेषण (Visualizing and Interpreting Data)

आतापर्यंत आपण चित्रालेख, स्तंभालेख, जोड स्तंभालेख आणि बिंदू-आलेख कसे वाचायचे आणि कसे रचायचे हे शिकलो आहोत. आता आपण माहिती दृश्यमान करण्याच्या आणखी कांही पध्दती पाहू.

खालील आकृती मध्ये एक जोड स्तंभालेख आहे. जो 2023 मधील केरळ आणि पंजाबमधील मासिक कमाल तापमान दर्शवितो.



? आता खालील आलेखाचे निरीक्षण करा. हे दोन्ही आलेख सारखीच माहिती दर्शवितात का?



अशाप्रकारे रेषांनी बनलेल्या आलेखाला आपण रेषा आलेख म्हणतात. रेषालेख सामान्यत: वेळेनुसार बदलत जाणाऱ्या माहितीचे सादरीकरण करण्यासाठी वापरले जातात.

(?) एका राज्याचे एका महिन्यातील आपल्याला कमाल तापमान कसे मिळते?

राज्यामध्ये कांही हवामान केंद्रे असू शकतात जी नियमितपणे स्थानिक तापमानाची नोंद ठेवतात. आपण राज्यात नोंदविलेल्या सर्व संस्थांपैकी सर्वाधिक संख्या शोधून 'मासिक कमाल तापमान' मिळवू शकतो.



जेव्हा आपण माहिती कशी गोळा केली जाते किंवा तयार केली जाते हे समजून घेण्याचा प्रयत्न करतो, तेव्हा आपल्याला त्यांच्या व्याप्तीबद्दल अधिक स्पष्ट कल्पना येते. आपण त्यांचा अधिक अर्थपूर्णपणे अर्थ लावू शकतो. हे आपल्याला माहितीतील त्रुटी, जसे की पूर्वग्रह किंवा गहाळ माहिती ओळखण्यास मदत करते आणि त्या माहितीवरून आपण किती आत्मविश्वासाने निष्कर्ष काढू शकतो हे ठरविण्यास मदत करते.

सादर केलेली माहिती ओळखण्यासाठी आणि त्यांचे विश्लेषण करण्यासाठी आपण दोन पायरीच्या प्रक्रियेचे अनुकरण करूया.

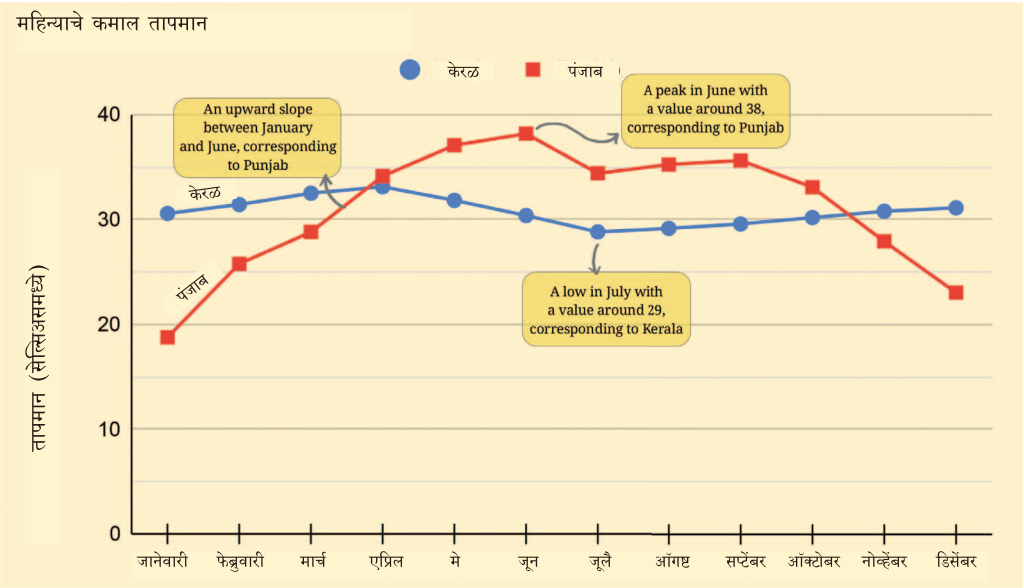
पायरी 1: काय दिले आहे ते ओळखणे : (Identify what is Given)

? आलेख कसा मांडला आहे. कोणते प्रमाण घेतले आहे आणि माहिती कोणते नमुने दर्शविते याकडे लक्ष द्या.

- एका शहराचा प्रत्येक महिन्यातील वेळेनुसार होणारा बदल दर्शविण्यासाठी तो रेषांनी चिन्हांकित केला आहे. केरळची माहिती निळ्या रंगाच्या गोलाकार चिन्हांनी आणि निळ्या रेषांनी दर्शविली आहे. तर पंजाबची माहिती लाल रंगाने दर्शविली आहे.

वेगवेगळ्या आकाराच्या खुणा आलेख ओळखण्यास मदत करतात, विशेषत: जर आलेख काळ्या, पांढऱ्या रंगात छापलेला असेल किंवा ज्या लोकांना रंग ओळखण्यात अडचण येते त्यांच्यासाठी हे उपयुक्त ठरते.

- आडवी रेषा वर्षाचे महिने दर्शविते. उभी रेषा सेल्सिअस (^{o}c) मधील तापमान दर्शविते.



पायरी 2: दिलेल्या माहितीवरून अनुमान काढणे आणि विश्लेषण करणे.

? तुम्ही केलेल्या प्रत्येक निरीक्षणाचे विश्लेषण करा आणि अनुमान काढा. योग्य सारांश/निष्कर्ष विधाने सांगा.

- पंजाबमध्ये जानेवारी ते जूनपर्यंत मासिक कमाल तापमान वाढत जाते आणि 38^0C च्या उच्चांकावर पोहोचते. त्यानंतर जुलैमध्ये ते 35^0C च्या थोड्या खाली येते, सप्टेंबरपर्यंत जवळजवळ स्थिर राहते आणि नंतर डिसेंबरपर्यंत सतत कमी होत जाते, जे सुमारे 23^0C पर्यंत पोहोचते. जानेवारीमध्ये मासिक कमाल तापमान सर्वात कमी म्हणजे सुमारे 19^0C असते.
- केरळचे थोडे वेगळे आहे. येथे तापमान वर्षभर जवळजवळ स्थिर राहते. एप्रिलमध्ये सुमारे 33^0C चा उच्चांक असतो आणि जुलैमध्ये सुमारे 29^0C चा निच्चांक असतो. लक्षात घ्या की केरळमध्ये उन्हाळा आणि हिंवाळा या दोन्ही ऋतूंमध्ये मासिक कमाल तापमान सारखेच असते!
- थोडक्यात केरळच्या तुलनेत पंजाबमशील तापमानात जास्त तफावत असते. तिथे जास्त थंडी आणि जास्त उष्णता दोन्ही अनुभवायला मिळतात.



यामुळे वेगवेगळ्या दिशांनी प्रश्न निर्माण होऊ शकतात, ज्यातील कांहींची उत्तरे माहिती वापरून देता येतात. विचार करण्यासाठी येथे कांही दिशा दिल्या आहेत.

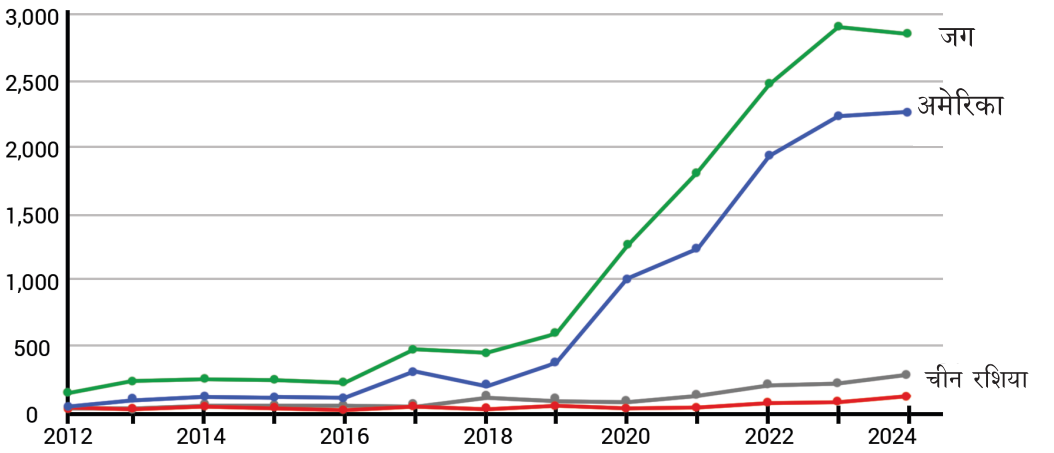
- या दोन राज्यांमधील कल (Trends) इतके वेगळे का आहेत? एखाद्या प्रदेशाचे तापमान ठरविणारे घटक कोणते आहेत?
- तुम्हाला इतर कांही राज्यांचे कल पाहण्याची उत्सुकता असेल. इतर राज्ये कोणत्या प्रकारचे कल दर्शवितात?
- कोणती राज्ये पंजाबसारखा कल दर्शवितात? या राज्यांमध्ये कांही साम्य आहे का?
- या राज्यांच्या किमान मासिक तापमानाचा आलेख कसा दिसेल?

? तुमच्या मनात कोणते विचार किंवा प्रश्न येतात?

गणिती बोल

अंतराळात गर्दी: भविष्यातील वाहतुकीची समस्या?
(Space Jam : Traffic Problem in the Future?)

अंतराळात सोडलेल्या वस्तूंच्या वार्षिक संख्येचा खालील रेषालेख पहा.
अंतराळात सोडलेल्या वस्तूंची वार्षिक संख्या पृथ्वीच्या कक्षेत किंवा त्यापलीकडे सोडलेले उपग्रह, प्रोब्स, लँडर्स, मानवरहित अंतराळयाने आणि अंतराळ स्थानकाचे घटक यांचा समावेश आहे.



स्त्रोत: *युनायटेड नेशन्स ऑफिस फॉर आउटर स्पेस अफेयर्स (2025)*

? ही माहिती मिळविण्यासाठी कोणती संभाव्य पध्दत वापरली असावी? चर्चा करा.

पायरी 1: काय दिले आहे ते ओळखा.

? आलेख कशा प्रकारे मांडला आहे, कोणते प्रमाण वापरले आहे आणि माहिती कोणते नमुने दर्शविते याकडे लक्ष द्या.

गणिती बोल

पायरी 2: दिलेल्या माहितीवरून निष्कर्ष / अनुमान काढा आणि विश्लेषण करा.

(?) तुम्ही केलेल्या प्रत्येक निरीक्षणाचे विश्लेषण करा आणि अर्थ लावा. सर्व अर्थ लाऊन झाल्यानंतर सारांश /निष्कर्ष काढणारी विधाने करता येतील.

- 2024 मध्ये जगभरातील संख्या सुमारे 2800 आहे तर 2023 मध्ये ती सुमारे 2900 होती. आपण असे म्हणू शकतो की 2023 मध्ये जगभरात सर्वाधिक वस्तू अंतराळात सोडल्या गेल्या. (2012 पूर्वीचा काल कमी होत होता असे गृहीत धरल्यास)
- तिन्ही देशांची बेरीज जगभरातील एकूण संख्येशी जुळत नाही. म्हणूनच आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की इतर देशांची आकडेवारी या आलेखात दाखविलेली नाही.
- अमेरिकेसाठी 2022 ते 2023 मधील वाढ ही 2023 ते 2024 मधील वाढीपेक्षा जास्त आहे. रेषाखंड किती तीव्र आहेत हे पाहून आपण हे सांगू शकतो. रेषा जितकी जास्त तीव्र तितकी वाढ जास्त.

(?) **खालीलपैकी कोणते निष्कर्ष वैध आहेत?**

- 2012 ते 2024 पर्यंत जगभरातील अंतराळ वस्तू प्रक्षेपणांची संख्या दरवर्षी वाढली आहे.
- 2022-24 या वर्षात अमेरिका हा एक प्रमुख योगदान कर्ता आहे ज्याने जगभरातील एकूण संख्येच्या सुमारे 3/4 भाग प्रक्षेपित केले आहे.
- नेपाळने 2012-24 या काळात एकही वस्तू प्रक्षेपित केली नाही.
- 2024 मध्ये चीन आणि रशियाने मिळून केलेल्या वस्तू प्रक्षेपणांची संख्या सुमारे 400 आहे.

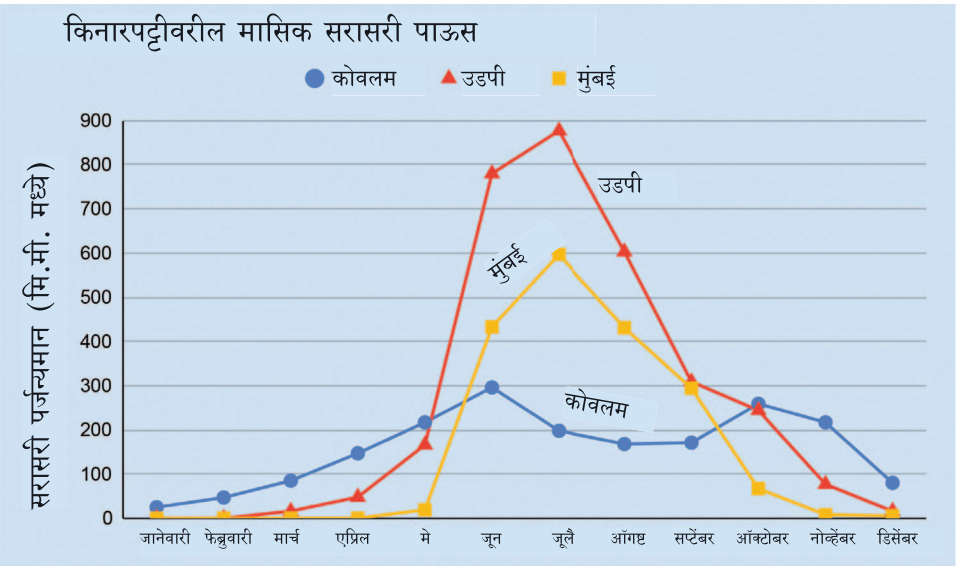
(?) अशा दोन सलग वर्षाची ओळख पटवा जिथे जगभरातील संख्या 2 पट किंवा त्याहून अधिक वाढली आहे.

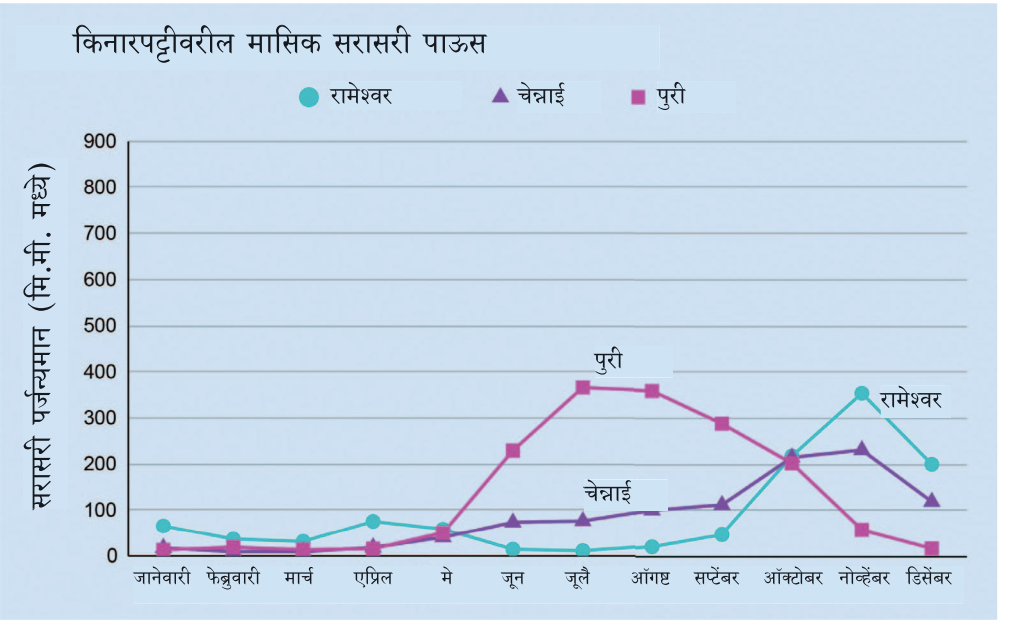
हीच माहिती जोडस्तंभालेखाने दर्शविल्याची कल्पना करा. तिथे 13 श्रेणी असतील प्रत्येक वर्षासाठी एक आणि प्रत्येक श्रेणीमध्ये 4 स्तंभ असतील असे एकूण 52 स्तंभ होतील! असा गर्दीचा आलेख वाचण्यास कठीण जटिल होतो, ज्यामुळे स्पष्टपणे कल समजणे कठीण होईल.

दुसरीकडे रेखीय आलेखामध्ये कालांतराने होणारे बदल दर्शविण्यासाठी अधिक योग्य आहेत. माहिती बिंदूना रेषाखंडाच्या सहाय्याने जोडून ते कल बदलांचे स्पष्ट दृश्य सादरीकरण (प्रदान) करते. ज्यामुळे वाचकाला एखादा घटक विविध वर्षामध्ये कसा बदलतो याचा सहज मागोवा घेता येतो.

पावसातील (नमुना) ओळखा (Catch the (Pattern in Rain)

खालील आलेख कांही शहरांच्या मासिक सरासरी पावसाची आकडेवारी दर्शवितात.





Source: weather-and-climate.com

? ही माहिती संकलित करण्यासाठी कोणती पद्धत वापरली असावी? ही माहिती 6 शहरांमधील सरासरी मासिक पावसाचे प्रमाण दर्शविते. याचा अर्थ असा की प्रत्येक शहरातील पावसाची आकडेवारी कांही वर्षाच्या कालावधीत गोळा केली जाते. एखाद्या शहरातील पावसाची सरासरी काढण्यासाठी त्या शहरातील जून महिन्यातील पावसाची सरासरी घेतली जाते.

? ही शहरे भारताच्या नकाशावर चिन्हांकीत करा. आलेखात त्यांचे गट कसे केले आहेत यामध्ये कोणते साम्य आहे? आलेखांबद्दल तुमची निरीक्षणे आणि निष्कर्ष सांगा.

कोवलम, उडपी आणि मुंबई ही शहरे पश्चिम किनारपट्टीवर आहेत. रामेश्वरम, चेन्नई आणि पुरी ही शहरे पूर्व किनारपट्टीवर आहेत. आलेखावरून असे दिसून येते की पश्चिम किनारपट्टीवरील प्रदेशांमध्ये जास्त पाऊस पडतो.



? प्रत्येक शहरासाठी सर्वाधिक पावसाचे आणि सर्वात कमी पावसाचे महिने ओळखा.

उडपी, मुंबई आणि कोवलममध्ये जून ते ऑगस्ट दरम्यान सर्वाधिक पाऊस पडतो. रामेश्वरममध्ये सर्वाधिक पाऊस ऑक्टोबर ते डिसेंबर दरम्यान होतो. चेन्नईमध्ये जूनपासून पावसाला सुरूवात होते जो नोव्हेंबरमध्ये उच्चांकावर असतो आणि डिसेंबरपर्यंत सुरू राहतो. पुरी शहर पूर्व किनारपट्टीवर असूनही, तेथे जुलै ते सप्टेंबर दरम्यान सर्वाधिक पाऊस पडतो. सर्व शहरांसाठी जानेवारी ते मार्च हे महिने कोरडे (कमी पावसाचे) असतात. रामेश्वरम मध्ये जानेवारी ते सप्टेंबर या महिन्यात अत्यंत कमी पाऊस पडतो.

? नैऋत्य मान्सून आणि ईशान्य मान्सून बद्दल माहिती वाचा. कोणते प्रदेश कोणाच्या प्रभावाखाली आणि कधी येतात ते शोधा.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. आठवड्यातील वेगवेगळ्या दिवशी दुकानाला भेट देणाऱ्या ग्राहकांची सरासरी संख्या आणि प्रत्यक्षात वस्तू खरेदी करणाऱ्या ग्राहकांची सरासरी संख्या खालील तक्त्यात दर्शविली आहे. ही माहिती रेषा आलेखावर दाखवा.

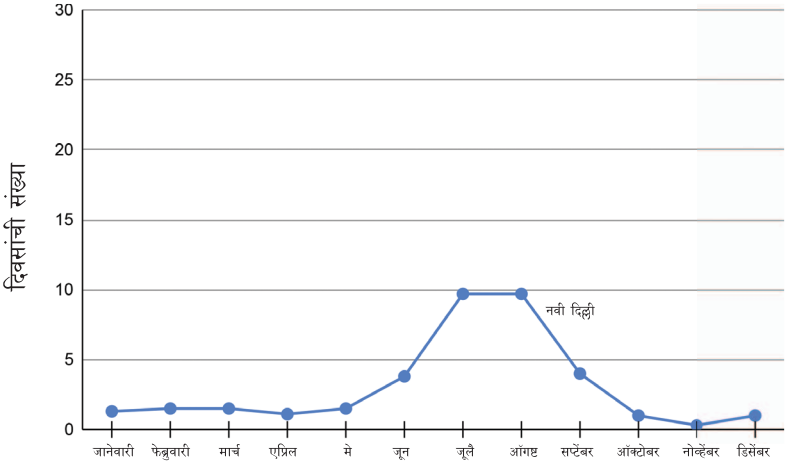
	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि	रवि
भेट देणारे	16	19	10	14	20	22	35
खरेदी करणारे	10	8	7	11	12	16	26

2. कांही शहरांमधील प्रत्येक महिन्यातील पावसाळ्याच्या दिवसांची सरासरी संख्या खालील तक्त्यात दर्शविली आहे.

	जाने.	फेब्रु.	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै	ऑगष्ट	सप्टेंबर	ऑक्टोबर	नोव्हेंबर	डिसेंबर
मंगळुरू	0.1	0	0.1	1.8	6.2	24.1	27.7	24.5	14	8.8	3.9	0.9
नवी दिल्ली												
पोर्ट ब्लेअर	2.4	1.3	0.9	3.3	15.5	18.7	17.3	18.8	16.8	14.1	11.3	5.4
रामेश्वरम	2.6	1.3	1.9	3.4	2.5	0.4	1	1	1.9	8.1	10.4	7.8

i) ही माहिती संकलित करण्यासाठी कोणती संभाव्य पध्दत असू शकते?

ii) मंगळुरू, पोर्ट ब्लेअर आणि रामेश्वरमची माहिती खाली दिलेल्या रेषा आलेखात चिन्हांकीत करा. तुम्ही ही संख्या जवळच्या पूर्णाकात रूपांतरीत करू शकता का?



Source: weather-and-climate.com

iii) आलेखातील नवी दिल्लीच्या रेषेवर आधारीत तक्त्यातील माहिती भरा.

iv) यापैकी कोणत्या शहरात वर्षामध्ये सर्वाधिक दिवस पाऊस पडतो? कोणत्या शहरात वर्षामध्ये सर्वात कमी दिवस पाऊस पडतो?

v) तक्ता पाहून सांगा की नवी दिल्ली आणि रामेश्वरममध्ये पावसाळा कधी असतो?

3. खालील रेषा आलेख एका ठराविक कालावधीत भारतातील प्रत्येक महिन्यातील जन्मांची संख्या दर्शवितो.



स्त्रोत : नंबियार इट अल (आगामी - भारतातील जन्मामध्ये ऋतुमानानुसार बदल)

i) तुमची निरीक्षणे कोणती आहेत?

ii) जुलै 2017 मध्ये जन्मांची अंदाजे संख्या किती होती?

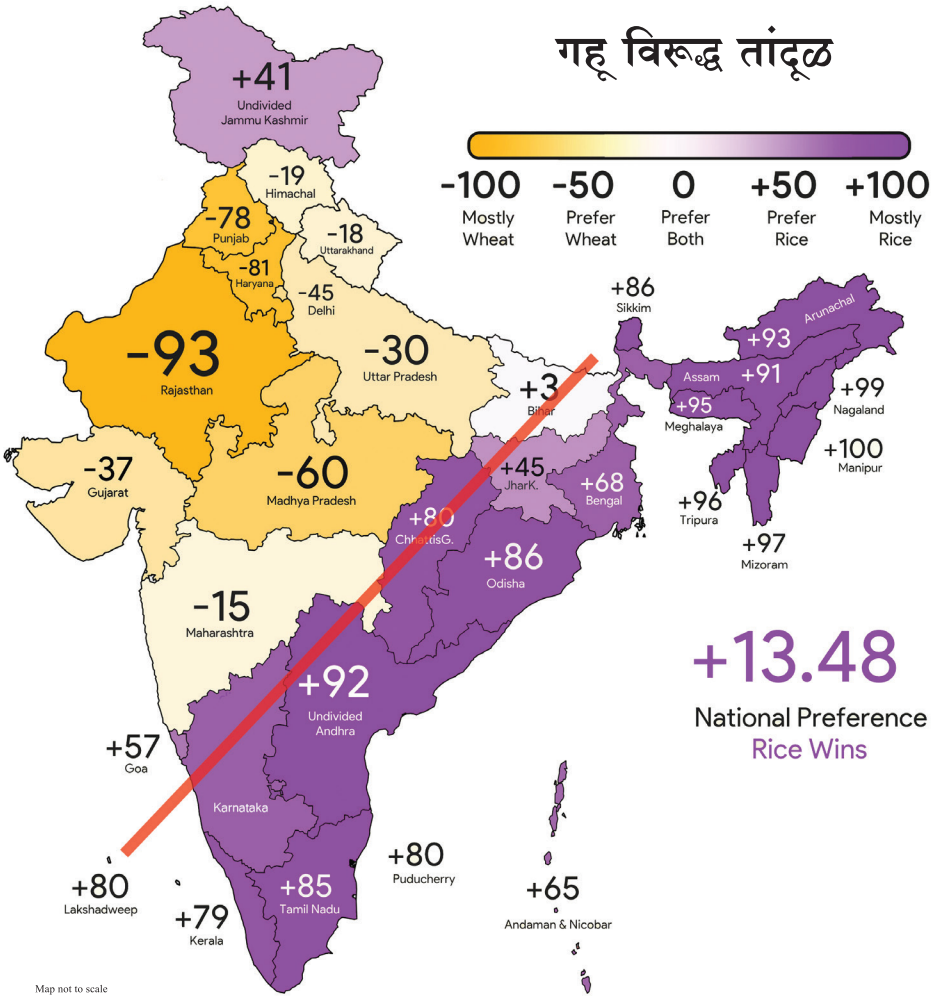
iii) हा आलेख कोणता कालखंड दर्शवतो?

iv) 2018, 2019 आणि 2020 या वर्षातील जानेवारी महिन्यातील जन्मांच्या संख्येची तुलना करा.

v) 2019 या वर्षातील जन्मांच्या एकूण संख्येचा अंदाज लावा.

सूचनाचित्रण (Infographics)

इयत्ता 6वी मध्ये आपण पाहिले आहे की, माहिती आणि अंतर्दृष्टी अधिक स्पष्टपणे, वेगाने आणि दिसायला आकर्षक पध्दतीने मांडण्यासाठी 'सूचनाचित्रण' चा वापर कसा केला जाऊ शकतो. खालील सूचनाचित्रण पहा. येथे दिलेली माहिती तुम्हाला समजते का?



स्रोत : *68 वे राष्ट्रीय नमुना सर्वेक्षण जून 2014, इपमॅप्स. कॉम चा वापर करुन 2011-12 मध्ये निर्मित*

हे सूचनाचित्रण विविध राज्यांमध्ये तांदूळ आणि गहू यांच्यातील पसंतीची तुलना करते. वरील उजव्या बाजूला असलेली रंगांची पट्टी वेगवेगळ्या पद्धतीनुसार पसंतीचा अर्थ कसा लावायचा हे दर्शविते.

तांदूळ आणि गहू यांच्या दरडोई वापराच्या फरकाचे मूल्य -100 ते +100 दरम्यान दर्शविले आहे. +100 मूल्य असण्याचा अर्थ असा नाही की ते राज्य अजिबात गहू खात नाही. याचा अर्थ असा की ते राज्य प्रामुख्याने तांदळाला पसंती देते आणि तांदूळ व गहू यांच्या दरडोई वापरातील फरक सर्वाधिक आहे. लाल रेषेद्वारे दर्शविलेली गहू विरुद्ध तांदूळ या पसंतीमधील भौगोलिक विभागणी मनोरंजक नाही का?

? तुमची निरीक्षणे सांगा. या सूचनाचित्रणाच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

i) कर्नाटकचे मूल्य लपलेले आहे. ते काय असू शकते याचा तुम्ही अंदाज लावू शकता का?

ii) अशी कोणती 5 राज्ये आहेत जिथे तांदूळ सर्वात जास्त लोकप्रिय आहे?

iii) अशी कोणती 5 राज्ये आहेत जिथे गहू सर्वात जास्त लोकप्रिय आहे?

iv) अशा कांही राज्यांची यादी करा जिथे तांदूळ आणि गहू यामधील पसंती कमी-अधिक प्रमाणात संतुलित आहे.



एक पट्टी काय सांगू शकते? (What can a strip say?)

मनोजला एक मनोरंजक छंद आहे. तो दिवसभरात काय करतो याची नोंद ठेवतो. तो मध्यरात्रीपासून मध्यरात्रीपर्यंतच्या वेळेसाठी 30 मिनिटांच्या अंतराने 48 चौकटी असलेल्या कागदाच्या पट्टीवर रंग भरून आपल्या क्रियांची नोंद करतो. त्याने आठवड्यातील तीन वेगवेगळ्या दिवसांच्या पाच प्रकारच्या क्रियांसाठी तीन रंगीत पट्ट्यांवर नोंद केली आहे. ज्या उजव्या बाजूला दाखविल्या आहेत.

i) झोपणे ii) जेवणे.

iii) मित्रांना भेटणे, छंद, प्रसारमाध्यम, कुटुंबासोबत वेळ घालविणे.

iv) वर्गात उपस्थित राहणे, अभ्यास आणि गृहपाठ करणे.

v) आंघोळ करणे आणि तयार होणे, योगा किंवा प्राणायाम करणे.

vi) प्रवास करणे

? तीन रंगीत पट्ट्यांचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.

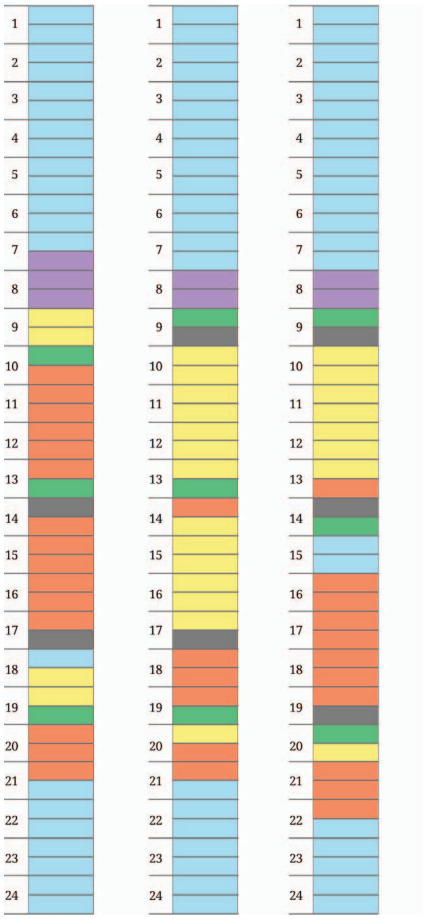
i) प्रत्येक रंग कोणत्या क्रियेसाठी आहे?

ii) या तीन पट्ट्या शुक्रवार ते रविवार या दिवसांशी संबंधित आहेत. प्रत्येक पट्टी कोणता दिवस दर्शविते असे तुम्हाला वाटते?

iii) यापैकी एका दिवशी तो मित्रासोबत मोठा चित्रपट पाहण्यासाठी बाहेर गेला होता. हे कधी घडले असावे असे तुम्हाला वाटते?

iv) त्याच्या शाळेची जेवणाची सुट्टी किती वाजता होते?

v) या पट्ट्या आपल्याला अजून काय सांगू शकतात?



? आठवड्याच्या दिवसासाठी तुमची पट्टी कशी दिसेल? ती मनोजच्या पट्टीशी किती साम्य दर्शविते किंवा त्यापेक्षा कशी वेगळी आहे?

? तुमच्या सुट्टीच्या दिवसाची पट्टी कशी दिसेल? ती किती सारखी/वेगळी असेल?

गणिती बोल

? तुमच्या कुटुंबातील प्रौढ व्यक्तींसाठीची पट्टी कशी दिसते? घरातील कोणत्याही प्रौढ व्यक्तीच्या एका दिवसाची पट्टी तयार करा. तुमच्या पट्टीशी त्यांच्यांशी तुलना करा. तुम्हाला काय मनोरंजक वाटते?

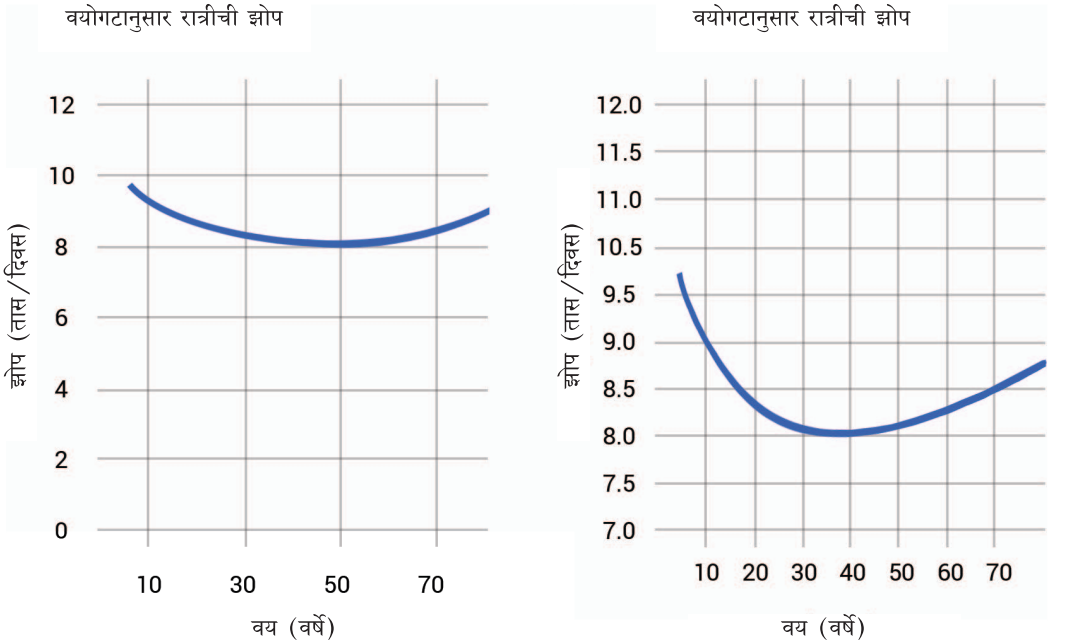
गणिती बोल

माहितीची संकल्पना/कथा : निद्रिस्त

तुम्हाला प्रमाण प्रकरणातील झोपण्याच्या वेळेचा वर्तुळालेख आठवतो का?

हे आश्चर्यकारक नाही का की, कांही प्राणी दिवसात फक्त 2 तास झोपतात तर कांही प्राणी तासांपर्यंत झोपतात? कीटकांबद्दल काय? तुम्ही कधी कोणत्याही कीटकाला झोपताना किंवा विश्रांती घेताना पाहिले आहे का? मानव साधारपणे दिवसातून 7-9 तास झोपतात. झोपेचा कालावधी वेगवेगळ्या लोकांमध्ये मोठ्या प्रमाणात बदलू शकतो, लोकांना किती झोपेची गरज आहे हे वय, राहणीमान, जीवनशैली (त्यांनी घेतलेले अन्न ते करत असलेले उपक्रम इ.) यासारख्या इतर घटकांवर अवलंबून असते. तुम्ही पाहिले असेल की लहान मुले मोठ्या माणसांपेक्षा जास्त वेळ झोपतात.

खालील रेषा आलेख 6 ते 75 वयोगटातील भारतीयांच्या झोपेचा ठराविक कालावधी दर्शवितात. दुसरे चित्र हे पहिल्या चित्राची मोठी केलेली (Zoomed in) आवृत्ती आहे.



स्त्रोत : वेळ वापरुन 2024 चे राष्ट्रीय सर्वेक्षण

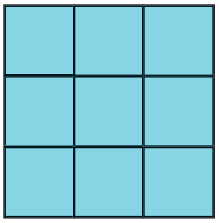
या आलेखाबद्दल तुमची निरीक्षणे सांगा, तुम्हाला यामध्ये काय मनोरंजक वाटते?

कांही जोडलेल्या रेषाखंडांनी बनलेल्या आधीच्या आलेखांपेक्षा हा रेषा आलेख एका गुळगुळीत वक्रासारखा दिसतो कारण यामध्ये 80 बिंदू आहेत. जे एकमेकांच्या खूप जवळ आहेत. हीच माहिती स्तंभालेखाद्वारे दर्शविण्यासाठी 70 स्तंभांची आवश्यकता लागेल त्यामुळे आलेख विस्कळीत आणि जड वाटेल. येथे रेषा आलेख हा एक उत्तम पर्याय आहे. तो हलका आहे आणि माहितीचा कल चांगल्या प्रकारे टिपतो.

आलेखावरून आपण पाहू शकतो की 6 वर्षाच्या मुलांसाठी झोपेची सरासरी वेळ दररोज सुमारे 9.5 तास असते. जसजसे आपण किशोरवयातून प्रौढत्वाकडे जातो, तसतसा दररोजच्या झोपेचा वेळ कमी होतो आणि 30 ते 50 वयोगटात तो दिवसाला सुमारे 8 तासांवर पोहोचतो. 50 वर्षानंतर झोपेची वेळ पुन्हा वाढू लागतो आणि सुमारे 8.5 तासांपर्यंत पोहोचतो.

तुम्हाला कदाचित प्रश्न पडला असेल नवजात बालके आणि अर्भके इतका वेळ का झोपतात? वेगवेगळ्या देशांतील लोक वेगळ्या पध्दतीने झोपतात का? प्राण्यांमध्ये देखील वयानुसार झोपेच्या अशाच पध्दती दिसून येतात का?

शोधा पाहू. (Figure it out)



1. मध्य/सरासरी चौकटी

   i) चौकटीमध्ये 9 भिन्न संख्या अशा प्रकारे भरा की प्रत्येक पंक्ती, स्तंभ आणि कर्णाची सरासरी 10 असेल.

   ii) आपण कांही संख्या बदलून अजूनही सर्व दिशांनी सरासरी मिळवू शकतो का?

2. खालीलपैकी प्रत्येक अटी पूर्ण करणाऱ्या माहितीची दोन उदाहरणे द्या.

   i) 3 संख्या ज्यांची सरासरी 8 आहे.

   ii) 4 संख्या ज्यांचा मध्यांक 15.5 आहे.

   iii) 5 संख्या ज्यांची सरासरी 13.6 आहे.

   iv) 6 संख्या ज्यांची सरासरी = मध्यांक

   v) 6 संख्या ज्यांचा मध्य > मध्यांक

3. रिकाम्या जागा अशा प्रकारे भरा की संग्रहाचा सरासरी 13 असेल. 5,21, 14, ____, ____, ____ जर फक्त मोजणीच्या संख्या वापरल्या तर किती शक्यता असू शकतात?

4. रिकाम्या जागा अशा प्रकारे भरा की संग्रहाची सरासरी/मध्य 6.5 असेल. 3, 11, ____, ____, 15, 6. जर फक्त मोजणीच्या संख्या वापरल्या तर किती शक्यता असू शकतात?

5. खालीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य आहे की नाही ते तपासा. तुमच्या तर्काचे समर्थन करा. आवश्यक असल्यास स्पष्टीकरणासाठी बीजगणिताचा वापर करा.

   i) दोन सम संख्यांची सरासरी/मध्य सम असतो.

   ii) 5 च्या कोणत्याही दोन पटींची सरासरी/मध्य 5ची पट असेल.

   iii) 5 च्या कोणत्याही 5 पटींची सरासरी/मध्य देखील 5ची पट असेल.

6. सुधाकरच्या वर्गाची सरासरी/मध्य उंची 150.2 सें.मी. असल्याचे समजल्यानंतर अवघ्या दोन दिवसांत वर्गात 2 नवीन प्रवेश झाले.

   i) खालीलपैकी कोणते विधान बरोबर आहे? का?

      a) 2 नवीन संख्या वाढल्यामुळे वर्गाची सरासरी उंची वाढेल.

      b) वर्गाची सरासरी उंची तीच राहील.

c) नवीन सरासरी उंची काढण्यासाठी नवीन विद्यार्थ्यांची उंची मोजावी लागेल.

d) नवीन सरासरी काढण्यासाठी वर्गातील प्रत्येकाची उंची पुन्हा मोजावी लागेल

ii) नवीन प्रवेश घेतलेल्या दोन विद्यार्थ्यांची उंची 149सें.मी. आणि 152सें.मी. आहे. वर्गाच्या सरासरी उंचीबाबत खालीलपैकी कोणते विधान बरोबर आहे?

a) सरासरी तीच राहील.

b) सरासरी वाढेल.

c) सरासरी कमी होईल.

d) सरासरी बद्दल कोणताही दावा करण्यासाठी माहिती पुरेशी नाही.

iii) वर्गाच्या नवीन 'मध्यांक' उंचीबद्दल खालीलपैकी कोणते विधान बरोबर आहे? का?

a) मध्यांक समान राहील.

b) मध्यांक वाढेल.

c) सरासरी कमी होईल.

d) मध्यांकाबद्दल कोणताही दावा करण्यासाठी माहिती पुरेशी नाही.

7. खाली दिलेल्या बिंदू आलेखामधील माहितीचा सरासरी/मध्य 17 आहे का? या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी तुम्ही कोणती पध्दत वापरली आहे ते सांगा.

गणिती बोल



8. एका गटातील लोकांच्या वजनाची दर महिन्याला मोजणी केली जात होती. मागील महिन्याचे सरासरी वजन 65.3 किलो (kg) आणि मध्यांक 67 किलो (kg) होता. या महिन्याच्या माहितीवरून असे दिसून आले की एका व्यक्तीने 2 किलो वजन कमी केले आहे आणि दोघांनी 1 किलो वजन वाढविले आहे. या महिन्यात सरासरी/मध्य वजन आणि सरासरी वजनातील बदलाबद्दल आपण काय म्हणू शकतो?

गणिती बोल

9. खालील तक्ता 10 वर्षाच्या कालावधीत कांही राज्यांमधील जानेवारी महिन्यातील आयोडीनयुक्त मीठाची किरकोळ किंमत (₹ मध्ये) दर्शवितो. तुमच्या गणना आणि आलेख काढण्यासाठी तुम्ही मूल्ये जवळच्या पूर्णांक संख्येपर्यंत पूर्ण करू शकता.

	अंदमान आणि निकोबार बेटे	आसाम	गुजरात	मिझोराम	उत्तर प्रदेश	पश्चिम बंगाल
2016	16	6	16.5	20	16.15	9.47
2017	12	12	14.75	20	16.97	11.65
2018	12	12	14.75	22	16.18	11.63
2019	12	12	14.75	22	18.24	11.43
2020	13.88	12	13	20	18.96	11.11
2021	18.22	15	14.45	22	20.63	12.79
2022	18.73	14	14.28	25	21.3	16.14
2023	20.63	12.02	14.54	27.65	25.39	18.43
2024	19.73	13.72	14.8	29.03	26.9	21.66
2025	20.99	12.35	19.2	29.8	24.81	23.99

i) तुम्हाला आवडणाऱ्या कोणत्याही 3 राज्यांची माहिती निवडा आणि योग्य प्रमाण वापरून रेषालेखाद्वारे तो सादर करा.

ii) तुम्हाला या माहितीमध्ये काय मनोरंजक वाटते? तुमची निरीक्षणे सांगा.

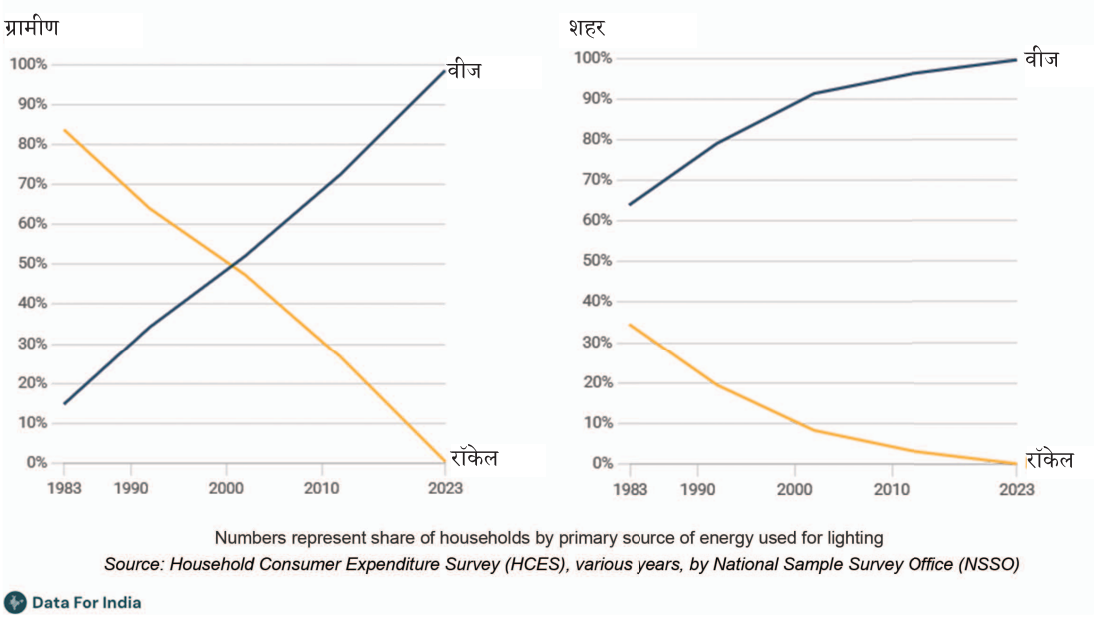
iii) गुजरात आणि उत्तर प्रदेशमधील किंमतींच्या फरकाची तुलना करा.

iv) 2016 ते 2025 या काळात कोणत्या राज्यात किंमत सर्वाधिक वाढली आहे?

v) तुम्हाला पुढे आणखी काय शोधण्यास किंवा जाणून घेण्यास उत्सुकता आहे?

10. खालील आलेखाचा संदर्भ घेऊन सांगा की खालीलपैकी कोणती विधाने योग्य आहेत? का?

काळाच्या ओघात घरगुती प्रकाशासाठी ऊर्जेचा मुख्य स्रोत



i) 1983 मध्ये ग्रामीण भागातील बहुसंख्य लोक प्रकाशाचा प्राथमिक स्त्रोत म्हणून रॉकेल (केरोसीन) वापरत होते तर शहरी भागातील बहुसंख्य लोक वीज वापरत होते.

ii) ग्रामीण आणि शहरी दोन्ही भागांत प्राथमिक प्रकाश स्त्रोत म्हणून रॉकेलचा वापर काळानुसार कमी झाला आहे.

iii) 2000 मध्ये 10% शहरी घरांमध्ये प्रकाशाचा प्राथमिक स्त्रोत म्हणून वीज वापरली जात होती.

iv) 2023 मध्ये वीजपुरवठा खंडीत झाला नव्हता.

11. रेषीय आलेखाच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

i) शहरी भागातील 10 वर्षाची मुले दररोज छंद आणि खेळावर किती वेळ घालवितात?

ii) ग्रामीण भागातील मुलांनी छंद आणि खेळावर घालविलेला सरासरी दैनिक वेळ 1.5 तास असतो. तेव्हा त्यांचे वय किती असते?

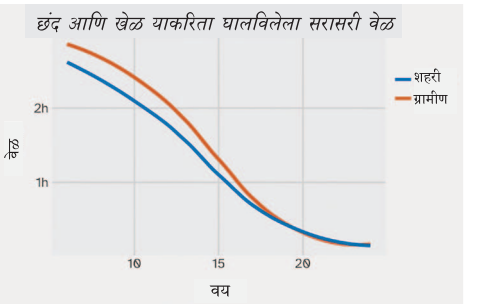
a) 8 वर्षे

b) 10 वर्षे

c) 12 वर्षे

d) 14 वर्षे

e) 18 वर्षे



iii) खालील विधाने बरोबर आहेत का?

a) 15 वर्षांच्या मुलांनी छंद आणि खेळांसाठी घालविलेला सरासरी वेळ 10 वर्षांच्या मुलांच्या तुलनेत दुप्पट आहे.

b) ग्रामीण भागातील 15 वर्षांची सर्व मुले दररोज छंद आणि खेळांसाठी किमान 1 तास घालवितात.

12. वैयक्तिक प्रकल्प : आठवड्याच्या वेगवेगळ्या दिवसांसाठी तुमची स्वतःची क्रिया पट्टी तयार करा.



i) तुम्ही रोज ठराविक वेळी जेवता आणि झोपता का? साधारणपणे तुम्ही घराबाहेर किती वेळ घालविता?

ii) प्रत्येक क्रियासाठी घालविलेल्या सरासरी वेळेची गणना करा. एका पट्टीचा वापर करून हा सरासरी दिवस दर्शवा.

iii) त्याचप्रमाणे घरातील कोणत्याही प्रौढ व्यक्तीच्या क्रियासाठी नोंद ठेवा. तुमच्या माहितीची त्यांच्या माहितीशी तुलना करा.

प्रयत्न करा

13. लहान गट प्रकल्प: 3-4 सदस्यांचा एक गट बनवा. खालीलपैकी किमान एक काम करा.

i) तुमच्या कुटुंबातील सर्व सदस्यांच्या झोपण्याच्या वेळेची एका आठवड्यासाठी नोंद ठेवा. दैनंदिन झोपण्याच्या वेळेत रात्रीची झोप, दुपारची झोप आणि दिवसा घेतलेल्या कोणत्याही झोपेचा समावेश होतो.

a) हे पट्ट्यांवर दर्शवा.

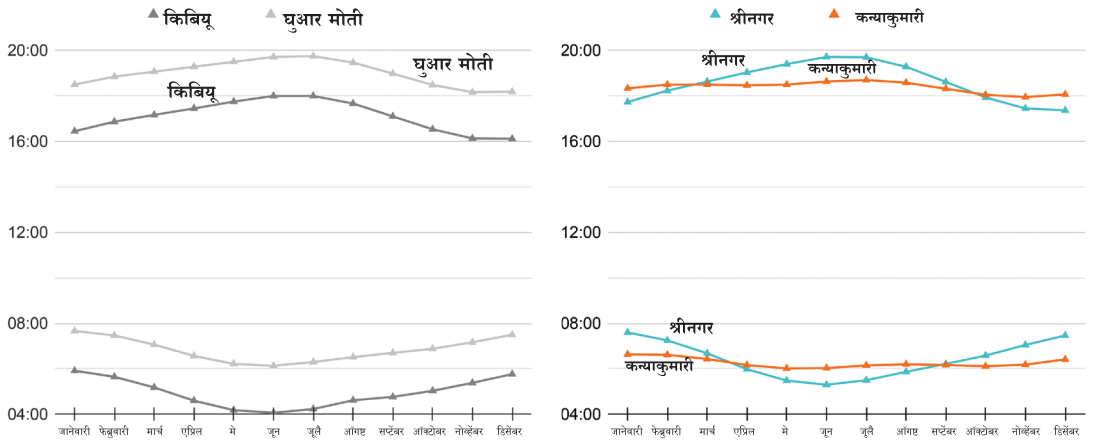
b) तुमच्या गटातील सर्व सदस्यांची माहिती एकत्र करा. मुले, प्रौढ आणि वृद्ध यांच्या झोपण्याच्या वेळेची सरासरी मध्य आणि मध्यांक काढा.

c) तुमचा निष्कर्ष आणि निरीक्षणे याबाबत चर्चा करा.

ii) शाळा केंव्हा सुरू होतात आणि केंव्हा संपतात? एका कामकाजाच्या दिवशी मनोजची शाळा सकाळी 9:30 ला सुरू होते आणि दुपारी 4.30 ला संपते म्हणजेच 7 तास ज्यामध्ये वर्गाची वेळ आणि सुट्ट्यांचा समावेश असतो. इयत्ता 8 वी साठी वेगवेगळ्या शाळांच्या वेळेची माहिती गोळा करा. ज्यामध्ये वर्गाची वेळ आणि सुट्टीचा वेळ समाविष्ट असेल. (शाळा देशात

कुठेही असू शकतात. माहिती मिळविण्यासाठी तुम्ही तुमच्या शेजाऱ्यांना, नातेवाईकांना, पालकांना आणि मित्रांना विचारू शकता.) गोळा केलेल्या माहितीचे विश्लेषण करा आणि तो सादर करा.

14. खालील आलेख भारतातील 4 ठिकाणाच्या वर्षभरातील सूर्योदय आणि सूर्यास्ताच्या वेळा दर्शवितात. आलेख कसे मांडले आहेत याचे निरीक्षण करा. कोणत्या रेषा सूर्योदय दर्शवितात आणि कोणत्या सूर्यास्त दर्शवितात हे तुम्ही ओळखू शकता का?



आलेखांवर आधारीत खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

i) जानेवारी महिन्यात कोणत्या ठिकाणी सूर्य सर्वात लवकर उगवतो? या ठिकाणी जानेवारीतील दिवसाचा अंदाजे कालावधी किती आहे?

ii) वर्षभरात कोणत्या ठिकाणी दिवसाचा कालावधी सर्वात जास्त असतो?

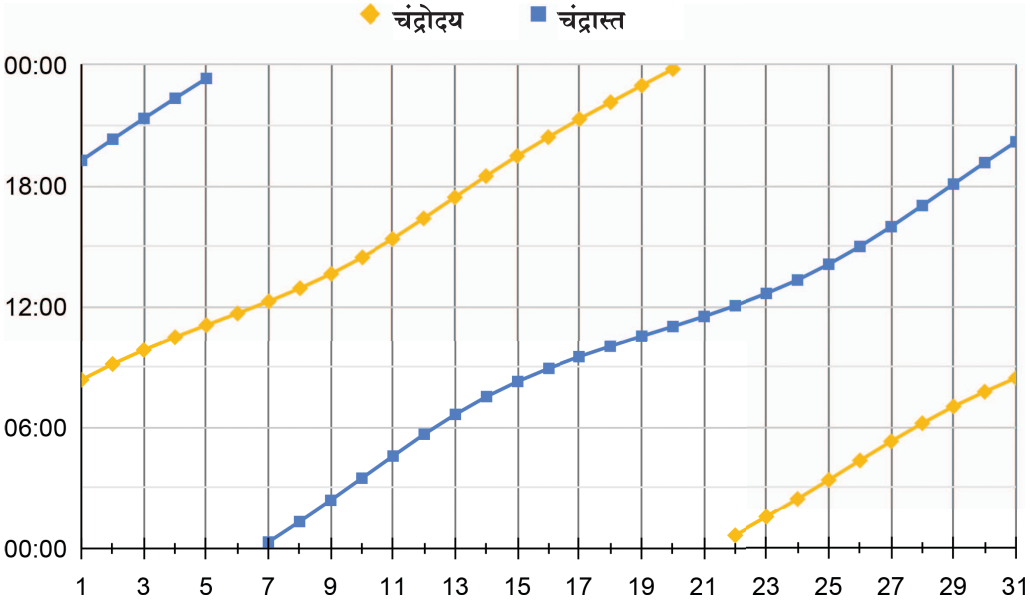
iii) तुमची निरीक्षणे सांगा तुम्हाला काय मनोरंजक वाटले? तुम्हाला काय जाणून घेण्याची उत्सुकता आहे?

15. आपल्याला सूर्योदय आणि सूर्यास्ताच्या ठराविक वेळा माहित आहेत. पण चंद्राचा उदय आणि मावळण्याची वेळ तुम्हाला माहित आहे का? सूर्याप्रमाणेच त्यातही कांही नियमितता असते का? चला शोधूया. खालील आलेख एका महिन्यातील चंद्रोदय आणि चंद्रास्ताची वेळ दर्शवतो.

प्रयत्न करा

i) या महिन्यात 'अमावस्या' आणि 'पौर्णिमा' कोणत्या तारखेला होत्या ते शोधा.

ii) तुम्हाला काय लक्षात आले? तुम्हाला कशा बद्दल आश्चर्य वाटते?



सारांश

- मागील वर्षी आपण मध्य हे समान वाटा म्हणून पाहिले. येथे आपण शिकलो की मध्यच्या डावीकडील आणि उजवीकडील संख्यांच्या अंतराची बेरीज समान असते.
- आपण पाहिले की जेव्हा मध्यापेक्षा मोठी संख्या समाविष्ट केली जाते तेव्हा मध्य वाढतो. जेव्हा मध्यापेक्षा लहान संख्या समाविष्ट केली जाते तेव्हा मध्य कमी होतो. अशाच प्रकारची प्रक्रिया मध्यांकाच्या बाबतीतही दिसून येते.
- वेळेनुसार होणारे बदल दर्शवण्यासाठी रेषा आलेख वापरले जाऊ शकतात.
- आपण पाहिले की माहितीचे परीक्षण केल्यास नवीन प्रश्न निर्माण होऊ शकतात आणि पुढील संशोधनासाठी दिशा मिळू शकते.



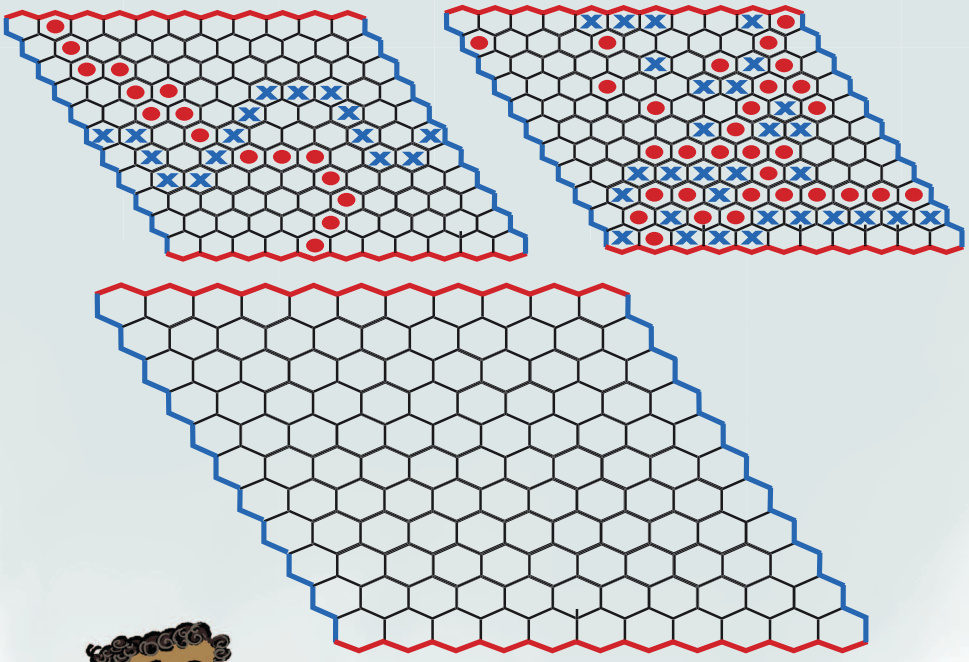
ही कोड्यांची वेळ

हेक्सचा खेळ (Game of Hex)

हेक्स हा दोन खेळाडूंनी खेळायचा एक धोरणात्मक खेळ आहे. हा खेळ 11×11 आकाराच्या षटकोनी कप्यांनी बनलेल्या समभुज चौकोनी बोर्डवर खेळला जातो. प्रत्येक खेळाडूला एक रंग आणि बोर्डच्या दोन समोरासमोरील बाजू नेमून दिल्या जातात. खेळाडू आळीपाळीने कोणत्याही रिकाम्या कप्प्यात आपल्या रंगाचा एक तुकडा ठेवतात. एकदा ठेवलेला तुकडा पुन्हा हलविता येत नाही किंवा काढता येत नाही.

या खेळाचे उद्दिष्ट आपल्या तुकडयांची एक अखंड साखळी तयार करणे हे आहे जी आपल्याला नेमून दिलेल्या दोन बाजूंना जोडतील. अशी जोडणी पूर्ण करणारा पहिला खेळाडू हा खेळ जिंकतो, खालील चित्रे दोन संभाव्य खेळ दर्शवतात, ज्यामध्ये पहिल्या बोर्डवर निळा आणि दुसऱ्या बोर्डवर लाल खेळाडू जिंकला आहे.

येथे एक रिकामी बोर्ड दिला आहे. तुम्ही प्रत्येक फेरी खेळण्यासाठी पेन्सिल वापरू शकता आणि नवीन फेरी खेळण्यासाठी खुणा पुसून टाकू शकता.





13 बीजगणितीय खेळ (Algebra Play)

P5X5V3

13.1 बीजगणितीय खेळ (Algebra Play)

गेल्या दोन वर्षात आम्ही वेगवेगळ्या परिस्थितीचे नमुने तयार करण्यासाठी बीजगणिताचा वापर केलेला आहे. बैजिक समीकरणे कशी सोडवायची आणि अव्यक्त मूळाक्षर संख्यांच्या किंमती कशा शोधावयाच्या यांबद्दल आम्ही शिकलो आहोत. आता आपण कांही बीजगणिताशी मजा करूया. आम्ही युक्त्या आणि कोड्यांचा शोध घेऊ आणि बीजगणिताचा उपयोग करून का कार्य करतात याचे वर्णन करूया. इतरांचे मनोरंजन करण्यासाठी नवीन युक्त्या आणि कोड्यांचा शोध कसा केला जातो हे सुध्दा आम्ही पाहूया.

13.2 'विचारात घेतलेल्या संख्याच्या' युक्त्याविषयी विचार करणे (Thinking about 'Think of a Number' Tricks)

इयत्ता 7 वी मध्ये आम्ही 'एका संख्येचा विचार करा' यासारख्या युक्त्याविषयी आम्ही अभ्यासलेले आहे.

1. एका संख्येचा विचार करा.
2. त्याची दुप्पट करा.
3. त्यामध्ये चार मिळवा
4. त्याला दोनने भागा.
5. तुम्ही विचारात घेतलेली मूळ संख्या वजा करा.

? मी भाकित केले आहे की, तुम्हाला 2 मिळतील. मी बरोबर आहे? वेगवेगळ्या सुरूवातीच्या संख्यांशी याचा प्रयत्न करा. तुम्हाला नेहमी 2 या सारख्याच किंमतीने शेवट होत असलेला मिळतो का? अशा युक्त्यांचे बीजगणिताद्वारे आम्ही आकलन केल्याचे आम्ही पाहतो.

1. एका संख्येचा विचार करा x
2. त्याची दुप्पट करा $2x$
3. त्यात 4 मिळवा $2x+4$
4. त्याला दोनने भागा $x+2$
5. तुम्ही विचारात घेतलेली मूळ संख्या वजा करा: $x+2-x=2$

म्हणून, सुरूवातीची संख्या कोणतीही असली तरी अंतिम निकाल नेहमीच 2 असणार आहे.

? अंतिम उत्तर 3 बनविण्यासाठी या खेळामध्ये तुम्ही कसा बदल करू शकाल? 5 विषयी काय होईल?

? समान अंतिम किंमतीकडे नेहमी नेणाऱ्या अधिक क्लिष्ट पायऱ्या तुम्ही शोधू शकाल काय?

याच प्रकारची एक वेगळी युक्ती आता आपण पाहू.



? मुक्ताने निवडलेली तारीख शुभमने कशी शोधून काढली?

- महिना M आणि दिवस D मानू.
- M ला 5 ने गुणा: 5M
- त्यामध्ये 6 मिळवा: 5M + 6
- त्याला 4 ने गुणा : 20M + 24
- त्यामध्ये 9 मिळवा : 20M + 33
- त्याला 5 ने गुणा : 100M + 165
- त्यामध्ये दिवस मिळवा : 100M + 165 + D

मुक्ताचे उत्तर 291 होते.

- 291 = 100M + 165 + D
- 291 – 165 = 100M + D
- 126 = 100M + D

D हा महिन्यातील एक दिवस असल्याने तो कमाल 31 असतो आणि त्यासाठी 2 अंक आवश्यक आहेत. म्हणून शेवटचे 2 अंक D आहेत आणि त्याच्या अगोदर येणारा M आहे. या घटनेमध्ये M हे 1 आणि D हे 26 आहे म्हणजेच 26 जानेवारी होय.

? मुक्ता दुसऱ्या तारखेचा विचार करते, त्याच पायऱ्यांचा अवलंब करते आणि तिचे उत्तर 1390 असे सांगते. यावेळी मुक्ताने कोणत्या तारखेपासून सुरुवात केली?

- 1390 मधून 165 वजा केल्यास आम्हाला 1225 मिळतात.
- याचा अर्थ असा की तिने विचार केलेली तारीख 25 डिसेंबर होती.

? जर अंतिम उत्तरे खालीलप्रमाणे असतील तर तारखा काढा.

i) 1269

ii) 394

iii) 296

तुम्ही तुमच्या मित्रांसोबत या युक्तीचा प्रयत्न करू शकता. त्यांचा जन्मदिवस हा सुरूवातीची तारीख म्हणून त्यांना निवडण्यास सांगा.

? या युक्तीमधील पायऱ्या तुम्ही बदलू शकाल आणि मूळ तारीख काढू शकाल काय? अंतिम उत्तरामधून 165 वजा करण्याऐवजी तुम्हाला कांही इतर संख्या वजा करावी लागेल.

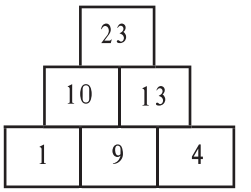


गणिती बोल

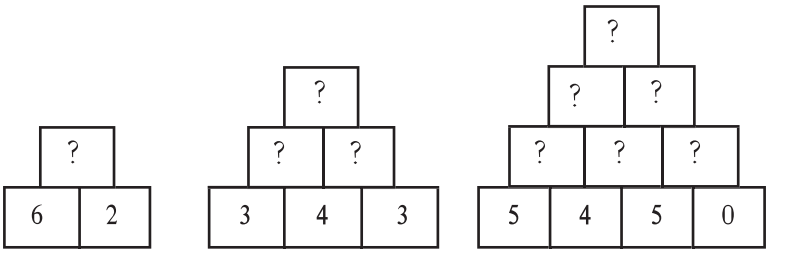
? 'एका संख्येचा विचार करा' युक्तीचा तुम्ही स्वतः प्रयत्न करा.

13.3 संख्यांचे पिरॅमिडस (Number Pyramids)

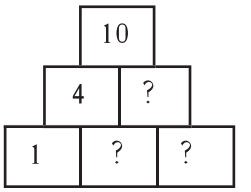
एका संख्येच्या पिरॅमिडमध्ये प्रत्येक सख्या ही त्याच्या खाली असलेल्या दोन संख्यांची बेरीज असते. (आकृती पहा)

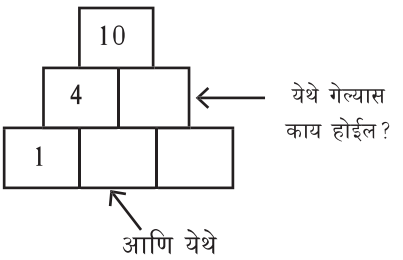


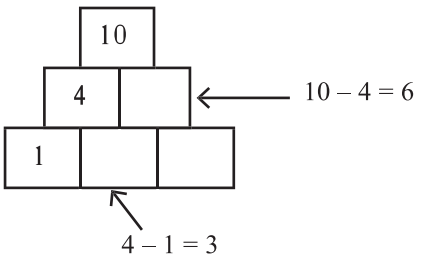
? हे पिरॅमिड भरण्यासाठी सारख्याच नियमाचा उपयोग करा.

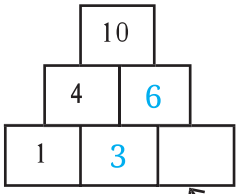


? हा पिरॅमिड तुम्ही कसा भराल?

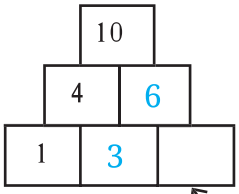




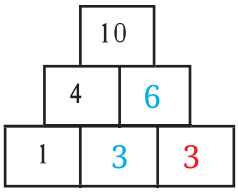




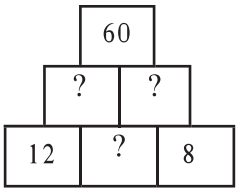
येथे गेल्यास काय होईल?



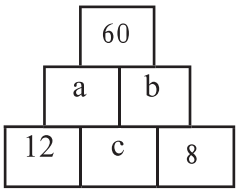
$6 - 3 = 3$



या पिरॅमिडमधील संख्या कशा भरता येतील? आम्ही कोठून सुरूवात करू शकतो?



रिकाम्या पेट्या या मूळाक्षर-संख्यांनी भरूया?



पिरॅमिड भरण्याच्या नियमावरुन आम्हाला खालील समीकरणे मिळतात.

- $a + b = 60$
- $12 + c = a$
- $c + 8 = b$

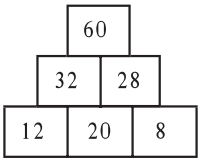
यावरून आम्हाला असे दिसून येते की,

- $(12 + c) + (c + 8) = a + b = 60$

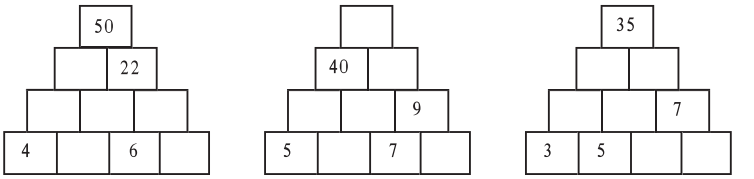
म्हणून,

- $20 + 2c = 60$
- $2c = 60 - 20 = 40$
- $c = 20$

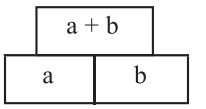
एकदा आपल्याला c ज्ञात झाल्यास, आम्ही a आणि b च्या किंमती काढू शकतो आणि पिरॅमिड पूर्ण करू शकतो.



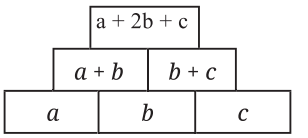
? खालील पिरॅमिड भरा.



? खालील पंक्तीतील संख्या आणि वरील पंक्तीतील संख्या यांच्यात काय संबंध आहे?
चला सर्वात साध्या पिरॅमिडपासून सुरूवात करूया.



? तीन पंक्ती असलेल्या पिरॅमिडविषयी काय आहे?



? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. संपूर्ण पिरॅमिडची बांधणी न करता, खालील प्रत्येक घटनेमध्ये दिलेल्या तळाच्या पंक्तीच्या सर्वात वरील पंक्तीतील संख्या काढा.

4	13	8	7	11	3	10	14	25

2. तळाच्या पंक्तीतील किंमतीच्या संदर्भात 4 पंक्तीसह असलेल्या एका पिरॅमिडच्या सर्वात वरच्या पंक्तीसाठी पदावली लिहा.
3. संपूर्ण पिरॅमिडची बांधणी न करता खालील प्रत्येक घटनेमध्ये दिलेल्या तळाच्या पंक्तीच्या सर्वात वरील पंक्तीतील संख्या काढा.

8	19	21	13	7	18	19	6	9	7	5	11

जेथे प्रत्येक संख्या ही त्या अगोदरच्या दोन संख्यांची बेरीज असणाऱ्या विरहंक - फिबोनासीच्या संख्यांच्या क्रमाचे स्मरण करा.

4. तीन पंक्ती असलेल्या एका संख्येच्या पिरॅमिडच्या तळाच्या पंक्तीत जर विरंहक - फिबोनासीच्या पहिल्या तीन संख्या लिहीलेल्या असतील तर उर्वरीत पिरॅमिड भरा. चौकटीमध्ये कोणत्या संख्या दिसतात? पिरॅमिडची वरील संख्या कोणती? त्या सर्व विरंहक-फिबोनासीच्या संख्या आहेत का?

5. खालील घटनांमधील पिरॅमिडमधील संख्या आणि वरच्या पंक्तीतील संख्येबद्दल तुम्ही काय सांगू शकाल?

   (i) एका चार पंक्तीच्या पिरॅमिडच्या तळाच्या पंक्तीत पहिल्या चार विरहंक - फिबोनासी संख्या लिहीलेल्या आहेत.

   (ii) एका 29 पंक्तीच्या पिरॅमिडच्या तळाच्या पंक्तीत पहिल्या 29 विरहंक - फिबोनासी संख्या लिहीलेल्या आहेत.

6. जर n पंक्तीच्या पिरॅमिडच्या तळाच्या पंक्तीत पहिल्या n विरहंक - फिबोनासी संख्या असतील तर पिरॅमिडमधील संख्येविषयी आम्ही काय सांगू शकतो?

   वरील संख्येविषयी आम्ही काय सांगू शकतो?

13.4 चौकटीसोबत गंमत

जादूई दिनदर्शिका

एका दिनदर्शिकेचे एक पान खाली दिलेले आहे. तुमचे मित्र या दिनदर्शिकेतून 2×2 ची चौकट उचलतात, या चौकटीतील 4 संख्यांची बेरीज करतात आणि बेरीज तुम्हाला सांगतात.

ऑगस्ट 2025

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

6	7
13	14

6 + 7 + 13 + 14 = 40

? फक्त ही बेरीज जाणून घेतल्यानंतर आपल्याला चौकटीतील 4 संख्या काढता येतील काय?

चला, तर बीजगणिताचा उपयोग करूया. 2×2 च्या एका चौकटीचा विचार करा. वरील डावी संख्या a दर्शविते. a च्या स्वरूपात इतर संख्या कोणत्या आहेत?

a	a + 1
a + 7	a + 8

सर्व चार संख्या मिळविल्यास बेरीज $a + (a + 1) + (a + 7) + (a + 8) = 4a + 16$ मिळते.

? समजा, तुम्हाला बेरीज 36 असे सांगितले आहे. तर चौकटीतील 4 संख्या तुम्ही काढू शकाल का?

- $4a + 16 = 36$
- $4a = 20$ (दोन्ही बाजूतून 16 वजा केले)
- $a = 5$ (दोन्ही बाजूला 4 ने भाग दिला)

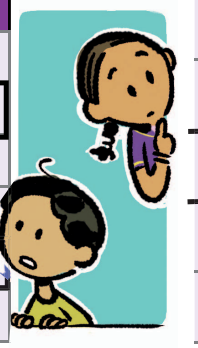
आता आपल्याला a मिळाले आहे, इतर तीन संख्या $a+1$, $a+7$ आणि $a+8$ आहेत हे आम्हाला माहित आहे. म्हणून चौकट खालीलप्रमाणे असणे आवश्यक आहे.

5	6
12	13

? तुमची स्वत:ची दिनदर्शिकेची युक्ती तयार करा. वेगवेगळ्या आकाराच्या व आकारमानाची एक चौकट निवडा.

गणिती बोल

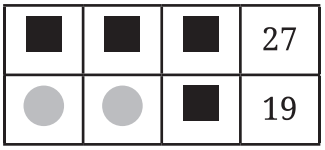
ऑगस्ट 2025						
रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						



2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	23	24	25	26	27	28	29	30
32	33	34	35	36	37	38	39	40
42	43	44	45	46	47	48	49	50

बीजगणितीय चौकट

खालील चौकटीमध्ये आकार संख्या दर्शवितात. प्रत्येक पंक्तीमध्ये त्याच्या डाव्याकडील किंमतींची बेरीज ही शेवटचा स्तंभ आहे. आकारांच्या किंमती आम्ही कशा काढू शकतो?



■ + ■ + ■ = 27

म्हणून, ■ = 9

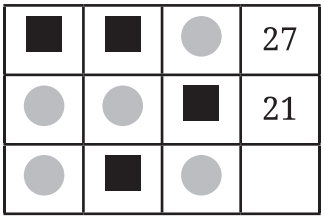
आता, ● + ● + ■ = 19

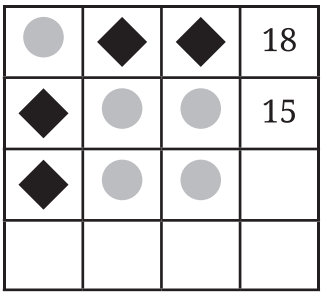
● + ● + 9 = 19

2 × ● + 9 = 19

● = 5

? खालील चौकटीमध्ये आकारांच्या किंमती काढा आणि रिकामे चौरस भरा.





13.5 सर्वात मोठा गुणाकार

? प्रत्येक अंक एकदाच वापरून ☐☐ × ☐ यामध्ये 2,3 आणि 5 हे अंक भरा. शक्य असलेला सर्वात मोठा गुणाकार किती आहे?

चला या समस्येचा पध्दतशीरपणे विचार करूया. तीन अंक तेथे घेण्याचे सहा प्रकार आहेत.

- पहिली चौकट आम्ही 2, 3 किंवा 5 ने भरू शकतो.
- या प्रत्येक निवडीसाठी उर्वरीत 2 अंक भरण्याचे आपल्याकडे 2 प्रकार आहेत.
- सहा पर्याय 23×5, 25×3, 32×5, 35×2, 52×3, 53×2 हे आहेत.

? या सहा पर्यायामधून मोठ्यात मोठा गुणाकार आम्ही कसा काढू शकतो?

गुणक समान असणाऱ्या जोडीमध्ये त्यांचे आम्ही गट करू शकतो.

- 35×2 आणि 53×2
- 25×3 आणि 52×3
- 23×5 आणि 32×5

प्रत्येक जोडीमध्ये सर्वात मोठ्या गुण्यामुळे मोठ्यात मोठा गुणाकार निर्माण होतो. म्हणून या तीन पदावलींची तुलना आम्ही संक्षिप्त करू शकतो.

- 53×2
- 52×3
- 32×5

यावरून हे स्पष्ट होते की 52×3 हा 53×2, पेक्षा मोठा आहे. म्हणून आम्हाला फक्त 52×3 आणि 32×5 यांची तुलना करणे गरजेचे आहे. त्यांचा विस्तार करूया.

- $32 \times 5 = (3 \times 10 \times 5) + (2 \times 5)$
- $52 \times 3 = (5 \times 10 \times 3) + (2 \times 3)$

दोन्ही पदावलीतील पहिली पदे सारखीच आहेत. दुसरे पद 32×5 पेक्षा मोठे आहे असे दर्शविते आणि म्हणूनच 2, 3 आणि 5 पासून आपण बनवू शकणाऱ्या सहा संभाव्य गुणाकारापैकी सर्वात मोठा गुणाकार आहे.

? या घटनेमध्ये सर्वात मोठा अंक हा गुणक म्हणून आम्ही वापरतो. इतर दोन अंकाची मांडणी ही. गुण्य तयार करण्यासाठी उतरत्या क्रमात केलेली आहे.
हे नेहमीच असेच राहील का? बीजगणिताचा उपयोग करुन काढा.
समजा $p, q,$ आणि r हे तीन अंक असे आहेत की $p < q < r$.
या अगोदरच्या पद्धतीनुसार आपल्याकडे सहा संभाव्य गुणाकार असून त्यांचे आम्ही गुणकाने गट केले आहेत.

- $qr \times p, rq \times p$
- $pr \times q, rp \times q$
- $pq \times r, qp \times r$

प्रत्येक जोडीमध्ये मोठ्या दशक अंकाच्या गुण्यासह मोठा गुणाकार तयार करतात. म्हणून आपणाकडे तुलना करण्यासाठी तीन गुणाकार आहेत.

- $rq \times p$
- $rp \times q$
- $qp \times r$

$q > p$ असल्यामुळे आम्हाला असे दिसून येते की, $rp \times q$ हे $rq \times p$ पेक्षा मोठे आहे. यामुळे आपल्याला $qp \times r$ आणि $rp \times q$ मधील तुलना करता येते. जर याचा विस्तार केल्यास आम्हाला मिळते.

- $qp \times r = (10 \times q \times r) + (p \times r)$
- $rp \times q = (10 \times r \times q) + (p \times q)$

पुन्हा एकदा दोन्ही पदावलींचे पहिले पद सारखेच आहे. $r > q$ असल्यामुळे पहिल्या पदावलीचे दुसरे पद मोठे आहे. म्हणून मोठ्यात मोठा गुणाकार $qp \times r$ आहे. सर्वात मोठा अंक हा गुणक असावा या अगोदरच्या निरीक्षणाशी जुळत आहे आणि इतर दोन अंकाची मांडणी गुण्य तयार होण्यासाठी उतरत्या क्रमात केली पाहिजे.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. $\square\square \times \square$ यामध्ये 1, 3 आणि 7 हे अंक भरून मोठ्यात मोठा शक्य असलेला गुणाकार तयार करा.
2. $\square\square \times \square$ यामध्ये 3, 5, आणि 9 हे अंक भरून मोठ्यात मोठा शक्य असलेला गुणाकार तयार करा.

13.6. विभाज्यता उलगडण्याच्या युक्त्या :

आता शुभमला गणिताची युक्ती दर्शविण्याची वेळ मुक्ताची आहे.



? जर आम्ही इतर 2 अंकी संख्या निवडली आणि पायऱ्यांचे अनुकरण केले तर नेहमीच तेथे बाकी शिल्लक राहणार नाही का?

मुक्ताची युक्ती कशी कार्य करते हे, जाणून घेण्याचा प्रयत्न करूया.

समजा *ab* ही एक दोन अंकी संख्या आहे. जेव्हा अंक उलट क्रमाने लिहील्यास ती नवीन संख्या *ba* अशी होईल.

- जर $b > a$ तर $ba > ab$ म्हणून फरक

  $(10b+a) - (10a+b)$ हा आहे.

  $(10b + a) – (10a + b)$

  $= 10b – b – 10a + a$

  $= 9b – 9a = 9 (b – a)$.

  फरकाला 9 ने भाग जातो.

? जर $a > b$ असेल तर काय होईल हे तुम्ही काढू शकाल का?

? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. वर दिलेल्या युक्तीमध्ये जेहा तुम्ही 9 ने भाग देता, तेव्हा भागाकार किती असेल? दोन संख्या आणि भागाकार यामध्ये तेथे संबंध आहे का?

2. वर दिलेल्या युक्तीमध्ये दोन 2 अंकी संख्यामधील फरक काढण्याऐवजी त्यांची बेरीज काढा. काय होईल? उदाहरणार्थ,
   - आम्ही 31 पासून सुरूवात करू. उलट केल्यानंतर आम्हाला 13 मिळते. 31 आणि 13 यांची बेरीज केल्यास आम्हाला 44 मिळते.
   - आम्ही 28 पासून सुरुवात करु. उलट केल्यानंतर आम्हाला 82 मिळते. 28 आणि 82 यांची बेरीज केल्यास आम्हाला 110 मिळते.
   - आम्ही 12 पासून सुरुवात करु. उलट केल्यानंतर आम्हाला 21 मिळते. 12 आणि 21 यांची बेरीज केल्यास आम्हाला 33 मिळते.

     या सर्व संख्यांना 11 ने भाग जातो याचे निरीक्षण करा. हे नेहमीच सत्य असते का? बीजगणिताचा उपयोग करून या दाव्याचे आम्ही समर्थन करू शकतो?

3. कोणतीही तीन अंकी संख्या म्हणजेच *abc* $(100a + 10b + c)$ विचारात घ्या. या अंकाना चक्रियता करून या अंकापासून आणखी दोन 3 अंकी संख्या बनवा. ज्यामुळे bca आणि cab मिळतील. आता तीन संख्या मिळवा. बीजगणिताचा उपयोग करून बेरजेला 37 ने नेहमीच भाग जातो याचे समर्थन करा. त्याला 3 ने सुध्दा नेहमीच भाग जाईल का? (सूचना : 37 च्या कांही गुणकाकडे पहा.)

4. कोणतीही 3 अंकी संख्या म्हणजेच *abc* विचारात घ्या. या अंकांची पुनरावृत्ती करून त्यापासून 6 अंकी संख्या म्हणजेच abcabc बनवा. या संख्येला 7 ने भागा, नंतर 11 ने भागा आणि शेवटी 13 ने भागा. तुम्हाला काय मिळेल? इतर संख्यासह याचा प्रयत्न करा. (सूचना: 7, 11 आणि 13ने गुणा).

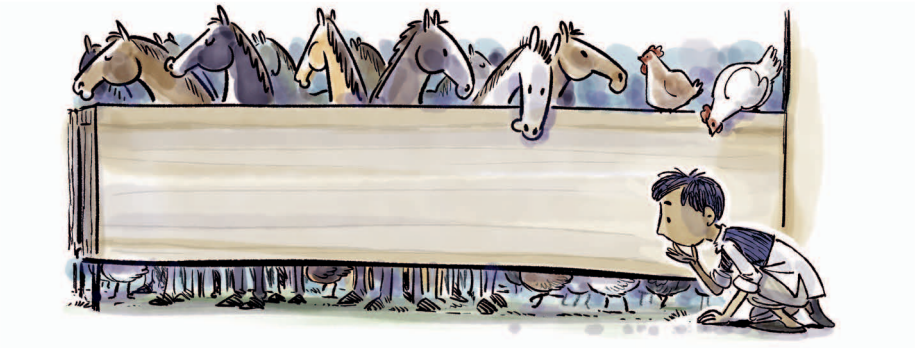
गणिती बोल

5. प्रत्येक देवस्थानाच्या समोर एक जादुई डबके असणारी 3 देवस्थाने आहेत. जर कोणीही या जादुई डबक्यात फुले बुडविली तर फुलांची संख्या दुप्पट होते. एका व्यक्तीकडे कांही फुले आहेत. तो ती सर्व फुले पहिल्या डबक्यात बुडवितो आणि नंतर कांही फुले देवस्थान 1 मध्ये ठेवतो. पुढे तो राहिलेली फुले दुसऱ्या डबक्यात बुडवितो आणि कांही फुले देवस्थान 2 मध्ये ठेवतो. शेवटी तो राहिलेली फुले तिसऱ्या डबक्यात बुडवितो आणि नंतर ती सर्व फुले देवस्थान 3 मध्ये ठेवतो. जर त्याने प्रत्येक देवस्थानात समान संख्येंची फुले ठेवली तर किती फुलांनी त्याने सुरूवात केली होती, प्रत्येक देवस्थानामध्ये त्याने किती फुले ठेवलेली आहेत?

6. एका शेतातील घरात कांही घोडे आणि कोंबड्या आहेत. या प्राण्यांच्या एकूण डोक्यांची संख्या 55 आहे आणि एकूण पायांची संख्या 150 आहे. तर शेतातील घरामध्ये किती घोडे आणि किती कोंबड्या आहेत? हे तुम्ही मूळाक्षर - संख्याशिवाय सोडवू शकाल का?

(सूचना: जर सर्व 55 प्राणी हे कोंबड्या असतील तर त्यांचे पाय किती असतील? ही संख्या आणि 150 यामधील फरक वापरून तुम्ही घोड्यांची संख्या काढू शकाल का?

गणिती बोल



7. आईचे वय हे तिच्या मुलीच्या वयाच्या 5 पट आहे. 6 वर्षात आईचे वय हे तिच्या मुलीच्या वयाच्या 3 पट होईल. तर मुलीचे आताचे वय किती आहे?

8. गौरी आणि नैना या दोन गुराखी मैत्रिणी आहेत. एके दिवशी त्या त्यांच्या गायी घेऊन एकमेकांच्या जवळून जातात. गौरी नैनाला म्हणते की ''तुझ्याकडे माझ्यापेक्षा दुप्पट गायी आहेत ''. नैना म्हणते? ते खरे आहे परंतु जर जर मी तुला माझ्याकडील तीन गायी दिल्या तर आपल्या प्रत्येकीकडे गायींची संख्या सारखीच होईल. तर गौरी आणि नैनाकडे किती गायी आहेत?

9. मी एक छोटी दोशांची गाडी चालवितो आणि माझा खर्च खालीलप्रमाणे आहे.
   - दोसा गाडीचे प्रति दिन भाडे ₹5000 आहे.
   - एक दोसा बनविण्याचा खर्च (सर्व समाविष्ट घटकासह आणि इंधन) ₹10 आहे.

   (i) जर मी दररोज 100 दोसे विकत असेल तर ₹2000 नफा होण्यासाठी माझ्या दोशांच्या विक्रीची किंमत किती असावी लागेल?

   (ii) जर माझे ग्राहक एका दोशासाठी फक्त ₹50 देण्यास तयार असतील तर नफा ₹2000 मिळविण्यासाठी दररोज मी किती दोसे विकण्याचे लक्ष्य ठेवले पाहिजे?

10. खालील अपूर्णांकांच्या क्रमाची किंमत काढा.

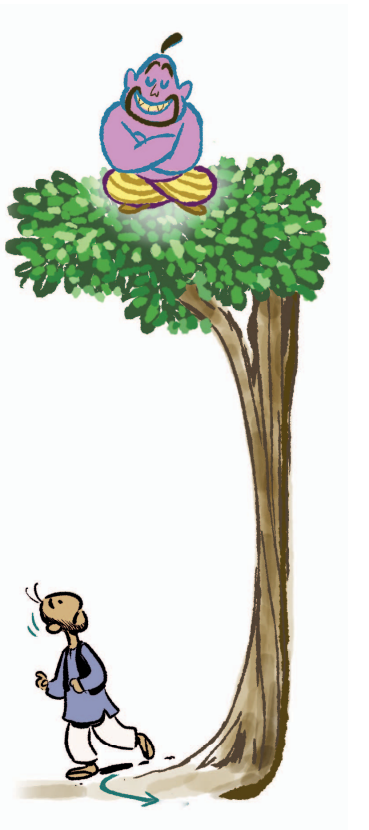
$$\frac{1}{3}, \frac{(1+3)}{(5+7)}, \frac{(1+3+5)}{(7+9+11)}$$

तुम्ही काय निरीक्षण कराल? हे का घडते यांचे वर्णन तुम्ही करू शकाल का?

(**सूचना:** पहिल्या n विषम संख्यांच्या बेरजेविषयी तुम्हाला काय माहिती आहे त्याची आठवण करा.)

11. करीम आणि जिनी (Karim and Genie)

करीम एका झाडाखाली डुलकी घेत होता. त्याला एका जादूच्या दिव्याचे आणि जिनचे स्वप्न पडले. त्याला एक आवाज ऐकू आला. ''अरे स्वामी मी तुमची सेवा करायला आलो आहे''. तो जागा झाला आणि त्याला आश्चर्य वाटले की तो एक जिनी होता!



''तुम्हाला पैसे कमवायचे आहेत का'' जिनीने विचारले. करीमने गोंधळून मूकपणे मान हलविली. तो जिनी पुढे म्हणाला ''तुम्हाला तेथे वडाचे झाड दिसते का? तुम्हाला फक्त एकदा त्याभोवती फिरायचे आहे. तुमच्या खिशातील पैसे दुप्पट होतील.''

करीम ताबडतोब झाडाकडे निघाला, पण जिनीने त्याला थांबविले ''एक क्षण!'' जिनी म्हणाला.

''मी तुमच्यासाठी खूप संपत्ती आणत असल्याने, तुम्ही तुमच्या कमाईतील कांही भाग माझ्यासोबत वाटून घ्यावा. तुम्ही झाडाभोवती फिरताना प्रत्येकवेळी मला 8 नाणी द्यावीत.''

ती रक्कम तुटपुंजी आहे असे समजून करीमने लगेच होकार दिला. तो एकदा झाडाभोवती फिरला. जिनीने सांगितल्याप्रमाणे

त्याच्या खिशातील नाण्यांची संख्या दुप्पट झाली! त्याने जिनीला ४ नाणी दिली. त्याने आणखी एक फेरी मारली. पुन्हा नाण्यांची संख्या दुप्पट झाली. त्याने जिनीला आणखी ४ नाणी दिली. तो तिसऱ्यांदा झाडाभोवती फिरला. पुन्हा नाण्यांची संख्या दुप्पट झाली, पण त्याला भिती वाटली की त्याच्याकडे जिनीला त्याने जेवढी नाणी दिली होती फक्त ४ नाणी शिल्लक राहिली.



करीमला आश्चर्य वाटू लागले की जिनीने त्याला कसे फसविले तेव्हा जिनीने त्याला जाऊ दिले. जोरात हास्य केले आणि गायब झाला.

(i) करीमकडे सुरुवातीला नाणी किती होती?

(ii) जर करीमाला त्याच्याकडे असलेल्या नाण्यांची संख्या वाढवायची असेल तर त्याने प्रति फेरीला किती किंमतीसाठी करार करण्यास सहमती द्यावी?

(iii) त्याच्या जादुई शक्तीद्वारे जिनीला करीमकडे असलेल्या नाण्यांची संख्या माहित असते. जिनीने प्रत्येक फेरीची किंमत कशी निश्चित करावी जेणेकरून त्याला करीमची सर्व नाणी मिळतील?

सारांश

- बीजगणित हे संख्यात्मक नमुने आणि जाणून घेण्यासाठी संख्यात्मक परिस्थिती खूप उपयुक्त आहे. याच कारणामुळे ते गणित, विज्ञान आणि त्यापलीकडे जवळजवळ सर्व क्षेत्रांमध्ये आढळते.
- गणितीय विधानांचे समर्थन करण्यासाठी बीजगणित हे एक अपरिहार्य साधन आहे.
- ''एका संख्येचा विचार करा'' या युक्त्या पिरॅमिडची संख्या, चौकटी, कांही विशिष्ट गुणाकार कमालीकरण हे दिलेल्या अंकाचा वापर करून संख्या बनविण्याचे प्रकार, विभाज्यतेच्या युक्त्या आणि विविध इतर समस्यांचे विश्लेषण करण्यासाठी आम्हाला बीजगणिताचा उपयोग होतो.

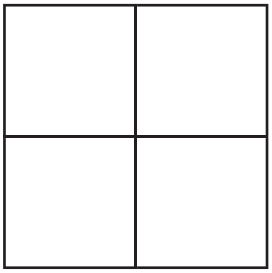
14 क्षेत्रफळ (AREA)

H9Y6Y1

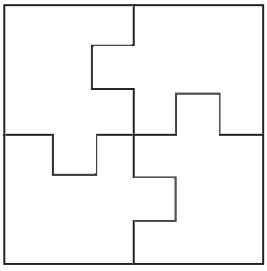
14.1 आयत आणि चौरस

? तुम्ही एका चौरसाचे समान क्षेत्रफळांच्या चार भागामध्ये किती प्रकारे विभाग करू शकता?

खरंतर अशा अनंत प्रकारांचा विचार करता येतो! अशाप्रकारच्या एका भागाकाराचा विचार करू.



आणि प्रत्येक भाग खालीलप्रमाणे बदलू.



प्रत्येक भागामध्ये क्षेत्रफळ हे एका कडेवर संपिडीत केले जाते आणि दुसऱ्या कडेवर विस्तारीत केले जाते. जर संपिडन आणि विस्तार या दोन्हींचे परिमाण समान असेल तर 4 सर्व भाग समान क्षेत्रफळांचे राहतील!

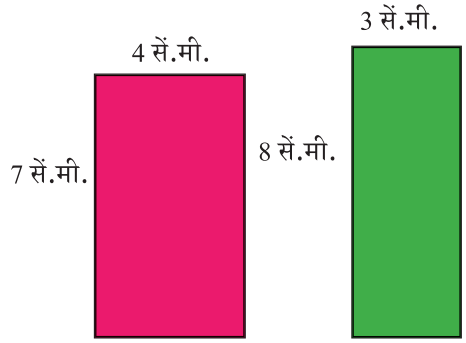
? चौरसाचे समान क्षेत्रफळ असलेल्या 4 भागामध्ये विभाजन करण्यासाठी वेगवेगळ्या सर्जनशील मार्गांचा विचार करण्याचा प्रयत्न करुया.

गणिती बोल

तुम्ही कदाचित रांगोळी कला प्रकार स्वरूप पाहिले असेल ज्यामध्ये रांगोळी पावडरचा उपयोग करून वेगवेगळ्या आकारांचे भाग सुंदरपणे रंगविले जातात.



? जर समानरित्या रंग केला असेल तर यापैकी कोणत्या आयताला रंगविण्यासाठी जास्त रांगोळी पावडरची आवश्यकता असेल ?



प्रत्येक आयतामध्ये गठ्ठ्याला आच्छादीत केलेल्या तंतोतंत (अतिव्यापन) न जुळणाऱ्या एकक चौरसांची संख्या (या घटनेमध्ये चौरसांच्या बाजूची लांबी 1सें.मी) मोजून आम्ही याचे उत्तर देऊ शकतो. स्पष्टपणे बाजूंची लांबी 7 सें.मी. आणि 4 सें.मी. असलेल्या आयतामध्ये $7\times4=28$ चौ. एकक आहेत आणि बाजूंची लांबी आहेत आणि बाजूंची लांबी 8से.मी. आणि 3सें.मी. असलेल्या आयतामध्ये $8\times3=24$ चौ. एकक आहेत.

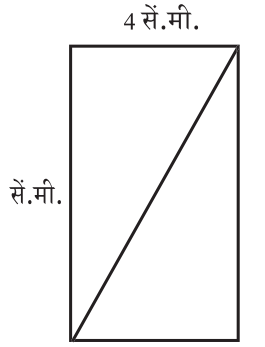
अशाप्रकारे बाजूंची लांबी 7 सें. मी. आणि 4 सें.मी. असलेल्या आयताला रंगविण्यासाठी अधिक पावडरची आवश्यकता आहे. लक्षात घ्या की आम्ही एखाद्या भागाचे क्षेत्रफळ हे दिलेल्या भागाच्या क्षेत्रफळाइतके असलेल्या एकक चौरसांची संख्या (जो अपूर्णांक सुद्धा असू शकेल) मोजून काढतो.

आम्हाला असे दिसून येते की आयतामध्ये असलेल्या एकक चौरसांची संख्या ही त्यांच्या लांबी आणि रुंदी यांच्या गुणाकाराने दिली जाते.

आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

मागील समस्येत दाखविल्याप्रमाणे आयतांची क्षेत्रफळे सामान्यपणे 28 चौ. सें. मी. आणि 24 चौ. सें. मी. किंवा 28 सें. मी^{2} आणि 24 सें. मी^{2} अशी लिहीली जातात.

? या आयतामधील प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती आहे?



आम्हाला असे दिसून येते की आयताचा कर्ण हा त्याला दोन एकरूप त्रिकोणामध्ये विभागतो. म्हणून प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे आयताच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे असते.

एकक चौरसांच्या बाबतीत अर्ध क्षेत्रफळ हे एकक चौरसांच्या अगदी निम्या संख्येने भरते.

म्हणून प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे $\frac{1}{2}\times 7\times 4 = 14$ चौ.सें. मी आहे.

परिमिती हे क्षेत्रफळाचे का मोजमाप असू शकत नाही ?

? क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी आम्ही एकक चौरसांची संख्या का मोजतो? आपण एखाद्या भागाच्या परिमितीचा म्हणजेच त्याच्या सीमेच्या लांबीचा वापर त्याच्या क्षेत्रफळाचे मोजमाप म्हणून करू शकलो नसतो का?

? जर दोन भागांची परिमिती समान असेल तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकत नाही का त्यांचे क्षेत्रफळ समान आहे? किंवा जर एका भागाची परिमिती ही दुसऱ्या भागापेक्षा मोठी असेल तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकत नाही का की त्यांचे क्षेत्रफळ देखील मोठे आहे?

एखाद्या भागाची परिमिती ही त्याच्या क्षेत्रफळाचे सूचक नसते. कारण असे की भागांची परिमिती समान असू शकते परंतु क्षेत्रफळे वेगवेगळी असू शकतात आणि या उलट देखील.

आम्ही दोन भाग देखील भाग 1 आणि भाग 2 असे काढू शकतो की

भाग 1 ची परिमिती > भाग 2 ची परिमिती परंतु

भाग 1 चे क्षेत्रफळ < भाग 2 चे क्षेत्रफळ.

? अशा भागांची उदाहरणे असलेले दोन आयत काढा. जर गरज असेल तर यासाठी आलेख कागदाचा उपयोग करा. (पुस्तकाच्या शेवटी दिलेला आहे.)

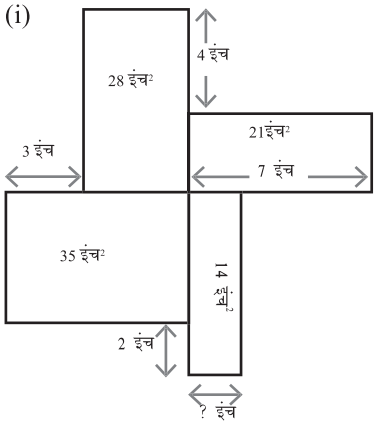
? तसेच इतर आकारांच्या दोन भागांचे उदाहरण देखील असे द्या की जेथे मोठी परिमिती असलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ कमी आहे! तुमच्या उदाहरणामध्ये हा गुणधर्म स्पष्ट दिसला पाहिजे.



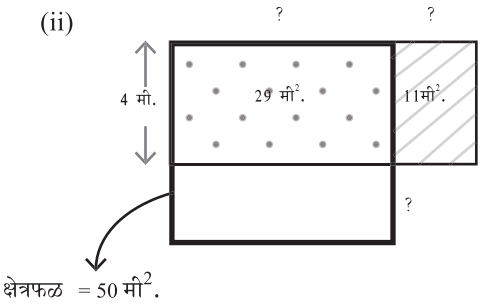
शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. गाळलेली बाजूंची लांबी ओळखा.

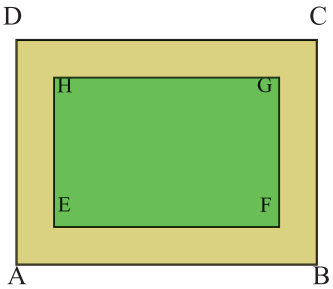
(i)



(ii)



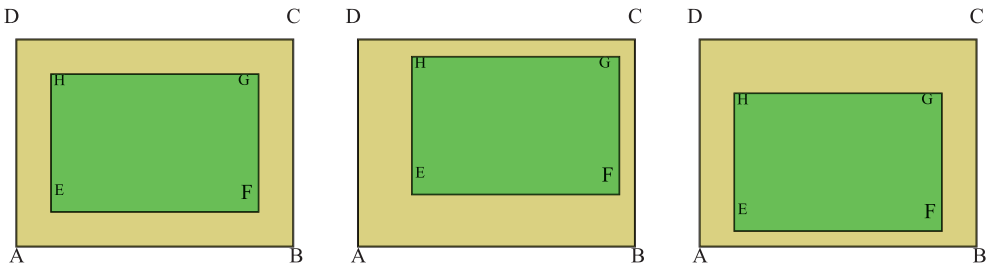
2. *EFGH* या एका आयताकृती उद्यानाभोवती असलेला एक मार्ग आकृतीने दर्शविला आहे. (छायांकीत भाग)



(i) मार्गाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी तुम्हाला कोणत्या मापांची आवश्यकता आहे? एकदा तुम्ही मोजावयाच्या लांबी ओळखल्यानंतर या मापांना तुमच्या आवडीच्या संभाव्य किंमती द्या आणि मार्गाचे क्षेत्रफळ काढा. क्षेत्रफळासाठी सूत्र द्या.
सूत्राचे उदाहरण - आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी
(**सूचना :** *EFGH,* मार्ग आणि *ABCD* यांच्या क्षेत्रफळामध्ये एक संबंध आहे.)

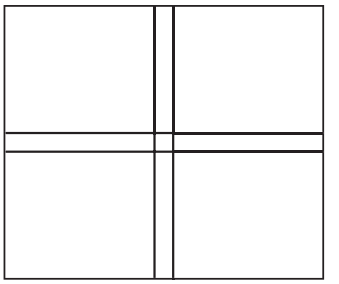
(ii) जर प्रत्येक बाजूच्या मार्गाची रूंदी दिलेली असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ तुम्ही काढू शकाल का? जर नसेल तर तुम्हाला इतर कोणत्या मापांची आवश्यकता आहे? या मापांना तुमच्या आवडीच्या किंमती द्या आणि मार्गाचे क्षेत्रफळ काढा. या मापांचा उपयोग करून क्षेत्रफळासाठी सूत्र द्या.
(**सूचना :** मार्गाचे आयतामध्ये विभाजन करा.)

(iii) जेव्हा बाह्य आयत सरकविल्यास *EFGH* हे आतील आयताकार उद्यान आत दर्शविल्याप्रमाणे ठेवल्यास मार्गाचे क्षेत्रफळ बदलते का?

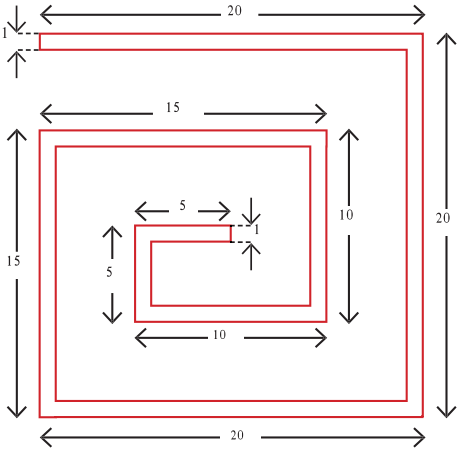


3. आकृती ही 14मी. आणि 12मी. बाजू असलेल्या आणि आडवा मार्ग असलेल्या एका भूखंडाची दर्शविली आहे. आडव्या मार्गाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी तुम्हाला आणखी कोणती मोजमापे आवश्यक आहेत? एकदा तुम्ही मोजावयाच्या लांबी ओळखल्यानंतर या मापांना तुमच्या आवडीच्या संभाव्य किंमती द्या आणि मार्गाचे क्षेत्रफळ काढा. तुम्ही निवडलेल्या मोजमापावर आधारीत क्षेत्रफळासाठी एक सूत्र द्या.

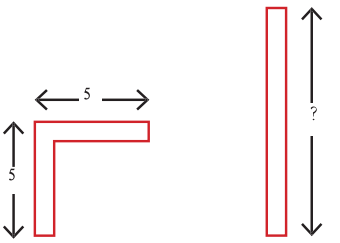
गणिती बोल



4. आकृतीत दर्शविलेल्या सर्पिलाकार नलिकेचे क्षेत्रफळ काढा.

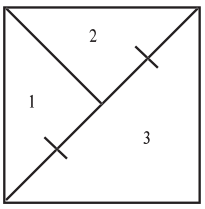


(**सूचना**: क्षेत्रफळ काढण्याचे तेथे वेगवेगळे प्रकार आहेत. येथे एक पध्दत आहे.)



जर डाव्या बाजूला वाकलेल्या नलिके इतकेच क्षेत्रफळ हवे असल्यास सरळ नळीची लांबी किती असायला हवी?

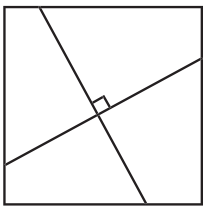
5. या आकृतीमध्ये जर चौरसाच्या बाजूची लांबी दुप्पट केली तर भाग 1, 2 आणि 3 यांच्या क्षेत्रफळात किती वाढ होईल? कारणे द्या.



6. आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे चौरसाच्या आत दोन लंब रेषा काढून चौरसाचे 4 भाग करा.

एक आतील बाजूला छिद्र असलेला मोठा चौरस मिळविण्यासाठी निर्माण झालेल्या भागांची (तुकड्यांची) पुनर्मांडणी एक करा.

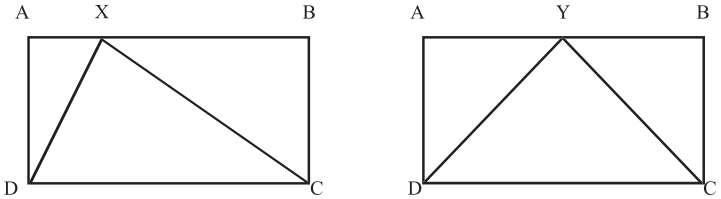
तुम्ही पुठ्ठा, जाड तक्त्याचा कागद किंवा तत्सम साहित्य वापरुन चौरसाची बांधणी करून ही कृती करण्याचा प्रयत्न करा.



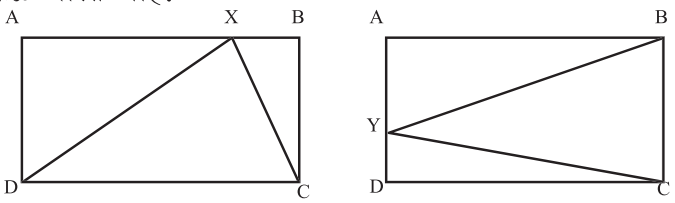
गणिती बोल

त्रिकोण

? दिलेल्या आकृतीमध्ये जर दोन्ही आयत एकसारखे असतील तर ΔXDC किंवा ΔYDC पैकी कोणत्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ जास्त आहे?

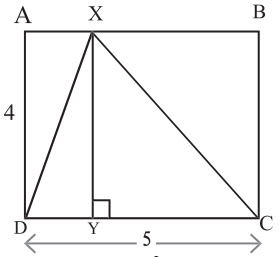


? दिलेल्या आकृतीमध्ये जर दोन्ही आयत एकसारखे असतील तर ΔXDC किंवा ΔYBC पैकी कोणत्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ जास्त आहे.



प्रत्येक घटनेमध्ये X आणि Y वरून उंची कमी केल्याने हे स्पष्ट होते की प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे आयत $ABCD$ च्या क्षेत्रफळाच्या अगदी अर्धे असते.

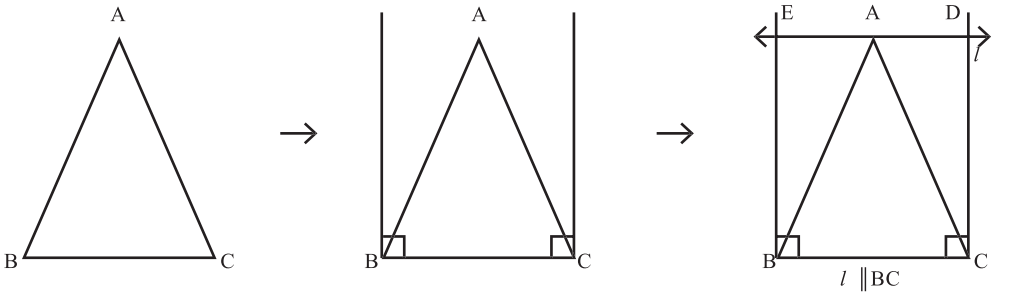
? ΔXDC चे क्षेत्रफळ काढा.



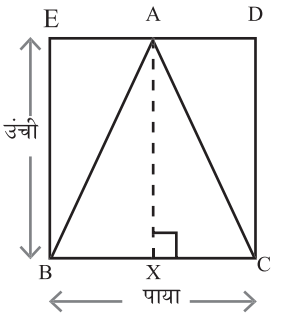
आकृती 7.1

? त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आम्हाला कोणत्या मापांची आवश्यकता आहे? आकृती 7.1 प्रमाणे आम्हाला बाहेरील आयताच्या बाजूंच्या लांबीची आवश्यकता आहे.

? दिलेल्या त्रिकोणातून बाहेरील आयत आम्ही कसा मिळवू शकतो? काढू शकतो ?



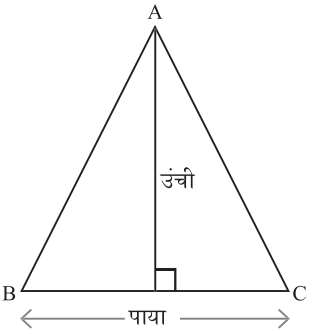
BCDE हा एक आयत आहे. (कसा?) त्याच्या बाजूंची लांबी ही उंची आणि पाया म्हणून घेऊ.



तर, $(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

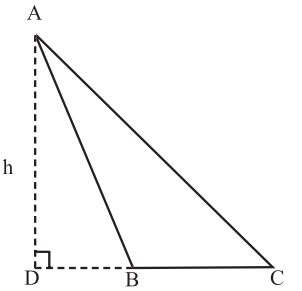
म्हणून *BXAE* हा एक आयत आहे. (कसा?) आयताची उंची ही त्रिकोणाच्या उंची इतकीच आहे.

अशाप्रकारे जर त्रिकोणाची उंची आणि पाया माहित असेल तर आम्ही त्याचे क्षेत्रफळ काढू शकतो.



त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

? ज्या त्रिकोणाला आम्ही *BC* हा पाया घेऊन आयत काढू शकत नाही त्यासाठी हे सूत्र लागू होईल का?



येथे असे पाहण्याचा एक प्रकार आहे. ΔABC चे क्षेत्रफळ हे ΔADC आणि ΔADB च्या क्षेत्रफळांमधील फरक आहे ज्यापैकी आकृती 7.1 प्रमाणे प्रत्येक त्रिकोणाला आयतामध्ये बंदिस्त करता येते.

$$\text{क्षेत्रफळ } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times h \times DC - \frac{1}{2} \times h \times DB$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times (DC - DB)$$

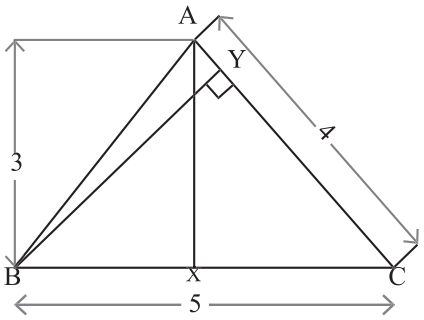
$$= \frac{1}{2} \times h \times BC$$

अशाप्रकारे सर्व प्रकारच्या त्रिकोणासाठी क्षेत्रफळाचे हे सूत्र लागू पडते.

क्षेत्रफळाच्या सूत्राचे कांही उपयोग:

? BY काढा.

त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्राचा उपयोग करुन BY काढता येते.



क्षेत्रफळ (ΔABC) म्हणजे काय?

क्षेत्रफळ $(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times AX \times BC = \frac{15}{2}$ चौ. एकके

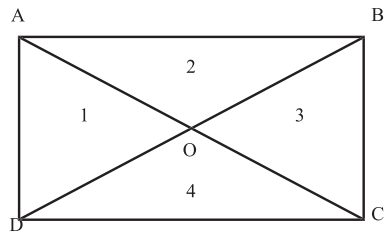
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे सुध्दा लिहू शकतो.

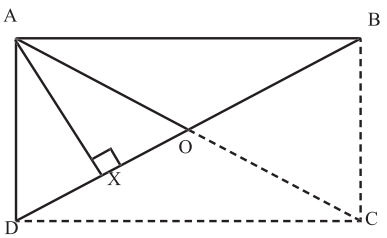
$$\text{क्षेत्रफळ } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BY \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times BY = 2\,BY$$

अशाप्रकारे $2\,BY = \frac{15}{2}$

म्हणून, $BY = \frac{15}{4} = 3.75$ एकके

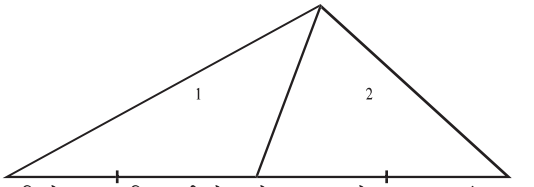
? एका आयताचे कर्ण काढून मिळालेले 4 त्रिकोण सम क्षेत्र (आकृतीमधील 1-4 भाग) आहेत का? स्पष्टपणे 1-4 हे त्रिकोण एकरूप त्रिकोण नाहीत.





त्यांच्या क्षेत्रफळांची तुलना करण्यासाठी कोणत्याही दोन संलग्न त्रिकोणांचा विचार करूया. म्हणजेच 1 आणि 2 म्हणून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या उंची आणि पाया यावर अवलंबून असते. प्रत्येक त्रिकोणाच्या योग्य उंची- पाया या जोडीचा विचार करूया. जर OD आणि OB हे पाया म्हणून घेतले तर आम्हाला असे दिसून येते की दोन्ही त्रिकोणांची उंची सारखीच आहे! आपल्याकडे $OB=OD$ सुद्धा आहे, म्हणून आयताचे कर्ण हे एकमेकांना दुभागतात. म्हणून

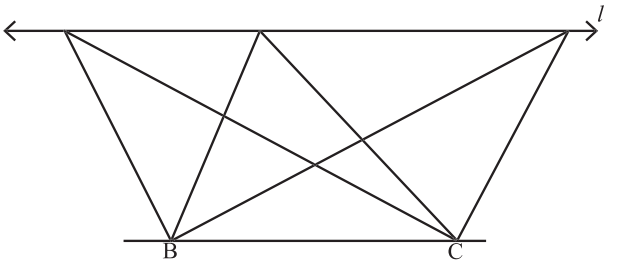
त्रिकोण 1 आणि 2 यांचे क्षेत्रफळ समान आहे. याप्रकारे युक्तीवाद केल्यास आम्ही असे पाहु शकतो की सर्व चार त्रिकोणाची क्षेत्रफळे ही समान आहेत. या समस्येवरून आम्ही खालीलप्रमाणे सामान्य विधान करू शकतो.



त्रिकोण 1 आणि 2 ची क्षेत्रफळे समान आहेत कारण त्यांच्या उंची आणि पायाचे माप सारखेच आहे.

त्रिकोणामध्ये एका शिरोबिंदूला त्यांच्या विरूद्ध बाजूच्या मध्यबिंदूला जोडणारी/सांधणारी रेषा ही त्या त्रिकोणाला दोन समान क्षेत्रफळांच्या त्रिकोणामध्ये विभागते.

एक समान पाया असलेल्या समांतर रेषामधील त्रिकोण

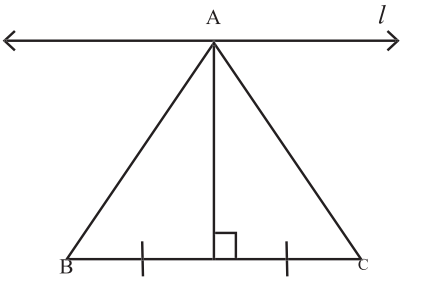


? रेषा $l \parallel BC$. त्यांचा पाया BC असलेल्या वेगवेगळ्या आणि त्याचा तिसरा शिरोबिंदू l वर कोठेतरी असलेल्या त्रिकोणांचा विचार करा.

(i) यापैकी कोणत्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ कमाल आहे आणि कोणत्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ किमान आहे?

(ii) यापैकी कोणत्या त्रिकोणांची परिमिती कमाल आहे आणि कोणत्या त्रिकोणांची परिमिती किमान आहे? येथे, आम्ही फक्त किमान परिमिती असलेला त्रिकोण कसा काढावयाचा ते दर्शवू आणि इतर प्रश्न हे अभ्यासाचे सराव प्रश्न म्हणून सोडवू.

अंतर्ज्ञान असे सुचविते की BC चा लंब दुभाजक रचून किमान परिमिती असलेला त्रिकोण मिळविता येतो.



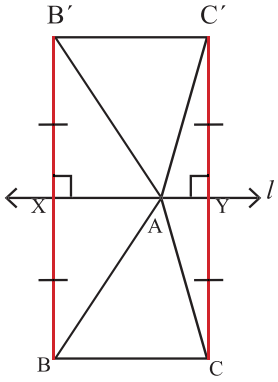
परंतु या सर्व त्रिकोणांमधील कमीत कमी परिमिती असलेला हा त्रिकोण आहे याचे आम्ही कसे समर्थन करु शकतो ?

प्रथमतः लक्षात घ्या की या सर्व त्रिकोणामध्ये BC ही एक समाईक बाजू आहे. म्हणून इतर दोन बाजूंची बेरीज विचारात घेणे पुरेशे आहे.

चला रेषा l ही आरशासारखी आहे याची कल्पना करूया. नंतर आम्हाला त्याखालील सर्व बिंदू आणि रेषांचे प्रतिबिंब मिळेल.

जेव्हा सपाट आरशाच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करताना आम्हाला प्रायोगिकरित्या असे आढळून आले की आरशामागील प्रतिमेचे अंतर हे आरशासमोरील वस्तूच्या (प्रतिमा निर्माण करणाऱ्या) अंतराइतकेच आहे. रेषा l च्या खाली असलेल्या बिंदूच्या परावर्तनाचे स्थान दर्शविण्यासाठी या नियमाचा उपयोग केला जाऊ शकतो.

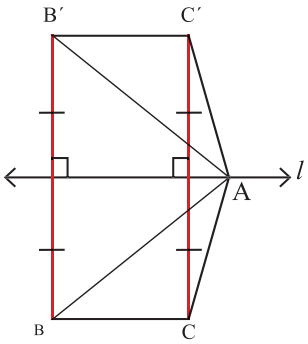
? AB ची लांबी आणि तिचे प्रतिबिंब AB' विषयी आम्ही काय सांगू शकाल?



म्हणून $\Delta AXB \cong \Delta AXB', AB = AB'$

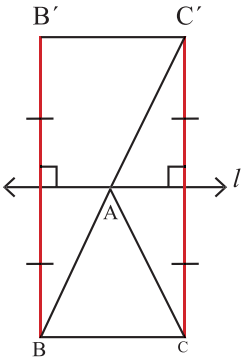
त्याचप्रमाणे $AC = AC'$

म्हणून मार्ग $B \rightarrow A \rightarrow C$ ची लांबी ही $B \rightarrow A \rightarrow C'$ च्या मार्गाच्या लांबी इतकीच आहे.



रेषा l वर बिंदू A हा कोठेही असला तरीही हे सत्य आहे.

म्हणून सर्वात कमी अंतराचा मार्ग $B \rightarrow A \rightarrow C$ देणारा बिंदू A काढणे हे सर्वात कमी अंतराचा शक्य मार्ग $B \rightarrow A \rightarrow C'$ देणाऱ्या शक्य बिंदू A काढण्यासारखेच आहे.



परंतु नंतरच्या समस्येची उकल स्पष्ट आहे. सरळरेषा BC' वर A निवडा. कारण BC' हा कमीत कमी अंतराचा B ते C' पर्यंतचा शक्य मार्ग आहे.

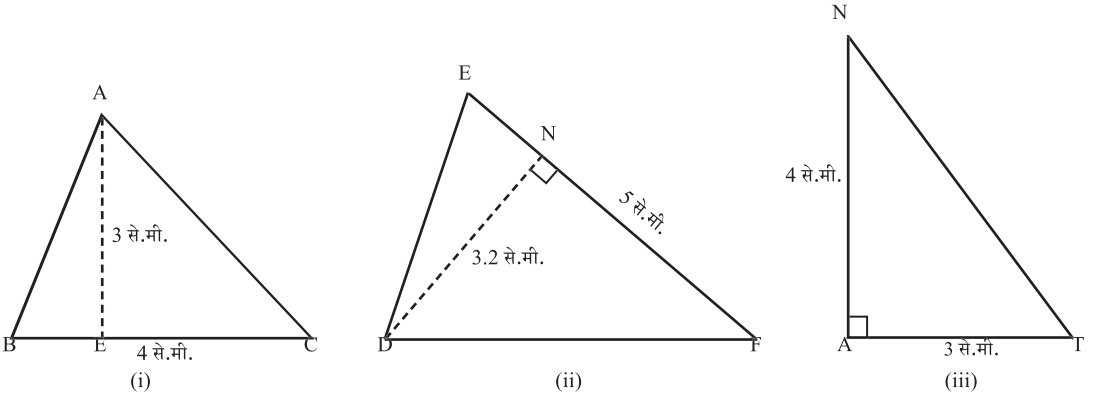
म्हणून ΔABC या त्रिकोणाची किमान परिमिती आहे.

? A हा BC च्या लंबदुभाजकावर आहे का याचे विश्लेषण करा.

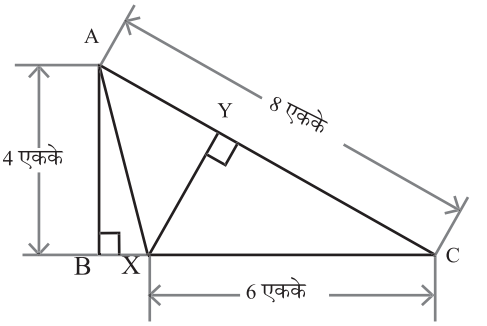
गणिती बोल

शोधा पाहू. (Figure it Out)

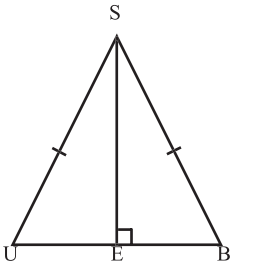
1. खालील त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढा.



2. BY उंचीची लांबी काढा.



3. ΔSUB हा समद्वीभुज त्रिकोण दिलेला असून SE हा UB वरील लंब आहे आणि ΔSEB चे क्षेत्रफळ 24 चौ. एकके आहे तर ΔSUB चे क्षेत्रफळ काढा.



वैदीक बांधकामाशी संबंधित प्राचीन भारतीय भौमितीक ग्रंथ असलेल्या सुलबा - सुत्रामध्ये आपल्याला क्षेत्रफळाच्या विषयावर अनेक मनोरंजक समस्या आढळतात. जेव्हा वैदीक बांधले जाते तेव्हा त्यांचा आकार आणि क्षेत्रफळ अचूक असणे आवश्यक असते. यामुळे अशा प्रकारच्या समस्या उदभवतात जिथे एखाद्याला दिलेल्या आकाराचे त्याच क्षेत्रफळाच्या दुसऱ्या आकारात रूपांतर करावे लागते. सुलबा-सूत्र अशा अनेक समस्यांचे निराकरण करते.

युक्लीडच्या घटकामध्येही अशा समस्या मांडल्या आणि सोडविलेल्या आहेत.

येथे या प्रकारच्या कोन समस्या आहेत.

4. (सुलबा-सूत्र) आयताला समान क्षेत्रफळाच्या त्रिकोणात रूपांतरीत करण्याची पध्दत द्या. (सांगा.)

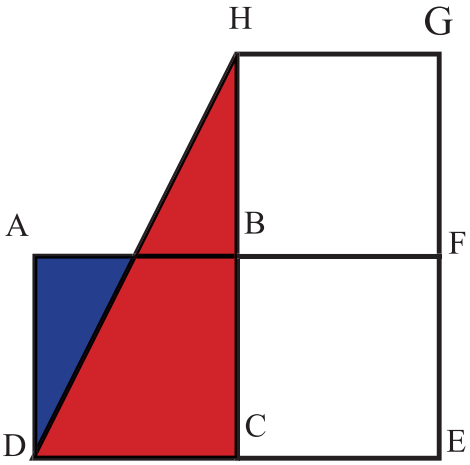
5. (सुलबा - सूत्र) त्रिकोणांचे समान क्षेत्रफळाच्या आयतात रूपांतरीत करण्याची पध्दत द्या. (सांगा.)

6. *ABCD, BCEF* आणि *BFGH* हे एकरूप चौरस आहेत.

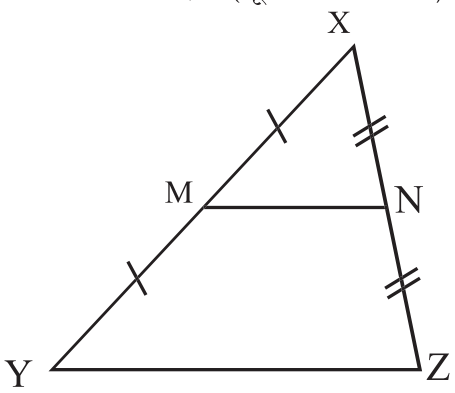
   (i) जर लाल रंगाच्या भागाचे क्षेत्रफळ 49 चौ. एकके असेल तर निळ्या रंगाच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

   (ii) या आकृतीच्या दुसऱ्या आवृत्तीत जर निळ्या आणि लाल रंगाने व्यापलेल्या भागाचे एकूण क्षेत्रफळ 180 चौ. एकके असेल तर प्रत्येक चौरसाचे क्षेत्रफळ किती आहे?

गणिती बोल



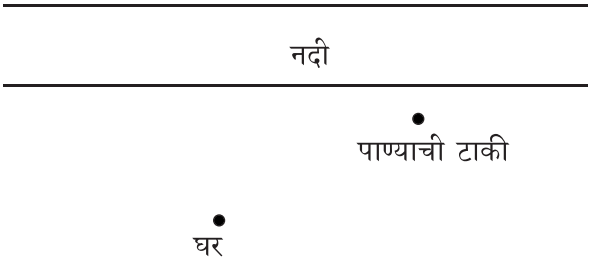
7. जर *M* आणि *N* हे *XY* आणि *XZ* चे मध्यबिंदू आहेत तर ΔXYZ च्या क्षेत्रफळाचा कोणता अपूर्णांक हा ΔXMN च्या क्षेत्रफळाचा आहे? (सूचना: *NY* जोडा)



प्रयत्न करा

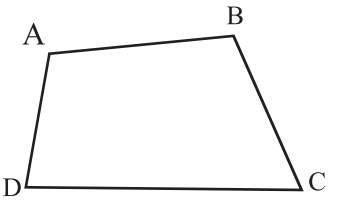
8. सुजलला नदीतून त्याच्या पाण्याच्या टाकीपर्यंत पाणी वाहून नेण्याची गरज आहे. तो त्याच्या घरापासून सुरुवात करतो. तो त्याच्या घरापासून नदीपर्यंत आणि नंतर पाण्याच्या टाकीपर्यंत सर्वात जवळचा मार्ग कोणता घेऊ शकतो? तुमच्या वहीत कच्चा नकाशा पुन्हा तयार करा आणि सर्वात जवळचा मार्ग गिरवा. (आराखडा काढा.)

गणिती बोल



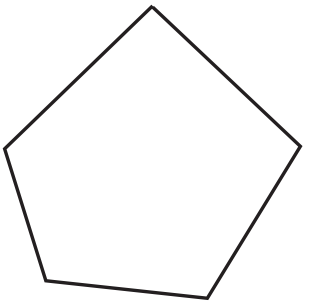
कोणत्याही बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ

या चौकोनाचे क्षेत्रफळ आम्ही कसे काढतो ? यासाठी आपल्याला कोणत्या मोजमापांची आवश्यकता आहे?



जर आम्ही BD सांधल्यास $ABCD$ हा चौकोन दोन त्रिकोणात विभागला जातो. त्यांची क्षेत्रफळे काढून आम्ही $ABCD$ चे क्षेत्रफळ काढू शकतो.

या पंचभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ आम्ही कसे काढतो?

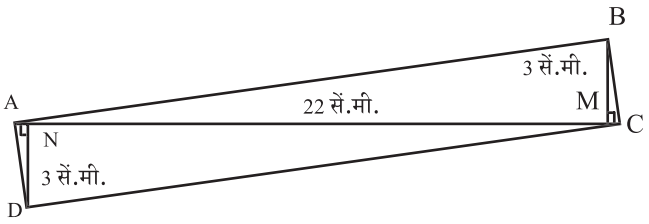


कोणतीही बहुभुजाकृती ही त्रिकोणात विभागता येऊ शकते का?

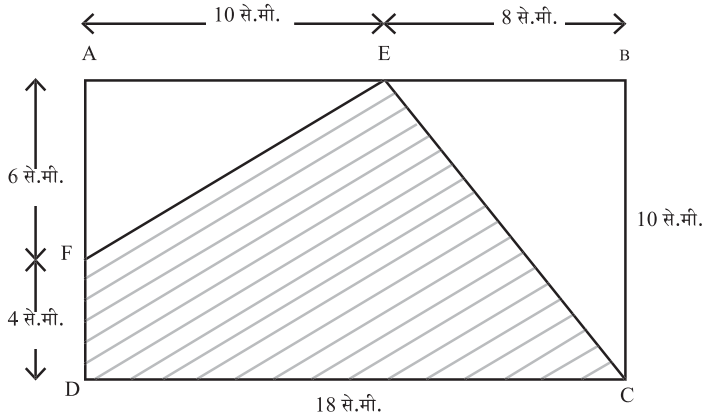
असे दिसून येते की कोणतीही बहुभुजाकृती ही त्रिकोणात विभागता येते. अशाप्रकारे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ कसे काढावयाचे हे जाणून घेतल्यास आम्ही कोणत्याही बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ काढू शकतो.

शोधा पाहू. (Figure it Out)

1) $AC = 22$ सें.मी., $BM = 3$ सें.मी., $DN = 3$ सें.मी., BM हा AC वर लंब काढलेला आहे आणि DN हा AC वर लंब काढलेला आहे हे दिलेले आहे तर $ABCD$ चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.



2. *ABCD* हा एक आयत दिलेला असून छायांकीत भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

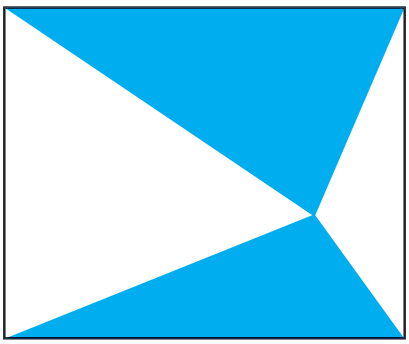


3. एका नियमित षष्टबहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी कोणत्या मापांची तुम्हाला आवश्यकता आहे?

गणिती बोल

4. आयताच्या एकूण क्षेत्रफळाच्या किती अपूर्णांकात क्षेत्रफळ हे निळया भागाचे आहे?

गणिती बोल



5. ज्याचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या दिलेल्या चौकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे असेल असा चौकोन मिळविण्यासाठी एक पध्दत द्या.

गणिती बोल

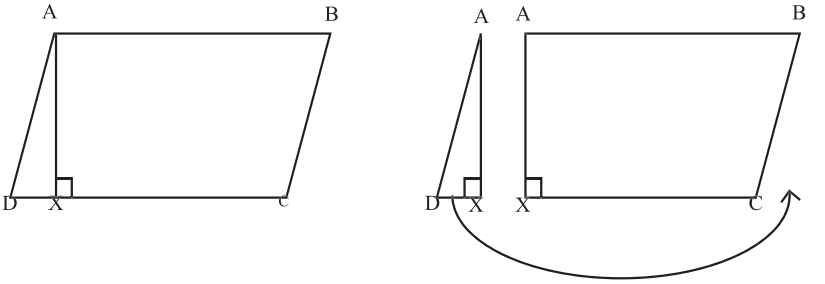
समांतरभुज चौकोन, समभुज चौकोन आणि समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्याची विशेष सूत्रे सिद्ध करू शकाल.

समांतरभुज चौकोन

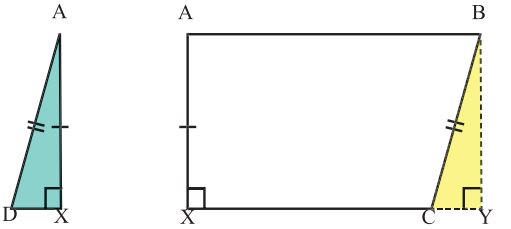
समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे समान क्षेत्रफळाच्या आयतामध्ये रूपांतर करून आम्ही त्याचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी एक विशेष सूत्र सिद्ध करू शकतो.

? समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे समान क्षेत्रफळाच्या आयतामध्ये रुपांतर करण्याची एक पध्दत द्या. एका समांतरभुज चौकोनाच्या कापीव चित्राचा उपयोग करून याचा तुम्ही प्रयत्न करू शकता.

CD वर AX हा लंब रचा. (टाका.) $AX \perp CD$ असे हे थोडक्यात दर्शविले जाते. आम्ही याला समांतरभुज चौकोनाची **उंची** असे म्हणतो. समांतरभुज चौकोन हा ΔAXD आणि $ABCX$ या समलंब चौकोनात कापूया.



? आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे ΔAXD आणि $ABCX$ हा समलंब चौकोन एकत्र बसवून एक आयत मिळू शकेल काय? हे तपासण्याचा एक सोपा मार्ग म्हणजे $ABCX$ ला आयतामध्ये पूर्ण करू शकणारा त्रिकोण ओळखणे आणि नंतर हा त्रिकोण ΔAXD शी एकरूप आहे का ते तपासणे होय.



$\angle X = 90°$ आणि म्हणून $\angle A = 90°$ असे आढळून येते म्हणून $AB \| XC$ आम्हाला एक आयत मिळविण्यासाठी दुसरा काटकोन गरजेचा आहे. (चौथ्या कोनाविषयी काय आहे?) तिसरा काटकोन मिळविण्यासाठी XC उजवीकडे वाढवा आणि नंतर B मधून जाणारी XC ला लंब असणारी एक रेषा रचा. (काढा) ΔBYC हे $ABCX$ ला एक आयत पूर्ण करते. ΔAXD हे त्याच्याशी एकरूप आहे का ?

$BY = AX$ (कारण $ABYX$ हा एक आयत आहे.)

$\angle BYC = \angle AXD = 90°$

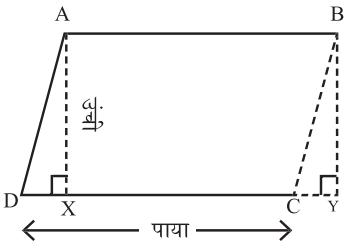
$BC = AD$ (कारण $ABCD$ हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.)

म्हणून काटकोन कर्ण बाजू एकरूपतेच्या गुणधर्मानुसार

$\Delta BYC \cong \Delta AXD$. अशाप्रकारे ΔAXD हे ΔBYC ने व्यापलेल्या भागावर अचूक बसेल आणि समांतरभुज चौकोनाचे एका आयतामध्ये रूपांतर करेल.

एखाद्या आकृतीचे तुकडे करून त्यांची पुनर्रचना करून समान क्षेत्रफळाची वेगळी आकृती मिळविण्याच्या प्रक्रियेला **विच्छेदन** असे म्हणतात.

? समांतरभुज चौकोनाचे आयतामध्ये विच्छेदन करून त्याचे क्षेत्रफळ आम्ही कसे काढतो?



आपल्याकडे आहे.

$ABCD$ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $ABYX$ या आयताचे क्षेत्रफळ

आयताचे क्षेत्रफळ = $AX \times XY$

AX ही समांतरभुज चौकोनाची उंची आहे.

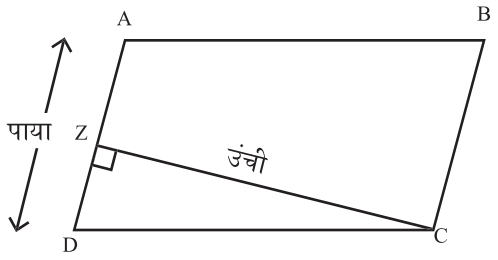
? XY आणि DC मध्ये कांही संबंध आहे का?

$DX=CY$ असल्याने DX मध्ये XC हा समाईक भाग आणि CY मध्ये मिळविल्याने आम्हाला $DC = XY$ हे मिळते. DC हा समांतरभुज चौकोनाचा पाया असल्याने आम्हाला मिळते.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची

? समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे दुसरी बाजू ही पाया आणि त्याच्याशी संबंधित उंची म्हणून घेऊन निश्चित करता येते का?

? समांतरभुज चौकोन हा CZ मधून कापून आयत तयार करण्यासाठी पुनर्रचना करता येऊ शकते का?



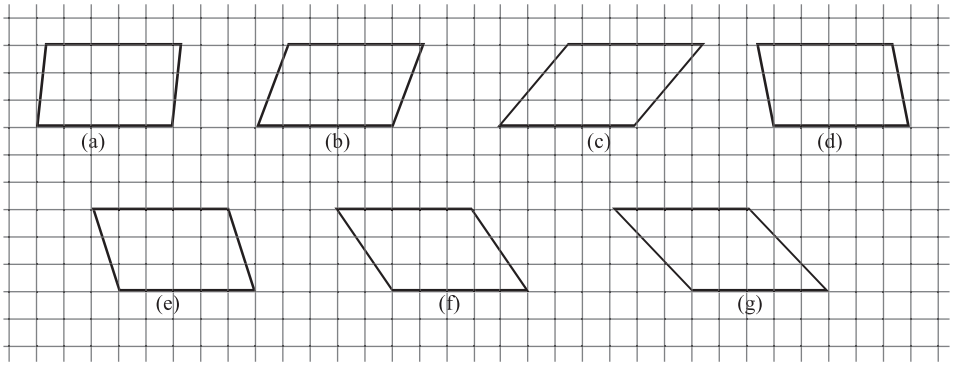
हे खरोखर शक्य आहे असे दिसून येते आणि म्हणून कोणतीही बाजू आणि त्याची संगत उंची ही समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी वापरता येऊ शकते.

? शोधा पाहू. (Figure it Out)

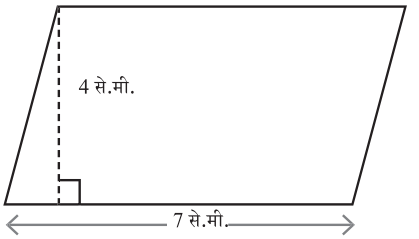
1) खालील आकृतीमधील समांतरभुज चौकोनाचे निरीक्षण करा.

(i) ह्या सर्व समांतरभुज चौकोनांच्या क्षेत्रफळाविषयी आम्ही काय सांगू शकतो?

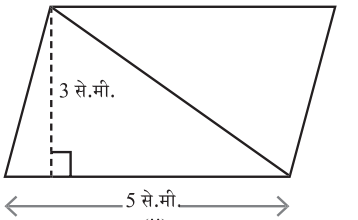
(ii) त्यांच्या परिमितीविषयी आम्ही काय सांगू शकतो? कोणत्या आकृतीची परिमिती जास्तीत जास्त (कमाल) दिसते आणि कोणत्या आकृतीची परिमिती कमीत कमी (किमान) आहे?



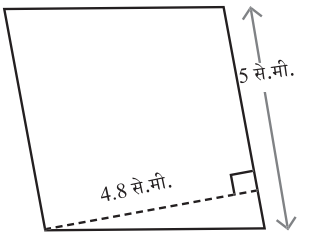
2. खालील समांतरभुज चौकोनांचे क्षेत्रफळ काढा.



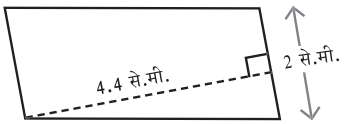
(i)



(ii)

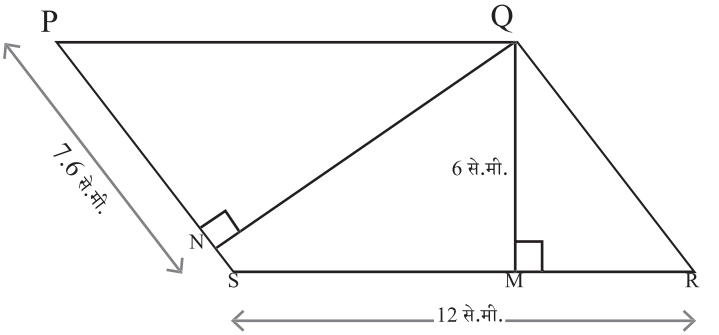


(iii)

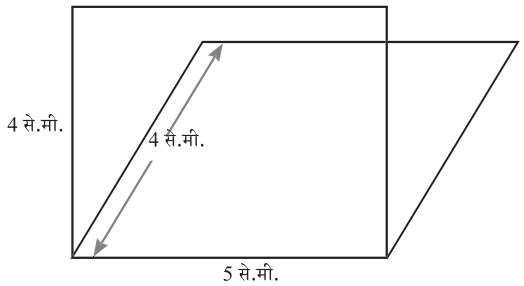


(iv)

3. *QN* काढा.



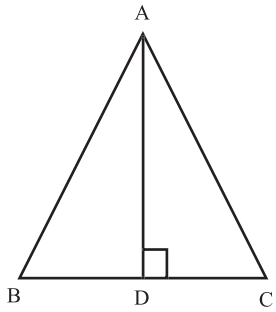
4. बाजूंची लांबी 5 सें.मी. आणि 4 सें. मी. ही सारखीच असणाऱ्या एका आयताचा आणि एका समांतरभुज चौकोनाचा विचार करा. कोणाचे क्षेत्रफळ जास्त आहे? (सूचना: कल्पना करा की ते एकाच समान पायावर रचले आहेत.)



5. दिलेल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट क्षेत्रफळ असलेला एक आयत मिळविण्यासाठी एक पध्दत द्या. तुम्ही कोणत्या वेगवेगळ्या पध्दतींचा विचार करु शकाल?

6. (सुलबा - सुत्र) दिलेल्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाइतकेच क्षेत्रफळ असलेला एक आयत मिळविण्यासाठी एक पध्दत द्या.

7. (सुलबा - सुत्र) समद्वीभुज त्रिकोणाचे रुपांतर हे एका आयतामध्ये एका सोप्या मार्गाने (प्रकारे) विच्छेदनाने करू शकाल. ते कसे करायचे हे तुम्ही काढू शकाल का?



(**सूचना :** ΔADB व ΔADC हे एका आयताचे अर्धे भाग करून बनविता येतात हे दाखवा. एक आयत मिळविण्यासाठी ते कसे एकत्र कराल ते शोधा पाहू. जर आवश्यकता असेल तर कापीव चित्र वापरा.)

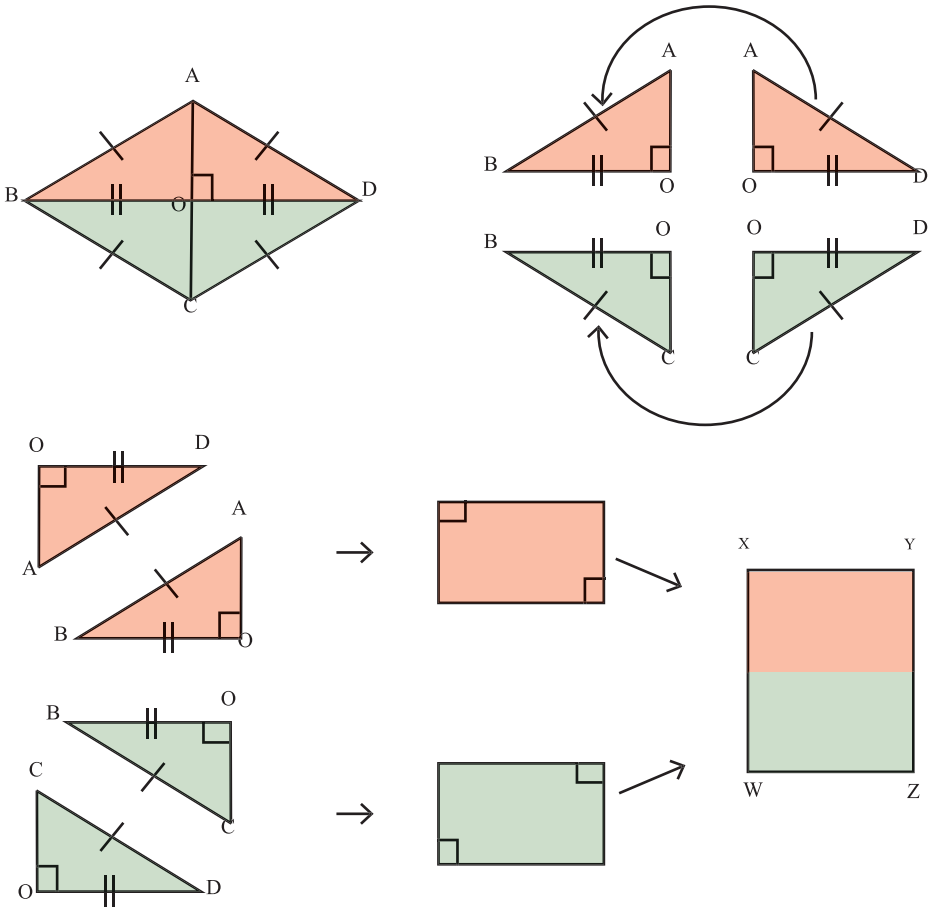
8 (सुलबा - सूत्र) विच्छेदनाने एका आयताचे रूपांतर समद्वीभुज त्रिकोणामध्ये करण्याची एक पध्दत द्या.

9. कोणत्या आकृतीचे क्षेत्रफळ जास्त आहे. समभुज त्रिकोण किंवा त्रिकोणासारख्याच बाजूच्या लांबीचा चौरस? कोणत्या आकृतीचे क्षेत्रफळ जास्त आहे. दोन एकत्रित असणारे एकसारखे समभुज त्रिकोण किंवा त्रिकोणासारख्याच बाजूच्या लांबीचा चौरस? कारणे द्या.

समभुज चौकोन :

समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असल्यामुळे समांतरभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र हे समभुज चौकोनासाठी देखील लागू पडते. तथापि समभुज चौकोनाचे अतिरिक्त गुणधर्म हे विच्छेदनाने समभुज चौकोनाचे त्याच क्षेत्रफळाच्या आयतामध्ये रूपांतर करण्याची आम्हाला दुसरी पध्दत देतात. ही पध्दत एका सुलबा-सूत्रामध्ये आढळते.

? हे सोडविण्याचा प्रयत्न करा.



ABCD हा समभुज चौकोन असल्याने त्याच्या सर्व बाजूंची लांबी समान आहे आणि कर्ण हे एकमेकांचे लंब दुभाजक आहेत. म्हणून ΔABD आणि ΔCBD हे समद्वीभुज त्रिकोण आहेत. त्या प्रत्येकाचे समान क्षेत्रफळ असलेल्या एका आयतामध्ये रुपांतर करता येते आणि नंतर दोन्ही आयत जोडून एकच आयत बनविता येतो. *WXYZ* या आयताचे क्षेत्रफळ हे समभुज चौकोन *ABCD* च्या क्षेत्रफळाइतके आहे.

? *WXYZ* या आयताच्या बाजूंची लांबी किती आहे ?

विच्छेदनानुसार आम्हाला असे दिसून येते की

XW = AC या कर्णाची लांबी आणि

WZ = दुसरा कर्ण BD च्या लांबीचे अर्धे

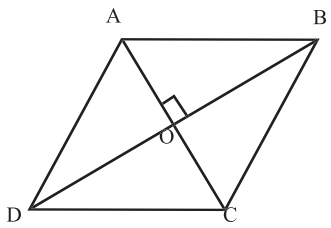
अशाप्रकारे आपल्याकडे आहे.

$$ABCD \text{ समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} = WXYZ \text{ आयताचे क्षेत्रफळ}$$
$$= XW \times WZ$$
$$= AC \times \frac{BD}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

म्हणून,

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णांचा गुणाकार

? समभुज चौकोन $ABCD$ चे क्षेत्रफळ हे ΔADB आणि ΔCDB. यांचे क्षेत्रफळ काढून सुद्धा निर्धारीत केले जाऊ शकते. यावरून आम्हाला कोणते सूत्र मिळते.



कर्ण हे एकमेकांना लंब असल्यामुळे

आपल्याकडे आहे.

क्षेत्रफळ $(\Delta ADB) = \frac{1}{2} \times AO \times BD$ आणि

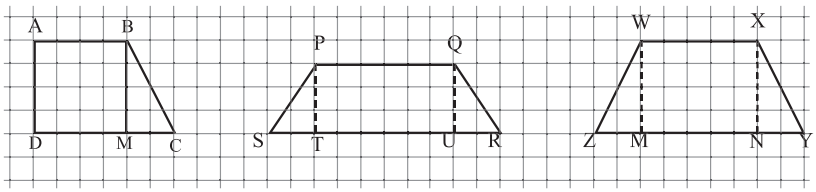
क्षेत्रफळ $(\Delta CDB) = \frac{1}{2} \times CO \times BD$ आणि

$ABCD$ समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = क्षेत्रफळ (ΔADB) + क्षेत्रफळ (ΔCDB)

? समभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळासाठी त्याच्या कर्णांच्या स्वरुपात समान सूत्र आम्हाला मिळते हे दर्शविण्यासाठी पदावलीला सरळरूप द्या.

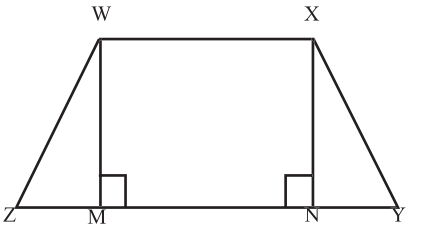
समलंब चौकोन (Trapezium)

? ज्यांचे क्षेत्रफळ मोजता येईल अशा आकृत्यांमध्ये विभाजन करून खालील समलंब चौकोनांचे क्षेत्रफळ काढा.



आयत आणि त्रिकोणामध्ये विभाजन करून समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्याचा एक मार्ग आहे.

? WX || ZY असणाऱ्या एका $WXYZ$ या समलंब चौकोनाचा विचार करा. त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



$WM \perp ZY$ आणि $XN \perp ZY$ (WM आणि XN हे ZY वरील लंब आहेत)

? $WXNM$ हा एक आयत आहे?

$\angle MWX = \angle NXW = 90°$, $WX \perp ZY$ असल्यामुळे आणि छेदिकेच्या एकाच बाजूस असणाऱ्या आंतरकोनांची बेरीज $180°$ आहे. (WM आणि XN समान आहेत.) म्हणून $WXNM$ हा एक आयत आहे.

आपल्याकडे आहे

क्षेत्रफळ $WXYZ$ = क्षेत्रफळ (ΔWMZ)) + क्षेत्रफळ $WXNM$ + क्षेत्रफळ (ΔXNY)

$= 1/2 \times MZ \times WM + WX \times WM + 1/2 \times NY \times XN$

आम्हाला आवश्यक असलेल्या लांबीना मूळाक्षर संख्या देऊन समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढूया.

समजा $MZ = x$, $WM = XN = h$, $WX = a$, $NY = y$

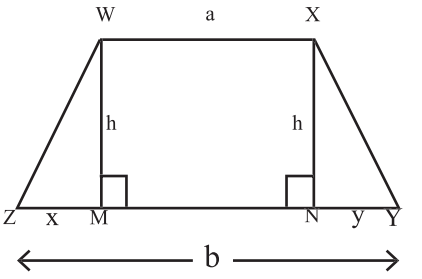
म्हणून आम्हाला मिळते

क्षेत्रफळ $\frac{1}{2} hx + ha + \frac{1}{2} hy$

$= h(\frac{1}{2} x + a + \frac{1}{2} y)$

$= h(\frac{x + y + 2a}{2})$

$= \frac{1}{2} h(x + y + 2a)$.



एका समांतर बाजूची लांबी आम्ही a घेतली आहे. दुसऱ्या समांतर बाजूची लांबी b घेऊया. समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे a, b आणि h च्या स्वरुपात व्यक्त करू शकाल का?

क्षेत्रफळाच्या पदावलीतील $x + y$ हे a आणि b असे बदलल्यास $b = x+y+a$ असे आढळून येते. दोन्ही बाजूतून a वजा केल्यास आम्हाला मिळते.

$$x+y=b-a$$

याचा उपयोग करून आम्हाला मिळते.

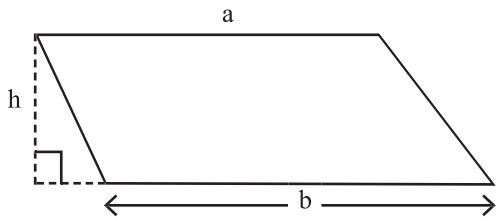
क्षेत्रफळ $WXYZ = \frac{1}{2} h(b - a + 2a)$

$= \frac{1}{2} h(a + b)$

म्हणून,

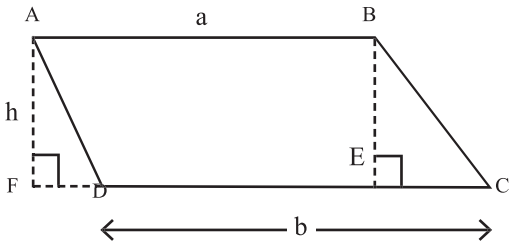
समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $= \frac{1}{2}$ ×उंची×समांतर बाजूंची बेरीज

? अशा दिसणाऱ्या समलंब चौकोनासाठी हे सूत्र लागू पडेल काय ?



हे साध्य करण्याचे वेगवेगळे मार्ग तेथे आहेत जे खाली रेखाटले आहेत. युक्तीवाद पूर्ण करा.

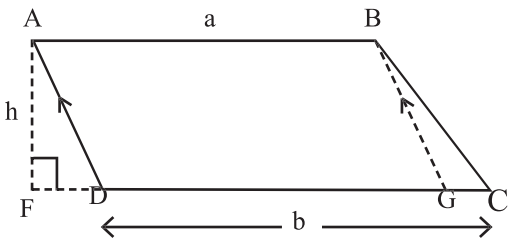
पध्दत 1: आयत आणि त्रिकोण (Rectangle and Triangles)



ABCD चे क्षेत्रफळ = *ABED* चे क्षेत्रफळ + *ΔBEC* चे क्षेत्रफळ

ABED चे क्षेत्रफळ = *ABEF* चे क्षेत्रफळ – *ΔAFD* चे क्षेत्रफळ

पध्दत 2: समांतरभुज चौकोन आणि त्रिकोण (Parallelogram and Triangle)



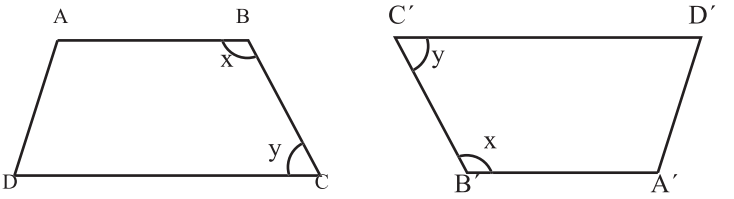
BG ∥ AD काढा.



? कोणत्याही समलंब चौकोनासाठी पध्दत 2 ही कार्य करू शकेल का?

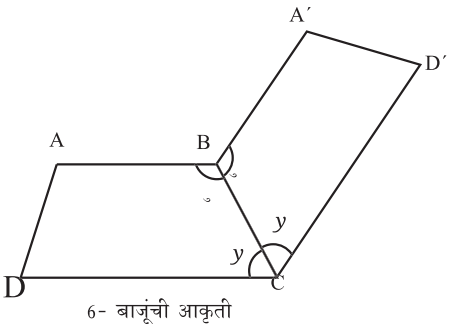
समलंब चौकोनाच्या दोन प्रतिंचा उपयोग करून क्षेत्रफळ काढणे.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्याचा तेथे दुसरा एक मनोरंजक मार्ग आहे. AB।। CD असलेल्या समलंब चौकोनाच्या दोन प्रति विचारात घेऊया. दुसरी प्रत दर्शविल्याप्रमाणे फिरवा.

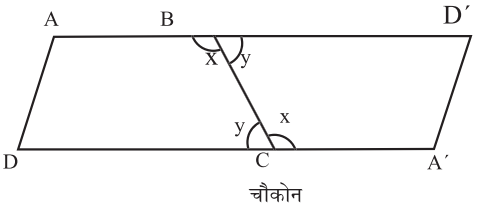


? जेव्हा दोन समलंब चौकोन BC मधून जोडले असता आम्हाला कोणती आकृती मिळेल?
6- बाजूंची एक आकृती किंवा 4-बाजूंची आकृती (चौकोन) या शक्यता आहेत.

शक्यता (Possibilities)



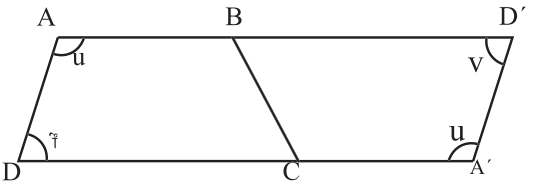
6- बाजूंची आकृती



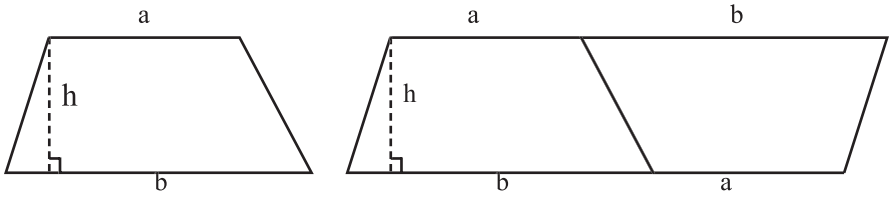
चौकोन

x आणि y या कोनांची बेरीज पाहून आम्ही पहिली शक्यता नाकारू शकतो. AB || CD असल्याने $x+y = 180^0$ हे आपल्याकडे आहे. कारण ते छेदिकेच्या (BC) एकाच अंगाचे आंतर कोन आहेत. म्हणून $AB\acute{D}$ आणि $A\acute{C}D$ या सरळरेषा आहेत. म्हणून परिणामी आकृती ही एक चौकोन आहे.

? हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे?
समलंब चौकोनाच्या इतर दोन कोनांकडे पाहूया.



$u + v=180^0$ आपल्याकडे आहे. म्हणून AD||$\acute{D}A\acute{}$ कारण छेदिका $A\acute{}D$ च्या एकाच बाजूस असणाऱ्या आंतर कोनांची बेरीज 180^0 आहे. अगोदर आपल्याकडे $A\acute{D}$ || $A\acute{}D$ असल्यामुळे $A\acute{D}A\acute{}D$ हा प्रत्यक्षात एक समांतरभुज चौकोन आहे.

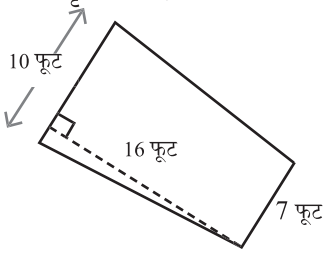


समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

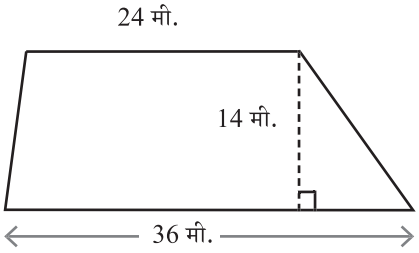
$= \frac{1}{2} \; h(a+b)$

शोधा पाहू. (Figure it Out)

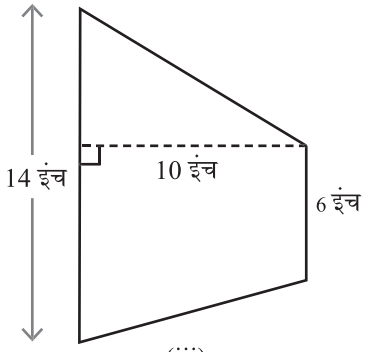
1. 20 सें.मी. आणि 15 से.मी. कर्ण असलेल्या एका समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.
2. विच्छेदनाचा उपयोग करून एका आयताचे समान क्षेत्रफळाच्या एका समभुज चौकोनामध्ये रूपांतर करण्याची एक पध्दत लिहा.
3. खालील आकृत्यांचे क्षेत्रफळ काढा.



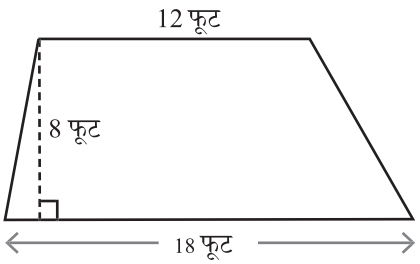
(i)



(ii)



(iii)

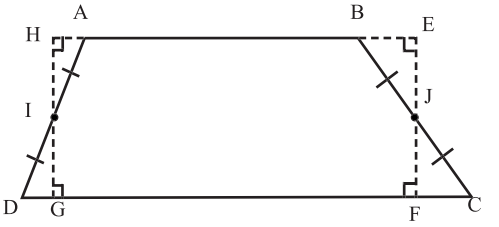


(iv)

4. (सुलबा - सूत्र) विच्छेदनाचा उपयोग करून समद्वीभुज समलंब चौकोनाचे आयतामध्ये रूपांतर करण्याची एक पध्दत सांगा.

5. *ABCD* या समलंब चौकोनाला समान क्षेत्रफळाच्या *EFGH* या एका आयतामध्ये रूपांतर करण्याचा येथे एक मार्ग आहे.

गणिती बोल



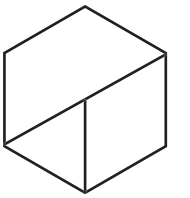
ABCD हा एक समलंब चौकोन दिलेला आहे. *EFGH* या आयताचे शिरोबिंदू आम्ही कसे काढू शकतो?

गणिती बोल

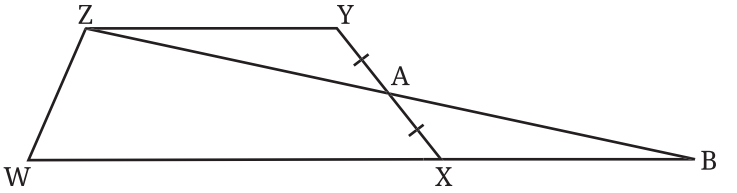
(सूचना : जर $\Delta AHI \cong \Delta DGI$ आणि $\Delta BEJ \cong \Delta CFJ$ तर समलंब चौकोनाचे आणि आयताचे क्षेत्रफळ समान असते.)

6. समलंब चौकोनाच्या क्षेत्रफळाइतकेच आयतामध्ये क्षेत्रफळ रुपांतर करण्याच्या कल्पनेचा उपयोग करा आणि उलट पक्षी, समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ 144 चौ.सें.मी. असणारा एक चौकोन रचा.

7. आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे एक नियमित षष्टबहुभुजाकृती ही समलंब चौकोन, समभुज त्रिकोण आणि एका समभुज चौकोनात विभागलेली आहे. त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर काढा.



8. *ZYXW* हा एक समलंब चौकोन असून $ZY \| WX$. तसेच *A* हा *XY* चा मध्यबिंदू आहे. समलंब चौकोन *ZYXW* चे क्षेत्रफळ हे ΔZWB च्या क्षेत्रफळाशी समान आहे असे दाखवा.



वास्तविक जीवनातील क्षेत्रफळे: (Areas in Real Life)

? *A4* कागदाच्या क्षेत्रफळाचा तुम्ही काय विचार कराल? त्याच्या बाजूंची लांबी 21 सें.मी. आणि 29.7 सें.मी. आहे. तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

? तुम्ही शाळेत किंवा घरी वापरत असलेल्या टेबलाच्या वरील पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ किती आहे असे तुम्हाला वाटते? तुमच्या टेबलावर किती *A4* कागद बसू शकतात याची दृश्यीकरणाने कदाचित कल्पना करण्याचा प्रयत्न तुम्ही करू शकता का?

टेबल आणि खूर्च्यांसारख्या लाकडी साहित्यांची कांही वेळेला परिमाणे ही इंच आणि फूट मध्ये मोजतात.

1 इंच = 2.54 सें.मी.

1 फूट = 12 इंच

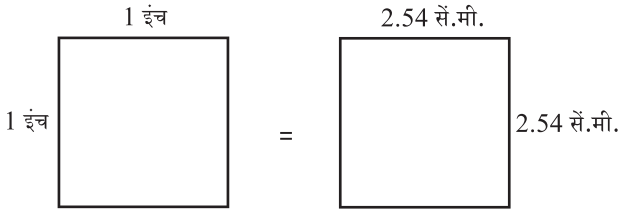
? खालील लांबी या सेंटी मीटरमध्ये व्यक्त करा.

(i) 5 इंच *(ii)* 7.4 इंच

? खालील लांबी या इंचमध्ये व्यक्त करा.

(i) 5.08 सें. मी *(ii)* 11.43 सें. मी.

? 1चौ. इंचमध्ये किती चौ. सें.मी. असतात?



म्हणून 1चौ.इं. = $(2.54)^2$ चौ.सें.मी. = 6.4516 चौ.सें.मी.

? 10चौ इं. म्हणजे किती चौ.सें.मी. आहे?

10 चौ.इं. = 10×6.4516 चौ.सें.मी. = 64.516 चौ. सें.मी.

? 161.29 चौ.सें.मी. चे रूपांतर चौ. इंचमध्ये करा. प्रत्येक 6.4516 चौ. सें.मी. ने चौ.इं. मिळते. म्हणून 161.29 चौ. सें.मी. = $\frac{161.29}{6.4516}$ चौ.इं.

? भागाकाराचे मूल्यांकन करा?

? तुमच्या वर्ग खोलीचे क्षेत्रफळ किती आहे याचा तुम्ही विचार कसा कराल?

सामान्यपणे वर्गखोली, घर इत्यादींचे क्षेत्रफळ चौ. फूट किंवा चौ.मी. मध्ये मोजतात.

? 1 चौ. फूट म्हणजे किती चौ.इंच आहे?

? तुमच्या शाळेचे क्षेत्रफळ किती आहे असे तुम्हाला वाटते? अंदाजीकरण करा आणि त्याची प्रत्यक्ष माहितीशी तुलना करा.

मोठ्या शेताचे क्षेत्रफळ सुध्दा एकरमध्ये मोजले जाते.

1 एकर = 43,560 चौ. फूट

या एकका व्यतिरिक्त भारतातील वेगवेगळ्या भागातील क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी वेगवेगळ्या स्थानिक एककांचा वापर करतात. जसे की बिघा, गज, काठा, धुर, सेंट, अंकनम इत्यादी.

? तुमच्या भागातील क्षेत्रफळ मोजण्याचे स्थानिक एकक काढा.

? तुमच्या गावाचे/नगराचे/शहराचे क्षेत्रफळ किती आहे असे तुम्हाला वाटते? अंदाजीकरण करा आणि त्याची प्रत्यक्ष माहितीशी तुलना करा.

मोठे क्षेत्रफळ हे चौ.कि. मीटरमध्ये मोजले जाते.

? एका चौ.कि.मी. मध्ये किती चौ.मी. आहेत?

? तुमचे गांव/नगर/शहर हे तुमच्या शाळेपेक्षा किती पट मोठे आहे?

? *(i)* भारतातील आणि *(ii)* जगातील सर्वात मोठे क्षेत्रफळ असलेले शहर काढा.

? *(i)* भारतातील आणि *(ii)* जगातील सर्वात कमी क्षेत्रफळ असलेले शहर काढा.

सारांश

- त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × पाया × उंची
- कोणत्याही बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ हे त्रिकोणामध्ये विभाजन करून मोजता येते.
- समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची
- समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णांचा गुणाकार
- समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × उंची × समांतर बाजूंची बेरीज

LEARNING MATERIAL SHEETS

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

Isometric Grid

Sexual Abuse of Children and Punishments under the Protection of Children from Sexual Offences Act, 2012

As per Section 2(d) of the POCSO Act, 2012,
A "Child" means any person below the age of 18 years.

Sexual Offence	Punishment
Penetrative Assault – Any person who commits penetrative sexual assault on a child. (Section 3)	Rigorous imprisonment not less than 10 years, which may extent to life imprisonment, and fine. (Section 4)
Aggravated Penetrative Sexual Assault – Penetrative sexual assault committed under aggravated circumstances. (Section 5)	Rigorous imprisonment not less than 20 years, which may extend to life imprisonment or death, and fine. (Section 6)
Sexual Assault – Touching the private parts of a child or making the child touch any person for sexual intent. (Section 7)	Imprisonment not less than 3 years, which many extents to 5 years, and fine. (Section 8)
Aggravated Sexual Assault – Sexual assault committed under aggravated circumstances. (Section 9)	Imprisonment not less than 5 years, which may extend to 7 years, and fine. (Section 10)
Sexual Harassment of a Child (Section 11)	Imprisonment which may extend to 3 years, and fine. (Section 12)
Use of a Child for Pornographic Purposes (Section 13)	Imprisonment up to 5 years and fine; higher punishment for subsequent offences. (Section 14)
Storage or Possession of Pornographic Material Involving a Child (Section 15)	Imprisonment and fine as prescribed, which may extend to 3 years.
Abetment of an Offence under POCSO (Section 16)	Punishment prescribed for the offence abetted. (Section 17)

Necessary Steps to Be Taken in Case of Sexual Abuse of a Child

- Any person having knowledge of a sexual offence must report the matter immediately to the Special Juvenile Police Unit (SJPU) or the Local Police Station. (Section 19)
- The Child shall be produced before the Child Welfare Committee (CWC) or the Special Court within 24 hours for care and protection.
- The child shall be provided medical examination and treatment immediately, free of cost., at the nearest hospital.
- In case of a girl child, medical examination shall be conducted by a female doctor, as far as possible, in the presence of parents or a trusted person. (Section 27)
- The identity of the child shall not be disclosed through any media, including name, address, photograph, or any identifying details. (Section 23)
- As per Rule 7 of the Protection of Children from Sexual Offences Rules, 2020, where an interim compensation to meet the immediate needs of the child.
- As per Section 44 of the Protection of Children from Sexual Offences Act, 2012, the Karnataka State commission for Protection of Child Rights (KSCPCR) shall monitor the effective implementation of the provisions of the Act.

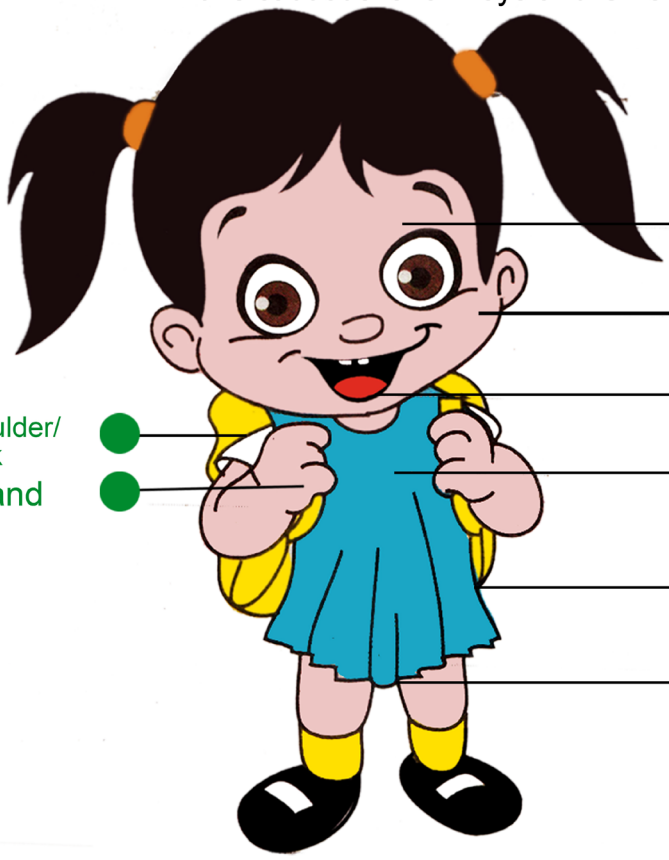
Our Commitment
Towards a Violence-Free and Child-Sate Society

Children be cautious !!! Be alert

Your body belongs only to you,You have all the rights
to keep safe and protect it always.
Safe and Unsafe touches on your body

See the picture and understand

this cautious is for Boys and Girls



Unsafe Touch (BAD TOUCH) – **parts of your body where nobody should touch (except parents and in their presence only doctors can touch)**

Safe touch (GOOD TOUCH) –**can touch only when required**

When you feel Unsafe Touch or any other mischief,please Say loudly
NO.. Don't.. Stop it..and Scream, push the person aside and move to a safer place,
be brave and inform about it, to your parents & Trusted adult and register a complaint

Published by :Distict Administration -08532-229011, Zilla Panchyat-228448
Department of Police –235635/ 235001 / 235100 / 100 /1091 District Child Protection Unit–280670,
Department of Women and Child Develpoment–226292, Unicef Child Protection Project –230610. Raichur

Be Smart, Be Safe, Be Happy

Picture courtesy : Prajavani, Bhoomika 26-07-2014

unicef