ریاضی

نویں جماعت کی درسی کتاب

Ninth Standard

MATHEMATICS

9

حصّہ اوّل

(Part-I)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

KARNATAKA TEXTBOOK SOCIETY (R.)

6th Cross, Melleshwaram, Bengaluru - 560 003.

پیش لفظ

قومی درسیات کا خاکہ (NCF)، 2005 کی سفارشات کے مطابق اسکول کے اندر اور اسکول کے باہر کی بچوں کی زندگی میں تال میل ہونا لازمی ہے۔ اس اصول نے کتابی آموزش کی میراث سے رخصتی کی سمت دیکھائی۔ اس میراث نے ایک ایسا نظام پیدا کر دیا تھا جس نے اسکول، گھر اور کمیونٹی کے درمیان خلا پیدا کر دیا۔ قومی درسیات کے خاکے کی بنیاد پر تیار کئے گئے نصابوں اور کتابوں نے اس بنیادی نظریہ کو عملی جامہ پہنانے کی نمایاں کوشش کی ہے۔ اس لئے سمجھ کے دخل کے بغیر حافظے کے چلن کو کم کرنے اور مختلف مضامین کے درمیان کھینچے گئے حدود کو مٹانے کی کوشش کی۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ کوششیں دراصل ہمیں تعلیم کے اس نظام کی سمت لے جائے گی جہاں پر بچہ کو مرکزیت کا درجہ حاصل ہوگا، جس کا خاکہ تعلیم کی قومی پالیسی (1980) نے تیار کیا تھا۔

ان کاوشوں کی کامیابی کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ اسکول کے پرنسپل اور ٹیچرس بچوں کو ان کی آموزش کے لئے کتنی حوصلہ افزائی کرتے ہیں اور بچوں کو سوالات کرنے نیز تصوراتی سرگرمیوں کے لئے کتنا اکساتے ہیں۔ ہمیں یہ تسلیم کرنا ہوگا کہ بچوں کو فراہم کئے گئے موقعوں، اوقات اور آزادی سے ان میں نئی معلومات کا اضافہ ہوتا ہے اور یہ اضافہ وہ اپنے بڑوں سے ملی جانکاری سے حاصل کرتے ہیں۔ نصابی کتابوں کو امتحانات کے لئے واحد بنیاد تسلیم کر لینا ہی ایک اہم وجہ ہے جس سے مختلف مسائل اور مواقع ضائع ہوجاتے ہیں۔ بچوں میں تخلیقیت یا پہل کاری کو پیدا کرنا اس وقت ہی ممکن ہے جب ہم بچوں کو سیکھنے کے عمل میں شرکاء کی حیثیت سے تسلیم کریں گے نہ کہ ان کو معلومات حاصل کرنے کا جامد جسم سمجھتے رہیں گے۔

ان مقاصد سے مراد ہے کہ اسکول کے معاملات اور طور طریقوں میں قابل لحاظ تبدیلی لانا، روزمرہ کے نظامِ اوقات میں لچک پیدا کرنا اتنا ہی لازمی ہے جتنا کہ سال بھر کے لئے تیار کئے گئے کیلنڈر میں پڑھانے کے دنوں کو پڑھائی کے لئے ہی مختص رکھنا، بچوں کو پڑھانے اور ان کی جانچ کے لئے دیکھائے گئے طریقے بھی یہ طے کرتے ہیں کہ یہ نصابی کتابیں اسکول میں بچوں کی زندگی کو کتنا خوشگوار بناتی ہیں نہ کہ اجیرن بنانے کا وسیلہ بنتی ہیں۔ نصاب تیار کرنے والوں نے بچوں کی نفسیات اور پڑھائی کے لئے درکار وقت کو ملحوظ رکھتے ہوئے معلومات کی تشکیل نو کر کے نصاب کے وزنی ہونے کے مسئلہ کو حل کرنے کی کوشش کی ہے۔ نصابی کتاب غور وفکر کرنے، چھوٹے چھوٹے گروپ میں بات چیت کرنے اور اپنے ہاتھ سے کر کے سیکھنے کو ترجیح دے کر اور ان کے لئے مواقع فراہم کر کے ان کوششوں کو بڑھاوا دیتی ہے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اس کتاب کو تیار کرنے کے لئے درسی کتاب تیار کرنے والی کمیٹی کے ذریعے کئے گئے کام کو نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ سراہتی ہے۔ ہم ریاضی اور سائنس کی ایڈوائزری کمیٹی کے چیئر پرسن پروفیسر جے۔ وی۔ نرلیکار اور اس کتاب کے چیف ایڈوائز پروفیسر پی سنسلیر نے اگنو (IGNOU)، نئی دہلی کے بہت ممنون ہیں کہ انہوں نے کمیٹی کو اس کام کے کرنے میں اپنا تعاون دیا، بہت سارے ٹیچرس نے اس کتاب کو تیار کرنے میں اپنا تعاون دیا اور ہم شکر گزار ہیں پرنسپل حضرات کے جن کے تعاون سے اس کام کا انجام پانا ممکن ہوسکا۔ ہم ان اداروں اور تنظیموں کے بھی احسان مند ہیں جنھوں نے اپنے وسائل، مواد اور افراد کو فیّاضی سے استعمال کرنے کی اجازت دی خاص طور پر ہم ان ممبران کا جو ثانوی اور اعلیٰ تعلیم کے محکمہ وزارت فروغ انسانی وسائل کے ذریعے بنائی گئی قومی نگراں کمیٹی کے چیئر پرسن پروفیسر مرینال میری اور پروفیسر جی۔ پی۔ دیش پانڈے کا شکریہ ادا کرتے ہیں کہ انھوں نے اپنا قیمتی وقت اور تعاون دیا۔

ہم اس نصابی کتاب کے اردو ترجمے کی ذمہ داری بخوبی انجام دینے کے لیے جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی کے شکر گزار ہیں، خاص طور پر جامعہ ملیہ اسلامیہ کے وائس چانسلر پروفیسر مشیر الحسن اور محترمہ رخشندہ جلیل کے ممنون و شکر گزار ہیں جنھوں نے مرکز برائے جواہر لعل نہرو اسٹڈیز، جامعہ ملیہ اسلامیہ کے آوٹ ریچ پروگرام کے ذریعہ اس عمل میں رابطہ کار کے فرائض بخوبی انجام دیئے۔ کونسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے مترجم محمد قاسم کی شکر گزار ہے۔ این سی ای آر ٹی مجموعی اصلاحات اور اپنے یہاں تیار مواد کے معیار کو بہتر بنانے کے لئے پابند ہے۔ اس سلسلہ میں ہم آپ کی رائے اور مشوروں کا خیر مقدم کریں گے۔

نئی دہلی
20/ دسمبر 2005

ڈائریکٹر
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

درسی کتابیں تیار کرنے والی کمیٹی

ریاضی اور سائنس کی ایڈوائزری گروپ کے چیئر پرسن

جے۔وی۔نرلیکار، امیریٹس پروفیسر ایڈوائزری کمیٹی کے چیئر پرسن، انٹر یونیورسٹی سینٹر فور ایسٹرونومی اینڈ ایسٹروفزکس (IUCCA)، گنیش بھنڈ، پونہ یونیورسٹی، پونے

چیف ایڈوائزر

پی سنکیلر، پروفیسر، اسکول آف سائنسز'IGNOU، نئی دہلی

چیف کوآرڈی نیٹر

حُکم سنگھ، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی۔

ممبران

اے۔کے۔واز لوار، پروفیسر اور ھیڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی

انجلی لال، پی جی ٹی، ڈی۔اے۔وی۔ پبلک اسکول، سیکٹر 14، گڑگاؤں

انجو نیرولہ، پی جی ٹی، ڈی۔اے۔وی پبلک اسکول، پشپانجلی انکلیو، پیتم پورہ، دہلی

جی۔پی۔دکشت، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف میتھ میٹکس اینڈ ایسٹرونومی، لکھنؤ یونیورسٹی، لکھنؤ۔

کے۔اے۔ایس۔ایس۔وی، کامیسوارہ راؤ اسسٹینٹ پروفیسر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن، بھونیشور۔

مہندر۔آر۔گجارے، ٹی ۔ جی۔ ٹی۔ اتُل ودیالیہ۔اَتل، ضلع ولساد۔

مہندر شنکر، اسسٹینٹ پروفیسر، (ایس ۔جی ۔ریٹائیر ڈ) این سی ای آر ٹی۔

راماباالاجی، ٹی جی ٹی۔کے۔وی، ایم، ای۔جی اینڈ سینٹر۔سینٹ جان روڈ، بنگلور۔

سنجے مدگل۔اسسٹینٹ پروفیسر، سی آئی ای ٹی، این سی ای آر ٹی

ششی دھر جگدیشن، ٹیچر اور ممبر گورننگ کونسل، سینٹر فار لرننگ، بنگلور

ایس۔وینکٹ رمن، اسسٹینٹ پروفیسر، اسکول آف سائنسز، اگنو، نئی دہلی

اُدے سنگھ، اسسٹینٹ پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی۔

وید ڈ دیجا، وائس پرنسپل (ریٹائرڈ)، گورنمنٹ گرلس سیکنڈری اسکول، سینک وہار، دہلی

ممبر کوآرڈی نیٹر

رام اوتار، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی (دسمبر 2005 تک)

آر۔پی۔موریہ، ایسوسی ایٹ پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی (جنوری 2006 سے)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اظہار تشکر

کونسل درسی کتاب کی ریویو ورکشاپ میں شامل ہونے والے مندرجہ ذیل شرکا کی شکر گزار ہے: اے۔ کے۔ سکسینہ، پروفیسر (ریٹائیرڈ) لکھنؤ یونیورسٹی، لکھنؤ؛ سنیل بجاج، ایچ او ڈی، ایس سی ای آر ٹی، گڑگاؤں؛ کے ایل آریہ، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی؛ وندیتا کالرا، لیکچرر، ایس۔ کے۔ ودیالیہ، وکاس پوری، نئی دہلی؛ جگدیش سنگھ پی جی ٹی، سینک اسکول، کپورتھلا؛ پی۔ کے۔ بگّا، ٹی جی ٹی، ایس۔ بی۔ پی سبھاش نگر، نئی دہلی؛ آر۔ سی۔ مہانا، ٹی جی ٹی، کیندریہ ودیالیہ، سنبھل پور؛ ڈی۔ آر۔ کھانڈو۔ ٹی جی ٹی، جے این وی۔ دودھونی گول پاڑہ؛ ایس۔ ایس۔ چٹّوپادھیائے، اسسٹنٹ ماسٹر، بی دھان نگر، گورنمنٹ ہائی اسکول، کولکتہ؛ وی۔ اے، سجاتا، ٹی جی ٹی، کے۔ وی۔ واسکو نمبر 1، گوا؛ اکیلا سہدیون، ٹی جی ٹی، کے۔ وی مینم بکم، چنئی؛ ایس۔ سی۔ راؤتو، ٹی جی ٹی، سینٹرل اسکول فار تبتن، مسوری؛ نیل۔ پی۔ زیویر، ٹی جی ٹی، جے این وی، نریمان گلم؛ امت بجاج، ٹی جی ٹی، سی آر پی ایف، پبلک اسکول، روہنی، دہلی؛ آر۔ کے۔ پانڈے، ٹی جی ٹی، ڈی۔ ایم۔ اسکول، آر آئی ای، بھوپال؛ وی۔ مادھوی، ٹی جی ٹی، سنسکرتی اسکول، چانکیہ پوری، نئی دہلی؛ جی، سری ہری بابو، ٹی جی ٹی، جے این وی، سر پور کاغذنگر، عادل آباد اور آر۔ کے۔ مشرا، ٹی جی ٹی، اے۔ ای۔ سی اسکول، نروہ

اس کتاب کی تیاری میں ایم۔ چندرا، پروفیسر اینڈ ہیڈ (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی کے تعاون کے ہم خاص طور پر بے حد شکر گذار ہیں۔

کونسل اس کتاب کی تیاری کے لیے کمپیوٹر انچارج دیپک کپور، ڈی ٹی پی آپریٹر نریش کمار، کاپی ایڈیٹر پرگتی بھاردواج اور پروف ریڈر یوگیتا شرما کی کوششوں کی بھی شکر گزار ہے۔

اے پی سی آفس، ڈی ای ایس ایم کی انتظامیہ، پبلی کیشن ڈویژن اور این سی ای آر ٹی کے سکریٹریٹ کے تعاون کا بھی شکریہ ادا کیا جاتا ہے۔

© KVEDS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

***NCF–2005** ಆಧರಿಸಿ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಲಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಉರ್ದು ಮಾಧ್ಯಮದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕರ್ನಾಟಕದಲ್ಲಿ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2 ಎಂದು ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕ ಹೊಂದಿದೆ.*

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

9ನೇ ತರಗತಿಗೆ NCERT ಯ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮಭಾರಿಗೆ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ದಿಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ಇಲಾಖೆಯ ಉನ್ನತ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀ ಎಂ.ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು–560 085

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

بھارت کا آئین

تمہید

ہَم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بَھارَت کو ایک مقتَدر، سمَاج وَادی، غیَر مَذہَبی عَوامی جَمہُوریَہ بنائیں اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں۔

انصاف سماجی، معاشی اور سیاسی

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت

مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع اور ان سب میں

اخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور سالمیت کا تیقن ہو۔

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر 1949ء کو یہ آئین ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں، وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

1۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''مقتدر عوامی جمہوریہ'' کی جگہ (3-1-1977 سے)

2۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''قوم کے اتحاد'' کی جگہ (3-1-1977 سے)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

فہرست



پیش لفظ		(ii)
1۔	عددی نظام	
1.1	تعارف	1
1.2	غیر ناطق اعداد	5
1.3	حقیقی اعداد اور ان کا عشری پھیلاؤ	9
1.4	حقیقی اعداد پر عملیات	17
1.5	حقیقی اعداد کے لئے قوت نما کے قوانین	24
1.6	خلاصہ	27
2-	**کثیر رکنیا**	**24**
2.1	تعارف	24
2.2	ایک متغیر والی کثیر رکنیاں	24
2.3	کثیر رکنی کے صفر	34
2.4	کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی	38
2.5	الجبری تماثلات	43
2.6	خلاصہ	50
3-	**مختص جومیٹری**	**52**
3.1	تعارف	52
3.2	کارتیزی نظام	56
3.3	خلاصہ	64

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4-	**دو متغیر والی خطی مساواتیں**	**65**
4.1	تعارف	65
4.2	خطی مساواتیں	65
4.3	خطی مساواتوں کا حل	68
4.4	خلاصہ	70
5-	**یوکلیڈ جومیٹر کا تعارف**	**71**
5.1	تعارف	71
5.2	یوکلیڈ کی تعریفیں	73
5.3	خلاصہ	81
6-	**خطوط اور زاویے**	**82**
6.1	تعارف	82
6.2	بنیادی ارکان او تعریفیں	83
6.3	قاطع خطوط اور غیر قاطع خطوط	85
6.4	زاویوں کے جوڑے	92
6.5	ایک ہی خط کے متوازی خطوط	96
6.6	خلاصہ	97
	ضمیمہ 1- ریاضی میں ثبوت	
A1.1	تعارف	98
A1.2	ریاصی کے طور پر قابلِ قبول بیانات	103
A1.3	استذباطی دلائل	105
A1.4	مسئلے قیاسی اور ہدیہات	112
A1.5	ریاضیاتی ثبوت	119
A1.6	خلاصہ	128
	جوابات / اشارات	

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

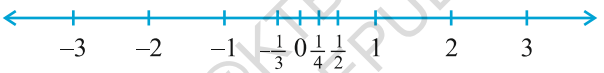
باب 1

T8W3M3

عددی نظام (NUMBER SYSTEM)

1.1 تعارف: (Introduction)

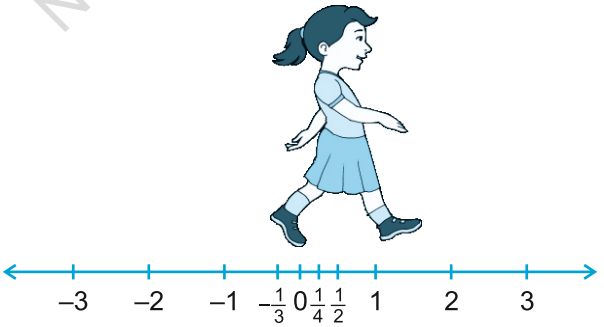
پچھلی جماعتوں میں آپ سیکھ چکے ہیں کہ عددی خط اور اس پر مختلف قسم کے اعداد کا اظہار کس طرح کرتے ہیں (شکل 1.1 کو دیکھیے)۔



شکل: 1.1 :عددی خط

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

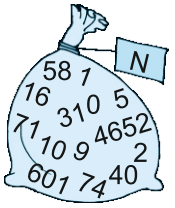
تصور کیجیے کہ آپ صفر سے شروع کرتے ہوئے اس عددی خط کے ساتھ مثبت سمت میں چلتے چلے جاتے ہیں۔ جہاں تک آپ کی آنکھ دیکھ سکتی ہے وہاں تک صرف اعداد، اعداد اور اعداد ہی نظر آتے ہیں۔



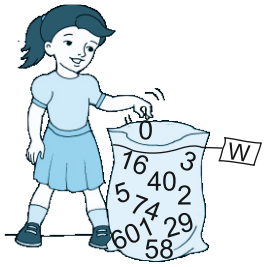
شکل: 1.2

اب فرض کیجیے کہ آپ عددی خط کے ساتھ چلنا شروع کرتے ہیں اور کچھ اعداد اکٹھا کرتے ہیں۔ ان اعداد کو جمع کرنے کے لیے ایک تھیلا تیار رکھیے۔

آپ صرف فطری اعداد جیسے 1، 2، 3 وغیرہ سے یہ عمل شروع کر سکتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ یہ فہرست ہمیشہ چلتی رہے گی۔ (یہ صحیح کیوں ہے؟) اس طرح سے اب آپ کے تھیلے میں لامحدود فطری اعداد ہیں۔ یاد کیجیے کہ ہم اس مجموعہ کو علامت **N** سے ظاہر کرتے ہیں۔



اب آپ واپس آیئے اور صفر کو اٹھایئے اور اس کو تھیلے میں رکھیے۔ اب آپ کے پاس مکمل اعداد کا مجموعہ ہے جس کو ہم علامت **W** سے ظاہر کرتے ہیں۔

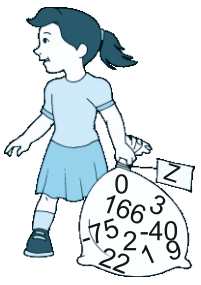


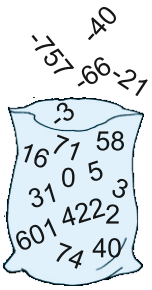
اب آپ کے سامنے بہت سے منفی صحیح اعداد ہیں۔ تمام صحیح اعداد کو آپ اپنے تھیلے میں رکھیں۔ آپ کا نیا مجموعہ کون سا ہے؟ یاد کیجیے اس مجموعہ کو صحیح اعداد کہتے ہیں اور اس کو علامت **Z** سے ظاہر کرتے ہیں۔



Z ایک جرمن لفظ Zahlen سے لیا گیا ہے جس کا مطلب گنتی کرنا اور "Zahl" کا مطلب عدد۔

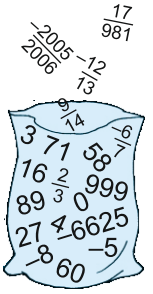
Z ہی کیوں؟





کیا عددی خط پر اب بھی کچھ عدد باقی بچے ہیں؟ ہاں! اعداد جیسے $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$ یا $\frac{-2005}{2006}$ وغیرہ۔ اگر آپ ایسے تمام اعداد کو بھی تھیلے میں رکھیں تو اب یہ ناطق اعداد (Rational Numbers) کا مجموعہ ہو جائے گا۔ ناطق اعداد کے مجموعہ کو **Q** سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لفظ ناطق، لفظ نسبت (Ratio) سے لیا گیا ہے اور Q لفظ خارج قسمت (Quotient) سے لیا گیا ہے۔

© TBS NOT TO BE REPUBLISHED





آپ ناطق اعداد کی تعریف کو دہرا سکتے ہیں:

ایک عدد 'r'، ناطق عدد کہلاتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$۔

(ہم کیوں اس بات پر زور دیتے ہیں کہ $q \neq 0$؟)

یہ بات نوٹ کیجیے کہ اب تھیلے میں موجود تمام اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے، جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$۔ مثال کے طور پر 25- کو ہم $\frac{-25}{1}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $p = -25$ اور $q = 1$ ہے۔ اس لیے ناطق اعداد میں فطری اعداد، مکمل اعداد اور صحیح اعداد بھی شامل ہیں۔

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد کا $\frac{p}{q}$ کی شکل میں اظہار منفرد نہیں ہے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ مثال کے طور پر $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{25} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ اور یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ یہ معادل (Equivalent) ناطق اعداد ہیں۔ حالانکہ جب ہم کہتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے یا جب ہم $\frac{p}{q}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں تو ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ $q \neq 0$ اور p اور q میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جز وضربی نہیں ہے (یعنی p اور q co-prime ہیں)۔ اس لیے عددی خط پر $\frac{1}{2}$ کی لامحدود معادل کسور (Fractions) میں سے ہم $\frac{1}{2}$ کو چنتے ہیں جو ان تمام کی نمائندگی کرتا ہے۔

آپ آیئے اب ہم مختلف قسم کے اعداد کی کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں جن کو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

مثال 1: کیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے:

(i) ہر مکمل عدد ایک فطری عدد ہے۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) ہر ناطق عدد ایک صحیح عدد ہے۔

حل: (i) غلط، کیونکہ صفر ایک مکمل عدد ہے، فطری عدد نہیں ہے۔

(ii) صحیح، کیونکہ ہر صحیح عدد m کو $\frac{m}{1}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس لیے یہ ایک ناطق عدد ہے

(iii) غلط، کیونکہ $\frac{3}{5}$ صحیح عدد نہیں ہے۔

مثال 2: 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

اس سوال کو ہم کم از کم دو طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

حل 1: یاد کیجیے کہ r اور s کے درمیان ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم r اور s کو جمع کر کے 2 سے تقسیم کرتے ہیں یعنی $\frac{r+s}{2}$ r اور s کے درمیان ایک ناطق عدد ہے۔ اس لیے $\frac{3}{2}$، 1 اور 2 کے درمیان ایک عدد ہے۔ اس طرح سے آگے بڑھتے ہوئے آپ 1 اور 2 کے درمیان مزید چار ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ چار اعداد ہیں $\frac{5}{4}$، $\frac{11}{8}$، $\frac{13}{8}$ اور $\frac{7}{4}$

حل 2: دوسرے طریقے کے مطابق آپ ایک ہی مرحلہ میں تمام پانچ ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہمیں پانچ ہی ناطق اعداد معلوم کرنے ہیں۔ ہم 1 اور 2 کو ایک ایسے ناطق عدد کی شکل میں لکھتے ہیں جس کا نسب نما 1 + 5 یعنی $1 = \frac{6}{6}$ اور $2 = \frac{12}{6}$۔ آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ تمام اعداد $\frac{7}{6}$، $\frac{8}{6}$، $\frac{9}{6}$، $\frac{10}{6}$ اور $\frac{11}{6}$ کے درمیان ناطق اعداد ہیں۔ اس طرح سے پانچ اعداد ہیں $\frac{7}{6}$، $\frac{4}{3}$، $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$ اور $\frac{11}{6}$۔

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ مثال 2 میں آپ سے 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کرنے کو کہا گیا۔ آپ نے یہ حقیقت سمجھ لی ہوگی کہ 1 اور 2 کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ عام طور پر دیے گیے دو اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

آیئے ایک بار پھر عددی خط پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ تمام اعداد چن چکے ہیں؟ ابھی تک نہیں۔ بلکہ حقیقت یہ ہے کہ اب بھی عددی خط پر لامحدود اعداد باقی ہیں۔ جتنے بھی اعداد آپ نے چنے ہیں ان کے درمیان خالی جگہ ہے اور صرف ایک اور دو

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



نہیں بلکہ لامحدود اور حیرت انگیز بات یہ ہے کہ اس طرح کی دو خالی جگہوں کے درمیان بھی لامحدود اعداد موجود ہیں۔

تو ہمارے سامنے ابھی بھی مندرجہ ذیل سوالات ہیں:

1. عددی خط پر باقی اعداد کیا کہلاتے ہیں؟
2. ہم ان کی شناخت کیسے کریں گے؟ یعنی ہم ان کو ناطق اعداد سے کیسے الگ سمجھیں گے۔

ان سوالوں کے جواب ہم اگلے سیکشن میں پائیں گے۔

مشق 1.1

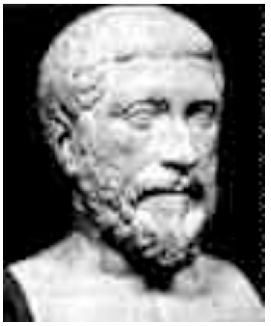
1. کیا صفر ایک ناطق عدد ہے؟ کیا آپ اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ؟
2. 3 اور 4 کے درمیان چھ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
3. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{5}$ کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
4. بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجہ بتائیے۔
   (i) ہر فطری عدد ایک مکمل عدد ہے۔
   (ii) ہر صحیح عدد ایک مکمل عدد ہے
   (iii) ہر ناطق عدد ایک مکمل عدد ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

پچھلے سیکشن میں ہم نے دیکھا کہ عددی خط پر ایسے بھی اعداد ہیں جو ناطق نہیں ہیں۔ اس سیکشن میں ہم ان اعداد کی تفتیش کریں گے۔ ابھی تک آپ نے جتنے بھی اعداد دیکھے وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل کے تھے جہاں p اور q صحیح اعداد اور $q \neq 0$۔ اس لیے آپ یہ پوچھ سکتے ہیں کہ کیا ایسے بھی اعداد ہیں جو اس شکل میں نہیں ہیں؟ یقیناً ایسے اعداد ہیں۔

آیئے اب ہم ان اعداد کی باضابطہ طور پر تعریف بیان کرتے ہیں۔



پیتھا گورس
(569BC–479BC)
شکل 1.3

یونان میں مشہور ریاضی داں پیتھا گورس (Phythagoras) کے پیروکاروں نے سب سے پہلے 400 ق-م- میں ان اعداد کی دریافت کی جو ناطق نہیں تھے۔ ان اعداد کو غیر ناطق اعداد کہا جاتا ہے۔ کیونکہ ان اعداد کو دو صحیح اعداد کی نسبت میں نہیں لکھا جاسکتا۔ Hippocus کے ذرائع دریافت غیر ناطق اعداد سے متعلق کافی عجیب وغریب باتیں منسوب ہیں۔ Hippacus کا خاتمہ یا تو یہ پتہ لگانے کی وجہ سے کہ $\sqrt{2}$ کہ ایک غیر ناطق عدد ہے یا پھر پیتھا گورس کے قبیلے کے باہر کے لوگوں پر یہ راز ظاہر کرنے کی وجہ سے بڑے افسوس ناک انداز میں ہوا۔

ایک عدد غیر ناطق (Irrational) کہلاتا ہے اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور

$$q \neq 0$$

آپ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ ناطق اعداد لامحدود ہیں۔ اب یہ بات بھی مصدقہ ہے کہ غیر ناطق اعداد بھی لامحدود ہیں۔ کچھ مثالیں ہیں:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

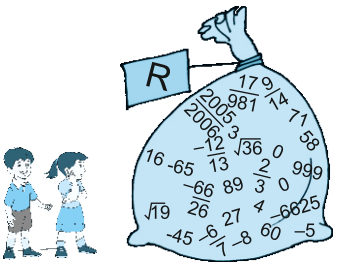
ریمارک : یاد کیجیے کہ ہم جب بھی علامت $\sqrt{}$ ، کا استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہمارا مطلب ہوتا ہے عدد کا مثبت جزرالمربع۔ اس لیے $\sqrt{4} = 2$ جب کہ دونوں 2 اور 2– عدد کے 4 جزر ہیں۔

مذکورہ بالا کچھ ناطق اعداد سے آپ واقف ہیں۔ مثال کے طور پر مندرجہ بالا جزرالمربع اور عدد π آپ پہلے ہی سے واقف ہیں۔

پیتھا گورس کے پیروکاروں نے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔ بعد میں تقریباً 425 ق-م تھیوڈورس (Theodorus) نے دکھایا کہ $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ اور $\sqrt{17}$ بھی غیر ناطق ہیں۔ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ وغیرہ کی غیر ناطقیت کا ثبوت ہم 10ویں جماعت میں پڑھیں گے۔ جہاں تک π کا سوال ہے تو اس کے بارے میں جانکاری ہزاروں سال سے تھی لیکن اس کا ثبوت 1700 کے آخر میں Lambert اور

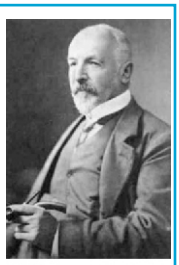
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Legendre نے دیا۔ اگلے سبق میں ہم مطالعہ کریں گے کہ ...0.10110111011110 اور π غیر ناطق ہیں۔



آیئے اس سوال کی طرف واپس آتے ہیں جو پچھلے سیکشن کے آخر میں اٹھایا گیا تھا۔ ناطق اعداد کے تھیلے کو یاد کیجیے۔ اگر اب ہم تمام غیر ناطق اعداد کو بھی اس تھیلے میں رکھ دیں تو کیا عددی خط پر اب کچھ عدد باقی رہیں گے؟ اس کا جواب ہے نہیں! اس طرح سے حاصل ناطق اور غیر ناطق اعداد کے مجموعہ کو ہم حقیقی اعداد (Real Number) کہتے ہیں۔ جس کو ہم **R** سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے حقیقی اعداد یا تو ناطق ہوتے ہیں یا غیر ناطق۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ عددی خط پر ہر ایک نقطہ ایک حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ہم عددی خط کو حقیقی عددی خط کہتے ہیں۔

آیئے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح سے ہم کچھ غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔



آر۔ڈیڈیکائنڈ (1831-1916)

شکل 1.4

1870 میں دو جرمن ریاضی دانوں کینٹر اور ڈیڈیکائنڈ نے دکھایا کہ ہر حقیقی عدد کے نظیری حقیقی خط پر ایک نقطہ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس حقیقی خط پر ہر ایک نقطہ کے نظیری ایک یکتا حقیقی عدد کا وجود ہے۔



جی۔کینٹر (1845-1918)

شکل 1.5

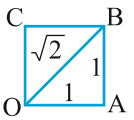
© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 3 : $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

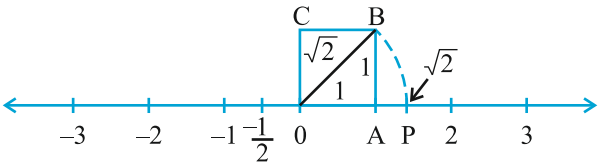
حل : یہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے کہ یونانیوں نے کس طرح سے $\sqrt{2}$ کی دریافت کی۔ ایک اکائی مربع OABC جس کا ہر ضلع اکائی لمبائی کا ہے، پر غور کیجیے۔ (شکل 1.6 دیکھئے) تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پیتھا گورس کے مسئلہ کے مطابق

$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ہم کس طرح سے $\sqrt{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں؟ یہ آسان ہے۔

شکل 1.6 کو عددی خط پر اس طرح رکھیں کہ راس O، صفر پر منطبق ہو۔ (دیکھیے شکل 1.7)



شکل: 1.6



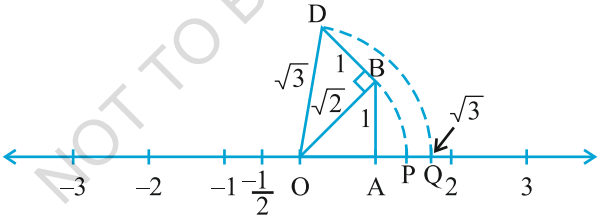
شکل: 1.7

ہم نے ابھی دیکھا کہ $OB = \sqrt{2}$

ایک پرکار کو استعمال کرتے ہوئے O کو خط مرکز مان کر اور OB نصف قطر لے کر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ P پر قطع کرے۔ تب P عددی خط پر $\sqrt{2}$ ظاہر کرتا ہے۔

مثال 4: $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل : آیئے شکل 1.7 کی طرف واپس آتے ہیں۔



شکل: 1.8

OB پر اکائی لمبائی کا عمود BD کھینچیں (جیسا کہ شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے)۔ پھر پیتھاگورس کے مسئلہ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ $OD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

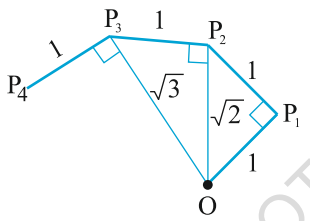
پرکار کا استعمال کرتے ہوئے O کو مرکز مان کر اور نصف قطر OD لیکر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ Q پر قطع کرتا ہے۔ تب نقطہ Q $\sqrt{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس طرح سے ہم کسی مثبت صحیح عدد n کے لیے $\sqrt{n}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں جب کہ $\sqrt{n-1}$ کو ظاہر کیا جا چکا ہو۔

مشق 1.2

1. بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی دلیل بھی پیش کیجیے۔
   (i) ہر غیر ناطق عدد ایک حقیقی عدد ہے۔
   (ii) عددی خط پر ہر نقطہ $\sqrt{m}$ کی شکل کا ہے جہاں m ایک فطری عدد ہے۔
   (iii) ہر حقیقی عدد ایک غیر ناطق عدد ہے
2. کیا تمام مثبت صحیح اعداد کے جزر المربع غیر ناطق ہیں؟ اگر نہیں تو ایک ایسے عدد کے جزر المربع کی مثال دیجیے جو ناطق عدد ہے۔
3. دکھایئے کہ $\sqrt{5}$ کو کس طرح سے عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔
4. کلاس میں کیا جانے والا مشغلہ **(جزر المربع کا خمیدہ (Spiral) بنانا)**: کاغذ کی بڑی شیٹ لیجیے اور اس پر مندرجہ ذیل طریقہ سے جزر المربع Spiral بنایئے۔ نقطہ O سے شروع کیجیے اور اکائی لمبائی کا قطعہ OP_1 بنایئے، P_1P_2 کے عمودی قطعہ خط OP_1 بنایئے (شکل 1.9 دیکھیے) اب P_2P_3 کے عمودی ایک قطعہ OP_2 بنایئے۔ پھر OP_3 کے عمودی P_3P_4 بنایئے۔ اس طرح سے جاری رکھتے ہوئے $P_{n-1}P_n$ کے عمودی اکائی لمبائی کا ایک قطعہ خط OP_{n-1} حاصل ہوتا ہے۔ اس طریقہ سے آپ نے نقاط P_2، P_3، ....، P_n، ....، کی تخلیق کی اور ان کو ایک خوبصورت Sprial سے ملا دیا جو $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$... کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل: 1.9 جزر المربع Spiral بنانا

1.3 حقیقی اعداد اور ان کا عشری پھیلاؤ

(Real Numbers and their Decimal Expansion)

اس سیکشن میں ہم ایک مختلف نقطہ نظر سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مطالعہ کریں گے۔ ہم حقیقی اعداد کے عشری پھیلاؤ پر غور کریں گے اور دیکھیں گے کہ کیا ہم ان کو ناطق اور غیر ناطق اعداد میں فرق معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم یہ بھی بیان

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

کریں گے کہ ان کے عشری پھیلاؤ کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی اعداد کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جا سکتا ہے کیونکہ ناطق اعداد سے ہماری واقفیت زیادہ ہے، اس لیے ان سے شروع کرتے ہیں۔ آیئے تین مثال لیتے ہیں: $\frac{1}{7}$، $\frac{7}{8}$، $\frac{10}{3}$

باقی (Remainders) پر خاص توجہ دیں اور دیکھیں کہ کیا آپ کوئی نمونہ معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 5: عشری پھیلاؤ معلوم کریں $\frac{10}{3}$، $\frac{7}{8}$ اور $\frac{1}{7}$

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 3.333\ldots \\ \hline 3 & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 1 \end{array}$$

باقی: 1، 1، 1، 1، ...

قاسم: 3

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

باقی: 0، 4، 6

قاسم: 8

$$\begin{array}{r|l} & 0.142857\ldots \\ \hline 7 & 1.0 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 1 \end{array}$$

باقی: 1، 3، 2، 6، 4، 5، 1، 3، 2، 6، 4، 5، 1

قاسم: 7

آپ کیا نوٹ کرتے ہیں؟ آپ کم سے کم تین باتیں نوٹ کرتے ہیں:

(i) باقی یا تو صفر ہو جاتا ہے یا ایک خاص مرحلہ کے بعد اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔

(ii) باقیوں میں آنے والے اعداد قاسم سے کم ہیں۔

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

($\frac{1}{3}$ میں ایک عدد اپنے آپ کو دہراتا ہے اور قاسم 3 ہے اور $\frac{1}{7}$ میں باقیوں کے ایسے چھ اندراجات 142857 ہیں اور قاسم 7 ہے۔)

(iii) اگر باقی اپنے آپ کو دہراتے ہیں تب ہمیں خارج قسمت کے ہندسوں میں ایک تکراری بلاک حاصل ہوتا ہے۔

($\frac{10}{3}$ کے لیے خارج قسمت میں 3 کی تکرار ہوتی ہے اور $\frac{1}{7}$ کے لیے ہمیں خارج قسمت میں 142857 کا تکراری بلاک ملتا ہے)۔

حالانکہ یہ پیٹرن مذکورہ بالا کچھ مثالوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے لیکن یہ تمام ناطق اعداد جو $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ کی شکل میں ہوں، اس کے لیے درست ہے۔ p کو q سے تقسیم کرنے میں دو خاص باتیں ہوتی ہیں- یا تو باقی صفر ہو جاتا ہے یا کبھی صفر نہیں ہوتا اور ہمیں باقیوں کی تکرار ملتی ہے۔ اس لیے آیئے ہر ایک حالت کو الگ الگ دیکھتے ہیں۔

حالت (i): باقی جب صفر ہو جاتا ہے

$\frac{7}{8}$ کی مثال میں ہم پاتے ہیں کچھ اقدام کے بعد باقی صفر ہو جاتا ہے اور $\frac{7}{8}$ کا عشری پھیلاؤ 0.875 دوسری مثالوں کا عشری پھیلاؤ ہے۔

$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{639}{250} = 2.556$ ان تمام حالات میں محدود اقدام کے بعد عشری پھیلاؤ ختم ہو جاتا ہے۔ اس قسم کے عشری پھیلاؤ کو ہم مختتم کہتے ہیں۔

حالت (ii): جب باقی کبھی صفر نہیں ہوتا

$\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{7}$ کی مثالوں میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ ایک خاص مرحلہ کے بعد باقی اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔ ان سے عشری پھیلاؤ غیر مختتم ہو جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں خارج قسمت میں ہمارے پاس ہندسوں کا ایک تکراری بلاک آجاتا ہے۔ ہم اس پھیلاؤ کو غیر مختتم تکراری کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$\frac{1}{3} = 0.3333$ اور $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ عام طریقہ سے $\frac{1}{3}$ کے خارج قسمت میں 3 کی

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

تکرار کو ہم 0.3 لکھتے ہیں۔ اسی طرح سے $\frac{1}{7}$ کے خارج قسمت میں ہندسوں 142897 کی تکرار ہوتی ہے اس لیے ہم $\frac{1}{7}$ کو اس طرح لکھتے ہیں $0.\overline{142857}$ جہاں اوپر کھینچا گیا قطعہ خط (بار) ہندسوں کے بلاک کی تکرار کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید 3.57272 کو ہم $3.5\overline{72}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح سے یہ تمام مثالیں ہم کو ایک غیر مختتم تکراری عشری پھیلاؤ دیتی ہیں۔

اس طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ دو قسم کا ہوتا ہے یا تو مختتم یا غیر مختتم تکراری۔

اب فرض کیجیے یا دوسرے لفظوں میں عددی خط پر آپ کے چلنے سے آپ کا واسطہ ایسے اعداد جیسے 3.142678 سے پڑتا ہے جس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے یا عدد جیسے 1.272727 یعنی $1.\overline{72}$ جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہے۔ کیا آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ناطق عدد ہے؟ اس کا جواب ہے ہاں!

ہم اس کو ثابت نہیں کریں گے لیکن اس کی وضاحت کچھ مثالوں سے کریں گے۔ مختتم حالتیں آسان ہیں۔

مثال 6: دکھایئے کہ 3.142678 ایک ناطق عدد ہے۔ دوسرے لفظوں میں 3.142678 کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیجیے جب کہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

حل: ہمارے پاس ہے $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ اس لئے یہ ایک ناطق عدد ہے۔ عدد اب ایسی حالت پر غور کرتے ہیں جب عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہو۔

مثال 7: دکھایئے کہ $0.\overline{3} = 0.3333...$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں کیا اور $q \neq 0$۔

حل: کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ 0.3 کیا ہے۔ آیئے اس کو 'x' مانتے ہیں۔

یعنی $x = 0.3333...$

یہی وہ مرحلہ ہے جہاں ہمیں ٹرک (Trick) استعمال کرنی ہے۔ غور کیجیے۔

$$10x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

اب $3.3333... = 3 + x$، کیونکہ $x = 0.3333...$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لیے $10x = 3 + x$

x کے لیے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{یعنی} \quad 9x = 3$$

مثال 8: دکھایئے کہ $1.272727... = 1.\overline{27}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

حل: مان لیجیے $x = 1.272727...$ کیونکہ دو ہندسوں کی تکرار ہو رہی ہے اس لیے ہم x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 127.2727...$$

تو $100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

اس لیے $100x - x = 126, \qquad 99x = 126$

یعنی $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

اس کے معکوس سے آپ جانچ کرسکتے ہیں کہ $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

مثال 9: دکھایئے کہ $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیا جاسکتا ہے جہاں P اور Q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

حل: مان لیجیے $x = 0.2\overline{35}$ یہاں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ 2 کی تکرار نہیں ہوتی بلکہ 35 کی تکرار ہوتی ہے چونکہ 2 ہندسوں کی تکرار ہو رہی ہے، اس لیے x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 23.53535...$$

تو $100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$

اس لیے $99x = 23.3$

@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یعنی $99x = \frac{233}{10}$ اس لئے جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{233}{990}$

آپ اس کے معکوس کی جانچ کر سکتے ہیں کہ $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

اس طرح سے ہر وہ عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوتا ہے۔ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جہاں p اور q $(q \neq 0)$ صحیح اعداد ہیں، اس لیے اب ان نتائج کو مختصراً مندرجہ ذیل شکل میں لکھیں۔

ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوتا ہے یا غیر مختتم یا پھر ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ مختتم اور غیر مختتم ہوتا ہے، وہ ناطق ہوتا ہے۔

اس طرح سے اب ہم ناطق عدد کے عشری پھیلاؤ کو جانتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مذکورہ بالا خصوصیت سے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ان کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے۔

اس لیے غیر ناطق اعداد کی خصوصیت ایسی ہی ہے جیسی اوپر ناطق اعداد کے لئے بیان کی گئی ہے۔ ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے یا دوسرے لفظوں میں ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔

یاد کیجیے پچھلے سیکشن میں $s = 0.1011011101111110....$

نوٹ کیجیے کہ یہ نہ تو مختتم ہے اور نہ ہی تکراری۔ اس لیے مندرجہ بالا خصوصیت کے مطابق یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ مزید یہ کہ s جیسے لاتعداد غیر ناطق اعداد آپ معلوم کر سکتے ہیں۔

مشہور غیر ناطق عدد $\sqrt{2}$ اور π کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟ یہاں ان کے ایک خاص مقام تک عشری پھیلاؤ دیے گئے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1.41413562373095048801688724209 6...$$

$$\pi = 3.14159265385979323846264338327950...$$

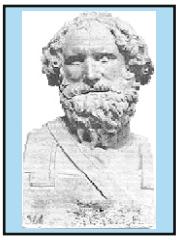
نوٹ کیجیے کہ ہم اکثر π کی تقریباً قیمت $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں لیکن $\pi \neq \frac{22}{7}$

طویل عرصہ سے ریاضی دانوں نے غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کو زیادہ سے زیادہ ہندسوں میں معلوم کرنے کی مختلف قسم کی تکنیک نکالی ہیں۔ مثال کے طور پر $\sqrt{2}$ کے عشری پھیلاؤ میں آنے والے ہندسوں کو آپ تقسیم سے معلوم کرنے کا

© CTBSE NOT TO BE REPUBLISHED

طریقہ پڑھ چکے ہیں۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ ویدک عرصہ (800-500 ق م) کے سلبا سوتر اس (Sulbasutras) (وتر کے

یونانی ارکمیڈیز وہ پہلا شخص تھا جس نے π کے عشری پھیلاؤ کے ہندسے معلوم کیے۔ اس نے دکھایا کہ $3.140845 < \pi < 3.142857$ آریہ بھٹ (476-550 عیسوی) عظیم ہندستانی ریاضی داں اور ماہر فلکیات نے اعشاریہ کے 4 ہندسوں تک π کی صحیح قیمت (3.1416) معلوم کی تیز رفتار کمپیوٹر اور ایڈوانس algorithms کی مدد سے π کی تقریباً اعشاریہ کے ٹریلین ہندسوں تک قیمت معلوم کی جا چکی ہے۔



آرکمیڈیز (287 ق م-212 ق م)
شکل: 1.10

قواعد) کے مطابق آپ $\sqrt{2}$ کی تقریبی قیمت مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

نوٹ کیجیے کہ اعشاریہ کے پہلے 5 ہندسوں تک اس کی قیمت وہی ہے جو اوپر دی گئی ہے۔ π کے عشری پھیلاؤ میں ہندسوں کی تلاش کی تاریخ بہت دلچسپ ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد کیسے حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 10: $\frac{1}{7}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان غیر ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ اس لیے آپ آسانی سے حل کر سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ اور $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم ایک ایسا عدد معلوم کریں گے جو نہ مختتم ہو اور نہ تکراری ہو اور ان کے درمیان بھی ہو۔ یقیناً آپ ایسے لامحدود اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ ایسے ایک عدد کی مثال ہے ...0.150150015000150000

مشق 1.3

1. مندرجہ ذیل کو عشری شکل میں لکھیے اور بتایئے کہ یہ کس قسم کا عشری پھیلاؤ ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{11}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. آپ جانتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ کیا آپ طویل تقسیم کیے بغیر اندازہ لگا سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{5}{7}$ اور $\frac{6}{7}$ کے عشری پھیلاؤ کیا ہیں؟ اگر کر سکتے ہیں تو کیسے؟

(اشارہ: $\frac{1}{7}$ کی قیمت نکالتے وقت باقیوں پر غور کیجیے۔)

3. مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999... کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے۔ کیا آپ اپنے جواب سے متحیر ہیں۔ اپنے استاد اور کلاس کے ساتھیوں سے بحث کیجیے کہ جواب کا کوئی مطلب ہے۔

5. $\frac{1}{17}$ کے عشری پھیلاؤ میں ہندسہ کے تکراری بلاک میں ہندسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کیا ہو سکتی ہے؟ تقسیم کر کے اپنے جواب کی جانچ کیجیے۔

6. $\frac{p}{q}$ شکل والے ناطق اعداد جیسی بہت سی مثالوں کو دیکھئے جن میں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔ جس میں کے علاوہ کوئی بھی مشترک جزو ضربی نہ ہو اور ان کا عشری اظہار مختتم ہو۔ کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ q کون سی خصوصیت پیش کرتا ہے؟

7. تین ایسے اعداد لکھیے جن کا عشری اظہار غیر مختتم اور غیر تکراری ہو۔

8. $\frac{5}{7}$ اور $\frac{9}{11}$ کے درمیان تین مختلف غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

9. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $\sqrt{23}$, (ii) $\sqrt{225}$, (iii) 0.3796 , (iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001.....

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 1.4

1.4 حقیقی اعداد پر عملیات: Operations on Real Numbers

پچھلی جماعتوں میں آپ ناطق اعداد کی تقلیبی، تلازمی اور جمع اور ضرب کی تقسیمی خصوصیت کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ اگر ہم دو ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم (صفر کے علاوہ) کریں تو ایک ناطق عدد ہی حاصل ہوتا ہے (یعنی ناطق اعداد، جمع تفریق، ضرب اور تقسیم کے لیے ہیں)۔ اب ہم آسانی سے یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد بھی جمع اور ضرب کی تقسیمی خصوصیت، تقلیبی اور تلازمی خصوصیت کو ظاہر کرتے ہیں۔ لیکن غیر ناطق اعداد کا حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب اور خارج قسمت ہمیشہ غیر ناطق نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر $\sqrt{6+(-\sqrt{6})}$ ، $\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)$ ، $\left(\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{3}\right)$ اور $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ناطق ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

آیئے اب ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہم ایک ناطق عدد کو غیر ناطق عدد میں جمع، تفریق یا ضرب کرتے ہیں تو کیا حاصل ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔ $\sqrt{3}+2$ اور $2\sqrt{3}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟

چونکہ $\sqrt{3}$ ایک غیر مختتم اور غیر تکراری عدد ہے اور یہی بات $\sqrt{3}+2$ اور $2\sqrt{3}$ کے لیے بھی درست ہے۔

اس لیے $\sqrt{3}+2$ اور $2\sqrt{3}$ دونوں بھی غیر ناطق ہیں۔

مثال 11: جانچ کیجیے کہ $7\sqrt{5}$ ، $\frac{7}{\sqrt{5}}$ ، $\sqrt{2}+21$ ، $\pi-2$ غیر ناطق عدد ہیں یا نہیں۔

حل: $\sqrt{5}=2.236...$ ، $\sqrt{2}=1.4142...$ ، $\pi=3.1415$

تب $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304$ ، $7\sqrt{5} = 15.652...$

$\pi - 5 = 1.1415...$ ، $\sqrt{2} + 21 = 22.4142...$

یہ تمام غیر مختتم اور غیر تکراری اعشاریہ ہیں۔ اس لیے یہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ عموماً کیا ہوتا ہے اگر ہم غیر ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم یہاں تک کہ ان کے جزء المربع اور n واں جز معلوم کرتے ہیں جب n ایک فطری عدد ہے آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 12: $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ اور $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ کو جمع کیجیے

حل: $\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right) + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \left(3\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right)$

$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

مثال 13: $6\sqrt{5}$ کو $2\sqrt{5}$ سے ضرب کیجیے

حل: $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

مثال 14: $8\sqrt{5}$ کو $2\sqrt{3}$ سے تقسیم کیجیے

حل: $8\sqrt{5} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3 \times 5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ان مثالوں سے مندرجہ ذیل حقیقتوں سے آگاہی ہوتی ہے۔

(i) ایک ناطق عدد اور ایک غیر ناطق عدد کا حاصل جمع یا حاصل فرق غیر ناطق ہوتا ہے۔

(ii) ایک غیر صفر ناطق عدد اور ایک غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا تقسیم غیر ناطق ہوتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) اگر ہم ''غیر ناطق اعداد کی جمع، گھٹاؤ، ضرب یا تقسیم کرتے ہیں تو نتیجہ ناطق یا غیر ناطق کچھ بھی ہوسکتا ہے

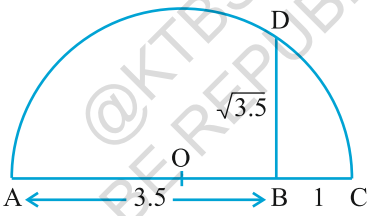
اب ہم اپنی توجہ حقیقی اعداد کا جز رنکالنے پر مرکوز کرتے ہیں۔

یاد کیجیے کہ اگر a ایک فطری عدد ہے تو $\sqrt{a} = b$ کا مطلب ہے $b^2 = a$ اور $b > a$

اسی تعریف کو مثبت حقیقی اعداد کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے کہ $a > b$ ایک حقیقی عدد ہے تب $\sqrt{a} = b$ کا مطلب $b^2 = a$ اور $b > 0$

سیکشن 1.2 میں نے ہم دیکھا کہ $\sqrt{n}$ کو کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے کس طرح عددی خط پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب ہم جیومیٹریائی طریقہ سے دکھائیں گے کہ کس طرح سے کسی بھی مثبت حقیقی عدد x کے لئے $\sqrt{x}$ کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر $x = 3.5$ کے لیے معلوم کرتے ہیں یعنی جیومیٹریائی طریقہ سے ہم $\sqrt{3.5}$ کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔



شکل 1.11

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

دیے ہوئے خط پر ایک متعین نقطہ A سے 3.5 اکائیوں کے فاصلہ پر ایک نقطہ B اس طرح حاصل کیجیے (شکل 1.11 دیکھئے) کہ $AB = 3.5$ ہو۔ B سے ایک اکائی کے فاصلہ پر دوسرا نقطہ C مارک کیجیے۔ AC کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے اور اسے O مارک کیجیے۔ O کو مرکز مان کر OC نصف قطر کا ایک نصف دائرہ بنا لیجیے۔ B سے گزرتا ہوا ایک ایسا خط کھینچئے جو AC پر عمود ہو اور نصف دائرہ کو نقطہ D پر قطع کرے۔ تب $BD = \sqrt{3.5}$ عمومی طور پر کسی بھی مثبت حقیقی عدد کے لیے $\sqrt{x}$ معلوم کرنے کے لیے ہم B کو اس طرح مارک کرتے ہیں کہ $AB = x$ جیسا کے شکل 1.12 میں دکھایا گیا ہے اور C اس طرح مارک کریں گے کہ $BC = 1$ جیسا کہ ہم نے $x = 3.5$ کے لیے کیا ہے۔ ہم پاتے ہیں کہ $BD = \sqrt{x}$ (شکل 1.12 میں دیکھئے)

اس نتیجہ کو ہم پیتھا گورس کے مسئلہ کو استعمال کر کے ثابت کر سکتے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ شکل 1.12 میں $\triangle OBD$ ایک قائم زاوی مثلث ہے۔ اور دائرہ کا نصف قطر $\frac{x+1}{2}$ اکائیاں ہیں۔

اس لیے اکائیاں $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$

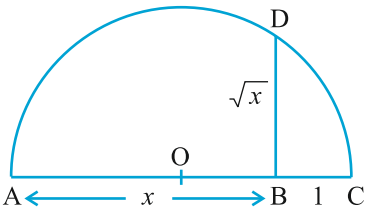
اب $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

اس لیے پیتھا گورس کے مسئلہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

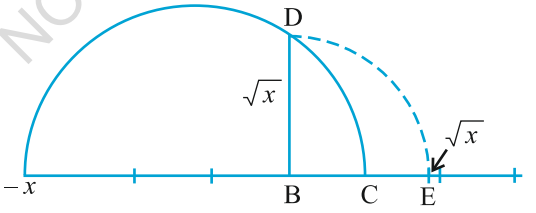
$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $BD = \sqrt{x}$

اس بناوٹ سے ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ جیومیٹریائی طریقہ سے ہم تمام $\sqrt{x}$ حقیقی اعداد کے لیے $x > 0$ کے وجود کو دکھا سکتے ہیں۔ اگر آپ عددی خط پر $\sqrt{x}$ کا مقام معلوم کرنا چاہیں تو آپ خط BC کو عددی خط تصور کیجیے۔ جس میں B کو صفر اور C کو لیں اور اسی طرح آگے تک B کو مرکز مان اور BD نصف قطر لے کر ایک قوس بنالیں جو عددی خط کو نقطہ E پر قطع کرے (شکل 1.13 دیکھیے)۔ تب E، $\sqrt{x}$ کو ظاہر کرے گا۔



شکل 1.12



شکل 1.13

اب ہم چاہیں گے کہ جزرالمربع کا تصور اب جزرالکعب، چوتھا جزر اور عمودی طور پر nواں جزر کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں جہاں n ایک مثبت عدد ہے۔ پچھلی جماعتوں میں آپ نے جزرالمربع، جزرالکعب کے بارے جو کچھ سیکھا ہے، اس کو دہرائیے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

$\sqrt[3]{8}$ کیا ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ یہ وہ مثبت عدد ہے جس کا کعب 8 ہے، آپ نے اندازہ لگایا ہوگا کہ $\sqrt[3]{8} = 2$ ۔ آیئے $\sqrt[5]{243}$ کو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ کیا آپ کسی ایسے عدد کے بارے میں جانتے ہیں جہاں $b^5 = 243$ اس کا جواب 3 ہے۔ اس لیے $\sqrt[5]{243} = 3$

ان مثالوں سے کیا آپ $\sqrt[n]{a}$ کی تعریف بیان کر سکتے ہیں جہاں $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد؟

مان لیجیے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد۔ تب $\sqrt[n]{a} = b$ اگر $b^n = a$ اور $b > 0$

نوٹ کیجئے کہ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[n]{a}$ وغیرہ میں علامت $\sqrt{\ }$ کا استعمال کیا گیا ہے اس علامت $\sqrt{\ }$ کو جزری علامت (Radical Sign) کہتے ہیں۔

اب ہم جذر المربع سے متعلق کچھ مماثلات کی فہرست بناتے ہیں جو مختلف طور پر ہمارے لیے مفید ہیں۔ ان میں سے کچھ سے آپ پچھلی جماعتوں میں ہی واقف ہو چکے ہیں اور باقی کو ہم حقیقی اعداد پر جمع پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت کا استعمال کر کے معلوم کر سکتے ہیں اور کچھ کو $(x + y)(x - y) = (x^2 - y^2)$ جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں کا استعمال کر کے۔

مان لیجیے a اور b مثبت حقیقی اعداد ہیں

تب

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

تو

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

یعنی

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

اس لیے ان مماثلات کی کچھ خاص صورتوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال 15: درج ذیل عبارتوں کو مختصر کیجیے:

(i) $\left(5 + \sqrt{7}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ درج بالا مثال میں مختصر کا مطلب ہے کہ عبارت کو ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھنا۔

اس سیکشن کا اختتام ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کو لے کر کرتے ہیں۔ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو دیکھئے، کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ عددی خط پر کہاں واقع ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ یہ غیر ناطق ہے۔ اس کو آپ آسانی سے بتا سکتے تھے جب کہ نسب تمام ناطق ہوتا۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم نسب نما کو ناطق بنا سکتے ہیں؟ یعنی نسب نما کو ایک ناطق عدد بنا سکتے ہیں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم ان مماثلات کا استعمال کرتے ہیں جن میں جز رشامل ہیں۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ کیسے۔

مثال 16: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے نسب نما کو ناطق بنایئے

حل: ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو اس عبارت کے متبادل لکھنا چاہتے ہیں۔ جس میں نسب نما ناطق عدد ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ ناطق ہے۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب کرنے پر ایک معادل عبارت حاصل ہوتی ہے کیونکہ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$۔ اس لیے ہم ان دونوں حقیقتوں کو ایک ساتھ رکھ کر حاصل کرتے ہیں

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اس شکل میں ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو آسانی سے عددی خط پر تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ 0 اور $\sqrt{2}$ کے درمیان آدھے فاصلے پر واقع ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 17: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل: یہاں ہم مماثل (iv) کا استعمال کرتے ہیں جو اوپر دیا گیا ہے۔ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کو $2-\sqrt{3}$ سے ضرب اور تقسیم کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

مثال 18: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے:

حل: یہاں ہم مماثل (iii) کا استعمال کرتے ہیں۔

اس لیے

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

مثال 19: $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے:

حل:

$$\frac{1}{7+3\sqrt{2}}=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right)=\frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}=\frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

اس لیے جب کسی عبارت کے نسب نما میں ایسا رُکن ہو جس میں جزر ہو، اس کو ایسی عبارت کے معادل تبدیل کرنے کے لیے جس کا نسب نما ناطق ہو، ہم نسب نما کو ناطق بنانا کہتے ہیں۔

مشق 1.4

1. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجئے:

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) 2π

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. مندرجہ ذیل عبارت کو مختصر کیجئے:

(i) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$ (ii) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ (iv) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

3. یاد کیجئے کہ π کو ہم دائرہ کے محیط (C) اور اس کے قطر (d) کی نسبت کے طور پر جانتے ہیں یعنی $\pi = \frac{c}{d}$ ۔ یہ اس حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس تضاد کو آپ کس طرح سے ٹھیک کریں گے؟

4. $\sqrt{9.3}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجئے۔

5. مندرجہ ذیل کے نسب نماؤں کو ناطق بنائیے:

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.5 حقیقی اعداد کے لیے قوت نما کے قوانین: (Laws of Exponents of Real Numbers)

کیا آپ کو یاد ہے کہ درج ذیل کی تحسیب کس طرح کریں گے؟

(i) $17^2.17^2 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} -$ (iv) $7^3.9^3 -$

کیا آپ یہ جوابات حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ مندرجہ ذیل ہیں:

(i) $17^2.17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 - 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} - 23^3$ (iv) $7^3.9^3 = 63^3$

ان جوابات کو حاصل کرنے کے لیے آپ نے مندرجہ ذیل قوت نما کے قوانین کا استعمال کیا (یہاں a، m اور n فطری اعداد ہیں یاد کیجئے کہ a اساس کہلاتا ہے اور m اور n قوت نما) جو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

(i) $a^m.a^n = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ کیا ہے؟ ہاں یہ 1 ہے۔اس طرح سے آپ سیکھ چکے ہیں کہ $(a)^n - 1$ اس لیے (iii) کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$۔ اس طرح سے ہم ان قوانین کو منفی قوت نماؤں کے لیے آگے بڑھا سکتے ہیں۔

اس لئے مثال کے طور پر

(i) $17^2.17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^{-7}} = 23^{17}$ (iv) $(7)^{-3}.(9)^{-3} = (63)^{-3}$

فرض کیجئے ہم درج ذیل تحسیبات کرنا چاہتے ہیں:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^3}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہم انہیں کس طرح سے حاصل کریں گے؟ان کو حل کرنے کے لیے ہم قوت نماؤں کے قوانین جن کو پہلے پڑھ چکے ہیں اس کو ناطق اعداد کے لیے آگے بڑھا سکتے ہیں یہاں تک کہ جب اساس مثبت حقیقی اعداد اور قوت نما ناطق اعداد ہوں (بعد میں آپ مزید سیکھیں گے کہ ان کو قوانین کو تب بھی استعمال کر سکتے ہیں جب قوت نما حقیقی عدد ہو)۔اس سے پہلے کہ ہم ان قوانین کو بیان کریں ہم ان کو سمجھنے کی پہلے کوشش کرتے ہیں۔مثال کے طور پر $4^{3/2}$ لیجئے۔اس کے لیے ہمیں کچھ کام کرنا ہے۔

سیکشن 1.4 میں ہم نے کسی بھی حقیقی عدد $a > 0$ کے لیے $\sqrt[n]{a}$ کو درج ذیل طریقہ سے معرف کیا تھا۔

مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد۔تب $\sqrt[n]{a} = b$، اگر $b^n = a$ اور $b > 0$

قوت نماؤں کی زبان میں ہم تعریف بیان کرتے ہیں $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ اس لیے خاص طور پر $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ اب ہم $4^{3/2}$ کو دو طریقوں سے مختصر کر سکتے ہیں۔

$$4^{3/2} = \left(4^{3/2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{3/2} = \left(4^3\right)^{1/2} = (64)^{1/2} = 8$$

اس لیے اب ہمارے پاس درج ذیل تعریف ہے:

مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے۔ مان لیجئے m اور n صحیح اعداد ہیں اور ان میں 1 کے علاوہ کوئی بھی مشترک جزو ضربی نہیں ہیں ہے اور $n > 0$ تب

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

اب ہمارے پاس نئے قوت نما کے قوانین ہیں جو درج ذیل ہیں:

مان لیجئے $a > 0$ حقیقی اعداد ہے اور p اور q ناطق اعداد۔ تب ہمارے پاس:

(i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ان قوانین کا استعمال آپ اوپر پوچھے گئے سوالات کا جواب دینے کے لیے کر سکتے ہیں۔

مثال 20: مختصر کیجئے:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

حل:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{3/3} = 2^1 = 2$

(ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{2}{15}}$

(iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}} = (13\times17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 1.5

1. معلوم کیجیے

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. معلوم کیجیے:

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{-\frac{1}{3}}$

3. مختصر کیجیے:

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{3}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.7 خلاصہ:

اس باب میں آپ نے درج ذیل اہم باتیں سیکھیں:

1. ایک عدد r ناطق عدد ہوتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔
2. ایک عدد غیر ناطق کہلاتا ہے جب وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جا سکے تو جہاں p اور q صحیح اعداد ہو اور $q \neq 0$
3. ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوتا ہے یا غیر مختتم تکراری یا ایک حقیقی عدد جس کا عشری پھیلاؤ مختتم یا غیر مختتم تکراری ہوتا ہے، ناطق عدد ہوتا ہے۔
4. ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ نہ تو مختتم ہوتا ہے نہ غیر مختتم تکراری یا ایک حقیقی عدد جس کا عشری عدد نہ مختتم ہوتا نہ غیر مختتم غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔
5. تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر حقیقی اعداد کہلاتے ہیں۔
6. اگر r ناطق ہے اور s غیر ناطق تب $r+s$، $r-s$، rs، $\frac{r}{s}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔

7. مثبت حقیقی اعداد a اور b کے لیے مندرجہ ذیل مماثلات درست ہیں۔

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

8. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ کے نسب نما کو ناطق بنانے کے لیے ہم اس کو $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ سے ضرب کرتے ہیں جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

9. مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور p اور q ناطق اعداد ہیں تب

(i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^pb^p = (ab)^p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

باب 2

X2U4U2

کثیر رکنیاں (POLYNOMIALS)

2.1 تعارف (Introduction)

آپ الجبری عبارتیں، ان کی جمع، تفریق، ضرب، اور تقسیم کے بارے میں پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ کچھ الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کیسے معلوم کیے جاتے ہیں۔ آپ کچھ مماثلات کو یاد کیجیے۔

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

اور اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ان کا استعمال کو یاد کیجیے۔ اس باب میں ہم ایک خاص قسم کی الجبری عبارت جسے کثیر رکنی کہتے ہیں، اس کے بارے میں مطالعہ کریں گے اور اس سے متعلق اصطلاحات کا بھی مطالعہ کریں گے۔ ہم باقی کا مسئلہ اور جزو ضربی کے مسئلہ کا بھی مطالعہ کریں گے اور اجزائے ضربی بنانے کے لیے ان کا استعمال کرنا سیکھیں گے اس کے علاوہ ہم کچھ اور مماثلات کا مطالعہ کریں گے اور یہ بھی سیکھیں گے کہ کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے اور الجبری عبارتوں کی قدر معلوم کرنے میں ان کا استعمال کس طرح کیا جاتا ہے۔

2.2 ایک متغیر والی کثیر رکنیاں (Polynomials in One Variable)

آیئے یہ بات دہرا کر شروعات کرتے ہیں کہ ایک متغیر کو کسی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں جس کی کوئی بھی حقیقی قدر ہو سکتی ہے۔ ہم ان متغیر کو ظاہر کرنے کے حروف x، y اور z وغیرہ کا استعمال کرتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ $2x$، $3x$، $-x$ اور $x - \frac{1}{2}$ الجبری عبارتیں ہیں۔ یہ تمام عبارتیں (ایک مستقلہ) $\times x$ شکل کی ہیں۔ فرض کیجیے ہم ایک عبارت (مستقلہ) $\times$

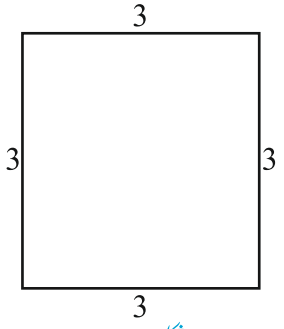
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(متغیر) کی شکل میں لکھنا چاہتے ہیں اور ہم مستقلہ کے بارے میں کچھ نہیں جانتے ۔ ایسی حالت میں ہم مستقلہ a، b اور c وغیرہ لکھتے ہیں۔اس طرح سے عبارت ax ہو جائے گی۔

یہ بات مزید غور کرنے کی ہے کہ مستقلہ اور متغیر کو ظاہر کرنے والے حروف میں فرق ہوتا ہے۔کسی خاص حالت میں مستقلہ کی قدر یکساں رہتی ہے۔یعنی کسی دیئے ہوئے سوال میں مستقلوں کی قدر نہیں بدلتی لیکن متغیر کی قدر بدلتی رہتی ہے۔

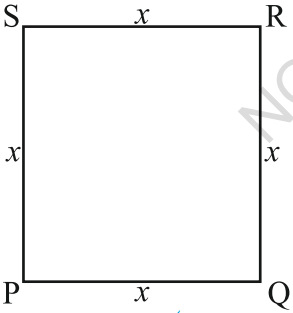
اب 3 اکائیوں والے ضلع کے ایک مربع پر غور کیجیے (شکل 4.1 دیکھئے)۔

اس کا احاطہ کیا ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ مربع کا احاطہ اس کے چاروں اضلاع کا حاصل جمع ہوتا ہے ۔ یہاں ہر ضلع 3 اکائیوں کا ہے۔اس لیے اس کا احاطہ 4×3 یعنی 12 اکائیاں ہے۔اس کا احاطہ کیا ہوگا جب اس کا ضلع 10 اکائیوں کا ہو؟ احاطہ ہے 4×10 یعنی 40 اکائیاں۔ایسی حالت میں جب اس کا ضلع x اکائی ہو (شکل 4.2 دیکھئے) تو اس کا احاطہ ہوگا 4x اکائیاں۔اس طرح سے اگر ضلع کی لمبائی تبدیل ہوتی ہے تو احاطہ بھی تبدیل ہوتا ہے۔



شکل 2.1:

آپ کیا مربع PQRS کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟ یہ ہے $x \times x = x^2$ مربع اکائیاں۔ x^2 ایک الجبری عبارت ہے۔آپ اور دوسری الجبری عبارتوں سے بھی واقف ہیں جیسے $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$ نوٹ کیجیے آپ نے ابھی تک جتنی الجبری عبارتوں پر غور کیا ہے، ان میں متغیر کا قوت نما ایک مکمل عدد ہے۔اس طرح کی عبارتیں ایک متغیر والی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔مذکورہ بالا مثال میں متغیر x ہے۔مثال کے طور پر $x^3 - x^2 + 4x + 7$، x میں ایک کثیر رکنی ہے۔ اسی طرح سے $3y^2 + 5y$، y میں ایک کثیر رکنی ہے اور $t^2 + 4$، t میں ایک کثیر رکنی ہے۔



شکل 2.2:

کثیر رکنی $x^2 + 2x$ میں عبارتیں x^2 اور $2x$ ارکان کہلاتی ہیں۔اس طرح سے $3y^2 + 5y + 7$ میں 3 ارکان ہیں جو ہیں $3y^2$، $5y$ اور 7۔کیا آپ کثیر رکنی $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ کے ارکان لکھ سکتے ہیں؟اس کثیر رکنی کے 4 ارکان ہیں جو ہیں $-x^3$، $4x^2$، $7x$ اور -2

کثیر رکنی کے ہر رکن کا ایک ضریب ہوتا ہے۔اس لیے $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ میں x^3 کا ضریب -1، x^2 کا

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ضریب 4۔اور x کا ضریب 7 x° اور 2–ضریب ہے x° (یاد کیجیے $x^0 = 1$) کیا آپ جانتے ہیں کہ $x^2 - x + 7$ میں x کا ضریب کیا ہے؟ یہ ہے 1–

2 بھی ایک کثیر رکنی ہے۔ درحقیقت 2,-5,7 وغیرہ مستقل کثیر رکنیوں کی کچھ مثالیں ہیں۔ مستقل کثیر رکنی 0 صفر کثیر رکنی (Zero Polynomial) کہلاتی ہیں۔ آپ اگلی جماعتوں میں دیکھیں گے کہ تمام کثیر رکنیوں کے مجموعہ میں ان کا ایک اہم کردار ہوگا۔

اب الجبری عبارتوں جیسے $x + \frac{1}{x}$ ، $\sqrt{x} + 3$ اور $\sqrt[3]{y} + y^2$ پر غور کیجیے ۔کیا آپ جانتے ہیں کہ اب $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ لکھ سکتے ہیں؟ یہاں دوسرے رکن یعنی x^{-1} کا قوت نما 1– ہے جو ایک مکمل عدد نہیں ہے۔اس لیے یہ الجبری عبارت ایک کثیر رکنی نہیں ہے۔

مزید $\sqrt{x} + 3$ کو ہم $x^{\frac{1}{2}} + 3$ لکھ سکتے ہیں ۔یہاں x کا قوت نما $\frac{1}{2}$ ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔تو کیا $\sqrt{x} + 3$ ایک کثیر رکنی ہے؟ نہیں یہ نہیں ہے۔ $\sqrt[3]{y + y}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ یہ بھی کثیر رکنی نہیں ہے (کیوں؟)۔

اگر کسی کثیر رکنی میں متغیر x ہے تو ہم اس کو $p(x), q(x)$ یا $r(x)$ وغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔مثال کے طور پر ہم لکھ سکتے ہیں:

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ایک کثیر رکنی میں کتنے بھی محدود ارکان ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور $x^{150} + x^{149} + \ldots + x^2 + x + 1$، 151 ارکان والی ایک کثیر رکنی کی مثال ہے۔

کثیر رکنیوں $2x$ ، 2 ، $5x^3$ ، $5x^2$ ، y اور u^4 پر غور کیجیے۔کیا آپ دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کثیر رکنی ہیں صرف ایک رکن ہے؟ ایسی کثیر رکنیاں جن میں صرف ایک رکن ہوتا ہے ایک رکنی کہلاتی ہے (ایک کا مطلب ایک)۔

مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کا مشاہدہ کیجیے:

$$p(x) = x + 1,\ q(x) = x^2 - x,\ r(y) = y^9 + 1,\ t(u) = u^{15} - u^2$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ان میں سے ہر ایک کثیر رکنی میں کتنے ارکان ہیں؟ ہر کثیر رکنی میں 2 ارکان ہیں۔ ایسی کثیر رکنیاں جن میں صرف دو ارکان ہوں دو رکنی کہلاتی ہیں۔

اسی طرح ایسی کثیر رکنیاں جن میں 3 ارکان ہوتے ہیں سہ رکنی (سہ مطلب تین) کہلاتی ہے۔ ان کی کچھ مثالیں ہیں:

$$p(x) = x + x^2 + \pi \qquad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$$

$$r(u) = u + u^2 - 2 \text{ ,} \qquad t(y) = y^4 + y + 5$$

اب کثیر رکنی $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ کو دیکھیے۔ وہ کونسا رکن ہے جس میں x کی قوت سب سے زیادہ ہے؟ یہ $3x^7$ ہے۔ اس رکن میں x کا قوت نما 7 ہے۔ اسی طرح سے کثیر رکنی $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ میں وہ رکن جس میں y کی قوت سب سے زیادہ ہے $5y^6$ ہے اور اس رکن میں y کا قوت نما 6 ہے۔ کسی کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت کو اس کثیر رکنی کا درجہ کہتے ہیں۔ اس طرح سے کثیر رکنی $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ کا درجہ 7 ہے اور کثیر رکنی $5y^6 - 4y^2 - 6$ کا درجہ 6 ہے۔ ایک غیر صفر مستقلہ کثیر رکنی کا درجہ صفر ہوتا ہے۔

مثال 1: درج ذیل ہر ایک کثیر رکنی کا درجہ معلوم کیجیے:

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

حل: (i) اس کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت 5 ہے۔ اس لیے اس کا درجہ 5 ہے۔

(ii) اس کثیر رکنی میں متغیر کی سب سے بڑی قوت 8 ہے۔ اس لیے اس کا درجہ 8 ہے۔

(iii) یہاں واحد رکن 2 ہے جس کو ہم $2x^0$ لکھ سکتے ہیں۔ اس لئے x کا قوت نما 0 ہے۔ اس لیے اس کثیر رکنی کا درجہ 0 ہے۔

اب کثیر رکنیوں $p(x) = 4x + 5, q(y) = 2y, r(t) = t + \sqrt{2}$ اور $s(u) = 3 - u$ کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا آپ ان سب میں کچھ مشترک پاتے ہیں؟ ان تمام کثیر رکنیوں کا درجہ ایک ہے۔ ایسی کثیر رکنیاں جن کا درجہ 1، ہو خطی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔ ایک متغیر والی کچھ اور کثیر رکنیاں ہیں $2x - 1, \sqrt{2}y + 1, 2 - u$ اب x متغیر والی ایسی خطی کثیر رکنی معلوم کرنے کی کوشش کیجیے جس کے 3 ارکان ہوں؟ آپ معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ x متغیر والی خطی کثیر رکنی میں زیادہ سے زیادہ 2 ارکان ہو سکتے ہیں اور وہ $ax + b$ شکل کی ہوگی جہاں a اور b مستقلہ میں اور $a \neq 0$۔ کیوں؟۔ اسی طرح سے $y, ay + b$ میں ایک خطی کثیر رکنی ہے۔

اب آپ ان کثیر رکنیوں پر غور کیجیے:

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$x^2+\frac{2}{5}x$ اور $2x^2 \mid 5,5x^2 \mid 3x \mid \pi,x^2$

کیا آپ اس بات سے متفق ہیں کہ ان تمام کا درجہ 2 ہے؟ ایسی کثیر رکنی جس کا درجہ دو ہو، دو درجی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔ دو درجی کثیر رکنیوں کی کچھ مثالیں y^2 ، $5y^2$ ، $4y \mid 5y^2$ اور $6 \quad y \quad y^2$ ہیں۔ کیا آپ ایک متغیر والی ایسی دو درجی کثیر رکنی کی مثال دے سکتے ہیں جن میں 4 مختلف ارکان ہوں؟ آپ پائیں گے کہ ایک متغیر والی دو درجی کثیر رکنی میں زیادہ سے زیادہ 3 ارکان ہو سکتے ہیں۔ اگر آپ مزید کچھ دو درجی کثیر رکنیوں کو دیکھیں تو آپ پائیں گے کہ کسی بھی دو درجی کثیر رکنی x میں ax^2+bx+c کی شکل ہوتی ہے جہاں $a \neq 0$ اور a، b، c مستقلہ ہیں۔ اسی طرح دو درجی کثیر رکن y میں ay^2+by+c ہے جہاں $a \neq 0$ اور a، b، c مستقلہ ہیں۔

ہم 3 درجے والی کثیر رکنی کو کعب کثیر رکنی کہتے ہیں۔ x میں کعب کثیر رکنی کی کچھ مثالیں ہیں $2x^3+4x^2+6x+7$ $4x^3,2x^3 \mid 1,5x^3 \mid x^2,6x^3 \quad x,6 \quad x^3$ آپ کیا سوچتے ہیں کہ ایک متغیر والی کعب کثیر رکنی میں کتنے ارکان ہو سکتے ہیں؟ زیادہ سے زیادہ 4 ارکان۔ ان کو ہم ax^3+bx^2+cx+d کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں $a \neq 0$ اور a، b، c، اور d مستقلہ ہوں۔

اب آپ دیکھ چکے ہیں کہ درجہ 1، 2 یا درجہ 3 والی کثیر رکنیاں کیسی ہوتی ہیں۔ کیا آپ ایک متغیر والی ایسی کثیر رکنی لکھ سکتے ہیں جس کا درجہ x ہو جہاں x ایک فطری عدد ہو؟ ایک متغیر x میں n درجہ والی کثیر رکنی کی شکل ہے:

$$a_n x^n \mid a_{n-1}x^{n-1} \mid \ldots \mid a_1 x \mid a_0$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ مستقلہ ہیں اور $a_n \neq 0$

خصوصاً اگر $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_n = 0$ (تمام مستقلہ صفر ہوں)، ہمیں صفر کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے اور اس کو ہم 0 سے ظاہر کرتے ہیں۔ صفر کثیر رکنی کا درجہ کیا ہے؟ صفر کثیر رکنی درجہ معرف نہیں ہے۔

ابھی تک ہم نے صرف ایسی کثیر رکنیوں کی بات کی جس میں صرف ایک متغیر ہے۔ ایسی بھی کثیر رکنیاں ہوتی ہیں جن میں ایک سے زیادہ متغیر ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر $x^2 \mid y^2 \mid xyz$ (جہاں متغیر x، y اور z ہیں) تین متغیر والی کثیر رکنیاں ہیں اسی طرح سے $p^2 \mid q^{10} \mid r$ (جہاں متغیر x، p اور r ہیں) اور u^3+v^3 (جہاں متغیرہ v اور u ہیں) 3 اور 2 متغیر والی کثیر رکنیاں ہیں۔ ان کثیر رکنیوں کے بارے میں تفصیل سے آپ بعد میں پڑھیں گے۔

NOT TO BE REPUBLISHED @KTRS

مشق 2.1

1. مندرجہ ذیل میں کون سی عبارتیں ایک متغیر والی کثیر رکنیاں ہیں اور کون سی نہیں؟
اپنے جواب کی وجوہات بھی بیان کیجیے۔

(i) $4x^2-3x+7$ (ii) $y^3+\sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t}+t\sqrt{2}$

(iv) $y+\frac{2}{y}$ (v) $x^{10}+y^3+t^{50}$

2. مندرجہ ذیل ہر ایک میں x^2 کا ضریب معلوم کیجیے:

(i) $2+x^2+x$ (ii) $2-x^2+x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2+x$ (iv) $\sqrt{2}x-1$

3. 35 درجہ والی دو رکنی اور 100 درجہ والی ایک رکنی کی ایک ایک مثال دیجیے۔

4. مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کا درجہ لکھیے:

(i) $5x^3+4x^2+7x$ (ii) $4-y^2$ (iii) $5t-\sqrt{7}$ (iv) 3

5. مندرجہ ذیل کی خطی، دو درجی اور، کعب کثیر رکنی میں درجہ بندی کیجیے:

(i) x^2+x (ii) $x-x^3$ (iii) $y+y^2+4$ (iv) $1-x$ (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTES

2.3 کثیر رکنی کے صفر (Zeroes of a Polynomial)

کثیر رکنی پر غور کیجیے $p(x)-5x^3-2x^2+3x-2$

اگر $P(x)$ میں ہر ایک جگہ x کو 1 رکھیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$p(1)-5\times(1)^3-2\times(1)^2+3\times(1)-2$$
$$=5-2+3-2$$
$$=4$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں $x=1$ کے لیے $p(x)$ کی قدر 4 ہے۔

اسی طرح $p(0)-5(0)^3-2(0)^2+3(0)-2$

$$--2$$

کیا آپ $P(-1)$ معلوم کر سکتے ہیں؟

مثال 2: متغیر کی نشاندہی کی گئی قدروں کے لیے مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $p(x) = 5x^3 - 3x + 7$، $x = 1$ کے لیے

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$، $y = 2$ کے لیے

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$، $t = a$ کے لیے

حل: (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ کے لیے $p(x)$ کی قدر ہے

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$

$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ کے لیے کثیر رکنی $q(y)$ کی قدر ہے

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ کے لیے $p(t)$ کی قدر ہے

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

اب کثیر رکنی $P(x) = x - 1$ پر غور کیجیے

$p(1)$ کیا ہے؟

نوٹ کیجیے: $P(1) = 1 - 1 = 0$ جیسے کہ $P(1) = 0$

اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 1، کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہے۔

اسی طرح سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ 2، $q(x)$ کا صفر ہے جہاں $q(x) = x - 2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

عمومی طور پر ہم کہتے ہیں کہ عدد c کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہے اگر $p(c) = 0$

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ کثیر رکن $x-1$ کا صفر اس کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی $x-1=0$ جس سے ہمیں $x = 1$ ملتا ہے۔ ہم کہتے ہیں $p(x) = 0$ ایک کثیر رکنی مساوات ہے اور 1 مساوات $p(x) = 0$ کا جزر ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 1، $x-1$ کا صفر ہے یا کثیر رکنی مساوات $x-1 = 0$ کا جزر۔

اب، مستقلہ کثیر رکنی 5 پر غور کیجیے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس کا صفر کیا ہے؟ اس کا کوئی صفر نہیں ہے کیونکہ $5x^0$ میں x کو کسی بھی عدد سے بدلنے پر ہمیں 5 ہی ملتا ہے۔ درحقیقت ایک غیر صفر مستقلہ کثیر رکنی کا کوئی صفر نہیں ہوتا۔ ایک صفر کثیر رکنی کے صفر کے بارے میں کیا خیال ہے؟ رواج ہے کہ ہر ایک حقیقی عدد ایک صفر کثیر رکنی کا صفر ہے۔

مثال 3: جانچ کیجیے کہ -2 اور 2، کثیر رکنی $x+2$ کے صفر ہیں

حل: مان لیجیے $p(x)=x+2$

تب: $p(2)=2+2=4, p(-2)=-2+2=0$

اس لیے -2 کثیر رکنی $x+2$ کا صفر ہے لیکن 2 نہیں ہے۔

مثال 4: کثیر رکنی $p(x) = 2x+1$ کا صفر معلوم کیجیے۔

حل: $p(x)$ کا صفر معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسے مساوات $p(x)=0$ کو حل کرنا۔

اب $2x+1=0$ سے ہمیں $x=-\frac{1}{2}$ ملتا ہے۔ اس لیے $-\frac{1}{2}$ کثیر رکنی $2x+1$ کا صفر ہے۔

اب اگر $p(x)=ax+b, a \neq 0$ ایک خطی کثیر رکنی ہے تو آپ اس کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کیسے معلوم کریں گے؟

مثال 4 سے ہم نے کچھ سیکھا ہے یعنی کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر معلوم کرنا ایسا ہی ہے جیسے مساوات $p(x)=0$ کو حل کرنا۔

اس لیے $p(x)=0$ کا مطلب ہے۔ $ax+b=0, a \neq 0$

اس لیے $ax = -b$

یعنی $x = -\frac{b}{a}$

اس لیے $p(x), x = -\frac{b}{a}$ کا واحد صفر ہے یعنی خطی کثیر رکنی کا ایک اور صرف ایک صفر ہوتا ہے۔ اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ 1، کثیر رکنی $x-1$ اور -2، $x+2$ کے صفر ہیں۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 5: تصدیق کیجیے کہ 2 اور 0 کثیر رکنی $x^2 - 2x$ کے صفر ہیں

حل: مان لیجیے $p(x) = x^2 - 2x$

تب $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

اور $p(0) = 0^2 - 0 = 0$

اس لیے 2 اور 0 دونوں کثیر رکنی $x^2 - 2x$ کے صفر ہیں۔

آیئے اب اپنے مشاہدات کی فہرست بناتے ہیں:

(i) کسی کثیر رکنی کا صفر ضروری نہیں کہ صفر ہو۔

(ii) کسی کثیر رکنی کا صفر، صفر بھی ہو سکتا ہے۔

(iii) ہر خطّی کثیر رکنی کا ایک اور صرف ایک صفر ہوتا ہے۔

(iv) ایک کثیر رکنی کے ایک سے زیادہ صفر بھی ہو سکتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 2.2

1. مندرجہ ذیل کے لیے کثیر رکنی $5x - 4x^2 + 3$ کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. مندرجہ ذیل ہر ایک کثیر رکنی کے لیے $P(0)$، $p(1)$ اور $P(2)$ معلوم کیجیے:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+1)$

3۔ معلوم کیجیے کہ کیا مندرجہ ذیل کثیر رکنی کے سامنے لکھے ہوئے اعداد، کثیر رکنی کے صفر ہیں:

(i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x+1)(x-2), x = -1, 2$

(v) $p(x)=x^2, x=0$ (vi) $p(x)=lx+m, x=-\frac{m}{l}$

(vii) $p(x)=3x^2-1, x=-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ (viii) $p(x)=2x+1, x=\frac{1}{2}$

4۔مندرجہ ذیل میں ہر ایک کثیر رکنی کا صفر معلوم کیجیے:

(i) $p(x)=x+5$ (ii) $p(x)=x-5$ (iii) $p(x)=2x+5$

(iv) $p(x)=3x-2$ (v) $p(x)=3x$ (vi) $p(x)=ax, a\neq 0$

(vii) $p(x)=cx+d, c\neq 0$ جہاں c اور d حقیقی اعداد ہیں۔

2.4 کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی (Factorisation of Polynomials)

کسی کثیر رکنی $g(t)$ کے لیے یہ مندرجہ مسئلہ کی ایک مخصوص حالت ہے۔

جزو ضربی مسئلہ: اگر $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ $n \geq 1$ اور a کوئی حقیقی عدد ہے تب

(i) $x-a$، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے اگر $p(a)=0$ اور

(ii) $p(a)=0$ اگر $x-a$، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے۔

ثبوت $p(x)=(x-a)\,q(x)+p(a)$

(i) اگر $p(a)=0$ تب $p(x)=(x-a)q(x)$ جو ظاہر کرتا ہے کہ $x-a$ ایک جزو ہے $p(x)$ کا۔

(ii) جب کہ $x-a$ ایک رکن ہے $p(x)=(x-a)\,g(x)$ جو کثیر رکنی اجزائے ضربی $g(x)$ کا۔اس معاملے میں $p(a)=(a-a)g(o)=0$ (a)

مثال 6 : جانچ کیجیے کہ $x+2$، x^3+3x^2+5x+6 اور $2x+4$ کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل: $x+2$ کا صفر -2 ہے مان لیجیے $p(x)=x^3+3x^2+5x+6$ اور $s(x)=2x+4$

تب $p(-2)=(-2)^3+3(-2)^2+5(-2)-6$

$=-8-12-10+6$

$=0$

اس طرح سے جزوضربی کے مسئلہ کے مطابق $x+2$، x^3+3x^2+5x-6 کا جزوضربی ہے۔

دوبارہ $s(-2)=2(-2)+4=0$

اس طرح سے $x+2$، $2x+4$ کا بھی جزوضربی ہے درحقیقت اس کی جانچ ہم جزوضربی کے مسئلہ کا استعمال کیے بغیر بھی کر سکتے ہیں کیونکہ $2x+4=2(x+2)$

مثال 7 : k کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x-1$، $4x^3+3x^2-4x+k$ کا جزوضربی ہے۔

حل: کیونکہ $x-1$ جزوضربی ہے $p(x)=4x^3+3x^2-4x+k$ کا

$p(1)=0$

اب $p(1)=4(1)^3+3(1)^2-4(1)-k$

اس لیے $4+3-4+k=0$

یعنی $k=-3$

اب دودرجی کثیر رکنی جیسے x^2+lx+m کے اجزائے ضربی بنانے سے پہلی ہی واقف ہیں آپ نے اس کے وسطی رکن lx کو $(ax+bx)$ کے طور پر منقسم کیا تھا جب کہ $ab=m$ تب $x^2+lx+m=(x+a)(x+b)$ اب ہم دودرجی کثیر رکنی جہاں $a\neq 0$، a، b اور c مستقل ہوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کریں گے کثیر رکنی ax^2+bx+c کے وسطی رکن کو منقسم کرکے اجزائے ضربی بنانے کا عمل مندرجہ ذیل ہے۔

مان لیجیے اسی اجزائے ضربی میں $(px+q)(rx+s)$ تب

$ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)=prx^2+(ps+qr)x+qs$

x^2 کے ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $a=pr$

اسی طرح سے x کھلے ضربیوں کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $b=ps+qr$ اور مستقلہ ارکان کا موازنہ کرنے پر

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہمیں حاصل ہوتا ہے $c=qs$ اس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ b دو اعداد ps اور qr کا حاصل جمع ہے جس کا حاصل ضرب

$$(ps)(qr)=(pr)(qs)=ac$$

اس لیے ax^2+bx+c کے اجزائے ضربی بنانے کے لیے ہم b سے دو اعداد کے حاصل جمع کے طور پر لکھتے ہیں جن کا حاصل ضرب ac ہو مندرجہ ذیل مثال سے اس کی مزید وضاحت ہو جائے گی۔

مثال 8 : $6x^2+17x+5$ کے وسطی رکن کو منقسم کر کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل 1: ہم دو اعداد p اور q ایسے تلاش کرتے ہیں جب کہ $pq=6\times5=30$ تب ہمیں اجزائے ضربی حاصل ہو جائیں گے اس لیے 30 کے اجزائے ضربی کے کچھ جوڑو پر غور کیجیے۔ کچھ ہیں 1 اور 30، 2 اور 15، 3 اور 10، 5 اور 6

ان تمام جوڑوں میں ہمیں 2 اور 15 سے $p+q=17$ ملتا ہے۔

اس لیے $$6x^2+17x+5=6x^2+(2+15)x+5$$
$$=6x^2+2x+15x+5$$
$$=2x(3x+1)+5(3x+1)$$
$$=(3x+1)(2x+5)$$

حل 1: ہم اس کے اجزائے ضربی، جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے بھی بنا سکتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے (مان لیجیے):

$$6x^2+17x+5=6\left\{x^2+\frac{17}{6}x+\frac{5}{6}\right\}=6p(x)$$

اگر a اور b، $p(x)$ کے صفر ہیں تب $6x^2+17x+5=6(x-a)(x-b)$

اس لیے $ab=\frac{5}{6}$ آیے $\frac{5}{6}$ کے کچھ اجزائے ضربی پر نظر ڈالتے ہیں یہ ہو سکتے ہیں $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}$

اب $p\left\{\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}+\frac{17}{6}\left\{\frac{1}{2}\right\}+\frac{5}{6}\neq0$ لیکن $p\left\{\frac{-1}{3}\right\}=0$ اس لیے $\left\{x+\frac{1}{3}\right\}$، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے

اسی طرح سے آپ کوشش کر کے معلوم کر سکتے ہیں کہ $x+\frac{5}{2}$ بھی $p(x)$ کا جزو ضربی ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لیے $6x^2+17x+5=6\left\{x+\frac{1}{3}\right\}\left\{x+\frac{5}{2}\right\}$

$=6\left\{\frac{3x+1}{3}\right\}\left\{\frac{2x+5}{2}\right\}$

$=(3x+1)(2x+5)$

اس مثال کے لیے وسطی رکن کی منقسم کرنے کا طریقہ زیادہ موضوع ہے۔اس لیے اب دوسری مثال پر غور کرتے ہیں ہم جزوضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے اس کے اجزائے ضربی بناتے ہیں جو درج ذیل ہیں۔

مثال 9 : جزوضربی کے مسئلہ کو استعمال کر کے y^2-5y+6 کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $p(y)=y^2-5y+6$ اب اگر $p(y)=(y-a)(y-b)$ تو آپ جانتے ہیں کہ مسئلہ رکن ہوگا اس لیے ab=6۔اس لیے p(y) کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ہم 6 اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں۔

6 کے اجزائے ضربی ہیں 1, 2 اور 3

اب $p(2)=2^2-(5\times 2)+6=0$

اس لیے $y-2$ کا جزوضربی ہے p(y)

مزید $p(3)=3^2-(5\times 3)+6=0$

اس طرح سے $y-3$ بھی y^2-5y+6

اس لیے $y^2-5y+6=(y-2)(y-3)$

نوٹ کیجیے کہ y^2-5y+6 کو وسطی نقطہ 5y– کو منقسم کر کے بھی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

اس لیے اب کعب کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے پر غور کرتے ہیں۔ یہاں وسطی رکن کو منقسم کرنے کا طریقہ موضوع نہیں ہے۔ پہلے ہم کم سے کم ایک جزوضربی معلوم کرنا ہوگا جیسا اب مندرجہ ذیل مثال میں دیکھیں گے۔

مثال 10: $x^3-23x^2+142x-120$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $p(x)=x^3-23x^2+142x-120$

اب ہم 120– کے تمام اجزائے ضربی پر غور کرتے ہیں یہ ہیں

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\pm 1, =2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7. \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60.$

کوشش کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $p(1)=0$ اس لیے $(x-1)$، $p(x)$ کا ایک جزو ضربی ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ:

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$

$$(\text{کیوں؟}) \quad -(x-1)x^2 - 22x(x-1) + 120(x-1)$$

[comman(x–1) لینے پر] $-(x-1)x^2 - 22(x+120)$

یہ اجزائے ضربی ہم p(x) کو (x–1) سے تقسیم کرکے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

اب $x^2 - 22x + 120$ کو ہم وسطی رکن کو منقسم کرکے بھی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں اور جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کرکے بھی وسطی رکن کو منقسم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x-12) - 10(x-12) \\ &= (x-12)(x-10) \end{aligned}$$

اس لیے $x^3 12x^2 - 142x - 120 - (x-1)(x-10)(x-12)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 2.3

1. مندرجہ ذیل کونسی کثیر رکنیوں کا جزو ضربی x+1 ہے:

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 + x^2 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. جزو ضربی کے مسئلہ کو استعمال کرکے بتائے کہ مندرجہ ذیل ہر ایک کے لیے $g(x)$، $p(x)$ کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

(i) $p(x) - 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) - x + 1$

(ii) $p(x) - x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) - x + 2$

(iii) $p(x) - x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) - x - 3$

3. اگر $x-1$، $p(x)$ کا جزوضربی ہے تو مندرجہ ذیل پر ایک کے لیے k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $p(x)=x^2+x+k$ (ii) $p(x)=2x^2+kx+\sqrt{2}$

(iii) $p(x)=kx^2-\sqrt{2x}+1$ (iv) $p(x)=kx^2-3x+k$

4. اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $12x^2-7x+1$ (ii) $2x^2+7x+3$

(iii) $6x^2+5x-6$ (iv) $3x^2-x-4$

5. اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) x^3-2x^2-x-2 (ii) x^3-3x^2-9x-5

(iii) $x^3-13x^2+32x+20$ (iv) $2y^3+y^2-2y-1$

2.5 الجبری تماثلات: (Algebraic Identities)

پچھلی جماعتوں میں آپ نے پڑھا ہے کہ الجبری تماثل ایک ایسی الجبری مساوات ہوتی ہے جو اس میں موجود متغیر جن کی تمام قدروں کے لیے درست ہوتی ہے آپ مندرجہ ذیل الجبری تماثلات کے بارے میں پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

تماثل I: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

تماثل II: $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

تماثل III: $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

تماثل IV: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

آپ نے ان تمام تماثلات کا استعمال الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے کیا ہوگا اس کی افادیت آپ تجسیب میں بھی دیکھ سکتے ہیں۔

مثال 11: مناسب تماثلات کا استعمال کرکے مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(x-3)(x+5)$

حل: (i) یہاں ہم تماثل 1 کا استعمال کرتے ہیں: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ اس میں $y=3$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

3. اگر $x-1$، $p(x)$ کا جزوضربی ہے تو مندرجہ ذیل پر ایک کے لیے k کی قیمت معلوم کیجیے۔

@PCTB NOT TO BE REPUBLISHED

$$(x+3)(x+3)-(x-3)^2-x^2+2(x)(3)+(3)^2$$

$$=x^2+6x+9$$

(ii) تماثل IV کا استعمال کرنے پر $(x+a)(x+b)-x^2+(a+b)x+ab$ ہمیں ملتا ہے:

$$(x-3)(x+5)-x^2+(-3+5)x+(-3)(5)$$

$$=x^2+2x-15$$

مثال 12: سیدھی ضرب کیے بغیر 105×106 کی قدر معلوم کیجیے

حل:

$$105\times106=(100+5)\times(100+6)$$

تماثل iv استعمال کرنے پر

$$-(100)^2+(5+6)(100)+(5\times6)$$

$$=1000+1100+30$$

$$=11130$$

آپ کچھ دی ہوئی عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے مذکورہ بالا تماثلات کا استعمال دیکھ چکے ہیں ان تماثلات کا استعمال ہم الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے بھی کرتے ہیں جیسا کہ مندرجہ ذیل مثالوں میں کیا گیا ہے۔

مثال 13: اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

(i) $49a^2+70ab+25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2-\frac{y^2}{9}$

حل: (i) یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ: $49a^2-(7a)^2, 25b^2-(5b)^2, 70ab-2(7a)(5b)$

اس عبارت کا موازنہ $x^2+2xy+y^2$ سے کرنے پر ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ x=7a اور y=5b اس طرح سے تماثل I کا استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$49a^2+70ab+25b^2=(7a+5b)^2=(7a+5b)(7a+5b)$$

(ii) ہمارے پاس ہے $\frac{25}{4}x^2-\frac{y^2}{9}=\left\{\frac{5}{2}x\right\}^2-\left\{\frac{y}{3}\right\}^2$

اب اس کو تماثل III سے موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{25}{4}x^2-\frac{y^2}{9}=\left\{\frac{5}{2}x\right\}^2-\left\{\frac{y}{3}\right\}^2$$

© KIRS NOT TO BE REPUBLISHED

$$=\left\{\frac{5}{2}x+\frac{y}{3}\right\}\left\{\frac{5}{2}x-\frac{y}{3}\right\}$$

اس طرح سے ہماری تمام تر تماثلات دو رکنیوں کے حاصل ضرب پر مشتمل ہیں آیئے اب ہم تماثل I کی توسیع سہ رکنی $x+y+z$ تک کرتے ہم $(x+y+z)^2$ کی تحسیب تماثل I کے استعمال سے کرتے ہیں۔

مان لیجیے $x+y=t$ تب $(x+y+z)^2-(t+z)^2$

تماثل 1 کے استعمال کرنے پر $=t^2+2tz+t^2$

کی قیمت رکھنے پر $-(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

(تماثل 1 کے استعمال کرنے پر) $-x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$

(ارکان کو ترتیب میں رکھنے پر) $-x^2+y^2+z^2+2xy-2yz+2zx$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے:

تماثل V : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

ریمارک: ہم R.H.S. عبارت کو L.H.S. عبارت کی پھیلی ہوئی شکل کہتے ہیں۔ نوٹ کیجئے کہ عبارت $(x+y+z)^2$ تین مربع ارکان اور تین حاصل ضرب ارکان میں:

مثال 14: $(3a+4b+5c)^2$ کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے۔

حل: دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x+y+z)^2$ سے کرتے ہیں ہمیں ملتا ہے کہ $x=3a, y=3b$ اور $z=5c$

اس لیے تماثل کا استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$(3a+4b+5c)^2-(3a)^2+(4b)^2+(5c)^2+2(3a)(4b)+2(4b)(5c)+2(5c)(3a)$$
$$=9a^2+16b^2+25c^2+24ab+40bc+30ac$$

مثال 15: $(4a-2b-3c)^2$ کو پھیلا کر لکھئے:

حل: تماثل V کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$(4a-2b-3x)^2-|4a+(-2b)+(-3c)|^2$$
$$-(4a^2+(-2b)^2+(-3c)^2-2(4a)(-2b)(-3c)+2(-3c(4a)$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$=16a^2+4b^2+9c^2-16ab+12bc-24ac$$

مثال 16: $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے:

$$-4x^2+y^2-z^2-4xy-2yz+4xz-(2x)^2+(-y)^2+2(2x)(-y)+2(-y)(z)+2(2x)(z)$$

$$-(2x+(-y)+z)^2 \quad \text{(تماثل V کو استعمال کرنے پر)}$$

$$-(2x-y+z)^2-(2x-y+z)(2x-y+z)$$

اب تک ہمارا واسطہ ان تماثل سے پڑا ہے جن کا درجہ 2 ہے اب ہم اپنی تماثل 1 کی توسیع $(x+y)^3$ کی تحسیب کرنے کے لیے کرتے ہیں ہمارے پاس ہے:

$$(x+y)^3-(x+y)(x+y)^2$$

$$-(x+y)(x^2+2xy+y^2)$$

$$-x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2-2xy-y^2)$$

$$-x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy+y^3$$

$$-x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے:

تماثل VI: $(x+y)^3-x^3+y^3+3xy(x+y)$

مزید اگر تماثل vi میں y کی جگہ $-y$ کو دیں تو ہمیں تماثل vi حاصل ہوتی ہے)

تماثل VII: $(x-y)^3-x^3-y^3-3xy(x-y)$

$$-x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

مثال 17: مندرجہ ذیل مکعبوں کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے:

(i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(5p-3q)^3$

حل: دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x+y)^3$ کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$y = 4b$ اور $x = 3a$

اس طرح سے تماثل VI کو استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے:

$$(3a+4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$

$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) دی ہوئی عبارت کا موازنہ $(x-y)^3$ سے کرنے پر ہم پاتے ہیں:

$$x = 5p, y = 3q$$

تماثل VII کا استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے:

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

مثال 18: مناسب تماثلات کا استعمال کرتے ہیں مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

حل: ہمارے پاس ہے:

$$(104)^3 = (100+4)^3$$

$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$$ (تماثل VI کو استعمال کرنے پر)

$$= 100000 + 64 + 124800$$

$$= 1124864$$

(ii) ہمارے پاس ہے:

$$(999)^3 = (1000-1)^3$$

$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$$ تماثل vii کا استعمال کرنے پر

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$

$$= 997002999$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 19: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے:

حل: دی ہوئی عبارت کو ہم لکھ سکتے ہیں:

$$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y)^2$$

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y^2)$$

$(2x+3y)^3$ (تماثل vi کا استعمال کرنے پر)

$$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$$

اب $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ پر غور کیجیے

پھیلانے پر اس حاصل ضرب سے ہمیں ملتا ہے

$$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-zx^2+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z+x^2z+y^2z+z^3-xyz^2-yz-xz^2$$

مختصر کرنے پر $= x^3+y^3+z^3-3xyz$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل تماثل حاصل ہوتی ہے

تماثل viii $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

مثال 20: $8x^3+y^3+27z^3-18xyz$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل: یہاں ہمارے پاس ہے

$$=(2x)^3+y^3+(3z)^3-3(2x)(y)(3z)$$

$$=(2x+y+3z)[(2x)^2+y^2+(3z)^2-(2x)(y)-(y)(3z)-(2x)(3z)]$$

$$=(2x+y+3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy-3yz-6xz)$$

مشق 2.4

1. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کیجیے

(i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$ (iii) $(3x+4)(3x-5)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$ (v) $(3-2x)(3+2x)$

2. سیدھی ضرب کے تعبیر مندرجہ حاصل ضرب کی قدر معلوم کیجیے

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے اجزائے ضربی بنائیے

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$ (iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

4. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کو پھیلایئے

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$ (iii) $(-2x+3y+2z)^2$

(iv) $(3a-7b-c)^2$ (v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^{-2}$

5. اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

(i) $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-24yz-16xz$

(ii) $2x^2+y^2+8z^2-2\sqrt{2}xy+4\sqrt{2}yz-8xz$

6. مندرجہ ذیل معکبوں کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے

(i) $(2x+1)^3$ (ii) $(2a-3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3$ (iv) $\left[x-\frac{2}{3}y\right]^3$

7. مناسب تماثلات کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. مندرجہ ذیل ہر ایک کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

(i) $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ (ii) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

(iii) $27-125a^3-135a+225a^2$ (iv) $64a^3-27b^3-144a^2b+108ab^2$

(v) $27p^3-\frac{1}{216}-\frac{9}{2}p^2+\frac{1}{4}p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. تصدیق کیجیے

(i) $x^3+y^3-(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

10. ہر ایک کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے

(i) $27y^3+125z^3$

(ii) $64m^3-343n^3$

(اشارہ: سوال نمبر 9 دیکھیے)

11. $27x^3+y^3+z^3-9xyz$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے؟

12. $x^3-y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$ کی تصدیق کیجیے

13. اگر $x+y+z=0$ تو دکھاتے ہیں کہ $x^3-y^3+z^3-3xyz$

14. مکعب تعبیر معلوم کیجیے مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی قدر معلوم کیجیے

(i) $(-12)^3+(7)^3+(5)^3$

(ii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$

15. مندرجہ ذیل مستطیلوں میں لمبائی اور چوڑائی کی وہ ممکن عبارتیں معلوم کیجیے جن میں ان کا رقبہ دیا ہوا ہے؟

(i) رقبہ: $25a^2-35a+12$ (ii) رقبہ: $35y^2+13y-12$

16. اسی کعب نما کی ابعاد کیا ہونگی جن کا حجم مندجہ ذیل ہے

(i) حجم: $3x^2-12x$ (ii) حجم: $12ky^2+8ky-20k$

2.6 خلاصہ

اس باب میں آپ مندرجہ ذیل نقاط کے بارے میں پڑھا۔

1. ایک متغیر میں کثیر رکنی $p(x)$ میں ایک الجبری عبارت ہے جس کی شکل ہے

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جہاں a_0 ، a_1 ، $a_2 ... an$ مستقلہ ہیں $a_n \neq 0$ ، a_0 ، a_1 ، a_2 ، ..... ، a_n بالترتیب x^n ، x ، x^2 ، ..... ، x^n کے ضریب ہیں n کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے اور $a_n x^n$ ، a_{n-1} ، x^{n-1} ، ..... ، a_n ، $a_n \neq 0$ میں سے ہر ایک کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

2. ایک رکن والی کثیر رکنی یک رکنی کہلاتی ہے۔
3. دو رکنی والی کثیر رکنی دو رکنی کہلاتی ہے۔
4. تین رکنی والی کثیر رکنی سہ رکنی کہلاتی ہے۔
5. ایک درجہ والی کثیر رکنی خطی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔
6. دو درجہ والی کثیر رکنی دو درجی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔
7. تین درجہ والی کثیر رکنی مکعبی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔
8. ایک حقیقی عدد a کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے اگر $p(a) = 0$
9. ایک متغیر والی ہر ایک خطی کثیر رکنی کا یکتا صفر ہوتا ہے۔ ایک غیر صفر مستقل کثیر رکنی کا کوصفر نہیں ہوتا اور ہر حقیقی عدد صفر کثیر رکنی کا صفر ہوتا ہے۔
10. جزو ضربی مسئلہ: $x - a$ کثیر رکنی $p(x)$ کا جزو ضربی ہے اگر $p(a) = 0$ مزید اگر $p(x)$ کثیر رکنی کا $p(a) = 0$ کا جزو ضربی ہے تب
11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

باب 3

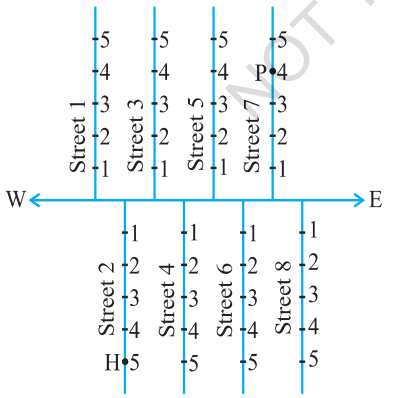
W6J1H9

مختص جیومیٹری (Coordinate Geometry)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.1 تعارف: (Introduction)

آپ پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ کسی نقطہ کو عددی خط یعنی حقیقی عددی خط پر کس طرح تلاش (Locate) کیا جاتا ہے۔ آپ بھی یہ جانتے ہیں کہ خط پر کسی نقطہ کے مقام کو کس طرح بیان کیا جاتا ہے، اب بھی بہت سی ایسی صورت حال ہیں جن میں ہمیں وہ نقطہ معلوم کرنا ہوتا ہے جس کے مقام کو ایک خط سے زیادہ کے حوالے سے بیان کیا جاسکے۔ مثال کے طور پر مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجیے۔



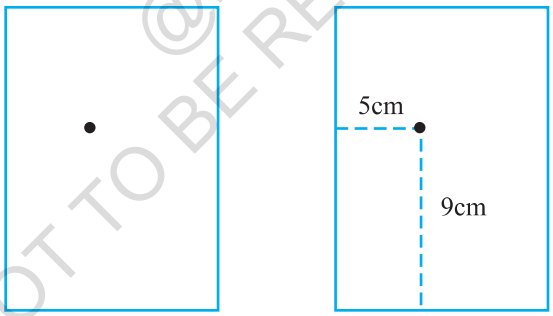
شکل 3.1

1. شکل 3.1 میں ایک سڑک مشرق سے مغرب سمت میں جاتی ہوئی اور گلیاں جن پر نمبر بھی پڑے ہیں مغرب سے مشرق کی سمت میں جاتی نظر آ رہی ہیں۔ مزید ہر ایک گلی میں مکانوں کے نمبر بھی پڑے ہیں۔ ہم یہاں ایک دوست کے مکان کو دیکھنا چاہتے ہیں، کیا حوالہ کا صرف ایک نقطہ کافی ہے؟ مثال کے طور پر ہم صرف یہ جانتے ہیں کہ وہ گلی نمبر 2 میں رہتا ہے، تو کیا ہم اس کا مکان آسانی سے تلاش کرلیں گے؟ اتنی آسانی سے نہیں جب تک کے ہمارے پاس دو معلومات نہ ہوں جیسے گلی کا نمبر

جس میں اس کا مکان واقع ہے اور مکان کا نمبر اگر آپ ایسے مکان پر پہنچنا چاہتے ہیں جو گلی نمبر 2 میں ہو اور اس کا نمبر 5 ہو تب آپ پہلے گلی نمبر 2 کی شناخت کریں گے اور اس کے بعد مکان نمبر 5 کی۔ شکل 3.1 میں H اس مکان کے مقام کو ظاہر کرتا ہے، اسی طرح سے P اس مکان کو ظاہر کرتا ہے جو گلی نمبر 7 میں ہے اور اس کا نمبر 4 ہے۔

II. فرض کیجیے آپ کاغذ کی ایک شیٹ پر ایک نقطہ لگاتے ہیں [شکل 3.2(a)] اگر ہم آپ سے پوچھیں کہ نقطہ کا کاغذ پر مقام کہاں ہے تو آپ اس کو کیسے بتائیں گے؟ شاید اس کا جواب اس طرح سے دیں۔ نقطہ شیٹ کے اوپری آدھے حصہ پر ہے یا یہ کاغذ کے بائیں کنارے پر واقع ہے یا یہ شیٹ کے بائیں طرف کے اوپری کونہ کے نزدیک ہے۔ کیا ان میں سے آپ کو کوئی بھی بیان نقطہ کی جگہ متعین کرتا ہے؟ نہیں لیکن اگر آپ کہتے ہیں کہ نقطہ کاغذ کے بائیں کنارے سے 5 سینٹی میٹر کی دوری پر ہے تو اس سے ہمیں کچھ اس کے مقام کے بارے میں پتہ چلتا ہے لیکن اس کا مقام پھر بھی متعین نہیں ہوتا۔ تھوڑا غور کرنے پر آپ اس قابل ہو جاتے ہیں کہ آپ کہہ سکیں کے نقطہ نچلے خط سے اوپر 9 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہے، اب ہم جانتے ہیں کہ صحیح معنوں میں نقطہ کس جگہ واقع ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 3.2

اس مقصد کے لیے ہم نقطہ کے مقام کا تعین دو متعین خطوط، کاغذ کا بائیں طرف کا کنارہ اور نچلہ کنارہ، سے مخصوص فاصلہ پر کرتے ہیں [شکل 3.2b] دوسرے لفظوں میں کسی نقطہ کا مقام معلوم کرنے کے لیے بھی دو قسم کی معلومات کا ہونا ضروری ہے۔

اب آپ کلاس روم کے درج ذیل مشغلہ کو جسے "Seating Plan" کہتے ہیں۔ کر کے دیکھیے۔

مشغلہ 1 (Seating Plan) : (بٹھانے کا منصوبہ)۔ اب تمام ڈیسک کو ایک ساتھ رکھ کر کلاس روم میں بیٹھنے کا منصوبہ بنائیے

ہر ڈیسک ایک مربع کو ظاہر کرتا ہے۔ ہر ڈیسک پر قابض طالب علم کا نام جس کو وہ مربع ظاہر کرتا ہے۔ کلاس روم میں موجود ہر طالب علم کے مقام کو دو جداگانہ معلومات سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

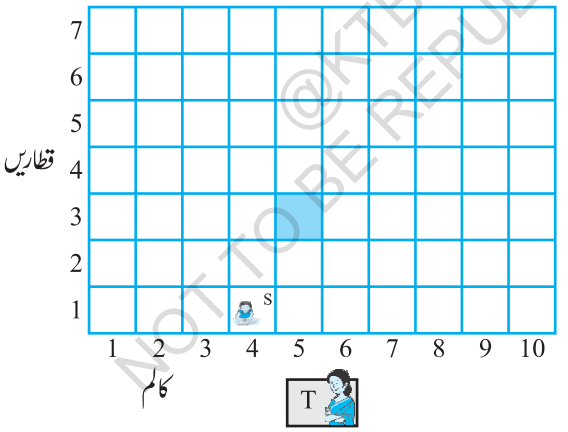
(i) وہ کالم جس میں وہ بیٹھتا یا بیٹھتی ہے،

(ii) وہ قطار جس میں وہ بیٹھتا یا بیٹھتی ہے۔

اگر آپ اس ڈیسک پر بیٹھیں جو کہ پانچویں کالم میں تیسری قطار میں ہے۔ (شکل 3.3 میں شیڈ کیے گئے مربع سے دکھایا گیا ہے۔) آپ کے مقام کو ہم لکھ سکتے ہیں (5,3)، پہلے کالم کا نمبر اور پھر قطار کا نمبر لکھ کر۔ کیا یہ (3,5) کے مساوی ہے؟ اپنی کلاس کے دوسرے طلبا کا نام اور مقام لکھیے۔ مثال کے طور پر اگر سونیا چوتھے کالم اور پہلی قطار میں بیٹھی ہے تو لکھیے (5,1) استاد کا ڈیسک آپ کے منصوبہ میں شامل نہیں ہے۔ ہم استاد کو ایک مشاہدہ کرنے والے کی حیثیت سے دیکھتے ہیں۔

T استاد کے ڈیسک کو ظاہر کرتا ہے

S سونیا کے ڈیسک کو ظاہر کرتا ہے

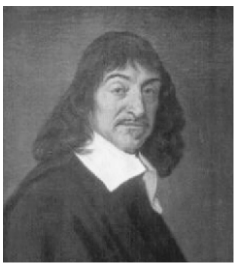


شکل 3.3

مذکورہ بالا بحث سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ مستوی میں موجود کسی بھی شے کے مقام کو دو عمودی خطوط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ والی حالت میں ہمیں نچلے خط اور کاغذ کے بائیں کنارے سے فاصلہ مطلوب ہے۔ بٹھانے کے منصوبہ میں ہمیں کالم اور قطاروں کی تعداد مطلوب ہے۔ اس آسان سے خیال کے دور رس نتائج ہیں۔ جس کی وجہ سے ریاضی کی ایک بہت اہم شاخ مختص جیومیٹری کا انکشاف ہوا۔ اس باب میں ہمارا مقصد مختص جیومیٹری کے بنیادی تصورات سے متعارف کرانا ہے۔ اس کے بارے میں تفصیل سے آپ اگلی جماعتوں میں پڑھیں گے۔ مختص جیومیٹری کی شروعات ایک فرانسیسی فلسفی

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اور ریاضی داں رینے ڈیکارٹ (*Rene Descartes*) نے کی۔



رینے ڈیکارٹ (1596-1650)

شکل 3.4

17 ویں صدی کا عظیم فرانسیسی ریاضی داں رینے ڈیکارٹ (Rene Descartes) اپنے بستر پر لیٹ کر غور و فکر کرنا پسند کرتا تھا۔ ایک دن جب وہ اپنے بستر پر لیٹا ہوا تھا تو اس نے مستوی میں نقطہ کے مقام کے مسئلہ کو حل کر لیا۔ اس کا طریقہ عرض البلد اور طول البلد (Lougetuds) کے قدیم خیال سے ہی نکالا گیا اس کی تعظیم کے لئے مستوی میں نقطہ کے مقام کو بیان کرنے کے نظام کو کارتیزی نظام (*Cartesian System*) سے بھی جانا جاتا ہے۔

مشق 3.1

1. آپ کے مطالعہ کی میز پر رکھے لیمپ کے مقام کو کسی ایک دوسرے شخص کو کیسے بتائیں گے
2. **(گلی کا منصوبہ Street Plan)** ایک شہر کی دو خاص سڑکیں جو شہر کے وسط میں ایک دوسرے کو کراس کرتی ہیں۔ یہ دو سڑکیں شمال-جنوب اور مشرق-مغرب سمت میں ہیں شہر کی باقی تمام گلیاں 2000 میٹر کے فاصلہ پر ان سڑکوں کے متوازن ہیں، ہر سمت میں تقریباً 5 سڑکیں ہیں انتقال 1cm=2000 کرتے ہوئے اپنی کاپی میں شہر کا ایک ماڈل بنائیے جس میں سڑکوں/گلیوں کو خطوط سے ظاہر کیجیے۔

سینٹی میٹر=200 میٹر کا استعمال

آپ کے ماڈل میں بہت سی گلیاں ایک دوسرے کو کراس (Cross) کرتی نظر آ رہی ہیں۔ ان پر کراس گلی دو گلیوں سے مل کر بنی ہوگی ایک جو شمال-جنوب سمت میں جا رہی ہے اور ایک مشرق-مغرب سمت میں، ہر ایک دوسرے کو کراس کرتی گلی کو ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کر سکتے ہیں، اگر 2nd (دوسری) گلی شمال-جنوب سمت میں جا رہی ہے اور 5th (پانچویں) مشرق-مغرب سمت میں جا رہی ہے اور ایک دوسرے گلی Crossing پر ملتی ہیں تو ہم ان کراس ہوتی ہوئی گلیوں کو (2,5) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس Convention کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے۔

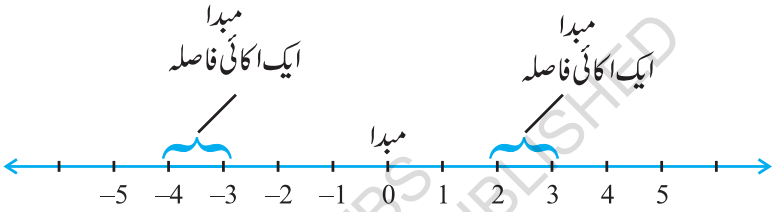
(i) کتنی کراس کرتی ہو گلیوں کو ہم (4,3) سے ظاہر کر سکتے ہیں

(ii) کتنی کراس کرتی ہوئی گلیوں کو ہم (3,4) سے ظاہر کر سکتے ہیں

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

3.2 کارتیزی نظام (Cartesian System)

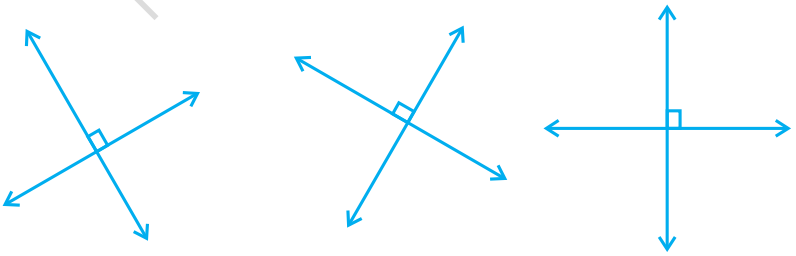
عددی نظام کے باب میں آپ عددی خط کے بارے میں پڑھ چکے ہیں ، عددی خط پر فاصلہ ایک متعین نقطہ سے مساوی اکائیوں میں ایک سمت میں مثبت اور دوسرے میں منفی طور پر مارک کئے گئے ہیں، وہ نقطہ جہاں سے فاصلوں کو مارک کیا گیا ہے مبدا(origin) کہلاتا ہے۔ہم عددی خط پر برابر فاصلوں کے مارک لگا کر، اس کا استعمال اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے کرتے ہیں اگر ایک اکائی فاصلہ عدد، 1 کو ظاہر کرتا ہے تو 3 اکائی فاصلہ عدد 3 کو ظاہر کرتا ہے۔0 مبدا کو ظاہر کرتا ہے۔مبدا سے مثبت سمت میں r فاصلہ پر موجود نقطہ کو کو عدد r سے ظاہر کرتے ہیں۔عددی خط پر مختلف اعداد کی مقام شکل 3.5 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.5

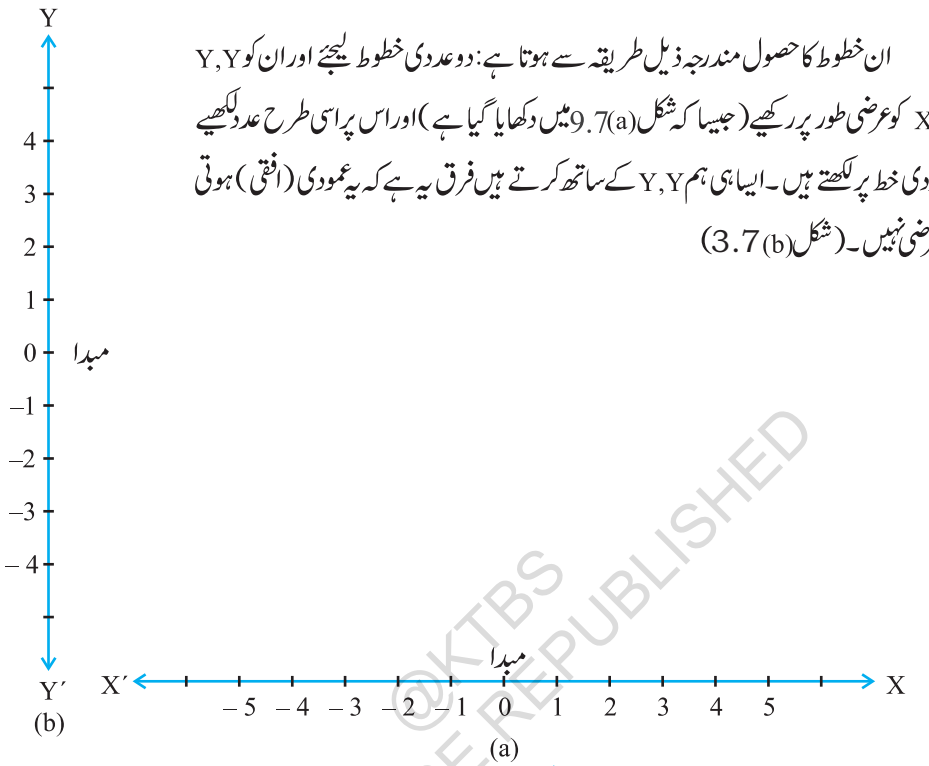
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Descrates نے مستوی میں ایسے دو خطوط کو ایک دوسرے پر عمودی طور پر رکھنے کی ایجاد کی اور ان خطوط کے حوالہ سے نقطوں کے مقام کو واضح کیا۔عمودی خطوط کسی بھی سمت میں ہو سکتے ہیں۔جیسا کہ شکل 9.6 میں دکھایا گیا ہے۔اس باب میں جب ہم مستوی میں کسی نقطہ کے مقام کو متعین کرنے کے لیے یہ دو خطوط چنتے ہیں تو ایک لائن عرض ہوتی ہے اور دوسری عمودی جیسا کہ شکل 9.6(c) میں دکھایا گیا ہے۔



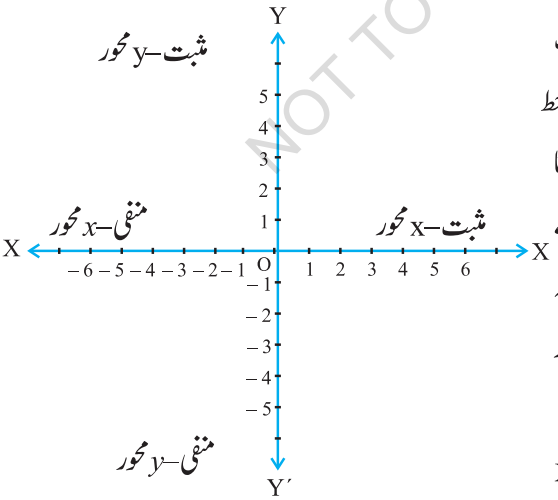
شکل 3.6

ان خطوط کا حصول مندرجہ ذیل طریقہ سے ہوتا ہے: دو عددی خطوط لیجئے اور ان کو Y,Y اور X,X کو عرضی طور پر رکھیے (جیسا کہ شکل 9.7(a) میں دکھایا گیا ہے) اور اس پر اسی طرح عدد لکھیے جیسے عددی خط پر لکھتے ہیں۔ ایسا ہی ہم Y,Y کے ساتھ کرتے ہیں فرق یہ ہے کہ یہ عمودی (افقی) ہوتی ہے۔ عرضی نہیں۔ (شکل 3.7(b)



شکل 3.7

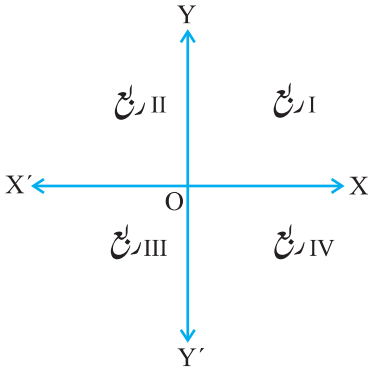
دونوں خطوط کو اس طرح رکھیں کہ دونوں ایک دوسرے کو نقطہ 0 یا مبدا پر قطع کر دیں [شکل 3.8] عرضی خط X،X,X محور کہلاتا ہے۔ اور عمودی خط Y،Y,Y, محور کہلاتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو کراس کرتے ہیں مبدا کہلاتا ہے جسے ہم O سے ظاہر کرتے ہیں۔ کیونکہ مثبت اعداد OX اور OY پر واقع ہیں اس لیے OX اور OY بالترتیب X محور کی اور Y محور کی مثبت سمتیں کہلاتی ہیں۔ اسی طرح سے OX، اور OY بالترتیب X محور اور Y محور کی منفی سمتیں کہلاتی ہیں۔



شکل 3.8

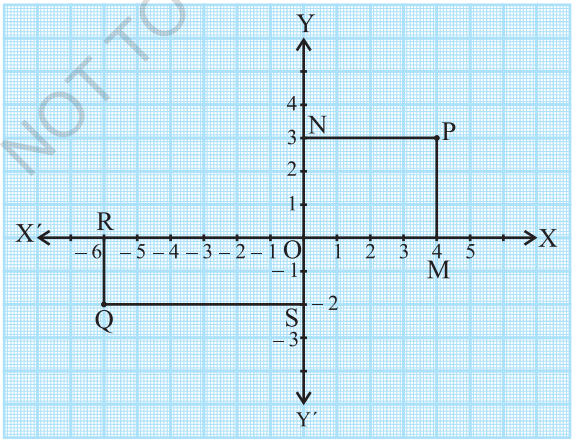
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

اب مشاہدہ کرتے ہیں کہ دونوں محور مستوی کو 4 حصوں میں بانٹتے ہیں، یہ چاروں حصہ ربع (Quadrant) (ایک چوتھائی حصہ) کہلاتے ہیں جبکہ ان کو نمبر 0X سے اینٹی کلاک وائز سمت میں نمبر I, II, III اور IV دیئے جاتے ہیں۔ (شکل 3.9 دیکھئے)۔ اس طرح سے مستوی دونوں محوروں اور ربعات پر مشتمل ہے، ہم اس مستوی کو کارتیزی مستوی کہتے ہیں، یا مختص مستوی یا XY مستوی، اور محوروں کو مختص محور کہتے ہیں۔



شکل 3.9

اب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ نظام ریاضی میں کیوں بنیادی حیثیت رکھتا ہے اور یہ کس طرح مفید ہے مندرجہ ذیل شکل پر غور کیجیے جہاں محور ایک گراف پیپر پر بنائے گئے ہیں اور محوروں سے نقاط P اور Q کے فاصلوں پر غور کیجیے۔ اس کے لئے ہم بالترتیب X اور Y محور پر عمود PM اور PN کھینچتے ہیں، اسی طرح سے ہم عمود QR اور QS کھینچتے ہیں جیسا کہ شکل 3.10 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.10

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

آپ پاتے ہیں:

(i) Y-محور سے نقطہ P کا عمودی فاصلہ جو x-محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا ہے وہ ہے۔ PN=OM=4 اکائیاں ہے۔

(ii) X- محور سے نقطہ P کا عمودی فاصلہ جو Y- محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا ہے وہ ہے۔ ON=PM=3 اکائیاں

(iii) Y- محور سے نقطہ Q کا عمودی فاصلہ جو X- محور کے ساتھ منفی سمت میں ناپا گیا ہے وہ ہے۔ OR=SQ=6 اکائیاں

(iv) x- محور سے نقطہ Q کا عمودی فاصلہ جو Y- محور کے ساتھ منفی سمت میں ناپا گیا ہے وہ ہے۔ اکائی OS=RQ=2

اب ان فاصلوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم نقطوں کے مقام کو کس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ کوئی شک کی گنجائش نہ ہو؟

ہم نقطہ کے مختصات کو مندرجہ ذیل طریقہ سے لکھتے ہیں

(i) کسی نقطہ کا X- مختص اس کا Y- محور سے عمودی فاصلہ جو Y- محور کے ساتھ ناپا گیا ہو (مثبت X- محور کے مثبت سمت میں دور منفی X- محور کی منفی سمت میں، یعنی نقطہ P کے لئے یہ 4+ اور Q کے لئے یہ 6– ہے۔ X- مختص کو ہم عرضی مختص بھی کہتے ہیں۔

(ii) کسی نقطہ کا Y- مختص اس کا محور سے عمودی فاصلہ جو Y- محور کے ساتھ ناپا گیا ہو (مثبت Y- محور کی مثبت سمت میں اور منفی Y- محور کی منفی سمت میں)۔ نقطہ P کے لئے یہ 3+ ہے اور Q کے لئے یہ 2– ہے۔ Y- مختص کو ہم طولی مختص بھی کہتے ہیں۔

(iii) ایک مختص مستوی میں کسی نقطہ کے مختصات کو بیان کرنے کے لیے X- مختص پہلے لکھا جاتا ہے۔ اور Y- مختص بعد میں۔ ہم ان مختصات کو بریکٹ ( ) میں لکھتے ہیں۔

اس طرح سے P کے مختصات ہیں (4,3) اور Q کے مختصات ہیں۔ (–6,–2)

نوٹ کیجیے کہ مختصات مستوی میں کسی نقطہ کو یکتا طور پر ظاہر کرتے ہیں یعنی (3,4) اور (4,3) ایک جیسے نہیں ہیں۔

مثال نمبر 1: شکل 3.11 کو دیکھئے اور مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کیجیے:

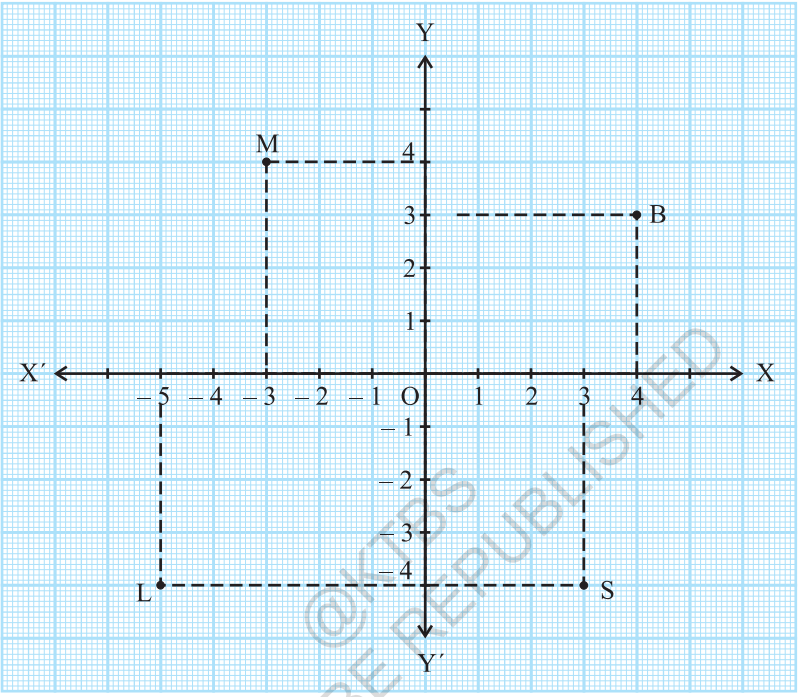
(i) نقطہ B کا عرضی مختص اور طولی مختص بالترتیب.....اور.....ہیں۔ اس لیے B کے مختصات.....ہیں۔

(ii) نقطہ M کے X اور Y مختصات بالترتیب.....اور.....ہیں اس لیے M کے مختصات.....ہیں۔

(iii) نقطہ L کے X اور Y مختصات بالترتیب.....اور.....ہیں اس لیے L کے مختصات.....ہیں۔

(iv) نقطہ S کے X اور Y مختصات بالترتیب.....اور.....ہیں اس لیے S کے مختصات.....ہیں۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

شکل 3.11

حل: (i) کیونکہ نقطہ B کا Y– محور سے فاصلہ 4 اکائیاں ہے۔ اس لیے نقطہ B کا X مختص یا عرضی مختص 4 ہے۔ نقطہ B کا X محور سے فاصلہ 3 اکائیاں ہے۔ اس لیے Y نقطہ B کا مختص یا طول مختص 3 ہے۔ اس طرح سے B کے مختصات (4,3) ہیں۔

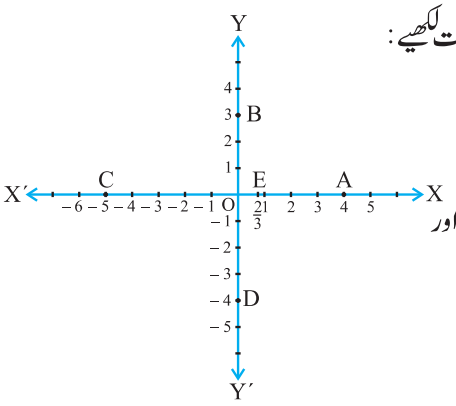
جیسا کہ (i) میں کہا گیا ہے۔

(ii) نقطہ M کے X اور Y– مختصات بالترتیب 3– اور 4 ہیں۔ اس لیے نقطہ M کے مختصات (3,4–) ہیں۔

(iii) نقطہ L کے X اور Y– مختصات بالترتیب 5– اور 4 ہیں۔ اس لیے نقطہ L کے مختصات ہیں (5,–4)

(iv) نقطہ S کے X اور Y– مختص بالترتیب 3 اور 4– ہیں اس لیے نقطہ S کے مختصات (3,–4) ہیں۔

مثال2: شکل 3.12 میں دکھائے گئے محوروں پر نقاط کے مختصات لکھیے:



شکل 3.12

حل: آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

(i) نقطہ A، Y- محور سے 4+ اکائیاں فاصلہ پر ہے اور X- محور سے O فاصلہ پر: اس لئے A کا X- مختص 4 ہے اور Y- مختص 0 اس طرح سے A کے مختصات ہیں (4,0)

(ii) B کے مختصات (0,3) ہیں کیوں؟

(iii) C کے مختصات (−5,0) ہیں، کیوں؟

(iv) D کے مختصات (0,−4) ہیں، کیوں؟

(v) E کے مختصات $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ہیں، کیوں؟

کیونکہ X- محور پر ہر نقطہ کا X- محور سے فاصلہ سفر ہوتا ہے اس لئے X- محور پر ہر نقطہ کا Y- مختص صفر ہوتا ہے اس لئے کسی بھی نقطہ کے X- محور پر مختصات ہمیشہ X,O شکل کے ہونگے۔ جہاں X نقطہ کا Y- محور سے فاصلہ ہے۔ اسی طرح سے Y- محور پر کسی نقطہ کے مختصات ہمیشہ (O,Y) کی شکل کے ہونگے جہاں X,Y- محور سے اس نقطہ کا فاصلہ ہے۔ کیوں؟

مبداO کے کیا مختصات ہیں؟ اس کا دونوں محوروں سے فاصلہ صفر ہے اس لئے اس کے عرضی مختص اور طولی مختص دونوں صفر ہونگے اس لئے مبدا کے مختصات (O,O) ہیں

مذکورہ بالا مثالوں میں آپ نے کسی نقطہ کے مختصات کی علامتیں اور اس ربع کے درمیان جس میں یہ نقطہ واقع ہے ایک تعلق کا مشاہدہ کیا ہوگا۔

(i) اگر نقطہ پہلے ربع میں یعنی I میں ہے تب نقطہ کی شکل ہوگی (+,+) کیونکہ I ربع مثبت X- اور مثبت Y- محور سے گھرا ہوا ہے۔

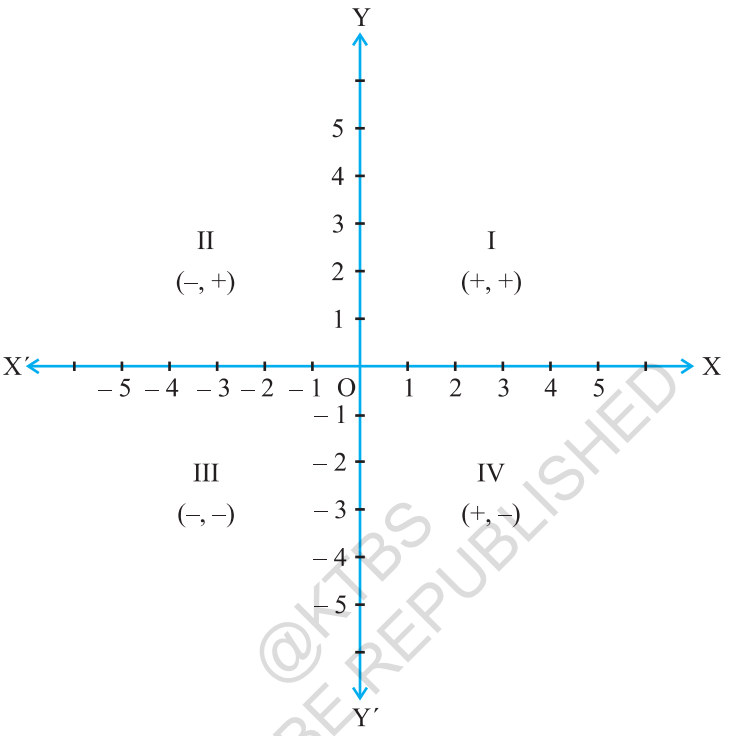
(ii) اگر نقطہ دوسرے II ربع میں ہے تب نقطہ کی شکل ہوگی (−,+) کیونکہ II ربع منفی X- محور اور مثبت Y- محور سے گھرا ہوا ہے۔

(iii) اگر نقطہ III ربع میں ہے تب نقطہ کی شکل (−,−) ہوگی کیونکہ III ربع میں منفی X- محور اور منفی Y- محور سے گھرا ہوا ہے۔

(iv) اگر نقطہ IV ربع میں ہے تب نقطہ کی شکل (+,−) ہوگی کیونکہ IV ربع مثبت X- محور اور منفی Y- محور سے گھرا ہوا ہے۔

(شکل 3.13 کو دیکھئے)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 3.13

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ریمارک: کسی مستوی میں نقطہ کے مقام کو بیان کرنے کا نظام جس کا ہم نے ابھی مطالعہ کیا ہے ایک رواج (Convention) ہے، جس کو تمام دنیا میں قبول کیا گیا ہے۔ یہ نظام مثال کے طور پر ایسا بھی ہوسکتا ہے جس میں طولی مختص پہلے اور عرضی مختص بعد میں ہو۔ لیکن تمام دنیا میں یہی نظام رائج ہے جس کو ہم نے ابھی پڑھا ہے۔

مشق 3.2

1. مندرجہ ذیل ہر ایک سوال کے جواب لکھئے:

(i) کسی کارتیزی مستوی میں کسی نقطہ کے مقام کو تعین کرنے والے عرضی اور طولی خطوط کے نام کیا ہیں؟

(ii) مستوی میں ان دونوں خطوں سے بنے ہر حصہ کا نام کیا ہے؟

(iii) اس نقطہ کا نام کیا ہے جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں؟

2. شکل 3.13 کو دیکھیے اور مندرجہ ذیل جواب لکھیے:

(i) B کے مختصات

(ii) C کے مختصات

(iii) وہ نقطہ جو مختصات (–3,–5) کو ظاہر کرتا ہے۔

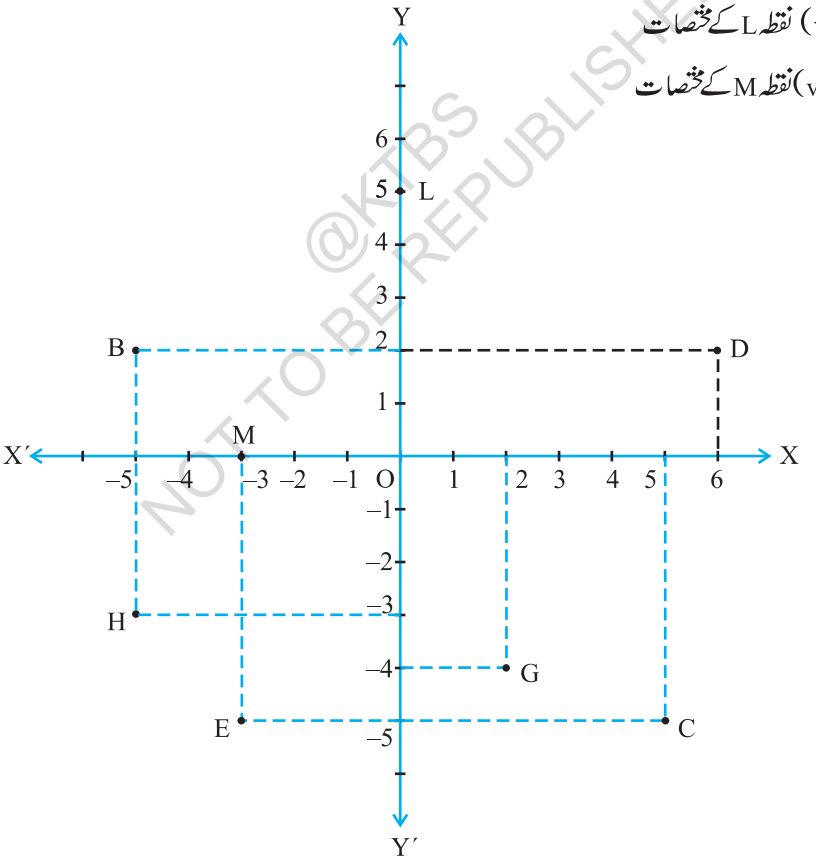
(iv) وہ نقطہ جو مختصات (2,–4) کو ظاہر کرتا ہے۔

(v) نقطہ D کا عرضی مختص

(vi) نقطہ H کا طولی مختص

(vii) نقطہ L کے مختصات

(viii) نقطہ M کے مختصات



شکل 3.14

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

3.3 خلاصہ (Summary)

اس سبق میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط کا مطالعہ کیا۔

1. کسی شہ یا نقطہ کا مستوی میں مقام معلوم کرنے کے لیے ہمیں عمودی خطوط درکار ہیں۔ ایک عرضی اور ایک طولی۔
2. مستوی ایک کارتیزی یا مختص مستوی کہلاتی ہے اور خطوط مختص محور کہلاتے ہیں۔
3. عرض خط (افقی) x- محور اور عمودی خط y- محور کہلاتا ہے۔
4. مختص محور مستوی کو چار حصوں میں بانٹتے ہیں ہر حصہ ربع کہلاتا ہے۔
5. محوروں کا نقطہ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔
6. کسی نقطہ کا y- محور سے فاصلہ x پر مختص کہلاتا ہے یا عرضی مختص اور y- محور سے کسی نقطہ کا فاصلہ طولی مختص یا y- مختص کہلاتا ہے۔
7. اگر کسی نقطہ کا عرضی مختص x اور طولی مختص y ہو تو (x, y) اس نقطہ کے مختصات کہلاتے ہیں۔
8. x محور پر کسی نقطہ کے مختصات $(x,0)$ اور y- محور پر کسی نقطہ کے مختصات $(0,y)$ ہوتے ہیں۔
9. مبدا کے مختصات $(0,0)$ ہوتے ہیں۔
10. کسی نقطہ کے $(+,+)$ کے مختصات I ربع میں $(-,+)$ شکل کے II ربع، $(-,-)$ شکل کے مختصات III ربع اور $(+,-1)$ کے مختصات IV ربع ہوتے ہیں۔ جہاں + مثبت حقیقی عدد کو اور - منفی عدد کو ظاہر کرتے ہیں۔
11. اگر $x \neq y$ تب $(x, y) \neq (y, x)$ اور اگر $x = y$، $(x, y), = (y, x)$۔

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

باب 4

Z5P8N8

دو متغیر والی خطی مساواتیں
LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIBLES

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.1 تعارف: (Introduction)

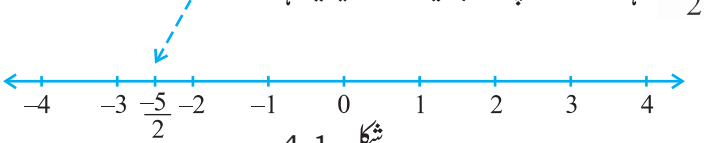
پچھلی جماعتوں میں آپ نے ایک متغیر والی خطی مساوات کے بارے میں پڑھا ہے۔ کیا آپ ایک متغیر والی خطی مساوات لکھ سکتے ہیں؟ آپ کہہ سکتے ہیں کہ $x+1=0$، $x+\sqrt{2}=0$ اور $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ ایک متغیر والی خطی مساوات کی کچھ مثالیں ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ ایسی مساواتوں کا صرف اور صرف ایک ہی حل ہوتا ہے۔ آپ یہ بھی جانتے ہونگے کہ ان کے حل کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس باب میں ہم ایک متغیر والی مساوات کے علم کو دہرائیں گے اور اس کی توسیع دو متغیر تک کریں گے۔ آپ ان سوالات پر غور کر رہے ہونگے کہ کیا دو متغیر والی مساوات کا ایک حل ہوگا؟ اگر ہاں تو کیا یہ یکتا ہوگا؟ اور کارتیزی مستوی میں یہ حل کس طرح دیکھے گا؟ اسی طرح کے سوالوں کا جواب حاصل کرنے کے لئے آپ کو باب 3 میں پڑھے گئے تصورات کا استعمال بھی کرنا ہوگا۔

4.2 خطی مساواتیں (Linear Equations)

آیئے دہراتے ہیں کہ اب تک ہم نے کیا سیکھا ہے مندرجہ ذیل مساوات پر غور کیجئے۔

$$2x+5=0$$

اس کا حل $-\frac{5}{2}$ ہے جو عددی خط پر مندرجہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 4.1

کسی مساوات کو حل کرنے کے لئے آپ چند نقاط ہمیشہ اپنے ذہن میں رکھیں۔

خطی مساوات کے حل پر کوئی اثر نہیں ہوتا اگر

(i) اگر مساوات کے دونوں طرف ایک ہی عدد کو جمع (یا گھٹا) کریں۔

(ii) اگر مساوات کے دونوں طرف ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب اور تقسیم کریں تو

آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں

ایک یک روزہ کرکٹ میچ میں جو سری لنکا اور انڈیا کے درمیان ناگپور میں کھیلا گیا۔ ہندوستان کے دو بلے بازوں نے ایک ساتھ سانجھے داری میں 176 رن بنائے۔ اس اطلاع کو اب مساوات کی شکل میں ظاہر کریں۔

آپ یہاں دیکھتے ہیں دونوں میں سے کسی ایک کا بھی اسکور ہمیں نہیں معلوم یعنی یہاں دو نہ معلوم مقداریں ہیں۔ آیئے ان کو ظاہر کرنے کے لئے x اور y کا استعمال کرتے ہیں، مان لیجئے ایک بلے باز نے x رن بنائے اور دوسرے نے y رن ہم جانتے ہیں کہ $x + y = 176$ جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

یہ دو متغیر والی ایک خطی مساوات کی مثال ہے۔ یہ رواج رہا ہے کہ اسی مساوات میں ہم متغیر کو x اور y سے ظاہر کرتے ہیں لیکن دوسرے حروف کا بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ دو متغیر والی کچھ اور مساواتوں کی مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$1.2s + 3t = 5$ ، $p + 4q = 7$ ، $\pi u + 5v = 9$ اور $3 = \sqrt{2}x - 7y$

نوٹ کیجئے کہ آپ ان سب مساواتوں کو $1.2s + 3t - 5 = 0$ ، $p + 4q - 7 = 0$ ، $\pi u + 5v - 9 = 0$ اور $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح سے کوئی مساوات جو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھی جا سکے جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہوں اور a اور b دونوں غیر صفر ہوں، دو متغیر والی خطی مساوات کہلاتی ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل ہر ایک مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھئے اور ہر ایک حالت میں a، b اور c کی قیمت ظاہر کیجئے۔

$(i)\ 2x + 3y = 4.37$ $(ii)\ x - 4 = \sqrt{3}y$ $(iii)\ 4 = 5x - 3y$ $(iv)\ 2x = y$

حل: (i) $2x + 3y - 4.37 = 0$ کو ہم $(i)\ 2x + 3y - 4.37 = 0$ کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $a = 2$، $b = 3$ اور $c = -4.37$

(ii) مساوات $x - 4 = \sqrt{3}y$ کو ہم $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $a = 1$ ، اور

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$b = -\sqrt{3}$ اور $c = -4$ ہے۔

(iii) مساوات $4 = 5x - 3y$ کو ہم $5x - 3y - 4 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں. یہاں $a = 5$ ، $b = -3$ اور $c = -4$ ہے، کیا آپ اس بات سے اتفاق کرتے ہیں کہ اس کو $-5x + 3y + 4 = 0$ بھی لکھا جاسکتا ہے ایسی حالت میں $a = -5$ ، $b = 3$ اور $c = 4$ ہوگا۔

(iv) مساوات $2x = y$ کو ہم $2x - y + 0 = 0$ لکھ سکتے ہیں، یہاں $a = 2$ ، $b = -1$ اور $a = 0$ ہے۔

اب $ax + b = 0$ کی طرح کی مساوات کو بھی دو متغیر والی والی خطی مساواتوں میں شامل کر سکتے ہیں جیسے $ax + 0.y + b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $4 - 3x = 0 = 0$ کو ہم $-3x + 0.y + 4 = 0$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل ہر ایک کو دو متغیر والی مساوات میں لکھئے۔

$(i)\ x = -5 \qquad (ii)\ y = 2 \qquad (iii)\ 2x = 3 \qquad (iv)\ 5y = 2$

حل: (i) $x = -5$ کو ہم $1.x + 0.y = -5$ یا $1.x + 0.y + 5 = 0$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) $y = 2$ کو ہم $0.x + 1.y = 2$ یا $0.x + 1.y - 2 = 0$ لکھ سکتے ہیں۔

(iii) $2x = 3$ کو $2x + 0.y - 3 = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔

(iv) $5y = 2$ کو $0.x + 5y - 2 = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 4.1

1. ایک کاپی کی قیمت ایک پین کی قیمت کی دگنی ہے، اس بیان کو ظاہر کرنے کے لئے ایک دو متغیر والی مساوات لکھیے (اشارہ:۔ایک کاپی کی قیمت x اور پین کی قیمت y لیجئے)۔
2. مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھئے اور ہر حالت میں a، b اور c کی قیمتوں کی نشاندہی کیجئے۔

(i) $2x + 3y = 9.35$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 خطی مساوات کا حل (Solution of a Linear Equation)

آپ دیکھ چکے ہیں کہ ایک متغیر والی ہر خطی مساوات کا یکتا حل ہوتا ہے، دو متغیر والی خطی مساوات کے حل کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟ کیونکہ یہاں مساوات میں دو متغیر ہیں اس کے حل کا مطلب ہے دو قدریں ایک x کے لئے اور ایک y کے لئے جو دیئے ہوئے مساوات کو مطمئن کر سکیں، آیئے مساوات $2x+3y=12$ پر غور کرتے ہیں۔

یہاں $x=3$ اور $y=2$ ایک حل ہے کیونکہ اگر آپ مساوات میں $x=3$ اور $y=2$ رکھیں تو آپ کو ملتا ہے

$$2x+3y=(2\times3)+(3\times2)=12$$

اس حل کو ہم مرتب جوڑے (3,2) کی شکل میں لکھتے ہیں جس میں پہلی قدر x کی اور دوسری y کی ہوتی ہے۔ دوسری طرف (1,4) مساوات $2x+2y=12$ کا حل نہیں ہے، کیونکہ مساوات میں $x=1$ اور $y=4$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $2x+3y=14$. جو کے 12 نہیں ہے۔ (0,4) مساوات کا حل ہے۔ جبکہ (4,0) نہیں ہے۔

اس طرح سے آپ نے مساوات $2x+3y=12$ کے کم سے کم دو حل دیکھے یعنی (3,2) اور (0,4) کیا آپ دوسرے حل بھی معلوم کر سکتے ہیں؟ کیا آپ اس سے اتفاق کریں گے کہ (6.0) اس کا ایک اور حل ہے؟ اس کی تصدیق کیجئے۔ درحقیقت مندرجہ ذیل طریقہ سے ہم اس کے لامحدود حل معلوم کر سکتے ہیں۔ x کی ایک کوئی سی بھی قدر چنیے (مان لیجیے $x=2$) اور اس کو مساوات $2x+3y=12$ میں رکھیے۔ تب مساوات ہو جائیگی $4+3y=12$ جو کہ ایک متغیر والی خطی مساوات ہے۔ اس کو حل کرنے پر آپ کو $y=\frac{8}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح سے $\left(2,\frac{8}{3}\right)$ مساوات $2x+3y=12$ کا ایک اور حل ہے۔ اس طرح سے $x=-5$ چنیے سے آپ پاتے ہیں مساوات $-10+3y=12$ ہو جاتا ہے جس سے ہمیں $y=\frac{22}{3}$ حاصل ہوتا ہے دو متغیر والی خطی مساوات کے مختلف حلوں کا کوئی آخر نہیں ہے یعنی دو متغیر والی خطی مساوات کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔

مثال 3: مساوات $x+2y=6$ کے چار مختلف حل معلوم کیجئے۔

حل: جانچ کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $x=2, y=2$ اس مساوات کا حل ہے کیونکہ $x+2y=2+4=6$

اس لئے اب $x=0$ لیتے ہیں x کی اس قدر کے لئے دی ہوئی مساوات $2y=6$ ہو جاتی ہے۔ جس کا ایک یکتا حل ہے $y=3$ اس لئے $x=0, y=3$ بھی مساوات $x+2y=6$ کا حل ہے۔ اسی طرح سے $y=0$ لینے پر دی ہوئی

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مساوات $x = 6$ ہو جاتی ہے۔اس لیے $x = 6, y = 0$ مساوات $x + 2y = 6$ کا حل ہے۔آخر میں $y = 1$ لیتے ہیں۔دی ہوئی مساوات اب $x + 2 = 6$ ہو جاتی ہے۔جس کا حل ہے $x = 4$ اس لئے $(4,1)$ دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔اس طرح سے دی ہوئی مساوات کے لامحدود حلوں میں سے چار حل مندرجہ ذیل ہیں۔

$(4,1)$ اور $(2,2),(0,3),(6,0)$

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ ایک آسان حل معلوم کرنے کے لئے $x = 0$ لیجیے اور اس سے متعلق y کی قیمت معلوم کیجیے اسی طرح سے $y = 0$ رکھ کر اس سے متعلق x کی قیمت معلوم کیجیے۔

مثال 4: مندرجہ ذیل ہر ایک مساوات کے 2 حل معلوم کیجئے۔

$(i)\ 4x + 3y = 12 \qquad (ii)\ 2x + 5y = 0 \qquad (iii)\ 3y + 4 = 0$

حل: (i) $x = 0$ لینے پر ہمیں $3y = 12$ یعنی $y = 4$ حاصل ہوتا ہے اس لئے $(0, 4)$ دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔
اسی طرح سے $y = 0$ رکھنے پر ہمیں $x = 6$ حاصل ہوتا ہے اس لئے $(6, 0)$ بھی اس مساوات کا حل ہے۔

(ii) $x = 0$ لینے پر $5y = 0$ یعنی $y = 0$ ہمیں حاصل ہوتا ہے یعنی $(0, 0)$ دی ہوئی مساوات کا حل ہے اب آپ $y = 0$ لیں آپ کو دوبارہ $(0,0)$ حل کے طور پر ملے گا جو وہی ہے جو پہلے حاصل ہوا ہے ایک دوسرا حل معلوم کرنے کے لئے آپ $x = 1$ لیجیے اب آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ y کی متعلقہ قدر $\frac{-2}{5}$ ہے اس لئے $1, -\frac{2}{5}$ مساوات $2x + 5y = 0$ کا ایک دوسرا حل ہے۔

(iii) مساوات $3y + 4 = 0$ کو $0.x + 3y + 4 = 0$ لکھنے پر آپ پائیں گے کہ x کی ہر قیمت کے لئے $y = \frac{-4}{3}$ ہے، اس طرح سے اس کے دو حل ہیں $\left[1, 4/3\right]$ اور $\left[0, 4/3\right]$

مشق 4.2

1. مندرجہ ذیل میں کون سا بیان درست ہے اور کیوں؟
   $y = 3x + 5$ کے (i) یکتا حل ہے (ii) صرف دو حل ہیں (iii) لامحدود حل ہیں۔
2. مندرجہ ذیل ہر ایک مساوات کے چار حل لکھیے۔
   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. جانچ کیجیے کے مندرجہ ذیل میں کونسے جوڑے مساوات $x-2y=4$ کے حل ہیں اور کونسے نہیں

(i) $(0,2)$ (ii) $(2,0)$ (iii) $(4,0)$ (iv) $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$

(v) $(1,1)$

4. k کی قدر معلوم کیجیے اگر $x=2, y=1$ مساوات $2x+3y=k$ کے حل ہیں۔

4.4 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. $ax+by+c=0$ شکل والی مساوات جس میں a,b اور c حقیقی اعداد ہیں جبکہ a اور b غیر صفر کو دو متغیر والی خطی مساوات کہا جاتا ہے۔
2. دو متغیر والی خطی مساوات کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔
3. کسی دو متغیر والی خطی مساوات کے گراف پر ہر ایک نقطہ اس خطی مساوات کا ایک حل ہوتا ہے دوسری طرح سے کسی خطی مساوات کا ہر حل اس خطی مساوات کے گراف کا ایک نقطہ ہوتا ہے۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

باب 5

C4C4S7

یوکلڈ جیومیٹری کا تعارف

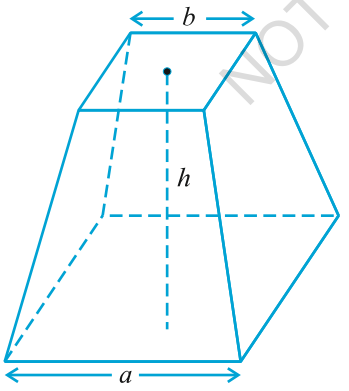
(INTRODUCTION TO EUCLID'S GEOMETRY)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.1 تعارف: (Introduction)

لفظ جیومیٹری یونانی الفاظ 'جیو' جس کے معنی زمین اور میٹری؛ جس کے معنی پیائش سے ہے، لیا گیا ہے۔ بظاہر جیومیٹری کی شروعات زمین کی پیائش کو لیکر ہوئی، ریاضی کی اس شاخ کا مطالعہ مختلف شکلوں میں ہر قدیمی تہذیب چاہے وہ مصری ہو، چین کی ہو، ہندوستان کی یا یونان وغیرہ کی ہو۔ ان تہذیبوں کے لوگوں نے مختلف عملی مسائل کا سامنا کیا جس کے لئے مختلف شکلوں میں جیومیٹری کا فروغ مطلوب تھا۔

مثال کے طور پر جب بھی مصر میں دریائے نیل میں پانی زیادہ چڑھا اس نے مختلف زمین مالکوں کی منسلک زمینوں کی حدود کو تہس نہس کر دیا۔ سیلاب کے بعد ان حدود کو دوبارہ قائم کرنے کی ضرورت ہوتی تھی۔ اس مقصد کو پورا کرنے کے لئے مصریوں نے جیومیٹری کی نئی نئی تکنیک اور قوانین نکالے جن کا استعمال آسان رقبوں کی تحسیب کرنا اور آسان سی عملیات وغیرہ کرنا تھا۔ جیومیٹری کے علم کا استعمال کر کے انھوں نے گوداموں کے حجم معلوم کیے۔



شکل 5.1 ایک اہرام

نہریں اور اہرام (Pyramids) وغیرہ کی بنانے میں کیا وہ Truncated Pyramids (شکل 2.1 دیکھئے) کے حجم نکالنے کے فارمولہ سے بھی واقف تھے، آپ جانتے ہیں کہ Pyramid ایک ایسی ٹھوس شکل ہے جس کا اساس (قاعدہ) ایک مثلث یا مربع یا کوئی دوسرا کثیر ضلعی ہوتا ہے اس کے اطلاع کے رخ مثلث ہوتے ہیں جو اوپر کی طرف ایک نقطہ پر آ کر ملتے ہیں۔

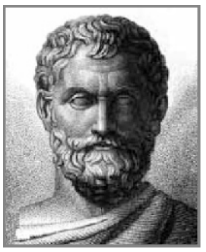
ہندوستان برصغیر میں ہڑپا اور موہن جوداڑوں وغیرہ کی کھدائی سے یہ پتہ چلتا ہے کہ انڈس ویلی تہذیب (300 ق.م) نے جیومیٹری کا استعمال خوب کیا۔ یہ ایک بہت ہی منظّم سماج تھا۔ ان کے شہر ترقی یافتہ اور منصوبہ بند تھے۔ مثال کے طور پر زیادہ تر سڑکیں ایک دوسرے کے متوازی تھیں اور گندگی کے اخراج کا نظام سب زیر زمین تھا۔ مکانوں میں مختلف قسم کے بہت سے کمرہ ہوتے تھے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ شہروں میں رہنے والے علم مساحت اور علم اعداد سے بخوبی واقف تھے۔ عمارتوں کی بناوٹ میں استعمال ہونے والی اینٹیں بھٹی میں تپی ہوئی ہوتی تھیں اور اس کی لمبائی، چوڑائی اور موٹائی میں نسبت بالترتیب 4:2:1 کی ہوتی تھیں۔

قدیم ہندوستان میں Sulbasutras (800 ق.م. سے 500 ق.م) میں ہاتھ کی بنائی ہوئی تعمیرات تھیں، ویدک پیریڈ کی جیومیٹری کی شروعات altars (یا ویدس) اور ویدیک رسومات کو عملی جامہ پہنانے کے لئے (Fireplace) کی تعمیرات سے ہوئی۔ اس مقدس آگ کی جگہ اس کی شکل اس کا رقبہ دی گئی ویدانتوں کے عین مطابق ہوتا تھا۔ تاکہ وہ ایک مؤثر اوزار ثابت ہوسکیں، مربع اور دائری altars کا استعمال گھریلو رسومات کے لئے اور جنکی شکل مستطیلوں، مثلثوں اور منحرفوں کا امتزاج تھا۔ ان کا استعمال عام لوگوں کے پوجا پاٹ کے لئے ہوتا تھا۔ Sriyantra (جو Arthaveds میں دیئے گئے ہیں) میں جڑے ہوئے نو مساوی الساقین مثلثوں پر مشتمل مثلوں کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ ان سے 43 تختی مثلث اور بنتے ہیں، حالانکہ altras کی تعمیر میں بالکل درست جیومیٹری کے طریقہ استعمال ہوتے تھے لیکن ان کے پس پردہ جو اصول استعمال ہوتے ان کے بارے میں کچھ بتایا نہیں گیا ہے۔

ان مثالوں سے پتہ چلتا ہے کہ دنیا بھر میں جیومیٹری کو فروغ ملا اور اس کا استعمال ہوا۔ لیکن یہ سب غیر منظّم طریقہ سے ہوا۔ قدیم دنیا میں جیومیٹری کے فروغ کے سلسلہ میں دلچسپ بات یہ ہے کہ زبانی طور پر یا پام کی پتیوں کے پیغام کے طور پر یا ایسے ہی دوسرے طریقوں سے یہ نسل در نسل منتقل ہوتی گئی، کچھ تہذیبوں جیسے Babylonia میں ہم پاتے ہیں کہ جیومیٹری ایک بہت عملی مضمون تھا یہی ہندوستان اور روم میں بھی سمجھا جاتا تھا۔ مصریوں نے جس جیومیٹری کو فروغ دیا وہ صرف نتائج کے بیانات پر مشتمل ہے۔ وہاں طریقہ کا کوئی عام اصول نہیں تھا۔ درحقیقت مصریوں اور Babylonians نے جیومیٹری کو زیادہ تر

©KTBS NOT TO BE RE-PUBLISHED

(عملی) مقاصد کے لئے استعمال کیا۔ انھوں نے ایک منظّم سائنس کے طور پر اس کے فروغ کے لئے کچھ نہیں کیا لیکن تہذیبوں جیسے یونان وغیرہ نے زور اس بات پر دیا کہ کسی عملی کام کے پیچھے کیا وجوہات ہوتی ہیں۔ یونانیوں کی دلچسپی اس بات میں تھی کہ انھوں نے جو بیانات استخراجی منطق کو استعمال کر کے دریافت کئے تھے، ان کی سچائی کو قائم کریں۔ (Appendix! دیکھیے)۔



شکل 5.2 تھیلس
640ق م ۔ 546ق م



شکل 5.3 یوکلڈ
325ق م۔265ق م

تھیلس (640 ق.م–546 ق.م) وہ یونانی ریاضی داں تھا جس نے پہلا ثبوت دیا اور یہ ثبوت تھا کہ دائرے کا قطر اس کی تصنیف (دو برابر حصوں میں بانٹا) کرتا ہے۔ آپ نے تھیلس کے ایک مشہور شاگرد فیثا غورث (572 ق.م) کے بارے میں سنا ہوگا۔ فیثا غورث اور اس کے گروپ نے جیومیٹری کی خصوصیات کو دریافت کیا اور کافی حد تک جیومیٹری کے نظریہ کو فروغ دیا اور یہ عمل 300 ق.م تک جاری رہا۔ اس وقت یوکلڈ (Euclid) جو مصر کے Alexandria میں ریاضی کا استاد تھا، نے اس وقت تک ہوئی تمام دریافتوں کو اکٹھا کیا اور عناصر (Elements) نام سے ان کو ترتیب دیا۔ اس نے عناصر (Elements) کو تیرہ بابوں میں منقسم کیا۔ ہر ایک باب ایک کتاب کہلایا ان کتابوں سے دنیا میں آنے والی نسلوں کے اندر جیومیٹری کی سمجھ کو اشرانواز کیا۔

اس باب میں ہم (Euclid) کی جیومیٹری کا مطالعہ کریں گے اور موجودہ دور کی جیومیٹری سے اس کو منسلک کرنے کی کوشش کریں گے۔

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.2 یوکلڈ کی تعریفیں بدیجات اور موضوعات

(Euclid's Definitions, Axioms and Postulates)

یوکلڈ کے دور کے یونانی ریاضی دانوں کے خیال میں جیومیٹری اس دنیا جس میں وہ رہتے ہیں، کا ایک تجریدی ماڈل ہے۔ نقطہ، خط، مستوی (یا سطح) کا نظریہ ان کے اطراف میں موجود چیزوں سے ہی اخذ کیا گیا۔ خلاء (Space) اور ان کے اطراف خلاء میں موجود ٹھوسوں (Solids) کے مطالعہ سے ٹھوس شرکاء ایک تجریدی جیومیٹری ماڈل کا نظریہ قائم ہوا۔ ٹھوس کی ایک شکل، سائز اور مقام ہوتا ہے اور اس کو ایک جگہ سے دوسری جگہ ہلایا جا سکتا ہے، اس کی باؤنڈری کو سطح کہلاتی ہیں۔ یہ سطح (Surface) خلاء کے ایک حصہ کو دوسرے سے الگ کرتی ہیں اور ان کی کوئی موٹائی نہیں ہوتی، ان سطحوں کی باؤنڈریز خط منحنی یا خط منقسم ہیں ان

خطوط کا خاتمہ نقطوں پر ہوتا ہے۔

ٹھوسوں اور نقطوں کے درمیان تین اقدام پر غور کیجئے (ٹھوس- سطحیں- خطوط- نقطے) ہر قدم پر ہم ایک بعد (dimension) کھوتے ہیں اس لئے یہ کہا جاتا ہے کہ ایک ٹھوس کی تین ابعاد ایک سطح کی دو خط کی ایک اور نقطہ کی کوئی بعد نہیں ہوتی، یوکلڈ نے ان بیانات کا خلاصہ ان کی تعریفوں سے کیا ہے۔ اس کی شروعات اس نے عناصر کی کتاب میں اپنی 23 تعریفوں کو بیان کر کے کی ہے، ان میں سے کچھ نیچے دی گئی ہیں۔

1. نقطہ وہ ہے جس کا کوئی حصہ نہیں ہے۔
2. ایک خط بغیر چوڑائی والی لمبائی ہے۔
3. خطوط کے سرے نقطے ہیں۔
4. ایک خط مستقیم وہ خط ہے جو اپنے پر اس موجود نقطوں کا سیٹ ہے
5. ایک سطح (Surface) وہ ہے جس کی صرف لمبائی اور چوڑائی ہوتی ہے
6. سطح کے کنارے خطوط ہیں
7. ایک مسطوی سطح، خطوط مستقیم کا ایک سیٹ ہے۔

اگر آپ غور سے ان تعریفوں کا مطالعہ کریں تو آپ دیکھیں گے کہ کچھ ارکان جیسے حصہ چوڑائی، لمبائی وغیرہ کی مزید وضاحت کی ضرورت ہے، مثال کے طور پر اس کے نقطہ کی تعریف پر غور کیجئے اس تعریف میں حصہ کی مزید تعریف کرنے کی ضرورت ہے، فرض کیجئے اگر آپ حصہ کی اس طرح تعریف کرتے ہیں کہ وہ چیز جو جگہ گھیرتی ہے تو پھر رقبہ کو تعریف کرنے کی ضرورت ہوتی ہے اس طرح سے ایک چیز کی تعریف بیان کرنے کے لئے آپ کو بہت سی چیزوں کی تعریف کرنے کی ضرورت ہوگی اس طرح سے ایک ناختم ہونے والی تعریفوں کی چین بن جائیگی۔ اس وجہ سے آسانی کے لئے یہ طے کیا گیا کہ کچھ جیومیٹریائی ارکان کو غیر معرف ہی چھوڑ دیا جائے، اس طرح ہم کو نقطہ کے جیومیٹریائی تصور کو بہتر طور پر محسوس کر سکتے ہیں جو کہ اس کی مذکورہ بالا تعریف سے ممکن نہیں، اس لئے ہم نقطہ کو ایک ڈاٹ سے ظاہر کرتے ہیں جس کی کچھ لمبائی، چوڑائی یا موٹائی ہوتی ہے۔

اسی طرح کا مسئلہ مذکورہ بالا تعریف 2 میں بھی آتا ہے جس میں لمبائی اور چوڑائی کا استعمال ہوا ہے، جبکہ ان دونوں کی تعریف بیان نہیں کی گئی، جس کی وجہ سے کچھ ارکان کو غیر معروف رکھا گیا۔ اس طرح سے جیومیٹری میں ہم نقطہ، خط اور مستوی

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(یوکلڈ کی زباں میں مستوی سطح) کو غیر معروف ارکان کے طور پر لیتے ہیں، ہم صرف ان کو وجدانی طور پر ظاہر کر سکتے ہیں یا کسی فزیکل ماڈل کی مدد سے اس کی تشریح کر سکتے ہیں۔

تعریفوں سے شروع کرتے ہوئے یوکلڈ نے کچھ خصوصیات کو فرض کیا جس کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ مفروضات دراصل واضح کائناتی سچ ہیں، اس نے ان کو دو قسموں میں تقسیم کیا۔ بدیحات (axiom) اور موضوعات (Postulats) اس نے رکن 'موضوعہ' کو جیومیٹری کے لئے مخصوص مفروضات کے لئے استعمال کیا۔ دوسری طرف عام نظریہ (جو اکثر بدیحہ کہلاتا ہے) دو مفروضات ہیں جن کا استعمال صرف جیومیٹری میں نہیں بلکہ پوری ریاضی میں ہوتا ہے، ان بدیحات اور موضوعات کی تفصیل کے لئے Appendix دیکھئے۔ یوکلڈ کے کچھ بدیحات، اس کی دی ہوئی ترتیب کے بغیر، مندرجہ ذیل ہیں:

(1) چیزیں جو ایک ہی چیز کے مساوی ہوتی ہیں آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔

(2) اگر مساوی چیزیں مساوی چیزوں میں جمع کی جائیں تو حاصل شدہ چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔

(3) اگر مساوی چیزوں میں سے مساوی چیزیں گھٹائی جائیں تو باقی چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔

(4) چیزیں جو ایک دوسرے پر منطبق ہوں آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔

(5) مکمل حصہ سے بڑا ہوتا ہے۔

(6) چیزیں جو کسی ایک سی چیزوں کا دگنا ہوتی ہیں آپس میں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

(7) چیزیں جو کسی ایک سی چیزوں کی آدھی ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

ان عام نظریوں کا تعلق خاص قسم کی قدروں سے ہے۔ پہلے نظریہ کا اطلاق مستوی اشکال پر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک مثلث کا رقبہ ایک مستطیل کے رقبہ کے برابر ہے اور مستطیل کا رقبہ مربع کے رقبہ کے برابر ہے تب مثلث کا رقبہ بھی مربع کے رقبہ کے برابر ہوگا۔

ایک ہی قسم کی قدروں کو جمع اور موازنہ کیا جا سکتا ہے لیکن مختلف قسم کی قدروں کا موازنہ نہیں کہا جا سکتا، مثال کے طور پر ایک خط کو ایک مستطیل میں نہیں جوڑا جا سکتا، نہ ہی کسی زاویہ کا موازنہ کسی پانچ ضلعی سے کیا جا سکتا۔

مذکورہ بالا چوتھے بدیحہ سے پتہ چلتا ہے کہ اگر دو چیزیں یکساں ہیں تو وہ مساوی بھی ہیں۔ دوسرے الفاظ میں ہر چیز اپنے آپ کے برابر ہوتی ہے۔ یہ منطق کے اصول کا جواز ہے۔ بدیحہ (5) بڑا ہے، کی تعریف دیتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر مقدار

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ایک مقدار A کا حصہ ہے تب A کو ہم B اور کسی تیسری مقدار کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ علامتی طور پر A>B کا مطلب ہے کہ کوئی C ہے جس کے لئے A=B+C

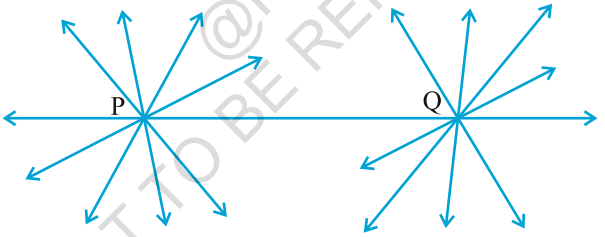
آیئے اب یوکلڈ کے پانچ موضوعات کا مطالعہ کرتے ہیں۔

موضوعہ نمبر I: ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچا جا سکتا ہے۔

اس موضوعہ سے ہمیں یہ تو پتہ چلتا ہے کہ دو مختلف نقطوں سے کم سے کم ایک خط کھینچا جا سکتا ہے لیکن یہ اس بات کی منافی نہیں کرتا کہ صرف ایک ہی خط دو نقطوں سے کھینچا جا سکتا ہے۔ جبکہ یوکلڈ نے اپنی کتابوں میں بغیر بیان کئے یہ فرض کیا ہے کہ دو مختلف نقطوں سے صرف ایک خط ہی کھینچا جا سکتا ہے۔ ہم اس نتیجہ کو مندرجہ ذیل بدیہ کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

بدیہ نمبر 5.1 : دو مختلف نقطے دیئے ہوئے ہیں ان سے گزرتا ہوا صرف ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے

کتنے خطوط ہیں جو P سے گذر رہے ہیں اور Q سے بھی گذر رہے ہیں (شکل 2.4 دیکھئے) صرف ایک اور وہ خط PQ ہے، ہے اس طرح سے مذکورہ بالا بیان بالکل درست ہے اس لئے اس کو ایک بدیہ کے طور پر مان لیا گیا ہے۔



شکل 5.4:

@KBS NOT TO BE REPUBLISHED

موضوعہ 2: ایک ختم ہونے والے خط کو لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے۔

نوٹ کیجئے آج ہم جس کو قطع خط کہتے ہیں یوکلڈ نے اس کو خط کیا تھا، اس لئے آج کے دور کے حساب سے موضوعہ 2 کے مطابق قطعہ خط کو کسی بھی سمت میں لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے (شکل 2.4 دیکھئے)۔



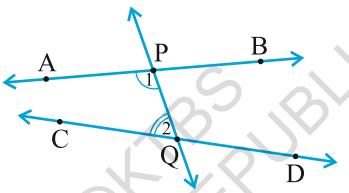
شکل 5.5

موضوعہ 3: کسی بھی مرکز اور نصف قطر کا دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔

موضوعہ 4: تمام زاویہ قائمہ آپس میں ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

موضوعہ 5: اگر ایک خط مستقیم دو خطوط مستقیم کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کو ایک ساتھ لیں جو دو زاویہ قائمہ سے کم ہوں تب دونوں خطوط کو اگر لامحدود طور پر بڑھایا جائے تو وہ اس طرف ملتے ہیں جہاں زاویہ دو زاویہ قائمہ سے کم ہیں۔

مثال کے طور پر شکل 2.6 میں خط PQ خطوط AB اور CD کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ داخلی زاویوں 1 اور 2 کا حاصل جمع PQ کے بائیں طرف، 180 سے کم ہے، اس لئے AB اور CD بڑھانے پر PQ کے بائیں طرف قطع کریں گے۔



شکل 5.6

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

پانچوں موضوعوں کو مختصراً دیکھنے پر آپ کے نوٹس میں یہ بات آئیگی کہ پانچواں موضوعہ باقی موضوعوں کے مقابلہ میں زیادہ پیچیدہ ہے، دوسری طرف اسے 4 تک کے موضوعہ ایسے سادہ ہیں کہ ان کو ایسی سچایوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے جس کے ثبوت کی ضرورت نہیں۔ حالانکہ ان کو ثابت کرنا ممکن بھی نہیں ہے۔ اس لئے ان بیانات کو بغیر ثبوت کے قبول کیا گیا (Appendix-1 دیکھئے)۔ پیچیدگی کی وجہ سے پانچویں موضوعہ کو اگلے سیکشن میں زیادہ توجہ دی گئی ہے۔

آجکل موضوعات اور بدیحات تقریباً ایک ہی مفہوم میں استعمال ہوتے ہیں، موضوعہ دراصل ایک فعل ہے جب ہم کہتے ہیں کہ ہم کچھ موضوع کریں اس کا مطلب ہوتا ہے کہ کائنات میں کسی عمل کا مشاہدہ کر کر کچھ بیانات بنائے جائیں۔ اس کی سچائی/افادیت کی جانچ بعد میں کی جائے۔ اگر یہ سچ ہو تو اسے ایک موضوعہ کے طور پر قبول کیا جائے۔

بدیحات کا مجموعہ تاب (Consistent) (Appendix-1 دیکھئے) کہلاتا ہے اگر ان سے اس بیان کا استخراج ممکن نہ ہو جو کسی دوسرے بدیحہ یا پہلے سے ثابت بیان کی نفی کرے اس لئے جب بھی بدیحات کا کوئی نظام دیا ہو تو اس بات کی یقین دہانی کر لینی چاہئیے کہ وہ نظام تابع ہو۔

اپنے بدیحات اور موضوعات کو بیان کرنے کے بعد یوکلڈ نے ان کا استعمال دوسرے نتائج کو ثابت کرنے میں کیا۔ ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اس نے انتہائی منطق سے کچھ اور نتائج ثابت کئے ۔جن بیانات کو ثابت کیا گیا وہ مسئلہ (Propositions/ theorems) کہلائے، یوکلڈ نے اپنے بدیحات اور موضوعات کو استعمال کرتے ہوئے 465 بیانوں کا ایک منطقی چین میں استخراج کیا۔تعریفوں اور مسئلوں کو شروع میں ہی ثابت کیا گیا۔جیومیٹری پر اگلے کچھ بابوں میں اب ان بدیحوں کا استعمال کچھ مسئلوں کو ثابت کرنے میں کریں گے۔

آیئے اب ہم مندرجہ ذیل مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ یوکلڈ نے کس طرح کچھ نتائج کو ثابت کرنے میں اپنے بدیحات اور موضوعات کا استعمال کیا۔

مثال 1: اگر A,B اور C کسی خط پر تین نقطہ ہیں اور A,B اور C کے درمیان ہے (شکل 2.7 دیکھئے) تو ثابت کیجئے

AB+BC=AC



شکل 5.7

حل: مندرجہ بالا دی ہوئی شکل میں AB+BC،AC پر منطبق ہے

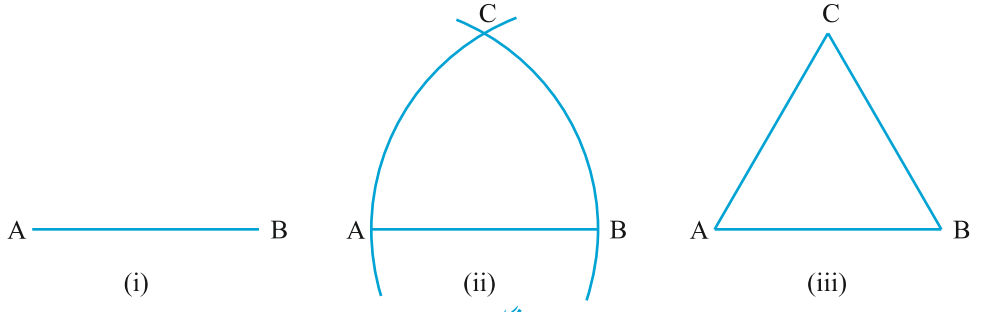
یوکلڈ کا (4) بدیحہ کہتا ہے کہ جو چیزیں ایک دوسرے پر منطبق ہوئی ہیں وہ ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں اس لئے یہ استخراج کیا جاسکتا ہے کہ

AB+BC=AC

نوٹ کیجئے کہ اس حل میں یہ مان لیا گیا ہے کہ دو نقطوں سے صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔

مثال 2: ثابت کیجئے کہ ایک دیئے ہوئے قطع خط پر ایک مساوی ضلعی مثلث بنایا جاسکتا ہے۔

حل: اوپر دیئے گئے بیان میں کسی لمبائی کا ایک قطع خط دیا ہوا ہے مان لیجئے وہ AB ہے (شکل (i) 5.8 دیکھئے)



شکل 5.8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہاں آپ کو کچھ عملیات کرنی ہیں، یوکلڈ کے موضوعہ 3 کو استعمال کرتے ہوئے A کو مرکز مان کر اور AB نصف قطر لیکر آپ ایک دائرہ بنا سکتے ہیں، اسی طرح سے B کو مرکز مان کر اور BA نصف قطر لے کر ایک دوسرا دائرہ بنائیے۔ دونوں دائرہ نقطہ C پر ملتے ہیں اب ΔABC بنانے کے لئے قطعات خطوط AC اور BC بنائیے شکل (iii) 5.8 دیکھیے)۔

اب آپ کو یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ مساوی ضلعی مثلث ہے یعنی $AB = AC = BC$

اب $AB = AC$ کیونکہ یہ ایک ہی دائرہ کے نصف قطر ہیں

اسی طرح سے $AB = BC$ ایک ہی دائرہ کے نصف قطر ہیں

ان دو حقیقتوں اور یوکلڈ کے پہلے مدیحہ (چیزیں جو ایک ہی چیز کے مساوی ہوں آپس میں مساوی ہوتی ہیں) آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $AB=BC=AC$ ایک مساوی ضلعی مثلث ہے۔ مان کر بنائیے۔

نوٹ کیجئے کہ یہاں یوکلڈ نے مانا ہے کسی جگہ بیان کئے بغیر کہ A اور B کو مرکز بتائے گئے دو دائرہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

آیئے اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں جو مختلف نتائج میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔

مسئلہ 5.1 دو مختلف خطوط میں ایک سے زیادہ مشترک نقطہ نہیں ہو سکتا۔

ثبوت: یہاں ہمیں دو خطوط l اور m دیئے ہوئے ہیں ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ ان خطوط میں صرف ایک نقطہ مشترک ہے۔

وقتی طور پر یہ مان لیجئے کہ دو خطوط دو مختلف نقطوں P اور Q پر قطع کرتے ہیں اس لئے آپ کے پاس P اور Q سے گذرتے ہوئے دو خطوط ہیں، لیکن یہ مفروضہ بدیحہ سے ٹکراتا ہے جو یہ ہے کہ دو مختلف نقطوں سے صرف ایک ہی خط گذر سکتا ہے اس لئے شروع میں لیا گیا مفروضہ کہ دو مختلف نقطوں سے دو خطوط گذر سکتے ہیں، غلط ہے۔

اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دیئے ہوئے دو مختلف نقطوں سے صرف ایک خط بنایا جا سکتا ہے۔

مشق 5.1

1. مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے درست ہیں اور کون سے غلط؟ اپنے جوابات کی وجوہات بتائیے

(i) ایک واحد نقطہ سے صرف ایک خط گذر سکتا ہے

(ii) دو مختلف نقطوں سے لامحدود خطوط کھینچے جا سکتے ہیں

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) ایک ختم ہونے والے خط کو دو طرف لامحدود طور پر بڑھا سکتے ہیں

(iv) اگر دو دائرہ مساوی ہیں تو ان کے نصف قطر بھی مساوی ہونگے

(v) شکل 2.9 میں اگر AB = PQ اور PQ = XY تب AB = XY



شکل 5.9

2. مندرجہ ذیل ہر ایک رکن کی تعریف بیان کیجئے کیا کچھ اور بھی رکن ہیں جن کی تعریف کرنے کی ضرورت پہلے ہے؟ وہ کیا ہیں اور آپ ان کی تعریف کیسے کریں گے۔

(i) متوازی خطوط (ii) عمودی خطوط (iii) قطع خط

(iv) نصف قطر (v) مربع

3. نیچے دیئے گئے دو موضوعوں پر غور کیجئے

(i) A اور B دو نقطے دیئے ہوئے ہیں ایک اور نقطہ C بھی موجود ہے جو A اور B کے درمیان ہے۔

(ii) کم سے کم ایسے تین نقطے ہیں جو ایک ہی خط پر واقع نہیں ہیں۔

کیا ان موضوعات میں کوئی غیر معرف رکن ہیں؟ کیا یہ موضوعات تابع ہیں؟ کیا یہ یوکلڈ کے موضوعات میں سے ہیں؟ تشریح کیجئے

4. اگر ایک نقطہ A,C اور B کے درمیان اس طرح ہے کہ AC = BC تو ثابت کیجئے کہ $AC = \frac{1}{2}AB$ شکل بنا کر تشریح کیجئے۔

5. سوال 4 میں نقطہ C قطعہ خط AB کا وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔ ثابت کیجئے کہ ہر قطع خط کا ایک اور صرف ایک وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

6. شکل 2.10 میں اگر AC=BD ہو تو ثابت کیجئے کہ AB=CD

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 5.10

7. یوکلڈ کے بدیحات کی فہرست میں پانچواں بدیحہ کیوں کائناتی سچ مانا جاتا ہے۔نوٹ کیجئے کہ سوال پانچویں موضوعہ کے بارے میں نہیں۔

5.3 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1. حالانکہ یوکلڈ نے نقطہ خط اور مستوی کی تعریف بیان کی ہے لیکن ریاضی دانوں نے اس کو نہیں مانا۔اس لئے اب جیومیٹری میں یہ غیر معروف رکن کے طور پر استعمال ہوتی ہے۔
2. بدیحات اور موضوعات وہ مفروضات ہیں جو واضح کائناتی سچ ہیں۔ان کو ثابت نہیں کیا گیا۔
3. مسئلہ وہ مفروضات ہیں جن کو تعریفوں، بدیحات، پچھلے ثابت کئے گئے بیانوں اور استخراجی منطق کے استعمال سے ثابت کیا گیا ہے۔
4. یوکلڈ کے بدیحات تھے

(1) چیزیں جو کسی ایک ہی چیز کے مساوی ہوں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

(2) اگر مساوی چیزوں میں مساوی چیزیں جمع کی جائیں تو حاصل شدہ چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔

(3) اگر مساوی چیزیں مساوی چیزوں میں سے گھٹائی جائیں تو باقی چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔

(4) چیزیں جو ایک دوسرے پر منطبق ہوں آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔

(5) مکمل حصہ سے بڑا ہوتا ہے

(6) چیزیں جو کسی ایک ہی چیز کا دوگنا ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

(7) چیزیں جو کسی ایک ہی چیز کی آدھی ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

5 یوکلڈ کے موضوعات تھے

موضوعہ 1: ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچا جاسکتا ہے۔

موضوعہ 2: ایک ختم ہونے والے خط کو لامحدود طور پر بڑھایا جاسکتا ہے۔

موضوعہ 3: کسی بھی مرکز اور نصف قطر کا دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔

موضوعہ 4: تمام قائم زاویہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

باب 6

H9F1E1

خطوط اور زاویہ (LINES & ANGLES)

6.1 تعارف (Introduction)

باب 5 میں آپ نے پڑھا کہ ایک خط کو بنانے کے لئے سے دو نقطے چاہئے آپ نے کچھ بدیحات بھی پڑھے اور ان بدیہیوں کی مدد سے آپ نے کچھ بیانات کو بھی ثابت کیا، اس باب میں آپ ان زاویوں کی خصوصیات کے بارے میں پڑھیں گے جو دو خطوط کے قطع کرنے پر بنتے ہیں۔ اس کے علاوہ ان زاویوں کی خصوصیات کے بارے میں بھی پڑھیں گے جو ایک خط دو یا دو سے زیادہ متوازی خطوط کو مختلف نقطوں پر قطع کر کے بناتا ہے، مزید ان خصوصیات کا استعمال کچھ بیانوں کو استخراجی منطق کے ثابت کرنے میں کریں گے (Appendix 1 دیکھیے)۔ پچھلی کلاسوں میں آپ عملی کاموں کے ذریعہ ان بیانات کی تصدیق پہلے ہی کر چکے ہیں۔

آپ اپنی روزمرہ کی زندگی میں مستوی سطحوں کے کناروں کے درمیان بنے مختلف قسم کے زاویوں کو دیکھتے ہیں، مستوی سطحوں کا استعمال کر یکساں قسم کے ماڈل بنانے کے لئے آپ کو زاویوں کا پورا علم ہونا ضروری ہے مثال کے طور پر اسکول کی نمائش میں رکھنے کے لئے بانس کی لکڑی کا استعمال کر آپ چھونپڑی کا ایک ماڈل بنانا چاہتے ہیں، تصور کیجیے آپ اس کو کیسے بنائیں گے؟ کچھ لکڑیاں آپ ایک دوسرے کے متوازی رکھیں گے اور کچھ ترچھی جب کوئی آرکیٹیکٹ ایک کثیر منزلہ عمارت کا پلان تیار کرتی ہے تو اس کو قاطع خطوط اور متوازی خطوط مختلف زاویوں پر بنانے پڑتے ہیں کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ وہ ان خطوط اور زاویوں کی خصوصیات جانے بغیر عمارت کا صحیح نقشہ بنا سکتا ہے۔

سائنس میں آپ روشنی کی خصوصیات کا مطالعہ شعاع کا ڈائیگرام بنا کر کرتے ہیں مثال کے طور پر روشنی کے انعطاف کی خصوصیت مطالعہ اس وقت کرنے کے لئے جب روشنی ایک میڈیم سے دوسرے میڈیم میں داخل ہوتی ہے۔ آپ قاطع خطوط

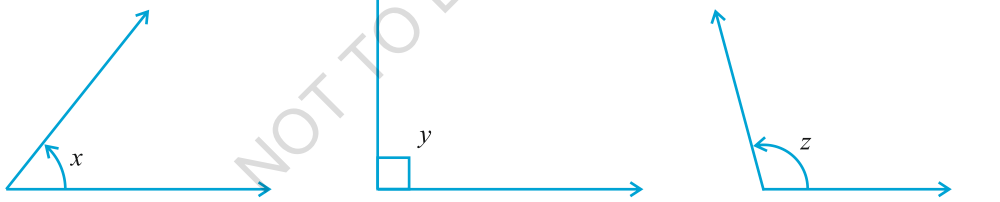
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اور متوازی خطوط کی خصوصیات کا استعمال کرتے ہیں۔ جب دو یا زیادہ قوتیں ایک جسم پر لگتی ہیں تب آپ ایک شکل بناتے ہیں جس میں قوتوں کا جسم پر کلی اثر جاننے کے لئے قوتوں کو سمت والے قطاعت خطوط سے ظاہر کرتے ہیں جب شعاعیں (یا قطعات خط) ایک دوسرے کے متوازی ہوں یا ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس وقت آپ کو زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے ایک مینار کی اونچائی معلوم کرنے کے لئے یا کسی لائٹ ہاؤس سے کسی پانی کے جہاز کا فاصلہ معلوم کرنے کے لئے بصیر کے خط اور افقی خط کے درمیان زاویہ معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایسی بہت سی مثالیں دی جاسکتی ہیں جہاں خطوط اور زاویوں کا استعمال ہوتا ہے۔ جیومیٹری کے اگلے بابوں میں دوسری اور خصوصیات کا استخراج کرنے کے لئے خطوط اور زاویوں کی ان خصوصیات کا استعمال کریں گے۔

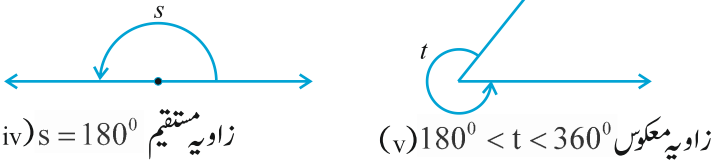
اگلے سیکشن میں ہم پچھلی کلاسوں میں خطوط سے متعلق تعریفوں اور امکان کو دہرائیں گے۔

6.2 بنیادی ارکان اور تعریفیں (Basic Terms and Definitions)

یاد کیجیے کہ خط کا وہ حصہ جس کے سرے کے دو نقطے ہوتے ہیں قطع خط کہلاتا ہے اور خط کا وہ حصہ جس کا صرف ایک سرے کا نقطہ ہوتا ہے شعاع (Ray) کہلاتا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ قطع خط $\overline{AB}$ کو ہم AB سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی لمبائی کو AB سے شعاع AB کو AB سے اور خط AB کو $\overline{AB}$ سے ظاہر کرتے ہیں لیکن ہم ان علامتوں کا استعمال نہیں کریں گے ہم قطع خط AB، شعاع



(i) $0^0 < x < 90^0$ زاویہ حادہ (ii) $y = 90^0$ زاویہ قائمہ (iii) $90^0 < z < 180^0$ زاویہ منفرجہ



(iv) $s = 180^0$ زاویہ مستقیم (v) $180^0 < t < 360^0$ زاویہ معکوس

شکل 6.1 زاویوں کی قسمیں

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

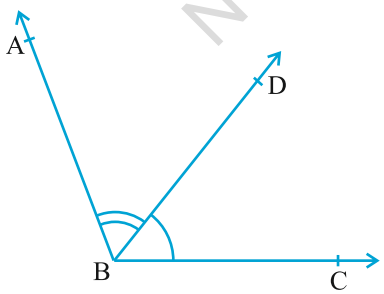
AB اور خط AB کو ایک ہی علامت AB سے ظاہر کریں گے اس کے معنی سیاق سے واضح ہو جائیں گے۔ کبھی کبھی چھوٹے حروف l, m اور n وغیرہ سے بھی خطوط کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر تین یا زیادہ نقطے ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں تو وہ ہم خط نقطہ کہلاتے ہیں نہیں تو غیر ہم خط نقطے۔ یاد کیجیے کہ زاویہ جب بنتا ہے جب دو شعاع ایک ہی سرے کے نقطہ سے شروع ہوتی ہے وہ شعاعیں جو زاویہ بناتی ہیں زاویہ کے بازو کہلاتے ہیں اور سرے کا نقطہ زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔ آپ نے مختلف قسم کے زاویوں جیسے زاویہ حادہ، زاویہ قائمہ، زاویہ منفرجہ، زاویہ مستقیم اور زاویہ معکوس (refle) کے بارے میں پچھلی کلاسوں میں پڑھا ہوگا (شکل 3.1 دیکھئے)

ایک زاویہ حادہ کی پیمائش O سے 90^0 کے درمیان ہوتی ہے جبکہ زاویہ قائمہ 90^0 کا ہوتا ہے، ایک زاویہ جو 90^0 سے زیادہ اور 180^0 سے کم ہوتا ہے زاویہ منفرجہ کہلاتا ہے۔ مزید یاد کیجیے کہ زاویہ مستقیم 180^0 کا ہوتا ہے۔ ایک زاویہ جو 180^0 سے زیادہ اور 360^0 سے کم ہوتا ہے زاویہ معکوس کہلاتا ہے۔ مزید دو زاویہ جن کا حاصل جمع 90^0 ہوتا ہے تکمیلی زاویے کہلاتے ہیں اور وہ دو زاویہ جن کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے متمم زاویے کہلاتے ہیں۔

آپ متصل زاویوں کے بارے میں بھی پچھلی کلاسوں میں پڑھ چکے ہیں (شکل 6.2 دیکھئے) دو زاویہ متصل زاویہ کہلاتے ہیں اگر انکا راس ایک ہی ہو اور ایک بازو مشترک ہو اور غیر مشترک بازو مشترک بازو کی مخالف سمتوں میں ہو۔ شکل 6.2 میں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ سے متصل زاویہ ہیں شعاع BD ان کا مشترک بازو ہے اور نقطہ B ان کا مشترک راس ہے شعاع BA اور BC غیر مشترک بازو میں مزید جب دو زاویہ متصل ہیں تو ان کا حاصل جمع غیر مشترک بازوں سے بنے زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔ اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

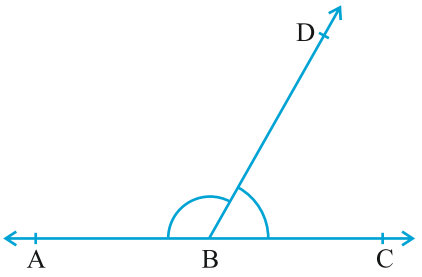


شکل 6.2 متصل زاویہ

نوٹ کیجیے کہ $\angle ABC$ اور $\angle ABD$ سے متصل نہیں ہیں کیوں؟ کیونکہ ان کے غیر مشترک بازو BD اور BC مشترک بازو BA کی ایک ہی طرف واقع ہیں۔

شکل 6.2 میں اگر غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں تب یہ شکل 6.3 کی طرح نظر آتے ہیں۔ اس حالت میں $\angle ABD$ اور $\angle DBC$ زاویوں کا خطی جوڑا کہلاتا ہیں۔

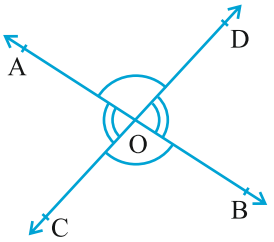
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.3 زاویوں کا جوڑا

آپ یہ بھی دہرا سکتے ہیں کہ جب دو خطوط جیسے AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں تو اس طرح سے بنے زاویہ بالمقابل زاویہ کہلاتے ہیں، بالمقابل زاویوں کے دو جوڑے ہوتے ہیں ایک جوڑا $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ ہے، کیا آپ دوسرا جوڑا بتا سکتے ہیں؟

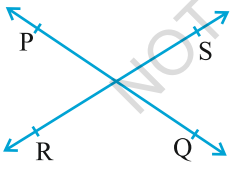
6.3 قاطع خطوط اور غیر قاطع خطوط

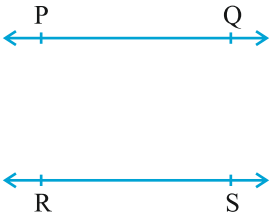


شکل 6.4 بالمقابل زاویہ

ایک پیپر پر دو مختلف خطوط PQ اور RS کھینچیے آپ دیکھیں گے کہ آپ ان کو دو طریقوں سے بنا سکتے ہیں جیسا کہ شکل 6.5 (i) اور شکل 6.5 (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

خط کے اس نظریہ کو دہرائیے کہ اس کو دونوں سمتوں میں لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے۔ شکل 6.5 (i) میں خطوط PQ اور RS قاطع خطوط ہیں اور شکل 6.5(ii) میں متوازی خطوط نوٹ کیجیے کہ ان متوازی خطوط کے مختلف نقطوں پر مشترک عمودوں کی لمبائی یکساں ہے اس یکساں لمبائی کو متوازی خطوط کے درمیان کا فاصلہ کہا جاتا ہے۔





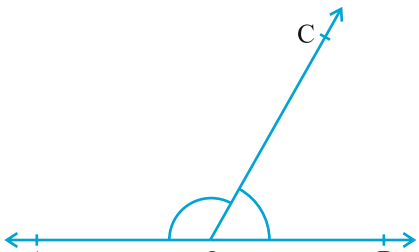
(i) قاطع خطوط (ii) غیر قاطع (متوازی) خطوط

شکل 6.5 دو خطوط کو بنانے کے مختلف طریقہ

6.4 زاویوں کے جوڑے (Pairs of Angles)

سیکشن میں آپ نے زاویوں کے کچھ جوڑے جیسے تکمیلی زوایہ، تتمی زاویہ، متصل زاویہ خطی جوڑا وغیرہ کے بارے میں سیکھا کیا

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.6 زاویوں کا خطی جوڑا

آپ ان زاویوں کے درمیان کسی تعلق کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟ آیئے اب ہم ان زاویوں کے درمیان تعلق معلوم کرنے کی کوشش کریں جو جب بنتے ہیں جب کوئی شعاع کسی خط پر کھڑی ہوتی ہے۔ایک شکل بنایئے جس میں ایک شعاع کسی خط پر کھڑی ہو جیسا کے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔خط کو AB اور شعاع کو OC نام دیجیے، نقطہ O پر بنے زاویہ کیا ہیں؟ یہ ہیں $\angle AOC$ ، $\angle COB$ اور $\angle AOB$ ۔

کیا ہم لکھ سکتے ہیں جو $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$

ہاں! (کیوں؟ سیکشن 6.2 میں متصل زاویوں کے حوالہ سے) AOB سے کی پیائش کیا ہے؟ یہ 180° ہے (کیوں؟)

(1) اور (2) سے کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ ؟

بدیہ 6.1 ہاں (کیوں؟)

مذکورہ بالا بحث سے ہم مندرجہ ذیل بدیہ بیان کر سکتے ہیں:

بدیہ 6.1 : اگر کوئی شعاع ایک خط پر کھڑی ہو تو اس طرح سے بنے متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے۔

یاد کیجیے کہ جب در متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے تب زاویوں کا خطی جوڑا کہلاتا ہے۔

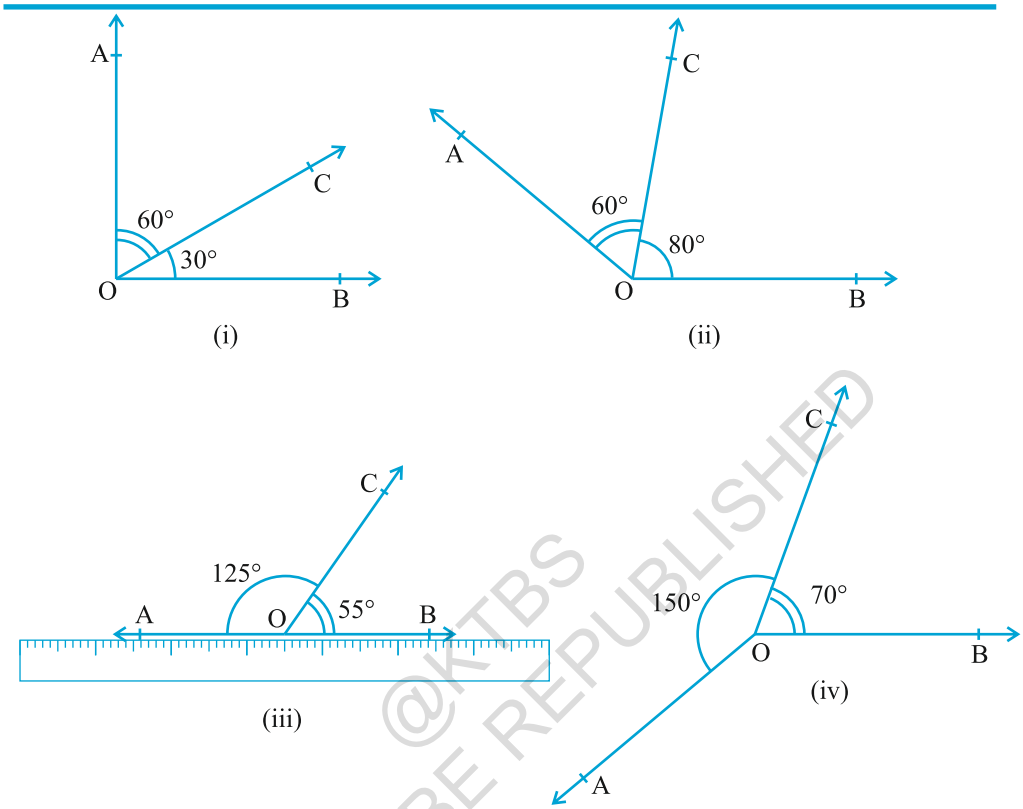
بدیہ 6.1 میں یہ دیا ہوا ہے کہ شعاع ایک خط پر کھڑی ہے اس دیئے ہوئے سے ہم نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ اس طرح سے بنے دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے کیا ہم بدیہ 6.1 کو دوسری طرح بھی لکھ سکتے ہیں؟ یعنی بدیہ 6.1 کے نتیجہ کو دیا ہوا لیجئے اور دیئے ہوئے کو نتیجہ لیجئے اس طرح سے ہم کو ملے گا۔

(A) اگر دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہے تب شعاع ایک خط پر کھڑی ہوتی ہے یعنی غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں۔

اب آپ دیکھتے ہیں کہ بدیہ 6.1 اور بیان A ایک دوسرے کے معکوس ہیں ہم ایک کو دوسرے کا معکوس کہتے ہیں ہم نہیں جانتے کہ بیان A درست ہے یا نہیں۔آیئے جانچ کرتے ہیں۔مختلف پیائشوں کے متصل زاویہ بتایئے جیسا کے شکل 3.7 میں دکھایا گیا ہے، پھر ایک حالت میں غیر مشترک بازوں پر ایک فٹا رکھئے کیا دوسرا نمبر مشترک بازو بھی فٹے کے ساتھ ساتھ ہے؟

آپ پائیں گے صرف شکل (iii) 6.7 میں دونوں غیر مشترک بازو فٹے کے ساتھ ساتھ ہیں یعنی نقطے O,A اور B ایک ہی

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 6.7 مختلف پیمائشوں کے متصل زاویہ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

خط پر ہیں اور شعاع OC اس پر کھڑی ہے۔ مزید دیکھئے کہ $\angle AOC + \angle COB = 125^0 + 55^0 = 180^0$

اس سے آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ بیان A درست ہے۔ اس لئے آپ اس کو ایک بدیہ کے طور پر مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کر سکتے ہیں۔

بدیہ 6.2: اگر دو متصل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے تب زاویوں کے غیر مشترک بازو ایک خط بناتے ہیں۔

واضح وجوہات کی بنیاد پر مذکورہ بالا دو بدیہات ایک ساتھ خطی جوڑ ابدیہیہ کہلاتا ہے۔

آیئے اب اس حالت کی جانچ کرتے ہیں جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

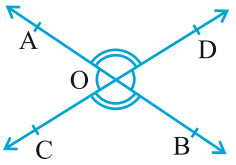
پچھلی کلاسوں سے دہرایئے کہ جب دو خط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ان سے بنے بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں، آیئے اس نتیجہ کو ثابت کرتے ہیں ثبوت کے اجزاء کو جاننے کے لئے Appendix I دیکھئے اور مندرجہ ذیل ثبوت کو

پڑھتے وقت اس کو ذہن میں رکھیئے۔

مسئلہ 6.1: اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

ثبوت: مندرجہ بالا بیان میں یہ دیا ہوا ہے کہ دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

اس لئے مان لیجئے AB اور CD دو خطوط ہیں جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل 3.8 میں دکھایا گیا ہے۔ ان سے ہمیں بالمقابل زاویوں کے دو جوڑے حاصل ہوتے ہیں جن کے نام ہیں۔



شکل 6.8 بالمقابل زاویہ

(i) $\angle AOC$ اور $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ اور $\angle BOC$

ہمیں ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ $\angle AOC = \angle BOD$ اور $\angle AOD = \angle BOC$

اب شعاع OA خط CD پر کھڑی ہے

اس لئے $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$ (خطی جوڑے کا بدیہیہ)

کیا ہم لکھ سکتے ہیں $\angle AOD + \angle BOD = 180^0$ ہاں! (کیوں؟)

(1) اور (2) سے ہم لکھ سکتے ہیں

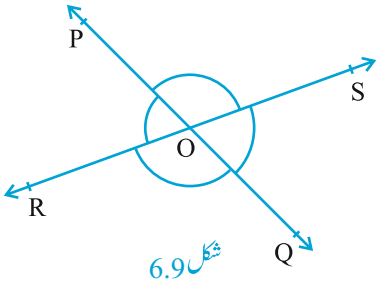
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

اس کا مطلب ہے کہ $\angle AOC = \angle BOD$ (یہ حوالہ سیکشن 5.2 بدیہیہ 3)

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\angle AOD = \angle BOC$

آیئے اب ہم خطی جوڑے کے بدیہیہ اور مسئلہ 3.1 پر منحصر کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: شکل 6.9 میں خطوط PQ اور RS ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ ، تو تمام زاویہ معلوم کیجیے۔



شکل 6.9

حل: $\angle POR + \angle ROQ = 180^0$ (خطی جوڑا دیا ہوا ہے)

لیکن $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$

اس لئے $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^0 = 75^0$

@ICTRS NOT TO BE REPUBLISHED

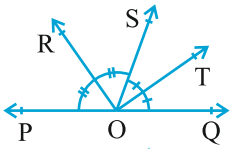
اسی طرح سے $\angle POQ = \frac{7}{12} \times 180^0 = 105^0$

اب $\angle POS - \angle ROQ - 105^0$ (بالمقابل زاویہ)

اور $\angle SOQ - \angle POR - 75^0$ (بالمقابل زاویہ)

مثال 2: شکل 6.10 میں شعاع OS خط POQ پر کھڑی ہے۔ شعاع OR اور شعاع OT بالترتیب $\angle POS$ اور $\angle SOQ$ کے زاویائی ناصف ہیں اگر $\angle POS = x$ ہے تو $\angle ROT$ معلوم کیجیے۔

حل: شعاع OS خط POQ پر کھڑی ہے۔



شکل 6.10

اس لئے $\angle POS + \angle SOQ - 180^0$

لیکن $\angle POS = x$

اس لئے $x + \angle SOQ - 180^0$

اب $\angle SOQ - 180^0 - x$

اب شعاع OR، $\angle POS$ کی تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

اسی طرح سے $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180^0 - x)$

$= 90^0 - \frac{x}{2}$

اب، $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

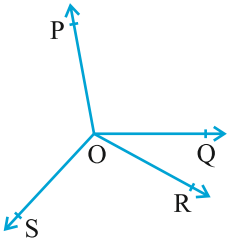
$= \frac{x}{2} + 90 - \frac{x}{2}$

$= 90^0$

مثال 3: شکل 6.11 میں OP, OQ, OR اور OS چار شعاعیں ہیں ثابت کیجئے کہ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS - 360^0$$

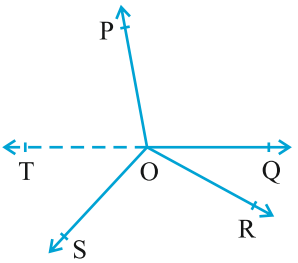


شکل 6.11

حل: شکل 6.11 میں آپ کو کسی ایک شعاع OS یا OP,OQ,OR کو پیچھے کی طرف ایک نقطہ تک بڑھانے کی ضرورت ہے۔اس لئے شعاع OQ کو نقطہ T تک اس طرح بڑھاتے ہیں کہ TOQ ایک خط ہو (شکل 6.12 دیکھئے)

اب شعاع OP خط TOQ پر کھڑی ہے

اس لئے $\angle TOP - \angle POQ - 180^0$ (خطی جوڑے کا بدیہ)(1)



شکل 6.12

اسی طرح سے شعاع OP خط TOQ پر کھڑی ہے۔

اس لئے $\angle TOS - \angle SOQ - 180^0$

لیکن $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

اس لئے (2) بن جاتی ہے۔

$$\angle TOS - \angle SOR + \angle QOR - 180^0$$

اب (1) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\angle TOP - \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR - 360^0$$

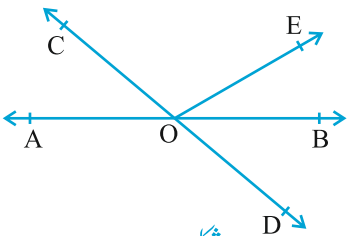
لیکن $\angle TOP + \angle TOS + \angle POS$

اس لئے (4) بن جاتی ہے۔

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR - \angle POS - 360^0$$

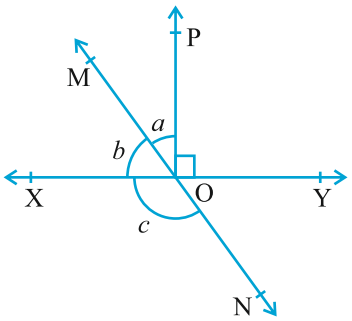
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 6.1



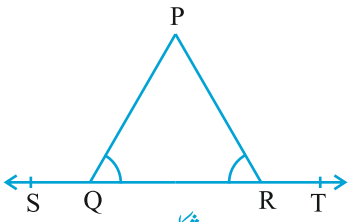
شکل 6.13

1. شکل 6.13 میں خطوط AB اور CD نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle BOD = 40^0$ اور $\angle AOC + \angle BOE = 70^0$ ہے تو $\angle BOE$ اور معکوس $\angle COE$ سے معلوم کیجیے۔



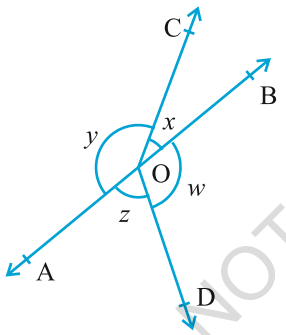
شکل 6.14

2. شکل 6.14 میں خطوط XY اور MN نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر $\angle POY = 90^0$ اور $a : b = 2 : 3$ تو c معلوم کیجیے۔



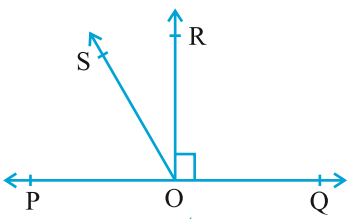
شکل 6.15

3. شکل 6.15 میں $\angle PQR = \angle PRQ$, تو ثابت کیجیے کہ $\angle PQS = \angle PRT$



شکل 6.16

4. شکل 6.16 میں اگر $x + y = w + z$ تو ثابت کیجیے کہ AOB ایک خط ہے



شکل 6.17

5. شکل 6.17 میں POQ ایک خط ہے شعاع OR خط PQ پر عمود ہے OS ایک دوسری شعاع ہے جو شعاعوں OP اور OR کے درمیان ہے ثابت کیجیے کہ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\angle POS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$$

6. یہ دیا گیا ہے کہ $\angle XYZ = 64^0$ اور XY کو نقطہ P تک بڑھا دی ہوئی اطلاعات سے ایک شکل بنائیے اگر شعاع YQ, $\angle ZYP$ سے کی تنصیف کرتی ہے تو $\angle XYQ$ اور معکوس زاویہ $\angle QYP$ معلوم کیجیے۔

6.5 ایک ہی خط کے متوازی خطوط (Lines Parallel to the Same Line)

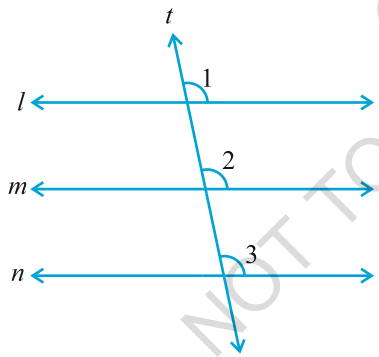
اگر کوئی دو خطوط ایک خط کے متوازی ہوں تو کیا وہ آپس میں بھی متوازی ہوں گے؟ آیئے اس کی جانچ کریں شکل 6.18 دیکھیے جس میں خط m || خط l اور خط n || خط l کے خطوط ML اور N کے لئے قاطع t بنائیے، یہ دیا ہوا ہے کہ خط m || خط l اور خط n || خط l اس لئے $\angle 2 = \angle i$ اور (نظیری زاویوں کا بدیہیہ)

اس لئے $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 3$ (کیوں؟)

$\angle 2 = \angle 1$ اور $\angle 3 = \angle 1$ لیکن $\angle 2 = \angle 3$ نظیری زاویہ ہیں اور یہ برابر ہیں

اس لئے آپ کہہ سکتے ہیں کہ خط n || خط m

(نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس)



شکل 6.18

اس نتیجہ کو ہم ایک مسئلہ کی شکل میں درج ذیل بیان کرتے ہیں

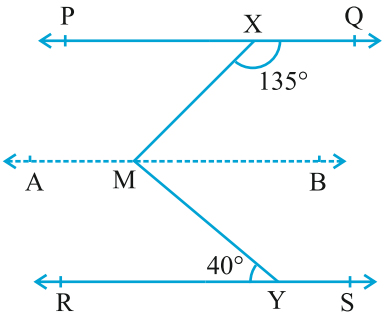
مسئلہ 6.6: خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوتے ہیں آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔

نوٹ:- مندرجہ بالا خصوصیت کی توسیع ہم دو سے زیادہ خطوط کے لئے بھی کر سکتے ہیں۔ آیئے اب متوازی خطوط سے متعلق کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

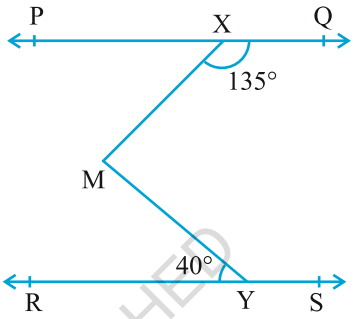
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 4: شکل 6.19 میں اگر $PQ \parallel RS$ $\angle MXQ=135^0$ اور $\angle MYR=40^0$ کو $\angle XMY$ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں ہمیں نقطہ M سے گذرتا ہوا اور خط PQ کے متوازی ایک خط AB کھینچنے کی ضرورت ہے جیسا کہ شکل 6.20 میں



شکل 6.19



شکل 6.20

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

دکھایا گیا ہے اب $AB \parallel PQ$ اور $PQ \parallel RS$

اس لئے $AB \parallel RS$ (کیوں؟)

اب $\angle QXM + \angle XMB = 180^0$ ($AB \parallel PQ$, XM قاطع کے ایک ہی طرف کے داخل زاویہ ہیں)

لیکن $\angle QXM=135^0$

اس لئے $135^0 + \angle XMB = 180^0$

کیونکہ $\angle XMB = 45^0$

اب $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, متبادل زاویہ)

اس لئے $\angle BMY = 40^0$

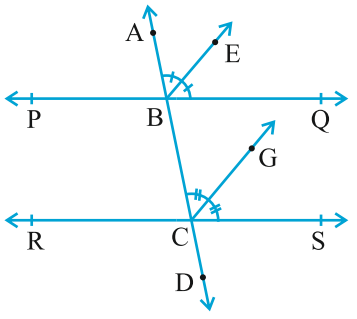
(1) اور (2) کو جمع کرنے پر حاصل ہوگا۔

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^0 + 40^0$$

یعنی $\angle XMY = 85^0$

مثال 5: اگر کوئی قاطع دو خطوط کو اس طرح قطع کرے کہ نظیری زاویوں کے ایک جوڑے کے ناصف متوازی ہوں تو ثابت کیجیے کہ دو خطوط متوازی ہونگے۔

حل: شکل 6.21 میں قاطع AD دو خطوط PQ اور RS کو بالترتیب دو نقطوں B اور C پر قطع کرتا ہے۔ شعاع BE، $\angle ABQ$ کا ناصف ہے اور شعاع CG، $\angle BCS$ کا ناصف ہے اور $BE \parallel CG$



شکل 6.21

ہمیں ثابت کرتا ہے کہ $PQ \parallel RS$

یہ دیا ہوا ہے کہ شعاع BE ، $\angle ABQ$ کا ناصف ہے

اس لئے $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ (1)

اسی طرح سے شعاع CG ، $\angle BCS$ کا ناصف ہے۔

اس لئے $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ (2)

لیکن $BE \parallel CG$ اور AD ایک قاطع ہے۔

اس لئے $\angle ABE = \angle BCG$ (نظیری زاویوں کا بدیہیہ) (3)

(1) اور (2) کو (3) میں رکھنے پر ہمیں ملتا ہے۔

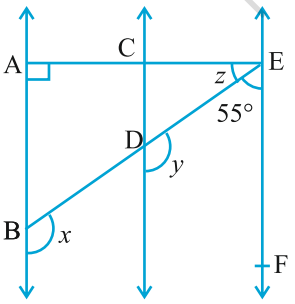
$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$$

یعنی $\angle ABQ = \angle BCS$

لیکن یہ قاطع یعنی AD سے خطوط PQ اور RS پر بنے نظیری زاویہ ہیں اور مساوی ہیں۔

اس لئے $PQ \parallel RS$ (نظیری زاویوں کے بدیہیہ کا معکوس)

مثال 6: شکل 6.22 میں $AB \parallel CD$ اور $CD \parallel EF$. اور $EA \perp AB$۔ اگر $\angle BEF = 55^0$ ہے تو z اور y، x کی قدر معلوم کیجیے۔



شکل 6.22

حل: $y + 55^0 = 180^0$

($CD \parallel EF$ قاطع ED کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ)

اس طرح $y = 180^0 - 55^0 = 125^0$

اس لئے $x = y = 125^0$ ($AB \parallel CD$ نظیری زاویوں کا بدیہیہ)

اب کیونکہ $AB \parallel CD$ اور $CD \parallel EF$ اس لئے $AB \parallel EF$

اس لئے $\angle EAB + \angle FEA = 180^0$ (قاطع EA کے ایک ہی طرف کے داخلی زا

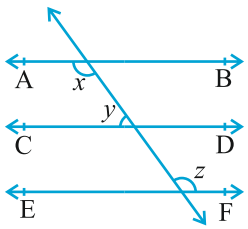
اس لئے $90^0 + z + 55^0 = 180^0$

جس سے ہمیں ملتا ہے $z = 35^0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

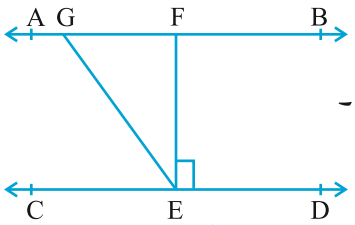
مشق 6.2

1. شکل 6.23 میں اگر $AB \| CD, CD \| EF$ اور $y : z = 3 : 7$ تو x معلوم کیجیے۔



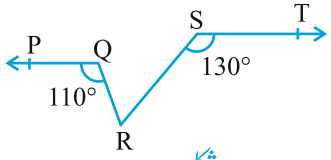
شکل 6.23

2. شکل 6.24 میں اگر $AB \| CD, EF \perp CD$ اور $\angle GHD = 126^0$۔
تو $\angle AGE, \angle GEF$ اور $\angle FGE$ معلوم کیجیے۔



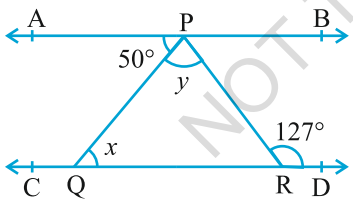
شکل 6.24

3. شکل 6.25 میں اگر $\angle PQR = 110^0$ اور $PQ \| ST, \angle RST = 130^0$
تو $\angle QRS$ معلوم کیجیے۔
[اشارہ: R سے گذرتا ہوا ایک خط ST کے متوازی کھینچیے]



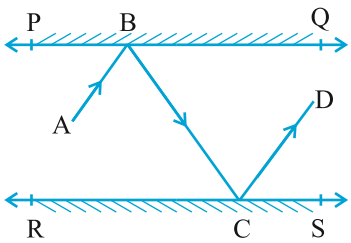
شکل 6.25

4. شکل 6.26 میں اگر $AB \| CD, \angle APQ = 50^0$ اور
$\angle PRD = 127^0$ تو x اور y معلوم کیجیے۔



شکل 6.26

5. شکل 6.27 میں دو آئینہ PQ اور RS ایک دوسرے کے متوازی رکھے گئے ہیں ایک وقوع شعاع AB آئینہ PQ پر B سے ٹکراتی ہے اور منعکس شعاع BC کے راستے پر چلتی ہے اور RS آئینہ سے C پر ٹکراتی ہے اور دوبارہ منعکس ہو کر واپس CD پر آجاتی ہے ثابت کیجیے کہ $AB \| CD$



شکل 6.27

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.6 خلاصہ (Summary)

اس سبق میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط پڑھیں

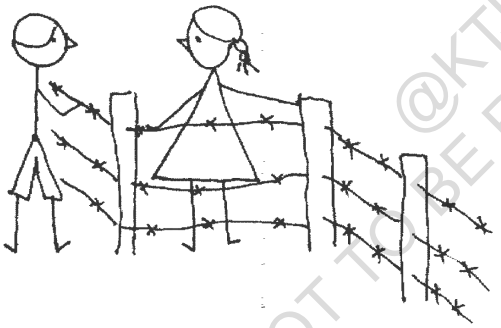
1. اگر کوئی شعاع ایک خط پر کھڑی ہو تو اس سے بنے متصل زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے۔ اسی طرح سے اس کا معکوس بھی درست ہے اس خصوصیت کو خطی جوڑے کا بدیہیہ کہتے ہیں۔
2. جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب بالمقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
3. خطوط جو دیئے خط کے متوازی ہیں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ضمیمہ 1

ریاضی میں ثبوت (PROOFS IN MATHEMATICS)

A1.1 تعارف (Introduction)



فرض کیجیے آپ کے کنبہ کے پاس زمین کا ایک پلاٹ ہے جسکی باؤنڈری نہیں بنی ہے۔ آپ کے پڑوسی نے ایک دن اپنے پلاٹ کی باؤنڈری کرانے کا فیصلہ کیا۔ جب وہ اپنی زمین کی باؤنڈری کرا چکا تب آپ کو پتہ چلا کے آپکے کنبہ کی زمین کا بھی کچھ حصہ اس نے اپنی باؤنڈری میں لے لیا۔ آپ اپنے پڑوسی کو ثابت کیسے کرینگے کہ اس نے آپ کی زمین پر قبضہ کرنے کی کوشش کی ہے؟ باؤنڈریوں کے فرق کو طے کرنے کے لئے آپ کا پہلا قدم گاؤں کے بزرگوں کی مدد لینا ہوگا۔ فرض کیجیے اگر بزرگوں کے نظریات میں بھی فرق ہو یعنی کچھ لوگ یہ سمجھیں کہ آپ ٹھیک ہیں اور کچھ یہ سمجھیں کہ آپ کا پڑوسی ٹھیک ہے۔ اب آپ کیا کر سکتے ہیں؟ آپ کے پاس یہی راستہ بچا ہے کہ اپنی راہ خود تلاش کریں جو فریقین کو بھی قابلِ قبول ہو، مثال کے طور پر حکومت کی طرف سے تسلیم شدہ آپ کے گاؤں کے نقشہ کا استعمال ہوسکتا ہے یا اگر ضروری ہو تو اپنے اس دعوے کو ثابت کرنے کے لئے کہ آپ صحیح ہیں اور آپ کا پڑوسی غلط، آپ عدالت کا دروازہ بھی کھٹکھٹا سکتے ہیں۔

آیئے اب ایک دوسری صورتِ حال پر غور کرتے ہیں۔ مان لیجیے آپ کی ماں نے آپکے مکان کا اگست 2005 کا بجلی کا بل ادا کیا لیکن ستمبر 2005 کے بل میں یہ دعوئی کیا گیا ہے کہ آپ نے اگست کے مہینہ کا بل نہیں ادا کیا بجلی کے محکمہ کے اس دعوئی کو آپ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کس طرح غلط ثابت کرینگے؟ آپ پچھلے مہینہ کے بل کی رسید پیش کرینگے جو یہ ثابت کرے گی کے آپ اگست کے مہینہ کا بل ادا کر چکے ہیں۔

آپ نے ابھی کچھ مثالیں دیکھیں جس سے پتہ چلتا ہے کہ ہماری روزمرہ زندگی میں ہمیں اکثر کچھ بیانوں یا دعووں کو صحیح یا غلط ثابت کرنا ہوتا ہے، لیکن اس کے ساتھ ساتھ ہم کچھ بیانوں کو بغیر ثبوت کے قبول کر لیتے ہیں۔ لیکن ریاضی میں ہم صرف ان بیانوں کو قبول کرتے ہیں جسکو ریاضی کی منطق سے ثابت کیا گیا ہو۔

حقیقت میں ریاضی میں ثبوتوں کو وجود ہزاروں سال سے ہے اور ریاضی کی کسی بھی شاخ میں انکو مرکزی اہمیت حاصل ہے، ایسا مانا جاتا ہے کہ پہلا جانا پہچانا ثبوت ایک یونانی فلسفی اور ریاضی داں تھیلز نے دیا تھا، حالانکہ بہت سی قدیم تہذیبوں جیسے میسوپوٹامیہ، مصر، چین اور ہندوستان میں ریاضی کی مرکزی اہمیت تھی لیکن ایسی کوئی واضح شہادت نہیں ملتی جس سے پتہ چلے کے انھوں نے ثبوتوں کا استعمال کیا تھا جیسے ہم آج کرتے ہیں۔

اس باب میں ہم اس بات پر غور کرینگے کہ بیان کیا ہے اور ریاضی میں کس قسم کے دلائل شامل ہیں اور ریاضی کے ثبوت کن چیزوں پر مشتمل ہو۔

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 A ریاضی کے طور پر قابل قبول بیانات

اس سیکشن میں ہم ریاضی کے طور پر قابل قبول بیانات کا مفہوم سمجھنے کی کوشش کرینگے ایک بیان ایک جملہ یہ ایک حکمیہ یا استجر یہ جملہ نہیں ہے اور یقیناً بیان ایک سوال بھی نہیں ہے۔ مثال کے طور پر:

آپ کے بالوں کا رنگ کیا ہے؟ بیان نہیں ہے، یہ ایک سوال ہے

جائیے اور میرے لئے ایک گلاس پانی لے کر آیئے'' یہ ایک التجا یا ایک حکم ہے' بیان نہیں ہے۔

کتنا خوبصورت Sunset ہے۔ ایک فجائیہ ریمارک ہے بیان نہیں۔

لیکن' آپ کے بالوں کا رنگ کالا ہے، ایک بیان ہے۔

عمومی طور پر' بیان مندرجہ ذیل میں سے ایک ہوسکتا ہے

- ہمیشہ صحیح
- ہمیشہ غلط
- مبہم (ambiguous)

لفظ مبہم کی تشریح کی ضرورت ہے۔ ایسی دو صورت حال ہوتی ہیں جو بیان کو مبہم بناتی ہیں۔ پہلی صورت حال وہ ہوتی ہے جب ہم یہ طے ہی نہیں کر پاتے کہ بیان ہمیشہ صحیح ہے یا غلط۔ مثال کے طور پر کل جمعرات ہے' مبہم ہے۔ کیوں اس میں سیاق وسباق کافی نہیں ہے جس سے یہ پتہ چل سکے کہ یہ بیان صحیح ہے یا غلط۔ دوسری صورت حال وہ جب بیان داخلی (subjective) ہو یعنی کچھ لوگوں کے لئے یہ صحیح ہو اور کچھ کے لئے غلط۔ مثال کے طور پر ''کتّے ذہین ہوتے ہیں'' ایک مبہم بیان ہے کیوں کہ کچھ لوگ اس کو درست مانتے ہیں اور کچھ لوگ نہیں مانتے۔

مثال 1: بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات ہمیشہ صحیح ہیں یا ہمیشہ غلط ہیں یا مبہم۔ اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) ہفتہ میں 8 دن ہوتے ہیں

(ii) یہاں بارش ہو رہی ہے

(iii) سورج مغرب میں غروب ہوتا ہے

(iv) گوری ایک رحم دل لڑکی ہے (v) دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے

(vi) اگر کسی عدد کو اسی سے تقسیم کریں تو ایک 1 حاصل ہوگا۔

(vii) دو جفت صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت عدد ہوتا ہے۔

@KTRS
NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

(i) یہ بیان غلط ہے کیوں کہ ایک ہفتہ میں صرف 7 دن ہوتے ہیں۔

(ii) یہ بیان مبہم ہے کیوں کہ اس میں ''یہاں'' کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

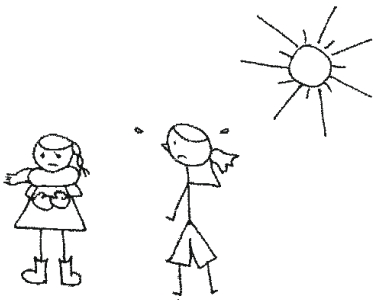
(iii) یہ بیان ہمیشہ صحیح ہے' سورج ہمیشہ مغرب میں ہی غروب ہوتا ہے اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ ہم کہاں رہتے ہیں۔

(iv) یہ بیان مبہم ہے کیوں کہ یہ داخلی ہے۔ کیوں کہ کچھ لوگوں کے لئے گوری رحم دل ہوگی اور کچھ کے لئے نہیں۔

(v) یہ ہمیشہ غلط ہے کیوں کہ دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ طاق ہوتا ہے۔

(vi) یہ بیان غلط ہے کیوں کہ صفر کے لئے یہ صحیح نہیں ہے۔

(vii) یہ بیان ہمیشہ درست ہے۔ اس کے صحیح ہونے کا جواز پیش کرنے کے لئے ہمیں کچھ کام کرنے کی ضرورت ہے یہ سیکشن A 1.4 میں ثابت کیا جائے گا۔



جیسا کہ پہلے بیان کیا گیا ہے ہم اپنی روزمرّہ زندگی بیانوں کی مقبولیت کے لئے زیادہ احتیاط نہیں برتتے۔ مثال کے طور پر فرض کیجیے آپ کا دوست آپ کو بتاتا ہے کہ جولائی کے مہینہ میں ہر دن منشاواری کیرالہ میں بارش ہوتی ہے۔ آپ اس پر یقین کر لیتے ہیں بھلے ہی جولائی کے مہینہ میں ایک یا دو دن بھی بارش نہیں ہوتی ہو۔ جب تک کہ آپ ایک وکیل نہیں ہیں آپ اس سے بحث نہیں کریں گے۔

ایک دوسری مثال' ان بیانوں پر غور کیجئے جو ہم ایک دوسرے کے ساتھ اکثر بولتے ہیں' جیسے آج بہت گرمی ہے' ہم آسانی سے اس کو قبول کر لیتے ہیں کیوں کہ ہم اس کے حوالے سے واقف ہیں۔ بھلے ہی یہ بیان مبہم ہوں۔ آج بہت گرمی ہے' یہ بیان مختلف لوگوں کے لئے مختلف مفہوم ادا کرتا ہے کیوں کہ کماؤں (kumaon) کے رہنے والے کے لئے جو دن بہت گرم ہے وہ چنّئی (Chennai) کے رہنے والے کے لئے گرم نہیں ہے۔

لیکن ریاضی کے بیان مبہم نہیں ہوتے۔ ریاضی میں ایک بیان جب ہی قابلِ قبول یا معقول ہوگا جب یا تو وہ ہمیشہ صحیح ہو یا ہمیشہ غلط۔ اور جب یہ ہمیشہ صحیح ہو تو ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک صحیح بیان ہے اسی طرح سے اگر یہ ہمیشہ غلط ہے' تو ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک غلط بیان ہے۔

مثال کے طور پر 7=2+5 ہمیشہ صحیح ہے' اس لئے 7=2+5 ایک صحیح بیان ہے۔ 7=3+5 ہمیشہ ایک غلط بیان ہے اس لئے 7=3+5 ایک غلط بیان ہے۔

مثال 2: بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط:

(i) مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے۔

(ii) ہر 1 سے بڑا طاق عدد مفرد ہے۔

(iii) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $4x + x = 5x$

(iv) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $2x > x$

(v) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $x^2 \geq x$

(vi) اگر کسی چار ضلعی کے تمام اضلاع مساوی ہوں تو یہ مربع ہوتا ہے

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

(i) یہ بیان درست ہے۔اس کو آپ باب 6 میں پہلے ہی ثابت کر چکے ہیں۔

(ii) یہ بیان غلط ہے، مثال کے طور پر 9 مفرد نہیں ہے۔

(iii) یہ بیان ہمیشہ صحیح ہے۔

(iv) یہ بیان غلط ہے مثال کے طور پر $2 \times (-1) = -2$ اور -2، -1 سے بڑا نہیں ہے۔

(v) یہ بیان غلط ہے، مثال کے طور پر $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$ سے بڑا نہیں ہے۔

(vi) یہ بیان غلط ہے، کیوں کہ متعین کے بھی اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔لیکن یہ ضروری نہیں کہ یہ مربع ہو۔

آپ نے یہ بات نوٹ کی ہوگی کہ کسی بیان کو ریاضی میں یہ ثابت کرنے کے لئے کہ یہ صحیح نہیں ہے۔صرف ایک مثال دینی ہوتی ہے جہاں یہ صحیح نہیں ہو۔اس لئے (ii) میں، کیوں کہ 9 مفرد نہیں ہے۔یہ وہ مثال ہے جو یہ ثابت کرتی ہے کہ بیان "1 سے بڑا ہر طاق عدد مفرد ہوتا ہے" صحیح نہیں ہے۔ایسی مثالیں جو بیان کو برعکس (counter) ثابت کرتی ہیں برعکس مثالیں (counter example)، ہم برعکس مثالوں کے بارے میں سیکشن A1. 5 میں تفصیل سے پڑھیں گے۔

آپ نے یہ بھی نوٹ کیا ہوگا کہ حالاں کہ بیانات (iv)، (v) اور (vi) غلط ہیں لیکن اس کو صحیح بنانے کے لئے اِس میں کچھ شرائط لگا کر دوبارہ بیان کر سکتے ہیں۔

مثال 3: مندرجہ ذیل بیانات کو مناسب شرائط کے ساتھ اس طرح دوبارہ بیان کیجیے کہ یہ درست ہو جائیں۔

(i) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $2x > x$

(ii) کسی بھی حقیقی عدد کے لئے $x^2 \geq x$

(iii) اگر کسی عدد کو خود اس سے تقسیم کریں تو آپ کو 1 حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کے کسی نقطہ پر اس کے وتر کے ذریعہ بنایا گیا زاویہ $90°$ ہے۔

(v) اگر کسی چار ضلعی کے تمام اضلاع مساوی ہیں تو یہ مربع ہے۔

حل:

(i) اگر $x > 0$ ہو تو $2x > x$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) اگر $x \geq 1$ یا $x < 0$ تب $x^2 \geq x$

(iii) صفر کے علاوہ اگر کسی عدد کو اسی سے تقسیم کیا جائے تو ایک 1 حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کا قطر دائرہ کے کسی بھی نقطہ پر 90 کا زاویہ بناتا ہے۔

(v) اگر کسی چار ضلعی کے تمام اضلاع اور داخلی زاویہ مساوی ہوں تو وہ مربع ہوگا۔

مشق A1.1

1. بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات ریاضی کے طور پر قابلِ قبول ہیں یا نہیں۔ اپنے جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) ایک سال میں 13 مہینہ ہوتے ہیں

(ii) دیوالی جمعہ کی ہے

(ii) مگاڈی میں درجہ حرارت 25 c ہے

(iv) زمین کا ایک چاند ہے

(v) کتے اُڑ سکتے ہیں

(vi) فروری میں 28 دن ہوتے ہیں۔

2. بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جوابات کی وجوہات بھی بتائیے۔

(i) ایک چار ضلعی کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 350^0 ہے

(ii) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $x^2 < 0$

(iii) معین ایک متوازی اضلاع ہے

(iv) دو جفت اعداد کا حاصل جمع جفت ہوتا ہے۔

(v) دو طاق اعداد کا حاصل جمع طاق ہوتا ہے۔

3. مناسب شرائط کے ساتھ مندرجہ ذیل بیانات کو اس طرح دوبارہ بیان کریں کہ یہ درست ہو جائیں۔

(i) تمام مفرد اعداد طاق ہوتے ہیں

(ii) کسی حقیقی عدد کا دُگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) کسی بھی x کے لئے، $3x+1>4$

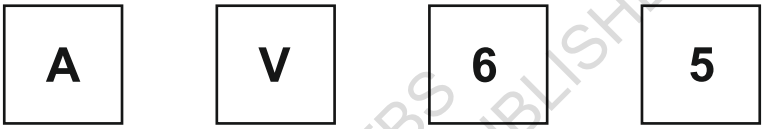
(iv) کسی بھی x کے لئے، $x^3 \geq 0$

(v) ہر مثلث میں وسطانیہ زاویائی ناصف بھی ہوتا ہے۔

A1.3: استنباطی دلائل (Deductive Reasoning)

کسی غیر مبہم بیان کی سچائی کو ثابت کرنے کے لئے استعمال ہونے والا منطقی اوزار ہیں استنباطی دلائل' استنباطی دلائل کو سمجھنے کے لیے ہم ایک پہیلی سے شروع کرتے ہیں جس کو آپ کو حل کرنا ہے۔

آپ کو چار کارڈ دئے ہوئے ہیں ہر ایک کارڈ کے ایک طرف عدد چھپے ہوئے ہیں اور دوسری طرف حروف



فرض کیجیے کہ آپ کو بتایا گیا ہے یہ مندرجہ ذیل اصول پر عمل کرتے ہیں۔

اگر کارڈ کے ایک طرف جفت عدد ہے تو اس کے دوسری طرف ایک vowel ہوگا۔

آپ کو کارڈ کے کون سے چھوٹے سے چھوٹے عدد کی ضرورت ہوگی یہ جانچ کرنے کے لئے یہ اصول درست ہے؟

بے شک آپ کو تمام کارڈ کو پلٹ کر دیکھتے اور جانچ کرنے کا اختیار ہے۔ کیا آپ کے کچھ ہی کارڈوں کو پلٹ کر دیکھنے سے مسئلہ حل ہو جائے گا؟

نوٹ کیجیے کہ مندرجہ بالا دئے گئے بیان میں یہ بتایا گیا ہے کہ اگر کارڈ کے ایک طرف جفت عدد ہے تو دوسری طرف اس کے ایک واویل ہوگا۔ یہ نہیں بیان کیا گیا کہ ایک کارڈ جس کو ایک طرف Vowel ہے اس کے دوسری طرف جفت عدد ہی ہوگا۔ یہ بھی ہو سکتا ہے اور نہیں بھی۔ اس اصول میں یہ بھی نہیں بیان کیا گیا کہ اگر کسی کارڈ کے ایک طرف طاق عدد ہوں تو اس کے دوسری طرف ایک Consonant ہوگا۔ یہ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔

تو کیا ہمیں 'A' کو پلٹ کر دیکھنے کی ضرورت ہے؟ نہیں۔ کیوں کہ دوسری طرف جفت عدد ہو یا طاق یہ اُصول صادق ہے۔ '5' کے بارے میں کیا خیال ہے۔ دوبارہ ہمیں اس کو پلٹنے کی ضرورت نہیں ہے کیوں کہ دوسری طرف چاہے Vowel ہو یا consonant اس سے اصول کی صداقت پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔ لیکن آپ V اور 6 کو پلٹنے کی ضرورت ہے۔ کیوں کہ اگر V کے دوسری طرف جفت عدد ہے تب اصول ٹوٹ جاتا ہے۔ اسی طرح سے اگر 6 کے دوسری طرف Consonant ہے تو اصول

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جائے گا۔

اس پہیلی کو حل کرنے کے لئے ہم نے جن دلائل کا استعمال کیا ہے اسے استنباطی دلائل کہتے ہیں۔ اسے استنباطی اس لئے کہتے ہیں کیوں کہ ہم اس نتیجہ تک (استنباط کر کر) یا بیان تک سابقہ درست بیانوں پر منطق کا استعمال کر کے پہنچے ہیں۔ مثال کے طور پر مذکورہ بالا پہیلی میں منطقی دلائل کے سلسلہ سے ہم نے یہ استنباط کیا ہمیں v اور 6 کو پلٹ کر دیکھنے کی ضرورت ہے۔

استنباطی دلائل ہمیں یہ نتیجہ نکالنے میں بھی مدد کرتے ہیں کہ ایک مخصوص بیان درست ہے کیونکہ یہ ایک عمومی بیان، جو صحیح مانا جاتا ہے، کی مخصوص شکل ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہم ایک بار ثابت کر دیئے ہیں کہ دو طاق اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ طاق ہوتا ہے تب ہم 70001×134563 کے سلسلہ میں فوراً (بغیر تعجب کیے) یہ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ یہ حاصل ضرب طاق ہے کیونکہ 70001 اور 134563 دونوں ہی طاق ہیں۔

استنباطی دلائل صدیوں سے انسانی سوچ کا حصہ رہے ہیں اور روز مرّہ زندگی میں انکا استعمال ہمیشہ سے ہوتا رہا ہے۔ مثال کے طور پر فرض کیجیے بیانات ''پھول سولارس، تب کھلے گا جب پچھلے دن درجۂ حرارت 28c سے زیادہ رہا ہو'' اور ''سولارس پھول تصوراتی وادی میں 15 ستمبر 2005 کو کھلا تھا، درست ہے۔ تب ہم استنباطی دلائل کا استعمال کر کے ہم کہہ سکتے ہیں کہ 14 ستمبر 2005 کو imaginery vally میں درجہ حرارت 28^0c سے زیادہ تھا''۔

بدقسمتی سے ہم اپنی روز مرّہ زندگی میں ہمیشہ صحیح دلائل کا استعمال نہیں کرتے۔ ہم اکثر ایسے نتیجہ نکال لیتے ہیں جن کا انحصار غلط دلائل پر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر آپ کی دوست کسی دن آپ کو دیکھ کر مسکراتی نہیں تو آپ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ وہ ناراض ہے۔ جب کہ یہ بیان اگر مجھ سے ناراض ہے تو مجھے دیکھ کر مسکرائے گی نہیں'' درست بھی ہوسکتا ہے یہ بھی درست ہوسکتا ہے کہ ''اگر اس کے سر میں بہت درد ہے تو وہ مجھے دیکھ کر مسکرائے گی نہیں''۔ آپ کیوں نہیں جانچ کر لیتے کہ کچھ نتائج جن تک آپ اپنی روز مرّہ زندگی میں پہنچتے ہیں آیا ان کی بنیاد کوئی معقول دلائل ہیں یا غلط؟

مشق 1.2A

1. مندرجہ ذیل کا جواب دینے کے لئے استنباطی دلائل کا استعمال کیجیے۔

(i) انسان mammal ہے، تمام mammal ہڈی والے (vertebrates) ہوتے ہیں۔ ان دو بیانوں کو بنیاد بنا کر انسانوں کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

(ii) انتھونی ایک نائی ہے۔ دنیش نے اپنے بال کٹوائے۔ کیا آپ یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ انتھونی نے دنیش کے بال

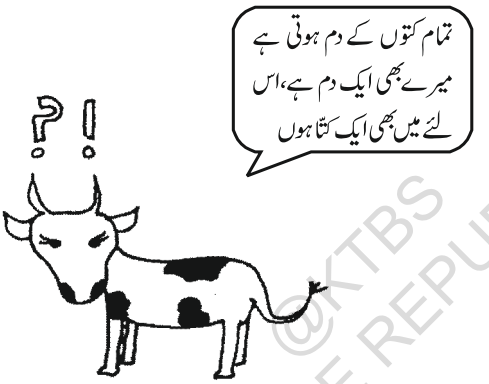
© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

کاٹے؟

(iii) martia n کی زبان لال ہوتی ہے' Gulag ایک martian ہے۔ان دو بیانوں کی بنیاد پر gulag کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

(iv) اگر کسی خاص دن 4 گھنٹہ سے زیادہ بارش ہوتی ہے' تو گٹر Gutters کو اگلے دن صاف ہو جانا چاہئے۔آج 6 گھنٹے تک بارش ہوئی۔کل گٹر کی حالت کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کریں گے؟

(v) مندرجہ ذیل کارٹون میں گائے کے دلائل میں غلطی کیا ہے۔



@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

2. ایک بار پھر آپ کو چار کارڈ دئے گئے ہیں۔ ہر ایک کارڈ کے ایک طرف ایک حرف ہے اور دوسری طرف ایک عدد' مندرجہ ذیل اصول کی صداقت کے لئے آپ کو کون سے دو کارڈوں کو پلٹنے کی ضرورت ہے۔اگر کسی کارڈ کے ایک طرف ایک consonant ہے تو اس کے دوسری طرف ایک طاق عدد ہوگا:

B	3	U	8

1.4A: مسئلے' قیاس اور بدیہات (Theorems Conjectures and Axioms)

ابھی تک ہم نے بیانات اور ان کی معقولیت کی جانچ کس طرح کی جاتی ہے' کا مطالعہ کیا ہے۔اس سیکشن میں آپ تین مختلف قسم کے بیانات جن سے ریاضی کی تشکیل ہوئی' جیسے مسئلہ' قیاس اور بدیہہ' کے بارے میں مطالعہ کریں گے اور ان کے درمیان فرق کو واضح کرنے کی کوشش کریں گے۔

آپ کا سابقہ پہلے بہت سے مسئلوں سے پڑ چکا ہے' تو اس لئے بتایئے مسئلہ کیا ہے؟ ایک ریاضیاتی بیان جس کی سچائی کو

ثابت کیا جا چکا ہو مسئلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر مندرجہ ذیل بیانات مسئلہ ہیں جیسے کہ آپ سیکشن A1.5 میں دیکھیں گے۔

مسئلہ A1.1: مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180 ہوتا ہے۔

مسئلہ A1.2: دو جفت فطری اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔

مسئلہ A1.3: تین مسلسل جفت فطری اعداد کا حاصل ضرب 16 سے منقسم ہے۔

قیاس ایک بیان ہے جس پر ہم یقین کرتے ہیں کہ یہ سچ ہے۔ جن کی بنیاد ہماری ریاضی کے سمجھ اور تجربہ ہے۔ یعنی ہمارا ریاضیات وجدان۔ قیاس کبھی کبھی صحیح یا غلط بھی ہوسکتا ہے۔ جب ہم اس کو ثابت کر دیتے ہیں تو یہ ایک مسئلہ (theory) بن جاتا ہے۔ ریاضی دان اکثر ذہانت سے بھرپور ریاضیاتی اندازہ لگا کر اور کچھ نمونوں (patterns) کو دیکھ کر قیاس لگاتے آئے ہیں کچھ پیٹرن کو دیکھتے ہیں اور ان کو دیکھ کر کس قسم کے ذہانت سے بھرپور اندازہ ہم لگا سکتے ہیں۔

مثال 4: کوئی سی تین مسلسل جفت اعداد لیجئے اور ان کو جمع کیجیے جیسے:

$2+4+6=12,\ 4+6+8=18,\ 6+8+10+24,\ 8+10+12=30,\ 20+22+24=66$

ان حاصل جمع میں کیا آپ کوئی خاص پیٹرن دیکھ رہے ہیں؟ آپ ان کے بارے میں کیا قیاس کر سکتے۔

حل: ایک قیاس ہوسکتا ہے (i) تین مسلسل جفت اعداد کا حاصل جمع جفت ہے۔

دوسرا ہوسکتا ہے (ii) تین مسلسل جفت اعداد کا حاصل جمع 6 سے منقسم ہے۔

مثال 5: مندرجہ ذیل اعداد کے کا پیٹرن غور پر کیجیے۔ جو پاسکل کا مثلث کہلاتا ہے۔

خط													اعداد کا حاصل جمع
1						1							1
2					1		1						2
3				1		2		1					4
4			1		3		3		1				8
5		1		4		6		4		1			16
6	1		5		10		10		5		1		32
7			:						:				:
8			:						:				:

NOT TO BE REPUBLISHED @TTDS

خطوط 7 اور 8 میں آپ اعداد کے حاصل جمع کے بارے میں کیا قیاس کر سکتے ہیں؟ خط 21 میں اعداد کا حاصل جمع کیا ہوگا؟ آپ کیا پیٹرن دیکھتے ہیں؟ خط x میں اعداد کے حاصل جمع کے ایک فارمولہ کا حاصل جمع کا اندازہ کیجیے

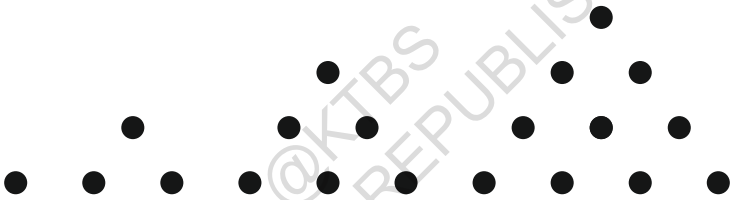
حل: خط 7 میں اعداد کا حاصل جمع ہے $2x32 = 64 = 2^6$

خط 8 میں اعداد کا حاصل جمع ہے $2x64 = 128 = 2^7$

خط 21 میں اعداد کا حاصل جمع ہے $= 2^{20}$

خط n میں اعداد کا حاصل جمع ہے $= 2^{n-1}$

مثال 6: ایسے ہی کہے جانے والے مثلثی اعداد Tn پر غور کیجیے۔

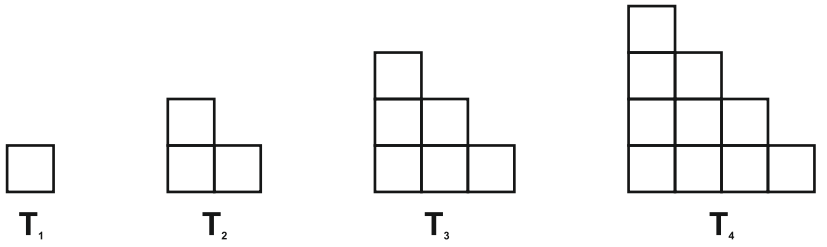


شکل A1.1

یہاں ڈاٹ اس طرح سے ترتیب دئے گئے ہیں کہ یہ ایک مثلث بناتے ہیں۔ یہاں $T_1 = 1$

$T_2 = 3$، $T_3 = 6$، $T_4 = 10$ اور آگے تک ایسے ہی۔ کیا آپ Ts کا اندازہ کر سکتے ہیں؟ Ts کے بارے میں کیا خیال ہے؟ Tn کے بارے میں کیا خیال ہے۔

اگر آپ ان کو مندرجہ ذیل طریقہ سے دوبارہ بنائیں تو یہ آپ کے لئے مددگار ثابت ہوں گے۔



شکل A.1.2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

$$T_5 = 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5\times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 = 2+3+4+5+6 = 21 = \frac{6\times 7}{2}$$

$$Tn = \frac{nxcn+1)}{2}$$

قیاس کی ایک پسندیدہ مثال جو کھلی ہوئی ہے (یعنی اس کو صحیح یا غلط ثابت نہیں کیا جا سکتا) گولڈ بیچ قیاس ہے جو ایک مشہور ریاضی دان کریسٹن گولڈ بیچ (1690-1764) کے نام پر ہے۔ اس قیاس کی رو سے 4 سے بڑے ہر جفت صحیح عدد کو دو طاق مفرد اعداد کے حاصل جمع کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ شاید آپ اس نتیجہ کو صحیح یا غلط ثابت کر سکیں تو آپ کو شہرت مل جائے گی۔

آپ متحیر ہوں گے۔ ریاضی میں ہمارا جس چیز سے بھی واسطہ پڑتا ہے تو اس کو ثابت کرنے کی ضرورت ہوتی ہے، اگر نہیں تو کیوں نہیں؟



@NBRS
NOT TO BE REPUBLISHED

حقیقت یہ ہے کہ ریاضی کے ہر پہلو کی بنیاد کچھ بیانات پر ہوتی ہے جو صحیح فرض کئے جاتے ہیں اور ان کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ یہ خود ساختہ سچائی ہیں۔ جن کو ہم بغیر ثبوت کے صحیح مانتے ہیں۔ ایسے بیانات بدیہیات کہلاتے ہیں۔ باب 5 میں آپ نے یوکلڈ کے موضوعات اور بدیہات کے بارے میں پڑھا ہوگا (آج کل ہم بدیہات اور موضوعات میں فرق نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر یوکلڈ کا پہلا موضوع ہے)۔

ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچا جا سکتا ہے۔

اور تیسرا موضوع:

کسی بھی مرکز اور کسی بھی نصف قطر کا دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔

یہ بیانات بظاہر بالکل صحیح ہیں اور یوکلڈ نے ان کو صحیح مانا ہے۔ کیوں؟ کیوں کہ ہر ایک چیز کو ہم ثابت نہیں کر سکتے ہمیں کہیں سے تو شروع کرنے کی ضرورت ہے۔ ہمیں کچھ بیانات کی ضرورت ہے جن کو صحیح کے طور پر قبول کرتے ہیں اور پھر ان بیانات کو بنیاد بنا کر اور منطق کے اصولوں کو استعمال کر کے اپنی معلومات میں اضافہ کرتے ہیں۔

آپ کو اس بات پر بھی حیرت ہوگی کہ ہم تمام بیانات کو صحیح کیوں نہیں مانتے جب کہ وہ خود ساختہ ظاہر ہوتے ہیں۔ اس کی بہت سی وجوہات ہیں اکثر ہمارا وجدان غلط ہوسکتا ہے۔ کبھی کبھی تصاویر اور نمونہ دھوکا دیتے ہیں اور مستحکم ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ جو صحیح ہو اس کو ثابت کیا جائے۔ مثال کے طور پر ہم میں سے بہت سے لوگ یہ یقین کرتے ہیں کہ اگر کسی عدد کو دوسرے عدد سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب دونوں اعداد سے بڑا ہوگا لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہے مثال کے طور پر $1=5\times0.2$ جو کے 5 سے کم ہے۔

مندرجہ ذیل شکل کو دیکھیے، کون سا قطعہ خط لمبا ہے AB یا CD؟



شکل A1.3

حالانکہ خط AB چھوٹا لگتا ہے لیکن پتہ یہ چلا کہ دونوں یکساں لمبائی کے ہیں۔

آپ پھر بدیہات کی معقولیت پر متحیر ہوں گے، بدیہات کو ہمارے وجدان کی بنیاد پر چنا گیا ہے۔ اور جو خود ساختہ (self-evident) ہیں۔ اس لئے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ سچ ہوں گے، حالانکہ یہ ممکن ہے کہ بعد میں یہ دریافت ہو کہ یہ صحیح نہیں ہیں۔ اس سے بچنے کا کیا طریقہ ہے؟ ہم مندرجہ ذیل اقدام لیتے ہیں۔

(i) بدیہات کی تعداد کو کم سے کم لیں مثال کے طور پر یوکلڈ کے 5 موضوع اور بدیہات کی بنیاد پر ہم سینکڑوں مسئلہ نکال سکتے ہیں۔

(ii) اس بات کا پختہ یقین کر لیجیے کہ بدیہات تابع ہوں۔

بدیہات کے لیے مجموعہ کو غیر تابع (inconsistent) کہتے ہیں۔ اگر ہم ایک بدیہہ کو استعمال کر کے یہ دکھا سکیں

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

کہ دوسرا صحیح نہیں ہے۔مثال کے طور پر مندرجہ ذیل دو بیانات پر غور کیجیے۔ہم دکھائیں گے کہ یہ غیر تابع ہیں۔

بیان 1: کوئی بھی مکمل عدد اپنے جانشین کے برابر نہیں ہوتا۔

بیان 2: 0 سے تقسیم ہونے والا مکمل عدد بھی مکمل عدد ہے۔

یاد کیجیے: 0 سے تقسیم معروف نہیں ہے۔لیکن ایک لمحہ کے لئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ایسا نہیں ہے اور دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے۔

بیان 2 کے لئے ہمیں ملے گا $\frac{1}{0} = a$ جہاں a ایک مکمل عدد ہے اس کا مطلب ہے کہ $1 = 0$ لیکن بیان 1 کی تردید کرتا ہے جس کی رو سے کوئی بھی مکمل عدد اپنے جانشین کی برابر نہیں ہوتا۔

(iii) ایک غلط بدیہہ جلدی یا دیر میں ایک تضاد کی شکل میں سامنے آتا ہے ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک تضاد ہے۔

جب ہمیں ایک ایسا بیان حاصل ہوتا ہے جس میں وہ بیان اور اس کا منفی دونوں درست ہوں مثال کے طور پر اوپر دئے گئے دو بیانوں 1 اور 2 پر ایک بار پھر غور کرتے ہیں۔

بیان 1 کے لئے یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $2 \neq 1$

اب $x^2 - x^2$ کو دیکھیے، ہم اس کو دو طریقوں سے اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$

اور (ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

بیان 2 میں سے ہم $(x - x)$ کو دونوں طرف منسوخ کر سکتے ہیں۔

اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 2x$ جس کا مطلب ہے $1 = 2$

اس طرح سے ہمارے پاس دونوں بیان $2 \neq 1$ اور اس کا انکار (منفی) $1 = 2$ درست ہیں۔یہ ایک تضاد ہے۔یہ تضاد کس وجہ سے آیا غلط بدیہہ کی وجہ سے یعنی صفر سے تقسیم ہونے والا مکمل عدد بھی مکمل عدد ہوتا ہے۔

اس لئے بدیہیوں کے لئے بیانات چننے میں کافی غور وفکر اور بصیرت کی ضرورت ہوتی ہے۔ہمیں یہ یقین دہانی کرانی چاہئے کہ یہ کسی منطقی تضاد تک نہ لے جائے۔جب کہ کبھی کبھی بدیہہ کے انتخاب سے بہت سی دریافت رونما ہو جاتی ہیں۔باب 5 میں یوکلڈ کے پانچویں موضوع سے آپ واقف ہیں جس سے غیر یوکلڈ جیومیٹریاں دریافت ہوئیں۔آپ نے دیکھا کہ بہت سے ریاضی داں اس بات پر یقین رکھتے ہیں کہ پانچویں موضوع کو موضوع نہیں ہونا چاہئے بلکہ ایک مسئلہ ہونا

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

چاہئے۔جس کو پہلے چار موضوعوں کا استعمال کر کے ثابت کیا جاسکتا ہے۔حیرت کی بات یہ ہے ایسی ہی کچھ کوششوں کی وجہ سے غیر یولکڈ جیومیٹریوں کی دریافت ہوئی۔

اس سیکشن کا اختتام ہم بدیہہ' مسئلہ اور قیاس کے فرق کو واضح کر کے کرتے ہیں۔ بدیہہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جو بغیر ثبوت کے صحیح فرض کیا جاتا ہے۔ قیاس ایک ریاضیاتی بیان ہے جس کی سچائی یا جھوٹ اب تک طے نہ کیا گیا ہو' مسئلہ ایک ریاضیاتی سچائی ہے منطقی طور پر طے کی جا چکی ہے۔

مشق 1.3A

1. کوئی تین مسلسل جفت اعداد لیجیے اور ان کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔مثال کے طور پر $2\times4\times6=48$ ، $4\times6\times8=192$ اور آگے تک ان حاصل ضربوں کے لئے تین قیاس بنائیے۔

2. باسکل کے مثلث کی طرف واپس جائیں۔

خط 1 : $1=11^0$

خط 2 : $11=11^1$

خط 3 : $121=11^2$

خط 4 اور خط 5 کے لئے قیاس بنائیے۔کیا آپ کا قیاس درست ہے؟ کیا آپ کا قیاس خط 6 کے لئے بھی درست ہے۔

3. اس لئے دوبارہ مثلثی اعداد (شکل A1.2 کو دیکھتے) کو دیکھیں۔دو مثلثی اعداد اس میں جمع کریں T_1+T_2-4 ، $T_2+T_3=9$ ، $T_3+T_4=16$ ، T_4+T_5 ? کے بارے میں آپ کیا خیال ہے؟

$T_{n-1}+T_n$ کا ایک قیاس بنائیے

4. مندرجہ ذیل پیٹرن کو دیکھیے

$1^2=1$

$11^2=121$

$111^2=12321$

$1111^2-1234321$

$11111^2=123454321$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مندرہ ذیل ہر ایک کا ایک قیاس بنایئے

$IIIIII^2$ =

$IIIIIII^2$ =

جانچ کیجیے کہ آپ کا قیاس درست ہے۔

5. اس کتاب میں استعمال ہوئے 5 بدیہات (موضوع) کی فہرست بنایئے۔

A1.5 ریاضیاتی ثبوت کیا ہے؟

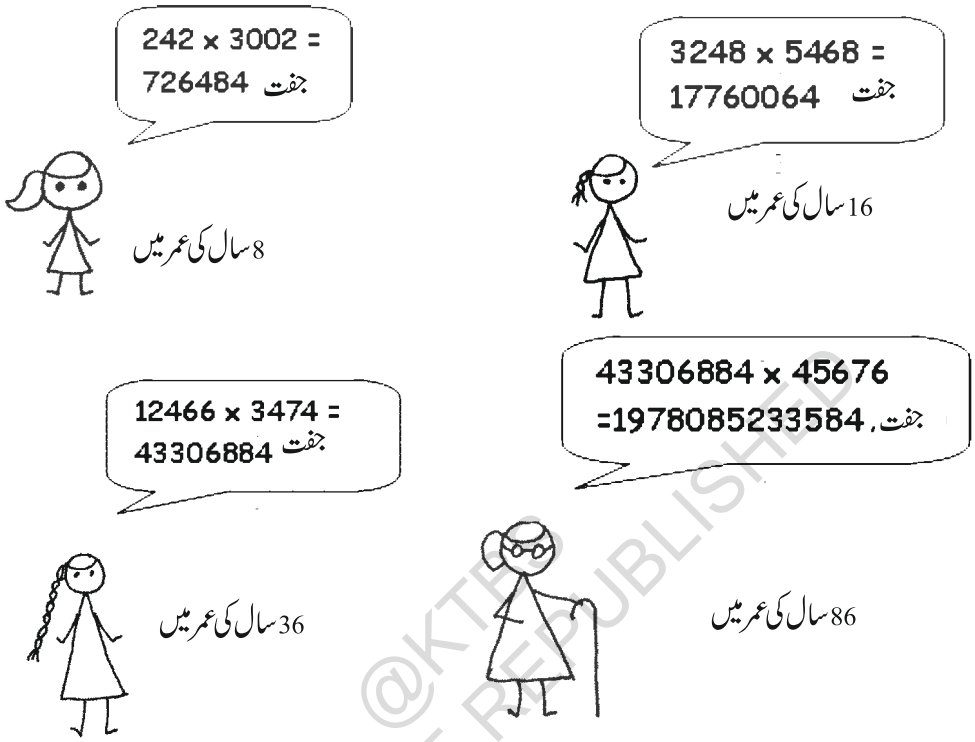
آیئے اب ثبوتوں کے مختلف پہلوؤں پر غور کرتے ہیں۔ ہم تصدیق اور ثبوت کے درمیان فرق کی سمجھ سے شروعات کرتے ہیں۔ ریاضی کے ثبوت کے مطالعہ سے پہلے آپ سے بیانات کی تصدیق کے لئے خاص طور سے کہا گیا۔

مثال کے طور پر آپ سے کہا جا سکتا ہے کہ مثال کے ساتھ تصدیق کیجیے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہے۔ اس لئے آپ بلا منصوبہ دو جفت اعداد کو چنئے۔ جیسے 24 اور 2006 لیجیے اور جانچ کیجیے کہ یہ حاصل ضرب 24x2006=48144 جفت ہے۔ ایسا ہی آپ دوسری بہت سی مثالوں کے لئے کر سکتے ہیں۔

مزید آپ سے یہ بھی کہا جا سکتا ہے اپنی کلاس میں مشغلہ کے طور پر بہت سے مثلث بنایئے اور ان کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔ پیائش کی غلطیوں کو علیحدہ کرتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے۔

اس طریقہ میں کمی کیا ہے؟ تصدیق کے عمل میں بہت سے مسائل ہیں۔ جب کہ اس کی مدد سے آپ کے بیان کو درست بنا سکتے ہیں جیسا آپ یقین کرتے ہیں۔ تمام حالتوں میں آپ پر یقین نہیں ہوتے کہ وہ درست ہوں گے۔ مثال کے طور پر بہت سے جفت اعداد کے جوڑوں کی ضرب سے ہم اندازہ کر سکتے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوگا۔ لیکن اس سے یہ بات پر اعتماد طور پر نہیں کہی جا سکتی کہ جفت اعداد کے جوڑوں کا حاصل ضرب ہمیشہ جفت ہی ہوگا۔ کیوں کہ آپ بظاہر تمام ممکن جفت جوڑوں کے حاصل ضرب کی جانچ نہیں کر سکتے۔ اگر آپ ایسا کر سکیں تو آپ کارٹون کی اس لڑکی کی طرح ہیں اپنی تمام زندگی جفت اعداد کے حاصل ضرب کی تحسیب ہی کرتے رہیں گے اسی طرح سے کچھ ایسے مثلث بھی ہو سکتے ہیں جو آپ نے ابھی تک نہیں بنائے ہوں جن کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 نہ ہو۔ ہم تمام ممکنہ مثلثوں کے داخلی زاویوں کی پیائش نہیں کر سکتے۔

@KVS NOT TO BE REPUBLISHED



@KTB NOT TO BE REPUBLISHED

تصدیق اکثر غلط رہنمائی کرتی ہے۔ مثال کے طور پر سابقہ تصدیق کی بنیاد پر ہم پاسکل کے مثلث سے یہ نتیجہ اخذ کرنے (مشق 1.3A کا Q2) کی کوشش کر سکتے ہیں کہ $11^5 = 15101051$ لیکن حقیقت میں $11^5 = 161051$

اس لئے کچھ سوالوں کے لئے آپ کو دوسرے طریقوں کی ضرورت ہے جو تصدیق پر منحصر نہ ہوں۔ ایک اور طریقہ جس کا نام ہے بیان کو ثابت کرنا'' ایک ایسا عمل جو کسی ریاضیاتی بیان کی صداقت کو منطقی دلائل سے قائم کر سکیں ریاضیاتی ثبوت کہلاتا ہے۔

سیکشن 1.2 A کی مثال 2 میں آپ نے دیکھا کسی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے یہ کافی ہوگا کہ ایک برعکس مثال (counter-example) پیش کر دی جائے اس لئے جب کہ کسی ریاضیاتی بیان کی صداقت ہزاروں سوالوں کی تصدیق اور جانچ سے قائم نہیں کی جا سکتی لیکن کسی بیان کو جھوٹا ثابت کرنے کے لئے صرف ایک برعکس مثال کافی ہوتی ہے۔ یہ نقطہ اچھی طرح سے سمجھ لینا چاہیے۔

ایک ریاضیاتی بیان کو جھوٹا ثابت کرنے کے لئے صرف ایک برعکس مثال کافی ہے۔

اس لئے 12=5+7 اس بیان کی کہ دو طاق اعداد کا حاصل جمع طاق ہوتا ہے' ایک برعکس مثال ہے۔



آیئے ثبوت کے بنیادی اجزائے ترکیبی پر غور کرتے ہیں۔

(i) کسی مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہمارے پاس ایک رف آئیڈیا ہو چاہیئے کہ ہم کیسے آگے بڑھیں؟

(ii) جو اطلاعات ہمیں مسئلہ میں پہلے ہی دی ہوئی ہوں (یعنی مفروضہ) ان کو واضح طور پر سمجھنا اور استعمال کرنا چاہیئے ۔

مثال کے طور پر مسئلہ 1.2A میں، جس میں ہے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہے، ہمیں دو جفت فطری اعداد دئے ہوئے ہیں اس لئے ہمیں ان کی خصوصیات کا استعمال کرنا ہے۔ جز ضربی کے مسئلہ میں (باب 2 میں) آپ کو ایک کثیر رکنی P(x) دی ہوئی ہے اور یہ بتایا گیا ہے کہ P(a) =O ۔ آپ یہ دکھانے کے لئے کہ P(x),(x-a) کا جز وضربی ہے۔ آپ کو اس کا استعمال کرنا ہے۔ اسی طریقہ سے جز وضربی کے مسئلہ کے معکوس کے لیے آپ کو P(x)، (x-a) کا جز و ضربی دیا ہوا ہے اور آپ کو P(a)=0 دکھانے کے لئے اس مفروضہ کا استعمال کرنا ہے۔

مسئلہ کو ثابت کرتے وقت آپ عملیات کا استعمال بھی کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر یہ ثابت کرنے کے لئے کہ مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے۔ ہم ایک خط مثلث کے ایک راس سے گذرتا ہوا سامنے والے ضلع کے متوازی کھینچتے ہیں اور پھر متوازی خطوط کی خصوصیات کو استعمال کرتے ہیں۔

(ii) ایک ثبوت مسلسل مسلسلہ وار ریاضیاتی بیانات سے مل کر بنا ہوتا ہے۔ ثبوت کا ہر ایک بیان، ثبوت میں موجود یا تو پچھلے بیان سے منطقی طور پر اخذ کیا جاتا ہے۔ یا پچھلے مسئلہ یا ایک بدیہہ یا اپنے مفروضہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔

(iv) صحیح ریاضیاتی بیانوں کے سلسلہ کو منطقی طور پر صحیح ترتیب پر رکھنے کو نتیجہ وہ ہوتا جو ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ یعنی جس کا مسئلہ

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

میں وعدہ کیا گیا ہے۔

ان اجزائے ترکیبی کو سمجھنے کے لئے مسئلہ اور اس کے ثبوت کا تجزیہ کرتے ہیں۔

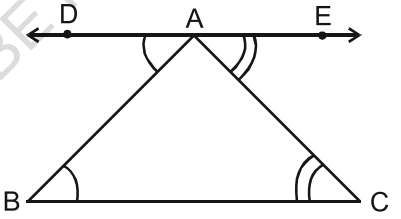
آپ اس مسئلہ کا پہلے ہی باب 6 میں مطالعہ کر چکے ہیں۔ لیکن پہلے جیومیٹری میں ثبوتوں پر کچھ فقرہ (جملے): ہم اکثر مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے اشکال کا سہارا لیتے ہیں جو بہت اہم ہے۔ لیکن ثبوت میں ہر بیان کو ثابت کرنے کے لئے صرف منطق کا استعمال ہونا چاہئیے۔ اکثر ہم طلباء کو کچھ بیان کرتے ہوئے سنتے ہیں۔ جیسے وہ دو زاویہ مساوی ہیں کیوں کہ ڈرائنگ میں یہ مساوی نظر آتے ہیں۔ یا زاویہ 90^0 کا ہی ہونا چاہئیے۔ کیوں کہ دو خطوط ایسے دکھتے ہیں جیسے یہ ایک دوسرے پر عمود ہیں'' جو کچھ آپ نے دیکھا ہے اس دھوکے سے ہوشیار رہیے۔ (یاد رکھئے شکل A1.4)

آیئے اب مسئلہ A1.1 کی طرف چلئے

مسئلہ A1.1: مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔

ثبوت: ایک ΔABC پر غور کیجیے (شکل A1.4 دیکھیے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$



شکل A1.4

(2) A سے گذرتا ہوا BC کے متوازی ایک خط DE کھینچئے

DE، BC کے متوازی ہے اور AB ایک قاطع ہے

اس لئے $\angle DAB$ اور $\angle ABC$ متبادل زاویہ ہیں۔ اس لئے مسئلہ 6.2 اور باب 6 کی رو سے یہ مساوی ہیں۔ یعنی

(3) $\angle DAB = \angle ABC$

اسی طرح سے (4) $\angle CAE = \angle ACB$

اس لئے (5) $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

لیکن $ÐABC + ÐBAC+ÐACS=180°$ کیوں کہ یہ ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں (6)

اب ہم ثبوت کے ہر ایک قدم پر کچھ جملے کہتے ہیں۔

قدم 1: ہمارا مسئلہ مثلث کی ایک خصوصیت سے متعلق ہے اس لئے ہم ایک مثلث سے شروع کرتے ہیں

قدم 2: یہ ایک اہم خیال ہے۔ وجدانی قدم یا اس بات کی سمجھ کہ مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہمیں کیسے آگے بڑھانا ہے۔ اکثر جیومیٹری کے ثبوتوں میں عمل کی ضرورت ہوتی ہے۔

قدم 3 اور 4: یہاں ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $\angle DAE=\angle ABC$ اور $\angle CAE=\angle ACB$ ' اس حقیقت کا استعمال کرتے ہوئے کہ BC' DE کے متوازی ہے (ہمارا عمل) اور سابقہ ثابت کیا گیا مسئلہ جو ہے جب کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو متبادل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

قدم 5: یہاں ہم یوکلڈ کا بدیہہ (باب 5 دیکھیے) استعمال کرتے ہیں جو ہے اگر مساوی چیزوں میں مساوی چیزیں جمع کی جائیں تو حاصل بھی مساوی ہوتا ے' یعنی

$$\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE$$

یعنی مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع ایک خط مستقیم پر ہے زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔

قدم 6: یہاں ہم باب 6 میں پڑھے ہوئے خطی جوڑے کے بدیہہ کا استعمال کرتے ہیں جو ہے ایک خط مستقیم پر بنے زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہوتا ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ $\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE=180°$

قدم 7: ہم یوکلڈ کے بدیہہ کا استعمال کرتے ہیں جو ہے چیزیں جو کسی ایک چیز کے مساوی ہوتی ہیں آپس میں بھی مساوی ہوتی ہیں' یہ نتیجہ اخذ کرنے کے لئے

$$\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE=180^0$$

نوٹ کیجیے قدم 7 میں دعوئی ہے جسے ہمیں ثابت کرنا تھا۔

اب ہم مسئلہ A1.2 اور 1.3 کو بغیر تجزیہ کئے بغیر ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ A1.2: دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ثبوت: مان لیجیے x اور y دو جفت فطری اعداد ہیں

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ xy بھی جفت ہے

کیوں کہ x اور y جفت ہیں، یہ 2 سے منقسم ہے اور x=2m کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

کسی فطری اعداد m کے لئے اور y=2n کسی فطری عدد x کے لئے

تب xy=4mn کیوں کہ 4mn بھی 2 سے منقسم ہے۔اس لئے xy بھی دو سے منقسم ہوگا۔

اس لئے xy جفت ہے۔

مسئلہ 1.3A: تین مسلسل جفت فطری اعداد کا حاصل ضرب 16 سے منقسم ہے۔

ثبوت: کوئی بھی تین مسلسل جفت فطری اعداد 2n، 2n+2 اور 2n+4 کی شکل کے ہوں گے کسی بھی فطری عدد x کے لئے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ 2x، (2x+2) اور (2n+4)(2n+2)2n، 16 سے منقسم ہے۔اب ہمارے پاس دو حالتیں ہیں یا تو n جفت ہے یا طاق۔اس لئے دونوں حالتوں کی جانچ کرتے ہیں۔

$$2n(2n-2)(2n+4)$$
$$=2-2+N(N-1)(4+2)$$
$$-8N(4+1)(4+2)$$

فرض کیجیے n جفت ہے۔تب ہم n=2m لکھ سکتے ہیں جہاں m کوئی فطری عدد ہے۔

اور پھر 2n(2n+2) (2n+4)=8n(n+1) (n+2)=16m(2m+1) (2m+2)

اس لئے 2n (2n+2) (2n+4)، 16 س منقسم ہے۔

آگے مان لیجیے n طاق ہے تب n+1 جفت ہوگا اور ہم n+1+2r لکھ سکتے ہیں، کسی فطری عدد r کے لئے۔تب ہمارے پاس ہے

2n(2n+2) (2n+4) = 8n (n+1) (n+2)

=8(2r-1)´ r2 (2r+1)

=16r (2r-1) (2r+1)

اس لئے 2n(2n+2) (2n+4)، 16 سے منقسم ہے۔

اس لئے دونوں حالتوں میں ہم نے دیکھا کہ تین مسلسل جفت فطری اعداد 16 سے منقسم ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس باب کا اختتام ریاضی دانوں نے نتائج کی دریافت کیسے کی اور ان کے رسمی ثبوت کیسے لکھے گئے کے فرق پر کچھ ریمارک کے ساتھ کرتے ہیں۔ جیسا اوپر بیان کیا گیا ہے ہر ثبوت کا ایک اہم وجدانی خیال (کبھی کبھی ایک سے زیادہ ہے۔ وجدان ریاضی دانوں کی سوچ اور ان کے ذریعہ دریافت کئے گئے نتائج کے لئے مرکزی حیثیت رکھتا ہے۔ اکثر مسئلوں کے ثبوت ریاضی دانوں کے پاس بکھرے ہوئے پہنچتے ہیں۔ ریاضی داں اکثر سوچ اور منطق کے بہت سے راستوں اور مثالوں پر تجربہ کرتا ہے۔ اس کے بعد وہ صحیح حل یا ثبوت تک پہنچتا ہے۔ صرف تخلیقی phase کے بعد ہی اکھٹا کئے گئے تمام دلائل کو یکجا کر کے صحیح ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ یہاں یہ بیان کرنا ضروری ہے کہ عظیم ریاضی داں سری نواسن رامانجن وجدان کی بہت اونچی سطح کو استعمال کر کے اپنے بہت سے بیانوں کی دریافت کی جو انھوں نے دعوا کیا وہ سچ تھا۔ ان میں سے بہت سے بیان سچے ثابت ہوئے اور اب وہ جانے پہچانے مسئلہ ہیں۔ حالانکہ، آج تک بھی دنیا بھر میں کچھ ریاضی داں اس کے ان دعووں کو ثابت (یا تردید) کرنے کی جدوجہد کر رہے ہیں۔



شکل A1.5

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 1.4A

1. مندرجہ ذیل بیانوں کی تردید کرنے کے لئے برعکس مثال معلوم کیجئے:
   (i) گرد و مثلثوں کے نظیری زاویہ مساوی ہیں تو مثلث متماثل ہوں گے۔
   (ii) ایک چار ضلعی جس کے تمام اضلاع مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔
   (iii) ایک چار ضلعی جس کے تمام زاویہ مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔
   (iv) صحیح اعداد a اور b کے لئے $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$
   (v) تمام مثبت صحیح اعداد n کے لئے $2n^2+11$ مفرد ہے
   (vi) تمام مثبت صحیح اعداد n کے لئے $n^2 - n+4$ ایک مفرد ہے۔
2. اپنا پسندیدہ ثبوت لیجیے۔ اوپر بحث کئے گئے خطوط پر اس کا قدم بقدم تجزیہ کیجیے۔ (کیا دیا ہوا ہے۔ کیا اخذ کیا گیا ہے، کون سے مسئلہ اور بدیہیوں کا استعمال ہوا ہے وغیرہ)
3. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا حاصل جمع جفت ہے۔
4. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہے۔
5. ثابت کیجیے کہ تین مسلسل جفت اعداد کا حاصل جمع 6 سے منقسم ہے۔

6. ثابت کیجیے کہ اُس خط پر جس کی مساوات 'y=2x' پر لامحدود نقطے واقع ہیں۔
(اشارہ: کسی صحیح عدد (n) کے لئے نقطہ (n, 2n) پر غور کیجیے۔

7. آپ کا ایک دوست ہوگا اور اُس نے آپ سے کوئی عدد سوچنے کے لئے کہا ہوگا پھر اُس میں کچھ جمع تفریق یا ضرب کرنے کو کہا ہوگا اور پھر وہ آپ کا شروع میں سوچا ہوا عدد جانے بغیر بتا دیتا ہے کہ آپ کا تخمیب کے بعد کون سا عدد آئے گا۔ یہاں ایسی دو مثالیں ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ کیسے کام کرتی ہیں۔

(i) کوئی عدد لیجیے۔ اس کو دُگنا کر دیجیے۔ اس میں نو جمع کیجیے۔ اس میں ابتدائی عدد جمع کیجیے۔ تین سے تقسیم کیجیے۔ چار جمع کیجیے۔ ابتدائی عدد کو گھٹا دیجیے۔ حاصل نتیجہ 7 ہے۔

(ii) کوئی بھی تین ہندسوں والا عدد لکھیے (مثال کے طور پر 425) انھیں ہندسوں کو ایک ہی ترتیب میں دہراتے ہوئے چھ ہندسوں کا عدد بنائیے (425425) آپ نیا عدد 7، 11 اور 13 سے منقسم ہوگا۔

A1.6 خلاصہ Summary

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط کا مطالعہ کیا:

1. ریاضی میں کوئی بھی بیان قابل قبول ہوتا ہے تب یہ یا تو ہمیشہ صحیح ہو یا ہمیشہ غلط۔
2. کسی ریاضیاتی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے ایک برعکس مثال کافی ہوتی ہے۔
3. بدیہات وہ بیان ہوتے ہیں جن کو بغیر ثبوت کے سچ مان لیا جاتا ہے۔
4. قیاس وہ بیان جس کو ہم اپنے ریاضیاتی وجدان کی بنیاد پر صحیح تسلیم کر لیتے ہیں لیکن جس کو ثابت کرنا باقی ہوتا ہے۔
5. ایک ریاضیاتی بیان جس کی سچائی (صداقت) کو ثابت کیا جا چکا ہو 'مسئلہ (theorem) کہلاتا ہے۔
6. ریاضیاتی بیانوں کو ثابت کرنے کا عام منطقی اوزار استنباطی استدلال ہے۔
7. ایک ثبوت مسلسل ریاضیاتی بیانوں کے سلسلہ پر مشتمل ہوتا ہے۔ ثبوت میں ہر ایک بیان پچھلے بیانوں یا ثابت کئے گئے مسئلوں یا کسی بدیہہ یا مفروضہ سے منطقی طور پر استخراج کیا جاتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جوابات/اشارے
ANSWERS/HINTS

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

مشق 1.1:

1. ہاں $\frac{0}{3} = \frac{0}{2} = \frac{0}{1} = 0$ وغیرہ نسب نما q کو بھی منفی صحیح عدد کے طور پر لے سکتیں ہیں۔

3 2 اور 4 کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہو سکتے ہیں، انکو نکالنے کا ایک طریقہ ہے $4 = \frac{28}{6+1}$، $3 = \frac{21}{6+1}$

تب چھ اعداد ہوں گے۔ $\frac{22}{7}$، $\frac{23}{7}$، $\frac{24}{7}$، $\frac{25}{7}$، $\frac{26}{7}$، $\frac{27}{7}$۔

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ اسلئے 5 ناطق اعداد میں $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$

4. (i) صحیح، کیونکہ مکمل اعداد کے مجموعہ میں تمام فطری اعداد شامل ہوتے ہیں۔

(ii) غلط، مثال کے طور پر -2 مکمل اعداد نہیں ہے۔

(iii) غلط، مثال کے طور پر $\frac{1}{2}$ ایک ناطق عدد ہے لیکن مکمل عدد نہیں ہے۔

مشق 1.2:

1. (i) صحیح، کیونکہ حقیقی اعداد ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مجموعہ میں

(ii) غلط، کوئی بھی منفی عدد کی فطری عدد کا جزالمربع نہیں ہوسکتا

(iii) غلط مثال کے طور پر 2 حقیقی ہے لیکن غیر ناطق نہیں ہے

2. نہیں، مثال کے طور پر $\sqrt{4} = 2$ ایک ناطق عدد ہے

3. طریقہ کوئی مرتبہ دہرائیں جیسا کے شکل 1.8 میں کیا گیا ہے، پہلے $\sqrt{4}$ اور $\sqrt{5}$ حاصل کر لی۔

مشق 1.3:

1. (i) 0.36 ختم (ii) $0.\overline{09}$ غیر ختم تکراری

(iii) 4.125 ختم (iv) $0.\overline{230769}$ غیر ختم تکراری

(v) $0.\overline{18}$، غیر ختم تکراری (vi) 0.8225 ختم۔

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = \overline{0.285714},\ \frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = \overline{0.428571},\ \frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = \overline{0.571428},$

$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = \overline{0.714285},\ \frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = \overline{0.857142},$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [مان لیجئے $x=0.666...$ اس لیے $10x=6.666...$ یا، $10x=6+x$ یا، $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [مان لیجئے $x = 0.9999...$ اس لیے $10x = 9.999...$ یا، $10x = 9 + x$ یا، $x=1$]

5. $\overline{0.0588235294117647}$

6. q کے مفرد اجزائے جزوی میں صرف 2 کی قوتیں یا 5 کی قوتیں یا دونوں ہوگی۔

7. $0.01001000100001...,0.202002000200002...,0.003000300003...$

8. $0.750750075000750000 75...,0.767076700767000767...,0.808008000800008...$

9. (i)، (v) غیر ناطق ؛ (ii) (iii) اور (iv) ناطق

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

مشق 1.4:

1. (i) غیر ناطق (ii) ناطق (iii) ناطق (iv) غیر ناطق (v) غیر ناطق
2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3
3. اس میں کوئی تضاد نہیں ہے، یاد کیجئے کہ جب آپ لمبائی کو کسی فیتے یا دوسرے آلہ سے ناپتے ہیں آپ کو صرف تقریباً ناطق قدر حاصل ہوتی ہے اس لیے یہ نہیں بتا سکتے کہ c یا d غیر ناطق ہے
4. شکل 1.17 دیکھئے۔
5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

مشق 1.5:

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5
2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-1/3}=(5^3)^{-1/3}=5^{-1}\right]$
3. (i) $2^{13/15}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{1/4}$ (iv) $56^{1/2}$

مشق 2.1:

1. (i) اور (ii) ایک متغیر والی کثیر رکنیاں ہیں (v) تین متغیر والی کثیر رکنی ہیں۔ iii اور iv کثیر رکنیا نہیں ہیں۔ کیونکہ ان میں ہر ایک میں متغیر کا قوت نما مکمل عدد نہیں ہے۔
2. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0
3. (آپ مختلف ضریبوں والی کچھ اور کثیر رکنیاں لکھ سکتے ہیں۔) $3x^{35}-4$, $\sqrt{2}y^{100}$
4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0
5. (i) دو درجی (ii) مکعبی (iii) دو درجی (iv) خطی (v) خطی
   (vi) دو درجی (vii) مکعبی

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق:2.2

1. 3 (i) -6 (ii) -3 (iii)
2. 1,1,3 (i) 2,4,4 (ii) 0,1,8 (iii) -1,0,3 (iv)
3. ہاں (i) نہیں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) ہاں (v) ہاں (vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}-$ صفر ہے لیکن $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (vii) کثیر رکنی کا صفر نہیں ہے۔ ہاں (viii)
4. -5 (i) 5(ii) $\frac{-5}{2}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 0(v) 0(vi) $-\frac{d}{c}$ (vii)

مشق:2.3

1. (x+1) (i) کا جزو جزی ہے لیکن (ii)، (iii) اور (iv) کا جزو جزی ہے نہیں۔
2. ہاں (i) نہیں (ii) ہاں (iii)
3. -2 (i) $(2+\sqrt{2})$ (ii) $\sqrt{2}-1$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv)
4. $(3x - 1)(4x - 1)$ (i) $(x+3)\ (2x - 1)$ (ii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iii) $(x+1)\ (3x - 4)$ (iv)
5. $(x - 2)(x - 1)(x+1)$ (i) $(x+1)\ (x+1)\ (x-5)$ (ii) $(x + 1)(x + 2)(x+10)$ (iii) $(y-1)\ (y+1)\ (2y+1)$ (iv)

مشق:2.4

1. $x^2+ 14x + 40$ (i) $x^2-2x-80$ (ii) $9x^2 - 3x - 20$ (iii) $y^4 - \frac{9}{4}$ (iv) $9 -4x^2$ (v)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

.2 (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

.3 (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y+1)(2y+1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

.4 (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8xz$

(iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

.5 (i) $(2x+3y+4z)(2x+3y+4z)$ (ii) $(-\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z})(-\sqrt{2x}+y+2\sqrt{2z})$

.6 (i) $8x^3+12x^2+6x+1$ (ii) $8a^3-27b^3-36a^2b+54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

.7 (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

.8 (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3+5a)(3+5a)(3+5a)$ (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

.10 (i) $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$ (ii) $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

.11 (i) $(3x+yz)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

.12 R.H.S کو مختصر کیجئے۔

.13 تماثل VIII میں $x+y+z=0$ رکھئے۔

.14 (i) -1260 مان لیجئے $a=-12$، $b=7$، $c=5$ یہاں $a+b+c=0$ Q13 میں دیے گئے نتیجہ کو استعمال کیجئے

(ii) -16380

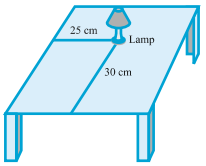
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. (i) ایک ممکن جواب ہے 5a-3=لمبائی، چوڑائی 5a-4

(ii) ایک ممکن جواب ہے: لمبائی 7y-3=، چوڑائی = 5y+4

16. ایک ممکنہ جواب ہے 3، xاور $x-4$

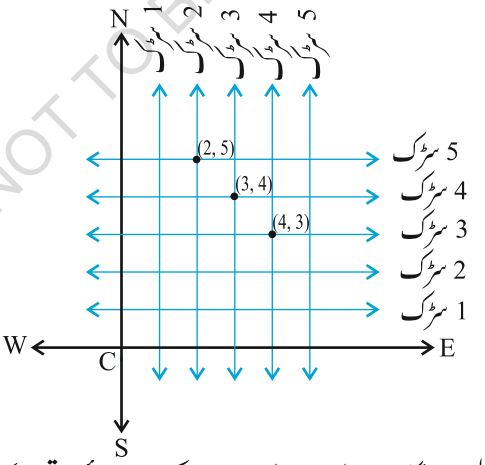
(ii) ایک ممکنہ جواب ہے 4k، 3y+5 اور y-۱



مشق 3.1:

1. لیمپ کو ایک نقطہ اور میز کو ایک سطح تصور کیجئے۔ میز کے کوئی سے دو عمودی کنارے لیجئے، لمبے کنارے سے لیمپ کے فاصلہ کی پیمائش کیجئے۔ مان لیجئے یہ 30a ہے دوبارہ چھوٹے والے کنارے سے لیمپ کے فاصلہ کی پیمائش کیجئے مان لیجئے یہ 30a ہے جس کمرے میں لیمپ رکھا ہوا ہے اس کے مطابق اس لیمپ کی حالت (30,25) یا (25,30) لکھ سکتے ہیں۔ اسکا انحصار اس ترتیب پر ہے جو آپ طے کریں۔

2. اسٹریٹ کا پلان ذیل میں دی گئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔



دونوں کراس اسٹریٹ کو پہلی والی شکل میں دیکھایا کیا گیا ہے۔ یہ یکتا طور پر پائی جاتی ہیں کیونکہ ان کو تلاش میں کرنے میں ہم نے دو حوالے خطوط کا استعمال کیا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق: 3.2

1. (i) x محوراور y محور (ii) ابعاد (iii) مبدا
2. (i) $(-5,2)$ (ii) $(5,-5)$ (iii) E (iv) G (v) 6
   (vi) -3 (vii) $(0,5)$ (viii) $(-3,0)$

$2x+3y-9.35=0; a=3, c=-9.35$

مشق: 4.1

1. $x-2y=0$
2. (i) $2x+3y-9.\overline{35}=0$; $a=2, b=3, c=-9.\overline{35}$
   (ii) $x-\frac{y}{5}-10=0$; $a=1, b=-\frac{1}{5c}, c=-10$
   (iii) $-2x+3y-6=0$; $a=-2, b=3, c=-6$
   (iv) $1.x-3y+0=0$; $a=1, b=-3, c=0$
   (v) $2x+5y+0=0$; $a=2, b=5, c=0$
   (vi) $3x+0.y+2=0$; $a=3, b=0, c=2$
   (vii) $0.x+1.y-2=0$; $a=0, b=1, c=-2$
   (viii) $-2.x+0.y+5=0$; $a=-2, b=0, c=5$

مشق: 4.2

1. (iii) کیونکہ ہر x کی قدر کے لیے اسکی ایک نظیری قدر ہے اسکا برعکس۔
2. (i) $(0,7),(1,5),(2,3),(4,-1)$
   (ii) $(1,9-\pi),(0,9),(-1,9+\pi),\left(\frac{9}{\pi},0\right)$
   (iii) $(0,0),(4,1),(-4,1),\left(2\frac{1}{2}\right)$
3. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) نہیں (v) نہیں

مشق: 5.1

1. (i) غلط، طالب علم کے ذریعے دیکھا جاسکتا ہے۔
   (ii) غلط، یہ بدیہہ 5.1 کا تضاد ہے
   (iii) صحیح (موضوعہ 2)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) صحیح، اگر آپ ایک دائرہ سے گہرے خط کو دوسرے پر رکھیں تب وہ منطبق ہو نگے اس لیے ان کے مرکز اور باؤنڈ ولی منطبق ہونگی اس لیے انکے نصف قطر منطبق ہو نگے۔

(v) صحیح، یوکلا کا پہلا بدیہہ۔

3. بہت ہی غیر معرف ارکان جب کہ فہرست طالب علم کو بناتی ہے۔ یہ تابع ہیں کیونکہ یہ وہ مختلف صورت حال کا سامنہ کرتے ہے(i) کے مطابق دونقطہ A اور B ڈٹے ہوئے ہیں ایک نقطہ سے انکے درمیان میں واقع ہے۔(ii) کے مطابق دونقطہ A اور B دٹے ہوئے ہیں، اپ نقطہ سے ایسا سکتے ہیں جو خط AB پر واقع نہیں ہے۔
یہ موضوعہ یوکلا کے موضوعوں سے حاصل نہیں ہوتے۔لیکن یہ بدیہہ 5.1 سے حاصل ہوتے ہیں۔

4. $AC = BC$
$AC + AC = BC + AC$ (مساوی، سادیوں میں جمع کرتے ہیں)
$2AC = AB$ ($BC + AC$ پر منطبق ہے)
اس لیے $AC = {}^1/_2 AB$

5. عارضی طور پر فرض کیجئے کہ C اور D، AB کے دو وسطی نقطے ہیں اب آپ دکھائیں کہ C سے اور D دو مختلف نقطہ نہیں ہیں۔

6. $AC = BD$ (دیا ہوا ہے)
$AC = AB + BC$ (نقطہ B، A رو کے درمیان ہے)
$BD = BC + CD$ (نقطہ C، A رو کے درمیان ہے)
2 اور 3 کو میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے
$AB + BC = BC + CD$
اس لیے $AB = CD$ (مساوی کو مساویوں میں سے گھٹانے پر)

7. کیونکہ یہ دنیا کے کسی بھی حصہ میں کسی بھی چیز کے لیے صحیح ہے اس لیے یہ ایک کائناتی سچ ہے۔

مشق:6.1

1. $30°, 250°$ 2. $4126°$ 3. ایک نقطہ پر تمام زاویوں کا حاصل جمع $360°$

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ اور $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$ 6. $122°, 302°$

مشق:6.2

1. $126°$ 2. $126°, 36°, 54°$ 3. $60°$ 4. $50°, 77°$

(5) زاویہ وقوع = زاویہ انعکاس، نقطہ 'B' پر $BE \perp PQ$ اور نقطہ 'C' پر $CF \perp RS$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جوابات / اشارے

مشق A 1.1

1. (i) غلط ہے ایک سال میں 12 مہینے ہوتے ہیں۔

(ii) مشکوک (مبہم):۔ دیئے گئے سال میں، دیوالی جمعہ کے دن ہو بھی سکتی ہے۔ اور نہیں بھی۔

(iii) (مشکوک) مبہم:۔ سال میں کسی بھی وقت مگادی کی درجہ حرارت 26°C سے زیادہ کم بھی ہو سکتی ہے۔

(iv) ہمیشہ صحیح ہے۔

(v) غلط ہے۔ کیونکہ کُتّے اُڑ نہیں سکتے۔

(vi) مبہم:۔ لیپ کا سال (leap year) میں فروری مہینہ میں 29 دن ہوتے ہیں۔

2. (i) غلط: ایک چار ضلعی کے داخلی زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

(ii) صحیح (iii) صحیح (iv) صحیح

(v) غلط ہے۔ کیونکہ 7+5=12

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

.3

(i) تمام مفرد اعداد جو 2 سے بڑے طاق ہوتے ہیں۔

(ii) کسی حقیقی عدد کا دُگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے۔

(iii) کسی بھی $x > 1$ ، $3x + 1 > 4$

(iv) کسی بھی $x^3 \geq 0, x^3 \geq 0$

(v) مثلث مساوی الاضلاع میں، وسطانیہ زاویائی ناصف بھی ہوتا ہے۔

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A1.2

.1

(i) انسان ہڈی والے *(Vertebrates)* ہوتے ہیں۔

(ii) نہیں، دینیش تو کسی سے بھی اپنے بال کٹا سکتا ہے۔

(iii) *Gulag* کی زبان لال ہوتی ہے۔

(iv) ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ *Gutters* کو اگلے دِن صاف جانا چاہیئے۔

2. (i) تمہیں B اور 8 کو پلٹانا چاہیئے۔

اگر B کارڈ 8 کے دوسرے جانب جفت ہو تو

اُصول توڑا گیا، اگر کارڈ 8 کے دوسرے جانب جفت ایک *Consant* ہو تو، پھر اُصول توڑا گیا۔

مشق A 1.3

1. تین ممکن قیاس یہ ہیں

(i) تین متواتر جفت اعداد کا حاصلِ جمع جفت ہی ہوتا ہے۔

(ii) کسی بھی تین متواتر جفت اعداد کا حاصل ضرب 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔

(iii) کسی بھی تین متواتر جفت اعداد کا حاصل ضرب 6 سے تقسیم ہوتا ہے۔

2. (i) خط 4: $1331 = 11^3$

خط 5: $14641 = 11^4$

یہ قیاس خط 4 اور خط 5 کو ماننا (درست) ہے۔ خط 6 کے یہ قیاس درست نہیں ہے کیونکہ

3. خط 6 5: $15101051 \neq 11^5$

$T_4 + T_5 = 25 = 5^2$

$T_{n-1} + T_n = n^2$

4. $|||||| ^2 = 12345654321$

$||||||| ^2 = 1234567654321$

5. طالبِ علم کا خود جواب۔ مثال: یوکلیڈ کے موضوعات

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A1.4

.1

(i) آپ کوئی دو مثلثات جن کے زاویے مساوی اور اضلاع مختلف ہو سکتے ہیں۔

(ii) ایک معین کے ضلعے مساوی ہوتے ہیں مگر مربع نہیں ہو سکتا

(iii) ایک مستطیل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں مگر وہ مربع نہیں ہو سکتا۔

(iv) $a = 3$ اور $b=4$ کے لئے بیان صحیح نہیں ہے۔

(v) $n = 11$ ، $2n^2 + 11_n = 253$ جو کہ مفرد عدد نہیں ہے۔

(iv) $n = 41$ ، $n^2 - n_n + 41$ ایک مفرد نہیں ہے۔

.2 طالبِ علم کا خود کا جواب

.3

فرض کرو کہ x اور y دو طاق اعداد ہیں تو

$x=2m+1$ کسی بھی قطری اعداد m اور

$y=2n+1$ کسی بھی قطری اعداد n کے لئے

اس لئے $2\ (x+y)$ سے تقسیم ہوتا ہے۔

اور یہ جفت ہے۔

$x+y=2(m+n+1)$

$x+y$ تقسیم ہوتا ہے۔ 2 سے اور وہ جفت ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. سوال 3 دیکھو۔

$$xy = (2m+1)(2n+1)$$

$$= 2(2mn+ m+ n)+1$$

اس لئے xy، تقسیم نہیں ہوتا 2 سے

اس لئے یہ طاق ہے۔

5. فرض کرو۔

$n2,\ 2n+2$ اور $2n+4$،

تین مسلسل جفت اعداد ہیں۔ تو اُنکا مجموعہ

$6(n+1)$ جو کہ تقسیم ہوتا ہے 6 سے

7.

(i) فرض کہ ہمارا عدد 'n' ہے۔

مندرجہ ذیل عملیات سے

$$n \to 2n \to 2n+9 \to 2n+9+n = 3n+9$$

$$\to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7$$

$$\to n+7-n = 7$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) نوٹ کیجئے۔

$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

کوئی بھی تین ہندسی عدد لیجئے، abc

پھر $abc \times 1001 = abcabc$

∴ 6 ہندسی عدد abcabc تقسیم ہوتا ہے 7 سے، 11 سے، 13 سے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Note:_____

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED