கர்நாடக அரசு

# கணிதம்

# MATHEMATICS

**10**

## பத்தாம் வகுப்பு

**TENTH STANDARD**

## பகுதி - 2

**PART - 2**

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

National Council of Educational Reserch and Training

**Karnataka Textbook Society (R)**
6th Cross, Malleshwaram,
Bengaluru - 560 003.

# பொருளடக்கம்

## பகுதி - 2

V9P6Q6


| வ.என் | பாடம் | பக்கம் |
|---|---|---|
| 8 | முக்கோணவியலின் அறிமுகம் (Introduction to Trigonometry) | 1 - 24 |
| 9 | முக்கோணவியலின் சிலப் பயன்பாடுகள் (Some Applications of Trigonometry) | 25 - 37 |
| 10 | வட்டங்கள் (Circles) | 38 - 49 |
| 11 | வட்டங்கள் சம்மந்தப்பட்ட பரப்புக்கள் (Areas Related Circles) | 50 - 57 |
| 12 | புறப்பரப்புகளும் கன அளவுகளும் (Surface Areas and Volumes) | 58 - 70 |
| 13 | புள்ளியியல் (Statistics) | 71 - 105 |
| 14 | நிகழ்தகவு (Probabililty) | 106 - 127 |
| A2 | கணிதவியல் மாதிரியமைத்தல் (Mathematical Modelling) | 128 - 142 |
| | விடைகள் (Answers) | 143 - 150 |


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# முக்கோணவியலின் அறிமுகம்

# INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY

Y7A3L9

# 8

***There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.***

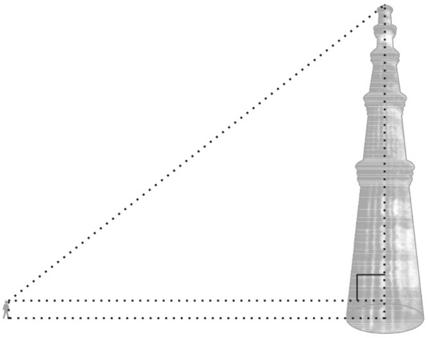
**J.F. Herbart (1890)**

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

## 8.1 அறிமுகம் :

உன்னுடைய முந்தைய வகுப்புகளில், முக்கோணங்கள், குறிப்பாக செங்கோண முக்கோணங்களைப் பற்றி ஏற்கனவே நீ படித்திருப்பாய். நமது சுற்றுப்புறசூழலில் இருந்து, நாம் செங்கோண முக்கோணங்களை கற்பனை செய்து பார்க்கும் வகையில் அமைந்த சிலவற்றை எடுத்துக்கொள்க, எடுத்துக்காட்டாக :

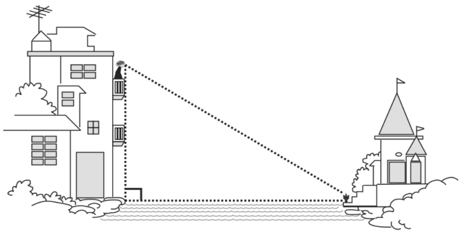
1. ஒரு பள்ளிக்கூட மாணவர்கள் குதுப்மினாரை பார்க்கிறார்கள். இப்பொழுது, ஒரு மாணவன் மினாரின் உச்சியை பார்ப்பதாகில், படம் 8.1 இல் காட்டியப்படி, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை கற்பனை செய்யலாம். மினாரின் உயரத்தை உண்மையில் அளந்துபார்க்காமல் மாணவனால் கண்டுபிடிக்க முடியுமா?



படம் 8.1

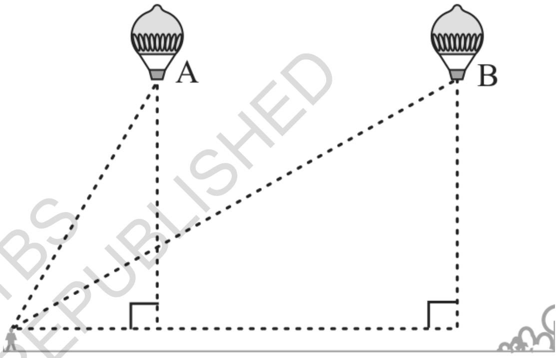
2. நதிக்கரையில் அமைந்திருக்கும் தனது வீட்டின் மாடியின் பால்கனியில் ஒரு சிறுமி உட்கார்ந்திருப்பதாக எண்ணிக் கொள். நதிக்கரைக்கு மற்றொரு பக்கத்தில் அமைந்திருக்கும் கோவிலின் படிக்கட்டில் உள்ள ஒரு பூந்தொட்டியை கீழ்நோக்கி பார்க்கிறாள்.

படம் 8.2 ஐ காட்டியப்படி இந்த நிலையில் ஒரு செங்குத்த முக்கோணம் இருப்பதாக கற்பனை செய்துக் கொள். அந்த நபர் உட்கார்ந்த இடத்தின் உயரத்தைக் கொண்டு உன்னால் நதியின் அகலத்தை கண்டுப்பிடிக்க முடியுமா?



படம் 8.2

3. ஒரு உஷ்ண காற்றுடைய பலூன் (Ballon) காற்றில் பறப்பதாக எண்ணிக்கொள், ஆகாயத்தில் ஒரு குறிப்பான இடத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் பலூனை சிறுமி பார்த்தாள் மற்றும் அவள் தாயிடம் ஓடி அதைப்பற்றி அவள் கூறினாள். பலூனைப் பார்க்க தாய் விரைந்து வீட்டை விட்டு வெளியே போனாள். இப்பொழுது தொடக்கத்தில் புள்ளி A இல் பலூன் பறந்த இடத்ததை சிறுமி குறிப்பிட்டாள். தாயும் மற்றும் மகளும் இருவரும் வெளியே வந்து பார்க்கும் போது, மற்றொரு புள்ளியான B க்கு பலூன் ஏற்கனவே பயணித்துவிட்டது. தரையிலிருந்து Bக்கான உயரத்தை நீ கண்டுப்பிடிக்க முடியுமா?




படம் 8.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மேலே கொடுக்கப்பட்ட நிலமைகளிலும், தூரம் அல்லது உயரத்தை சில கணக்கியல் நுட்பங்களை பயன்படுத்தி கண்டுபிடிக்கலாம், அது கணித கிளையின் கீழ் வருவதை ''முக்கோணவியல்'' என அழைக்கலாம். Tri (இன்பொருள் மூன்று), gno (இன் பொருள் பக்கங்கள்) மற்றும் metry (இன் பொருள் அளவுகள்) என்பது கிரேக்க வார்த்தைகளிருந்து வருவிக்கப்பட்டது. உண்மையில், ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் மற்றும் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள சம்பந்தத்தை பற்றி படிப்பதே முக்கோணவியல் ஆகும். ஈஜிப்ட் பற்றும் பேபிலோனியாவில் பதிவு செய்யப்பட்ட முக்கோண வியலின் மேல் முன்னதாகவே செய்த

பணியாகும். பூமியிலிருந்து கிரகங்கள் மற்றும் நட்சத்திரங்களின் தூரத்தை இதை பயன் படுத்தி முந்தைய வான சாஸ்திரியர்கள் கண்டு பிடித்தனர். இன்று வரைக்கும் முக்கோண வியலின் அடிப்படையின் மேல் பௌதிக விஞ்ஞானம் மற்றும் இயந்திர கலைவண்ணத்தை முன்னேறிய முறைகளை பயன் படுத்தியது உயர்ந்த அளவு கொழில் நுட்டக்கலையைப்பற்றி ஆராயும் விஞ்ஞானமாகும்.

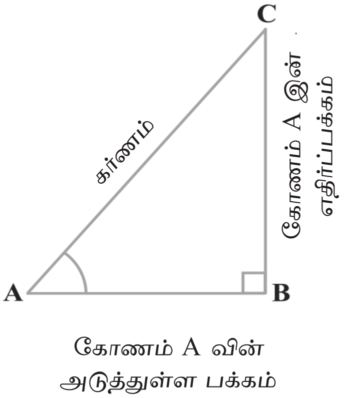
இந்த பாடத்தில் குறுங்கோணங்களுக்கு சம்பந்தமுடைய ஒரு செ ங்குத்த முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் சில விகிதங்களைப்பற்றி நாம் படிப்போம். இதனை கோணத்தின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் என அழைக்கலாம். குறுங்கோணங்களுக்கு மட்டும்நாம் நம்முடைய கலந்துறையாடலை நாம் கட்டு படுத்தவேண்டும். எப்படியிருப்பினும், இந்த விகிதங்களை மற்றொடு கோணங்களுக்கு கூட பரப்பலாம். $0^o$ மற்றும் $90^o$ கோணங்களின் அளவுகள் முக்கோணவியல் விகிதங்களாக கூட விவரிக்கலாம், விகிதங்களாகிய இவைகளை சில முற்றொருமைகளை ஏற்படுத்தும் மற்றும் சில குறிப்பிட்ட கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் கணக்கிடலாம், இதனை முக்கோணவியல் முற்றொருமை என அழைக்கலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

## 8.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் :

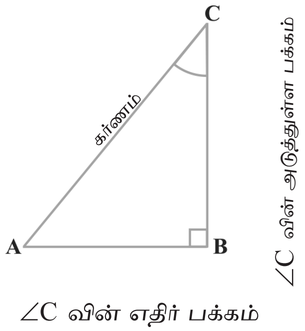
8.1 பிரிவினில், வெவ்வேறு நிலமைகளில் உருவான கற்பனைக் கேற்ற சில செங்கோண முக்கொணங்களை நீ பார்கலாம்.

8.4 படத்தில் காட்டியபடி ஒரு செங்கோண முக்கோண மான ABC ஐ எடுத்துக் கொள் என்க இங்கே, ∠CAB (அல்லது சுருக்கமாக, கோணம் A) என்பது ஒரு குறுங்கோணம். கோணம் A வை பொருத்தவரை பக்கம் BC இன் இடத்தை கவனிக்கவும். ∠A இன் எதிர் முகம் இதுவாகும். கோணம் A இன் எதிர்புற பக்கமென நாம் அழைக்கலாம். AC என்பது செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமாகும், மற்றும் ∠A இன் ஒரு பகுதியான பக்கம் AB ஆகும். ஆகையால், கோணம் A வை அடுத்துள்ள பக்கம் என அழைக்கலாம்.




படம் 8.4

(படம் 8.5ஐ பார்) $\angle A$ இன் இடத்தில் $\angle C$ என நீ கருதும்போது பக்கங்களின் இடங்கள் மாறும் என்பதை கவனி.




படம் 8.5

முந்தைய வகுப்புகளில் 'விகிதம்' பற்றி நீ படித்திருப்பாய், ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் உள்ளடங்கிய விகிதங்கள் சிலவற்றை நாம் இப்பொழுது விவரிக்கலாம்.

செங்கோண முக்கோணமான ABC இல் ( படம் 8.4 ஐ பார்) $\angle A$ இன் முக்கோணவியலுக்கான விகிதங்களை பின் வருமாறு விவரிக்கலாம்:

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ வின் எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ வின் அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ வின் எதிர்ப் பக்கம்}}{\angle A \text{ வின் அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{கர்ணம்}}{\angle A \text{ வின் எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{கர்ணம்}}{\angle A \text{ வின் அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\angle A \text{ வின் அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\angle A \text{ வின் எகிர்ப்பக்கம்}} = \frac{AB}{BC}$$

sin A , cos A , tan A , cosec A , secA மற்றும் cot A முறையாக மேலேயுள்ள விகிதங்கள் போல விவரிக்கபட்டுள்ளன. cosec A , secA , cot A முறையாக, sin A , cos A , tan A விகிதங்களின் தலை கீழிகள் ஆகும் என்பதை கவனி

$$\text{அதோடு, } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\text{மற்றும்} \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ஆகையால், ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் குறுங்கோணத்தின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் ஆனவை பக்கங்களின் நீளம் மற்றும் கோணத்தின் இடையேயுள்ள சம்பந்தத்தை கூறும் ஒன்றாகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

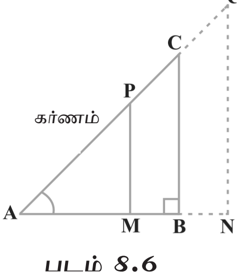
செங்கோண முக்கோணத்தில், கோணம் Cஇன் முக்கோணவியலின் விகிதங்களை விவரிக்க நீ ஏன் முயற்சிக்க கூடாது? (படம் 8.5 ஐ பார்)

கி.பி. 500 இல் ஆர்யபட்டாவால் செய்யப்பட்ட ஆர்யபட்டியம் என்ற புத்தகத்தில், இன்று நாம் பயன் படுத்தும் வழியில் 'sine' என்பது முதல் முதலில் பயன்படுத்தப்பட்டது. அரை நாணிற்கு அர்தஜ்யா (ardya-jya) என்ற சொல்லை ஆர்யபட்டா பயன் படுத்தினார். போக போக ஜ்யா (jya) அல்லது ஜிவா (jiva) என்பது அதன் அதன் சுருக்கமாயிற்று. ஆர்யபட்டியத்தை அரபிய மொழியில் பெயர்த்தல் ஆகும்போது, ஜிவா (jiva) என்ற சொல் அப்படியே நிலைத்துவிட்டது. ஜிவா என்ற சொல் சைனஸ் (sinus) ஆக மொழிபெயர்த்தலாகியது. அதன் அர்த்தம் வளைவு (curve) ஆகும். அரேபிக் மொழி பெயர்ப்பிலிருந்து சொல் ஆனது, அதனை சென் (sine) போல பயன் படுத்தலாம். ஐரோப்பிய நாடு முழுவதும் உள்ள கணக்கு புத்தகங்களில் அது பொதுவாக்கப்பட்டது ஆங்கில வானவியல் பேராசிரியர் எட்மன்டு குன்டர் (1581-1626) 'சைன்' (sin) குறியீட்டின் சுருக்கத்தை முதன் முதலில் பயன் படுத்தினார்.

ஆர்யபட்டா
C.E. 476 - 550

cosine மற்றும் tangent ஆகிய சொற்கள் பிறகு வந்தவை ஆகும். cosine என்பது நிரப்புக் கோணத்தின் sine - ஐக் கண்டுபிடிக்க முயன்ற போது ஏற்ப்பட்ட ஒன்றாகும். ஆர்யபட்டா இனை கோடிஜ்யா (kotijya) என அழைத்தார். எட்மன்டு குன்டர் (Edmund Gunter) உடன் பிறந்தது co-sinus என்ற பெயர் ஆகும். 1674 இல், ஆங்கில கணித வல்லுநர் ஸர் ஜோனாஸ் மூரே (Sir Jonas Moore) முதலில் பயன்படுத்திய சுருக்கப்பட்ட குறியீடு 'cos' ஆகும்.

**குறித்துவை :** பயன்படுத்தப்பட்ட sin A என்ற குறியானது, கோணம் A வின் sin A என்பதன் சுறுக்கம் sin A என்பது sin மற்றும் A இன் பெருக்கல் தொகை அல்ல, அதேப்போன்று cos A என்பது cos மற்றும் A இன் பெருக்கல் தொகை அல்ல, அதே போன்ற விளக்கம் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கும் கூட பொருந்தும்.




படம் 8.6

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போழுது, கர்ணம் AC இன் மீது ஒரு புள்ளி Pஐ யும் நீட்டப்பட்ட AC இன் மீது புள்ளி Q ஐ யும் எடுத்து கொள். AB க்கு செங்குத்தமாக PM மற்றும் நீட்டப்பட்ட AB க்கு செங்குத்தமாக QNஐ வரைக (படம் *11.6*ஐ பார்). $\Delta CAB$ இல் $\angle A$, $\Delta PAM$ இல் $\angle A$ இன் அல்லது $\Delta QAN$ இல் $\angle A$ இன் ஆகியவற்றின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் எப்படி வேறுபட்டு இருக்கும்?

இதற்கான விடை, முக்கோணங்களாகிய இவைகளை முதலில் பார்க்வும். $\Delta PAM$ ஆனது $\Delta CAB$க்கு வடிவொத்தமாகுமா? பாடம் *6*லிருந்து, AAவடிவொப்புமை கட்டளையை நினைவுக்கூறுக. கட்டளையை பயன்படுத்தி, முக்கோணங்களான PAM மற்றும் CAM வடிவொத்தவை என நீ பார்க்கலாம். ஆதாலால், வடிவொத்த முக்கோணங்களின் தன்மைப்படி, முக்கோணங்களின் ஒத்திசைவுப்பக்கங்கள் சம விகிதங்களாகும்.

ஆகையால் நாம் பெறுவது $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$

இதிலிருந்து நாம் கண்டு பிடித்தது $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$

அதேப்பொன்று, $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$

மற்றும் மேலும் இம்மாதிரி.

$\Delta CAB$ இல் கோணம் Aவின் முக்கோணவியல் விகிதங்களானவை, $\Delta PAM$ இல் கோணமான Aஇன் முக்கோணவியல் விகிதங்களில் இருந்து வேறுபடாது என இதுகாட்டும்.

இதே வழியில், $\Delta QAN$ இல் கூட sin A இன் மதிப்பு (மற்றும் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களையும்) மாறாமல் உள்ளதா என நீ சரிபார்க்க வேண்டும்.

நம்முடைய கவனிப்பிலிருந்து, கோணம், ஒன்றேயாகி தொடர்ந்து இருப்பின், முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களின் வேறுபாடால், முக்கோணவியல் விதங்களின் மதிப்புகள் வேறுபடாது என்பது இப்பொழுது தெளிவாகிறது.

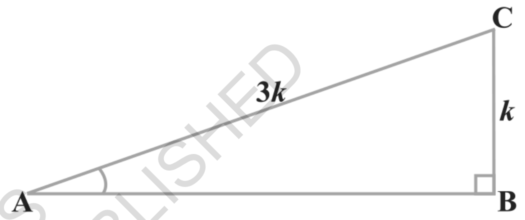
**கவனிக்க :** வசதியின் பொருட்டு, $(\text{sine } A)^2$, $(\cos A)^2$ முதலியன வற்றை முறையே அதற்க்கு பதிலாக $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ முதலியனவாக நாம் எழுதலாம், ஆனால் $\text{cosec } A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (இது சைனின் தலை கீழி A என அழைக்கலாம்) $\sin^{-1} A$ வெவ்வேறு பொருளை தரும். அதைப்பற்றி உயர்வகுப்புகளில் கலந்துரையாடலாம். இதேப்போன்று வழக்கங்களை கையாண்டால் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கு இது பொருந்தும். சில நேரங்களில், $\theta$ (தீட்டா) கிரேக்க எழுத்தை கோணங்களை குறிக்க பயன்படுத்தலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ஒரு குறுங்கோணத்தின் ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் விவரித்துள்ளோம். விகிதங்களில் ஏதேனும் ஒன்று தெரியுமெனில், மற்ற விகிதங்களை நாம் பெறமுடியுமா? பார்போம் அதனை.

ஒரு முக்கோணம் ABC இல், $\sin A = \frac{1}{3}$ அதன் பொருள் இப்படியாகும் $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ அதாவது ***1:3*** விகிதத்தில் முக்கோணமான ABC இன் பக்கங்களின் நீளங்கள் BC மற்றும் AC ஆகும். படம் *8.7* பார்) ஆகையால், BC ஆனது K விற்கு சமமாகில், AC ஆனது 3k ஆகும்)

அங்கே k என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் ஆகும். கோணம் A வின் மற்ற முக்கோணவியலின் விகிதங்களை கண்டுபிடிக்க நமக்கு தேவை மூன்றாம் பக்கமான AB இன் நீளமாகும். உனக்கு பைத்தாகோரஸ் தேற்றம் நினைவுள்ளதா? அதனை நீ பயன்படுத்தி தேவையான நீளமுள்ள AB ஐ கண்டு பிடி.



படம் *8.7*

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - k^2 = 8^2 = (2\sqrt{2}k)^2$

ஆதலால், $AB = \pm 2\sqrt{2}k$

ஆகையால் நாம் பெறுவது $AB = 2\sqrt{2}k$ ($-2\sqrt{2}$ ஆக ஏன் AB இருக்க கூடாது?)

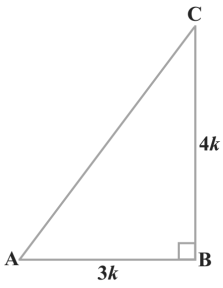
இப்பொழுது $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

அதேப்போன்று, கோணம் A இன் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களை நீ பெறமுடியும்.

குறிப்புகள் : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் நீளமான பக்கம் கர்ணமாகும் என்பதால்₹₹, sin A அல்லது cos A வின் மதிப்பு எப்பொழுதும் ***1*** க்கு குறைவாக இருக்கும் (அல்லது, குறிப்பிட்ட ஒரு சூழலில் ***1***க்கு சமமாக இருக்கும்)

எடுத்துக்காட்டுகளான சிலவற்றை பார்ப்போம்.

**எடுத்துக்காட்டு 1 :** $\tan A = \frac{4}{3}$ கொடுக்கப்பட்டது, கோணம் A இன் மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களை கண்டுபிடி.



படம் 8.8

**தீர்வு :** முதலில் ஒரு செங்கோண முக்கோணமான $\Delta ABC$ ஐ வரைக (படம் 8.8 ஐ பார்)

இப்பொழுது நமக்கு தெரிந்த அந்த $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

ஆதலால் BC = 4k ஆகில், AB = 3k அங்கே. k என்பது ஒரு மிகை எண்ணாகும்.

இப்பொழுது, பைத்தகோரஸ் தேற்றத்தை பயன் படுத்தி, நாம் பெறுவது

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3K)^2 = 25k^2$

ஆகையால், AC = 5k

இப்பொழுது, விவரணங்களான அதனை பயன்படுத்தி முக்கோணவியல்களான விகிதங்கள் எல்லாவற்றையும் நாம் எழுதலாம். நாம் பெறுவது

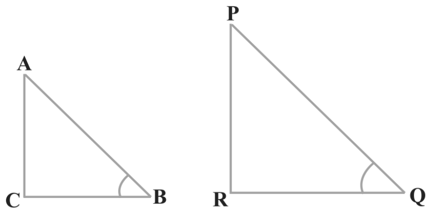
$$\text{Sin } A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

ஆதலால், $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\text{cosec } A = \frac{1}{\text{Sin } A} = \frac{5}{4}$

மற்றும் $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

**எடுத்துக்காட்டு 2 :** sinB = sinQ இருக்குமாறு குறுங்கோணங்களான $\angle B$ மற்றும் $\angle Q$ ஆகில், $\angle B = \angle Q$ என நிரூபி.



படம் 8.9

**தீர்வு :** $\Delta ABC$ மற்றும் $\Delta PQR$ என்பது இரண்டு செங்குத்த முக்கோணங்களாக கருது அங்கே sin B = sin Q (படம் 8.9 ஐ பார்)

நாம் பெறுவது $\sin B = \frac{AC}{AB}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மற்றும் $\sin Q = \dfrac{PR}{PQ}$

அப்படியாயின் $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PR}{PQ}$

$\therefore \quad \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ} = k$ என கூறு *(1)*

இப்பொழுது, பைத்தகோரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

மற்றும் $QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$

ஆகையால், $\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \dfrac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \dfrac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$ *(2)*

*(1)* மற்றும் *(2)* லிருந்து, நமக்கு இருப்பது

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

ஆகவே, தேற்றம் *6.4* ஐ பயன் படுத்தி $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$

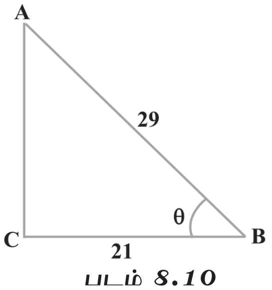
மற்றும் ஆதலால், $\angle B = \angle Q$

**எடுத்துக்காட்டு 3 :** $\Delta ACB$ என கருது, $\angle C$ இல் செங்குத்த கோணம், அதனுள் AB = 29 அலகுகள், BC = 21 அலகுகள் மற்றும் $\angle ABC = \theta$ (படம் *8.10* ஐ பார்)

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

இன் மதிப்புகளை திர்மானி.



படம் *8.10*

**தீர்வு :** $\Delta ACB$ இல், நாம் பெற்றிருப்பது,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$AC = \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{8 \times 50} = \sqrt{400} = 200 \text{ அலகுகள்}$$

ஆகையால், $\sin\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{29}, \quad \cos\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{21}{29}$

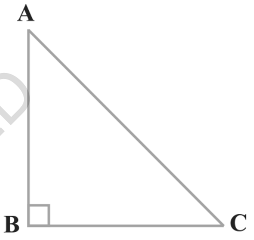
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்பொழுது, (i) $\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\frac{20}{29}\right)^2+\left(\frac{21}{29}\right)^2=\frac{20^2+21^2}{29^2}$

$$=\frac{400+441}{841}=1$$

மற்றும் (ii) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{21}{29}\right)^2-\left(\frac{20}{29}\right)^2=\frac{(21+20)(21-20)}{29^2}$

$$=\frac{41}{841}$$



படம் 8.11

**எடுத்துக்காட்டு 4 :** ஒரு செங்குத்த முக்கோணமான $\Delta ABC$ இல் 'B' இல் செங் கோணமாகும், $\tan A = 1$ ஆகில், $2\sin A\cos A = 1$ என்பதை சரிபார்.

**தீர்வு :** $\Delta ABC$ இல், $\tan A=\frac{BC}{AB}=1$ அதாவது $BC = AB$

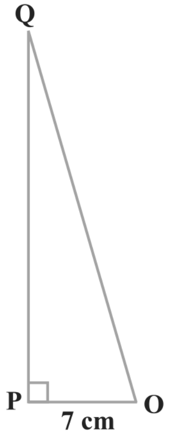
AB = BC = K என்க, அங்கே K என்பது ஒரு மிகை எண்,

இப்பொழுது, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}$

$$=\sqrt{K^2+K^2}=K\sqrt{2}$$

ஆதலால், $\sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ மற்றும் $\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ஆகையால், $2\sin A\cos A=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$ என்பதே தேவையான மதிப்பாகும்.



படம் 8.12

**எடுத்துக்காட்டு 5 :** $\Delta OPQ$ இல், P ஒரு செங்கோணமாகும், OP = 7cm மற்றும் OQ − PQ = 1cm (படம் 8.12 ஐ பார்) sinQ மற்றும் cosQ வின் மதிப்புகளை தீர்மானி.

**தீர்வு :** $\Delta OPQ$ இல், நாம் பெற்றிருப்பது

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

$\therefore \quad (1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (ஏன்?)

$\therefore \quad 1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

$1 + 2PQ = 7^2$ (ஏன்?)

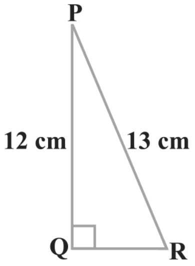
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\therefore$ PQ = 24செ.மீ, மற்றும் OQ = 1 + PQ = 25செ.மீ

ஆகையால், $\sin Q = \frac{7}{25}$ மற்றும் $\cos Q = \frac{24}{25}$

## பயிற்சி 8.1

1. $\Delta ABC$ இல், B இல் செங்கோணமாகும், AB = 24cm, BC = 7cm.
   (i) sin A, cos A
   (ii) sin C, cos C
   ஆகியவற்றை தீர்மானி.
2. படம் 8.13 இல், tan P - cot R ஐ கண்டுபிடி.



படம் 8.13

3. $\sin A = \frac{3}{4}$, ஆகில் cos A மற்றும் tan A ஐ கணித்திடு.
4. 15 cot A = 8 என கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் sin A மற்றும் sec A ஐ கண்டுபிடி.
5. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ எனில் மற்ற எல்லா முக்கோணவியல் விகிதங்களை கணித்திடு.
6. குறுங்கோணங்களாக $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ க்கு cos A = cos B ஆகில் $\angle A = \angle B$ என நிரூபி.
7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ ஆகில், மதிப்பீடை செய் :
   (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$
8. 3 cotA = 4 ஆகில், $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ என்பதை சரிபார்.
9. $\Delta ABC$ இல், B வில் செங்கோணம் இருப்பின் $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகில்,
   (i) sin A. cos C + cos A sin C
   (ii) cos A. cos C - sin A sin C இன் மதிப்புகளை கண்டுபிடி
10. $\Delta PQR$ இல், Q வில் செங்கோணமாகும், PR + QR = 25செ.மீ மற்றும் PQ = 5 செ.மீ. sin P, cos P மற்றும் tan P மதிப்புகளை தீர்மானி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**11.** பின்வருவன உண்மையா அல்லது பொய்யா என கூறு. உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்தவும்.

(i) tan A வின் மதிப்பு எப்பொழதுமே 1 ஐ விட குறைவாக இருக்கும்.

(ii) கோணம் A இன் சில மதிப்புகளுக்கு $\sec A = \frac{12}{5}$ ஆக இருக்கும்.

(iii) cosA என்பது கோணமான Aவின் cosecant இன் சுருக்கமாக பயன் படுத்தப்பட்டது.

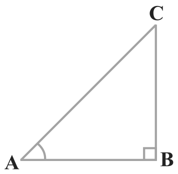
(iv) cot A என்பது cot மற்றும் A இன் பெருக்கலாகும்.

(v) θ வின் ஏதேனுமொரு மதிப்பிற்கு $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ஆகும்.

## 8.3 சில சிறப்பு கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் :

வடிவியலிருந்து, $30^o$, $45^o$, $60^o$ மற்றும் $90^o$ கோணங்களின் அமைப்பை பற்றி ஏற்கனவே நீ நன்றாகத் தெரிந்து கொண்டிருப்பாய். இந்த பிரிவில், கோணங்களான இவைகளுக்கு மற்றும், $0^o$ காகவும் முக்கோணவியலின் விகிதங்களின் மதிப்பை நாம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

## $45^0$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் :



படம் 8.14

ΔABC இல், B இல் செங்குத்த கோணமாகும், இதில் ஒரு கோணம் $45^o$ எனில் மற்றொரு கோணம் கூட $45^o$.

அதாவது, $\angle A = \angle C = 45^o$(படம் 8.14 ஐ பார்)

ஆகையால், BC = AB (ஏன் ?)

இப்பொழுது, BC = AB = a என எண்ணிக்கொள்

ஆகவே பைத்தகோரஸ் தேற்றம்படி, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2+a^2 = 2a^2$ மற்றும் ஆதலால்$AC = a\sqrt{2}$

முக்கோணவியல் விகிதங்களின் விவரணங்களை பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$$\sin 45^0 = \frac{\text{கோணம் } 45^0\text{க்கு எதிர் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{\text{கோணம் } 45^0\text{க்கு அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

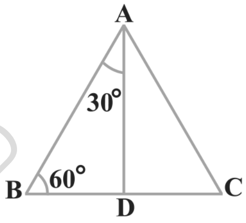
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\tan 45^0 = \frac{\text{கோணம் } 45^0\text{க்கு எதிர் பக்கம்}}{\text{கோணம் } 45^0\text{க்கு அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

அதோடு $\operatorname{cosec} 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$ , $\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$ ,

$$\cot 45 = \frac{\quad}{\tan 45} \quad 1$$

### $30^0$ மற்றும் $60^0$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் :



படம் 8.15

$30^0$ மற்றும் $60^0$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்களை இப்பொழுது கணிக்கலாம். $\Delta ABC$ ஐ ஒரு சமபக்க முக்கோணமாக கருது. சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் $60^0$

என்பதால் $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$

A யிலிருந்து பக்கம் BC விற்கு செங்குத்தமான AD ஐ வரைக. (படம் 8.15 ஐ பார்)

இப்பொழுது $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ஏன்?)

ஆதலால் $BD = DC$

மற்றும் $\angle BAD = \angle CAD$ (ச.மு.ஒ.பா.)

இப்பொழுது அதை கவனி :

$\Delta ABD$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம், D இல் அது செங்கோணமாகும் அதனுடன் $\angle BAD = 30^0$ மற்றும் $\angle ABD = 60^0$ (படம் 8.15 ஐ பார்)

உனக்கு தெரிந்தபடி, முக்கோணவியல் விகிதங்களை கண்டுபிடிக்க, நமக்கு தெரிந்துக்கொள்ள தேவையானது முக்கோணத்தின் பக்க நீளங்களாகும், ஆகையால், $AB = 2a$ என எண்ணிக் கொள்.

ஆகவே, $B = \frac{1}{2} BC = a$

மற்றும் $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

ஆதலால், $AD = a\sqrt{3}$

இப்பொழுது, நாம் பெறுவது :

$$\sin 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\tan 30^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

அதோடு, $\operatorname{cosec}30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2, \sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$$

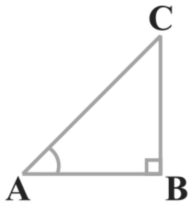
அதேப்போன்று, $\sin 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$$\tan 60^0 = \sqrt{3}, \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^0 = 2, \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

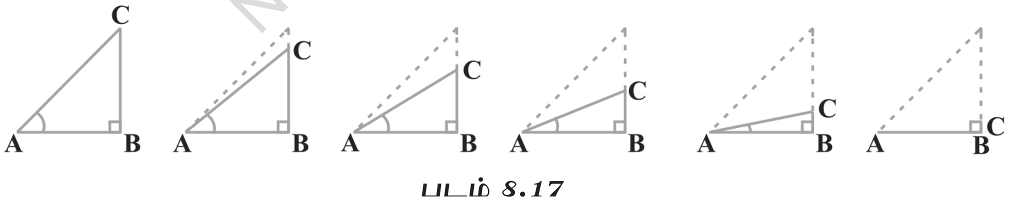
NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

### $0^0$ மற்றும் $90^0$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் :

செங்கோண முக்கோணமான ABC இல், கோணம் A வை பூஜ்யம் ஆகும் வரை சிரியதாக்கி கொண்டே வந்தால், (படம் 8.16 ஐ பார்) கோணம் A வின் முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கு என்ன நேரிடும் என்பதை நாம் பார்க்கலாம். $\angle A$ சிறிது ஆக ஆக BC இன் பக்க நீளங்கள் குறையும். புள்ளி Cஆனது புள்ளி B ஐ நெருங்கும், மற்றும் முடிவாக இப்பொழுது $\angle A$ சரியாக $0^0$ க்கு அருகில் நெருங்கநெருங்க AC சரியாக முற்றிலும் ஒன்றேயான AB போல் ஆகிவிடும்.



படம் 8.16



படம் 8.17

அப்பொழுது $\angle A$ ஆனது $0^0$க்கு மிக அருகில் நெருங்கும் போது, BC யானது 0 க்கு மிக அருகில் நெருங்கும் மற்றும் ஆகையால் $\sin A = \frac{BC}{AC}$ ஆனது. 0 விற்கு அருகில் நெருங்கும். அதோடு, $\angle A$ ஆனது $0^0$ மிக அருகில் இருக்கும்போது, AC ஆனது கிட்டதட்ட AB போலாகும் மற்றும் ஆகையால் $\cos A = \frac{AB}{AC}$ ஆனது 1 க்கு மிக அருகில் இருக்கும்.

A = $0^0$ எனில் இப்பொழுது Sin A மற்றும் Cos A வின் மதிப்புகளை கண்டுபிடிக்க இது நமக்கு உதவும்.

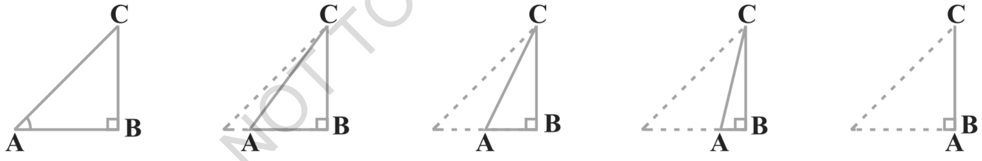
Sin $0^0$=0 மற்றும் Cos $0^0$=1.

இவைகளை பயன்படுத்தி, நாம் பெறுவது :

$\tan 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0$, $\cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0} =$ அது வரையறுத்தப்படவில்லை (ஏன்?)

$\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = 1$, மற்றும் $\mathrm{Cosec}\, 0^0 = \frac{1}{\sin 0^0}$ மறுபடியும் அது வரையுறக்கப் பட்டவில்லை (ஏன்?)

இப்பொழுது முக்கோணம் ABC இல், ∠A இன் முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கு நேரிட்டது என்ன என்பதை பார்போம். ∠A ஐ $90^0$ வரை பெரிதாக செய்யும் போது₹, ∠A பெரியது ஆக ஆக ∠C ஐ சிறியதாகிக் கொண்டேபோகும். ஆதனால், மேலே உள்ள வகைப்போல், பக்கமான AB இன் நீளம் குறைந்துக் கொண்டே போகும். புள்ளி A வானது புள்ளி B க்கு அருகில் வரும். முடிவாக ∠A ஆனது $90^0$ மிக அருகில் வரும்பொழுது, ∠C சரியாக $0^0$ மிக அருகில் இருக்கும் மற்றும் பக்கமான AC முற்றிலும் பக்கமான BC யுடன் இணைந்திருக்கும். (படம் 8.18 ஐ பார்)




படம் 8.18

∠C ஆனது 0 க்கு மிக அருகில் வரும்பொழுது, ∠A ஆனது $90^0$ மிக அருகில் இருக்கும், பக்கம் AC கிட்டதட்ட பக்கம் போல் BC இருக்கும், மற்றும் ஆகையால் Sin A ஆனது 1 க்கு மிக அருகில் இருக்கும், அதோடு ∠A ஆனது $90^0$ மிக அருகில் இருக்கும்பொழுது ∠C ஆனது $0^0$ மிக அருகில் இருக்கும், மற்றும் பக்கம் AB ஆனது கிட்டதட்ட பூஜ்யத்திற்கு சமமாகும், ஆகையால் cos A ஆனது 0 க்கு மிக அருகில் இருக்கும்.

ஆகையால், நாம் வரையறைத்தது : Sin $90^0$ = 1 மற்றும் Cos $90^0$ = 0

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்பொழுது, $90^0$ ஆன மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களை நீ ஏன் கண்டுபிடிக்க கூடாது?

அட்டவனை 8.1 இல் $0^0$, $30^0$, $45^0$, $60^0$ மற்றும் $90^0$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கான எல்லா மதிப்புகளை இப்பொழுது நாம் கொடுக்கலாம், தயாரான குறிப்பிலிருந்து.

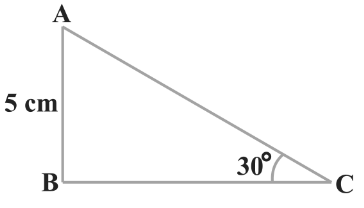
**அட்டவணை 8.1**

| $\angle$A | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin A | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos A | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan A | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | வரையறுக்க படவில்லை |
| cosec A | வரையறுக்க படவில்லை | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| sec A | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | வரையறுக்க படவில்லை |
| cot A | வரையறுக்க படவில்லை | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

**குறிப்பு :** மேலேயுள்ள அட்டவணையில் நீ கவனிக்க முடியும் $\angle$A ஆனது $0^0$ யிலிருந்து $90^0$ வரை அதிகரிக்கும்போது, SinA 0 விலிருந்து 1 வரை அதிகரிக்கும் மற்றும் Cos A ஆனது 1 லிருந்து 0 வரை குறைகிறது.

மேலேயுள்ள அட்டவணையில் உள்ள மதிப்புகளை பயன்படுத்தி சில எடுத்துக்காட்டுகளின் வழியாக விளக்கிச் சொல்லலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு 6 :** $\Delta$ABC இல், B இல் செங்கோணமாகும், AB=5 செ.மீ மற்றும் $\angle$ACB=$30^0$ (படம் 8.19) ஐ பார்) BC மற்றும் AC இன் பக்க நீளங்களை தீர்மானி.



படம் 8.19

**தீர்வு :** BC இன் பக்க நீளத்தை கண்டுபிடிக்க, BC ஐ உட்படுத்திய முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் தேர்ந்தெடுக்கலாம். மற்றும் AB கொடுக்கப்பட்ட பக்கமாகும். BC ஆனது கோணம் C இன் அடுத்துள்ள பக்கம் மற்றும் AB ஆனது $\angle$C இன் எதிர்பக்கம் ஆகும் என்பதால்,

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆதலால் $\frac{AB}{BC} = \tan C$

அதாவது $\frac{5}{BC} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

அது கொடுக்கும் $BC = 5\sqrt{3}$ செ.மீ

AC யின் பக்க நீளத்தை கண்டுபிடிக்க, நாம், கருதுவது

$\text{Sin}\, 30^0 = \frac{AB}{AC}$ (ஏன்?)

அதாவது, $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

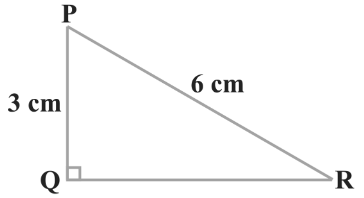
அதாவது, $AC = 10$ செ.மீ

மாறாக, மேலேயுள்ள எடுத்தக்காட்டில் மூன்றாவது பக்கத்தை தீர்மாணிக்க பைத்தாகோரஸ் தேற்றத்தை நாம் பயன்படுத்தலாம் என்பதை கவனி.

அதாவது, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = 10$ செ.மீ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**எடுத்துக்காட்டு 7 :** $\Delta PQR$ இல், Q இல் செங்கோணமாகும் (படம் 8.20 ஐ பார்) PQ=3cm, மற்றும் PR=6செ.மீ, $\angle QPR$ மற்றும் $\angle PRQ$ ஐ தீர்மாணி.



படம் 8.20

**தீர்வு :** PQ = 3செ.மீ மற்றும் PR = 6செ.மீ கொடுக்கப்பட்டது

$\therefore \frac{PQ}{PR} = \text{SinR}$

அல்லது $\text{SinR} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ஆகையால் $\angle PRQ = 30^o$

மற்றும் ஆதலால், $\angle QPR = 60^o$ (ஏன்?)

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒருபக்கம் மற்றும் வேறு ஏதேனும் ஒரு பகுதி (குறுங்கோணமான இரண்டில் ஏதேனுமொன்று அல்லது

ஏதேனும் ஒரு பக்கம்) நமக்கு தெரிந்தால், முக்கோணத்தின் மீதமுள்ள பக்கங்கள் மற்றும் கோணங்களை தீர்மானிக்கலாம் என்பதை கவனிக்கவும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8 :** $\text{Sin}(A-B)=\frac{1}{2}, \text{Cos}(A+B)=\frac{1}{2}, 0^0<A+B\leq 90^0, A>B$ ஆகில் A மற்றும் B ஐ கண்டுபிடி.

**தீர்வு :** இடையே, $\text{Sin}(A-B)=\frac{1}{2}$ ஆதலால், $A-B=30^0$ .... (ஏன்?) (1)

அதோடு, $\text{Cos}(A+B)=\frac{1}{2}$ ஆதலால், $A+B=60^0$ (ஏன்?) (2)

(1) மற்றும் (2)ஐ தீர்க்க, நாம் பெறுவது : $A=45^0$ மற்றும் $B=15^0$

**பயிற்சி 8.2**

1. பின் வருவனற்றிக்கு மதிப்பைக் கணக்கிடவும் :

(i) $\sin 60^0 \cos 3^0 + \sin 30^0 \cos 60^0$ (ii) $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$

(iii) $\dfrac{\cos 45^0}{\sec 30^0 + \text{cosec} 30^0}$ (iv) $\dfrac{\sin 30^0 + \tan 45^0 - \text{cosec} 60^0}{\sec 30^0 + \cos 60^0 + \cot 45^0}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. சரியான விடையை தேர்ந்தெடு மற்றும் உன்னுடைய தேர்வை நியாயப்படுத்து :

(i) $\dfrac{2\tan 30^0}{1+\tan^2 30^0} =$

(a) $\sin 60^0$ (b) $\cos 60^0$ (c) $\tan 60^0$ (d) $\sin 30^0$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^0}{1+\tan^2 45^0} =$

(a) $\tan 90^0$ (b) 1 (c) $\sin 45^0$ (d) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ என்பது உண்மையெனில் $\angle A=$

(a) $0^0$ (b) $30^0$ (c) $45^0$ (d) $60^0$

(iv) $\dfrac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0} =$

(a) $\cos 60^0$ (b) $\sin 60^0$ (c) $\tan 60^0$ (d) $\sin 30^0$

3. $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ மற்றும் $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகில்; $A>B, 0^0<A+B\leq 90^0$; மற்றும் B ஐ கண்டு பிடி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. பின் வருவன மெய்யா அல்லது பொய்யா என கூறு. உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்தவும்.

(i) sin (A+B) = sinA + sinB

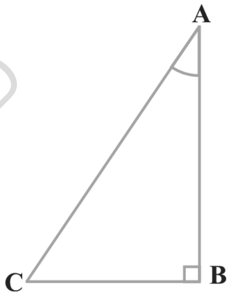
(ii) θ வின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது sinθ வின் மதிப்பும் அதிகரிக்கும்.

(iii) θ வின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது cosθ வின் மதிப்பும் அதிகரிக்கும்

(iv) θ வின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் θ , sin θ = cos θ .

(v) A = $0^0$ விற்கு cot A ஆனது வரையறுக்கப்படவில்லை.

## 8.4 முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் (Trignometric Identities)



படம் 8.21

ஒரு சமன்பாடானது அதன் உள்ளடங்கிய மாறிகளின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யெனில் அச்சமன்பாட்டை முற்றொருமை என அழைக்கலாம் என நீ நினைவுக்கூர்ந்திருப்பாய். அதேபோல, ஒரு கோணத்தின் முக்கோணவியல் விகிதங்களை உள்ளடங்கிய சமன்பாடானது, அதன் உள்ளடங்கிய கோணங்களின் எல்லா மதிப்களுக்கும் மெய்யாகில், முக்கோணவியல் முற்றொருமை எனஅழைக்கப் படுகிறது.

இந்த பிரிவில் ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொமையை நாம் நிரூபிக்கலாம், மற்றும் வேறு முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க இதனை பயன்படுத்தலாம்.

Δ ABC இல், B இல் செங்குத்த கோணமாகும் (படம் 11.22 ஐ பார்)₹, நாம் பெறுவது :

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$  (1)

(1) இன் ஒவ்வொறு உறுப்பையும் $AC^2$ ஆல் வகுக்கும் போது, நாம் பெறுவது.

அதாவது $$\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}$$

அதாவது $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=1$$

$$\therefore \quad (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \qquad (2)$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$0 \le A \le 90^0$ என்றமைந்த வகையில் A வின் எல்லா மதிப்பிற்கும் இது மெய்யாகும், ஆகையால், இது ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொருமை ஆகும்.

(1) ஐ $AB^2$ ஆல் வகுப்பதால், நாம் பெறுவது.

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

அல்லது, $$1+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

அதாவது, $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ (3)

இந்த சமன்பாட்டில் $A = 0^0$ என்பது மெய்யாகுமா? ஆம், இதுவாகும், $A = 90^0$ என்பது என்ன வாகும்? $A = 90^0$ என இருக்கும்படி tan A மற்றும் sec A வில் வரையறுக்கபடவில்லை. ஆகையால், A யானது $O^0 \le A < 90^0$ என்றமையும் வகையில் (3) ஆனது எல்லா மதிப்புகளும் மெய்யாகும்.

(1) ஐ $BC^2$ ஆல் வகுப்பதால் என்ன கிடைக்கும் என்பதை நாம் பார்போம். நமக்கு கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{AB}{BC}\right)^2+1=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

அதாவது, $\cot^2 A+1 = \mathrm{cosec}^2 A$.......... (4)

$A = 0^0$ என இருக்கும்போது cosecA மற்றும் cotA வரையறுக்க படவில்லை என்பதை கவனிக்கவும்.

ஆதலால் $0^0 < A \le 90^0$ என்றமையும் வகையில் 4 என்பது எல்லா மதிப்புகளும் மெய்யாகும்.

முற்றொருமைகளான இவைகளை பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கொண்டு மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களை நம்மால் விவரிக்க முடியும். அதாவது, ஏதாவது ஒரு விகிதம் தெரிந்ததாகில், மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை நாம் கூட தீர்மானிக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முற்றொருமைகளான இவைகளை பயன்படுத்தி நாம், இதனை எப்படி செய்ய முடியும் என பார்க்கலாம். $\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}$ நமக்கு தெரியும் என எண்ணிக்கொள், ஆகவே $\cot A = \sqrt{3}$

எனவே $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $\sec A=\frac{2}{\sqrt{3}}$ மற்றும் $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

மறுபடியும், $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-3/4}=1/2$ ஆதலால் $\operatorname{cosec} A = 2$

***எடுத்துக்காட்டு 9 :*** cos A, tan A மற்றும் sec A விகிதங்களை sin A இன் உறுப்புகளில் விவரிக்கவும்.

***தீர்வு :*** $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ என்பதால்,

$\cos^2 A = 1- \sin^2 A$

அதாவது $\cos A = \pm \sqrt{1-\sin^2 A}$

$\cos A = \pm \sqrt{1-\sin^2 A}$ இது கொடுக்கும் $\cos A = \pm \sqrt{1-\sin^2 A}$ (ஏன்?)

ஆகையால் $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ மற்றும் $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

***எடுத்துக்காட்டு 10 :*** secA (1 - sinA) (secA + tanA) = 1 என நிரூபி.

***தீர்வு :*** இ.கை.ப(LHS) = secA (1 - sinA) (sec A + tam A)

$$=\left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left[\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$=\frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A}=\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=1=\text{RHS}$$

***எடுத்துக்காட்டு 11 :*** $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A}=\frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ என நிரூபி.

***தீர்வு :*** இ.கை.ப (LHS) $=\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A}=\frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$=\frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A}+1\right)}=\frac{\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A}+1\right)}=\frac{\operatorname{cosec}A-1}{\operatorname{cosec}A+1}=\text{RHS}$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**எடுத்துக்காட்டு 12 :** $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ முற்றொருமையை பயன்படுத்தி $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ என நிரூபி.

**தீர்வு :** $\tan\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ முற்றொருமை சூத்திரத்தை உள்ளடக்கி பதிலீடு செய்யும் போது (தேவையான முற்றொருமை நிரூபனத்தை நாம் எடுத்துக்கொள்வோம்) $\tan\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ இன் உருப்புகளில் உள்ள தொகுதி மற்றும் பகுதியை $\cos\theta$ வால் வகுக்கவும்.

இ.கை.ப $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\left[(\tan\theta + \sec\theta) - 1\right](\tan\theta - \sec\theta)}{\left[(\tan\theta - \sec\theta) + 1\right](\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\ (\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\ (\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

முற்றொருமைக்கான வ.கை.ப. இதுவே நமக்கு தேவையான நிரூபணம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

## பயிற்சி 8.3

1. sin A, sec A மற்றும் tan A ஆகிய முக்கோணவியல் விகிதங்களை cot A இன் உறுப்புகளில் விவரிக்கவும்.

2. $\angle A$ வின் மற்ற எல்லா முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் sec A இன் உறுப்புகளில் விவரிக்கவும்.

3. சரியான விடையை தேர்ந்தெடு. உன்னுடைய விடையை நியாயப்படுத்து.

   (i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A =$

   (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

   (ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

(iii) (sec A + tan A) (1 - sinA) =

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=$

(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

**4.** குறுங்கோணங்களை உள்ளடக்கிய கூற்றுகளான பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $(\text{cosec}\theta-\cot\theta)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\,\text{cosec}\theta$

*(குறிப்பு : கோவையை $\sin\theta$ மற்றும் $\cos\theta$ வின் உறுப்புகளில் எழுது)*

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

*(குறிப்பு : இ.கை.ப. மற்றும் வ.கை.ப. தனிதனியாக சுருக்கவும்)*

(v) $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}=\text{cosec}A+\cot A$, என்பதை $\text{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$

என்ற முற்றொருமையை பயன்படுத்தி நிரூபிக்கவும்.

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}==\sec A+\tan\theta$

(vii) $\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}=\tan\theta$

(viii) $(\sin A+\text{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)=\frac{1}{\tan A+\cot A}$

*(குறிப்பு : இ.கை.ப மற்றும் வ.கை.ப தனி தனியாக சுருக்கவும்)*

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(x) $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

## 8.5 தொகுப்பு :

இந்தப்பாடத்தில், பின்வரும் கருத்துகளை நீ கற்றிருக்கிறாய்.

1. $\sin A = \frac{\angle A \text{ வின் எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

$\cos A = \frac{\angle A \text{ வின் அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

$\tan A = \frac{\angle A \text{ வின் எதிர்ப் பக்கம்}}{\angle A \text{ வின் அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3. ஒரு குறுங்கோணத்தின் ஒரேஒரு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் தெரியும் ஆகில், கோணத்தின் மீதமுள்ள முக்கோணவியல் விகிதங்களை சுலபமாக தீர்மானிக்கலாம்.

4. கோணங்களின் $0^0, 30^0, 45^0, 60^0$ மற்றும் $90^0$ மதிப்புகளுக்கான முக்கோண வியல் விகிதங்கள்.

5. sinA அல்லது cosA வின் மதிப்பு 1 றை விட அதிகமாகாது. அங்கே மதிப்புகளான secA அல்லது cosecA 1 றை விட அதிகமாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும்.

6. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ A வின் மதிப்பு $0^0 \le A < 90^0$ என்றமைந்தபோது

$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ A வின் மதிப்பு $0^0 < A \le 90^0$ என்றமைந்தபோது

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# முக்கோணவியலின் சில பயன்பாடுகள்
# SOME APPICATIONS OF TRIGONOMETRY

# 9

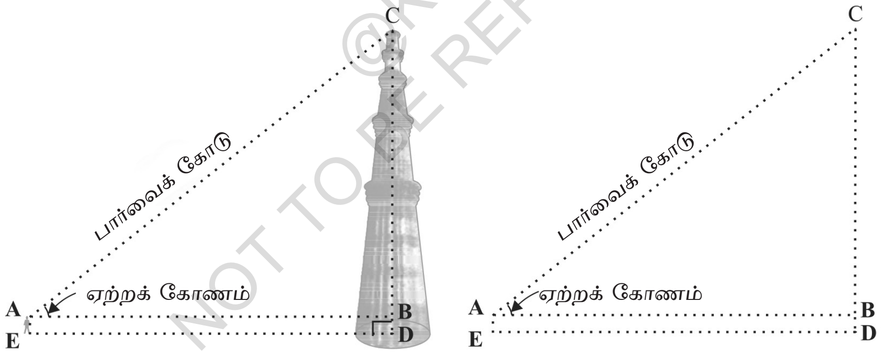
J5S3N4

## 9.1 உயரங்கள் மற்றும் தூரங்கள் (Heights and Distances)

இதற்கு முந்தைய பாடத்தில் முக்கோணவியல் விகிதகளைப் பற்றி படித்தீர்கள். இந்தப் பாடத்தில் வாழ்க்கையில் உங்களைச் சுற்றி முக்கோணவியல் எவ்வாறு பயன்படுத்தப்படுகிறது என்பதைப் பற்றி படிக்கப் போகிறீர்கள்.

முந்தையப் பாடத்திலிருந்த படம் 9.1 ஐ மீண்டும் கீழே வரையப் பட்டுள்ளது. படம் 9.1 ஐப் பார்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

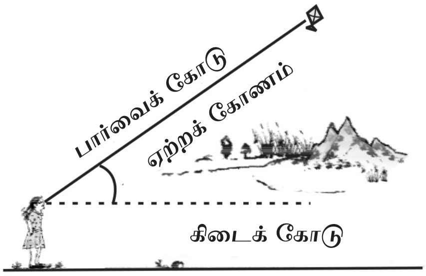



படம் 9.1

இந்தப் படத்தில் மாணவனின் கண்ணிலிருந்து மினாரின் உச்சிக்கு AC என்ற கோடு வரையப்பட்டுள்ளது. இதை பார்வைக் கோடு(Line of Sight) என்கிறோம். மாணவன் மினாரின் உச்சியைப் பார்க்கிறான். கிடைகோட்டிற்கும் பார்வைக் கோட்டாடிற்கும் இடையே உருவான கோணம் BAC என்பது ஏற்றக் கோணம் (Angle of Elevation) எனப்படும்.

இப்படியாக பார்வைக் கோடு என்பது பார்ப்பவரின் கண்ணிலிருந்து பார்க்கப்படும் பொருளின் மீதுஉள்ள பார்க்கப்படும் புள்ளிக்கு வரையப்படும் கோடு ஆகும். ஏற்றக் கோணம் என்பது மேலே உள்ள, பார்ப்பவரின் கண்ணிலிருந்து வரையப்படும் பார்வைக் கோட்டிற்கும்

கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணமாகும். நாம் தலையை உயர்த்தி பொருளின் உச்சியைப் பார்த்தால் (படம் 9.2) பார்வைக் கோட்டிற்கு மேலே கோணம் உருவாகிறது.



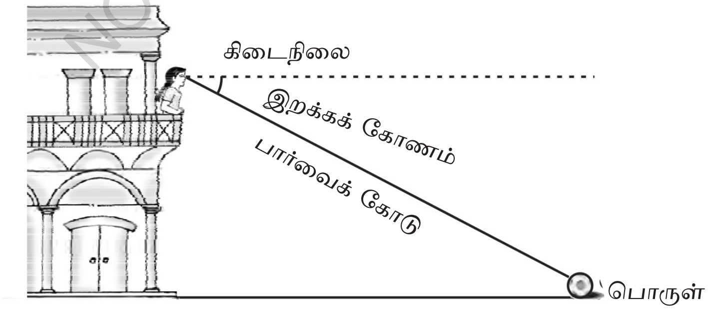

படம் 9.2

இப்போது படம் 9.3 ல் கொடுக்கப்பட்ட சூழலை கவனி. மாடியில் உட்கார்ந்திருக்கும் பெண் கோயிலின் படிக்கட்டின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள பூந்தொட்டியை கீழ்நோக்கி பார்க்கிறாள். இந்த சம்பவத்தில் பார்வைக்கோடு என்பது கிடைக்கோட்டிற்கு கீழே உள்ளது.

இவ்வாறு கிடைநிலை கோட்டிற்கு கீழே இருக்கும் பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைநிலை கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் **இறக்கக் கோணம் (angle of Depression)** எனப்படும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 9.3 ஐப் பார். நாம் ஒரு பொருளை கீழ் நோக்கிப் பார்க்கும் பொழுது இறக்கக் கோணம் கிடைநிலை கோட்டிற்கும் கீழே பார்க்கும் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையே உண்டாகிறது என்பதைக் காணலாம்.




படம் 9.3

இப்போது படம் 9.3 ஐப் பார். அதில் உண்டாகும் கோணம் ஏற்றக் கோணமா அல்லது இறக்கக் கோணமா?

மீண்டும் படம் 9.1 ஐ பார்ப்போம். குத்துப்மினாரின் CD யின் உயரத்தை அளந்து பார்க்காமல் கண்டுபிடிக்க விரும்பினால் உனக்கு

என்ன தகவல்கள் வேண்டும்? கீழே கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களை நீ அறிய வேண்டியிருக்கும்.

(i) மினாரின் அடி பகுதியிலிருந்து மாணவன் நிற்கும் தூரம் அதாவது DE.

(ii) மினாரின் உச்சி பகுதியின் ஏற்றக் கோணம் $\angle BAC$.

(iii) மாணவனின் உயரம் AE .

மேற்கண்ட மூன்று உண்மைகளும் தெரியும் என்று கணக்கில் கொண்டால் மினாரின் உயரத்தை கணக்கிடுவது எப்படி?

படத்தில் CD = CB + BD இங்கு BD = AE இது மாணவனின் உயரம். BC யை கண்டறிய, $\angle BAC$ அல்லது $\angle A$ இன் முக்கோணவியல் விகிதங்களை உபயோகிக்கலாம்.

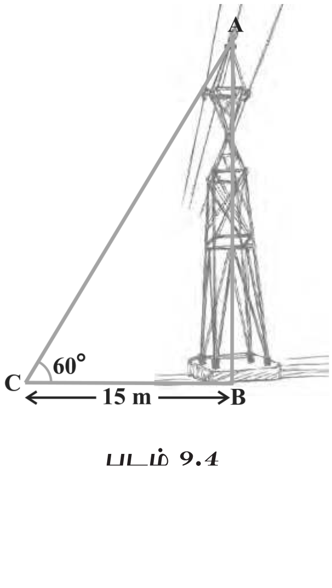
$\Delta ABC$ யில் BC என்பது தெரிந்த $\angle A$ விற்கு எதிரான பக்கம். இப்போது நாம் எந்த முக்கோணவியல் விகிதங்களை உபயோகிக்கலாம்? இரண்டு மதிப்புக்கள் தெரிந்த மூன்றாவது மதிப்பைக் கணக்கிட உதவக்கூடியது எது? நம்முடைய தேடுதலில் மிகவும் அருகில் இருப்பது tan A. அல்லது cot A ஏனெனில் இவை AB மற்றும் BC யை உள்ளடக்கியவை.

எனவே $\tan A = \frac{BC}{AB}$ அல்லது $\cot A = \frac{AB}{BC}$ இதை தீர்க்க, நமக்கு BC கிடைக்கும். BC உடன் AEயை கூட்டினால் உனக்கு மினாரின் உயரம் கிடைக்கும்.

இப்போது நாம் அலசிய உண்மைகளைக் கொண்டு சில கணக்குகளை அல்லது பிரச்சனைகளை தீர்ப்போம்.

***எடுத்துக் காட்டு 1 :*** ஒரு கோபுரம் தரையின்மீது செங்குத்தாக நிற்கிறது. கோபுரத்தின் அடிபாகத்திலிருந்து 15 மீட்டர் தூரத்திலுள்ள புள்ளியில் கோபுரத்தின் உச்சிக்கான ஏற்றக் கோணம் $60^0$ எனில் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடு.

**தீர்வு :** இந்த கணக்கைத் தீர்க்க ஒரு எளிய படத்தை வரைவோம். (படம் 9.4). இங்கு AB என்பது கோபுரத்தை குறிக்கும். CB என்பது கோபுரத்திலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம் $\angle ACB$ என்பது ஏற்றக் கோணம். நாம் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிட வேண்டும். அதாவது ABன் அளவை கண்டு பிடிக்க வேண்டும். ACB முக்கோணத்தில் $\angle B$ செங்கோணம். கணக்கை தீர்க்க முக்கோணவியல் விகிதம் $\tan 60^0$ (அல்லது



படம் 9.4

$\cot 60^0$) ஐ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். காரணம் இந்த விகிதத்தில் AB மற்றும் BC ஈடுபடுத்தப்படுகிறது.

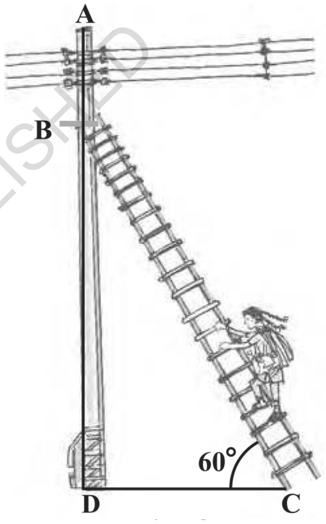
தற்போது $\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$

அதாவது $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

எனவே $AB = 15\sqrt{3}$

ஆகையால் கோபுரத்தின் உயரம் = $15\sqrt{3}$ மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 2 :** ஒரு மின் ஊழியர் 5 மீ உயரம் உடைய மின்கம்பத்தில் பழுது பார்க்க வேண்டும். மின்கம்ப உச்சியிலிருந்து 1.3 மீட்டர் கீழே உள்ள புள்ளியை அவர் எட்டவேண்டும். (படம் 9.5 ஐப் பார்) கிடை மட்டத்திற்கு $60^0$ கோணத்தில் நிறுத்தப்பட்டுள்ள ஏணியின் மீது அவர் ஏற வேண்டுமானால் ஏணியின் நீளம் குறைந்த பட்சம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்? மேலும் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து ஏணியின் அடியை எவ்வளவு தூரத்தில் நிறுத்த வேண்டும்? ( $\sqrt{3}$=1.73 எனக் கொள்க.)



படம் 9.5

**தீர்வு :** படம் 9.5 ல் மின் ஊழியர் AD என்ற மின் கம்பத்தில் B என்ற புள்ளியை எட்ட வேண்டும்.

ஆகையால் BD = AD - AB = (5 - 1.3) மீ = 3.7 மீ

இங்கு BC என்பது ஏணியைக் குறிக்கும்.

இதன் நீளத்தை நாம் கணக்கிட வேண்டும். அதாவது $\Delta$BDC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

எந்த முக்கோண விகிதத்தை இங்கு பயன்படுத்த வேண்டும் என்று உன்னால் யூகிக்க முடிகிறதா?

அது Sin $60^0$ என்பதாகும்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆகவே, $\frac{BD}{BC} = \sin 60^0$ அல்லது $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ஆகையால் $BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}}$ = 4.28 மீ (தோராயமாக)

எனவே ஏணியின் நீளம் 4.28 மீ இருக்க வேண்டும்.

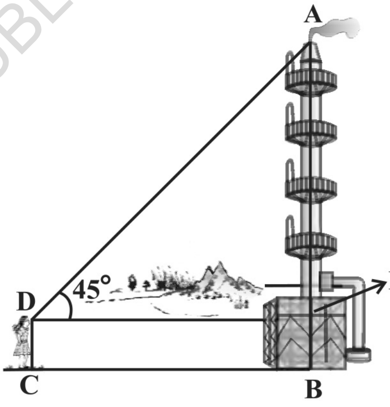
தற்போது, $\frac{DC}{BD} = \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

அதாவது $DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14m$ (தோராயமாக)

எனவே அவர் ஏணியை கம்பத்தின் அடிபாகத்திலிருந்து 2.14மீ தூரத்தில் நிறுத்த வேண்டும்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**எடுத்துக்காட்டு 3 :** 1.5மீ உயரம் உடைய ஒரு பார்வையாளர் ஒரு புகைபோக்கி (chimney) யிலிருந்து 28.5மீ தூரத்தில் உள்ளார். அவருடைய கண்ணிலிருந்து புகைபோக்கி உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $45^0$. புகைபோக்கியின் உயரம் என்ன?



படம் - 9.6

**தீர்வு :** இங்கு AB என்பது புகைப் போக்கி. CD பார்வையாளர். $\angle ADE$ என்பது ஏற்றக் கோணம் (படம் 9.6 ஐப் பார்.) இதில் ADE என்பது முக்கோணம். இதில் $\angle E$ செங்கோணம். புகை போக்கியின் உயரம் AB யை நாம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

நமக்குள்ளது AB = AE + BE

AB = AE + 1.5

மேலும் DE = CB = 28.5 மீ

AE யை கண்டு பிடிக்க AE மற்றும் DE தொடர்புடைய முக்கோண விகிதத்தை பயன்படுத்த வேண்டும். நாம் ஏற்றக் கோணத்தின் tan ஐ பயன் படுத்துவோம்.

தற்போது $\tan 45^0 = \frac{AE}{DE}$

அதாவது $1 = \frac{AE}{28.5}$

எனவே AE = 28.5 மீ

எனவே புகைபோக்கியின் உயரம் (AB) = 28.5 + 1.5 = 30 மீ

**எடுத்துக்காட்டு *4* :** பூமியின் மீது 'P' என்ற புள்ளியிலிருந்து 10மீ உயரம் உடைய ஒரு கட்டிடத்தின் உச்சிக்கு ஏற்ற கோணம் $30^0$. ஒரு கொடி கட்டிடத்தின் உச்சியில் கட்டப் படுகிறது. 'P' யிலிருந்து கொடிக் கம்பத்தின் உச்சிக்கு உள்ள ஏற்றக் கோணம் $45^0$. கொடிக்கம்பத்தின் நீளத்தையும், 'P' புள்ளியிலிருந்து கட்டிடம் உள்ள தூரத்தையும் கணக்கிடு. ($\sqrt{3}$ =1.732 என்க)

**தீர்வு :** படம் 9.7 இல் AB என்பது கட்டிடத்தின் உயரத்தை குறிக்கும் என்க. BD என்பது கொடிக்கம்பம். 'P' என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி. PAB மற்றும் PAD என்ற இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் இருப்பதை கவனி. நாம் கொடிக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். அதாவது DBன் அளவை கண்டு பிடிக்க வேண்டும் மற்றும் P யிலிருந்து கட்டிடம் உள்ளதூரம் PA வை காண வேண்டும். நமக்கு கட்டிடத்தின் உயரம் AB தெரியும். முதலில் நாம் செங்கோண $\Delta$PAB யைப் பார்ப்போம்.

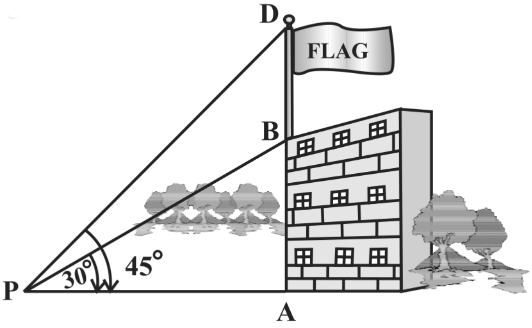
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இதில் $\tan 30^0 = \frac{AB}{AP}$

அதாவது $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

எனவே $AP = 10\sqrt{3}$

அதாவது 'P' யிலிருந்து கட்டிடம் உள்ள தூரம் PA = $10\sqrt{3}$ மீ= 17.32மீ



படம் - 9.7

அடுத்ததாக, DB = $x$ மீ என்க.

AD = (10+$x$) மீ

செங்கோண முக்கோணம் PAD யில் $\tan 45^0 = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

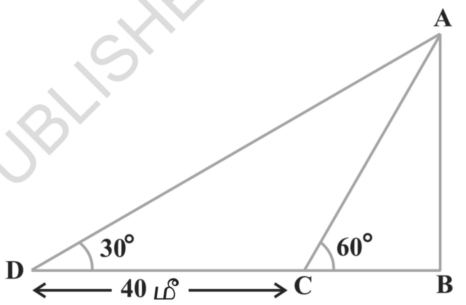
எனவே $$1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $$x = 10\,(\sqrt{3} - 1) = 7.32\text{மீ}$$

எனவே கொடிக் கம்பத்தின் நீளம் DB = 7.32மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 5 :** சீரான தரை மீது நிற்கும் கட்டிடத்தின் நிழலின் நீளமானது, சூரியனுக்கான எற்றக்கோணம் $30^0$ ஆக இருக்கும்போது, $60^0$ ஆக இருக்கும்போது ஏற்படும் நிழலின் நிளத்தைவிட 40 m அதிக நீளமுடையதாக இருக்கிறது எனில் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டு பிடி.

**தீர்வு :** படம் 9.8 இல் AB என்பது கட்டிடம். சூரியன் $60^0$ கோண உயரத்திலிருக்கும் போது BC என்பது நிழலின் நுனிக்கு உள்ள ஏற்றக் கோணம் $60^0$. ஏற்றக் கோணம் $30^0$ இருக்கும் போது நிழலின் நீளம் DB ஆகும்.




படம் - 9.8

இப்போது AB = $h$ மீ எனவும் BC=$x$ மீ எனவும் கொள்க. வினாவின்படி BC யை விட DB என்பது 40மீ அதிக நீளமுடையது.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எனவே DB = $(40 + x)$மீ இப்போது, ABC மற்றும் ABD என்ற இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் உள்ளன.

$\Delta$ ABC யில் $$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

அல்லது $$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \qquad (1)$$

$\Delta$ ABD, யில் $$\tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$$

அதாவது $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \qquad (2)$$

(1) லிருந்து $$h = x\sqrt{3}$$

இந்த மதிப்பை (2) ல் கொடுக்கும் போது

$$(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40 \;\therefore\; 3x = x + 40$$

$$x = 20$$

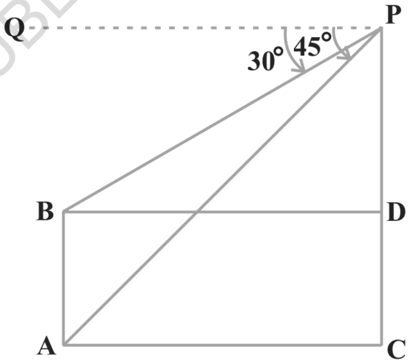
ஆகவே $h = 20\sqrt{3}$ ( (1) லிருந்து)

எனவே கட்டிடத்தின் உயரம் = $20\sqrt{3}$ மீ.

**எடுத்துக்காட்டு 6 :** ஒரு அடுக்கு மாடி கட்டிடத்தின் அருகே 8மீ உயரம் உடைய சிறிய கட்டிடம் உள்ளது. அடுக்கு மாடி கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து சிறிய கட்டிடத்தின் உச்சி மற்றும் அடிபாகத்திற்குள்ள இறக்கக் கோணங்கள் முறையே $30^0$ மற்றும் $45^0$ எனில் அடுக்கு மாடி கட்டிடத்தின் உயரத்தையும் இரண்டு கட்டிடங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தையும் கணக்கிடுக.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**தீர்வு :** படம் 9.9 இல் PC என்பது அடுக்குமாடி கட்டிடத்தைக் குறிக்கிறது. AB என்பது 8மீ உயர சிறிய கட்டிடத்தைக் குறிக்கிறது. நாம் அடுக்கு மாடி கட்டிடத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க ஆர்வமாக உள்ளோம். அதாவது PC யின் உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். மற்றும் இரண்டு கட்டிடங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் AC யையும் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.



படம் 9.9

படத்தை கவனமாகப் பார். PB என்பது PQ மற்றும் BD என்ற இணைக் கோடுகளின் குறுக்கு வெட்டி. ஆகவே $\angle QPB$ மற்றும் $\angle PBD$ என்பன ஒன்று விட்ட கோணங்கள். எனவே அவை சமம். எனவே $\angle PBD=30^0$ இதேபோல் $\angle PAC = 45^0$ செங்கோண $\Delta PBD$ல்

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ அல்லது } \times\; BD = PD\sqrt{3}$$

செங்கோண $\Delta PAC$ ல்,

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^0 = 1$$

அதாவது PC = AC

மேலும் PC = PD + DC,

ஆகையால் AC = PD + DC

AC = BD என்பதால் மற்றும் DC = AB = 8மீ

$$PD + 8 = BD = PD\sqrt{3} \text{ (ஏன் ?)}$$

இதிலிருந்து, $PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)m$

எனவே அடுக்கு மாடி கட்டிடத்தின் உயரம்

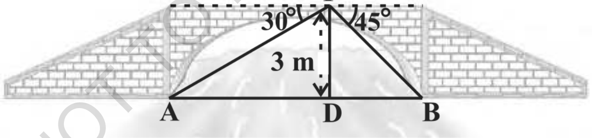
$$= [4(\sqrt{3}+1) + 8] \text{ மீ} = 4(3+\sqrt{3}) \text{ மீ}$$

இரண்டு கட்டிடங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் கூட

$$= 4(3+\sqrt{3}) \text{ மீ ஆகும்.}$$

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

**எடுத்துக்காட்டு 7 :** ஆற்றின் குறுக்கே கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு பாலத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஆற்றின் இரு பக்கமும் உள்ள இறக்கக் கோணங்கள் முறையே $30^0$ மற்றும் $45^0$. ஆற்றின் கரையிலிருந்து பாலம் 3மீ உயரத்தில் இருந்தால் ஆற்றின் அகலத்தைக் கண்டுபிடி.




படம் 9.10

**தீர்வு :** படம். 9.10 இல் A மற்றும் B என்பன ஆற்றின் இரண்டு பக்கமும் எதிர் பக்கங்களில் உள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. எனவே AB என்பது ஆற்றின் அகலம் ஆகும். 'P' என்பது பாலத்தின் மீது 3மீ உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. அதாவது DP = 3மீ நாம் ஆற்றின் அகலத்தை கண்டுபிடிக்கும் ஆர்வமுடன் உள்ளோம். அதாவது $\Delta$APB யில் ABன் நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

தற்போது AB = AD + DB செங்கோண $\Delta$APD ல் $\angle A = 30^0$

ஆகையால் $\tan 30^0 = \frac{PD}{AD}$

அதாவது $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ அல்லது $AD = 3\sqrt{3}$ மீ

மேலும் செங்கோண $\Delta PBD$ ல் $\angle B = 45^0$,

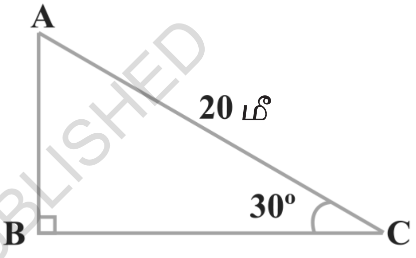
ஆகையால் $BD = PD = 3$மீ

இப்போது, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$ மீ

எனவே ஆற்றின் அகலம் $= 3(\sqrt{3} + 1)$மீ

## பயிற்சி 9.1

1. ஒரு சர்க்கஸ் ஆட்டக்காரர் பூமீ மீது செங்குத்தாக நிறுத்தப் பட்டுள்ள ஒரு கம்பத்தின் உச்சியிலிருந்து பூமிக்கு விரைத்து கட்டப்பட்டுள்ள கயிற்றின் மீது ஏறுகிறார். கயிற்றின் நீளம் 20மீ, பூமி மட்டத்திற்கு கயிறு $30^0$ கோணத்தில் கட்டப்பட்டிருந்தால் கம்பத்தின் உயரத்தை கண்டு பிடி. (படம் 9.11 ஐப் பார்.)



படம் 9.11

2. புயலின் காரணமாக ஒரு மரம் முறிந்து விழுகிறது. முறிந்துவிழுந்த மரத்தின் உச்சி $30^0$ கோணத்தில் பூமியைத்தொடுகிறது. மரத்தின் அடிபாகத்திற்கும் அதன் உச்சி பூமியை தொடும் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் 8 மீ மரத்தின் உயரத்தைக் கண்டு பிடி.

3. ஒரு குத்தகைதாரர் பள்ளியிலுள்ள பூங்காவில் பிள்ளைகள் விளையாட இரண்டு சறுக்கு பலகைகளை அமைக்கிறார். 5 வயது குழந்தைகளை விட சிறிய பிள்ளைகள் விளையாடும் சறுக்கு பலகையின் உயரம் 1.5மீ மற்றும் அது பூமிக்கு $30^0$ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. பெரிய பிள்ளைகள் விளையாடும் சறுக்கு பலகையின் உயரம் 3மீ அது பூமிக்கு $60^0$ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. சறுக்கு பலகைகளின் நீளத்தை தனித் தனியே கண்டுபிடி.

4. ஒரு கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து பூமி மீதுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு இறக்கக் கோணம் $30^0$ கட்டிடத்தின் அடிபாகத்திற்கும் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் 3மீ எனில் கட்டிடத்தின் உயரத்தைக் கண்டு பிடி.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. ஒரு பட்டம் பூமியிலிருந்து 60மீ உயரத்தில் பறக்கிறது. பட்டத்தின் கயிறு பூமி மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் தற்காலிகமாக கட்டப்படுகிறது. பூமிக்கும் கயிற்றிற்கும் உள்ள சாய்வுக் கோணம் $60^0$. கயிறு விரைப்பாக உள்ளதாக நினைத்து கயிற்றின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

6. ஒரு பையனின் உயரம் 1.5மீ. அவன் 30மீ உயரமுடைய கட்டிடத்திற்கு சற்று தள்ளி நிற்கிறான். அவன் கட்டிடத்தை நோக்கி நடக்கும் போது அவனுடைய கண்ணிலிருந்து கட்டிடத்தின் உச்சிக்குள்ள ஏற்றக்கோணம் $30^0$ லிருந்து $60^0$ க்கு மாறுகிறது. அவன் கட்டிடத்தை நோக்கி நடந்த தூரத்தின் நீளத்தைக் கணக்கிடு.

7. ஒரு கட்டிடத்தின் மேல் **விசைமாற்று** (transmission) கம்பம் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கட்டிடத்தின் உயரம் 20மீ. பூமியின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து விசை மாற்று கம்பத்தின் அடிபாகத்திற்கும் உச்சிக்குமுள்ள ஏற்றக்கோணம் முறையே $45^0$ மற்றும் $60^0$. விசைமாற்று கம்பத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

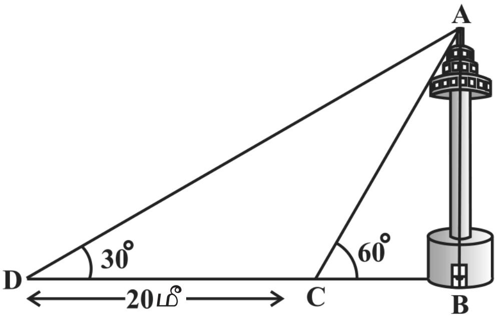
8. ஒரு சிலையின் உயரம் 1.6 மீ. அது ஒரு அடிப்பீடத்தின் மீது நிறுவப்பட்டுள்ளது. தரையின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து சிலையின் உச்சிக்கு ஏற்றக் கோணம் $60^0$. அதே புள்ளியிலிருந்து அடிப்பீடத்தின் உச்சிக்கு ஏற்றக் கோணம் $45^0$. அடிப்பீடத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

9. ஒரு கம்பத்தின் அடிபாகத்திலிருந்து கட்டிடத்தின் உச்சிக்கு ஏற்றக் கோணம் $30^0$. கம்பத்தின் உச்சிக்கு கட்டிடத்தின் அடிபாகத்திலிருந்து ஏற்றக் கோணம் $60^0$. கம்பம் 50மீ உயரம் உடையது எனில் கட்டிடத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

10. சமமான உயரமுடைய கம்பங்கள் இரண்டு சாலையின் எதிர் எதிர் பக்கங்களில் நின்று கொண்டுள்ளன. கம்பங்களுக்கு இடையே சாலையின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அந்த கம்பங்களின் உச்சிகளுக்கு உள்ள ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே $60^0$ மற்றும் $30^0$. சாலையின் அகலம் 80 மீ. கம்பங்களின் உயரங்களைக் கண்டுபிடி. மற்றும் கம்பங்களிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. தொலைக் காட்சி கோபுரம் (T.V. tower) ஒன்று கால்வாயின் கரைமீது செங்குத்தாக நிற்கிறது. கோபுரத்திற்கு எதிராக மறு கரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சிக்கு உள்ள ஏற்றக் கோணம் $60^0$ . இந்த புள்ளியிலிருந்து 20மீ தூரத்தில் மற்றெரு புள்ளி உள்ளது. இந்த புள்ளி கோபுரத்தின் அடிபாகத்தையும் முன்புள்ள புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்க்கோட்டில் உள்ளது. இந்த புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சிக்குள்ள ஏற்றக் கோணம் $30^0$. (படம் 9.12 ஐப் பார்) கோபுரத்தின் உயரத்தையும் கால்வாயின் அகலத்தையும் கண்டுபிடி.

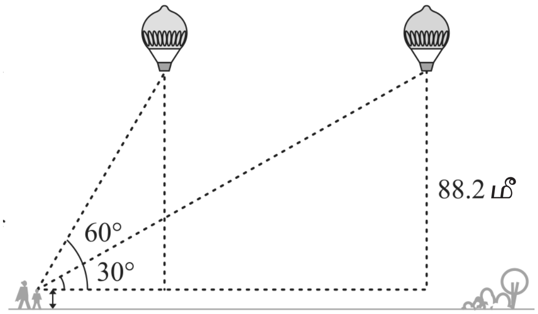


படம் 9.12

12. ஒரு கட்டிடத்தின் உயரம் 7மீ. கேபிள் கோபுரத்தின் உச்சிக்கு கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஏற்றக் கோணம் $60^0$. மற்றும் அதன் அடிபாகத்திற்கு உள்ள இறகக் கோணம் $45^0$. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

13. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 75மீ. அதன் உச்சியிலிருந்து கடலில் உள்ள இரண்டு கப்பல்களின் இறக்கக் கோணம் $30^0$ மற்றும் $45^0$. கலங்கறை விளக்கத்தின் ஒரே பக்கத்தில் கப்பல்கள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக நின்றால் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு.

14. ஒரு பெண்ணின் உயரம் 1.2 மீ. பூமியிலிருந்து 88.2மீ உயரத்தில் பறக்கும் பலூனை அந்தப்பெண் பார்க்கிறாள். பெண்ணின் கண் பார்வையிலிருந்து பலூனிற்கு உள்ள ஏற்றக் கோணம் $60^0$. சிறிதுநேரத்திற்குப் பிறகு ஏற்றக்கோணம் $30^0$ ஆக குறைகிறது. (படம் 9.13 ஐப் பார்) இடைநேரத்தில் பலூன் பறந்த துரத்தைக் கணக்கிடு.



படம் 9.13

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. ஒரு நெடுஞ்சாலை ஒரு கோபுரத்தின் அடிப்பக்கத்தை நோக்கிச் செல்கிறது. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒருவன் நெடுஞ் சாலையில் செல்லும் காரை இறக்கக் கோணம் $30^0$ யில் பார்க்கிறான். அந்தக் கார் சீரான வேகத்தில் கோபுரத்தின் அடியை நோக்கிச் செல்கிறது. 6 வினாடிகளுக்குப் பிறகு காரின் இறக்கக் கோணம் $60^0$ ஆக காணப்பட்டது. இந்த புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் அடிவாரத்தை அடைய கார் எடுத்துக் கொண்ட நேரத்தைக் கணக்கிடு.

## 9.2 தொகுப்பு

இந்த பாடத்தில் நீங்கள் கீழ்க் கண்டவற்றை படித்துள்ளீர்கள்.

1. **(i)** **பார்வைக் கோடு (Line of sight)**: நாம் ஒரு பொருளைப் பார்க்கும் போது, நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு உள்ள நேர்க்கோடுடை **பார்வைக் கோடு** எனப்படும்.

   **(ii)** **ஏற்றக் கோணம் (The angle of elevation)** : ஒரு பொருள் நமது கிடைநிலை பார்வை கோட்டிற்கு மேலே இருந்தால் கிடைநிலை பார்வைக் கோட்டிற்கும் மேலே பொருளைப் பார்க்கும் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் **ஏற்றக் கோணம்** எனப்படும்.

   **(iii)** **இறக்கக் கோணம் (Angle of depression)** : ஒரு பொருள் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கு கீழே இருப்பின், அப்பொருளைப் பார்க்க நாம் நம் பார்வையை தாழ்த்த வேண்டும். கிடை நிலை கோட்டிற்கும் கீழே பொருளைப் பார்க்கும் போது ஏற்படும் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் **இறக்கக் கோணம்** எனப்படும்.

2. ஒரு பொருளின் உயரம் அல்லது நீளம் அல்லது இரண்டு பொருட்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் ஆகியவற்றை முக்கோணவியல் விகிதங்களின் உதவியுடன் கணக்கிட முடியும்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# வட்டங்கள்

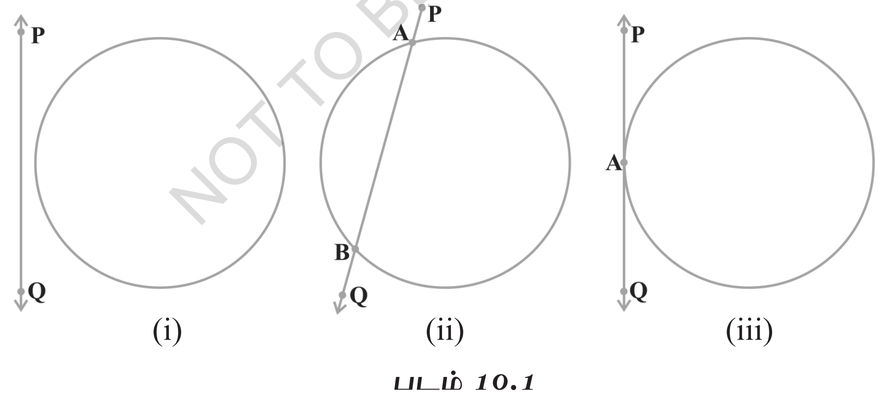
## CIRCLES

10

### *10.1* அறிமுகம் (Introduction)

நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து சம தொலைவில் நகரும் புள்ளியின் நியமப் பாதை ஒரு வட்டமாகும் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். மேலும் நீங்கள் வட்டத்திற்கு தொடர்புடைய நாண் (Chord), வட்டத்துண்டு (Segment), வட்டவில் (Arc of circle), விட்டம் (diameter) என்பவை குறித்தும் படித்துள்ளீர்கள். ஒரு தளத்தில் ஒரு கோடும் ஒரு வட்டமும் கொடுக்கப்படும் போது கிடைக்கும் பல்வேறு நிலைகள் குறித்து கீழே பார்ப்போம்.

தற்போது ஒரு வட்டம் மற்றும் ஒருக்கோடு PQ குறித்து பார்ப்போம். கீழே படம் *4.1*ல் மூன்று சாத்தியக் கூறுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



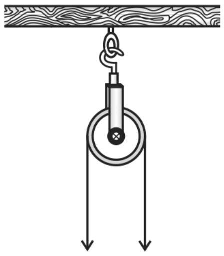

படம் *10.1*

படம் *10.1* (i)ல் கோடு மற்றும் வட்டத்திற்கு பொதுவான புள்ளி இல்லை இந்த சூழலில் கோடானது வட்டத்தைப் பொறுத்தவரை வெட்டிச்செல்லாத **(non intersecting)** கோடு ஆகும்.

படம் *10.1* (ii) ல் கோடு PQ மற்றும் வட்டத்திற்கு A மற்றும் B என்ற இரண்டு பொதுப் புள்ளிகள் உள்ளன. இந்த நிலையில் PQ என்பதை வட்டத்தின் வெட்டுக்கோடு என அழைக்கிறோம்.

படம் **10.1** (iii) ல் கோடு PQ விற்கும் வட்டத்திற்கும் ஒரே ஒரு பொது புள்ளி உள்ளது. இதை நாம் வட்டத்தின் தொடு கோடு (Targent) என்கிறோம்.

கிணற்றிலிருந்து நீர் இறைக்க கிணற்றின் மேல் பகுதியில் பொருத்தப் பட்ட இழுவையை (Pulley) நீ ங்கள் பார்த்திருப்பீர்கள். படம் **10.2** ஐப் பார். இழுவையின் இரண்டு பக்கமும் தொங்கும் கயிறுகளை வட்டமாக உள்ள இழுவையின் தொடுகோடுகள் என கருதலாம். மேற்கண்ட நிலைகளைத் தவிர வேறெந்த நிலைகளை நம்மால் யூகிக்க முடியுமா? வட்டத்தைப் பொருத்து வேறு எந்த நிலையிலும் நேர்க் கோட்டைப் பார்க்க முடியாது. இந்தப் பாடத்தில் வட்டத்திற்கு ஏற்படும் தொடுகோடுகள் அவற்றின் பண்புகள் பற்றி படிப்போம்.



படம் **10.2**

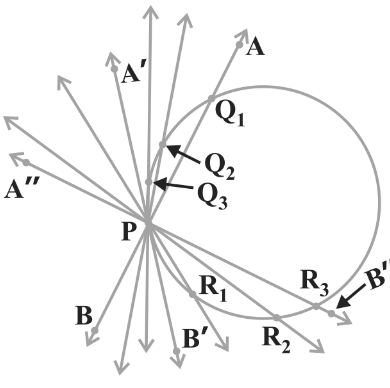
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## *10.2 வட்டத்தின் தொடுகோடு (Tangent to a circle)*

இதற்கு முன் பகுதியில் வட்டத்தின் தொடுகொடு என்பது அந்த வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டுகிறது என பார்த்தோம்.

ஒரு வட்டத்திற்கு தொடுகோடு என்பது வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்கிறது என்பதை சில செயல்பாடுகள் மூலம் அறிந்து கொள்வோம்.

**செயல்பாடு *1* :** ஒரு வட்ட வடிவகம்பியை எடுத்துக்கொள். அதில் P என்ற புள்ளியில் AB என்ற நேர்க்கோட்டு கம்பியை செருகு அல்லது கட்டு. அது சமதளத்தில் சுற்றும்படி இருக்கட்டும். இதை ஒரு மேசை மீது வை AB என்ற நேர்க்கோட்டுக் கம்பி வட்டக் கம்பியின் P புள்ளியில் பல நிலைகளில் உள்ளவாறு (படம் **10.3** (i) ஐப் பார்) சுற்று.




படம் **10.3** (i)

பல நிலைகளில் அந்தக் கம்பி வட்டக் கம்பியை P புள்ளியில் வெட்டுகிறது. $Q_1$, $Q_2$ அல்லது $Q_3$ என்பன வட்டக் கம்பியில் வெட்டும் புள்ளிகள் ஆகும். ஒரு நிலையில் மட்டும் வட்டத்தை P

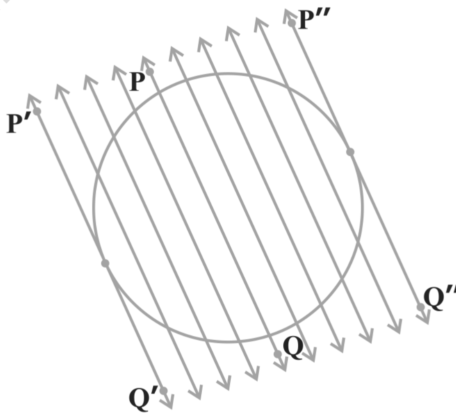
என்ற புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டுகிறது. அந்த நிலை A'B' ஆகும். இது வட்டத்திற்கு P யின் தொடுகோடு என்பதை காட்டுகிறது. மீண்டும் அதை சுற்றினால் AB யை தவிர மற்ற நிலைகளில் வட்டத்தை அது P யிலும் மற்றும் $R_1$, $R_2$ அல்லது $R_3$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. எனவே வட்டத்திற்கு ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே தொடுகோடு அமையும் என்பதை நீ அறியலாம்.

மேற்கண்ட செயல்பாட்டினை நாம் செய்யும் போது அறிவது AB யின் நிலை A'B'ஐ நோக்கி நகரும் போதுப் புள்ளியை நோக்கி $Q_1$ லிருந்து P- க்கு வருகிறது. A'' B'' லிருந்து நகர்ந்து அது A'B' நிலைக்கு கடைசியாக வரும்போது அது P என்ற பொதுப் புள்ளியை அடைகிறது.

எனவே நாம் அறிவது என்னவென்றால் வட்டத்திலுள்ள நாணின் இரு துருவங்களும் நகர்ந்து ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் வகையில் அமைந்த ஒரு வெட்டுக்கோட்டின் பிரத்தியேக கோடு அல்லது மிகச்சிறப்பான கோடு தொடுகோடு எனப்படும்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

**செயல்பாடு 2 :** ஒருத் தாளின் மீது ஒரு வட்டத்தை வரை. அதன் மீது PQ என்ற வெட்டுக்கோடு வரை. வெட்டுக் கோட்டிற்கு இரண்டு பக்கமும் அதற்கு இணையாக பல கோடுகளை வரை. சில படிகளுக்குப் பின்னால் வெட்டுக் கோட்டின் நீளம் குறைந்து கொண்டே வருவதை நீ காண்பாய். (படம் ***4.3*** (ii) ஐப் பார்) அதாவது வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் படிப்படியாக அருகருகே வருகின்றன. ஒரு நிலையில் இந்த இரண்டு வெட்டுப்புள்ளிகளின் நீளம் சூழியமாக (zero) ஆகிறது. மறு பக்கமும் அதேபோல் சூழியம் ஆகிறது. P' Q' மற்றும் P'' Q'' இவற்றைப் படம் 10.3 (ii)ல் பார். இவை கொடுக்கப்பட்ட வெட்டுக்கோடு PQ விற்கு இணையான வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் ஆகும். கொடுகப்பட்ட வெட்டுக்கோட்டிற்கு இணையாக இரண்டே இரண்டு தொடுகோடுகள் மட்டுமே வரைய முடியும் என்பதை நீ அறிகிறாய்.

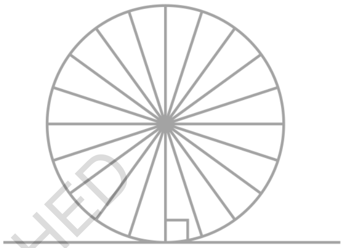


படம் ***10.3*** (ii)

செயல்பாடு 1ல் இருந்ததைப் போல் இதிலும் நாணின் இரண்டு புள்ளிகளும் ஒரே புள்ளியில் அமைவதுதான் தொடுப்புள்ளியில் வெட்டுக் கோடு தொடுகோடாகிறது என்பதும் நிரூபணமாகிறது.

தொடுகோட்டிற்கும் வட்டத்திற்கும் உள்ள பொதுவானப் புள்ளி **தொடுபுள்ளி (point of contact)** எனப்படும். படம் 4.1(iii)ல் புள்ளி A என்பது தொடுகோடும் வட்டமும் சந்திக்கும் புள்ளி பொதுப் புள்ளி ஆகும்.

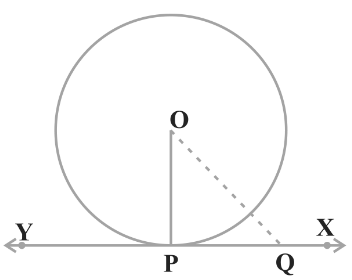
தற்போது உன்னைச் சுற்றிப்பார். ஒரு மிதி வண்டி அல்லது கட்டை வண்டி (மாடு இழுக்கும் வண்டி) தெரிகிறதா? அதன் சக்கரங்கள் உருள்வதைப் பார். சைகிளின் சக்கரத்திலுள்ள கம்பிகள் ஆரங்கள் போன்று உள்ளன. பூமியின் மீது சக்கரம் உருள்வதைப் பார். ஏதாவது ஒரு இடத்தில் உன்னால் தொடுகோட்டைப் பார்க்க முடிகிறதா? படம் 10.4 ஐப் பார். சக்கரம் பூமியில் வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் மீது நகர்கிறது என்பது உண்மை. எல்லா நிலைகளிலும் தொடுபுள்ளியிலுள்ள ஆரம் பூமியின் மீதுள்ள தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக உள்ளது. படம் (4.5 ஐ ப் பார்) இப்பொழுது நாம் தொடுகோட்டின் இந்தப் பண்பை நிரூபிக்கலாம்.



படம் 10.4

**தேற்றம் 10.1 :** "வட்டத்தின் மீது ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு ஆனது அந்த வட்டத்தின்தொடும் புள்ளியிலுள்ள ஆரத்திற்கு செங்குத்தாக இருக்கும்."

**நிரூபணம் :** '0' வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் XY என்பது புள்ளி 'P' யில் தொடு கோடு என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நாம் OP என்பது XY க்கு செங்குத்துக் கோடு என நிரூபிக்க வேண்டும்.




படம் 10.5

XY மீது P யைத்தவிர Q என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள். (படம் 10.5 ஐப் பார்) Q என்பது வட்டத்தின் வெளியே இருக்க வேண்டும். (ஏன் ?)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Q என்பது வட்டத்தின் உள்ளே இருந்தால் XY என்பது தொடுகோடாக இல்லாமல் வெட்டுக் கோடாக இருக்கும். எனவே OQ என்பது, ஆரம் OP யை விட நீளமானது.

அதாவது OQ > OP

கோடு XY மீது உள்ள P யைத் தவிர எந்தப் புள்ளியும் இதேப்போல் நிலையைத் தான் உருவாக்கும். OP என்பதுதான் XY மீது வேறு ஏந்த புள்ளிக்கு 'O' விலிருந்து வரையப்படும் கோட்டை விட மிகச் சிறியது ஆகும். எனவே OP என்பது XYக்கு செங்குத்து ஆகும். (தேற்றம் A 1.7 ல் உள்ளபடி)

**குறிப்பு :**(1) மேற்கண்ட தேற்றத்தின் படி வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரைய முடியும்.

(2) தொடுபுள்ளி வழியாக ஆரத்தைக் கொண்டிருக்கும் கோடானது, வட்டத்திற்கு அந்த புள்ளியில் உள்ள 'பொது' (Normal) என்றழைக்கப்படும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## பயிற்சி 10.1

1. ஒரு வட்டத்தில் எத்தனை தொடுகோடுகள் இருக்கும்?

2. கோடிட்ட இடத்தை நிரப்புக.

   (i) ஒரு வட்டத்தில் தொடுகோடு அதை ______ புள்ளி (களில்) யில் வெட்டும்.

   (ii) ஒரு வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் கோட்டிற்கு ______ என்று பெயர்.

   (iii) ஒரு வட்டத்திற்கு அதிகபட்சமாக ______ இணையான தொடுகோடுகள் வரைய முடியும்.

   (iv) ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோட்டிற்கும் அந்த வட்டத்திற்கும் பொதுவான புள்ளிக்கு ______ என்று பெயர்.

3. 5cm ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோடு PQ, தொடு புள்ளி P இந்த தொடுகோடு 'O' வை மையத்துடன் கூடிய கோட்டை Q வில் சந்திக்கிறது. இதில் OQ = 12 செ.மீ, PQ வின் நீளம் என்பது.

   (A) 12 செ.மீ. (B) 13 செ.மீ. (C) 8.5 செ.மீ. (D) $\sqrt{119}$ செ.மீ.

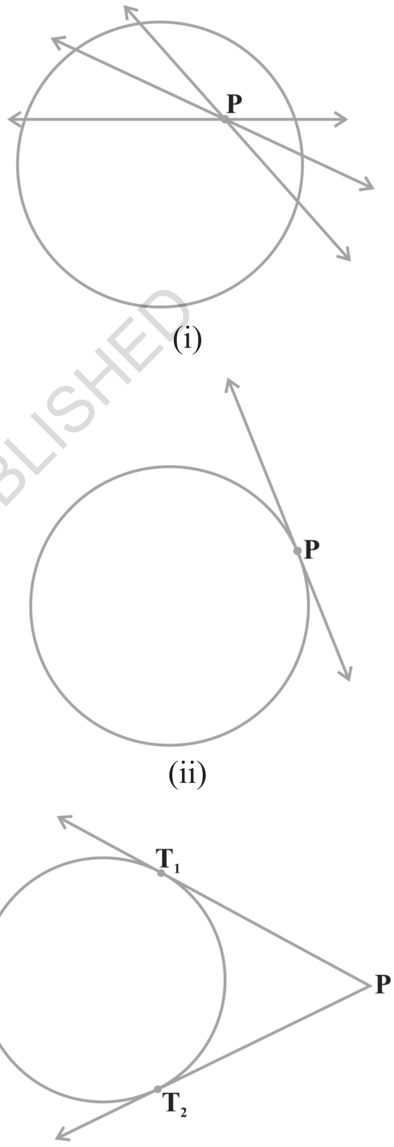
*4.* ஒரு வட்டம் வரை. மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டிற்கு, ஒன்று தொடுகோடாகவும் மற்றொன்று வட்டத்தின் வெட்டுக் கோடாகவும் இருக்குமாறு இரண்டு இணைக் கோடுகள் வரை.

### 10.3 ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கை.

வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் எண்ணிக்கை குறித்து அறிந்துகொள்ள கீழ்க்கண்ட செயல்பாடுகளைப் பார்போம்.

**செயல்பாடு 3 :** ஒரு தாளின் மீது ஒரு வட்டத்தை வரை. வட்டத்தின் உள்ளே 'P' என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள். இந்த புள்ளி வழியே வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைய முடியுமா? இந்த புள்ளி வழியே வரையப் படும் எல்லாக் கோடுகளும் வட்டத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. எனவே வட்டத்தின் உள்ளே உள்ள புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைய முடியாது. (படம் *10.6* (i) ஐப் பார்)

அடுத்து வட்டத்தின் மீது புள்ளி 'P' யை எடுத்துக்கொள். இந்த புள்ளி வழியே ஒரு தொடுகோடு வரை அத்தகைய புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு ஒரே ஒரு தொடுகோடுதான் வரைய முடியும். என்பதை நீ முன்பே பார்த்தாய். (படம் 10.6 (ii) ஐப் பார்)



படம் 10.6

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

கடைசியாக வட்டத்திற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி 'P' யை எடுத்துக்கோள். இந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரை. நீ என்ன கவனித்தாய்? இந்த புள்ளி வழியாக வட்டத்திற்கு சரியாக இரண்டு தொடுகள் வரைய முடியும் என்பதை அறிகிறாய்.(படம் **10.6** (iii) ஐப் பார்)

இந்த உண்மைகளை கீழ்க்கண்டவாறு தொகுக்கலாம்.

**வகை 1 :** வட்டத்தின் உள்ளேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைய முடியாது.

**வகை 2 :** வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே ஒரு தொடுகோடுதான் வரையமுடியும்.

**வகை 3 :** வட்டத்தின் வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

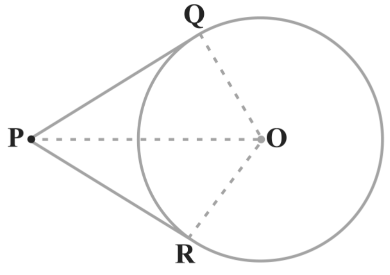
படம் 10.6 (iii) ல் $PT_1$ மற்றும் $PT_2$ என்ற தொடு கோடுகளின் தொடுபுள்ளிகள் முறையே $T_1$ மற்றும் $T_2$ ஆகும்.

வட்டத்தின் வெளியேயுள்ள புள்ளி 'P' யிலிருந்து தொடுபுள்ளி வரை உள்ள தொடு கோட்டின் தூரம் **தொடுகோட்டின் நீளம்** எனப்படும்.

படம் 10.6 (iii)ல் $PT_1$ மற்றும் $PT_2$ என்பன வட்டத்தின் வெளியிலுள்ள புள்ளி 'P' யிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோட்டின் நீளங்கள் ஆகும். தொடு கோட்டின் நீளங்கள் $PT_1$ மற்றும் $PT_2$ இவற்றை அள. அவை சமமானவையா? உண்மையில் அவை சமமானவை. இந்த உண்மையை கீழ்க்கண்ட தேற்றம் மூலம் நிரூபிக்கலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

**தேற்றம் 10.2:** ஒரு வட்டத்தின் வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு வரைப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.



**படம் 10.7**

**நிரூபணம் :** 'O' வை மையமாக உடைய வட்டம் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. வட்டத்தின் வெளியிலுள்ள புள்ளி P யிலிருந்து இரண்டு தொடுகோடுகள் PQ மற்றும் PR வரையப் பட்டுள்ளன (படம் **10.7** ஐப் பார்) PQ = PR என நாம் நிருபிக்க வேண்டும்.

இதற்காக நாம் OP, OQ மற்றும் OR இவற்றை இணைக்க வேண்டும். ∠OQP மற்றும் ∠ORP இவை செங்கோணங்கள். ஏனெனில் அவை ஆரத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணங்கள்.

தேற்றம் 10.1 ன் படி அவை செங்கோணங்கள். இப்போது ΔOQP மற்றும் ΔORP இவற்றில்

| | | |
|---|---|---|
| | OQ = OR | (ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்கள்) |
| | OP = OP | (பொதுவானது) |
| | $\angle OQP = \angle ORP = 90^0$ | |
| ∴ | $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ | (RHS இன் படி) அல்லது (செ.க.ப.இன் படி) |
| ஆகையால் | PQ = PR | (சர்வ சம முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்கள்) (CPCT) |

**குறிப்பு :**

1. இந்த தேற்றத்தை பிதகோரஸ் தேற்றத்தை உபயோகித்தும் கீழ்க்கண்டவாறு நிரூபிக்கலாம்.

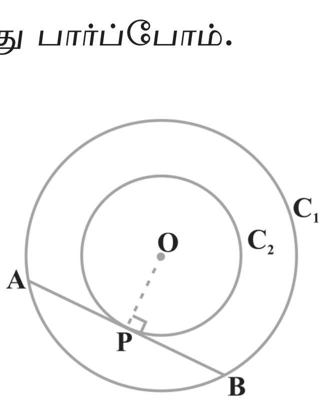
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (ஏனெனில் OQ = OR )

   இதிலிருந்து $PQ^2 = PR^2$ அதாவது PQ = PR

2. மேலும் ∠OPQ = ∠OPR என்பதையும் கவனி. எனவே OP என்பது ∠QPR ன் இருசமவெட்டி. அதாவது வட்ட மையம் இரண்டு தொடுகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தின் இருசமவெட்டி கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளது.

   நாம் சில எடுத்துக் காட்டுகளை இப்போது பார்ப்போம்.

***எடுத்துக்காட்டு 1 :*** இரண்டு பொதுமைய வட்டங்களில் வெளிவட்டத்தில் வரையப்பட்ட நாண் உள் வட்டத்தை தொடுகிறது. தொடுபுள்ளியில் அந்த நாண் இரு சம கூறிடப்படுகிறது என நிரூபி.



படம் 10.8

***தீர்வு :*** $C_1$ மற்றும் $C_2$ என்ற பொதுமைய வட்டங்கள் இரண்டை எடுத்துக் கொள். இவற்றின் பொது

மையப் புள்ளி 'O' ஆகும். AB என்பது பெரிய வட்டம் $C_1$ ன் நாண். இது சிறிய வட்டம் $C_2$ வை 'P' என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது. (படம் *10.8* ஐப் பார்) AP = BP என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.

OP யை இணை AB என்பது வட்டம் $C_2$ ன் தொடுகோடு. P என்பது தொடுபுள்ளி OP என்பது ஆரம். தேற்றம் 10.1 ன் படி

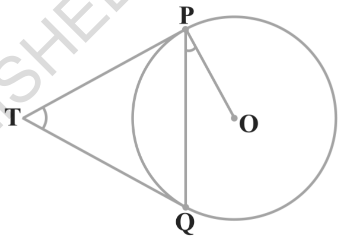
$$OP \perp AB$$

AB என்பது வட்டம் $C_1$ ன் நாண் மற்றும் $OP \perp AB$ எனவே OP என்பது நாண் ABன் இருசமவெட்டி. ஏனெனில் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு அந்த நாணை இருசம பாகங்களாக பிரிக்கும். (இருசமக் கூறிடும்)

எனவே AP = BP

**எடுத்துக்காட்டு 2 :** 'O' வை மையமாக உள்ள வட்டத்தின் வெளியே உள்ள புள்ளி 'T' யிலிருந்து அந்த வட்டத்திற்கு TP மற்றும் TQ என்ற தொடுகோடுகள் வரையப் பட்டுள்ளன.

$\angle PTQ = 2\angle OPQ$ என நிரூபி.



படம் *10.9*

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

***தீர்வு :*** 'O' வை மையமாக உள்ள வட்டம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வட்டத்தின் வெளியிலுள்ள புள்ளி 'T'. TP மற்றும் TQ என்பன தொடுகோடுகள். P மற்றும் Q என்பன தொடுபுள்ளிகள். (படம் *10.9* ஐ பார்) $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.

$\angle PTQ = \theta$ என்க

தேற்றம் *4.2* இன் படி TP = TQ எனவே TQP என்பது ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

$$\therefore \quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^0 - \theta) = 90^0 - \frac{1}{2}\theta$$

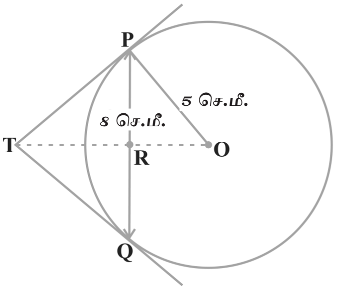
தேற்றம் *4.1* ன் படி $\angle OPT = 90^0$

$$\therefore \quad \angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^0 - \left[90^0 - \frac{1}{2}\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

இதிலிருந்து $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

**எடுத்துக்காட்டு 3 :** 5 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டத்தில் 8 செ.மீ. நீளமுடைய PQ என்ற நாண் உள்ளது. P மற்றும் Q வில் உள்ள தொடுகோடுகள் T என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. *(படம் 10.10 ஐப் பார்)* TP ன் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.



**படம் 10.10**

**தீர்வு :** OT ஐ இணை. அது PQ வை 'R' புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

எனவே $\Delta TPQ$ என்பது இருசமபக்க முக்கோணம். TO என்பது $\angle PTQ$ வின் இருசம வெட்டி. எனவே $OT \perp PQ$ எனவே OT என்பது PQ வை இருசமக்கூறிடும். ஆகவே PR = RQ = 4cm.

மேலும் $OR=\sqrt{OP^2-PR^2}=\sqrt{5^2-4^2}$ cm செ.மீ. = 3cm = 3 செ.மீ.

தற்போது, $\angle TPR+\angle RPO=90^0=\angle TPR+\angle PTR$ ----------- *(ஏன்?)*

எனவே, $\angle RPO=\angle PTR$

ஆகையால் செங்கோண $\Delta TRP$ என்பது செங்கோண $\Delta PRO$ வை ஒத்திருக்கிறது. இதன்படி

$\therefore \quad \frac{TP}{PO}=\frac{RP}{RO} \quad \therefore \quad \frac{TP}{5}=\frac{4}{3}$ அல்லது $TP=\frac{20}{3}$ cm செ.மீ.

**குறிப்பு :** TP ன் நீளத்தை பிதகோரஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி கீழ்க் கண்டவாறு நிரூபிக்கலாம்.

TP = $x$ மற்றும் TR = $y$ என்க₹₹, பிறகு

$x^2=y^2+16$ (செங்கோண $\Delta PRT$ படி) *(1)*

$\therefore$ $x^2+5^2=(y+3)^2$ (செங்கோண $\Delta OPT$ படி) *(2)*

*(2)* லிருந்து *(1)* ஐ கழித்தால் நமக்கு கிடைப்பது

$25 = 6y - 7$ அல்லது $y=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

எனவே $$x^2=\left(\frac{16}{3}\right)^2+16=\frac{16}{9}(16+9)=\frac{16\times 25}{9}$$ (*(1)* லிருந்து)

அல்லது $x=\frac{20}{3}$ செ.மீ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## பயிற்சி 10.2

வினா எண் 1 முதல் 3 வரை உள்ளதற்கு சரியான விடை கொடுக்க மற்றும் விடையை நியாயப்படுத்துக.

1. ஒரு புள்ளி Q விலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் 24செ.மீ. வட்ட மையத்திலிருந்து Q புள்ளி 25செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. அந்த வட்டத்தின் ஆரமானது.

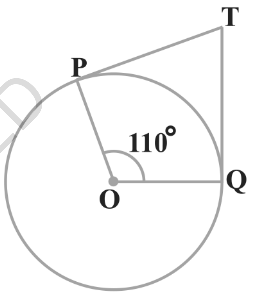
   (A) 7 செ.மீ. (B) 12 செ.மீ.

   (C) 15 செ.மீ. (D) 24.5 செ.மீ.

2. படம் 10.11 ல் TP மற்றும் TQ என்பன தொடுகோடுகள். மையப் புள்ளி 'O'. $\angle POQ = 110^0$ என்றால் $\angle PTQ =$ ........என்பது இதற்கு சமம்.

   (A) $60^0$ (B) $70^0$

   (C) $80^0$ (D) $90^0$



படம் 10.11

3. 'O' வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் புள்ளி 'P' யிலுள்ள தொடுகோடுகள் PA மற்றும் PB என்பன ஒன்றொன்றுக் கொன்று $80^0$ சாய்ந் திருந்தால் $\angle POA =$........ ன் அளவு.

   (A) $50^0$ (B) $60^0$ (C) $70^0$ (D) $80^0$

4. ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் இணையானவை என நிரூபி.

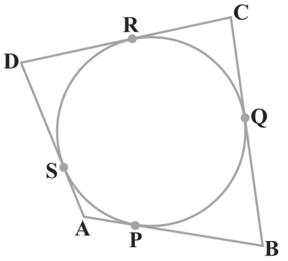
5. ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் தொடுப்புள்ளி வழியாக தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு வட்ட மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் என நிரூபி.

6. வட்ட மையத்திலிருந்து 5செ.மீ. தூரத்திலுள்ள புள்ளி A. இந்தப் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் 4cm வட்டத்தின் ஆரத்தின் நீளத்தைக் கண்டு பிடி.

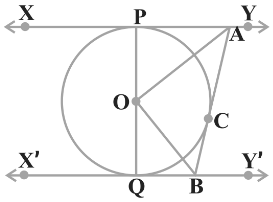
7. பொது மையம் உடைய இரண்டு வட்டங்களின் ஆரங்கள் 5செ.மீ. மற்றும் 3செ.மீ. சிறிய வட்டத்தை தொடும் பெரிய வட்டத்தின் நாணின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

8. ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி அதை தொட்டுக்கொண்டு செல்லும்படி ABCD என்ற நாற்கரம் வரை (படம் 10.12 ஐப் பார்) AB + CD = AD + BC என நிரூபி.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 10.12



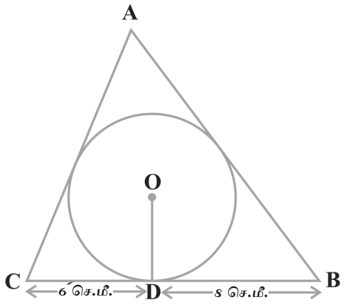
படம் 10.13

9. படம் 10.13ஐப் பார். $xy$ மற்றும் $x'y'$ என்பன இரண்டு இணையான தொடுகோடுகள். வட்டத்தின் மையப்புள்ளி 'O'. 'c' என்ற தொடுபுள்ளியில் வரையப்பட்ட மற்றொரு தொடுகோடு AB என்பது $xy$ ஐ A விலும் $x'y'$ஐ B யிலும் வெட்டுகிறது. $\angle AOB = 90^0$ என நிரூபி.

10. வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையப் பட்டுள்ளன. இந்த இரு தொடுகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் வட்டமையத்தையும் தொடுபுள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோடுகளுக்கு இடையே ஏற்படும் கோணத்தின் மிகைநிரப்புக்கோணம் (Supplementry) என நிரூபி.

11. ஒரு வட்டத்தை ஒட்டி வரையப்படும் ஒரு இணைகரம் ஒரு சாய்சதுரம் (rhombus) என நிரூபி.

12. 4செ.மீ. ஆரமுடைய ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி ABC என்ற முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது. இதில் தொடுபுள்ளி D வழியாக வரையப்பட்டுள்ள BC யை BD = 8செ.மீ. மற்றும் DC=6செ.மீ. என தொடுபுள்ளி பிரிக்கிறது (படம் 10.14 ஐப் பார்) எனில் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC இவற்றின் நீளங்களைக் கண்டுபிடி.



படம் 10.14

13. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல் மிகை நிரப்புக் கோணம் ($180^0$) என நிரூபி.

## 10.4 தொகுப்பு : இந்த பாடத்தில் கீழ்கண்டவற்றைப் படித்தோம்.

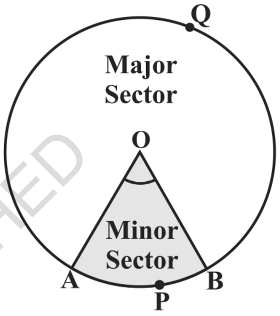
1. ஒரு வட்டத்தின் தொடுகோடு என்பதன் பொருள்.
2. ஒரு வட்டத்தின் தொடுபுள்ளி வழியாக செல்லும் ஆரத்திற்கு தொடுகோடு செங்குத்தாக இருக்கும்.
3. வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகள் சம நீளமுள்ளவை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# வட்டங்கள் சம்மந்தப்பட்ட பரப்புக்கள்
## Areas Related to Circles

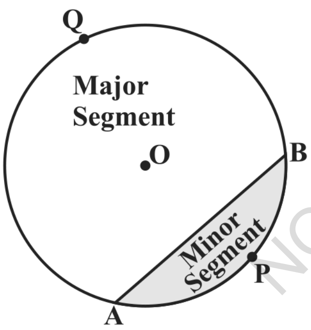
# 11

### *11.1* ஒரு வட்டத்தின் வட்டக் கோணப்பகுதி (Sector) மற்றும் வட்டத்துண்டின் (Segment) பரப்புக்கள்.




படம் *11.1*

முந்தைய வகுப்புக்களில் வட்டக் கோணப் பகுதி மற்றும் வட்டத்துண்டுப் பற்றி படித்திருக்கிறீர்கள். இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள வில் இவற்றால் சூழப் பட்ட பகுதியின் பரப்பு வட்டக் கோணப் பகுதி எனப்படும். ஒரு நாண் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வில் இவற்றால் சூழப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு வட்டத்துண்டு எனப்படும். படம் *11.1* ல் வண்ணம் பூசப்பட்ட OAPB என்ற பகுதி 0 வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் வட்டக் கோணப் பகுதி ஆகும். ∠AOB என்பது வட்டக்கோணப் பகுதியின் கோணம் ஆகும். இந்தப் படத்தில் வண்ணம் தீட்டப் படாத பகுதி OAQB என்பதும் வட்டத்தின் வட்டக் கோணப் பகுதி ஆகும். OAPB என்பது சிறிய வட்டக் கோணப் பகுதி, OAQB என்பது பெரிய வட்டக் கோணப் பகுதி ஆகும். பெரிய வட்டக்கோணப் பகுதியின் கோணம் $360^0$-∠AOB. படம் *11.2* ஐப் பார். இதில் AB என்பது நாண். O வட்ட மையம். வண்ணம் பூசப் பட்ட பகுதி APB என்பது சிறிய வட்டத்துண்டு. நாண் AB ஆல் உண்டாக்கப் பட்ட மற்றொரு வண்டத்துண்டு AQB. இது பெரிய வட்டத் துண்டு ஆகும்.




படம் *11.2*

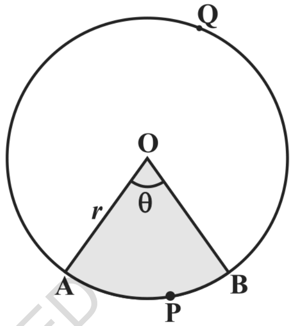
குறிப்பு : இங்கு நாம் வட்டக் கோணப் பகுதி மற்றும் வட்டத் துண்டு என எழுதினால் அது சிறிய வட்டக் கோணப் பகுதி மற்றும் சிறிய வட்டத்துண்டு

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இவற்றை மட்டுமே குறிக்கும் (வேறு மாதிரி சொன்னாலொழிய) என்று கொள்வோம்.

இவற்றின் உதவியுடன் மேற்கண்ட வற்றின் பரப்பளவுகளைக் காண சூத்திரங்களை கண்டுபிடிக்க முயற்சி செய்யலாம்.

OAPB என்பது ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி என்க. O என்ற வட்டமையத்தை உடைய வட்டத்தின் r ஆரம். (படம் 11.3 ஐப் பார்). ∠AOB யின் டிகிரி அளவு θ என்க.



படம் 11.3

வட்டத்தின் பரப்பளவு (அதாவது வட்ட வடிவப் பகுதி (அல்லது) வட்டு (disc))

என்பது $\pi r^2$ என நீ அறிவாய்.

இந்த வட்டப் பகுதியை $360^o$ உருவாக்கக் கூடிய வட்டக் கோணப் பகுதியாக கருதலாம். (அதாவது கோண அளவு $360^o$) இது வட்டத்தில் O வில் அமைவதாக கருதலாம். இப்போது யுனிடேரி முறையை (unitary method) பயன் படுத்தினால் OAPB என்ற வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பளவை கீழ்க் கண்டவாறு கணக்கிடலாம் -

மையப் புள்ளியில் கோண அளவு $360^o$ எனில் வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு = $\pi r^2$ ஆகும்.

மையப் புள்ளியில் கோண அளவு $1^o$ எனில் பரப்பளவு = $\frac{\pi r^2}{360}$

எனவே மையப் புள்ளியில் கோண அளவு (θ) எனில் வட்ட கோணப் பகுதியின் பரப்பு $\frac{\pi r^2}{360}\times\theta=\frac{\theta}{360}\times\pi r^2$

$$=\frac{\theta}{360}\times\pi r^2$$

இப்படி நாம் ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவை காண கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தை பயண் படுத்தலாம்.

**θ கோணமுடைய ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு** $=\frac{\theta}{360}\times\pi r^2$

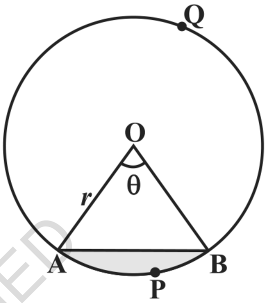
இங்கு r என்பது வட்டத்தின் ஆரம், θ என்பது வட்டக் கோணப் பகுதியின் கோணம் ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது இயற்கையாக ஒரு கேள்வி எழுகிறது. இந்த வட்டக் கோணப் பகுதியிலுள்ள வில் APB யின் அளவை நம்மால் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? முடியும். மீண்டும் யுனிட்டெரி முறை (unitary method) யைப் பயன்படுத்தி வட்டப் பரிதியின் முழு அளவு (கோண அளவு $360^o$) $2\pi r$ ஐயும் எடுத்துக் கொண்டு தேவைப் பட்ட வில் APB யின் அளவைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

வட்டவில் APB யின் அளவு $\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$

**எனவே θ அளவுடைய வட்டக்கோணப் பகுதியிலூள்ள வட்டவில்லின் நீளம்** = $\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$



படம் 11.4

தற்போது வட்டத்துண்டு APB யின் பரப்பளவுக்குறித்து காண்போம். வட்டத்தின் மையம் O, ஆரம் r (படம் 11.4 ஐப் பார்)

வட்டத்துண்டு APB யின் பரப்பு =

வட்டக் கோணப் பகுதி OAPB யின் பரப்பு − ΔOAB யின் பரப்பு.

$=\frac{\theta}{360}\times\pi r^2$ − ΔOAB ன் பரப்பு

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

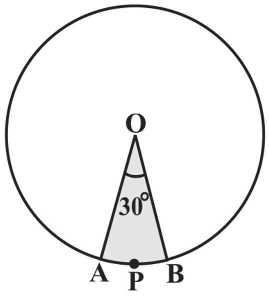
**குறிப்பு :** படம் 11.3 மற்றும் 11.4 இவற்றை கவனிக்கும்போது. பெரியவட்டக்கோணப் பகுதி OAQB யின் பரப்பு = $\pi^2$ - சிறிய வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு OAPB மற்றும் பெரிய வட்டத்துண்டு AQB யின் பரப்பு = $\pi r^2$ - சிறிய வட்டத்துண்டு APB யின் பரப்பு.

இந்த அடிப்படைக் கூற்றை புரிந்துக் கொள்ள சில எடுத்துக் காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

***எடுத்துக்காட்டு 1: 4*** செ. மீ ஆரமுடைய வட்டத்திலுள்ள $30^o$ அளவுடைய வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி. மேலும் அதன் தொடர்புடைய பெரிய வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவயும் கண்டுபிடி. ($\pi \approx 3.14$ என்பதை பயன்படுத்து).

**தீர்வு :**

OAPB என்ற வட்டக் கோணப் பகுதி கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (படம் **11.5** ஐப் பார்)



படம் **11.5**

வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பு $=\frac{\theta}{360}\times \pi r^2$

$\approx \frac{30}{360}\times 3.14\times 4\times 4$ ச.செ.மீ

$=\frac{12.56}{3}$ ச.செ.மீ

$= 4.19$ ச.செ.மீ (தோராயமாக)

பெரிய வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பளவு = $\pi r^2$-வட்டக் கோணப் பகுதி

OAPB யின் பரப்பு

$= \pi r^2 - (3.14 \times 16 - 4.19)$ ச.செ.மீ

$\approx 46.05\ cm^2 = 46.1$ ச.செ.மீ (தோராயமாக)

## மற்றொரு வழி

பெரிய வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு = $\left(\frac{360-\theta}{360}\right)\times \pi r^2$

$\approx \left(\frac{360-30}{360}\right)\times 3.14\times 16$ ச.செ.மீ

$=\frac{330}{360}\ 3.14\times 16$ ச.செ.மீ $= 46.05$ ச.செ.மீ

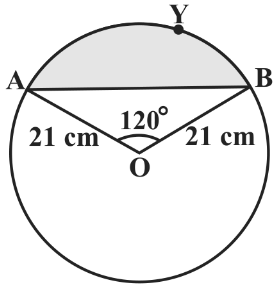
$= 46.1$ ச.செ.மீ (தோராயமாக)

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

## எடுத்துக் காட்டு 2 :

படம் **11.6** ல் காட்டியுள்ள வட்டத் துண்டு AYB யின் பரப்பை கண்டுபிடி. வட்டத்தின் ஆரம் = **21** செ.மீ. மற்றும் $\angle AOB=120^0$

($\pi=\frac{22}{7}$ என பயன் படுத்து).



படம் **11.6**

**தீர்வு :** வட்டத் துண்டு AYB யின் பரப்பு=

வட்டக் கோணப் பகுதி OAYBன் பரப்பு $-$ $\Delta$OAB யின் பரப்பு ... *(1)*

வட்டக் கோணப் பகுதி OAYBன் பரப்பு $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ச.செ.மீ = 462ச.செ.மீ ... *(2)*

$\Delta$OAB யின் பரப்பைக் கண்டுபிடிக்க OM $\perp$ AB படம் ***11.7*** ல் காட்டியபடி வரை.

OA = OB என்பதை கவனி.

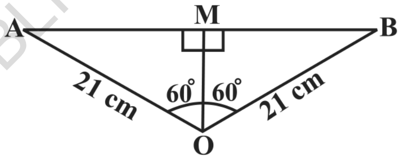
எனவே சர்வசம முக்கோணம் RHS படி

$\Delta AMO \cong \Delta BMO$

எனவே M என்பது AB- யின் மையப் புள்ளி.

மற்றும் $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$

OM = $x$ செ.மீ. என்க




படம் ***11.7***

$\Delta$OMA யில் $\frac{OM}{OA}$ = cos ***60°***

அல்லது $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \left( \cos 60^0 = \frac{1}{2} \right)$

$\therefore \quad \frac{21}{\ }$

எனவே $OM = \frac{21}{2}$ செ.மீ

மேலும் $\frac{AM}{OA} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

எனவே $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ செ.மீ

ஆகையால் $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ செ.மீ. $= 21\sqrt{3}$ செ.மீ.

எனவே $\Delta$OAB யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{cm}^2$

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ ச.செ.மீ. ......... *(3)*

ஆகையால்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

வட்டத்துண்டு AYB ன் பரப்பு = $\left[462-\frac{441}{4}\sqrt{3}\right]$ ச.செ.மீ. (1), (2), மற்றும் (3) லிருந்து

$$=\frac{21}{4}(88-21\sqrt{3})\text{ ச.செ.மீ.}$$

## பயிற்சி 11.1

வேறு மாதிரி சொன்னால் $\pi \approx \frac{22}{7}$ எனப் பயன் படுத்து

1. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 6 செ.மீ. அதில் வட்டக் கோணப் பகுதியின் கோணம் $60^o$. வட்டக் கோணப் பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டு பிடி.

2. 22 செ.மீ. சுற்றளவுக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளனவக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு கடிகாரத்தின் நிமிட முள்ளின் நீளம் 14 செ.மீ. 5 நிமிடங்களில் அந்த முள் பயணிக்கும் பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

4. 100 செ.மீ. ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஒன்று வட்ட மையத்தில் செங்கோணத்தை தாங்கும். கீழ்க் கண்ட வற்றின் பரப்பளவைக்காண்.
   (i) சிறிய வட்டத் துண்டு
   (ii) பெரிய வட்டக்கோணப் பகுதி ($\pi \approx 3.14$ என்க)

5. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 21 செ.மீ. இதில் ஒரு வில் மையப்புள்ளியில் $60^o$ கோணத்தை தாங்குதிறது. கீழ்க்கண்ட வற்றைக் கண்டு பிடி.
   (i) வட்ட வில்லின் நீளம்
   (ii) வட்ட வில்லால் அடைபடும் வட்டகோணப் பகுதியின் பரப்பு.
   (iii) சம்மந்தப் பட்ட நாண் உண்டாக்கும் வட்டத் துண்டின் பரப்பளவு.

6. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் 15 செ.மீ. அதில் ஒரு நாண் வட்ட மையத்தில் $60^o$ கோணத்தைத் தாங்குதிறது. அதனால் உண்டாகும் (i) சிறிய வட்டத் துண்டு (ii) பெரிய வட்டத் துண்டு இவற்றின் பரப்பளவுகளைக் கண்டுபிடி. ($\pi \approx 3.14$ மற்றும் $\sqrt{3} \approx 1.73$ என்க).

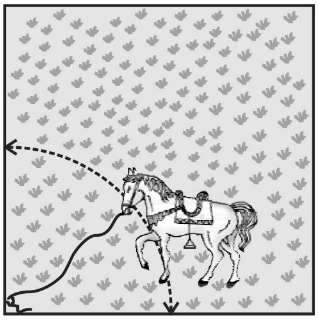
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

**7.** ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் **12** செ.மீ. அதில் ஒரு நாண் வட்ட மையத்தில் **120°** கோணத்தை தாங்குதிறது. வட்டத்திலுள்ள மற்ற துண்டின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி. ($\pi \approx 3.14$ மற்றும் $\sqrt{3} \approx 1.73$ என்க).

**8.** ஒரு குதிரையை சதுர வடிவ நிலத்தில் ஒரு மூலையில் கட்டி உள்ளனர். சதுர நிலத்தின் ஒரு பக்க நீளம் **15** மீ. குதிரையைக் கட்டிய கயிற்றின் நீளம் **5** மீ. (படம் **11.8** ஐப் பார்) கீழக் கண்டவற்றைக் கண்டு பிடி.

(i) குதிரை மேயக்கூடிய நிலத்தின் பரப்பு.

(ii) கயிற்றின் நீளம் **5** மீ பதிலாக **10** மீ. இருந்தால் குதிரை அதிகப் படியாக மேயக் கூடிய நிலத்தின் பரப்பளவு.

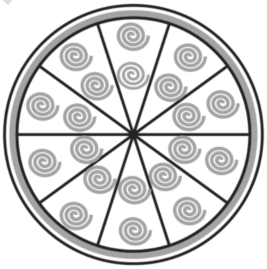


படம் **11.8**

**9.** பெண்கள் சடையில் அணியும் வளையம் வெள்ளிக் கம்பியால் செய்யப் பட்டுள்ளது. அதன் விட்டம் **35** மி.மீ. அந்த வளையத்தில் **5** விட்டங்கள் உண்டாகும் படி கம்பி கட்டப் பட்டுள்ளது, வட்டம் படம் **11.9** ல் காட்டியப்படி சமமான **10** பாகங்களாகப் பிரிக்கப் பட்டுள்ளது. கீழ்க் கண்டவற்றை கண்டுபிடி.

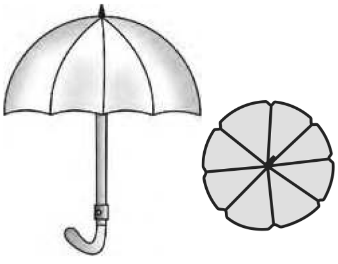
(i) தேவையான வெள்ளிக் கம்பியின் மொத்த நீளம்.

(ii) ஒவ்வொரு வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு.



படம் **11.9**

**10.** ஒரு குடையில் சம தூர இடைவெளியில் **8** கம்பிகள் உள்ளன. (படம் **11.10** ஐப் பார்) குடையை ஒரு சமதள வட்டம் எனக் கொள்க. அதன் ஆரம் **45.** செ.மீ. குடையின் இரண்டு அடுத்தடுத்து உள்ள இரண்டு கம்பிகளுக்கு இடையே உள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக்கண்டுபிடி.



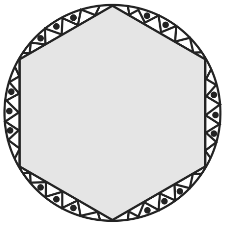
படம் **11.10**

**11.** ஒரு கார் கண்ணாடி மீது இரண்டு துடைப் பான்கள் ஒன்றன்மீது ஒன்று படியாதவாறு பொறுத்தப் பட்டுள்ளன. இரண்டு துடைப்பான் களும் **25** செ.மீ நீளமுடைய பிளேடுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. அவை **115°** கோணத்தில் நகர்ந்து

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

துடைக்கின்றன. ஒவ்வொரு நகர்வுக்கும் அந்த துடைப்பான்கள் ஒவ்வொன்றும் சுத்தம் செய்யும் பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

12. கடலில் தண்ணீருக்கு அடியில் பாறைகள் இருப்பதை எச்சரிக்க சிவப்பு விளக்கு ஒன்று வட்டக் கோணப் பகுதி $80^0$ ஒரு வட்டத்துண்டின் மீது பொருத்தப் பட்டுள்ளது. இந்த விளக்கின் ஒளி 16.5 கி.மீ. வரை பரவும். கப்பல் எச்சரிக்கப்படும் பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி. ($\pi \approx 3.14$ என்க)



படம் 11.11

13. படம் 11.11 உள்ளதுபோல் வட்ட மேசை விரிப்பில் ஆறு சமமான வரைபடம் உள்ளது. விரிப்பின் ஆரம் 28 செ.மீ. அந்த வடைபடம் (design) வரைய ஒரு சதுர செ.மீட்டருக்கு ₹ 0.35 செலவாகிறது எனில் மொத்த வரைபடமும் வரைய எவ்வளவு செலவாகும் என்பதைக் கண்டுபிடி.

14. கீழ்க் கண்டவற்றில் சரியான விடையைக் குறித்துக் காட்டு.

R ஆரம் உடைய வட்டத்தில் P கோணத்தில் ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி உள்ளது. அதன் பரப்பு.

(A) $\frac{P}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{P}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{P}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 11.2 தொகுப்பு :

இந்தப் பாடத்தில் கீழ்க் கண்டவற்றை படித்தீர்கள்.

1. வட்டத்தின் ஆரம் θ கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

2. r ஆரமும் கோண அளவு θ உடைய வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்பு

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

3. ஒரு வட்டத் துண்டின் பரப்பு = வட்டக்கோணப் பகுதியின் பரப்புளவு – முக்கோணத்தின் பரப்பு.

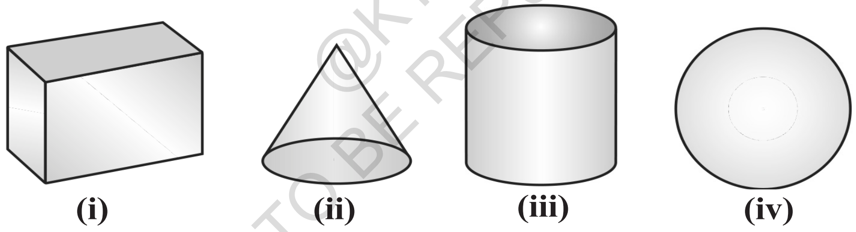
# புறப்பரப்புகளும் கன அளவுகளும்
# SURFACE AREAS AND VOLUMES

# 12

B5G8L1

## 12.1 அறிமுகம்

IX ஆம் வகுப்பில் இருந்தே, நீங்கள் கனசெவ்வகம், கூம்பு, உருளை மற்றும் கோளம் போன்ற சில திண்மப் பொருட்களைப் பற்றி (12.1–ஆம்படத்தைப்பார்) அறிவீர்கள், அவற்றின் புறப்பரப்புகளையும், கன – அளவுகளையும் கண்டுபிடிப்பதற்கும் நீங்கள் கற்றுள்ளிர்கள்.

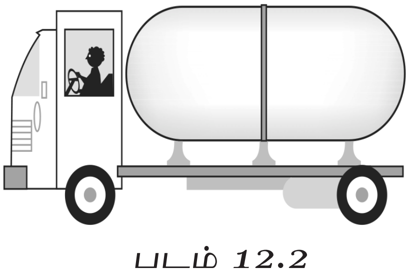



படம் 12.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

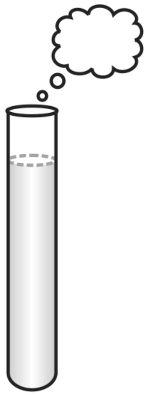
நமது அன்றாட வாழ்வில், மேற்கண்ட திண்மங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கும் மேலான அடிப்படைத் திண்மங்களை இணைத்து உறுவாக்கப்பட்ட திண்மங்களை நாம் காண்கிறோம்.

பட்ம் 12.2 ஐ பார் நீர் அல்லது எண்ணை போன்றவற்றை ஓரிடத்தில் இருந்து மற்றொரு இடத்திற்கு எடுத்து செ ல்வதற்காக, லாரி ஒன்றின் பின் புறத்தில் கன்டெய்னர் ஒன்று பொறுத்தப் பட்டுள்ளதை பார்த்திருப்பீர்கள். அது, மேலே கூறப்பட்டுள்ள நான்கு அடிப்படைத் திண்மங்களில் ஏதேனும் ஒன்றின் வடிவில் உள்ளதா? அது, இருமுனைகளிலும் அரைக்



படம் 12.2

கோளங்களைக் கொண்ட ஒரு உருளையினால் ஆகியது என்பதை ஊகித்திருப்பாய். மேலும் படம் 12.3 இல் காணப்படும் பொருளை நீங்கள் ஏந்கனவே பார்த்திருப்பீர்கள். அதனை பெயரிடமுடியுமா? அது ஒரு பரிசோதனைக் குழாய்! உங்கள் அறிவியல் சோதனைக் கூடத்தில் அதனைப் பயன்படுத்தி இருப்பிர்கள். இக்குழாயானது கூட ஒரு உருளை மற்றம் ஒரு அரைக் கோளம் இவை இணைந்து உருவானதே. அதே போல், பயணங்கள் மேற் கொள்ளும் போது நீங்கள் சில பெரிய அழகிய கட்டிங்கள் அல்லது நினைவுச்சின்னங்கள், ஆகியன மேலே கூறப்பட்ட திண்மங்களை இணைத்து கட்டப்பட்டுள்ளதைப் பார்த்திருப்பீர்கள்.



படம் 12.3

ஏதேனும் காரணத்திற்காக இப்பொருட்களின் புறப்பரப்புகளையோ, அல்லது கன அளவுகளையோ அல்லது கொள்ளளவுகளையோ கண்டு பிடிக்க வேண்டுமாயின் அதை நீங்கள் எவ்வாறு செய்வீர்கள்? நாம் இப்பொருட்களை நீங்கள் முன்னமே அறிந்த எந்த திண்மங்களாகவும் வகைப்படுத்த முடியாது.

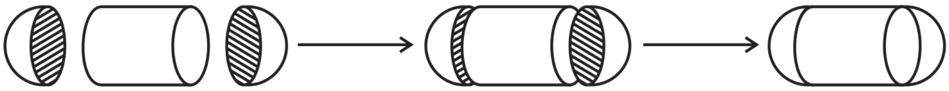
இப்பாடப்பகுதியில், இத்தகைய திண்மங்களின் புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள் ஆகியவற்றை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என நீ ங்கள் பார்ப்பீர்கள்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

## 12.2 இணைந்த திண்மங்களின் புறப்பரப்பளவு.

படம் 12.2 இல் காணப்படும் கன்டெய்னரை கவனிப்போம். இத்தகைய திண்மத்தின் புறப்பரப்பளவை எவ்வாறு காணலாம்? நாம் புதிய கணக்குகளை சந்திக்கின்ற போது, அவற்றை நாம் முன்னமே தீர்க்கக் கற்றுள்ள சிறு சிறு கணக்குகளாக பிரிக்க வேண்டும்.

இந்தத் திண்மமானது, ஒரு உருளையின் இரு முனைகளிலும் ஒவ்வொரு அரைக்கோளம் ஒட்டப்பட்ட வகையில் உருவாகியுள்ளது என்பதை நாம் காணலாம். எல்லா துண்டுகளையும் ஒன்றாக இணைத்த பிறகு படம் 12.4 இல் காட்டியவாறு இருக்கும்.



படம் 12.4

புதிதாக உறுவகியுள்ள பொருளின் புறப்பரப்பளவைக் கவனித்தால், நமக்கு அதில் இரண்டு அரைக் கோளங்களின் வளைபரப்புகள் மற்றும் உருளையின் வளைந்த பரப்பு ஆகியவையே காணப் படும்.

எனவே, புதிய திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பானது, தனித்தனியான பாகங்களின் வளைபரப்புகளின் கூடுதல் ஆகும்.

இவ்வாறாக,

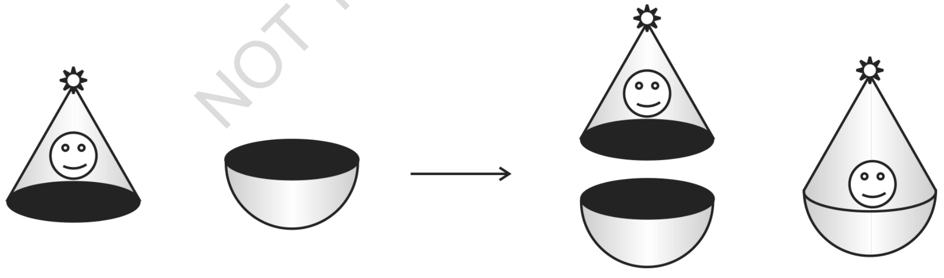
புதிய திண்மத்தின் மொ. பு. ப = ஒரு அரைக்கோளத்தின் வ.ப. + ஒரு உருளையின் வ.ப. + மறு அரைக் கோளத்தின் வ.ப.

இங்கு மொ. பு. ப, வ.ப. ஆகியன முறையே மொத்தப்புறப்பரப்பு மற்றும் வளைபரப்பு ஆகியவற்றைக் குறிக்கும்.

இனி வேறொரு சூழலைக் கவனிப்போம். நாம் அரைக் கோளம் ஒன்றையும் கூம்பு ஒண்றையும் இணைத்து பொம்மை ஒன்றை உருவாக்குவதாக வைத்துக் கொள்வோம். இதை நாம் செயலாற்றும் படிநிலைகளை ஒவ்வொன்றாகக் காண்போம்.

முதலில் நாம் கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் இவற்றின் தட்டையான தளங்களை ஒன்றோடு ஒன்றாக இணைப்போம். பொம்மையின் புறப்பரப்பு சீரானதாக அமையவேண்டுமெனில், கூம்பின் அடித்தள ஆரமானது அரைக்கோளத்தின் ஆரத்திற்கு சமமானதாக எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே, படிநிலைகள் படம் **12.5** இல் காடியவாறு அமையும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



**படம் 12.5**

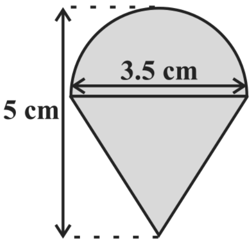
நமது முயற்சியின் முடிவில், நமக்கு நல்லதொரு வட்ட அடிப்பக்கத்தை உடையதொரு பொம்மை கிடைத்துள்ளது. இனி அப்பொம்மைக்கு வண்ணம் பூச வேண்டுமெனில், எவ்வளவு வண்ணப்பூச்சு (Paint) தேவைப்படும் என எவ்வாறு கண்டறிவது? இதற்கு நமக்கு அரைக்கோளத்தின் வ.ப. மற்றும் கூம்பின் வ.ப. ஆதியவற்றைக் கொண்ட மொ.பு.ப தேவைப் படுகிறது. எனவே.

பொம்மையின் மொத்தப் புறப் பரப்பளவு = அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளைபரப்பு.

எனலாம்.

இனி சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காணலாம்.

**எடுத்துக் காட்டு 1 :** ரஷிது தன் பிறந்தநாள் பரிசாக, பம்பரம் ஒன்றைப் பெற்றான், ஆச்சரியத்தக்க வகையில்அதன்மீது எந்தவண்ணமும்பூசப்படவில்லை எனவே, அவன் தனது வண்ணக்கட்டிகளைக் கொண்டு அதன் மீது வண்ணம் பூச எண்ணினான். அப்பம்பரமானது, கூம்பின் மீது அரைக் கோளம் அமைந்த வகையில் உள்ளது (படம் 12.6 – ஐப் பார்). பம்பரத்தின் மொத்த உயரம் 5 செ.மீ. மற்றும் அதன் விட்டம் 3.5 செ.மீ. அவன் வண்ணம் பூச வேண்டிய பரப்பளவைக் கண்டு பிடிக்கவும். ($\pi \approx \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க)



படம் 12.6

**தீர்வு :** இப்பம்பரமானது, மிகத்திலுல்லியமாக, படம் 12.5 இல் காணப்படும் பொருளைப் போலவே உள்ளது. எனவே, நாம் அங்கு வந்தடைந்த முடிவையே இங்கு சுலபமாக பயன்படுத்தலாம். அதாவது,

பம்பரத்தின் மொ. பு.ப. = அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளை பரப்பு.

இப்போது,

அரைக்கோளத்தின் வ.ப. $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$\approx \left(2 \text{x} \frac{22}{7} \text{x} \frac{3.5}{2} \text{x} \frac{3.5}{2}\right) \text{ ச.செ.மீ.}$$

மேலும் கூம்பின் உயரம் = பம்பரத்தின் உயரம் – அரைக்கோளப்பகுதியின் உயரம் (ஆரம்)

$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) cm = 3.25cm$ செ.மீ.

ஆகவே,

கூம்பின் சாய்வு உயரம் $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7cm$ செ.மீ. (தோராயமாக)

எனவே, கூம்பின் வ.ப. $= \pi r l = \left[\frac{22}{7} \text{x} \frac{3.5}{2} \text{x} 3.7\right] cm$ செ.மீ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இதுபம்பரத்தின்புறப்பரப்பளவு = $=\left(2x\frac{22}{7}x\frac{3.5}{2}x\frac{3.5}{2}\right)cm^2+\left(\frac{22}{7}x\frac{3.5}{2}x3.7\right)cm^2$

$$=\frac{22}{7}x\frac{3.5}{2}(3.5+3.7)cm^2=\frac{11}{2}x(3.5+3.7)cm^2=39.6cm$$ செ.மீ. (தோராயமாக)

எனக் கொடுக்கும்.

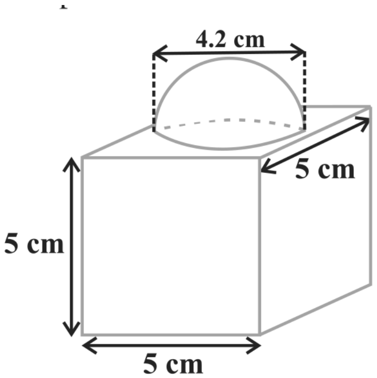
பம்பரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பானது, கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் ஆகியவற்றின் மொத்தப்புறப்பரப்புகளின் கூடுதல் அல்ல என்பதை நீங்கள் கவனிக்கலாம்.

***எடுத்துக்காட்டு 2 :*** படத்தில்காட்டப்பட்ட அலங்காரக்கட்டைக்கல்லானது ஒரு கன சதுரம் மற்றும் ஒரு அரைக்கோளம் ஆகியவற்றைக் கொண்டு வடிவமைக்கப்பட்டு உள்ளது. அதன் அடிப்பகுதியானது பக்கம் 5 செமீ கொண்ட ஒரு கனசதுரம், மற்றும் மேற்பகுதியில் பொறுத்தப் பட்டுள்ள அரைக்கோளத்தின் விட்டம் 4.2 செ.மீ. ஆகும், அக்கட்டைக்கல்லின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. ($\pi\approx\frac{22}{7}$ எனக் கொள்).

***தீர்வு :*** கனசதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு

$= 6X (\text{பக்கம்})^2 = 6X5X5\ cm^2=150$ ச.செ.மீ.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 12.7

அரைக் கோளம் பொறுத்தப் பட்டிருக்கும் பகுதியானது, மொத்தப்புறப்பரப்பில் சேர்க்கையில் இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எனவே, கட்டைக்கல்லின் புறப்பரப்பு
= கனசதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு –
அரைக்கோளத்தின் அடிப்பக்கப் பரப்பு +
அரைக்கோளத்தின் வளை பரபப்பு.

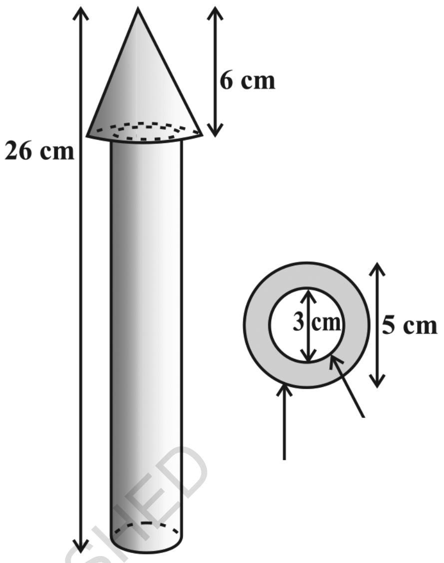
$$=150-\pi r^2+2\pi r^2=(150+\pi r^2)cm^2$$

$$\approx 150+\left[\frac{22}{7}x\frac{4.2}{2}x\frac{4.2}{2}\right]cm^2$$

$$\approx 150+13.86=163.86$$ ச.செ.மீ.

***எடுத்துக் காட்டு 3 :*** மரத்தால் ஆன பொம்மை ராக்கெட் ஒன்று 12.8 படத்தில்காட்டிய படி, ஒரு உருளையின் மீது கூம்பு அமைக்கப்பட்ட வடிவில் உள்ளது. இந்த ராக்கெட்டின் மொத்த உயரம் 26 செமீ ஆகவும் அதன் கூம்பு பகுதியின் உயரம் 6 செமீ ஆகும். கூம்பின் அடிப்பக்க

விட்டம் 5 செமீ மற்றும் உருளையின் அடிப்பக்க விட்டம் 3 செமீ ஆக உள்ளது. கூம்புபகுதிக்கு ஆரஞ்சு வண்ணமும், உருளைப் பகுதிக்கு மஞ்சள் வண்ணமும் பூசவேண்டுமாயின், ஒவ்வொரு வண்ணத்தைக் கொண்டு பூச வேண்டிய பரப்பளவைக் காண்க. ($\pi \approx 3.14$ எகைக் கொள்க)



படம் 12.8

**தீர்வு :** கூம்பின் ஆரத்தை r எனவும், கூம்பின் சாய் உயரத்தை $l$ எனவும், கூம்பின் உயரத்தை h எனவும், உருளையின் ஆரத்தை r' எனவும், உருளையின் உயரத்தை h' எனவும் குறியிடுக. ஆகவே, r=2.5cm, h=6cm, r'=1.5cm, h' = 26-6 = 20cm

மற்றும் $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5cm$

இங்கு, கூம்புப் பகுதியின் வட்ட அடித்தளமானது, உருளையின் வட்ட தளத்தின் மீது அமர்த்தப்பட்டுள்ளது. ஆயினும் கூம்பின் அடித்தளம் உருளையின் அடித்தளத்தை விட பெரியதாக உள்ளது. எனவே, கூம்பின் அடித்தளத்தில் ஒரு பகுதியான வளையப்பகுதி வண்ணம் பூசப் பட வேண்டியுள்ளது.

எனவே, ஆரஞ்சு வண்ணம் பூசப்பட வேண்டிய பரப்பு = கூம்பின் வளை பரப்பு + கூம்பின் அடிப்தளப் பரப்பு–உருளையின் வட்ட தளப் பகுதி.

$$= \pi r l + \pi r^2 - \pi (r')^2$$

$$= \pi r[(2.5x6.5)+(2.5)^2-(1.5)]2cm^2$$

$$= \pi(20.25)cm^2 \approx 3.14x20.25cm^2$$

$$\approx 63.585\ cm^2$$

இனி, மஞ்சள் வண்ணம் பூசப்பட வேண்டிய பரப்பு

உருளையின் வளைபரப்பு + உருளையின் ஒரு பக்க அடித்தளப் பகுதி

$$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$$

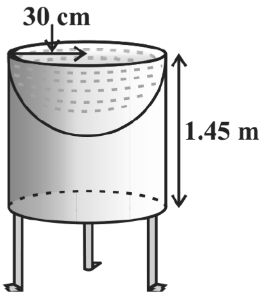
$$= \pi r'(2h' + r')$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\approx$ (3.14x1.5) ( 2x20x1.5) $cm^2$

$\approx$ 195.465 ச.செமீ

**எடுத்துக் காட்டு 4 :** மயான்க் தனது தோட்டத்தில் பறவைகள் குளிப்பதற்கான தொட்டி ஒன்றை அரைக் கோளவடிவ குழிவை ஒரு முடிவில் தொண்டதான உருளை வடிவில் உருவாக்கினான் (12.9 படத்தைப் பார்).




படம் 12.9

உருளையின் உயரம் 1.45 மீ மற்றும் அதன் ஆரம் 30 செ.மீ. அத்தொட்டியின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் கண்டுபிடி. ($\pi \approx \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).

**தீர்வு :** உருளையின் உயரம் h மற்றும் உருளை மற்றும் அரைக் கோளத்தின் பொது ஆரம் r என்க.

பறவை குளிப்பதற்கான தொட்டியின் மொத்த புறப்பரப்பு

= உருளையின் வளை பரப்பு + அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு.

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h+r)$

$\approx 2 \times \frac{22}{7} \times 30\ (145+30) cm^2$

$= 33000\ cm^2 = 3.3 m^2$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

## பயிற்சி 12.2

வேறு எந்தக் குறிப்பு கொடுக்கப்படாத போது $\pi \approx \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

1. தலா கன அளவு 64 $cm^3$ கொண்ட இரு கனசதுரங்கள் ஒன்றோடு ஒன்று இணைக்கப்படுகின்றன. பெறப்பட்ட கனசெவ்வகத்தின் புறப்பரப்பளவைக் காண்க.

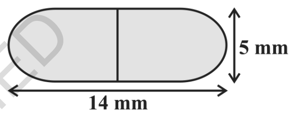
2. ஒரு பாத்திரமானது, உள்ளிடற்ற உருளையின் மீது ஏற்றப்பட்ட உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் வடிவில் உள்ளது. அரைக் கோளத்தின் விட்டம் 14 cm மற்றும் பாத்திரத்தின் மொத்த உயரம் 13 cm எனில் பாத்திரத்தின் உட்புறபரப்பளவைக் காண்க.

3. விளையாட்டு பொருள் ஒன்று, 3.5 cm ஆரமுடைய கூம்பு அதே அளவு ஆரம் கொண்ட அரைக்கோளத்தின் மீது ஏற்றப்பட்ட வடிவில் உள்ளது. அப்பொருளின் மொத்த உயரம் 15.5 cm ஆகும். அதன் மொத்த புறப்பரப்பினைக் கண்டு பிடி.

4. பக்கம் 7 செமீ கொண்ட கனசதுர கட்டைக்கல் ஒன்றின் மீது அரைக் கோளம் ஏற்றப்பட்டுள்ளது எனில் அந்த அரைக் கோளத்தின் மிகப்பெரிய விட்டம் எவ்வளவாக இருக்க முடியும்? இத்திண்மத்தின் புறப்பரப்பளவைக் காண்க.

5. ஒரு கனசதுர வடிவிலான மரக்கட்டைக் கல்லின் ஒரு முகத்தில் இருந்து ஒரு அரைக் கோள வடிவ குழிவு குடைந்து எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்பட்ட அரைக் கோளத்தின் விட்டம் $l$ ஆனது கனசதுரத்தின் பக்க அளவிற்கு சமம். மீதமுள்ள திண்மத்தின் புறப் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

6. ஒரு மருந்து குளிகை (மாத்திரை – capsule) யானது, ஒரு உருளைக்கு இருபுறங்களிலும் ஒவ்வொரு அரைக் கோளங்கள் ஒட்டவைத்த வடிவில் (படம் 12.10 த்தைப் பார்) உள்ளது.



படம் 12.10

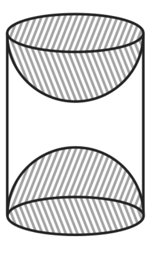
மாத்திரையின் மொத்த நீளம் 14 மி.மீ. மற்றும் அம்மாத்திரையின் விட்டம் 5 மி.மீ. ஆகும். அதன் புறப் பரப்பளவைக் கண்டுபிடி.

7. கூடாரம் ஒன்று, உடுளையின் மீது கூம்பு ஒன்று கூரையாக ஏற்றப்பட்ட வடிவில் உள்ளது. உருளைப் பகுதியின் உயரம் மற்றும் விட்டம் முறையே 2.1 மீ. மற்றும் 4 மீ. ஆகும். கூரையின் சாய்வு உயரம் 2.8 மீ. எனில், அக்கூடாரத்தை உருவாக்க தேவைப்படும் கித்தான்துணியின் பரப்பளவைக் கண்டு பிடிக்கவும். மேலும், கூடாரத்தின் கித்தான் துணியின் விலை சதுர மீட்டருக்கு ₹500 வீதம், கூடாரத்திற்கு ஆகும் செலவு எவ்வவளவு? (கூடாரத்தின் அடித்தளப் பகுதி கித்தான்துணியால் மூடப்படுவது இல்லை என்பதைக் கருத்தில் கொள்ளவும்)

8. உயரம் 2.4 செ.மீ. மற்றும் விட்டம் 1.4 cm கொண்ட திண்ம உருளை ஒன்றில் இருந்து அதே அளவு உயரமும் விட்டமும் கொண்ட கூம்பு ஒன்று குடைந்து எடுக்கப் படுகிறது. குடைந்து எடுக்கப்பட்டது போக மீதியுள்ள திண்மத்தின் மொத்த புறப்பரப்பை அதற்கு மிக அருதிலுள்ள சதுர செண்டிமீட்ட ரில் கணக்கிடுக.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

*9.* ***12.11.*** படத்தில் காட்டியவாறு, மரத்தால் ஆன பொருள் ஒன்று, திண்ம உருளையின் இரு முனைகளில் இருந்தும் ஒவ்வொரு அரைக் கோளங்கள் குடைந்து எடுக்கப்பட்டு உறுவாக்கப்படுகிறது. உருளையின் உயரம் **10** cm மற்றும் அதன் அடித்தள ஆரம் **3.5** cmஎனில் திண்மத்தின் மொத்த புறப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

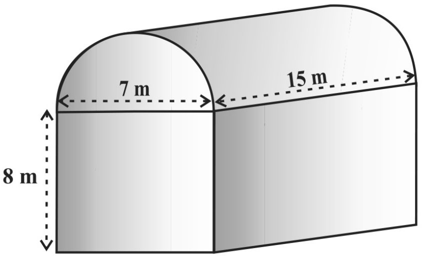


படம் 12.11

## 12.3 இணைந்த திண்மங்களின் கன அளவு

முந்தைய பிரிவில், இரண்டு அடிப் படைத் திண்மங்களை இணைத்து உறுவாக்கப்பட்ட திண்மங்களின் புறப்பரப்பை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்பதை கலந்தாராய்ந்தோம். இனி அவற்றின் கன அளவுகளை எவ்வாறு கணிப்பது என்பதைக் காண்போம். புறப்பரப்பைக் கணிக்கும் போது, நாம் அப்பொருளின் இரண்டு ஆக்கக்கூறுகளின் (கூட்டுப் பொருட்களின்) புறப்பரப்புகளைக் கூட்டவில்லை எனெனில், இப்பொருட்களை இணைக்கும் போது சில புறப்பரப்புகள் காணாமல் இருக்க வாய்ப்புகள் உண்டு என்பதை குறிப்பில் கொள்ளவும். இருப்பினும், கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கும் போது இம்முறையில் அமையாது. இரண்டு அடிப்டைத் திண்மங்களை இணைப்பதால் உறுவாகும் திண்மத்தின் கன அளவானது, அத்திண்மத்தின் ஆக்கக் கூறுகளின் கன அளவுகளின் கூடுதலாகவே உண்மையில் இருக்கும் என்பதை கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் நாம் காணலாம்.

**எடுத்துக் காட்டு 5 :** சாந்தா தனது தொழிலகத்தை, கனசெவ்வகத்தின் மீது அரை உருளை ஒன்று ஏற்றப்பட்ட வடிவில் ஆன கொட்டாரம் (கொட்டகை) ஒன்றில் நடத்துகிறான். (**12.12** படத்தை ப்பார்). கொட்டாரத்தின் அடித்தளதின் பரிமாணம் 7mX15m மற்றும் கன செவ்வகப் பகுதியின் உயரம் *8* மீ ஆகவும் இருக்குமாயின், அக்கொட்டாரம் கொள்ளும் காற்றின் கன அளவு என்ன என்பதைக் கண்டுபிடி. மேலும், கொட்டாரத்தின் உள்ளே இருக்கும் இயந்திரங்கள் **300** $m^3$ அளவு இடத்தையும், **20** தொழிளாளிகள் தலா **0.80**$m^3$ அளவு இடத்தையும் ச ராசரியாக இடங்கொள்கிறார்கள் என்றால் அப்போது, அக்கொட்டாரத்திணுள் இருக்கும் காற்றின் அளவு என்ன? ($\pi \approx \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க)




படம் 12.12

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

**தீர்வு :** கொட்டாரத்தின் உள்ளே இருக்கும் காற்றின் கன அளவானது (மனிதர்கள் மற்றும் இயந்திரங்கள் அதனுன் இல்லாத போது), கனசெவ்வகத்தின் உள்ளே உள்ள காற்று மற்றும் அரை (பாதி) உருளையின் உள்ளே உள்ள காற்று இவற்றின் கன அளவுகள் இணைந்ததே ஆகும்.

இப்போது, கன செவ்வகத்தின் நீளம் அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 15 மீ, 7 மீ மற்றும் 8 மீ ஆகும். மேலும், அரை உருளையின் விட்டம் 7 மீ மற்றும் அதன் உயரம் 15 மீ. எனவே,

தேவைப்படும் கன அளவு = கனசெவ்வகத்தின் கன அளவு + $\frac{1}{2}$ உருளையின் கன அளவு.

$$\approx \left[15\text{x}7\text{x}8+\frac{1}{2}\text{x}\frac{22}{7}\text{x}\frac{7}{2}\text{x}\frac{7}{2}\text{x}15\right]=1128.75m^3$$

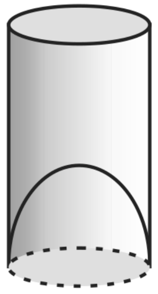
இனி, இயந்திரங்கள் கொள்ளும் மொத்த இடம் = **300**$\text{m}^3$

மற்றும் தொழிளாளிகள் கொள்ளும் மொத்த இடம் = $20\times0.08\text{m}^3=1.6\text{m}^3$

ஆகவே, கொட்டாரத்தினுள் இயந்திரங்கள் மற்றும் தொழிலாளிகள் இருக்கும் பொழுது உள்ள காற்றின் கன அளவு

$$\approx 1128.75-(300.00+1.60) \approx 827.15\text{m}^3$$

*எடுத்துக் காட்டு 6:* பழச்சாறு விற்பனையாளர் ஒருவர் தனது வாடிக்கையாளார்களுக்கு படம் 12.13 இல் காட்டியுள்ள குப்பியில் பரிமாறினார். உருளைக்குப்பியின் உட்புற விட்டம் 5 செமீ இருப்பிணும், அதன் அடிப் தளம் அரைக்கோள வடிவத்தில் உயர்த்தப்பட்டு இருப்பது அதனுடைய கொள்ளளவைக் குறைப்பதற்காகவே. குப்பியின் உயரம் 10 செ.மீ. எனில், அதன் வெறித்தோற்றக் கொள்ளளவு மற்றும் உண்மையான கொள்ளளவு இவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும் ($\pi \approx 3.14$ ஐப் பயன் படுத்துக)



படம் 12.13

**தீர்வு :** குப்பியின் உட்புற விட்டம் = 5 செ.மீ. மற்றும் உயரம் = 10 செ.மீ.

என்பதால், வெளித்தோற்றக் கொள்ளளவு = $\pi r^2 h$

$$\approx 3.14\times2.5\times2.5\times10\text{m}^3$$

$$\approx 196.25\text{cm}^3$$

@TRB NOT TO BE REPUBLISHED

ஆனால், உண்மையான கொள்ளளவு ஆனது, அடிப்பகுதியில் உள்ள அரைக் கோளத்தின் கன அளவால் குறைவாகவே இருக்கும்.

அதாவது, $\frac{2}{3}\pi r^3 \approx \frac{2}{3}$ x3.14x2.5x2.5x2.5 க.செமீ.

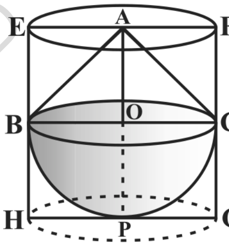
$\approx 32.71 cm^3$ அளவு குறைவாகவே இருக்கும்.

ஆக, குப்பியின் உண்மையான கொள்ளளவு = வெளித்தோற்றக் கொள்ளளவு – அரைக் கோளத்தின் கன அளவு

= (196.25-32.71)$cm^3$

= 163.54$cm^3$

**எடுத்துக் காட்டு 7:** திண்ம விளையாட்டுப் பொருள் ஒன்று அரைக்கோளத்தின் மீது ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பு ஏற்றப்பட்ட வடிவில் உள்ளது. கூம்பின் உயரம் **2** செ.மீ. மற்றும் அடித்தள விட்டம் **4** செ.மீ. அப்பொருளின் கன அளவைக் கண்டுபிடி. அப்பொருளை ஒரு நேர் வட்ட உருளை சுற்றி வளைக்குமேயாயின், அவ்உருளை மற்றும் அப்பொருள் இவற்றின் கன அளவுகளினிடையே உள்ள வித்தியாசம் என்ன? ($\pi \approx 3.14$ எனக் கொள்க).




படம் **12.14**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**தீர்வு :** BPC என்பது அரைக்கோளத்தையும் ABC என்பது அரைக் கோளத்தின் அடித்தளத்தின் மீது நின்ற கூம்பையும் (படம் **12.14** இல்) குறிக்கட்டும். அரைக்கோளத்தின் ஆரம் BO (மற்றும் கூம்பிம் ஆரமும் அதுவே)

= $\frac{1}{2}$ x 4cm = 2cm

ஆகவே,

விளையாட்டுப் பொருளின் கள அளவு $\approx \left[\frac{2}{3} x3.14x(2)^3 + \frac{1}{3} x3.14x(2)^2 x2\right] cm^3$

=25.12க.செமீ.

இனி, கொடுக்கப்பட்ட திண்மத்தை நேர்வட்ட உருளையான EFGH சுற்றிவளைக்கிறது எனலாம். நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் = HP = BO = 2cm மற்றும் அதன் உயரம் EH=AO+OP=(2+2)cm=4cm

எனவே தேவையான கன அளவு = நேர் வட்ட உருளையின் கன அளவு – விளையாட்டும் பொருளின் கனவளவு

$\approx$ (3.14 x $2^2$ x 4-25.12) $cm^3$

$\approx$ 25.12 க. செமீ.

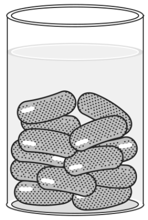
## பயிற்சி 12.2

வேறு குறிப்பு கொடுக்கப்படாத போது $\pi \approx \frac{22}{7}$ எனக்கொள்க.

1. ஒரு திண்மமானது, ஒரு கூம்பு அரைக்கோளத்தின் மீது நின்ற உருவில் உள்ளது. கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் இவற்றின் ஆரங்கள் 1 cm க்கு சமம் மற்றும் கூம்பின் உயரம் அதன் ஆரத்திற்கு சமம். அத்திண்மத்தின் கன அளவை π யின் உறுப்பாகக் கண்டுபிடி.

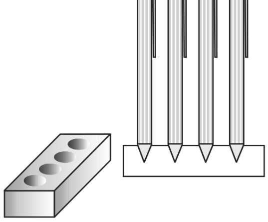
2. பொறியியலின் மாணவியான ரேச்சல், ஒரு உருளையின் இரு முனைகளிலும் இரு கூம்புகள் இணைக்கப்பட்ட ஒரு மாதிரியை மெல்லிய அலுமினியத்தகடால் உறுவாக்குமாறு கேட்கப்பட்டாள். அம்மாதிரியின் விட்டம் 3 cm மற்றும் நீளம் 12 cm. ஒவ்வொரு கூம்பும் 2 cm உயரம் கொண்டதாக இருப்பின், அவள் உருவாக்கிய மாதிரியில் உள் அடங்கிய காற்றின் கன அளவு என்ன ? (அந்த மாதிரியின் உள் மற்றும் வெளி பரிமாணங்கள் சமமே என அனுமானம் செய்க).

3. படம் 12.15 இல் ஒரு குலோப் ஜாமூன், தன்னுள் அதன் கன அளவில் 30% ஸர்க்கரைப்பாகைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு குலோப் ஜாமுனும் நீளம் 5cm மற்றும் விட்டம் 2.8cm கொண்டு, உருளையின் இருமுனைகளும் அரைக் கோள வடிவத்தில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ள 45 குலோப் ஜாமூன்களில் அடங்கியுள்ள சர்க்கரைப் பாகின் அளவைக் கண்டுபிடி.



படம் 12.15

4. மரத்தால் ஆன பேனா ஸ்டேண்டு (பேனாதாங்கி) ஒன்று நான்கு கூம்பு வடிவ குழிவுகளைக் கொண்டதொரு கன செவ்வக வடிவில் உள்ளது. அந்த கனசெவ்வகத்தின் பரிமாணங்கள் 15 cm க்கு 10 cm க்கு 3.5cm ஆக உள்ளன. அதில் உள்ள ஒவ்வொரு குழிவின் ஆரம் 0.5 cm மற்றும் ஆழம் 1.4 cm அந்த ஸ்டேண்டின் உள்ள மரத்தின் கன அளவைக் கண்டுபிடிக்கவும். (படம் 12.6 ஐ பார்)



படம் 12.16

5. ஒரு பாத்திரம் கவிழ்த்தப்பட்ட கூம்பின் வடிவில் உள்ளது. அதன் உயரம் 8 cm மற்றும் திறந்தவாறு இருக்கும் அதன் மேல்

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பகுதியின் ஆரம் 5 cm. அதன் விளிம்புவரை நீர் நிரப்பப்படுகிறது. 0.5 cm ஆரங்கொண்ட கோளமான ஈயக்குண்டுகள் சில அதனுள் போடப்படும்போது, நான்கில் ஒரு பகுதி நீர் பாத்திரத்தை விட்டு வெளியேறுகிறது. பாத்திரத்தில் போடப்பட்ட குண்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

6. ஒரு இரும்பு திண்ம தூண் ஆனது, உயரம் 220 செமீ மற்றும் அடித்தள விட்டம் 24 cm கொண்ட உருளையின் மீது உயரம் 60 cm மற்றும் ஆரம் 8 cm கொண்ட மற்றொரு உருளை ஏற்றப்பட்ட வடிவில் உள்ளது. 1 $cm^3$ இரும்பில் 8 கி. நிறை எனகொடுக்கப் பட்டிருப்பின், அத்தூணின் நிறை என்ன? ($\pi \approx 3.14$ எனக் கொள்க).

7. உயரம் 120 cm மற்றும் ஆரம் 60 cm கொண்ட நேர்வட்டக்கூம்பு ஒன்று ஆரம் 60 cm உடைய அரைக்கோளத்தின் மீது நிறுத்தப்பட்டுள்ள வடிவில் இருக்கும் திண்மமானது, நீர் நிரம்பிய நேர் வட்ட உருளை ஒன்றில் நேர் நிலையில் அடிப்பக்கம் மட்டத்தைத் தொடும் வகையில் நிறுத்தப்படுகிறது. அந்த உருளையின் ஆரம் 60cm மற்றும் உயரம் 180 cm எனில் அதனுள் மீதமாகும் நீரின் கன அளவைக் கண்டுபிடி.

8. கோள வடிவிலான கண்ணாடிப் பரத்திரம் ஒன்று, 8 cm நீளம் மற்றும் 2செமீ விட்டம் கொண்ட உருளை வடிவ கழுத்துப்பகுதியை கொண்டுள்ளது; கோளப் பகுதியின் விட்டம் 8.5 cm அது கொள்ளும் நீரின் அளவைக் கொண்டு அதன் கனஅளவு 345 $cm^3$ என சிறுமி ஒருத்தி கண்டறிகிறான். அவளது கணிப்பு சரியா என்பதை, மேற்கூறிய உள் பரிமாணங்களைத் கொண்டும் $\pi \approx 3.14$ என்று கொண்டும் சரிபார்க்கவும்.

## 12.4 தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நீங்கள் கீழ்வருவற்றைக் கற்றுள்ளீர்கள்:

1. அடிப்படைத்திண்மங்களாகிய கனசெவ்வகம், கூம்பு, உருளை, கோளம் மற்றும் அரைக்கோளம் இவற்றுள் ஏதேனும் இரண்டை இணைப்பதன் மூலம் உறுவாகும் திண்மத்தின் புறப்பரப்பளவைக் கண்டுபிடித்தல்.

2. கனசெவ்வகம், கூம்பு, உருளை, கோளம் மற்றும் அரைக் கோளம் இவற்றுள் ஏதேனும் இரண்டை இணைப்பதன் மூலம் உறுவாகும் திண்மத்தின் கன அளவைக் கண்டு பிடித்தல்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# புள்ளியியல்
## STATISTICS

Z3M7X5

# 13

### *13.1* அறிமுகம்

IX ஆம் வகுப்பில் நீங்கள், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை, தொகுக்கப்படாத மற்றும் தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு பரவலாக வகைப்படுத்துதலைக் கற்றிருக்கிறீர்கள். மேலும் விவரங்களை சி த்திர விளக்கபடமாக வரைபடங்களின் பல வடிவங்களான சட்ட வரைபடம், நிகழ்வெண் செவ்வகம் (மாறுபட்ட பிரிவு அகலம் கொண்டவைகளையும் சேர்த்து) மற்றும் நிகழ்வெண் பல கோணம் இவைகளில் பிரதியிடுதலையும் கற்றிருக்கிறீர்கள். அதிலும் ஒரு படி மேலே சென்று, தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் சில எண்ணிக்கைப் பிரதிநிதிகளாகிய 'மையப்போக்கு அளவைகள்' எனப்படும் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்று முகடு ஆகியவற்றையும் கற்றறிந்தீர்கள். இப்பாடத்தில் நாம், வகைப்படுத்தப்படாத விவரங்களின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியவைகளில் இருந்து, தொகுக்கப் பட்ட விவரங்களுக்கானவற்றை அளாவிக் கற்போம், மேலும், நாம் 'குவிவு நிகழ்வெண், குவிவு நிகழ்வெண்பரவல் ஆகிய கருத்துக்களையும், 'ஒஜைவ்' (ogives) எனப்படும் குவிவு நிகழ்வெண் கோடுகளை எவ்வாறு வரைவது என்பதையும் இனி கற்போம்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

### *13.2* வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களின் சராசரி (**mean of grouped data**) :

விவரங்களின் சராசரி என்பது, கொடுக்கப்ட்ட விவரங்களின் கூடுதலை விவரங்களின் எண்ணிக்கையினால் வகுப்பது என்பது நமக்கு தெரியும். $x_1, x_2 .....x_n$, என்பன குறிப்புகள் (விவரங்கள்) என்றும் $f_1, f_2 .... f_n$ என்பன முறையே அவற்றின் நிகழ்வெண்கள் என இருப்பின், $x_1$ என்பது $f_1$ முறைகளும், $x_2$ என்பது $f_2$ முறைகளும், அதேபோல $x_n$ என்பது $f_n$ முறை நிகழ்கின்றன என்பதை IX ஆம் வகுப்பில் இருந்து நினைவு கூர்க.

இனி, எல்லா குறிப்புகளின் மதிப்புகளின் கூடுதல்

$= f_1x_1 + f_2x_2 + ......+ f_nx_n$ மற்றும்,

குறிப்புகளின் எண்ணிக்கை = $f_1 + f_2 + ...... f_n$.

எனவே, விவரங்களின் சராசரியான $\overline{x}$ என்பது

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ......+ f_nx_n}{f_1 + f_2 + ......+ f_n}$$ எனப்படுகிறது.

இதை சுறுக்கமாக, கூட்டுமொத்தத்தைக் குறிக்கும் கிரேக்க எழுத்தான சிக்மா எனப்படும் $\sum$ ஐ பயன்படுத்தி எழதலாம் என்பதை நினைவு கூர்க.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=i}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=i}^{n} f_i}$$

இதில் $i$ என்பது **1** முதல் $n$ வரை மாறுபடுகிறது என்பது புரிந்து கொள்ளத்தக்கது என்பதால், இதை இன்னும் சுருக்கி

$$\overline{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

இச்சூத்திரத்தைப்பயன்படுத்தி, கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டில் ச ராசரியைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

**எடுத்துக் காட்டு 1 :** குறிப்பிட்ட பள்ளி ஒன்றில், X ஆம் வகுப்பில் படிக்கும் 30 மாணவர்கள் கணிதத்தில் 100 மதிப்பெண்களுக்கு, அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன. மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரியைக் கண்டுபிடி.

| மதிப்பெண்கள் ($x_i$) | 10 | 20 | 36 | 40 | 50 | 56 | 60 | 72 | 72 | 80 | 88 | 92 | 95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மதிப்பெண்களின் எண்ணிக்கை ($f_i$) | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 |

**தீர்வு :** சராசரி மதிப்பெண்ணைப் கண்டுபிடிப்பதற்கு நமக்கு ஒவ்வொரு $x_i$ யுடன் அதன் நிகழ்வெண்ணான $f_i$ யின் பெருக்கல் தொகை தேவை. எனவே அட்டவணை **13.1** இல் காட்டிய படி அவற்றை நிரலில் அடுக்கலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**அட்ட வணை 13.1**

| மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ($f_i$) | $f_i x_i$ |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 10 |
| 20 | 1 | 20 |
| 36 | 3 | 108 |
| 40 | 4 | 160 |
| 50 | 3 | 150 |
| 56 | 2 | 112 |
| 60 | 4 | 240 |
| 70 | 4 | 280 |
| 72 | 1 | 72 |
| 80 | 1 | 80 |
| 88 | 2 | 176 |
| 92 | 3 | 276 |
| 95 | 1 | 95 |
| **மொத்தம்** | $\sum f_i = 30$ | $\sum f_i x_i = 1779$ |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

ஆகவே பெறப்பட்ட மதிப்பெண்களின் சராசரி 59.3 ஆகும்.

பொதுவாக நமது அன்றாட வாழ்கையில், புள்ளி விவரங்கள் மிக அதிகமான விவரங்களைக் கொண்டதாக இருப்பதால், அவற்றை தொகுத்து பட்டியலிடுவதன் மூலமாகவே, அதிலிருந்து பொருளை புரிந்துகொள்ள முடியும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகுக்கப்படாத விவரங்களை, தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களாக மாற்றி மேலும் அதன் ச ராசரியைக் காண ஏதேனும் வழிமுறையை ஏற்பாடு செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக் காட்டு 1 இல் உள்ள வகைப்படுத்தப் படாத விவரங்களை, பிரிவு இடைவெளிக்கான அகலம், ஒரு பேச்சுக்கு 15 என்று எடுத்துக்கொண்டு, வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களாக மாற்றுவோம். ஒவ்வொறு பிரிவு இடைவெளிக்கான நிகழ்வெண்ணை ஒதுக்கீடு செய்யும் பொழுது, பிரிவின் மேல் எல்லையில் வரும் மாணவர்களை அடுத்த பிரிவிற்கே கருத வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். அதாவது, 40 மதிப்பெண் பெற்ற 4 மாணவர்கள் 40-55 என்ற பிரிவில் கருதப்படுவர், 25-40 என்ற பிரிவில் அல்ல. இந்த மரபை மனிதில் கொண்டு, கீழ்வரும் வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலை பட்டியல் படுத்தலாம். (அட்டவணை 13.2 ஐப் பார்)

## அட்டவணை 13.2

| பிரிவு இடைவெளி | 10 - 25 | 25 - 40 | 40 - 55 | 55 - 70 | 70 - 85 | 85 - 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 2 | 3 | 7 | 6 | 6 | 6 |

இனி, இந்த ஒவ்வொரு பிரிவு - இடைவெளியையும் பிரதிநிதித்துவம் செய்யும் சுட்டி (புள்ளி) ஒன்று நமக்கு தேவை. ஒவ்வொரு பிரிவின் நிகழ்வெண் ஆனது அப்பிரிவின் மையப்புள்ளியைச் சுற்றியே அமைந்துள்ளது என்று யூகிக்கப்படுகிறது. எனவே, ஒவ்வொரு பிரிவின் மையப்புள்ளி (அல்லது பிரிவுகுறி) - யே அப்பிரிவின் உள் அடங்கிய எல்லா விவரங்களையும் பிரதிபலிப்பதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஒரு பிரிவின் மையப் புள்ளியை, அப்பிரிவின் மேல் எல்லை மற்றும் கீழ் எல்லை இவற்றின் சராசரியாகக் கண்டு பிடிக்கலாம் என்பதை நினைவுக் கூர்க. அதாவது,

$$\text{பிரிவுக்குறி அல்லது மையப்புள்ளி} = \frac{\text{பிரிவின் மேல்எல்லை + பிரிவின் கீழ் எல்லை}}{2}$$

அட்டவணை **13.2** ஐப் பொறுத்தவரை, பிரிவு **10-25** க்கு, பிரிவுக் குறியானது $\frac{10+25}{2} = 17.5$ ஆகும். அதேபோல, எஞ்சிய எல்லா பிரிவுகளுக்கும் கண்டுபிடிக்கலாம். இவற்றை அட்டவணை **13.3** இல் போடலாம். இந்த பிரிவுக் குறிகளே (மையப்புள்ளிகளே) நமது $x_i$- களாகும். ஆக, பொதுவாக, $i$ - ஆவது பிரிவிற்கு, $x_i$ - என்ற பிரிவுக்குறிக்கு $f_i$ என்பது ஒத்த நிகழ்வெண் ஆகும். இனி நாம் எடுத்துக் காட்டு **1** இல் கணித்தவாறே, சராசரியைக் கணிக்கலாம்.

## அட்டவணை 13.3

| பிரிவு இடைவெளி | மாணவர்களின் ண்ணிக்கை ($f_i$) | பிரிவு மையப்புள்ளி ($x_i$) | $f_i x_i$ |
|---|---|---|---|
| 10 - 25 | 2 | 17.5 | 35.0 |
| 25 - 40 | 3 | 32.5 | 97.5 |
| 40 - 55 | 7 | 47.5 | 332.5 |
| 55 - 70 | 6 | 62.5 | 375.0 |
| 70 - 85 | 6 | 77.5 | 465.0 |
| 85 - 100 | 6 | 92.5 | 555.0 |
| மொத்தம் | $\sum f_i = 30$ | | $\sum f_i x_i = 1860.0$ |

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

கடைசி நிரலில் உள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுக்தொகை நமக்கு $\sum f_i x_i$ ஐத் தருகிறது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கான சராசரியானது,

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

சராசரி கண்டுபிடிப்பதற்கான இந்த முறையே 'நேரடி முறை' எனப்படும்.

அட்டவணைகள் 13.1 மற்றும் 13.3, இவை அதே புள்ளி விவரங்களை பயன்படுத்துகின்றன மேலும் அதே சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி சராசரியைக் கொடுக்கின்றன. ஆயினும் விடைகள் மாறுபட்டவையாக உள்ளன என்பதை நாம் கவனிக்கலாம். இது ஏன் இவ்வாறு மற்றும் எந்த விடை சிறந்தது என உங்களால் யோசிக்க முடிகிறதா? இரண்டு விடைகளிடையேயும் உள்ள வித்தியாசத்தின் காரணம் அட்டவணை 13.3 இல் நாம் மையப்புள்ளியை யூகித்தோம் ஆகையால் 59.3 என்பது சரியான சராசரி, 62 என்பது தோராயமான சராசரி ஆகும்.

சில சமயங்களில் $x_i$ மற்றும் $f_i$ இவற்றின் மதிப்புகள் மிகப் பெரிய எண்களாக இருந்தால், $x_i$ மற்றும் $f_i$ யின் பெருக்கல்தொகை காண்பது மிகவும் கடினமாகவும் வெகு நேரம் எடுத்துக் கொள்வதாகவும் அமையும். இச்சமயங்களில், இந்த கணிப்புகளை சுறுக்குவதற்கு வழிமுறைகளை நாம் சிந்திக்கலாம்.

$f_i$ - களை நாம் ஒன்றும் செய்யமுடியாது. ஆனால் ஒவ்வொரு $x_i$ - ஐயும் சிறு எண்ணாக மாற்றினால், கணிப்புகள் சுலபமானதாகிவிடும். இதை எவ்வாறு செய்யலாம் ? ஒவ்வொரு $x_i$ - இல் இருந்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணை கழித்துக் கொண்டே வந்தால் என்ன ? இம்முறையை முயற்சித்துப்பார்க்கலாம்.

இதில் முதல்படிநிலையாக, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களில், $x_i$ - களில் ஒன்றை 'ஊகச் சராசரி' எனக் கொள்வோம் மற்றும் அதை '$a$' என்று குறியிடுவோம். மேலும், கணிப்புகளை இன்னும் சுலபமாக்கு வதற்கு, $x_1, x_2, \ldots x_n$ இவற்றின் மையத்தில் அமைந்த $x_i$ இன் மதிப்யை '$a$' ஆக

எடுத்துக் கொள்வோம். ஆக a = 47.5 அடுத்தபடியாக, ஒவ்வொரு $x_i$ - இன் மதிப்பிற்கும் '$a$' க்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை $d_i$ ஆக கண்டுபிடிக்கலாம். அதாவது, $x_i$- இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் '$a$' யின் விலக்கம் $d_i$ (*deviation*) ஆனது,

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

மூன்றாம்படியாக, $d_i$ மற்றும் அதன் ஒத்த $f_i$ யின் பெருக்குத்தொகையை காண்தல் மற்றும் $f_i\,d_i$ எல்லாவற்றின் கூட்டுத்தொகையை காண்தல், கணிப்புகள் அட்டவணை **13.4** இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

**அட்டவணை 13.4**

| பிரிவு இடைவெளி | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ($f_i$) | மையப் புள்ளி ($x_i$) | $d_i = x_i - 47.5$ | $f_i d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 - 25 | 2 | 17.5 | -30 | -60 |
| 25 - 40 | 3 | 32.5 | -15 | -45 |
| 40 - 55 | 7 | 47.5 | 0 | 0 |
| 55 - 70 | 6 | 62.5 | 15 | 90 |
| 70 - 85 | 6 | 77.5 | 30 | 182 |
| 85 - 100 | 6 | 92.5 | 45 | 270 |
| மொத்தம் | $\sum f_i = 30$ | | | $\sum f_i d_i = 435$ |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எனவே, அட்டவணை **13.4** இல் இருந்து,

விலக்கங்களின் சராசரி, $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

இனி, $\bar{d}$ மற்றும் $\bar{x}$ இவற்றினிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன என்பதைக் காண்போம். $d_i$-யைப் பெறும் போது, ஒவ்வொரு $x_i$ - இன் மதிப்பலிருந்தும் 'a' என்ற மதிப்பைக் கழித்தோம். இனி, $\bar{x}$ ஐப் பெறுவதற்கும் 'a' என்ற மதிப்பை $\bar{d}$ யுடன் கூட்டவேண்டும். இதை கணித முறையில் கீழ்வருமாறு விவரிக்கலாம்.

விலக்கங்களின் சராசரி, $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \overline{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \overline{x} - a$$

எனவே, $\overline{x} = a + \overline{d}$

அதாவது, $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i}{\sum f_i}$

$a_i$ $\sum f_i d_i$ மற்றும் $\sum f_i$ இவற்றின் மதிப்புகளை அட்டவணை 13.4 இல் இருந்து பதிலீடு செய்வதால்,

$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$ எனக் கிடைக்கிறது, ஆகவே, மாணவர்கள்

பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரியானது 62 ஆகும்.

மேற்கண்ட இந்த முறையே ஊகச் சராசரி முறை (assumed mean method) எனப்படுகிறது.

**செயல்பாடு 1 :** அட்டவணை 13.3 இல் இருந்து, $x_i$ யின் ஒவ்வொரு மதிப்பினையும் (அதாவது 17.5, 32.5 ....) $a$ வாக எடுத்துக் கொண்டு சராசரியை கண்டு பிடிக்கவும். என்ன கவனிக்கிறாய்? ஒவ்வொரு நிகழ்விலும் கிடைத்த சராசரி 62 ஆகும். (இது ஏன்?)

இதிலிருந்து, சராசரியின் மதிப்பு, `$a$' வின் தேர்வின் மீது சார்ந்தாக இல்லை என்பது தெளிவாகிறது.

அட்டவணை 13.4 இன் நிரல் 4 இல் உள்ள மதிப்புகள் யாவும் 15 இன் மடங்குகளாக உள்ளன என்பதை கவனி. நிரல் 4 இல் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளையும் 15 ஆல் வகுப்பதால், நமக்கு $f_i$ யுடன் பெருக்குவதற்கு சிறிய எண்கள் கிடைக்கும். (இங்கே, பிரிவு இடைவெளியின் நீளம் 15 ஆகும்)

எனவே, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ என்க. இதில் `$a$' என்பது ஊகச்சராசரி மற்றும் $h$ என்பது இடைவெளி நீளம். இனி, இதைக் கொண்டு $u_i$ ஐக் கண்டு பிடித்து முன் போலவே (அதாவது, $f_i u_i$ மற்றும் $\sum f_i u_i$ ஐக் கண்டுபிடித்து) தொடருவோம். $h$=15 எனக்கொண்டு அட்டவணை 13.5 ஐ உருவாக்குவோம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**அட்டவணை 13.5**

| பிரிவு இடைவெளி | $f_i$ | $x_i$ | $d_i = x_i - a$ | $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ | $f_i d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 - 25 | 2 | 17.5 | -30 | -2 | -4 |
| 25 - 40 | 3 | 32.5 | -15 | -1 | -3 |
| 40 - 55 | 7 | 47.5 | 0 | 0 | 0 |
| 55 - 70 | 6 | 62.5 | 15 | 1 | 6 |
| 70 - 85 | 6 | 77.5 | 30 | 2 | 12 |
| 85 - 100 | 6 | 92.5 | 45 | 3 | 18 |
| மொத்தம் | $\sum f_i = 30$ | | | | $\sum f_i u_i = 29$ |

இனி $\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

இங்கும், $\bar{u}$ மற்றும் $\bar{x}$ க்கான தொடர்பைக் காண்போம்.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

ஆகவே,

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

எனவே, $h\bar{u} = \bar{x} - a$

அதாவது, $\bar{x} = a + h\bar{u}$

ஆக, $\bar{x} = a + h\left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right)$

இனி, $a, h, \sum f_i u_i$ மற்றும் $\sum f_i$ ஆகிய வற்றின் மதிப்புகளை அட்டவணை **13.5** - இல் இருந்து பதிலிடு செய்வதால், நமக்கு

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$= 47.5 + 14.5 = 62$ எனக் கிடைக்கிறது.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இவ்வாறாக, மாணவர்கள் யெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரி 62 ஆகும். மேலே ஆராயப்பட்ட முறையானது 'படிவிலக்க முறை' (Step Deviation Method) எனப்படும்.

**கீழ்வருவனவற்றைக் குறிப்போம்:**

- $d_i$ யின் எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு பொதுக்காரணி உடையதாக இருப்பன், படிவிலக்க முறையானது பயன்படுத்துவதற்கு மிக எளிதானதாக அமையும்.
- மூன்றுவகையான முறைகளினால் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட ச ராசரியும் சமமே.
- ஊகச் சராசரி முறை மற்றும் படிவிலக்க முறை இவை இரண்டுமே, நேரடி முறையின் சுருக்கப்பட்ட முறைகள் ஆகும்.
- $a$ மற்றும் $h$ க்கான மதிப்புகள் மேலே கூறப்பட்ட வகையில் அல்லாமல், $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ என்றமைந்த வகையில் உள்ள எந்த ஒரு சுழி அல்லாத எண்ணிற்கும் $\overline{x} = a + h\overline{u}$ என்ற சூத்திரம் பொருந்தும்.

இவற்றை வேறொரு எடுத்துக்காட்டில் செய்து பார்க்கலாம்.

*எடுத்துக்காட்டு 2 :* கீழ்வரும் அட்டவணை, இந்திய மாநிலங்கள் மற்றும் யூனியன் பிரதேசங்களில், கிராமங்களில் உள்ள தொடக்கப்பள்ளிகளில் பெண் ஆசிரியர்களின் பரவலை ச தவிகிதத்தில் கொடுக்கிறது, இப்பாடப்ப குதியில் நாம் கற்ற மூன்று முறைகளையும் பயன்படுத்தி பெண் ஆசிரியைகளின் சராசரியை சதவிகிதத்தில் காண்க.

| பெண் ஆசிரியைர்களின் சதவிகிதம் | 15 - 25 | 25 - 35 | 35 - 45 | 45 - 55 | 55 - 65 | 65 - 75 | 75 - 85 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாநிலங்கள்/யூனியன் பிதேசங்களின் எண்ணிக்கை | 6 | 11 | 7 | 4 | 4 | 2 | 1 |

மூலம் : NCERT யால் நடத்தப்பட்ட ஏழூாவது அகில இந்திய பள்ளி கல்வி ஆய்வு (All India School Education Survey)

**தீர்வு :** பிரிவு மையப்புள்ளி $x_i$ களை ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் கண்டுபிடித்து, அவற்றை அட்டவணை 13.6 இல் உள்ளபடி ஒரு நிரலில் எழுதலாம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @TBS

**அட்டவணை 13.6**

| பெண் ஆசிரியைகளின் சதவிகிதம் | மாநிலங்கள் யூனியன் /பிரதேச ங்களின் எண்ணிகை ($f_i$) | $x_i$ |
|---|---|---|
| 15 - 25 | 6 | 20 |
| 25 - 35 | 11 | 30 |
| 35 - 45 | 7 | 40 |
| 45 - 55 | 4 | 50 |
| 55 - 65 | 4 | 60 |
| 65 - 75 | 2 | 70 |
| 75 - 85 | 1 | 80 |

இங்கு $a$ =**50**, $h$ =**10** எனக் கொண்டால், $d_i = x_i - 50$ மற்றும் $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

இப்போது நாம் $d_i$ மற்றும் $u_i$ இவற்றைக் கண்டுபிடித்து அட்டவணை **13.7** இல் பட்டியலிடலாம்.

**அட்டவணை 13.7**

| பெண் ஆசிரியைகளின் சதவிகிதம் | மாநிலங்கள் யூனியன் பிரதே சங்களின் எண்ணிகை($f_i$) | $x_i$ | $d_i = x_i - 50$ | $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ | $f_i x_i$ | $f_i d_i$ | $f_i u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 - 25 | 6 | 20 | -30 | -3 | 120 | -180 | -18 |
| 25 - 35 | 11 | 30 | -20 | -2 | 330 | -220 | -22 |
| 35 - 45 | 7 | 40 | -10 | -1 | 280 | -70 | -7 |
| 45 - 55 | 4 | 50 | 0 | 0 | 200 | 0 | 0 |
| 55 - 65 | 4 | 60 | 10 | 1 | 240 | 40 | 4 |
| 65 - 75 | 2 | 70 | 20 | 2 | 140 | 40 | 4 |
| 75 - 85 | 1 | 80 | 30 | 3 | 80 | 30 | 3 |
| மொத்தம் | $\sum f_i$ =35 | | | | 1390 | -360 | -36 |

மேலே உள்ள அட்ட வணையிலிருந்து, $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i$ = **1390**,

$\sum f_i d_i = -360$, $\sum f_i G_i = -36$ எனபன நமக்கு கிடைக்கிறது.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தினால் $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ஊகச் சராசரி முறையால், $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + (\frac{-360}{35}) = 39.71$

படிவிலக்க முறையால், $\overline{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + (\frac{-36}{35}) \times 10 = 39.71$

ஆகவே, கிராமப்புறங்களில் உள்ள முதல்நிலைப் பள்ளிகளில் இருக்கும் பெண் ஆசிரியைகளின் சராசரி சதவிதம் **39.71.**

**குறிப்பு :** மூன்று வகையான முறைகளைப் பயன்படுத்தும்போதும் கிடைக்கும் விடை ஒன்றை. ஆகையால், எந்த முறையை பயன்படுத்த வேண்டும் என்பது $x_i$ மற்றும் $f_i$ ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கை மதிப்பினைப் பொருத்ததே. $x_i$ மற்றும் $f_i$ யின் மதிப்புகள் போதுமான அளவு சிறியதாயின் நேரடி முறையே சாதகமானதாகும். $x_i$ மற்றும் $f_i$ யின் எண் மதிப்புகள் பெரியதாக இருப்பின், ஊகச் சராசரி முறை அல்லது படிவிலக்க முறை இவற்றை நாம் பயன்படுத்தலாம். இடைவெளிகளின் நீளம் சமமாக இல்லாமல் இருப்பின், மற்றும் $x_i$ க்கள் பெரிய எண்களாக இருப்பின், நாம் $d_i$ - க்களை தகுந்த $h$ என்ற எண்ணால் வகுப்பதின் மூலம், படிவிலக்க முறையைப் பயன் படுத்தலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**எடுத்துக்காட்டு 3 :** கீழ்வரும் பரவலானது, ஒரு நாள் கிரிக்கெட் பந்தயங்களில், பந்து வீச்சாளர்களால் எடுக்கப்பட்ட விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கைகள் ஆகும். ஏதேனும் ஒரு பொருத்தமான முறையைப் பயன்படுத்தி, எடுக்கப்பட்ட விக்கெட்டுகளின் சராசரியைக் கண்டு பிடி. இந்த சராசரி உணர்த்துவது என்ன?

| விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை | 20-60 | 60-100 | 100-150 | 150-250 | 250-350 | 350-450 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| பந்து விச்சாளர்களின் எண்ணிக்கை | 7 | 5 | 16 | 12 | 2 | 3 |

**தீர்வு :** இங்கு, பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் வெவ்வேறாக உள்ளது, மற்றும் $x_i$ க்களின் மதிப்புகள் பெரிய எண்கள். எனவே, படிவிலக்க முறையைக் கையாளலாம். a = **200** மற்றும் h = **20** என்க. இப்படியாக நமக்கு கீழ்கண்ட அட்டவணை **13.8** கிடைக்கிறது.

**அட்டவணை 13.8**

| விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை | பந்து விச்சளர்களின் எண்ணிக்கை | $x_i$ | $d_i = x_i$-200 | $u_i = \frac{d_i}{20}$ | $u_i f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 - 60 | 7 | 40 | -160 | -8 | -56 |
| 60 - 100 | 5 | 80 | -120 | -6 | -30 |
| 100 - 150 | 16 | 125 | -75 | -3.75 | -60 |
| 150 - 250 | 12 | 200 | 0 | 0 | 0 |
| 250 - 350 | 2 | 300 | 100 | 5 | 10 |
| 350 - 450 | 3 | 400 | 200 | 10 | 30 |
| மொத்தம் | $\sum f_i = 45$ | | | | $\sum f_i u_i =$ -106 |

ஆகவே, $= \bar{u} = \frac{-106}{45}$

ஆகவே, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right)$

$= 200 - 47.11 = 152.89$

ஒருநாள் கிரிகெட் பந்தயத்தில், **45** பந்து வீச்சாளர்களால் சராசரியாக எடுக்கப்பட்ட விக்கெட்டுகள் **152.89** என இது நமக்கு சொல்கிறது.

இனி, இப்பாடத்தில் நாம் கற்ற இக்கருத்துக்களை எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்பதைக் காணலாம்.

**செயல்பாடு 2 :**

உங்கள் வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களை மூன்று குழுக்களாகபிரித்து, ஒவ்வொரு குழுவினையும் கீழ்வரும் செயல்பாடுகளில் ஒவ்வொன்றை செய்யச் சொல்லவும்.

1. மிக அண்மையில் உங்கள் பள்ளி நடத்திய தேர்வில் கணிதத்தில் உங்கள் வகுப்பின் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண் விவரங்களை சேகரிக்கவும். இந்த விவரங்களுக்கான வகைப்படுத்தப் பட்ட நிகழ்வெண்பரவலை உருவாக்கவும்.

2. உங்கள் நகரத்தில் 30 நாட்களில் பதிவு செய்யப்பட்ட உச்ச வெப்ப நிலை விவரங்களை சேகரிக்கவும். அவ்விவரங்களை வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வென் பரவலாக அளிக்கவும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

3. உங்கள் வகுப்பில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களின் உயரங்களை (செமீட்டரில்) அளக்கவும். அவ்விவரங்களை வகைப்படுத்தப் பட்ட நிகழ்வெண் பரவாக உருவாக்கவும்.

எல்லா குழுக்களும் விவரங்களை சேதரித்தல் மற்றும் அதை வகைப்படுத்தப் பட்ட நிகழ்வெண் பரவலாக உறுவாக்கி முடித்த பிறகு, குழுக்கள் அதற்கான சராசரியை உசிதமான முறையைத் தேர்ந்தெடுத்து, கண்டுபிடிக்கவும்.

### பயிற்சி 13.1

1. ஒரு வட்டாரத்தில் உள்ள 20 வீடுகளில் இருக்கும் மரங்களின் எண்ணிக்கையின் விவரங்கள் மாணவர்களின் குழு ஒன்றால், தங்கள் சுற்றுச்சூழல் விழிப்புணர்வு செய்நிரலின் அங்கமாக நடத்தப்பட்ட ஆய்வில் சேகரிக்கப்பட்டது. ஒவ்வொரு வீட்டிலும் சராசரியாக இருக்கும் மரங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடிக்கவும்.

| மரங்களின் எண்ணிக்கை | 0-2 | 2-4 | 4-6 | 6-8 | 8-10 | 10-12 | 12-14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| வீடுகளின் எண்ணிக்கை | 1 | 2 | 1 | 5 | 6 | 2 | 3 |

சராசரியைக் கண்டு பிடிக்க எந்த முறையைப் பயன்படுத்தினீர் ? மற்றும் ஏன்?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ஒரு தொழிர்சாலையின் 50 தொழிலாளிகளின் நாட்கூலிகளின் கீழ்வரும் பரவவலைக் கருதவும்.

| நாட்கூலி (₹ யில்) | 100-120 | 120-140 | 140-160 | 160-180 | 180-200 |
|---|---|---|---|---|---|
| தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கை | 12 | 14 | 8 | 6 | 10 |

தொழிலாளிகளின் சராசரி நாள்கூலியை உகந்த முறையைக் கையாண்டு, கண்டுபிடிக்கவும்.

3. கீழ்காணும் பரவவலானது ஒரு வட்டாரத்தில் உள்ள குழந்தைகள் பெறும் தினசரி செலவுப்பணத்தைக் குறிக்கிறது. சராசரி செலவுப்பணம் ₹ 18 எனில் விட்டுப்போன நிழ்வெண் $f$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

| திசைரி செலவுப்பணம் (₹) | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை | 7 | 6 | 9 | 13 | $f$ | 5 | 4 |

4. மருத்துவமனை ஒன்றில் மருத்துவரால் 30 பெண்கள் பரிசோதிக்கப்பட்டனர் மற்றும் அவர்களது இதயத்துடிப்பு நிமிடத்திற்கு எவ்வளவு என்பது பதிவு செய்யப்பட்டு கீழ்வருமாறு தொகுக்கப்பட்டது. அப்பெண்களது இதயத்துடிப்பு நிமிடத்திற்கு சராசரி எவ்வளவு என்பதை உகந்த முறையைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கண்டுபிடிக்கவும்.

| நிமிடத்தில் இயத்துடிப்பின் எண்ணிக்கை | 65-68 | 68-71 | 71-74 | 74-77 | 77-80 | 80-83 | 883-86 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பெண்களின் எண்ணிக்கை | 2 | 4 | 3 | 8 | 7 | 4 | 2 |

5. சில்லரை அங்காடிசந்தையில், பழவியாபாரிகள் பெட்டிகளில் அடைக்கப்பட்டிருந்த மாம்பழங்களை விற்றுக் கொண்டிருந்தனர். பெட்டிகள் மாம்பழங்களை மாறுபட்ட எண்ணிக்கைகளில் கொண்டிருந்தன. கீழ்வரும் பரவலானது, பெட்டிகளில் உள்ள மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கைகளின் படி தொகுக்கப்பட்டுள்ளது.

| மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கை | 50-52 | 53-55 | 56-58 | 59-61 | 62-64 |
|---|---|---|---|---|---|
| பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை | 15 | 10 | 135 | 115 | 25 |

ஒரு பெட்டியில் அடைக்கப்பட்டிருக்கும் மாம்பழத்தின் சராசரி எண்ணிக்கை என்ன என்பதைக் கண்டுபிடிக்கவும். சராசரியைக் கண்டுபிடிக்க எம்முறையைப் பயன்படுத்தினாய்?

6. ஒரு வட்டாரத்தில் அமைந்த 25 வீடுகளில் தினசரி உணவிற்கான செலவை கீழ்வரும் அட்டவணைக் காட்டுகிறது.

| தினசரி செலவு (₹ இல்) | 100-150 | 150-200 | 200-250 | 250-300 | 300-350 |
|---|---|---|---|---|---|
| வீடுகளின் எண்ணிக்கை | 4 | 5 | 12 | 2 | 2 |

தக்க முறையைப் பயன்படுத்தி தினசரி உணவுக்கான சராசரி செலவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

7. காற்றில் $SO_2$ இன் திட்பத்தை (பத்து இலட்சத்தில் பகுதிகளாக அதாவது PPM) கண்டுபிடிப்பதற்காக, விவரங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில், 30 வட்டாரங்களில் இருந்து சேகரிக்கப்பட்டன மற்றும் அவை கீழ்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

| $SO_2$ வின் திட்பம் (PPM இல்) | நிகழ்வெண் |
|---|---|
| 0.00 - 0.04 | 4 |
| 0.04 - 0.08 | 9 |
| 0.08 - 0.12 | 9 |
| 0.12 - 0.16 | 2 |
| 0.16 - 0.20 | 4 |
| 0.20 - 0.24 | 2 |

காற்றில் $SO_2$ இன் சராசரி திட்பத்ததைக் கண்டுபிடி.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

8. வகுப்பாசிரியர், ஒரு வகுப்பில் உள்ள 40 மாணவர்களின் ஒரு முழு பருவத்தில் ஆசராகாதவர் பதிவை (absentee record) கீழ்வருமாறு கொண்டுள்ளார். ஒரு மாணவன் சராசரியாக எவ்வளவு நாட்கள் ஆஜராகவில்லை என்பதைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

| நாட்களின் எண்ணிக்கை | 0-6 | 6-10 | 10-14 | 14-20 | 20-28 | 28-38 | 38-40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 11 | 10 | 7 | 4 | 4 | 3 | 1 |

9. கீழ்காணும் அட்டவணை, 35 நகரங்களின் எழுத்தறிவு வீதத்தை (விழுக்காடுகளில்) கொடுக்கிறது. சராசரி எழுத்தறிவு வீதத்தைக் கண்டுபிடி.

| எழுத்தறிவு விதம் (% இல்) | 45-55 | 55-65 | 65-75 | 75-85 | 85-95 |
|---|---|---|---|---|---|
| நகரங்களின் எண்ணிக்கை | 3 | 10 | 11 | 8 | 3 |

**13.3 தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் முகடு.** முகடு என்பது, பதிவுகளில் எந்த மதிப்பு பலமுறை (திருபத்திரும்ப) நிகழ்கிறதோ அதுவே என்பதை IX ஆம் வகுப்பில் இருந்து நினைவு கூர்க. அதாவது, அதிக பட்ச நிகழ்வெண்ணைக் கொண்ட பதிவு (மதிப்பு). மேலும்,

நாம் தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் முகடைக் கண்டு பிடிப்பதைப் பற்றி கற்றறிந்தோம். இங்கே நாம், தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் முகடைக் கண்டறியும் வழிகளை ஆராய்வோம். ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட மதிப்புகள் ஒரே அதிகபட்ச நிகழ்வெண்ணைக் கொண்டு இருப்பதற்கான வாய்ப்புகளும் உண்டு, இச்சூழ்நிலையில், கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் பலமுகடுகளைக் கொண்டுள்ளன (multimodal) எனலாம். வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்கள் பலமுகடுகளைக் கொண்டிருக்கும் சாத்தியக்கூறுகள் இருப்பினும் நாம், ஒரு முகடைக் கொண்ட கணக்குகளை மட்டும் தீர்ப்பதோடு நிறுத்திக் கொள்வோம்.

வகைப்படுத்தப் படாத விவரங்களின் முகடை நாம் எப்படி கண்டு பிடித்தோம் என்பதைக் கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் நினைவு கூர்வோம்.

**எடுத்துக் காட்டு 4 : 10** கிரிக்கெட் ஆட்டங்களில், பந்து விச்சாளர் ஒருவர் எடுத்த விக்கெட்டுகள் கீழ்வருமாறு:

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

விவரங்களின் முகடைக் காண்க.

***தீரவு* :** கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் நிகழ்வெண் பரவல் அட்டவணையை கீழ்வருமாறு செய்யலாம் :

| **விக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை** | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

தெளிவாக, 2 விக்கெட்டுகளே, பந்து வீச்சாளர் பலமுறை அதிகபட்சமான (அதாவது 3) ஆட்டங்களில் எடுத்துள்ளார். எனவே, விவரங்களின் முகடு 2.

தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண்டரவலில், நிகழ்வெண்களைப் பார்த்து அதிலிருந்து முகடைக் கண்டுபிடிப்பது என்பது சாத்தியப்படாது. இங்கு நாம் அதிகபட்ச நிகழ்வெண்ணை கொண்ட பிரிவான 'முகடு பிரிவை' மட்டுமே இடங்குறிக்க முடியும். முகடு என்பது இப்பிரிவில் அடங்கியுள்ள ஒரு மதிப்பு ஆகும். முகடுக்கான சூத்திரமானது:

முகடு $= l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$ ஆகும்

இதில், $l$ = முகடு பிரிவின் கீழ் எல்லை

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$h$ = பிரிவு இடைவெளியின் அகலம் (எல்லா பிரிவுகளும் சமமான அகலம் உனடயன என அனுமானிக்கப்படுகிறது)

$f_1$ = முகடுபிரிவின் நிகழ்வெண்

$f_0$ = முகடுபிரிவிற்கு முந்தைய பிரிவின் நிகழ்வெண்

$f_2$ = முகடுபிரிவிற்கு பின்தொடரும் பிரிவின் நிகழ்வெண்.

கீழ்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு இந்த சூத்திரத்தை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்று எடுத்துக்காட்டலாம்.

**எடுத்துக் காட்டு 5 :** ஒரு வட்டாரத்தில் இருக்கும் 20 வீடுகளில் நடத்தப்பட்ட கணக்கெடுப்பில் கிடைத்த விவரங்களைக் கொண்டு கீழ்வரும், குடும்ப அங்கத்தினரின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்வெண் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

| குடும்ப அளவு | 1-3 | 3-5 | 5-7 | 7-9 | 9-11 |
|---|---|---|---|---|---|
| குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை | 7 | 8 | 2 | 2 | 1 |

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

இந்த விவரங்களுக்கான முகடைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

**தீர்வு :** இங்கே, அதிக பட்ச பிரிவு நிகழ்வெண்ணானது 8, மேலும் அதனை ஒத்த பிரிவு 3-5. எனவே முகடுபிரிவு 3-5 ஆகும்.

இனி, முகடுபிரிவு = 3-5, முகடுபிரிவின் கீழ் எல்லை ($l$) = 3

பிரிவின் அகலம் ($h$) = 2

முகடுபிரிவின் நிகழ்வெண் ($f_1$) = 8

முகடுப்பிரிவிற்கு முந்தைய பிரிவின் நிகழ்வெண் ($f_0$) = 7

முகடுப்பிரிவிற்கு பின்தொடரும் பிரிவின் நிகழ்வெண் ($f_2$) = 2

இனி, சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தும் போது,

$$\text{முகடு} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$= 3 + \left[\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right] \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7}$$

$$= 3.286$$

ஆகவே, மேற்கண்ட விவரங்களின் முகடு 3.286 ஆகும்

**எடுத்துக் காட்டு 6 :** கணிதத் தேர்வில் 30 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பரவல் எடுத்துக்காட்டு 1 இல் அட்டவணை 13.3 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த விவரங்களின் முகடைக் காண்க. மேலும் முகடு மற்றும் சராசரி ஆகியவற்றை ஒப்பிட்டு நோக்கி பொருள் விளக்கம் கூறுக.

***தீர்வு :*** எ.கா.1 இல் அட்டவணை 13.3 ஐக்கவனிக்கவும். அதிகபட்ச மான மாணவர்கள் (அதாவது 7 பேர்) 40-55 என்ற என்ற பிரிவில் மதிப்பெண்களைப் பெற்றுள்ளதால், முகடுபிரிவு 40-55 ஆகும். எனவே,

முகடுபிரிவின் கீழ் எல்லை $(l) = 40$ ,

பிரிவின் அகலம் $(h) = 15$,

முகடுபிரிவின் நிகழ்வெண் $(f_1) = 7$,

முகடுபிரிவிற்கு முந்தைய பிரிவின் நிகழ்வெண் $(f_0) = 3$,

முகடுபிரிவின் பின் தொடர்ந்து வரும் பிரிவின் நிகழ்வெண் $(f_2) = 6$

இனி, சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தும் போது,

$$\text{மகடு} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$\text{முகடு} = 40 + \left[\frac{7 - 3}{4 - 6 - 3}\right] \times 15 = 52$$

எனக் கிடைக்கிறது,

எனவே, மதிப்பெண்களின் முகடு 52 ஆகும்.

இப்போது, எ.கா.1 இல் இருந்து நமக்கு மதிப்பெண்களின் சராசரி 62 என்பது தெரியும்.

இவ்வாறாக, அதிகபட்ச மாணவர்கள் 52 மதிப்பெண்களைப் பெற்றுள்ளனர் ஆனால் சராசரியாக ஒருமாணவன் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 62 ஆகும்.

**குறிப்புகள் :**

1. எ.கா. 6 இல் முகடானது சராசரியைவிட குறைவானதாக உள்ளது. ஆயினும் வேறு கணக்குகளில் அது சராசரிக்கு சமமானதாகவோ அல்லது அதைவிட அதிகமாகவோ கூட இருக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. சராசரியாக மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் காண்பதில் ஆர்வம் கொண்டுள்ளோமோ அல்லது அதிகபட்சமான மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரியைக்காண வேண்டுமா என்பது சூழ்நிலையின் தேவையைச் சார்ந்தே அமையும். முதல் கூறிய சூழலில், சராசரியே தேவையானது மற்றும் இரண்டாம் சூழலில், முகடு தேவையானது.

**செயல்பாடு 3 :** செயல்பாடு 2 இல் பிரித்த அதே குழுக்களையும் அவர்களுக்கு அளிக்கப்பட்ட செயல்களையும் கொண்டு, ஒவ்வெரு குழுவினையும் முகடு கண்டுபிடிக்க சொல்வோம். மேலும் அவர்கள் சராசரி மற்றும் முகடு ஆகியவற்றை ஒப்பிட்டுபார்த்து பொருள் விளக்கம் கொடுக்கவேண்டும்.

**குறிப்பு :** சமமில்லாத பிரிவு அகலங்களைக் கொண்ட வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கும் முகடு கண்டுபிடிக்கலாம். ஆயினும் அதை இங்கு நாம் கற்கப்போவது இல்லை.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## பயிற்சி 13.2

1. கீழ்வரும் அட்டவணையில், ஒரு வருடத்தில் மருத்துவமனை ஒன்றில் அனுமதிக்கப்பட்ட நோயாளிகளின் வயது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

| வயது (வருடங்களில்) | 5-15 | 15-25 | 25-35 | 35-45 | 45-55 | 55-65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை | 6 | 11 | 21 | 23 | 14 | 5 |

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் முகடு மற்றும் சராசரி ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும். இவ்விரு மையப்போக்கு அளவைகளையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து பொருள் விளக்கம் கொடுக்கவும்.

2. கீழ்கண்ட விவரங்கள் 225 மின் கூறுகளின் (electrical components) கவனிக்கப்பட்ட ஆயுட்காலத்தை (மணி நோங்களில்) கொடுக்கிறது.

| ஆயுட்காலம் (மணிகளில்) | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 | 100-120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண் | 10 | 35 | 52 | 61 | 38 | 29 |

இக் கூறுகளின் முகடு ஆயுட்காலத்தைக் கண்டுபிடி.

**3.** கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள், ஒரு கிராமத்தில் உள்ள 200 குடும்பங்களின்மொத்தமாதவாரியானகுடும்பச்செலவைக்குறிக்கின்றன. குடும்பங்களின் முகடு மாதச் செலவினைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் சராசரி மாதச் செலவினையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

| செலவு ( ₹ இல்) | குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 1000-1500 | 24 |
| 1500-2000 | 40 |
| 2000-2500 | 33 |
| 2500-3000 | 28 |
| 3000-3500 | 30 |
| 3500-4000 | 22 |
| 4000-4500 | 16 |
| 4500-5000 | 7 |

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

**4.** கீழ்வரும் பரவலானது, இந்தியாவின் மாநிலங்கள் வாரியாக, உயர்நிலைப் பள்ளிகளில் காணப்படும் ஆசிரியர் - மாணவருக்கான விகித்ததைக் குறிகிறது. இந்த விவரங்களின் முகடு மற்றும் சராசரினயக் கண்டுபிடிக்கவும். இரண்டு அளவைகளுக்கான பொருள் விளக்கம் அளிக்கவும்.

| ஒரு ஆசிரியருக்கு மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | மாநிலம்/யூனியன் பிரதேசத்தின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 15-20 | 3 |
| 20-25 | 8 |
| 25-30 | 9 |
| 30-35 | 10 |
| 35-40 | 3 |
| 40-45 | 0 |
| 45-50 | 0 |
| 50-55 | 2 |

5. கொடுக்கப்பட்ட பரவல், சில முதல்நிலை மட்டையாளர்கள் ஒரு நாள் சர்வதேச கிரிக்கெட் போட்டிகளில் எடுத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது.

| எடுத்த ஓட்டங்கள் | மட்டையாளர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 3000-4000 | 4 |
| 4000-5000 | 18 |
| 5000-6000 | 9 |
| 6000-7000 | 7 |
| 7000-8000 | 6 |
| 8000-9000 | 3 |
| 9000-10,000 | 1 |
| 10,000-11,000 | 1 |

விவரங்களின் முகடைக் கண்டு பிடி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. ஒரு மாணவன் சாலையின் ஒரு புள்ளியில் நூறு 3 நிமிட காலச்சுழற்சியில் எத்தனை கார்கள் கடக்கின்றன என்பதை குறிப்பெடுத்தான். அதைக்கீழ்வரும் அட்டவணையாக்கினான். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் முகடைக்கண்டுபிடி.

| கார்களின் எண்ணிக்கை | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்வெண் | 7 | 14 | 13 | 12 | 20 | 11 | 15 | 8 |

**13.4. வகைப்படுத்தப் பட்ட விவரங்களின் இடைநிலை (median)**

இடைநிலை என்பது கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் மிகுந்த (நடு) மையத்தில் அமைந்த மதிப்பைக் குறிக்கும் மையப்போக்கு அளவையாகும் என்பததை நீங்கள் IX ஆம் வகுப்பில் கற்றுள்ளீர்கள். தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கான இடைநிலையைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு, முதலில் மதிப்புகளை நாம் ஏறுவரிசையில் வரிசைப் படுத்த வேண்டும் என்பதை நினைவு கூர்க. இதில், n என்பது ஒற்றை எண்ணாக இருந்தால் $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பே இடைநிலை ஆகும். ஒருவேளை n என்பது இரட்டை எண் எனில், $\frac{n}{2}$ ஆவது மற்றும் $(\frac{n}{2}+1)$ ஆவது மதிப்புகளின் சராசரியே இடைநிலை ஆகும்.

நூறு மாணவர்கள், **50** மதிப்பெண்களுக்கான தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் குறிக்கும் இந்த விவரங்களின் இடைநிலை என்ன என்று கண்டு பிடிக்க வேண்டும் என்று வைத்துக் கொள்.

| கிடைத்த மதிப்பெண்கள் | 20 | 29 | 28 | 33 | 42 | 38 | 43 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 6 | 28 | 24 | 15 | 2 | 4 | 1 | 20 |

முதலில் நாம் மதிப்பெண்களை ஏறுவரிசையில் வரிசைப்படுத்தி பிறகு நிகழ்வெண் அட்டவணையை உறுவாக்குவோம்.

**அட்டவணை 13.9**

| கிடைத்த மதிப்ெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 20 | 6 |
| 25 | 20 |
| 28 | 24 |
| 29 | 28 |
| 33 | 15 |
| 38 | 4 |
| 42 | 2 |
| 43 | 1 |
| மொத்தம் | 100 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இங்கு 'n' =**100,** இது இரட்டை எண். இடைநிலையானது $(\frac{n}{2})$ ஆவது மற்றும் $(\frac{n}{2}+1)$ ஆவது மதிப்புகளின் சராசரியாகும். அதாவது **50** ஆவது மற்றும் **51** ஆவது மதிப்புகள். இந்த மதிப்புகளை கண்டுபிடிப்பதற்கு நாம் கீழ்கண்டவாறு முற்படுவோம்.

**அட்டவணை 13.10**

| கிடைத்த மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 20 | 6 |
| 25 வரை | 6+20=26 |
| 28 வரை | 26+24=50 |
| 29 வரை | 50+28=78 |
| 30 வரை | 78+15=93 |
| 38 வரை | 93+4=97 |
| 42 வரை | 97+2=99 |
| 43 வரை | 99+1=100 |

இப்போது, மேலே உள்ள நிகழ்வெண் அட்டவணைக்கு இன்னுமொரு நிரலை சேர்க்கலாம். அதற்கு குழுமிய/குவிவு நிகழ்வெண் நிரல் எனப் பெயரிடலாம்.

**அட்டவணை 13.11**

| கிடைத்த மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் ெண்ணிக்கை | குவிவு நிகழ்வெண் |
|---|---|---|
| 20 | 6 | 6 |
| 25 | 20 | 26 |
| 28 | 24 | 50 |
| 29 | 28 | 78 |
| 33 | 15 | 93 |
| 38 | 4 | 97 |
| 42 | 2 | 99 |
| 43 | 1 | 100 |

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

மேலே உள்ள அட்டவணையில் இருந்து.

50 ஆவது குறிப்பின் மதிப்பு 28 (ஏன் ?)

51 ஆவது குறிப்பின் மதிப்பு 29

எனக் காணலாம்.

எனவே, இடைநிலை $= \frac{28 + 29}{2} = 28.5$

**குறிப்பு :** நிரல் 1 மற்றும் நிரல் 3 இவை அடங்கிய அட்டவணை 13.11 இன் பகுதியானது குவிவு நிகழ்வெண் அட்டவணை எனப்படும். இடைநிலை 28.5 என்ற குறிப்பு, 50% மாணவர்கள் 28.5-ஐ விடக் குறைவாகவும், 50% மாணவர்கள் 28.5 ஐ விட அதிகமாகவும் மதிப்பெண்கள் எடுத்திருக்கிறார்கள் என்பதை அறிவிக்கின்றது.

இனி, கீழே வரும் சூழலைக் கொண்டு, எவ்வாறு தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கான இடைநிலையை கண்டுபிடிப்பது என்பதைக் காணலாம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட பரிட்சையில், 53 மாணவர்கள் நூற்றுக்கு எடுத்த மதிப்பெண்களின் தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலைக் கருதவும் :

அட்டவணை 13.12

| மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 0-10 | 5 |
| 10-20 | 3 |
| 20-30 | 4 |
| 30-40 | 3 |
| 40-50 | 3 |
| 50-60 | 4 |
| 60-70 | 7 |
| 70-80 | 9 |
| 80-90 | 7 |
| 90-100 | 8 |

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மேலே உள்ள அட்டவணையில் இருந்து, கீழ்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முயற்சிக்கவும் : 10 மதிப்பெண்களை விடக் குறைவாக மதிப்பெண்களை எடுத்த மாணவர்கள் எத்தனை பேர்? தெளிவாக விடை 5. 20-ஐ விடக் குறைவாக மதிப்பெண்களை எடுத்த மாணவர்கள் எத்தனை பேர்? 20- ஐ விடக் குறைந்த மதிப்பெண்களைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையானது, 0-10 மதிப்பெண்களைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் 10-20 மதிப்பெண்களைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகிய இரண்டையும் தன்னுள் அடக்கியுள்ளது. ஆகவே, 20- ஐ விடக் குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 5+3 அதாவது 8. பிரிவு 10-20 இன் குவிவு நிகழ்வெண்ணை 8 எனலாம்.

இதேபோல, மற்ற பிரிவுகளுக்கான குழுமிய நிகழ்வெண்களை இவ்வாறே கண்டு பிடிக்கலாம். அதாவது, 30 க்கு குறைவான மதிப்பெண்களை பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, 40 க்கு குறைவான, ...... 100 க்கு குறைவான. இவற்றை அட்டவணை 13.3 இல் எழுதலாம்.

அட்டவணை 13.13

| கிடைத்த மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (குவிவு நிகழ்வெண்) |
|---|---|
| 10 ஐ விட குறைவான | 5 |
| 20 ஐ விட குறைவான | 5 + 3 = 8 |
| 30 ஐ விட குறைவான | 8 + 4 = 12 |
| 40 ஐ விட குறைவான | 12 + 3 = 15 |
| 50 ஐ விட குறைவான | 15 + 3 = 18 |
| 60 ஐ விட குறைவான | 18 + 4 = 22 |
| 70 ஐ விட குறைவான | 22 + 7 = 29 |
| 80 ஐ விட குறைவான | 29 + 9 = 38 |
| 90 ஐ விட குறைவான | 38 + 7 = 45 |
| 100 ஐ விட குறைவான | 45 + 8 = 53 |

மேலே உள்ள பரவலே, குறைவு வகை குவிவு நிகழ்வெண்பரவல் எனப்படும். இங்கு, 10, 20, 30, ......100 ஆகியன முறையே ஒவ்வொரு பிரிவிற்குமான மேல் எல்லைகள் ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இதேபோல், 0 க்கு சமம் அல்லது அதிகமான, 10 க்கு சமமான அல்லது அதிகமான, 20 க்கு சமமான அல்லது அதிகமான, ... என்றமைந்த வகையில் மதிப்பெண்களைக் கொண்டு ஒரு அட்டவணையை உருவாக்கலாம். அட்டவணை 13.12 யில் இருந்து, அனைத்து 53 மாணவர்களும் 0 க்கு சமம் அல்லது அதிகமான மதிப்பெண்களை பெற்றுள்ளனர் என்பது தெரிகிறது. 5 மாணவர்கள் 0-10 இடையே மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளதால், 53-5=48 மாணவர்கள் 10 க்கு சமம் அல்லது அதிகமாக மதிப்பெண்களைப் பெற்றுள்ளனர். அதைத் தொடர்ந்து, 20 அல்லது அதற்கு மேலே பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 48-3=45, 30 அல்லது 30 க்கு மேலே 45-4=41, .... இவ்வாறாக அட்டவணை 13.14 கிடைக்கிறது.

அட்டவணை 13.14

| கிடைத்த மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (குவிவு நிகழ்வெண்) |
|---|---|
| 0 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 53 |
| 10 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 53-5=48 |
| 20 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 48-3=45 |
| 30 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 45-4=41 |
| 40 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 41-3=38 |

| | |
|---|---|
| 50 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 38-3=35 |
| 60 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 35-4=31 |
| 70 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 31-7=24 |
| 80 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 24-9=15 |
| 90 அல்லது அதைவிட அதிகம் | 15-7=8 |

மேலே கண்ட அட்டவணை, அதிக வகை குவிவு நிகழ்வெண்பரவல் எனப்படும். இங்கே 0, 10, 20, ......90 ஆகியன முறையே ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளிகளின் கீழ் எல்லைகள் ஆகும்.

இனி, வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களின் இடைநிலை அளவைக் கண்டு பிடிக்க, இந்த குவிவு நிகழ்வெண்பரவல்களை பயன் படுத்துவோம்.

அட்டவணை 13.12 மற்றும் 13.13 இவற்றை இணைத்து 13.15 ஐ உருவாக்குவோம்.

**அட்டவணை 13.15**

| மதிப்பெண்கள் | மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f) | குவிவு நிகழ்வெண் (c f) |
|---|---|---|
| 0 - 10 | 5 | 5 |
| 10 - 20 | 3 | 8 |
| 20 - 30 | 4 | 12 |
| 30 - 40 | 3 | 15 |
| 40 - 50 | 3 | 18 |
| 50 - 60 | 4 | 22 |
| 60 - 70 | 7 | 29 |
| 70 - 80 | 9 | 38 |
| 80 - 90 | 7 | 45 |
| 90 - 100 | 8 | 53 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களில், நமக்கு அதைப்பார்த்துமே அதில் நடுவான மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்க முடியாது. ஏனெனில் அது ஏதேனும் ஒரு பிரிவு இடைவெளிக்குள் இருக்கும். எனவே, முழுப் பரவலையும் இரு பாதிகளாகப் பிரிக்கும் மதிப்பு இருக்கக் கூடிய பிரிவினைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகிறது. ஆனால் இது எந்த பிரிவு?

இந்த பிரிவைக் கண்டுபிடிக்க, நாம் எல்லா பிரிவுகளுக்கான குவிவு நிகழ்வெண்களையும், $\frac{n}{2}$ வையும் கண்டுபிடிக்கலாம். எந்த பிரிவின் குவிவு

நிகழ்வெண் $\frac{n}{2}$ ஐ விட பெரியதாக (மற்றும் மிக அருகில்) உள்ளதோ, அப்பிரிவை இடங்குறிக்கலாம். இப்பிரிவே இடைநிலை அளவு பிரிவு எனப்படும். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலில், n=53 எனவே, $\frac{n}{2}=26.5$ இனி **60-70** என்ற பிரிவே குவிவு நிகழ்வெண் **29** ஐக் கொண்டுள்ளது. அதுவே $\frac{n}{2}$ அதாவது **26.5** விட அதிகமாக (மிக அருகில்) உள்ளது.

எனவே, **60-70** இடைநிலை அளவு பிரிவு ஆகும். இடைநிலை அளவு பிரிவைக் கண்டு பிடித்தபிறகு, நாம் கீழ்வரும் சூத்திரத்தை இடைநிலை அளவைக் கண்டு பிடிக்கப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

இதில், $l$ = இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ் எல்லை.

n = மொத்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை (அதாவது நிகழ்வெண்களின் கூடுதல்)

$cf$ = இடைநிலை அளவு பிரிவின் முந்தைய பிரிவின் நிகழ்வெண்

$f$ = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண்

$h$ = பிரிவு இடைவெளியின் அகலம். (அனைத்து பிரிவு இடைவெளிகளும் சமமான அகலம் கொண்டவை எனக்கருதப்படுகிறது)

$$\frac{n}{2} = \mathbf{26.5}, l = 60, cf = 22, f = 7, h = 10$$

ஆகிய மதிப்புகளை சூத்திரத்தில் பிரதியிடுவதனால் நமக்கு

$$\text{இடைநிலை அளவு} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{7}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

= 66.4 எனக் கிடைக்கும்.

ஆகவே, பாதி எண்ணிக்கையிலான மாணவர்கள் **66.4** - ஐ விட குறைவாகவும், மீதிபாதி மாணவர்கள் **66.4** ஐ விட அதிகமாகவும் மதிப்பெண்களை எடுத்துள்ளனர்.

**எடுத்துக் காட்டு *7* :** ஒரு பள்ளியில் பத்தாம் வகுப்பில் படிக்கும் **51** மாணவிகளின் உயரம் (செமீட்டரில்) ஒரு கணக்கெடுப்பின் போது கீழ்வருமாறு கிடைத்தது. இடைநிலை உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| உயரம் (cm இல்) | மாணவிகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 140 ஐ விட குறைவான | 4 |
| 145 ஐ விட குறைவான | 11 |
| 150 ஐ விட குறைவான | 29 |
| 155 ஐ விட குறைவான | 40 |
| 160 ஐ விட குறைவான | 46 |
| 165 ஐ விட குறைவான | 51 |

**தீர்வு :** இடை நிலை உயரத்தைக் கண்டு பிடிக்க, நமக்கு பிரிவு இடைவெளிகள் மற்றும் அவற்றின் ஒத்த நிகழ்வெண்கள் தேவை.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலானது குறைவு வகையைச்சார்ந்தது. 140, 145, 150, ..... 165 என்பன பிரிவு இடைவெளிகளின் ஒத்த மேல் எல்லைகள் ஆகும். எனவே, பிரிவுகள் 140 க்கு கீழ், 140-145, 145-150, .... 160-165 ஆக இருக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட பரவலில், 4 மாணவிகளின் உயரம் 140 க்கு கீழே உள்ளன என்பதை கவனி. அதாவது 140 க்கு கீழ் என்னும் பிரிவின் நிகழ்வெண் 4 ஆகும். 11 மாணவிகள் 145 விட குறைந்த உயரம் உள்ளவர்கள் மற்றும் 4 மாணவிகள் 140 விடக் குறைந்த உயரம் உள்ளவர்கள். எனவே, 140-145 என்ற பிரிவில் உள்ள மாணவிகளின் எண்ணிக்கை 11-4=7 ஆகும். அதேபோல், 14-150 என்ற பிரிவின் நிகழ்வெண் = 29-11=18, 150-155 க்கு 40-29=11, ....

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட குவிவு நிகழ்வெண்பரவலானது, கீழ்கண்ட அட்டவணையைப் போல் ஆகிறது.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**அட்டவணை 13.16**

| பிரிவு இடைவெளி | நிகழ்வெண் | குவிவு நிகழ்வெண் |
|---|---|---|
| 140 க்கு கீழ் | 4 | 4 |
| 140-145 க்கு கீழ் | 7 | 11 |
| 145-150 க்கு கீழ் | 18 | 29 |
| 150-155 க்கு கீழ் | 11 | 40 |
| 155-160 க்கு கீழ் | 6 | 46 |
| 160-165 க்கு கீழ் | 5 | 51 |

இனி n = 51, எனவே, $\therefore \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

இந்த மதிப்பானது 145-150 என்ற பிரிவில் உள்ளது.

$l$ (கீழ் எல்லை) = 145,

c $f$ (145-150 க்கு முந்தைய பிரிவின் நிகழ்வெண்) = 11

$f$ (இடைநிலை அளவு பிரிவின் 145-150 நிகழ்வெண்) = 18

$h$ (பிரிவின் அகலம்) = 5

சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி,

இடைநிலை அளவு = $l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$

இடைநிலை அளவு = $145 + \left[\frac{25.5 - 11}{18}\right] \times 5$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

எனவே, மாணவிகளின் இடைநிலை உயரம் 149.03 செமீ ஆகும்.

ஆகவே, வகுப்பில் உள்ள 50% மாணவிகள் 149.03 செமீ - ஐ விட அதிகம் உயரமானவர்களாகளாகவும், மீதி 50% மாணவிகள் இதை விட குறைந்த உயரமானவர்கள் என்றும் பொருள் படும்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

எடுத்துக் காட்டு 8 : கீழ்வரும் விவரங்களின் இடை நிலை அளவு 525. மொத்த நிகழ்வெண் 100 ஆக இருப்பின், $x$ மற்றும் $y$ இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

| பிரிவு இடைவெளி | நிகழ்வெண் |
|---|---|
| 0-100 | 2 |
| 100-200 | 5 |
| 200-300 | $x$ |
| 300-400 | 12 |
| 400-500 | 17 |
| 500-600 | 20 |
| 600-700 | $y$ |
| 700-800 | 9 |
| 800-900 | 7 |
| 900-1000 | 4 |

**தீர்வு :**

| பிரிவு இடைவெளி | நிகழ்வெண் | குவிவு நிகழ்வெண் |
|---|---|---|
| 0-100 | 2 | 2 |
| 100-200 | 5 | 7 |
| 200-300 | $x$ | $7 + x$ |
| 300-400 | 12 | $19 + x$ |
| 400-500 | 17 | $36 + x$ |
| 500-600 | 20 | $56 + x$ |
| 600-700 | $y$ | $56 + x + y$ |
| 700-800 | 9 | $65 + x + y$ |
| 800-900 | 7 | $72 + x + y$ |
| 900-1000 | 4 | $76 + x + y$ |

$n = 100$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $76 + x + y = 100$ அதாவது $x + y = 24$ ...............(1)

இடைநிலை அளவு 525. இது 500-600 என்ற பிரிவில் உள்ளது.

ஆகவே, $l = 500$, $f = 20$, $c\,f = 36 +$, $h = 100$

சூத்திரத்தின்படி,

இடைநிலை அளவு $= l + \left[\dfrac{\frac{n}{2} - c\,f}{f}\right] \times h,$

$$525 = 500 + \left[\frac{50 - 36 - x}{20}\right] \times 100$$

ஆகவே, $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$x = 9$$

ஆகவே, (1) இல் இருந்து $9 + y = 24$

$$y = 15$$

இப்போது நீங்கள் அனைத்து வகையான மையப்போக்கு அளவைகளைப் பற்றி கற்றுள்ளீர்கள். இனி, குறிப்பிட்ட தேவைக்கேற்ப எந்த அளவையை தேர்ந்தெடுப்பது என்பதை இனி கலந்தாராய்வோம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

சராசரி என்பதே மிகுந்த நிகழ்வுகளில், (அடிக்கடி) பயன்படுத்தப்படும் மையப்போக்கு அளவையாகும். ஏனெனில், இது எல்லா மதிப்புகளையும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்கிறது மற்றும் எக்கச்சக்கங்களுக்கு இடையே அமைகிறது, அதாவது மொத்த மதிப்புகளிலும் மிக அதிகமான மற்றும் மிகச் சிறியதான மதிப்பு களுக்கும் இடையே அமைகிறது. இது இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேலான பரவல்களை ஒப்பிட்டு பார்க்கவும் உதவுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, குறிப்பிட்ட தேர்வு ஒன்றில் இரு பள்ளிகளைச் சே ர்ந்த மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம், நாம் எந்த பள்ளியைச் சேர்ந்த மாணவர்களப் நன்கு படிக்கிறார்கள் என்பதை முடிவு செய்யலாம்.

இருப்பினும், எக்கச்சக்கமான மதிப்புகள் சராசரியை பாதிக்கும், எடுத்துக்காட்டாக, பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்கள் இட்டத்தட்ட ஒரே போல இருந்தால், அதன் சராசரியானது விவரங்களை சரியாக பிரதிபலிக்கும் ஆனால், ஒரு பிரிவின் நிகழ்வெண் 2 என்றும், மற்ற 5 பிரிவுகள் 20, 25, 20, 21, 18 என்ற நிகழ்வெண்களைக் கொண்டிருப்பின், சராசரியானது விவங்களை சரியாக பிரதிபலிக்காது. எனவே, இவ்வாறான சந்தர்பத்தில், சராசரி என்பது விவங்களின் நல்ல பிரதிநிதி அல்ல.

எக்கணக்குகளில், பிரத்தியேக (தனித்தனி) மதிப்புகள் முக்கியமில்லையோ, மற்றும் நமக்கு தேவை கொடுக்கப்ட்ட மதிப்புகளின் இயல்பு மாறா எடுத்துக்காட்டான ஒரு மதிப்பு எனில் அக்கணக்குகளில் இடைநிலை அளவே தகுந்த மையப்போக்கு அளவையாகும். எடுத்துக் காட்டாக, தொழிலாளிகளின் இயல்பான ஆக்கத்திறன், ஒரு நாட்டின் சராசரி ஊதியம் ஆகியன போன்றவை. இவை உச்சகட்ட மதிப்புகளை உடைய சந்தர்பங்களாகவும் இருக்கலாம். எனவே, சராசரியைக் காட்டிலும், இடைநிலை அளவையே நல்ல மேயப்போக்கு அளவையாக நாம் எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

சில சமயங்களில், நமக்கு அடிக்கடி நிகழும் நிகழ்வோ அல்லது மிகப்பிரபலமான பொருளோ நிலை நிறுத்தவேண்டிய அவசியம் ஏற்படும் போது, நாம் முகடு என்பதையே பயன்படுத்துவோம். எடுத்துக்காட்டாக, மிகப்பிரபலமாக பார்க்கப்படும் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சி எது என்று கண்டுபிடித்தல், மிக அதிகமான தேவைப்பாடு கொண்ட நூகர்பொருள், மக்களில் பலரால் பயன்படுத்தப்படும் வாகனத்தின் வண்ணம் போன்றவை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## குறிப்பு :

1. மூன்று மையப்போக்கு அளவைகளுக்கு இடையேயும் பட்டறிவு தொடர்பு உள்ளது, அது 3 இடைநிலை அளவு = முகடு + 2 சராசரி என்பதே.
2. வெவ்வேறு நீளங்களைக் கொண்ட பிரிவு இடைவெளிகளுடைய வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கும் கூட இடைநிலையை கண்டு பிடிக்க முடியும். இருந்தாலும் அதை இங்கு நாம் கற்கப்போவது இல்லை.

### பயிற்சி 13.3

1. ஒரு வட்டாரத்தில் இருக்கும் 68 நுகர்வோர் நுகர்ந்த மின்சாரத்தின் நிகழ்வெண்பரவல் கீழ்வருமாறு உள்ளது. இடைநிலை அளவு, சராசரி மற்றும் முகடு ஆகியவற்றை கண்டு பிடித்து அவற்றை ஒப்பிட்டுப்பார்க்கவும்.

| மாதாந்திர நூகர்வு (அலகுகளில்) | வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 65-85 | 4 |
| 85-105 | 5 |
| 105-125 | 13 |
| 125-145 | 20 |
| 145-165 | 14 |
| 165-185 | 8 |
| 185-205 | 4 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. கீழ்வரும் பரவலின் இடைநிலை அளவு 28.5 எனில், $x$ மற்றும் $y$ இவற்றைக் கண்டுபிடி.

| பிரிவு இடைவெளி | நிகழ்வெண் |
|---|---|
| 0-10 | 5 |
| 10-20 | $x$ |
| 20-30 | 20 |
| 30-40 | 15 |
| 40-50 | $y$ |
| 50-65 | 5 |
| மொத்தம் | 60 |

3. ஆயுட்காப்பீட்டு முகவர் ஒருவர் 100 ஈட்டுறுதி ஆவணம் உடைமையாளர்களின் (Policy holders) வயதுகளின் விவரத்தின் பரவலைக் கண்டார். 18 வயது முகல் 60 வயதுக்கு கீழ் உள்ளவர்களுக்கு மட்டுமே ஆவணம் வழங்கப்பட்டுள்ளது எனில், இடைநிலை வயதைக் கண்டுபிடி.

| வயது (ஆண்டுகளில்) | ஆவண உடைமையார்களின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 20 க்கு குறைவான | 2 |
| 25 க்கு குறைவான | 6 |
| 30 க்கு குறைவான | 24 |
| 35 க்கு குறைவான | 45 |
| 40 க்கு குறைவான | 78 |
| 45 க்கு குறைவான | 89 |
| 50 க்கு குறைவான | 92 |
| 55 க்கு குறைவான | 98 |
| 60 க்கு குறைவான | 100 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. 40 இலைகளின் நீளங்கள் மிக அருகில் இருக்கும் மில்லிமீட்டருக்கு சரியாக அளக்கப்பட்டு, கீழ் வருமாறு அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளது.

| நீளம் (மி.மீட்டரில்) | இலைகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 118-126 | 3 |
| 127-135 | 5 |
| 136-144 | 9 |
| 145-153 | 12 |
| 154-162 | 5 |
| 163-171 | 4 |
| 172-180 | 2 |

இலைகளின் இடைநிலை நிளத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

(குறிப்பு : கொடுத்துள்ள விவரங்களை தொடர்பிரிவுகளாக முதலில் மாற்றிய பிறகே இடைநிலை அளவைக் காண முடியும். ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரமானது தொடர் பிரிவுகளையே ஆதரிக்கிறது. அதனால், பிரிவுகள் 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, .....; 171.5 - 180.5 ஆக மாறுகிறது.)

5. கீழ்கண்ட அட்டவணையானது 400 நியான் விளக்குகளின் ஆயுட்கால பரவலைக் காட்டுகிறது.

| ஆயுட்காலம் (மணிகளில்) | விளக்குகளின் எண்ணிக்கை |
|---|---|
| 1500-2000 | 14 |
| 2000-2500 | 56 |
| 2500-3000 | 60 |
| 3000-3500 | 86 |
| 3500-4000 | 4 |
| 4000-4500 | 62 |
| 4500-5000 | 48 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒரு விளக்கின் இடைநிலை ஆயுட்காலத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

6. தொலைபேசித் தகவல் திரட்டு புத்தகத்தில் (Telephone Directory) இருந்து சமவாய்ப்பு (randomly) முறையில் 100 பெயர்கள் எடுக்கப்பட்டு, அப்பெயர்களில் உள்ள ஆங்கில எழுத்துகளின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு கீழ்வரும் நிகழ்வெண் பரவல் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

| எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை | 1-4 | 4-7 | 7-10 | 10-13 | 13-16 | 16-29 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| பெயர்களின் எண்ணிக்கை | 6 | 30 | 40 | 16 | 4 | 4 |

பெயர்களில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கையின் இடைநிலை அளவைக் காண்க. பெயர்களில் உள்ள எழுதுக்களின் எண்ணிக்கைகளின் சராசரியைக் கண்டுபிடி. மேலும், பெயர்களின் முகவு நீளத்தைக் காண்க.

7. வகுப்பில் உள்ள 30 மாணவர்களின் எடைகளின் பரவல் கீழ்வருமாறு. மாணவர்களின் எடைகளின் இடைநிலையைக் காண்க.

| எடை (கி.கி.மில்) | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 | 60-65 | 65-70 | 70-75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| மாணவர்களின் எண்ணிக்கை | 2 | 3 | 8 | 6 | 6 | 3 | 2 |

## 13.6 தொகுப்பு

இப்பாடத்தில் நீங்கள் கீழ்வரும் கருத்துகளைக் கற்றுள்ளீர்கள்.

1. வகைப் படுத்தப்பட்ட விவரங்களின் சராசரியை,

   (i) நோடி முறையில் $\overline{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) ஊகச் சராசரி முறையில் $\overline{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) படிவிலக்க முறையில் $\overline{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

   பிரிவு மையப்புள்ளியைச் சுற்றியே ஒரு பிரிவின் நிகழ்வெண் அமைந்துள்ளது என்ற ஊகத்தைக் கொண்டு கண்டு பிடிக்கலாம்.

2. வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களின் முகடை,

   முகடு = $l + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$ என்ற

   சூத்திரத்தைக் கொண்டு கண்டு பிடிக்கலாம். இதில் குறிகள் எப்பொழுகும் போலவே பொருள் படும்.

3. ஒரு பிரிவன் குவிவு நிகழ்வெண் என்பது, அதற்கு முந்தைய எல்லா பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களை கூட்டுவதால் கிடைப்பது.

4. வகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் இடைநிலை அளவை

   இடைநிலை அளவு = $l + \left[\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h$ என்ற

   சூத்திரத்தைக் கொண்டு கண்டு பிடிக்கலாம்.

   இதில் குறிகள் எப்பொழுதும் போலவே பொருள் படும்.

**வாசகர்களுக்கு ஒரு குறிப்பு**

வகுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு முகடு மற்றும் இடைநிலை இவற்றைக் கண்டுபிடிக்க, சூத்திரங்களை பயன் படுத்துவதற்கு முன்பு, பிரிவு இடைவெளிகள் தொடர்ச்சியானதாக உள்ளவை என்பதை உறுதி செய்து கொள்ள வேண்டும். இதே நிபந்தனை, ஒஜீவ் - ஐ அமைப்பதற்கும் பொருந்தும். மேலும், ஒஜீவ்களைப் பொருத்தமட்டில், இரு அச்சுகளிலும் ஒரே மாதிரியான அலகுகள் இருக்க வேண்டியது அவசியம் இல்லை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# நிகழ்தகவு

## PROBABILITY

P8I1U4

**14**

***The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.***

***R.S. Woodward***

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 14.1 நிகழ்தகவு - ஒரு கோட்பாட்டு அணுகுமுறை.

கீழ்வரும் சந்தர்பத்தைக் கவனி :

சமவாய்ப்பு முறையில் நாணயம் ஒன்று சுண்டப் படுகிறது என வைத்துக் கொள்.

> நாணயம் என்று சொல்லும் போது, நாம் அது நியாயமான ஒன்றாக இருப்பதாக ஊகிக்கிறோம். அதாவது, சமச்சீராக இருப்பதாகவும் அதனால், ஒரு முகம் மற்றொரு முகத்தைவிட அதிக முறைகள் வராதபடி இருப்பதாதவும் ஊகிக்கிறோம். நாணயத்தின் இப்பண்பை ’பாரபட்சமற்ற’ தாக நாம் அழைக்கிறோம். ‘சமவாய்ப்புச் சுண்டுதல்’ என்பதன் மூலம் நாம் நாணயத்தை எந்த பாரபட்சமும் அல்லது குறுக்கீடும் இல்லாமல் சுதந்திரமாக விழ அனுமதிக்கிறோம் என்று பொருள் படுகிறது.

நாணயமானது, இரு சாத்தியமான வழிகளான தலை மேல்முகமாகவோ அல்லது பூ மேல்முகமாகவோ, இவற்றில் ஏதேனும் ஒரு வழியில் மட்டுமே விழ முடியும் என்பதை நாம் முன்னமே அறிவோம். (அது தன் விளிம்பின் மீது விழுவதற்கான சாத்தியக்கூறை நாம் நீக்கி விடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, மணலில் நாணயம் விழும்பொது இது சாத்தியமே). தலை விழுதல் மற்றும் பூ விழுதல் இவை இரண்டு முடிவுகளுமே, நிகழ்வுதற்கான சம வாய்ப்பு கொண்டவை என்பதை நாம் நன்றாக ஊகித்துக் கொள்ளமுடியும். இதையே நாம், தலை விழுதல்

மற்றும் பூவிழதல் ஆகிய முடிவுகள் சம வாய்ப்பு கொண்டவை என குறிப்பிடுகிறோம்.

சமவாய்ப்பு முடிவுகளுக்கு இன்னுமொரு எடுத்துக்காட்டாக, பகடையை ஒரு முறை உருட்டலாம். நம்மைப் பொருத்த வரையில், பகடை என்பது ஒரு நல்ல நியாயமான (சீரான) பகடை என்றே கொள்வோம், வருவதற்கு சாத்தியமான முடிவுகள் யாவை? அவை **1, 2, 3, 4, 5, 6** ஆகும். ஒவ்வொரு எண்ணும் மேல்முகமாக வருவதற்கான ச ாத்தியக் கூறுகள் சமமானவையே ஆகும். இவ்வாறாக ஒரு பகடையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் சமவாய்ப்பு முடிவுகளானவை **1, 2, 3, 4, 5** மற்றும் **6** ஆகும்.

ஒரு பை **4** சிவப்பு பந்துகளையும், **1** நீல பந்தையும் கொண்டுள்ளது எனக்கொள். பைக்குள்ளே பார்க்காமல் நீ ஒரு பந்தை வெளியே எடுக்கிறாய் எனக் கொள்வோம். இதன் முடிவுகள் என்னவாக இருக்கும்? ஒரு சிவப்பு பந்து மற்றும் ஒரு நீலப்பந்து எடுப்பதற்கான (முடிவுக்கான) வாய்ப்புகள் சமமானதா? பைக்குள் **4** சிவப்பு பந்துகளும், **1** நீலப்பந்தும் இருப்பதால் சிவப்பு பந்து எடுப்பதற்கான வாய்ப்புகள் அதிகம் என்பதை நீ ஒப்புக்கெள்வாய். முடிவுகள் (சிவப்புபந்து அல்லது நீலப்பந்து) சமவாய்ப்பு கொண்டவை அல்ல. இருப்பினும், பையில் இருந்து ஏதோ ஒரு வண்ண பந்தை எடுப்பதான முடிவுகள் 'சமவாய்ப்பு' உள்ளவை. இவ்வாறாக, எல்லா சோதனைகளுமே சமவாய்ப்பு கொண்ட முடிவுகளை உடையன வாகவே இருக்க வேண்டும் என்று அவசியம் இல்லை.

இருப்பினும், இப்பாடத்தில், இனி மேற்கொண்டு 'எல்லா சோதனைகளுமே சம வாய்ப்பு உடைய முடிவுகளைத் தருவன' என்று ஊதித்துக் கொள்வோம்.

வகுப்பு IX - இல், ஒரு நிகழ்ச்சி E இன் சோதனை அல்லது பட்டறிவு நிகழ்தகவை

$$P(E)=\frac{\text{நிகழ்ச்சி நடந்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{முயற்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

என வறையறுத்துள்ளோம்.

பட்டறிவு நிகழ்தவானது சோதனையுடன் தொடர்புடைய ஒவ்வாரு நிகழ்ச்சிக்கும் பயன்படுத்த முடியும். சோதனைகள் மிகப்பலமுறை திரும்பத்திரும்ப செய்துபார்க்கப்பட வேண்டும். இவ்வாறு பலமுறை

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

செய்துபார்க்கபட வேண்டும் என்பது சில குறைபாடுகளை கொண்டுள்ளது. பல சந்தர்பங்களில் இது மிக்க பணச் செலவு கொண்டதாகவும் இருக்கலாம், அல்லது பலமுறை செய்ய முடியாததாகவும் இருக்கலாம். பல முறை திரும்பதிரும்ப செய்வது சாத்தியம். ஆனால், செயற்க்கைக் கோள் விண்ணில் செலுத்துதல் (அதன் தோல்விக்கான வாய்ப்பின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடிக்க) போன்றவை, பலமாடிக் கட்டிடம் நில நடுக்கத்தின் போது சேதமடையும் நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு என்ன என்பதை காணும் சோதனை போன்றவற்றிக்கு இம்முறை பயன்படாது.

சில சோதனைகளின்போது நாம் சில உகங்களை மேற்கொள்ளத் தயாராகும்போது, அச்சோதனையை திரும்ப திரும்ப செய்யும் பணி தவிர்க்கப் படுகிறது. இந்த ஊகங்களானவை நமந்கு துல்லியமான (கோட்பாட்டு) நிகழ்தகவை நேரடியாக கணிப்பதில் உதவுகிறது. 'சமவாய்ப்பு முடிவுகள்' எண்ற ஒரு ஊகமானது நமக்கு ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை வரையறுப்பதில் உதவுகிறது. (நாணயங்களை சுண்டுதல், பகடைஉருட்டுதல் போன்ற மேலே கூறப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளைப் போன்ற பல சோதனைகளில் இந்த ஊகம் செய்யப்பட்டுளது போல).

E என்ற நிகழ்ச்சிக்கான கோட்பாட்டு நிகழ்தகவு (தொன்மை நிகழ்தகவு என்றும் அழைக்கப்படும்)

$$P(E) = \frac{\text{E க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் எல்லா சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

என்று வறையறுக்கப் படுகிறது. இதில், சோதனையின் எல்லா முடிவுகளுமே சமவாய்ப்பு உடையன என்றே கொள்ளப் படுகிறது.

இந்த வறையறையானது பியரி சிமொன் லாப்லாஸ் (Pierre Simon Laplace) என்பவரால் 1795 இல் கொடுக்கப்பட்டது.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிகழ்தகவு கோட்பாடானது₹ 16 ஆம் நூற்றான்டில், இத்தாலிய இயர்பியல் மற்றும் கணித மேதையான J. கார்டேன் (J. Carden)என்பவர் இந்த விஷயத்தின் மீது 'The Book on Games of Chance' என்ற புத்தகத்தை எழுதிய போதே தொடங்கியது. தொடக்கத்தில் இருந்தே, நிகழ்தகவின் ஆய்வு பல பிரபல கணித மேதைகளின் ஆய்வு பல பரபல கணிதமேதைகளின் கவனத்தை ஈர்த்தது. James Bernoulli (1654-1705). A. de Moivre (1667-1754) மற்றும் Pierve Simon Laplace ஆகியவர்கள் இத்துரையில் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் பங்களித்துள்ளனர். நிகழ்தகவு கோட்பாட்டிற்கு, லாப்லாஸ் 1812 இல் இயற்றிய 'Theorie Analytique Probabilities' என்பதே ஒரு தனி மனிதரால் ஆன மிகப்பெரிய பங்களிப்பாகக் கருதப்பருகிறது. அண்மையில் சில ஆண்டுகளாகவே, நிகழ்தகவு என்பது, உயரியல், பொருளாதரவியல், மரபியல், இயர்பியல், சமூகவியல் போன்ற இன்னும் பல துறைகளிலும் வெகுவாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது.

சமவாய்ப்பு ஊகம் செல்லுபடி ஆகும் சில சோதனைகள் தொடர்பான சில நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவை கண்டுபிடிக்கலாம்.

**எடுத்துக் காட்டு 1 :** ஒரு நாணயம் சுண்டப்படும் போது, தலை விழுவதரற்கான நிகழ்தகவு என்ன என்று கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் பூவிழுவதற்கான நிகழ்தகவையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

**தீர்வு :** நாணயத்தை ஒருமுறை சுண்டும் சோதனையில் சாத்தியமான முடிவுகள் இரண்டே - தலை (Head H) மற்றும் பூ (Tail T). E என்பது 'தலை மேல்முகமாக விழும் நிகழ்ச்சி' எனலாம். E க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை 1 தான். ஆகவே,

$$P(E)=\frac{\text{E-க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{எல்லா சாத்தியக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை}}=\frac{1}{2}$$

இவ்வாறே, F என்பது 'பூ மேல்முகமாக விழும்' நிகழச்சி எனில்,

$$P(F) = P\ (\text{பூ}) = \frac{1}{2}\ (\text{ஏன்?})$$

**எடுத்துக் காட்டு 2 :** ஒரு பையில், ஒரேபோன்ற அளவுகளைக் கொண்ட சிவப்பு பந்து ஒன்று, நீல பந்து ஒன்று மற்றும் மஞ்சள் பந்து ஒன்று ஆகியவை உள்ளன, கிருத்திகா, பைக்குள் பார்க்காமல், ஒரு பந்தை

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

வெளியே எடுக்கிறாள், அவள் கீழ்வருமாறு எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

(i) மஞ்சள் பந்து (ii) சிவப்பு மஞ்து (iii) நீல பந்து.

**தீர்வு :** பைக்குள் பார்க்காமலேயே கிருத்திகா, ஒரு பந்தை வெளியே எடுக்கிறாள், மூன்றில் ஏதேனும் ஒரு பந்தே எடுக்கிறாள் என்பது சமவாய்ப்பு உடையது.

(i) Y என்பது 'எடுக்கப்பட்ட பந்து மஞ்சள்' ஆக இருக்கும்' நிகழ்ச்சி என்க, B என்பது 'எடுக்கப்பட்டது நீலப்பந்து' என்ற நிகழ்ச்சி என்க, R என்பது 'எடுக்கப்பட்டது சிவப்புபந்து' என்ற நிகழ்ச்சி என்க.

இப்போது சாத்தியக்கூறான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 3

(i) Y நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 1

எனவே, $P(Y) = \frac{1}{3}$

அதேபோல், (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ மற்றும் (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

## குறிப்புகள் :

(1) ஒரே ஒரு சோதனை முடிவை மட்டுமே கொண்ட நிகழ்ச்சி அடிப்படை நிகழ்ச்சி (elementary event) எனப்படும். எடுக்குக்காட்டு *1* இல், E மற்றும் F ஆகிய இரண்டு நிகழச்சிகளுமே அதேபோல, எடுத்துக்காட்டு *2* இல், Y, R ஆகிய மூன்று நிகழ்ச்சிகளுமே.

(2) எடுத்துக்காட்டு *1* இல், P(E) + P(F) = 1என்பதைக் கவனிக்கவும். எடுத்துக்காட்டு *2* இல், P(Y) + P(R) + P(B) = 1 என்பதைக் கவனிக்கவும். எல்லா அடிப்படை நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலானது *1* ஆகும் என்பதைக் கவனி. இது பொதுவாகவே மெய் ஆகும்.

**எடுத்துக் காட்டு *3* :** பகடை ஒருமுறை உருட்டப்படுகிறது எனக்கொள்க (i) 4 - ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (ii) 4 - ஐ விட சிறிய எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :** (i) இங்கே, E என்பது 4 - ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி' என்க. சாத்தியமான முடிவுகளானவை ஆறு அதாவது 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகியன மற்றும் E க்கு சாதகமான முடிவுகள் *5* மற்றும் *6* ஆகும். ஆகவே, E க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை *2* ஆகவே,

$$P(E) = P\ (4\text{ - விடப் பெரிய எண்}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) F என்பது '4 அல்லது 4 - ஐவிடச் சிறிய எண்' என்க.

சாத்தியமான முடிவுகள் = 6

F என்ற நிகழச்சிக்கு சாதகமான முடிவுகள் 1, 2, 3, 4 எனவே, F க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை 4.

ஆகவே, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

E மற்றும் F ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் அடிப்படை நிகழ்ச்சிகளா ? இல்லை, ஏனெனில், E க்கு 2 முடிவுகள் மற்றும் F க்கு 4 முடிவுகள் உள்ளன.

## குறிப்புகள் :

எடுத்துக்காட்டு 1 இல்,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

என்பதைக் குறிக்கவும். இதில் E என்பது 'தலை விழும்' நிகழ்ச்சி மற்றும் F என்பது 'பூ விழும்' நிகழ்ச்சி ஆகும். எடுத்துக்காட்டு 3 இன் (i) மற்றும் (ii) இல் ₹இருந்து

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

E என்பது 4 < பெரிய எண்பெறும் நிகழ்ச்சி மற்றும் F என்பது 4 அல்லது 4 - ஐ விடச் சிறிய எண் பெறும் நகழ்ச்சி ஆகும்.

'4 - ஐ விட பெரியது அல்லாத எண்பெறுவது' என்பது '4 - அல்லது 4 - ஐ விடச்சிறிய எண் பெறுவது என்பதற்கு சமம் மற்றும் நிலையெதிர் மாறானதும் சமம் (Vise Versa).

மேலே உள்ள (1) மற்றும் (2) இல், 'F' என்பது 'E' அல்லாதது' என்பதற்கு சமமில்லையா? ஆம்.

'E அல்லாத' என்ற நிகழ்ச்சியை $\overline{E}$ என்று நாம் குறிக்கிறோம்.

எனவே, P (E) + P (E அல்லாத) =1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அதாவது, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ இது

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ என்பதைக்கொடுக்கிறது.

பொதுவாக, E என்ற நிகழ்ச்சிக்கு,

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ என்பது உண்மையே.

'E அல்லத' என்பதைக் குறிக்கும் $\overline{E}$ என்ற நிகழ்ச்சியானது, E என்ற நிகழ்ச்சியை நிரப்பும் நிகழச்சி யாகும். மேலும் E மற்றும் $\overline{E}$ ஆகியன நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.

மேலே தொடர்வதற்கு முன்னால், நாம் கீழ்வரும் கேள்விகளுக்கு விடைகாண முயற்ச்சிக்கலாம்.

(i) ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும் போது, 8 என்ற எண் கிடைப்பதற்க்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) ஒரு முறை ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 7 என்ற எண்ணைவிடக் குறைவான எண்ணைப் பொறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(i) **க்கு விடை காணலாம் :** ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டுவதில் நமக்கு கிடைக்கும் முடிவுகளின் சாத்தியக் கூறுகள் ஆறே. அவை 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 ஆகும். பகடையின் எந்த முகப்பரப்பிலும் 8 என்ற எண் குறிக்கப்படாததால், சாதகமான முடிவு 8 ஆக இருக்கவே முடியாது. அதாவது, இத்தகைய முடிவுகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் (சுழி) ஆகும். அதாவது ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும் போது 8 என்ற எண் கிடைப்பது என்பது இயலாதது.

ஆகவே, $P(8 \text{ கிடைப்பது}) = \frac{0}{6} = 0$

அதாவது, நடக்க இயலாத நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு 0 ஆகும். இவ்வாறான ஒரு நிகழ்ச்சியே இயலா நிகழ்ச்சி (impossible event) எனப்படும்.

**(ii) க்கு விடை காணலாம் :**

பகடையின் ஒவ்வொரு முகப்பரப்பும் 7-ஐ விட சிறிய எண்ணால் குறிக்கப்பட்டது என்பதால், அதை உருட்டும் போது 7-ஐ விடச் சிறிய எண்ணே கிடைக்கும் என்பது உறுதி. ஆகவே, எல்லா சாத்தியக் கூறுமுடிவுகளின் எண்ணிக்கையும் சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமே அதாவது 6.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆகவே, P(E) = P (7-ஐ விடச் சிறிய எண் கிடைத்தல்)

$$= \frac{6}{6} = 1$$

எனவே, உறுதியான நிகழ்ச்சியின் (sure or certain event) நிகழ்தகவு 1 ஆகும். இத்தகைய நிகழ்ச்சி (sure event) உறுதி நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது.

**குறிப்பு :** நிகழ்தகவு P(E) யின் வரையறையின் படி, தொகுதியானது (நிகழ்ச்சி E - க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை) எப்பொழுதுமே பகுதி (எல்லா சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை) ஐ விட குறைவானதாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கும் ஆகவே.

$$\mathbf{O \leq P(E) \leq 1}$$

இனி, சீட்டுக்கட்டு தொடர்பான எடுத்துக்காட்டு ஒன்றைக்காணலாம். சீட்டு விடையாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் சீட்டுக்கட்டை பார்த்திருக்கிராயா? அது 52 சீட்டுகளை உடையது. அவை தொகுதிக்கு 13- ஆக நான்கு தொகுதிகளாகப்பிரிக்கப்பட்டு உள்ளது. அவை ஸ்பேடு (spade ♠), ஹார்ட் (hearts ♥) டைமண்டு (diamond ♦) மற்றும் க்லப் (clubs ♣). க்லப் மற்றும் ஸ்பேடு ஆகியவை கருப்பு நிறத்தையும் ஹார்ட் மற்றும் டைமண்டு சிவப்பு நிறத்தையும் கொண்டுள்ளவை. ஒவ்வொரு தொகுதியிலும் ஏஸ் (ace), ராஜா (king), ராணி (queen), ஜாக் (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 மற்றும் 2 ஆகிய 13 சிட்டுகள் உள்ளன. இவற்றில், ராஜா, ராணி மற்றும் ஜாக் என்பன முகச்சீட்டுகள் (face cards) எனப்படும்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

**எடுத்துக் காட்டு 4 :** 52 சீட்டுகளின் கட்டில் இருந்து, நன்கு குலுக்கப்பட்ட பிறகு ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்பட்ட சீட்டானது கீழ்வருமாறு இருத்தலின் நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) அது ஒரு ஏஸ் (ace) (ii) அது ஏஸ் அல்ல.

**தீர்வு :** சீட்டுகளை நன்டு குலுக்குதல் சமவாய்ப்பை உறுதி செய்கிறது.

(i) கட்டில் 4 ஏஸ்கள் உள்ளன. E என்பது 'எடுத்தசீட்டு ஒரு எஸ்' என்ற நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கட்டும். E க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 4

சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 52 (ஏன் ?)

ஆகவே, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) F என்பது 'எடுத்த சிட்டு ஏஸ் அல்ல' என்ற நிகழ்ச்சியை குறிக்கட்டும்.
F என்ற நிகழ்ச்சிக்கான சாதகமான முடிவுகளின்
எண்ணிக்கை = 52-4=48 (ஏன்?)
சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 52
எனவே, $P(E) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

**குறிப்பு :** F என்பது $\overline{E}$ என்பதே என்பதைக் கவனிக்கவும். ஆகவே, நாம் கீழ்வரும் வழியிலும் P(F) ஐக் கணிக்கலாம் :

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

**எடுத்துக் காட்டு 5 :** சங்கீதா மற்றும் ரேஷ்மா ஆகிய இருவர் டென்னில் ஆட்டம் ஆடுகின்றனர். சங்கீதா ஆட்டத்தில் வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.62 என்பது அறிந்ததே. ரேஷ்மா வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :** = S என்பது சங்கீதா ஆட்டத்தில் வெற்றிபெறுதலையும், R என்பது ரேஷ்மா வெற்றி பெறுதலையும் குறிக்கட்டும்.
சங்கீதாவின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு = P(S) = 0.62
(கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)
ரேஷ்மாவின் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு = P(R) = 1 - P (S)
(நிகழ்ச்சிகள் R மற்று S ஆனவை நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்)

= 1-0.62 = 0.38

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**எடுத்துக் காட்டு 6 :** சவிதா மற்றும் ஹமீதா இருவரும் தோழிகள். அவர்கள் இருவரும் (i) வெவ்வேறு பிறந்தநாள் (ii) ஒரே பிநந்த நாள் கொண்டவர்கள் என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (நெட்டாண்டைத் தவிற்கவும்).

**தீர்வு :** இருவரில் ஒருத்தி, சவிதா வின் பிறந்தநாள் வருடத்தின் எந்த நாளிலும் இருக்கலாம். அதேபோல, ஹமீதாவின் பிறந்தநாளும் 365 நாட்களில் ஏதோ ஒரு நாளில் இருக்கலாம்.
365 முடிவுகளும் சம வாய்ப்பு கொண்டவை என ஊகிக்கலாம்.

(i) ஹமீதாவின் பிறந்தநாள் சவிதாவின் பிறந்தநாள் அல்லாத வேறு தினமாக இருந்தால், அவளது பிறந்நாளின் சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை 365 - 1 = 364.

ஆகவே, P (ஹமீதாவின் பிறந்தநாள்,

சவிதாவின் பிறந்தநாள் அல்லாத வேறு நாள்) = $\frac{364}{365}$

(ii) P (சவிதா மற்றும் ஹமீதா இருவரின் பிறந்த நாளும் ஒன்றே)

$= 1 -$ P (வெவ்வேறு பிறந்த நாட்கள்)

$= 1 - \frac{364}{365}$ $(P(E) = 1 - P(E)$ என்பதைப் பயன்படுத்தி)

$= \frac{1}{365}$

**எடுத்துக் காட்டு 7 :** 40 பேர் உள்ள X - ஆம் வகுப்பில் 25 மாணவிகள் மற்றும் 15 மாணவர்கள். அதில் ஒருவரைத் தலைவராக தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். ஆசிரியர் அனைத்து மாணவர் பெயரையும் ஒரே மாதிரியான தனித்தனிச்சீட்டில் எழுதி, ஒரு பெரிய பையில் போட்டு நன்கு குலுக்கினார். பிறகு ஒரு சீட்டை அதிலிருந்து எடுத்தார். அச்சீட்டில் எழுதப்பட்ட பெயர் ஒரு (i) பெண்ணின் பெயர் (ii) ஆணின் பெயர் ஆக இருப்பதற்தான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடி.

**தீர்வு :** 40 மாணவர்கள் உள்ளனர். அதில் ஒரே ஒருவரின் பெயர்ச்சீட்டை மட்டுமே தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

(i) அனைத்து சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை 40. ஒரு பெண்ணின் பெயர் உள்ள சீட்டை எடுப்பதற்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 25 (ஏன்?)

ஆகவே, P (பெண்ணின் பெயர் உள்ள சீட்டு) = P (பெண்) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) ஒரு ஆணின் பெயர் உள்ள சீட்டை எடுப்பதற்கான சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 15 (என் ?)

ஆகவே, P (ஆணின் பெயர் உள்ள சீட்டு) = P (ஆண்) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

**குறிப்பு :** P (ஆண்) என்பதை, நாம்

P (ஆண்) = 1 - P (ஆண் அல்ல)

= 1 - P (பெண்) = $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

என்ற வழியிலும் காணலாம்.

***எடுத்துக் காட்டு 8 :*** ஒரு டப்பாவில் 3 நீலம், 2 வெள்ளை மற்றும் 4 சிவப்பு கோலிக்குண்டுகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு (Random) முறையில் ஒரு கோலி குண்டு எடுக்கப்படுமாயின் அது

(i) வெள்ளை (ii) நீலம் (iii) சிவப்பு

இவை ஒவ்வொன்றாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

***தீர்வு :*** சமவாய்ப்பு முறையில் (Random) எடுப்பது என்பது அனைத்து கோலிகுண்டுகளும் எடுக்கப்படுவதற்கான சமவாய்ப்பைக் கொண்டவை என்றே பொருள்படும். ஆகவே,

சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 3 + 2+ 4= 9 (ஏன்?)

எடுக்கப்பட்டதில், W என்பது 'கோலிகுண்டு வெள்ளை' என்ற நிகழ்ச்சியையும், R என்பது 'கோலிகுண்டு சிவப்பு' என்ற நிகழ்ச்சியையும், B என்பது 'கோலிகுண்டு நீலம்' என்ற நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கட்டும்.

(i) நிகழ்ச்சி W விற்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 2

ஆகவே, $P(W) = \frac{2}{9}$

(ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ மற்றும் (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

$P(W) + P(B) + P(R) = 1$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

***எடுத்துக் காட்டு 9 :*** இரு நாணயங்களை (ஒன்று ₹1 நாணயம் மற்றொன்று ₹2 நாணயம் எனக் கொள்க). ஒரே சமயத்தில் ஹர்பீத் என்பவள் சுண்டினாள். அவளுக்கு குறைந்தது (குறைந்த பட்சமாக/atleast) ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

***தீர்வு :*** தலை மேல் முகமாக விழுவததை H என்றும் பூ மேல் முகமாக விழுவதே T என்றும் எழுதலாம். இரு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது, சாத்தியமான முடிவுகள் (H, H), (H, T), (T, H) (T, T) ஆகியவை ஆகும். இவை அனைத்துமே சம வாய்ப்பு கொண்ட முடிவுகள்தான். இங்கே, (H, H) என்பது முதல் நாணயத்தில் (₹1 எனக் கொள்வோம்)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தலை மேல் முகமாகவும் மற்றும் இரண்டாம் நாணயத்தில் (₹2 எனக் கொள்வோம்) தலை மேல் முகமாகவும் விழுதல் என்று பொருள் படும். அதேபோல, (H, T) என்பது முதல் நாணயத்தில் தலை மேல் முகமாகவும் இரண்டாம் நாணயத்தில் பூ மேல் முகமாகவும் விழதலைக் குறிக்கும். இதேபோல மற்ற முடிவுகளுக்கும் நாம் குறித்துக் கொள்ளலாம்.

நிகழ்ச்சி E 'குறைந்தது ஒரு தலையாவது கிடைத்தல்' - இதற்கு சாதகமான முடிவுகளானைவ (H, H), (H, T) மற்றும் (T, H) ஆகியன (ஏன்?)

ஆக, நிகழ்ச்சி E - க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை 3

ஆகவே, $P(E) = \frac{3}{4}$

அதாவது, ஹர்பீத்திற்கு குறைந்தது ஒரு தலையாவது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{3}{4}$ ஆகும்.

**குறிப்பு :** P(E) - ஐ கீழ்கண்ட முறையிலும் நீங்கள் கண்டுபிடிக்கலாம் :

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$(P(\overline{E}) = P$ (தலை அல்லாத) $= \frac{1}{4}$ என்பதால்)

இதுவரையில் நாம் பார்த்த அனைத்து எடுத்துக்காட்டுகளிலும் ஒன்றைக் கவனித்தீர்களா? ஒவ்வொரு சோதனையிலும் சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை வரம்புக்கு உட்பட்டதாக (Finite) அதாவது எண்ணிலடங்காததாக இல்லாமல் உள்ளது. உண்மையா இல்லையா என்பதை நீங்களே சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

பல சோதனைகளில், முடிவுகள் கொடுக்கப்பட்ட இரு எண்களுக்கு இடையே அமைந்த எந்த எண்ணாக வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம், அல்லது முடிவுகள் ஒரு வட்டத்திற்கு அல்லது செவ்வகதத்திற்கு உள்ளே அமைந்த எந்தப் புள்ளிகளாக வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். இந்தகைய சோதனைகளில், சாத்தியமான எல்லா முடிவுகளையும் நம்மால் எண்ண முடியுமா? நம்மால் இது இயலாது என்பது நாம் நன்கு அறிந்ததே. எண்களுக்கு இடையே எண்ணிலடங்காத அளவு எண்கள் உள்ளன. அதேபேல, வட்டத்திற்கு உள்ளே எண்ணிலடங்தாத புள்ளிகள்

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அமைந்துள்ளன. ஆகவே, இதுவரையில் நாம் கற்ற (கோட்பாட்டு) நிகழ்தகவுக்கான வரையறையை அப்படியே இங்கு செயல்முறைப்படுத்த முடியாது. அப்படியெனில் வேறு என்ன செய்யலாம்? இதற்கு பதிலளிப்பதற்கு, கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டினைக்காணலாம்.

**எடுத்துக் காட்டு *10** :*** மியூசிகல் சேர் (musical chair) விளையாட்டில், இசை வாசிப்பாளர், இசை வாசிக்க ஆரம்பித்த இரண்டு நிமிடங்களுக்குள் எந்த நேரத்தில் வேண்டுமானாலும் இசையை நிறுத்தலாம் என அறிவுருத்தப்பட்டிருந்தார். இசை தொடங்கியதில் இருந்து முதல் அரை நிமிட நேரத்தில் இசை நிறுத்தப்படும் என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

**தீர்வு :** இங்கே, சாத்தியமான முடிவுகள் என்பன 0 மற்றும் 2 க்கு இடையே உள்ள எல்லா எண்களும் ஆகும். இது எண்கோட்டின் மீது 0 க்கும் 2 க்கும் இடையே உள்ள பகுதி யாகும்.

***படம் 14.1***

'முதல் அரை நிமிடங்களுக்குள் இசை நிறுத்தப்படுகிறது' என்ற நிகழ்ச்சியை E எனலாம்.

E - க்கு சாதகமான முடிவுகளானவே, எண்கோட்டின் மீது 0 மற்றும் $\frac{1}{2}$ க்கு இடையே உள்ள புள்ளிகள். 0 க்கும் 2 க்கும் இடையே உள்ள தூரம் 2. அதேபோல், 0 க்கும் $\frac{1}{2}$ க்கும் இடையே உள்ள தூரம் $\frac{1}{2}$ எனலாம்.

---

*தேர்வுக் கண்ணோட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்டது அல்ல.

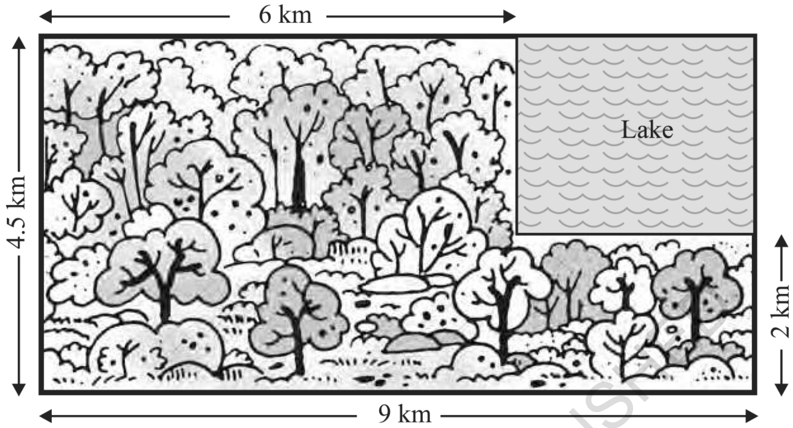
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எல்லா முடிவுகளுமே சமவாய்ப்பு உடையன என்பதால், மொத்த தூரம் என்பது 2 என்றும் சாதகமான தூரம் என்பது $\frac{1}{2}$ என்றும் வாதிக்கலாம்.

ஆகவே, $P(E) = \dfrac{\text{நிகழச்சி E க்கு சாதகமான தூரம்}}{\text{முடிவுகள் அமைந்திருக்கும் மொத்த தூரம்}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

எடுத்துக் காட்டு *10* இல் கையாண்ட யுக்தியையே, மொத்த பரப்பில் சாதகமான பரப்பின் வீதத்திற்கான நிகழ்தகனவக் கண்டு பிடிப்பகற்கு நீட்டிக்கலாமா?

**எடுத்துக் காட்டு 11* :** காணாமல் போன ஹெலிகாப்டர் ஒன்று, படம் **14.2** இல் காட்டியுள்ள செவ்வகப் பகுதியில் விழுந்து விட்டதாக தகவல் அறிவிக்கப்படுகிறது. அந்த ஹெலிகாப்டர் படத்தில் இருக்கும் ஏரி பகுதியில் விழுந்து விட்டதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?




படம் **14.2**

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

**தீர்வு :** ஹெலிகாப்டர் எங்கு வேண்டுமானாலும் விழலாம் என்பது சமவாயப்பு நிகழ்ச்சி.

ஹெலிகாப்டர் விழுந்து உடைவதற்கான வாய்ப்பு மொத்தமாக உள்ள பகுதியின் பரப்பளவு = $(4.5 \times 9)\ km^2 = 40.5\ km^2$

ஏரியின் பரப்பளவு = $(2.5 \times 3)\ km^2 = 7.5\ km^2$

ஆகவே, P (ஏரியில் ஹெலிகாப்டர் விழுந்து இருத்தல்) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

---

*தேர்வுக் கண்ணோட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்டது அல்ல.

**எடுத்துக் காட்டு 12 :** ஒரு அட்டைப் பெட்டியில் 100 சட்டைகள் உள்ளன. அவற்றில் 88 நல்ல சட்டைகள், 8 சிறு குறைகளையும், 4 பெரிய அளவில் குறைகளையும் கொண்டுள்ளன. ஜிம்மி என்ற வியாபாரி, நல்ல சட்டைகளை மட்டுமே ஏற்றுக் கொள்வார் ஆனால் சுஜாதா என்ற மற்றொரு வியாபாரி, பெரிய அளவில் குறைகளை உடைய சட்டைகளை மட்டும் நிராகரித்து விடுவார். சமவாய்ப்பு சோதனையில் (Random) ஒரு சட்டை மட்டும் பெட்டியில் இருந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில் அச்ச ட்டையை

(i) ஜிம்மி ஏற்றுக் கொள்வார்?

(ii) சுஜாதா ஏற்றுக்கொள்வார்?

இவைகளுக்கான நிகழ்தகவேக் கண்டுபிடிக்கவும்.

***தீர்வு :*** 100 சட்டைகள் உள்ள பெட்டியில் இருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் 1 சட்டை எடுக்கப்படுகிறது. ஆகவே, 100 சமவாய்ப்பு உள்ள முடிவுகள் உள்ளன.

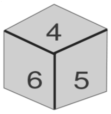
(i) ஜிம்மி (அதாவது ஏற்றுக்கொள்வதற்கு) க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 88 (ஏன்)
ஆகவே, P (ஜிம்மி சட்டையை ஏற்றுக்கொள்வதற்கு) = $\frac{88}{100}$ = 0.88

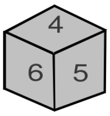
(ii) சுஜாதாவிற்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = 88 + 8 = 96 (ஏன்?)
ஆகவே, P (சுஜாதா சட்டையை ஏற்றுக்கொள்வதற்கு) = $\frac{96}{100}$ = 0.96

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

***எடுத்துக் காட்டு 13 :*** இரு பகடைகள், நீல நிறம் ஒன்று, மற்றொன்று சாம்பல் நிறம். இரண்டும் ஒரே சமயத்தில் உருட்டப்படுகின்றன. சாத்தியமான முடிவுகள் அனைத்தையும் எழுதுக. இரு பகடைகளின் மேல் முகங்களில் தோன்றும் எண்களின் கூடுதலின் மதிப்பு (i) 8 (ii) 13 (iii) 12 க்கு சமம் அல்லது குறைவு, இவைகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

***தீர்வு :*** நீல பகடையின் மேல் முகத்தில் 1 தெரியும் போது, சாம்பல் பகடையின் மேல் முகத்தில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 இவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு எண் வர வாய்ப்பு உள்ளது. நீல பகடை மேல் முகத்தில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகியன தோன்றும் போதும் மேற்கூறிய உண்மை பொருந்தும். சாத்தியமான முடிவுகள் அனைத்தும் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளன; வரிசைப் படுத்தப்பட்ட ஜோடிகளில், முதல் எண் நீலப்பகடையின் மீது மேல் தோன்றும் எண்ணையும், இரண்டாம் எண் சாம்பல் பகடையின் மீது மேல் தோன்றும் எண்ணையும் குறிக்கின்றன.




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

படம் **14.3**

ஜோடி (*1, 4*) என்பது (*4, 1*) இல் இருந்து மாறுபட்டது (வேறுபட்டது) என்பதைக் கவனிக்கவும். (ஏன்?)

ஆகவே,

சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = $6 \times 6 = 36$

(i) 'இரண்டு எண்களின் கூடுதல் *8*' என்ற நிகழச்சியை E எனக் குறிப்போம். அதற்கு சாதகமான முடிவுகள் (2,6) (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) ஆகியவை. அதாவது, நிகழச்சதி E - க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை = *5*

ஆகவே, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) படம் **14.3** ஐ பார்க்கையில், F என்ற நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான முடிவுகளே இல்லை. அதாவது 'இரு எண்களின் கூடுதல் **13**' என்றவாறு எந்த முடிவுமே இல்லை.

ஆகவே, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) படம் **14.3** இல் நாம் பார்க்கும் பொழுது, 'இரு எண்களின் கூடுதல் $\leq 12$' என்ற நிகழ்ச்சி G- க்கு, எல்லா முடிவுகளுமே சாதகமானவை.

ஆகவே, $P(F) = \frac{36}{36} = 1$

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

## பயிற்சி 14.1

**1.** கீழ்வரும் வாக்கியங்களை பூர்த்தி செய்க :

(i) E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு + 'E அல்ல' என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு = ________

(ii) நிகழ முடியாத நிகழச்சியின் நிகழ்தகவு ________ . அத்தகையதொரு நிகழச்சி ________ எனப்படும்.

(iii) நிச்சயமாக நிகழ்த்தக்க தொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ________ . இத்தகையதொரு நிகழ்ச்சி ________ எனப்படும்.

(iv) ஒரு சோதனையின் அனைத்து அடிப்படை நிகழச்சிகளின் நிகழ்தவுகளின் கூடுதலானது ________.

(v) ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ________ க்கு சமம் அல்லது அதைவிட அதிகம் மற்றும் ________ க்கு சமம் அல்லது அதைவிட குறைவு.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**2.** கீழ்காணும் சோதனைகளில் எவை சமவாய்ப்பு முடிவுகளைக் கொண்டவை ? விவரிக்கவும்.

(i) வாகன ஒட்டுனர் வண்டியை தொடங்க (start) செய்ய முயற்சி க்கிறார். வண்டி தொடங்குதிறது அல்லது தொடங்குவதில்லை.

(ii) ஒரு கூடைப்பந்து ஆட்டக்காரர் பந்தை கூடைக்குள் போட முயற்ச்சிக்கிறார். அவர் கூடைக்குள் போடுகிறார் அல்லது தவறவிடுகிறார்.

(iii) 'சரியா - தவறா' கேள்வி ஒன்றுக்கு விடையளிக்க முயற்சி செய்யப் படுகிறது. விடை சரி அல்லது தவறு.

(iv) ஒரு குழந்தை பிறக்கிறது. அது ஆண் அல்லது பெண்.

**3.** கால் பந்து விளையாட்டின் தொடக்கத்தில் எந்த அணிக்கு முதலில் பந்து கொடுக்கப்படவேண்டும் என்பது ஒரு நாணயத்தை சுண்டி நிர்ணயிக்கப்படுவது நியாயமான முறையே என்று ஏன் கருதப்படுகிறது ?

**4.** கீழ்வருவனவற்றுள் எவை ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. P(E) = 0.05 எனில், 'E அல்ல' நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு என்ன?

6. ஒரு யையில் எலுமிச்சை நறுமணச்சுவை கொண்ட மிட்டாய்கள் மட்டுமே உள்ளன. மாலினி பைக்குள் பார்க்காமல் ஒரு மிட்டாயை வெளியை எடுக்கிறாள், அவள் எடுத்த மிட்டாய்
(i) ஆரஞ்சு நருமணச்சுவை கொண்டது
(ii) எலுமிச்சை நறுமணச்சுவை கொண்டது

இதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

7. 3 மாணவர்களின் குழுவில், 2 மாணவர்கள் ஒரே பிறந்தநாள் கொண்டிருக்காதற்கான நிகழ்தகவு 0.992 ஆகும். 2 மாணவர்கள் ஒரே பிறந்தநாளைக்கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

8. ஒரு பையில் 3 சிவப்பு பந்துகளும் 5 கருப்பு பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் (random) ஒரு பந்து பையில் இருந்து எடுக்கப் படுகிறது. அப்பந்து (i) சிவப்பு ஆகவும் (ii) சிவப்பு அல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

9. ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு, 8 வெள்ளை மற்றும் 4 பச்சை கோலிகுண்டுகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் (random) ஒரு கோலிகுண்டு வெளியே எடுக்கப்படுகிறது. கீழ்வரும் நிகழ்தகவு களைக் காண்க:

எடுக்கப்பட்ட குண்டு, (i) சிவப்பு? (ii) வெள்ளை (iii) பச்சை அல்ல

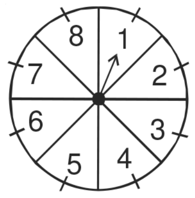
10. பன்றியின் வடிவில் இருக்கும் சேமிப்பு (piggy bank) உண்டியல் ஒன்றில், நூறு 50 பைசா நாணயங்களும் ஐம்பது ₹ 1 நாணயங்களும், இருபது ₹ 2 நாணயங்களும் மற்றும் பந்து ₹ 5 நாணயங்களும் உள்ளன. உண்டியலைக் குப்புறக் கவிழத்தும் போது ஒரு நாணயம் வெளியே விழந்து விட சமவாய்ப்பு உள்ளது எனில், வெளியே விழும் நாணயம். (i) 50 யைசா நாணயம் (ii) ₹ 5 நாணயம் அல்ல இவற்றுக்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடிக்கவும்?

11. கோபி தனது மீன்தொட்டிக்கு ஒரு மீனை கடையில் இருந்து வாங்குகிறான். கடைக்காரி, 5 ஆண் மீன் மற்றும் 8 பெண் மீன் உள்ள தொட்டியில் இருந்து ஒரு மீனை சமவாய்ப்பு முறையில் எடுத்துத் தருகிறார். அது ஆண் மீனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

படம் 14.4

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

**12.** வாய்ப்பு விளையாட்டு (game of chance) ஒன்றில், சுழற்றப்படும் அம்பு 1,2,3,4,5,6,7 (படத்தைப் பார்) ஆகியவற்றில் ஏதோ ஒரு எண்ணில் நிலைக்கிறது. மற்றும் இவையாவும் சமவாய்ப்பு உடையவைவே.



படம் 14.5

அம்பு (i) 8 ஐ காட்டுதல்

(ii) ஒரு ஒற்றை எண்ணைக் காட்டுதல்

(iii) 2 - ஐக் காட்டிலும் பெரிய எண்ணைக்காட்டுதல்

(iv) 9 - ஐ விடச் சிறிய எண்ணைக் காட்டுதல்

ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

**13.** பகடை ஒன்று ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. அதன் மேல்முகத்தில்,

(i) ஒரு பகா எண் (ii) 2 க்கும் 6 க்கும் இடையே உள்ள எண்

(iii) ஒரு ஒற்றை எண்

வருதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

**14.** நன்கு கலைத்து அடுக்கிய 52 சிட்டுகளைக் கொண்ட கட்டிலிருந்து 1 சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. பின்வருவனவற்றிகான நிகழ்தகவைக் காண்க. எடுத்த சீட்டு,

(i) சிவப்பு வண்ணம் கொண்ட ராஜா

(ii) ஒரு முகச் சீட்டு (iii) ஒரு சிவப்பு முகச் சிட்டு

(iv) ஹார்ட்ஸ் இன் ஜாக் (v) ஒரு ஸ்பேடு

(vi) டைமண்டின் ராணி

**15.** நன்கு கலைத்து முகப்பக்கம் மேலே தெரியாதபடி ஐந்து சீட்டுகள் - பத்து, ஜாக், ராணி, ராஜா மற்றும் எஸ் ஆகிய டைமண்டு சீட்டுகள் அடுக்கப்பட்டு உள்ளன. ஒரு சீட்டு சம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது.

(i) அச்சீட்டு ராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) ராணிசீட்டை எடுத்து தூரவைத்து பிறகு இரண்டாவதாக ஒரு சீட்டை எடுக்கும்போது, அது (a) ஒரு ஏஸ் (b) ஒரு ராணி, இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

**16.** (i) குறைபாடுகள் உள்ள பேனாக்கள் 12, நல்ல 132 பேனாக்களுடன் தவறுதலாக சேர்க்கப்பட்டுவிட்டன. பேனாவை வெறும் கண்ணால் பார்த்து குறைபாடுகள் உடையதா எனக் கூறிவிட முடியாது. இக்குவியலில் இருந்து ஒரு பேனா சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்பட்ட பேனா நல்ல பேனாவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

7. (i) 20 பல்புகளின் தொகுப்பு ஒன்றில் 4 குறைபாடு உள்ள பல்புகள் கலந்துள்ளன. இத்தொகுப்பில் இருந்து ஒரு பல்பு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்பட்ட பல்பு குறைபாடுகள் கொண்டது என்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) கணக்கு (i) இல் எடுக்கப்பட்ட பல்பானது குறைபாடுகள் இல்லாத பல்பு எனவும் அது மறுபடியும் தொகுப்பில் சேர்க்கப்படவில்லை எனவும் கொள்வோம். இப்போது மீதியுள்ள பல்புகளில் இருந்து ஒரு பல்பு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. இந்தபல்பானது குறைபாடுகள் ஏதும் இல்லாத ஒன்று என்பதற்கான நிகழதகவு என்ன?

18. ஒரு பெட்டியில் 90 வட்டத்தகடுகள், 1 முதல் 90 வரை எண் பொறிக்கப்பட்டு உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒன்று அதில் இருந்து எடுக்கப்படுமேயாயின், அது

(i) இரண்டு இலக்க எண்

(ii) ஒரு நிரைவாக்க எண் முழுமையா

(iii) 5 ஆல் வகுபடும் எண் இவைகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

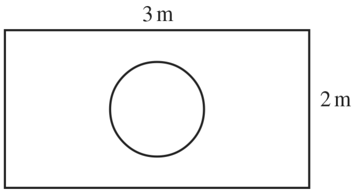
19. ஒரு குழந்தையிடம் உள்ள பகடை ஒன்றில் முகங்களின் மீது கீழ்வரும் எடுத்துக்கள் உள்ளன :

| A | B | C | D | E | A |
|---|---|---|---|---|---|

அப்பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. கீழ்வருவனவற்றிகான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடி.

(i) A ?  (ii) D ?

20.* படம் 14.6 இல் காட்டியுள்ள செவ்வக பகுதியில் ஒரு பகடை சமவாய்ப்பு முறையில் உருட்டப்படுகிறது. அப்பகடை, விட்டம் 1மீ. கொண்ட வட்டத்திற்குள் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?




படம் 14.6

*தேர்வுக் கண்ணோட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்டது அல்ல.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

**21.** **144** பந்து முனை பேனா (Ball Pens) களின் தொகுதியில் **20** பேனாக்கள் குறைபாடுகள் கொண்டவை மற்றவை நல்லவை. நூரி என்பவள் நல்லதாக இருக்கும் பேனாவை மட்டுமே வாங்குவாள், நல்லது அல்லாததை வாங்கமாட்டள். கடைக்காரர் ஒரு பேனாவை சமவாய்ப்பு முறையில் எடுத்துக் கொடுக்கிறார்.

(i) அவள் அதை வாங்குவாள் (ii)அவள் அதை வாங்க மாட்டாள் இவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

**22.** எடுத்துக்காட்டு **13** - ஐ கருதவும். (i) கீழ்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக:

| நிகழ்ச்சி : இரு பகடைகளின் கூடுதல் | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்தகவு | $\frac{1}{36}$ | | | | | | $\frac{5}{36}$ | | | | $\frac{1}{36}$ |

(ii) இதில் **11** சாத்தியமான முடிவுகள் 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 மற்றும் **12** ஆகியன உள்ளன. ஆகவே, இவற்றில் ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவும் **1/11** ஆகும் என ஒரு மாணவன் வாதாடுகிறான். இந்த வாத்ததை ஒப்புக்கொள்கிறாயா? உனது விடையை நியாயப்படுத்து.

**23.** ஒரு விளையாட்டில். ₹ **1** நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது மற்றும் அதன் முடிவுகள் குறிக்கப்படுகின்றன. மூன்று முறையும் குறிக்கப்படுகின்றன. மூன்று முறையும் ஒரே முடிவை அடைந்தால் அதாவது **3** முறை தலை அல்லது **3** முறையும் பூ கிடைத்தால், ஹனிப் வென்றதாகவும் இல்லா விடில் தோற்றதாகவும் கருதப்படுகிறது. ஹனிப் ஆட்டத்தில் தோற்றார் என்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணிக்கவும்.

**24.** ஒரு பகடை இரண்டு முறை உருட்டப்படுகிறது.

(i) இரண்டு முறைகளிலும் **5** மேல் முகமாக வராது

(ii) குறைந்தது ஒரு முறையேனும் **5** மேல்முகமாக வரும் இவற்றிக்கான நிகழ்தகவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(குறிப்பு : பகடையை இருமுறை உருட்டுதலும், இரண்டு வெவ்வேறு பகடைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டுதலும் இவ்விரு சோதனைகளுமே ஒரே சோதனையாகக் கருதப்படுகின்றன.)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

25. கீழ்வரும் வாதங்களில் எது சரி மற்றும் எது தவறு? உங்கள் விடைகளுக்கான காரணங்களைக் கொடுக்கவும்.

(i) இருநாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படும்போது, மூன்று சாத்தியமான முடிவுகள் வரலாம் - இரண்டு தலைகள், 2 பூக்கள் அல்லது இவ்விரண்டிலும் ஒவ்வொன்று. ஆகவே, இந்த மூன்று முடிவுகளில் ஒவ்வொன்றிற்குமான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது, இரண்டு சாத்தியமான முடிவுகள் வரலாம் - ஒரு ஒற்றை எண் அல்லது ஒரு இரட்டை எண். ஆகவே, ஒற்றை எண்ணைப் பெறுவற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

## 14.2 தொகுப்பு

### இப்படப்பகுதில், நீங்கள் கீழ்வரும் கருத்துகளைக் கற்றிருக்கிறீர்கள் :

1. பட்டறிவு நிகழ்தகவு மற்றும் கோட்பாட்டு நிகழ்தகவு இவற்றின் இடையேயான வேறுபாடு.

2. E என்ற நிகழ்ச்சிக்கான கோட்பாட்டு நிகழ்தகவு

P(E) யானது,

$$P(E) = \frac{\text{E என்ற நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் எல்லா சாத்தியமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

3. உறுதி நிகழ்ச்சி (Sure event) - யின் நகழ்தகவு 1.

4. இயலா நிகழ்ச்சி (Impossible event) - இன் நிகழ்தகவு 0.

5. E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு P(E) யானது $0 \le P(E) \le 1$ என்றமைந்த வகையில் உள்ள ஒரு எண்ணாகும்.

6. ஒரே ஒரு முடிவைக் கொண்ட நிகழ்ச்சியானது அடிப்படை நிகழ்ச்சி எனப்படும். ஒரு சோதனையின் எல்லா அடிப்படை நிகழ்ச்சிகளின் நகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

7. E என்ற எந்த ஒரு நிகழ்ச்சிக்கும், $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ , இதில் $\overline{E}$ என்பது 'E அல்ல' என்பதைக் குறிக்கும். E மற்றும் $\overline{E}$ என்பவை, நிரப்பு நிகழ்ச்சி கள் ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

### வாசகர்களுக்கு ஒரு குறிப்பு

ஒரு நிகழ்ச்சியின் சோதனை அல்லது பட்டறிவு நிகழ்தகவானது, நடைமுறையில் உண்மையில் நடந்ததையே அடிப்படையாகக் கொண்டது ஆனால் ஒரு நிகழ்ச்சியின் கோட்பாட்டு நிகழ்தகவானது, சில ஊகங்களை அடிப்படையாக்க கொண்டு, என்ன நடக்கும் என்பதை கூறமுற்படுவதாகும். சோதனை முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, பட்டறிவு மற்றும் கோட்பாட்டு நிகழ்தகவு இரண்டுமே கிட்டத்தட்ட ஒன்றாகவே இருக்கும் என நாம் எதிர்பார்க்கலாம்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

# கணிதவியல் மாதிரியமைத்தல் A2

## MATHEMATICAL MODELLING

### A2.1 அறிமுகம் :

- ஒரு சராசரி மனிதனின் உடலில் கிட்டத்தட்ட 1,50,000 கி.மீ நிளத்திற்கு இரத்தம் கடத்தும் தமனி மற்றிம் நரம்புகள் உள்ளன.
- மனித இதயம் 60 வினாடிகளுக்கு 5 முதல் 6 லிட்டர் வரை இரத்தத்தை உடலுக்குள் இறைக்கிறது (pump) செய்கிறது.
- சூரியனின் மேல் தளத்தின் வெப்பநிலை கிட்டத்தட்ட $6000^0$C ஆகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இந்த மதிப்புகளை நமது அறிவியல் அறிஞர்கள் மற்றும் கணிதத்துறையினர் எவ்வாறு மதிப்பிட்டுருப்பார்கள் என சிந்தித்தாயா? அவர்கள் இறந்த மனிதர்களின் உடலில் இருந்து ஒவ்வொரு இரத்த நாளங்களையும் பிய்த்து எடுத்து அவற்றின் நீளத்தை அளந்தார்களா? உடலில் இருந்து முழு இரத்தத்தையும் வடித்து எடுத்து அளந்தார்களா? இங்கிருந்து சூரியனுக்கு ஒரு பெப்பமானியைக் கொண்டு சென்று அதன் வெப்பநிலையை அளந்தார்களா? கண்டிப்பாக இல்லை. அப்படியிருக்க, இந்த முடிவுகள் எவ்வாறு அவர்களுக்கு கிடைத்தது?

இதற்கான விடை நமக்கு 9 ஆம் வகுப்பில் அறிமுகப்படுத்தப் பட்ட கணிதவியல் மாதிரியமைத்தல் (mathematic modelling) - இல் கிடைக்கிறது. கணிதவியல் மாதிரியமைத்தல் என்பது சில அன்றாட நிகழ்ச்சிகளின் கணிதவியல் விளக்கம் ஆகும். கணிதவியல் மாதிரியமைத்தல் என்பது ஒரு பிரச்சனைக்கான கணிதவியல் மாதிரியை உறுவாக்குதல், மற்றும் அதனை தீர் ஆராய்ந்து பிரச்சனைக்கு தீர்வைக் காணல் என்பதே என்பதை நினைவு கூர்க.

கணித மாதிரியில், நாம், நிஜ வாழ்வில் சந்திக்கும் ஒரு பிரச்சனையை எடுத்துக் கொண்டு அதை அதற்கு சமமான தொரு (கணிதவியல்) கணக்காக மாற்றுகிறோம். பிறகு அக்கணக்கை தீர்த்து அதன் முடிவை நிஜ வாழ்க்கை பிரச்சனையின் மீது ஆய்வு செய்கிறோம். மேலும் நமக்கு

இதன் மூலம் கிடைத்த தீர்வானது சூழ்நிலைக்கு பொருள் படுகிறதா என்று சரிபார்பது அதாவது கணக்கியல் மாதிரியைச் சரிபார்த்தல் என்றதோரு முக்கியமான படிநிலை ஆகும். கணிதவியல் மாதிரிகள் மிக முக்கியமான பங்கு வகிக்கின்றன என்பதற்கான சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

(i) ஒரு நதியில் அடியில் சென்றடைய முடியாத ஒரு இடத்தில் அதன் அகலம் மற்றும் ஆழம் ஆகியவற்றை கண்டு பிடித்தல்.

(ii) பூமி மற்றும் இதர கோள்களின் எடையை மதிப்பிடுதல்.

(iii) பூமி மற்று இதர கோள்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை மதிப்பிடுதல்.

(iv) ஒரு நாட்டில் பருவமழை தொடங்கும் காலத்தை முன் மொழிதல்.

(v) பங்குச் சந்தையின் போக்கினை முன்மொழிதல்.

(vi) ஒரு மனிதன் உடலில் உள்ள இரத்தத்தின் கன அளவை மதிப்பிடுதல்.

(vii) ஒரு நகரின் மக்கள் தொகை, 10 ஆண்டுகளுக்கு பிறகு எவ்வளவாக இருக்கும் என்று ஊகம் செய்தல்.

(viii) ஒரு மரத்தில் உள்ள இலைகளின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுதல்.

(ix) ஒரு நகரத்தில் காற்று மண்டலத்தில் காணப்படும் வெவ்வேறு மாசுபடுத்தும் பொருட்களின் ppm (Parts per million) எவ்வளவு என்று மதிப்பிடுதல்.

(x) சுற்றுச் சூழலின் மீது மாசுபடுத்திகளின் விளைவுகள் என்ன என்பதை மதிப்பிடுதல்.

(xi) சூரியனின் புறப்பரப்பின் மீதான வெப்ப நிலையை மதிப்பிடுதல்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்பாடப்பகுதில் நாம், கணிதவியல் மாதிரியின் செயல் முறையை உலகில் நம்மைச் சுற்றி நடக்கும் நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் காட்டாக கொண்டு, மறுபார்வையிடுவோம். பகுதி A2.2 வில் நாம் ஒரு மாதிரியை உறுவாக்குவதில் உள்ள அனைத்து நிலைகளையும் காண்போம். பகுதி A 2.3 இல் நாம் பல்வேறு எடுத்துக் காட்டுகளை ஆலோசிப்போம். பகுதி A 2.4 இல் நாம் கணக்கியல் மாதிரிகளின் முக்கியத்துவத்துக்கான காரணங்களைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

இங்கு நமது முக்கிய நோக்கம் என்ன வென்றால், கணித மாதிரியானது எவ்வாறு நிஜ உலக பிரச்சனைகளைத் தீர்ப்பதில் பயன்படுகிறது என்பதை உங்களுக்கு உணர்த்துவதே. இருப்பினும் அதன் உண்மையான பலத்தை உணர்ந்து பாராட்ட நீங்கள் இன்னும் சில விஷயங்களைக் கற்க வேண்டி

இருக்கும். மேல் வகுப்புகளில் இதற்கான சில எடுத்துக்காட்டுகளை நீங்கள் காணலாம்.

## A 2.2 கணித மாதிரியின் வெவ்வேறு நிலைகள்.

IX வகுப்பில், கணித மாதிரிகளின் பயன்களை பல எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் கருதினோம். அவ்வெடுத்துக்காட்டுகள் உங்களுக்கு, கணித மாதிரிகளின் செயல்முறைகள் மற்றும் அவை சார்ந்த படிநிலைகளின் உள்நோக்கினை கொடுத்துள்ளவைா? கணித மாதிரிகளின் முக்கியமான படிநிலைகளை இங்கு வேகமான ஒரு மறுபார்வை பார்போம்.

***படிநிலை 1 : (பிரச்சனையை புரிந்து கொள்தல்) :***

உண்மையான (சிக்கலை) பிரச்சனையை வரையறுக்கவும். குழுவாக வேலை செய்வதாயின், புரிந்து கொள்ள வேண்டிய கருத்துக்களை கலந்தாராய்ந்து அறியவும். சில ஊகங்களை மேற்கொள்வதன் மூலமாகவும், சில காரணிகளை ஒதுக்குவதன் மூலமாகவும் பிரச்சினையை சமாளிக்கத்த வகையில் சுருக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக, நமது பிரச்சனையானது, ஒரு ஏரியில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுதல் என்று கொள்க. ஏரியில் உள்ள ஒவ்வொரு மீனாகப் பிடித்து அதை எண்ணுவது என்பது சாத்தியமல்ல, ‘மாதிரி’ (Sample) க்கு சில மீன்களைப் பிடித்து, அவற்றில்இருந்து ஏரியில் உள்ள மீன்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிட முயலலாம்.

***படிநிலை 2 : (கணிதவியல் விவரணம் மற்றும் சூத்திரமாக்கல்) :*** மிரச்சனையின் வெவ்வேறு அம்சங்களை கணக்கியல் குறிச் சொற்களைக் கொண்டு விவரிக்கவும். அமைப்புகள்/கூறுகளை கணிதவியலில் விவரிப்பதற்கான சில வழிகளாவை :

- மாறிகளை வரையறுத்தல்.
- சமன்பாடுகள் அல்லது சமனிலிகளை எழுதுதல்.
- விவரங்களை சேகரித்தல் மற்றும் அட்டவனைப் படுத்துதல்.
- வரைபடங்களைத் தயாரித்தல்.
- நிகழ்தகவுகளை கணித்தல்.

***எடுத்துக்காட்டாக :*** ஒரு குறிப்பிட்ட மாதிரி (Sample) யை எடுத்துக்கொண்ட பின், படிநிலை 1 இல் கூறியவாறு, மொத்த மீன்களின் எண்ணிக்கையை எவ்வாறு மதிப்பிடுவது ? பிடிக்கப்பட்ட மாதிரியில் உள்ள மீன்கள் முதலில் குறியிடப்பட வேண்டும். பிறகு அவற்றை ஏரியில் மீதமுள்ள மீன்களுடன் கலந்து விட வேண்டும். பிறகு மீண்டும் ஒரு முறை மாதிரியை

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுக்கவேண்டும். அவற்றில், முன்னமே குறியிடப்பட்ட மீன்கள் எத்தனை உள்ளன என்று கணக்கிட வேண்டும். பிறகு வீதங்களைக் கொண்டு (ratio and proportions) மொத்த மீன்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, ஏரியில் இருந்து 20 மீன்களை 'மாதிரியாக' எடுக்கவும், அவறை குறியிட்ட பிறகு அதே ஏரியில் விடவும். இதனால் அவை மற்ற மீன்களுடன் சேர்ந்து விரும். மற்றொரு முறை 'மாதிரி'யை (50 எனக் கொள்) எடுக்கவும். அவற்றில் முன்னமே குறியிடப்பட்ட மீன்கள் எத்தனை உள்ளன என்று பார்க்கவும். இனி நாம் விரங்களை சேகரித்து ஆராய்வோம்.

நமது முக்கியமான ஊகம் என்னவென்றால், குறியிடப்பட்ட மீன்கள் ஒரே சீரான வகையில் மற்ற மீன்களுடன் கலந்துள்ளன மற்றும் நாம் எடுத்த மாதிரியானது மொத்த மீன்களையும் நன்கு பிரதிநிதிக்கிறது என்பதே ஆகும்.

***படிநிலை 3 (கணக்கியல் பிரச்சனையைத் தீர்த்தல்) :*** படிநிலை 2 இல் உறுவாக்கப்பட்ட கணக்கியல் பிரச்சனை பல்வேறு கணக்கியல் யுக்திகளைக் கையாண்டு தீர்க்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக படிநிலை 2 இல் கூறப்பட்டவாறு, மாதிரியில் 5 மீன்கள் முன்னமே குறியிடப்பட்டவைகள் என்று கொள்வோம். ஆகவே மொத்த மீன்களில், $\frac{5}{50}$ அதாவது $\frac{1}{10}$ ஆனவை குறியிடப்பட்டவை, இதுவே மொத்த மீன்களுக்கும் பொருந்தும் எனில், மொத்த மீன்களில் $\frac{1}{10}$ ஆனது =20. ஆகவே மொத்த மீன்களின் எண்ணிக்கை $= 20 \times 10 = 200$

***படிநிலை 4 : (தீர்வை பகுத்தறிதல்) :*** முந்தைய படிநிலையில் கிடைத்த தீர்வை, படிநிலை 1-இல் நாம் தொடங்கிய நிஜ உலக பிரச்சனையில் பொருத்தும் கண்ணோட்டத்தில் பார்க்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, படிநிலை 3 இல் தீர்வானது மொத்த மீன்களின் எண்ணிக்கை 200 என்பதைத் தருகிறது.

***படிநிலை 5 (மாதிரியை சரிபார்த்தல்) :*** நாம் முதலில் முந்தைய சூழ்நிலைக்கே சென்று, நமது முடிவுகள் அதற்கு ஏதேனும் பொருள் படுகிறதா என்று பார்க்கலாம். அது பொருள் படுமேயாயின், வேறு புது விவரங்கள் கிடைக்கும் வரையிலோ அல்லது ஊகங்கள் மாறுபடும் வரையிலோ, இதே கணக்கியல் மாதிரி (model) ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

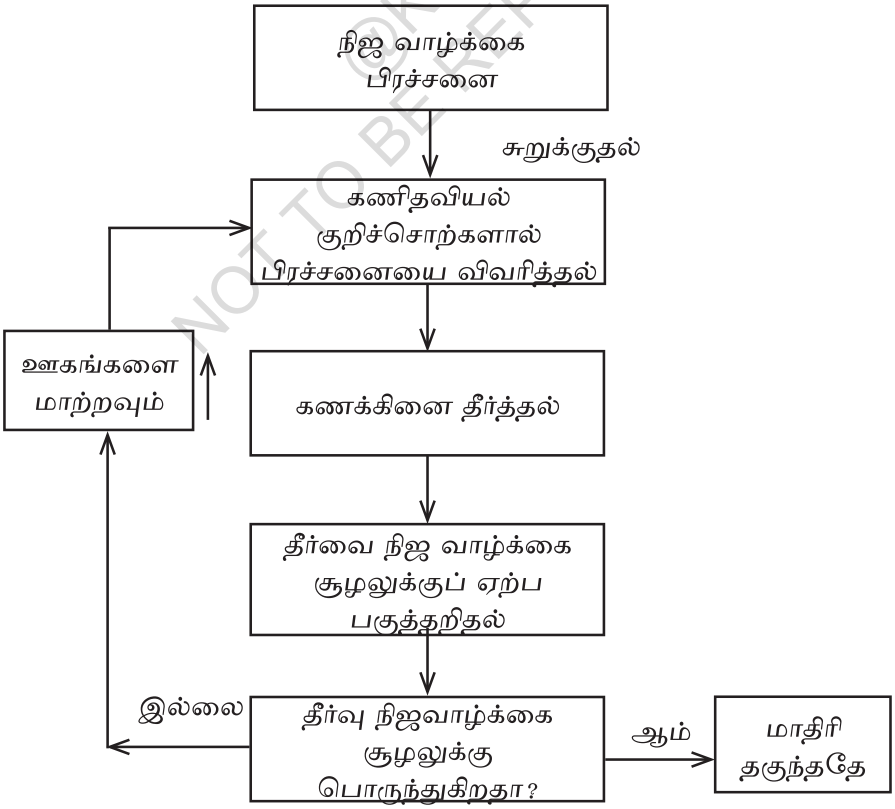
சில சமயங்களில், பிரச்சனையை சுலபமாக்குவதற்காக நாம் மேற்கொள்ளும் ஊகங்களால், நிஜ வாழ்க்கை பிரச்சனைக்கு கணதவியல்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

விவரங்கள் கொடுக்கும் போது சில முக்கியமான அம்சங்களை நாம் இழக்க நேரிடலாம். அத்தகைய சமயங்களில், தீர்வுகள் மாறுபட்டதாகவும், நிஜ வாழ்க்கை சூழலுக்கு பொருள்படாததாகவும் அமையலாம். இவ்வாறு ஏற்படுமேயாயின், மறுபடியும் படிநிலை 1 - க்கு சென்று, நடைமுறைக்கு தகுந்த வாறு மாற்றியமைக்கலாம். முன்பு கருதப்படாத காரணிகளை சேர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, படிநிலை-3 இல் நமக்கு மொத்த மீன்களின் எண்ணிக்கை கிடைத்தது, இது ஏரியில் உண்மையில் இருக்கும் மீன்களின் எண்ணிக்கையாக இல்லாமலும் இருக்கலாம். இந்த எண்ணிக்கையாவை, தகுந்த மதிப்பா என்பதை படிநிலைகள் 2 மற்றும் 3-ஐ இன்னும் சில முறைகள் செய்து பார்த்து, அவற்றின் சராசரியைக் கொண்டு கண்டு பிடிக்கலாம். இது மொத்த மீன்களின் எண்ணிக்கைக்கு முடிந்த வரையில் வெகு அருகாமையில் இருக்கும் தீர்வைக் கொடுக்கும்.

கணிதவியல் மாதிரியாக்கலின் செயல் பாட்டினை வேறு ஒரு வழியில் எண்ணிப்பார்ப்பது படம் A2.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.




**படம் A2.1**

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மாதிரியாளர்கள், தீர்வினை (சுலப மாக்குதல்) எளிமையாக்குதல் மற்றும் துல்லியமாகப் கண்டுபிடித்தல் இவற்றிற்கு இடையே ஒரு சமநிலையையே நோக்குகிறார்கள். அவர்கள் முடிந்தவரையில் நடைமுறைக்கு, (உண்மை பிரச்சினைக்கு) தகுந்தவாறு அமைத்தால் நல்ல முன்னேற்றம் இருக்கும் என்று நம்புகின்றனர். எல்லாவற்றிலும் சிறந்த முடிவு என்பது என்ன நடக்கும் என்பதை முன்மொழிவதையோ அல்லது ஒரு முடிவினை மதிப்பிடுவதையோ மிகத் துல்லியமாக செய்யும். பிரச்சனையை எளிமையாக்குவதற்கு நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் வெவ்வேறு ஊகங்களும் நமக்கு வெவ்வேறு கணக்கியல் மாதிரிகளைக் தரலாம் என்பதை நாம் நினைவில் கொள்ளவேண்டும். ஆகவே ஒரு குறையும் இல்லாத மாதிரி என்று எதுவும் இல்லை. நல்ல கணக்கியல் மாதிரிகளும் உள்ளன. மேலும் அதைவிடச் சிறந்த மாதிரிகளும் உள்ளன.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## பயிற்சி A2.1

1. கீழ்வரும் சூழ்நிலையைக் கருதுக.

13-ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்தில், லியோநார்டோ ஃபிபோநாகி (Leonardo Fibonacci) என்பவரால் கேட்கப்பட்ட இக்கேள்வி இது : இரண்டு முயல்களில் தொடங்கி, அவற்றை இனப்பெருக்கம் செய்யவிட்டால், நம்மிடம் எத்தனை முயல்கள் இருக்கும்?

ஒவ்வொரு ஜோடி முயல்களும் ஒவ்வொரு மாதத்திலும் ஒரு ஜோடி முயல்களைப் போடுகின்றன மற்றும் ஒவ்வொரு ஜோடி முயல்களும் 2 மாதங்கள் வயதை அடைந்த பிறகே குட்டி போடுகின்றன என்று ஊகம் செய்க. ஒவ்வொரு மாதமும், ஜோடி முயல்களின் எண்ணிக்கையானது, அம்மாதத்திற்கு முன்பு உள்ள இரண்டு மாதங்களில் இருந்த முயல்களின் எண்ணிக்கைகளின் கூட்டுத்தொகை ஆகும், 0-வது மாதம் மற்றும் 1-வது மாதம் தவிர்த்து.

| மாதம் | முயல்களின் ஜோடிகள் |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 8 |
| 6 | 13 |
| 7 | 21 |
| 8 | 34 |
| 9 | 55 |
| 10 | 89 |
| 11 | 144 |
| 12 | 233 |
| 13 | 377 |
| 14 | 610 |
| 15 | 987 |
| 16 | 1597 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

*16 மாதங்கள் கழிந்தபின் உங்களிடம் 1600 ஜோடி முயல்கள் உள்ளன! பிரச்சனையைத் தெளிவாகக் கூறவும் மேலும் இச்சூழ்நிலையின் கணிதவியல் மாதிரியின் வெவ்வேறு படிநிலைகளையும் தெளிவுபடுத்தவும்.*

## A2.3 சில விளக்கவுரை எடுத்துக்காட்டுகள்.

இனி கணிதவியல் மாதிரியின் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருதுவோம்.

**எ.கா 1 (ஒரு ஜோடி பகடைகளை உருட்டுதல்) :** உங்கள் ஆசிரியர் உங்களை கீழ்வரும் ஊகிக்கும் ஆட்டத்திற்கு அழைக்கிறார் என்க. அவர் ஒரு ஜோடி பகடையை உருட்டுகிறார். அவர் உருட்டுவதற்கு முன்பே நீங்கள் பகடைகளின் மேல் முகத்தில் வரும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையை ஊகித்து விட வேண்டும். ஒவ்வொரு முறை உங்களுக்கு சரியான விடை கிடைக்கும் போது 2 புள்ளிகளும் தரப்படும். ஒவ்வொரு முறை தவரான விடைக்கும் 2 புள்ளிகள் கழிக்கப்படும். எந்தெந்த எண்கள் சிறந்த ஊகங்களாக இருக்கலாம்?

**தீர்வு :**

**படிநிலை 1 (பிரச்சனையைப் புரிந்து கொள்தல்) :** மேல் முகமாக வருவதற்க்கான வாய்ப்புகளை அதிகமாகக் கொண்ட எண்கள் சிலவற்றை நீங்கள் முதலில் அறிய வேண்டும்.

**படிநிலை 2 (கணிதவியல் விவரணம்) :** பிரச்சனையானது குறியீடுகளில், கூடுதல்களின் பல்வேறு சாத்தியக்கூறுகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிப்பது ஆகும்.

இச்சூழ்நிலையை மிக எளிதாக, கீழ்வரும் 36 ஜோடி எண்களில் ஏதேனும் ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சியாகக் குறிப்பிடுவதன் மூலம் மாதிரியை செய்யலாம்.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1, 1) | (1, 2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ஜோடியில் உள்ள முதல் எண்ணானது முதல் பகடையின் மேல் முகமாக வரும் எண்ணையும், இரண்டாம் எண்ணானது இரண்டாம் பகடையின் மேல் முகமாக வரும் எண்ணையும் குறிக்கிறது.

**படிநிலை 3 (கணக்கினைத் தீர்த்தல்) :** ஒவ்வொரு ஜோடியில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகையின் சாத்தியக்கூறுகள் 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 மற்றும் 12 ஆகும். இவற்றில் 36 ஜோடிகளுமே சமவாய்ப்பு கொண்ட நிகழ்ச்சிகள் என்று ஊகித்து, அவற்றில் ஒவ்வொன்றிற்கான நிகழ்தகவையும் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

இதை கீழ்வரும் அட்டவணையில் செய்வோம்.

| கூட்டுத்தொகை | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்தகவு | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

இதில் 7 என்ற கூட்டுத்தொகை பெருவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{36}$ இதுவே மற்ற எல்லா எண்களையும் விட அதிக வாய்ப்புகள் கொண்டதாக உள்ளது என்பதை கவனிக்கவும்.

**படிநிலை *4* (தீர்வினைப் பகுத்தறிதல்) : *7*** என்ற கூட்டுத்தொகையைப் பெருவதற்கான நிகழ்தகவு மிக அதிகமாக இருப்பதால், நீங்கள் திரும்பத்திரும்ப ஏழையே ஊகித்துச் சொல்ல வேண்டும்.

**படிநிலை 5 (மாதிரியை சரிபார்த்தல்) :** ஒரு ஜோடி பகடைகளை பல முறை உருட்டிப்பார்த்து, முடிவுகளை ஒரு பரவல் அட்டவணைப் படுத்தவும். நிகழ்வெண்களை அவற்றின் நிகழ்தகவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும். முடிவுகள் அருகாமையில் இல்லை எனில், பகடைகள் சீரற்றவைகளாக இருக்கலாம். எந்த எண் வருவதற்கான வாய்ப்புகள் அதிகமாக உள்ளன என்பதற்கான விவரத்தை நாம் அடையலாம்.

அடுத்த எடுத்துக்காட்டிற்குச் செல்லுவதற்கு முன்பு, உங்களுக்குச் சில முன்வரலாறு தேவைப்படலாம்.

தேவைப்படும் போது பணம் கையிருப்பில் இல்லை என்பது பலருக்கு ஏற்படும் அனுபவமே. பணம் அன்றாட வாழ்வில் அத்தியாவசிய பொருள்களை வாங்குவதற்கோ அல்லது சொகுசுக்கான பொருள் வாங்குவதற்கோ ஆயினும் நமக்கு பணம் எப்போதும் தேவைப்படுகிறது. கையிருப்பு பணம் குறைவாக உடைய வாடிக்கையாளர்கள் ஸ்கூட்டர், குளிர்சாதன பெட்டி, டி.வி, கார், போன்றவை வாங்குவதற்காக தவணை முறைத் திட்டம் (instalment scheme) என்பது வியாபாரிகளால் அறிமுகப் படுத்தப் பட்டுள்ளது.

சில சமயங்களில், தங்கள் பொருட்களை வாங்குவதற்கு வணிகர் வாடிக்கையாளர்களை கவர்ந்திழுப்பதற்கு இந்த தவணை முறை திட்டத்தை ஒரு யுக்தியாக (வியாபார தந்திரமாக) பயன்படுத்துகிறார்கள். இத்திட்டத்தின் கீழ், வாடிக்கையாளர்கள் பொருளை வாங்கும் போது அதன் முழு விலையையும் கொடுக்கத் தேவை இல்லை. அவன்/அவள் பொருள் வாங்கும் பொழுது, அதன் மதிப்பில் ஒரு பகுதியை மட்டும் கொடுத்துவிட்டு மீதமுள்ளதை தவணை முறையில் மாதாந்திரமாகவோ, காலாண்டாகவோ, அரையாண்டாகவோ, அல்லது வருடாந்திரமாகவோ கூட கொடுக்கலாம். விற்பனையாளர் பின்னர் செலுத்தப்படும் தொகைக்கு வட்டி விதிப்பதால், வாங்குபவர் சிறிதளவு பணம் அதிகமாகக் கொடுக்க வேண்டி இருக்கும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தவணை முறை திட்டத்தை நன்கு புரிந்து கொள்ள சில எடுத்துக்காட்டுகளை செய்வதற்கு முன்பு, இதில் மிக அதிகமாக அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படும் சிற குறிச்சொற்களை புரிந்து கொள்வோம்.

ரொக்க விலை (cash price) என்பது ஒரு பொருளை வாங்கும்போது, அதற்கான முழு தொகையையும் கொடுக்கப்பட வேண்டிய விலை. முன்பணம் (cash down payment) என்பது பொருளை வாங்கும் போது கொடுக்கப்படும் பகுதி தொகையைக் குறிக்கும்.

**குறிப்பு :** தவணை முறைத் திட்டத்தில், கட்ட வேண்டிய முழுமையான தொகையும் ஒரு வருடத்திற்கு உள்ளே முடிந்து விடுகிற நிலையில், cash down payment - ஐ தவிர உள்ள மீதமுள்ள தொகை (deferred payment) க்கு தனி வட்டியே விதிக்கப்படுகிறது.

கடந்த காலங்களில், கடனாகக் கொடுக்கப்பட்ட தொகையின் மீது வட்டி விதிப்பது ஒரு தீவினை என்று கருதப்பட்டு வந்தது குறிப்பாக, அதற்கு தடைவிதிப்பட்டு இருந்தது, அதனால், வட்டி விதிப்பதை மறைப்பதற்காக, ஒரு செலவாணியில் (currency) கடன் கொடுப்பதும், வேறு செலவாணியில் வட்டி மறைக்கப்பட்டு வாங்கப்படுவதும் சட்டத்தைத் தவர்க்க ஒரு வழியாக இருந்தது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இனி இது தொடர்பான ஒரு கணிதவியல் மாதிரி பிரச்சனையை (கணக்கைப்) பார்ப்போம்.

**எ.கா 2 :** ஜுஹி என்பவருக்கு ஒரு சைக்கிள் (மிதிவண்டி) தேவை. அவர் மார்க்கெட்டிற்கு சென்று சைக்கிள் ₹1800 க்கு கிடைக்கிறது என்று கண்டுபிடித்தாள். ஆனால் அவறிடம் இருப்பதோ ₹600 மட்டுமே. ஆகவே அவர் கடைக்காரரிடம் தன்னால் சைக்கிள் வாங்க முடியாது என்று கூறினார். கடைக்காரர் சிறிது கணிப்புகளைச் செய்த பிறகு பின் வரும் வாய்ப்பினைத் தருகிறார். ஜுஹி ₹600 முன்பணமாக (cash down) செலுத்தி சைக்கிளை வாங்கிக் கொள்லாம். மீதியை மாதத்திற்கு ₹610 வீதம் இரண்டு மாதங்கள் தவணையில் கட்டலாம் என்று அவர் கூறினார்.

அவளிடம் இப்போது இரண்டு பேரங்கள் உள்ளன. ஒன்று அவள் தவணை முறையில் சைக்கிளை வாங்கலாம் மற்றொன்று வங்கியில் இருந்து தனி வட்டி ஆண்டுக்கு 10% வீதம் கடன் வாங்கி அதைக் கொண்டு சைக்கிளின் மொத்த தொகையையும் கட்டி சைக்கிள் வாங்கலாம். இவற்றில் எது அவளுக்கு லாபகரமாக (சிக்கனமாக) அமையும்?

**தீர்வு :**

**படிநிலை 1: (பிரச்சனையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்) :** ஜுஹி முடிவு செய்ய வேண்டியது கடைக்காரரின் பேரத்தை ஏற்றுக் கொள்வதா, வேண்டாமா என்பதே. இதை முடிவு செய்வதற்கு அவளுக்குத் தேவை இருதரப்பினரின் வட்டி வீதம் : தவணைத் திட்டத்தில் ஒன்று ; மற்றொன்று வங்கி விதிக்கும் வட்டி (அதாவது 10%)

**படிநிலை 2 (கணக்கியல் விவரணம்) :** தவனை முறைத்திட்டத்தை ஏற்றுக் கொள்வதா வேண்டாமா என்று முடிவு செய்ய வங்கியை ஒப்பிடுகையில் கடைக்காரர் விதிக்கும் வட்டி வீதம் எவ்வளவு என்பது தெரிய வேண்டும். ஒரு வருட முடிவுக்கு உள்ளாகவே மொத்த பணமும் கட்டப்படுகிறது. என்பதால் தனி வட்டியே கணக்கிடப்படும் என்பதைக் கவனி.

மிதிவண்டியின் ரொக்க விலை = ₹1800 என்பது நமக்குத் தெரியும். மேலும் தவணைத்திட்டத்தில் முன்பணம் = ₹600.

ஆகவே தவணைத்திட்டத்தில் கட்ட வேண்டிய மீதிப் பணம்

= ₹(1800 - 600) = ₹1200

ஆண்டுக்கு $r$ % என்பது கடைக்காரர் விதிக்கும் வட்டி வீதம் என்க.

ஒவ்வொரு மாத தவணை = ₹610

தவணையில் கட்டப்படும் தொகை = ₹610 + = ₹610 = ₹1220

தவணை முறையில கட்டப்படும் வட்டி = ₹1220 - = ₹1220 = ₹ 20

₹1200 ஜுஹி இடம் ஒரு மாதம் இருந்தது என்றால்,

முதல் மாதத்திற்கான அசல் = ₹1200

இரண்டாம் மாதத்திற்கான அசல் = ₹(1200 - 610) = ₹590

இரண்டாம் மாத அசலில் மீதி ₹590 + அதற்கான வட்டி( ₹20) = மாதத் தவணை = ₹610 இரண்டாம் மாதத் தவணை

ஆகவே, ஒரு மாதத்திற்கான மொத்த அசல் ₹1200 + ₹590 = ₹1790

இனி வட்டி = ₹ $\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

**படிநிலை 3 : (கணக்கை தீர்த்தல்) :** (1) மற்றும் (2) இல் இருந்து,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

அல்லது $r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14$ (தோராயமாக)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

***படிநிலை 4 (தீர்வினை பகுத்தறிதல்) :*** தவணை முறை திட்டத்தில் விதிக்கப்படும் வட்டி வீதம் = ₹13.14%

வங்கியால் விதிக்கப்படும் வட்டி வீதம் = 10 %

ஆகவே, அவள் மிதிவண்டியை வாங்குவதற்கு வங்கியில் இருந்து கடன் வாங்குவதே அதிக சிக்கனமாக அமையும்.

***படிநிலை 5 (மாதிரியை சரிபார்த்தல்) :*** இக்கணக்கில் இந்த படிநிலை அவ்வளவாக அவசியமானதாக இல்லை ஏனெனில் இங்கு தவணைகள் நிலையானதாக உள்ளன. இருப்பினும், வங்கியில் இருந்து கடன் வாங்கும் பொழுது, அது தொடர்பான நடைமுறை விதிகளான முத்திரைத்தாள் செலவு போன்றவை சேர்க்கப்பட்டு, தவணை முறையைவிட வட்டி வீதம் அதிகம் ஆகுமேயாயின் அவள் தனது முடிவை மாற்றிக் கொள்ளக் கூடும்.

**குறிப்பு :** வட்டி வீத மாதிரிகள் இன்னும் மிக ஆரம்ப நிலைகளிலேயே உள்ளன மற்றும் இவற்றை சரிபார்த்தல் என்பது நிதிசந்தையில் இன்னும் ஒரு பிரச்சனையாகவே இருக்கிறது. ஒரு வேளை தவணைகளை நிர்ணயிப்பில் வெவ்வேறு வட்டி வீதங்கள் விதிக்கபடுமே யாயின் சரிபார்த்தல் என்பது ஒரு முக்கியமான பிரச்சனையாக ஆகிவிடுகிறது.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## பயிற்சி A2.2

கீழ்வரும் பிரச்சனைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும், கணக்கினை தீர்ப்பதற்கான கணிதவியல் மாதிரிகளின் வெவ்வேறு நிலைகளையும் காட்டுக.

1. ஒரு பறவையியல் வல்லுனர், பெரியதொரு தோட்டத்தில் இருக்கும் கிளிகளின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிட விரும்புகிறாள். அவள் கிளிகளைப் பிடிக்க ஒரு வலையைப் பயன்படுத்தி 32 கிளிகளைப் பிடிக்கிறாள். ஒவ்வொன்றிற்கும் சிறு வளையத்தைப் பொருத்தி பிறகு அவற்றை சுதந்திரமாக பறக்க விடுகிறாள். பின் தொடர்ந்த வாரத்தில் 40 கிளிகளைப் பிடிக்கிறாள். அவற்றுள் 8 முன்னமே வளையம் பொருத்தப்பட்டு இருக்கிறது.

   (i) இரண்டாம் முறை பிடிக்கப்பட்ட கிளிகளில் வளையம் பொருத்தப்பட்டவை எவ்வளவு பின்னம் (what fraction)?

   (ii) தோட்டத்தில் உள்ள மொத்த கிளிகளின் எண்ணிகையை மதிப்பிடுக.

2. அருகே உள்ளபடம், ஒரு வனப்பகுதியை வானில் இருந்து எடுத்த படத்தைக் குறிக்கிறது இதில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு மரம் ஆகும். சுற்றுச்சூழல்கணக்கெடுப்பின் ஒரு பகுதியாக நீங்கள் இப்படம் குறிக்கும் இடத்தில் உள்ள மரங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

3. ஒரு T.V ஐ ₹ 24000 ரொக்கபணம் கொடுத்து வாங்கலாம் அல்லது ₹ 8000 முன் பணம் (cash down) மற்றும் ₹ 2800 மாதத்தவணை வீதத்தில் ஆறு மாதங்களுக்கு தவணை முறையிலும் வாங்கலம். அலி T.V வாங்குவதற்கு கடைக்கு செல்கிறார். அவரிடம் ₹ 8000உள்ளது. அவரிடம் இரு வழிகள் உள்ளன. அவர் T.V ஐ தவணை முறையில் வாங்கலாம் அல்லது ஏதேனும் நிதி சங்கத்திடம் இருந்து கடன் பெற்று மொத்த ரொக்கத் தொகை கட்டி வாங்கலாம். நிதி சங்கமானது ஆண்டுக்கு 18% வீதம் தனி வட்டி விதிக்கிறது. இவற்றில் எவ்வழி அலிக்கு சிறந்தது ?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## A2.4 கணிதவியல் மாதிரி ஏன் முக்கியமானது ?

நாம் எடுத்துக்காட்டுகளில் பார்த்தது போல, கணிதவியல் மாதிரியானது பல துறைகளைச் சார்ந்தது. இது, கணித அறிஞர்களும் மற்றும் பல்வேறு துறையின் அறிஞர்களும் தங்கள் அறிவையும் வல்லமையையும், முன்னமே இருக்கும் பொருள்களை மேம்படுத்துவதற்கும், மேம்பட்ட புதியனவற்றை தயாரிப்பதற்கும், அல்லது சில குறிப்பிட்டவற்றின் போக்கை (இயல்பு) முன்மொழிவதற்க்கும் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது.

கணிதவியல் மாதிரிக்கு பல குறிப்பான காரணங்கள் உள்ளன. ஆயினும் அவையாவும் கீழ்வருவனவற்றுடன் தொடர்புள்ளவையாகவே இருக்கின்றன :

- ***புரிந்து கொள்வதற்காக :*** ஆய்வு செய்யப்படும் நிஜ உலக பிரச்சனையின் நடைமுறை அல்லது போக்கை பிரதிபலிக்கும் கணிதவியல் மாதிரி நிம்மிடம் இருப்பின், அப்பிரச்சனையை நாம் மாதிரியை ஆய்வதன் மூலம் நன்கு புரிந்து கொள்ள முடியும். மேலும், மாதிரியை அமைத்தலின் போது, நாம் எந்தெந்த காரணிகள் ஒரு நிகழ்வுக்கு மிகவும் முக்கியமானவை மற்றும் பிரச்ச

னையின் வெவ்வேறு அம்சங்கள் ஒன்றோடு ஒன்று கொண்டுள்ள தொடர்பு ஆகியவற்றை நன்கு அறியலாம்.

- *முன்மொழிதல் அல்லது முன்கணிப்பு அல்லது ஒப்புருவாக்குதல் :* அடிக்கடியாக, ஒரு நிஜ உலக ஒழுங்கு, எதிர்காலத்தில் எவ்வாறு செயல்படும் என்பதை நாம் அறிய விரும்புகிறோம். ஆனால், நேரடியாக அவ்வொழுங்கின் மீது பரிசோதனைகள் செய்து பார்ப்பது என்பது மிக்க செலவுகள் கொண்டதோ அல்லது செயல்படுத்த இயலாத்தாகவோ அல்லது நடைமுறையில் செய்ய முடியாததாகவோ இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, வானிலை முன் அறிவிப்பு, மனித உடலில் ஒரு மருந்தின் உச்ச வினை, அணு உலைக்கான உகந்ததொரு வடிவமைப்பைக் கண்டுபிடித்தல் இதுபோல இன்னும் பல.

முன்கணிப்பு என்பது பலதரப்பட்ட நிறுவனங்களில் மிக முக்கியமானதாகும். காரணம் என்னவெனில், எதிர்கால நிகழ்ச்சிகளை முன் உரைத்தல் என்பது, முக்கிய முடிவுகளை எடுப்பதில் இணைக்கப் பட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,

சந்தைத் துறைகளில், 'தேவை' யின் நம்பத்தக்க முன்கணிப்பானது, வியாபார உபாயங்களைத் திட்டமிட மிக உதவுகிறது.

ஒரு பள்ளி நிர்வாகம், வெவ்வேறு மாகாநங்களில் பள்ளி செல்லும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையில் எதிர்காலத்தில் ஏற்படவிருக்கும் அதிகரிப்பை முன்கணிப்பு செய்வதால், புதிய பள்ளிகளை எங்கு தொடங்குவது என்பதை முடிவு செய்யலாம்.

பெரும்பாலான சமயங்களில், முன்கணிப்பாளர்கள் எதிர்காலத்தைத் கணிக்க, கடந்த கால விவரங்களையே பயன்படுத்துக்கின்றனர். விவரங்களை அலசி ஆராய்வதால், அவற்றை விவரிக்க ஒரு முறையை அடையாளம் காண்கிறார்கள். பிறகு இவ்விரங்கள் மற்றும் முறை ஆகியன இன்னும் நீட்டிக்கப்பட்டு எதிர்காலத்திற்கான ஒரு முன்கணிப்பு தயார் செய்யப்படுகிறது. இந்த அடிப்படை (மூல) உபாயமே பெரும்பாலான முன்கணிப்பு நுட்பங்களில் செயல்படுத்தப்படுகிறது. இது, அடையாளங்கள் காணப்பட்ட முறையானது எதிர்காலத்திலும் தொடரும் என்ற ஊகத்தின் மீதே அமைந்துள்ளது.

- *மதிப்பீடு செய்ய :* அடிக்கடி நாம் பெரிய மதிப்புகளை மதிப்பிட தேவை உள்ளது. நீங்கள், ஒரு காட்டிலுள்ள மரங்களின்

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

எண்ணிக்கை, ஏரியில் உள்ள மீன்கள் போன்ற சிலவற்றை எடுத்துக்காட்டுகளில் பார்த்திருக்கிறீர்கள். எடுத்துகாட்டாக, தேர்தலுக்கு முன்னால், தேர்தலில் போட்டியிடும் கட்சிகள், தங்கள் கட்சி தேர்தலில் வெற்றி பெருவதற்கான நிகழ்தகவை முன் அறிய வேண்டுவர். குறிப்பாக, தங்களது தொகுதியில், எத்தனை பேர் தம்கட்சிக்கு வோட்டு போடுவார்கள் என்பதை மதிப்பிட விரும்புவர். இந்த முன்மொழிதலின் அடிப்படையில், பிரசார உபாயத்தை முடிவு செய்வர். 'வெளியேரும் கருத்துக்கணிப்புகள்' (exist poll) என்பன ஒரு கட்சிக்கு தேர்தலில் எத்தனை இடங்கள் கிடைக்கும் என்பதை முன்கணிப்பு செய்ய பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

**பயிற்சி A2.3**

1. கடந்த ஐந்து ஆண்டுகளின் விவரங்களை அடிப்படையாக கொண்டு, உங்கள் பள்ளிக்கு வருட முடிவில் வரும் X வகுப்புத் தேர்வில் கணிதத்தில் கிடைக்கவிருக்கும் சராசரி மதிப்பெண்களின் சதவீதத்தினை முயன்று முன்கணிக்கவும்.

## A2.5 தொகுப்பு

இப் பிர்ச்சேர்க்கையில், நீங்கள் கீழ்வருவனவற்றை கற்றுள்ளீர்கள்.

1. கணிதவியல் மாதிரி என்பது, ஒரு நிஜ வாழ்க்கை சூழலின் கணிதவியல் விவரணம் ஆகும். கணிதவியல் மாதிரியமைத்தல் என்பது, கணித மாதிரியை உருவாக்குதல், அதைத் தீர்த்தல் மற்றும் நிஜ-வாழ்க்கைச் சூழலை புரிந்து கொள்ள பயன்படுத்துதல் ஆகிய செயல் முறைகளே ஆகும்.
2. மாதிரியாக்குதலில் சம்பந்தப்பட்ட படிநிலைகளானவை : பிரச்சனையைப் புரிந்து கொள்ளுதல், கணித மாதிரியை சூத்திரப்படுத்துதல், அதைத் தீர்த்தல், அதை நிஜ வாழ்க்கை சூழலில் பகுத்து அறிதல் மற்றும் மிக முக்கியமாக மாதிரியை சரிபார்த்தல்.
3. சில கணிதவியல் மாதிரிகளை உருவாக்குதல்.
4. கணிதவியல் மாதிரியின் முக்கியத்துவம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

# விடைகள்

## (ANSWERS)

### முக்கோணவியலின் அறிமுகம் : பயிற்சி 8.1

**1.** i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$ **2.** 0

**3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

**5.** $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

**7.** i) $\frac{49}{64}$ ii) $\frac{49}{64}$ **8.** ஆம்

**9.** i) 1 ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

**11.** i) தவறு ii) சரி iii) தவறு iv) தவறு v) தவறு

### பயிற்சி 8.2

**1.** i) 1 ii) 2 iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ v) $\frac{67}{12}$

**2.** i) A ii) D iii) A iv) C

**3.** $\angle A = 45^0, \angle B = 15^0$

**4.** i) தவறு ii) சரி iii) தவறு iv) தவறு v) சரி

### பயிற்சி 8.3

**1.** $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

**2.** $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sqrt{\sec A}}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

**3.** i) 1 ii) 1 **4.** i) B ii) C iii) D iv) D

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## முக்கோணவியலின் சிலப் பயன்பாடுகள் : பயிற்சி 9.1

1. 10மீ
2. $8\sqrt{3}$m மீ
3. 3m, $2\sqrt{3}$m மீ
4. $10\sqrt{3}$மீ
5. $40\sqrt{3}$மீ
6. $19\sqrt{3}$மீ
7. $20\left(\sqrt{3}-1\right)$m
8. $0.8\left(\sqrt{3}+1\right)$m
9. $16\frac{2}{3}$m
10. $20\sqrt{3}$மீ, 20மீ, 60மீ
11. $10\sqrt{3}$ மீ, 10மீ
12. $7\left(\sqrt{3}+1\right)$m
13. $75\left(\sqrt{3}-1\right)$m
14. $58\sqrt{3}$மீ
15. 3 வினாடிகள்

## வட்டங்கள் : பயிற்சி 10.1

1. கணக்கற்ற பல
2. i) ஒன்று ii) வெட்டுக்கோடு iii) இரண்டு iv) தொடுபுள்ளி
3. D

## பயிற்சி 10.2

1. A
2. B
3. A
6. 3 செ.மீ.
7. 8 செ.மீ.
12. AB = 15 cm, AC = 13 cm

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## வட்டங்கள் சம்மந்தப்பட்ட பரப்புக்கள் : பயிற்சி 11.1

1. $\frac{132}{7}$ ச.செ.மீ.
2. $\frac{77}{8}$ ச.செ.மீ.
3. $\frac{154}{3}$ ச.செ.மீ.
4. (i) 28.5 ச.செ.மீ. (ii) 235.5 ச.செ.மீ.
5. (i) 22 செ.மீ. (ii) 231 ச.செ.மீ. (iii) $\left[231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right]$ ச.செ.மீ.
6. 20.4375 ச.செ.மீ.; 686.0625 ச.செ.மீ.
7. 88.44 ச.செ.மீ.
8. (i) 19.625 செ.மீ.(ii) 58.875 ச.செ.மீ.
9. (i) 285 மீ.மீ. (ii) $\frac{385}{4}$ ச.மீ.மீ.
10. $\frac{22275}{28}$ ச.செ.மீ
11. $\frac{158125}{126}$ ச.செ.மீ
12. 189.97ச.செ.மீ
13. ₹ 162.68
14. D

## புறப்பரப்புகளும் கன அளவுகளும் : பயிற்சி 12.1

**1.** 160 $cm^2$ **2.** 572 $cm^2$ **3.** 214.5 $cm^2$

**4.** மிகப்பெரியவிட்டம் = 7cm; புறப்பரப்பு = 332.5 $cm^2$

**5.** $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ **6.** 220$m^2$ **7.** 44$m^2$, ₹22000.

**8.** 18$cm^2$ **9.** 374$cm^2$

## பயிற்சி 12.2

**1.** $\pi$ $cm^3$

**2.** 66 $cm^3$ . மாதிரியின் உள்ளே இருக்கும் காற்றின் கன அளவு = (கூம்பு + உருளை + கும்பு) இவற்றின் உள்ளே இருக்கும் காற்றின் கன அளவு $= \left[\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right]$, இதில் $r$ என்பது கூம்பின் மற்றும் உருளையின் ஆரம், $h_1$ என்பது கூம்பின் உயரம் (நீளம்), $h_2$ என்பது உருளையின் உயரம் (நீளம்)

தேவையான கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + 3h_2 + h_1)$

**3.** 338 $cm^2$ **4.** 523.53 $cm^3$ **5.** 100 **6.** 892.26 kg

**7.** 1.131 $m^3$ (தோராயமாக) **8.** சரி அல்ல. சரியான விடை 346.51 $cm^3$

## புள்ளியியல் : பயிற்சி 13.1

**1.** 8.1 மரங்கள். $x_i$, மற்றும் $f_i$ இவற்றின் மதிப்புகள் சிறியதானவை யாதலால் நாம் நேரடி முறையையே பயன் படுத்துவோம்.

**2.** ₹145.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9

**5.** 57.19 **6.** ₹ 211 **7.** 0.099 *ppm*

**8.** 12.38 நாட்கள் **9.** 69.43%

## பயிற்சி 13.2

**1.** முகடு=36.8 வருடங்கள், சராசரி=35.37 வருடங்கள். மருத்துவமனையில் அனுமதிசெய்யப்பட்ட நோயாளிகளில் பெரும்பாலானோர் *36.8* (தோராயமாக) வயதுடையவர்கள். மருத்துவமனையில் அனுமதிசெய்யப்பட்ட நோயாளிகளின் சராசரி வயது 35.37 ஆண்டுகள்.

**2.** 65.625 மணிநேரம்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. மாதசெலவின் முகடு = ₹ 1847.83 சராசரி மாதசெலவு = ₹ 2662.5

4. முகடு = 30.6, சராசரி = 29.2 பெரும்பாலான மாநிலங்கள்/யூனியன் டெரிடரிகள் - இல் ஆசிரியருக்கும் மாணவர்களுக்குமான விகிதம் 30.6 மற்றும் சராசரியாக இந்த விகிதம் 29.2.

5. முகடு = 4608.7 ஓட்டங்கள்

6. முகடு = 44.7 கார்கள்

## பயிற்சி 13.3

1. இடைநிலை அளவு = 137 அலகுகள், சராசரி = 137.05 அலகுகள், முகடு = 135.76 அலகுகள். மூன்று அலகுகளுமே ஏறத்தாழ சமமானதாகவே உள்ளது.
2. $x = 8, y = 7$
3. இடைநிலை வயது = 35.76 ஆண்டுகள்
4. இடைநிலை நீளம் = 146.75mm
5. இடைநிலை ஆயுள் = 3406.98 மணிநேரம்
6. இடைநிலை அளவு = 8.05, சராசரி = 8.32, முகடு அளவு = 7.88
7. இடைநிலை எடை = 56.67kg

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## நிகழ்தகவு : பயிற்சி 14.1

1. i) 1 ii) 0, இயலா நிகழ்ச்சி
   iii) 1, உறுதி நிகழ்ச்சி iv) 1 v) 0, 1
2. சோதனைகள் (iii) மற்றும் (iv) சமவாய்ப்பு முடிவகளைக் கொண்டவை
3. ஒரு நாணயத்தை சுண்டும் போது, தலை மேல் முகமாக வருதல் மற்றும் பூ மேல் முகமாக வருதல் ஆகிய முடிவுகள் சமவாய்ப்பு கொண்டவை. ஆகவே, தனியொரு நாணயத்தினை சுண்டுவதின் முடிவை முற்றிலுமாக முன்பே நிர்ணயிக்க முடியாது.

4. B

5. 0.95

6. i) 0 ii) 1

7. 0.008

8. i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{5}{8}$

9. i) $\frac{5}{17}$ ii) $\frac{8}{17}$ iii) $\frac{13}{17}$

10. i) $\frac{5}{9}$ ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$

12. i) $\frac{1}{8}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{3}{4}$ iv) 1

13. i) $\frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{2}$

**14.** i) $\frac{1}{26}$ ii) $\frac{3}{13}$ iii) $\frac{3}{26}$ iv) $\frac{1}{52}$ v) $\frac{1}{4}$ vi) $\frac{1}{52}$

**15.** i) $\frac{1}{5}$ ii) a) $\frac{1}{4}$ b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$ **17.** i) $\frac{1}{5}$ ii) $\frac{15}{19}$

**18.** i) $\frac{9}{10}$ ii) $\frac{1}{10}$ iii) $\frac{1}{5}$ **19.** i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** i) $\frac{31}{36}$ ii) $\frac{5}{36}$

**22.** i)

| இரு பகடைகளின் மீதான கூட்டுத்தொகை | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| நிகழ்தகவு | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

ii) இல்லை. *11* கூட்டுத்தொகைளும் சமவாய்ப்பு கொண்டவை அல்ல.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**23.** $\frac{3}{4}$ ; சாத்தியமான முடிவுகளானவை: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH. இதில், THH என்பது, முதல் சுண்டுதலில் பூ மேல் முகமாகவும், இரண்டாம் சுண்டுதலில் தலை மேல் முகமாகவும், மூன்றாம் சுண்டுதலில் தலை மேல்முகமாகவும் விழுதல் எனப்பொருள்படும்.

**24.** i) $\frac{25}{36}$ ii) $\frac{11}{36}$

**25.** i) சரிஅல்ல. நாம் முடிவுகளை இத்தகையவாறு பிரித்துக்கொள்ளலாம். ஆனால் அவை எப்பொழுதுமே 'சமவாய்ப்பு உடையவை' என்று கூற முடியாது. காரணம் என்ன வெனில், அவற்றில் ஒவ்வொன்றும் இரு வழிகளில் அமையலாம். - முதல் நாணயத்தில் தலையும், இரண்டாம் நாணயத்தில் பூவும் விழுந்து இருக்கலாம் அல்லது முதல் நாணயத்தில் பூவும், இரண்டாம் நாணையத்தில் தலையும் விழந்து இருக்கலாம். இக்காரணத்தால், இது இருதலைகள் (அல்லது இரு பூக்கள்) விழவதைப்போலவே இரு வாய்ப்புகளைக் கொண்டது.

ii) சரியே, கேள்வியில் கருதப்படும் இரு முடிவுகளுமே சமவாய்ப்பு கொண்டவை.

## A2 பயிற்சி A2.2

**1.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

**2.** $1cm^2$ பரப்பளவை எடுத்துக்கொண்டு, அதில் உள்ள புள்ளகளின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடிக்கவும். மொத்த மரங்களின் எண்ணிக்கையானது, இவ்வெண் மற்றும் பரப்பளவு ($cm^2$ இல்) ஆகியவற்றின் பெருக்கல் தொகை ஆகும்.

**3.** தவணை முறை செயல்திட்டத்தில் வட்டி விகிதம் 17.74%, இது 18% ஐவிடக் குறைந்ததாகும்.

## பயிற்சி A2.3

**1.** மாணவர்கள் தங்களது சொந்த விடைகளைக்கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED