



Government of Karnataka

# गणित MATHEMATICS

## 9

नौवीं कक्षा  
Ninth Standard  
भाग – 1



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्  
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

**Karnataka Textbook Society (R.)**

6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru - 560 003

**0963 – गणित**

कक्षा 9 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-505-9

**प्रथम संस्करण**

मार्च 2006 फाल्गुन 1927

**पुनर्मुद्रण**

अक्टूबर 2006, अक्टूबर 2007,  
जनवरी 2009, जनवरी 2010,  
जनवरी 2011, जनवरी 2012,  
दिसंबर 2012, फरवरी 2014,  
दिसंबर 2015, दिसंबर 2016,  
दिसंबर 2017, दिसंबर 2018  
और अगस्त 2019

**संशोधित संस्करण**

नवंबर 2022 अग्रहायण 1944

**PD 10T+5T RPS**

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण  
परिषद् 2006, 2022

**₹ 155.00**

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम.  
पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक  
अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद  
मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित  
तथा टेन प्रिंटर्स इंडिया प्रा. लि., 44 किमी.  
माइल स्टोन, नेशनल हाइवे 10, रोहतक रोड,  
गांव रोहाद, जिला झज्जर, हरियाणा द्वारा मुद्रित।

**सर्वाधिकार सुरक्षित**

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पच्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

**एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय**

एन.सी.ई.आर.टी. कैम्पस

श्री अरविंद मार्ग

नयी दिल्ली 110 016

फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड

हेली एक्सटेंशन, होस्टेल् के

बनाशंकरा III स्टेज

बैंगलुरु 560 085

फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन

डाकघर नवजीवन

अहमदाबाद 380 014

फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैम्पस

निकट: धनकल बस स्टॉप

पनिहटी

कोलकाता 700 114

फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लेक्स

मालीगांव

गुवाहाटी 781 021

फोन : 0361-2674869

**प्रकाशन सहयोग**

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : अनूप कुमार राजपूत

मुख्य उत्पादन अधिकारी : अरुण चितकारा

मुख्य व्यापार प्रबंधक : विपिन दिवान

मुख्य संपादक (प्रभारी) : बिज्ञान सुतार

संपादक : रेखा अग्रवाल

उत्पादन अधिकारी : अतुल सक्सेना

**चित्रांकन और आवरण**

डिजिटल एक्सप्रेसन

## आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धान्त किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाये हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मजबूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केन्द्रित व्यवस्था की दिशा में काफी दूर तक ले जाएंगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नये ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों व स्रोतों की अनेदखी किये जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिये ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक जिन्दगी और कार्यशैली में काफी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है जितनी वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिये नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिये पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिये उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिये बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक की मुख्य सलाहकार इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की प्रोफ़ेसर पी. सिंक्लेयर की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने

योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिये हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रोफेसर मृणाल मिरी और प्रोफेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित राष्ट्रीय निरीक्षण समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए भी कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरन्तर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों व सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

नयी दिल्ली

20 दिसंबर 2005

निदेशक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

NOT TO BE REPUBLISHED  
@KTBS

## पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

### विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष

जयंत विष्णु नारलीकर, *इमीरिटस प्रोफेसर*, अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए.ए., गणेशखिंड, पूना विश्वविद्यालय, पूना।

### मुख्य सलाहकार

पी. सिंकलेयर, *प्रोफेसर*, विज्ञान विद्यापीठ, इ.गा.रा.मु.वि., नयी दिल्ली

### मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफेसर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

### सदस्य

अंजली लाल, *पी.जी.टी.* (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, सेक्टर-14, गुडगांव

अंजू निरूला, *पी.जी.टी.* (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, पुष्पांजली इंकलेव, पीतम पुरा, दिल्ली

उदय सिंह, *लेक्चरर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

ए.के. वझलवार, *प्रोफेसर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

एस. वेंकटरमन, *लेक्चरर*, विज्ञान विद्यापीठ, इ.गा.रा.मु.वि. नयी दिल्ली

जी.पी. दीक्षित, *प्रोफेसर*, गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *लेक्चरर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भुवनेश्वर

महेन्द्र आर. गजरे, *पी.जी.टी.*, अतुल विद्यालय, अतुल, जिला वलसाद

महेन्द्र शंकर, *लेक्चरर* (एस.जी.) (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

रामा बालाजी, *टी.जी.टी.* (गणित), के.वी. मेग और केन्द्र, सेंट जान्स रोड, बंगलौर

वेद डुडेजा, *उप-प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत्त), राजकीय बालिका माध्यमिक विद्यालय, सैनिक विहार, दिल्ली

संजय मुद्गल, *लेक्चरर*, सी.आई.ई.टी., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

शशिधर जगदीशन, *शिक्षक और सदस्य*, गवरनिंग कॉउंसिल, सेन्टर फॉर लर्निंग, बंगलौर

### हिन्दी रूपांतरकर्ता

जी.पी. दीक्षित, *प्रोफेसर*, गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

महेन्द्र शंकर, *लेक्चरर* (एस.जी.) (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

हरीश्वर प्रसाद सिन्हा, सी-210, राजाजी पुरम, लखनऊ

### सदस्य-समन्वयक

राम अवतार, *प्रोफेसर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली (दिसम्बर 2005 तक)

आर.पी. मौर्य, *प्रोफेसर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली (जनवरी 2006 से)

## भारत का संविधान

### उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक <sup>1</sup>[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक न्याय,

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की स्वतंत्रता,

प्रतिष्ठा और अवसर की समता

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और <sup>2</sup>[राष्ट्र की एकता

और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली बंधुता

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर अपनी इस संविधान सभा में आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को एतद्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) “प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य” के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) “राष्ट्र की एकता” के स्थान पर प्रतिस्थापित।

## आभार

परिषद् पाठ्यपुस्तक की समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों का उनके बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार प्रकट करती है: ए. के. सक्सैना, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), लखनऊ विश्वविद्यालय लखनऊ; सुनील बजाज, एच.ओ.डी. (गणित), एस.सी.ई.आर.टी. हरियाणा, गुडगाँव; के. एल. आर्य, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; बंदिता कालरा, लेक्चरर, सर्वोदय कन्या विद्यालय, विकास पुरी, डिस्ट्रिक्ट सेंटर, नई दिल्ली; जगदीश सिंह, पी.जी.टी., सैनिक स्कूल, कपूरथला; पी. के. बग्गा, टी.जी.टी., एस.बी.वी., सुभाष नगर, नई दिल्ली; आर.सी. महाना, टी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय, संबलपुर; डी.आर. खंडवे, टी.जी.टी., जे.एन.वी. दुधनोई, गोलपाड़ा; एस.एस. चट्टोपाध्याय, एसिसटेंट मास्टर, बिधान नगर गवर्नमेंट हाई स्कूल, कोलकाता; एन.ए. सुजाथा, टी.जी.टी., के.वी. वास्को न. 1, गोवा; अकिला सहदेवन, टी.जी.टी., के.वी. मीनांबक्कम, चेन्नई; एस.सी. राऊतो, टी.जी.टी., सेंट्रल स्कूल फॉर तिब्बतनस, मसूरी; सुनील पी. जेवियर, टी.जी.टी., एन.वी., नेरीयामंलगम, एरनाकुलम; अमित बजाज, टी.जी.टी., सी.आर.पी.एफ पब्लिक स्कूल, रोहिणी, दिल्ली; आर.के. पाण्डे, टी.जी.टी., डी.एम. स्कूल, आर.आई.ई. भोपाल; वी. माधवी, टी.जी.टी., संस्कृति स्कूल, चाणक्यपुरी, नई दिल्ली; जी. श्री हरि बाबू, टी.जी.टी., जे.एन.वी. कागज़नगर, अदिलाबाद।

परिषद् उन विषय-विशेषज्ञों, शिक्षकों एवं विभागीय सदस्यों की भी आभारी है जिन्होंने इस पुस्तक के हिन्दी संस्करण की समीक्षा की और इसे अधिक उपयोगी बनाने हेतु महत्वपूर्ण सुझाव दिए: नन्दकिशोर वर्मा, लेक्चरर, एच.ई.एस.-II, गणित विभाग, राज्य शैक्षिक अनु. एवं प्रशि. परि., हरियाणा, गुडगाँव; रविन्द्र सिंह पंवार, पी.जी.टी., एम.बी.डी.ए.वी. सीनियर सै. स्कूल, यूसुफ सराय, नई दिल्ली; अजय कुमार सिंह, टी.जी.टी., रामजस सी.सै. स्कूल, न. 3, कूचा नटवा, चाँदनी चौक, दिल्ली; सविता गर्ग, पी.जी.टी., सर्वोदय कन्या विद्यालय, चांद नगर, नई दिल्ली; सुधा गुप्ता, टी.जी.टी., सर्वोदय कन्या विद्यालय, अवन्तिका, रोहिणी, दिल्ली; राजकुमार भारद्वाज, टी.जी.टी., राजकीय माध्यमिक बाल विद्यालय, ए-ब्लाक, सुल्तानपुरी, दिल्ली; अशोक कुमार गुप्ता, टी.जी.टी., राजकीय उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, एस.यू. ब्लाक, पीतमपुरा, दिल्ली; पी.के. तिवारी, सहायक आयुक्त (सेवानिवृत्त), केन्द्रीय विद्यालय संगठन, नई दिल्ली; आर.पी. मौर्य, (समन्वयक) प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.।

परिषद् पुस्तक विकास की प्रक्रिया में सहयोग के लिए एम. चन्द्रा, प्रोफेसर एवं विभागाध्यक्ष, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. की विशेष रूप से आभारी है।

परिषद् कंप्यूटर प्रभारी, दीपक कपूर; डी.टी.पी. ऑपरेटर, नरेश कुमार; कॉपी संपादक, प्रगति भारद्वाज और एल.आर. भारती; प्रूफ रीडर, योगिता शर्मा के प्रयासों के प्रति भी आभार प्रकट करती है। ए.पी.सी. कार्यालय, डी.ई.एस.एम. का प्रशासन, प्रकाशन प्रभाग और एन.सी.ई.आर.टी. सचिवालय के योगदान भी सराहनीय हैं।

परिषद्, इस संस्करण के पुनर्संयोजन के लिए पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक और विषय सामग्री के विश्लेषण हेतु दिए गए महत्वपूर्ण सहयोग के लिए एन.सी.ई.आर.टी. के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के सदस्यों आशुतोष वझलवार, प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; टी.पी. शर्मा, प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली और राहुल सोफ्ट, पी.जी.टी., एयर फोर्स गोल्डन जूबली स्कूल, सुब्रतो पार्क, नयी दिल्ली; गुरप्रीत भटनागर, रिसोर्स पर्सन, सी.बी.एस.ई. के प्रति आभार व्यक्त करती है।

## विषय सूची

|                                            |           |
|--------------------------------------------|-----------|
| आमुख                                       | iii       |
| <b>1. संख्या पद्धति</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1 भूमिका                                 | 1         |
| 1.2 अपरिमेय संख्याएँ                       | 6         |
| 1.3 वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार | 10        |
| 1.4 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ        | 17        |
| 1.5 वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक-नियम   | 24        |
| 1.6 सारांश                                 | 27        |
| <b>2. बहुपद</b>                            | <b>29</b> |
| 2.1 भूमिका                                 | 29        |
| 2.2 एक चर वाले बहुपद                       | 29        |
| 2.3 बहुपद के शून्यक                        | 34        |
| 2.4 बहुपदों का गुणनखंडन                    | 37        |
| 2.5 बीजीय सर्वसमिकाएँ                      | 42        |
| 2.6 सारांश                                 | 49        |
| <b>3. निर्देशांक ज्यामिति</b>              | <b>50</b> |
| 3.1 भूमिका                                 | 50        |
| 3.2 कार्तीय पद्धति                         | 54        |
| 3.3 सारांश                                 | 63        |

|                                                  |                |
|--------------------------------------------------|----------------|
| <b>4. दो चरों वाले रैखिक समीकरण</b>              | <b>64</b>      |
| 4.1 भूमिका                                       | 64             |
| 4.2 रैखिक समीकरण                                 | 64             |
| 4.3 रैखिक समीकरण का हल                           | 67             |
| 4.4 सारांश                                       | 69             |
| <b>5. यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय</b>           | <b>70</b>      |
| 5.1 भूमिका                                       | 70             |
| 5.2 यूक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ | 72             |
| 5.3 सारांश                                       | 80             |
| <b>6. रेखाएँ और कोण</b>                          | <b>82</b>      |
| 6.1 भूमिका                                       | 82             |
| 6.2 आधारभूत पद और परिभाषाएँ                      | 83             |
| 6.3 प्रतिच्छेदी रेखाएँ और अप्रतिच्छेदी रेखाएँ    | 85             |
| 6.4 कोणों के युग्म                               | 86             |
| 6.5 एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ                  | 92             |
| 6.6 सारांश                                       | 96             |
| <b>परिशिष्ट 1 – गणित में उपपत्तियाँ</b>          | <b>97</b>      |
| A1.1 भूमिका                                      | 97             |
| A1.2 गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन                 | 98             |
| A1.3 निगमनिक तर्कण                               | 102            |
| A1.4 प्रमेय, कंजेक्चर और अभिगृहीत                | 105            |
| A1.5 गणितीय उपपत्ति क्या है?                     | 110            |
| A1.6 सारांश                                      | 117            |
| <b>उत्तर/संकेत</b>                               | <b>118 126</b> |



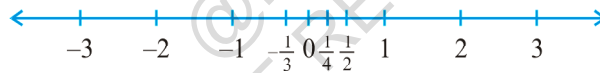
0963CH01

## अध्याय 1

### संख्या पद्धति

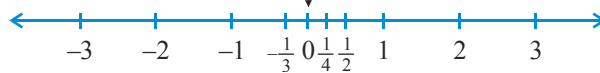
#### 1.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप संख्या रेखा के बारे में पढ़ चुके हैं और वहाँ आप यह भी पढ़ चुके हैं कि विभिन्न प्रकार की संख्याओं को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है (देखिए आकृति 1.1)।



आकृति 1.1 : संख्या रेखा

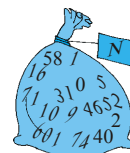
कल्पना कीजिए कि आप शून्य से चलना प्रारंभ करते हैं और इस रेखा पर धनात्मक दिशा में चलते जा रहे हैं। जहाँ तक आप देख सकते हैं; वहाँ तक आपको संख्याएँ, संख्याएँ और संख्याएँ ही दिखाई पड़ती हैं।



आकृति 1.2

अब मान लीजिए आप संख्या रेखा पर चलना प्रारंभ करते हैं और कुछ संख्याओं को एकत्रित करते जा रहे हैं। इस संख्याओं को रखने के लिए एक थैला तैयार रखिए!

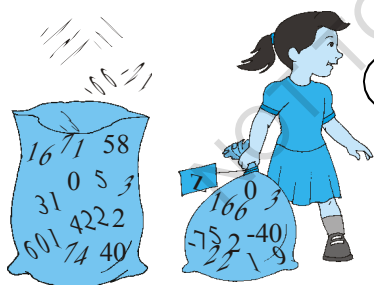
संभव है कि आप 1, 2, 3 आदि जैसी केवल प्राकृत संख्याओं को उठाना प्रारंभ कर रहे हों। आप जानते हैं कि यह सूची सदैव बढ़ती ही जाती है। (क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?) अतः अब आप के थैले में अपरिमित रूप से अनेक प्राकृत संख्याएँ भर जाती हैं! आपको याद होगा कि हम इस संग्रह को प्रतीक  $N$  से प्रकट करते हैं।



अब आप घूम जाइए और विपरीत दिशा में चलते हुए शून्य को उठाइए और उसे भी थैले में रख दीजिए। अब आपको **पूर्ण संख्याओं (whole numbers)** का एक संग्रह प्राप्त हो जाता है। जिसे प्रतीक  $W$  से प्रकट किया जाता है।



अब, आपको अनेक-अनेक ऋणात्मक पूर्णांक दिखाई देते हैं। आप इन सभी ऋणात्मक पूर्णाकों को अपने थैले में डाल दीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि आपका यह नया संग्रह क्या है? आपको याद होगा कि यह सभी **पूर्णाकों (integers)** का संग्रह है और इसे प्रतीक  $Z$  से प्रकट किया जाता है।

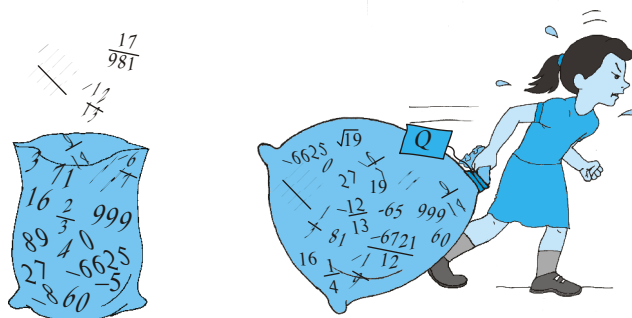


$Z$  क्यों ?

$Z$  जर्मन शब्द “zahlen” (जेहलीन) से लिया गया है, जिसका अर्थ है “गिनना” और “zahl” (जहल) जिसका अर्थ है “संख्या”।



क्या अभी भी रेखा पर संख्याएँ बची रहती हैं? निश्चित रूप से ही, रेखा पर संख्याएँ बची रहती हैं। ये संख्याएँ  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ , या  $\frac{-2005}{2006}$  जैसी संख्याएँ भी हैं। यदि आप इस प्रकार की सभी संख्याओं को भी थैले में डाल दें, तब यह **परिमेय संख्याओं (rational numbers)**



का संग्रह हो जाएगा। परिमेय संख्याओं के संग्रह को  $Q$  से प्रकट किया जाता है। अंग्रेजी शब्द “rational” की व्युत्पत्ति अंग्रेजी शब्द “ratio” से हुई है और अक्षर  $Q$  अंग्रेजी शब्द ‘quotient’ से लिया गया है।

अब आपको याद होगा कि परिमेय संख्याओं की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

संख्या ‘ $r$ ’ को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है (यहाँ हम इस बात पर बल क्यों देते हैं कि  $q \neq 0$  होना चाहिए)।

अब आप इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि थैले में रखी सभी संख्याओं को  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है। उदाहरण के लिए,  $-25$  को  $\frac{-25}{1}$  के रूप में लिखा जा सकता है; यहाँ  $p = -25$  और  $q = 1$  है। इस तरह हम यह पाते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक भी आते हैं।

आप यह भी जानते हैं कि परिमेय संख्याओं का  $\frac{p}{q}$  के रूप में अद्वितीय (unique) निरूपण नहीं होता है, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है। उदाहरण के लिए,  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} =$

$\frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ , आदि। ये परिमेय संख्याएँ तुल्य परिमेय संख्याएँ (या भिन्न) हैं। फिर

भी, जब हम यह कहते हैं कि  $\frac{p}{q}$  एक परिमेय संख्या है या जब हम  $\frac{p}{q}$  को एक संख्या

रेखा पर निरूपित करते हैं, तब हम यह मान लेते हैं कि  $q \neq 0$  और  $p$  और  $q$  का 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है [अर्थात्  $p$  और  $q$  असहभाज्य संख्याएँ (coprime numbers) हैं]। अतः संख्या रेखा पर  $\frac{1}{2}$  के तुल्य अपरिमित रूप से अनेक भिन्नों में से हम  $\frac{1}{2}$  लेते हैं जो सभी को निरूपित करती है।

आइए अब हम विभिन्न प्रकार की संख्याओं, जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, से संबंधित कुछ उदाहरण हल करें।

**उदाहरण 1 :** नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।

- (i) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृत संख्या होती है।
- (ii) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होता है।
- (iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक होती है।

**हल :** (i) असत्य है, क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृत संख्या नहीं है।

(ii) सत्य है, क्योंकि प्रत्येक पूर्णांक  $m$  को  $\frac{m}{1}$  के रूप में लिखा जा सकता है और इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

(iii) असत्य है, क्योंकि  $\frac{3}{5}$  एक पूर्णांक नहीं है।

**उदाहरण 2 :** 1 और 2 के बीच की पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्न को हम कम से कम दो विधियों से हल कर सकते हैं।

**हल 1 :** आपको याद होगा कि  $r$  और  $s$  के बीच की एक परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए

आप  $r$  और  $s$  को जोड़ते हैं और उसे दो से भाग दे देते हैं, अर्थात्  $\frac{r+s}{2}$ ,  $r$  और  $s$  के बीच

स्थित होती है। अतः  $\frac{3}{2}$ , 1 और 2 के बीच की एक संख्या है। इसी प्रक्रिया में आप 1 और 2 के बीच चार और परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। ये चार संख्याएँ हैं :

$$\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8} \text{ और } \frac{7}{4}।$$

**हल 2 :** एक अन्य विकल्प है कि एक ही चरण में सभी पाँच परिमेय संख्याओं को ज्ञात कर लें। क्योंकि हम पाँच संख्याएँ ज्ञात करना चाहते हैं, इसलिए हम  $5 + 1$  अर्थात्, 6 को हर लेकर 1 और 2 को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखते हैं। अर्थात्  $1 = \frac{6}{6}$  और  $2 = \frac{12}{6}$

हैं। तब आप यह देख सकते हैं कि  $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$  और  $\frac{11}{6}$  सभी 1 और 2 के बीच स्थित

परिमेय संख्याएँ हैं। अतः 1 और 2 के बीच स्थित संख्याएँ हैं :  $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$  और  $\frac{11}{6}$ ।

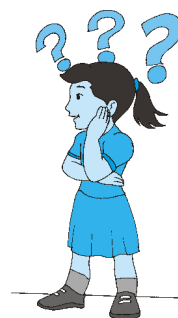
**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि उदाहरण 2 में 1 और 2 के बीच स्थित केवल पाँच परिमेय संख्याएँ ही ज्ञात करने के लिए कहा गया था। परन्तु आपने यह अवश्य अनुभव किया होगा कि वस्तुतः 1 और 2 के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं। व्यापक रूप में, किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

आइए हम संख्या रेखा को पुनः देखें। क्या आपने इस रेखा पर स्थित सभी संख्याओं को ले लिया है? अभी तक तो नहीं। ऐसा होने का कारण यह है कि संख्या रेखा पर अपरिमित रूप से अनेक और संख्याएँ बची रहती हैं। आप द्वारा उठायी गई संख्याओं के स्थानों के बीच रिक्त स्थान हैं और रिक्त स्थान न केवल एक या दो हैं, बल्कि अपरिमित रूप से अनेक हैं। आश्चर्यजनक बात तो यह है कि किन्हीं दो रिक्त स्थानों के बीच अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ स्थित होती हैं।

अतः, हमारे सामने निम्नलिखित प्रश्न बचे रह जाते हैं:

1. संख्या रेखा पर बची हुई संख्याओं को क्या कहा जाता है?
2. इन्हें हम किस प्रकार पहचानते हैं? अर्थात् इन संख्याओं और परिमेय संख्याओं के बीच हम किस प्रकार भेद करते हैं?

इन प्रश्नों के उत्तर अगले अनुच्छेद में दिए जाएँगे।



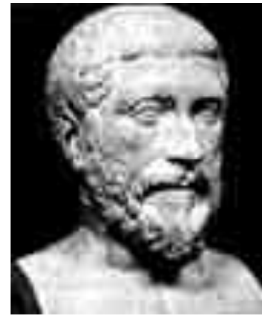
### प्रश्नावली 1.1

1. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है? क्या इसे आप  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है?
2. 3 और 4 के बीच में छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3.  $\frac{3}{5}$  और  $\frac{4}{5}$  के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।
  - (i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।
  - (ii) प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है।
  - (iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

### 1.2 अपरिमेय संख्याएँ

पिछले अनुच्छेद में, हमने यह देखा है कि संख्या रेखा पर ऐसी संख्याएँ भी हो सकती हैं जो परिमेय संख्याएँ नहीं हैं। इस अनुच्छेद में, अब हम इन संख्याओं पर चर्चा करेंगे। अभी तक हमने जिन संख्याओं पर चर्चा की है, वे  $\frac{p}{q}$  के रूप की रही हैं, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है। अतः आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि क्या ऐसी भी संख्याएँ हैं जो इस रूप की नहीं होती हैं? वस्तुतः ऐसी संख्याएँ होती हैं।

लगभग 400 सा०यु०पू०, ग्रीस के प्रसिद्ध गणितज्ञ और दार्शनिक पाइथागोरस के अनुयायियों ने इन संख्याओं का सबसे पहले पता लगाया था। इन संख्याओं को **अपरिमेय संख्याएँ (irrational numbers)** कहा जाता है, क्योंकि इन्हें पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। पाइथागोरस के एक अनुयायी, क्रोटोन के हिपाक्स द्वारा पता लगायी गई अपरिमेय संख्याओं के संबंध में अनेक किंवदंतियाँ हैं। हिपाक्स का एक दुर्भाग्यपूर्ण अंत रहा, चाहे इसका कारण इस बात की खोज हो कि  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है या इस खोज के बारे में बाहरी दुनिया को उजागर करना हो।



पाइथागोरस  
(569 सा० यु० पू०–479 सा० यु० पू०)  
आकृति 1.3

आइए अब हम इन संख्याओं की औपचारिक परिभाषा दें।

संख्या 's' को **अपरिमेय संख्या (irrational number)** कहा जाता है, यदि इसे  $\frac{p}{q}$  के रूप में न लिखा जा सकता हो, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।

आप यह जानते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं। इसी प्रकार, अपरिमेय संख्याएँ भी अपरिमित रूप से अनेक होती हैं। इनके कुछ उदाहरण हैं:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

**टिप्पणी :** आपको याद होगा कि जब कभी हम प्रतीक " $\sqrt{\quad}$ " का प्रयोग करते हैं, तब हम यह मानकर चलते हैं कि यह संख्या का धनात्मक वर्गमूल है। अतः  $\sqrt{4} = 2$  है, यद्यपि 2 और -2 दोनों ही संख्या 4 के वर्गमूल हैं।

ऊपर दी गई कुछ अपरिमेय संख्याओं के बारे में आप जानते हैं। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए अनेक वर्गमूलों और संख्या  $\pi$  से आप परिचित हो चुके हैं।

पाइथागोरस के अनुयायियों ने यह सिद्ध किया है कि  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है। बाद में 425 ई.पू. के आस-पास साइरीन के थियोडोरस ने यह दर्शाया था कि  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$  और  $\sqrt{17}$  भी अपरिमेय संख्याएँ हैं।  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ , आदि की अपरिमेयता (irrationality) की उपपत्तियों पर चर्चा कक्षा 10 में की जाएगी। जहाँ तक  $\pi$  का संबंध है, हजारों वर्षों से विभिन्न संस्कृतियाँ इससे परिचित रही हैं, परन्तु 1700 ई. के अंत में ही लैम्बर्ट और लेजान्ड्रे ने सिद्ध किया था कि यह एक अपरिमेय संख्या है। अगले अनुच्छेद में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि  $0.10110111011110...$  और  $\pi$  अपरिमेय क्यों हैं।

आइए हम पिछले अनुच्छेद के अंत में उठाए गए प्रश्नों पर पुनः विचार करें। इसके लिए परिमेय संख्याओं वाला थैला लीजिए। अब यदि हम थैले में सभी अपरिमेय संख्याएँ भी डाल दें, तो क्या अब भी संख्या रेखा पर कोई संख्या बची रहेगी? इसका उत्तर है "नहीं"। अतः, एक साथ ली गई सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के संग्रह से जो प्राप्त होता है, उसे **वास्तविक संख्याओं (real numbers)** का नाम दिया जाता



है, जिसे  $\mathbf{R}$  से प्रकट किया जाता है। अतः वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकती है। अतः हम यह कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपित किया जाता है। साथ ही, संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को निरूपित करता है। यही कारण है कि संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा (real number line) कहा जाता है।



जी. कैंटर (1845-1918)

आकृति 1.4

1870 में दो जर्मन गणितज्ञ कैंटर और डेडेकिंड ने इसे भिन्न-भिन्न विधियों से सिद्ध किया था। उन्होंने यह दिखाया था कि प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत वास्तविक संख्या रेखा पर एक बिन्दु होता है और संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय

वास्तविक संख्या होती है।



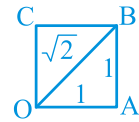
आर. डेडेकिंड (1831-1916)

आकृति 1.5

आइए देखें कि संख्या रेखा पर हम कुछ अपरिमेय संख्याओं का स्थान निर्धारण किस प्रकार कर सकते हैं।

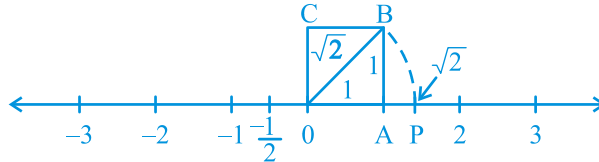
**उदाहरण 3 :** संख्या रेखा पर  $\sqrt{2}$  का स्थान निर्धारण (को निरूपित) कीजिए।

**हल :** यह सरलता से देखा जा सकता है कि किस प्रकार यूनानियों ने  $\sqrt{2}$  का पता लगाया होगा। एक एकक (मात्रक) की लंबाई की भुजा वाला वर्ग OABC लीजिए (देखिए आकृति 1.6)। तब आप पाइथागोरस प्रमेय लागू करके यह देख सकते हैं कि  $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  है। संख्या रेखा पर



आकृति 1.6

हम  $\sqrt{2}$  को किस प्रकार निरूपित करते हैं? ऐसा सरलता से किया जा सकता है। इस बात का ध्यान रखते हुए कि शीर्ष O शून्य के साथ संपाती बना रहे, आकृति 1.6 को संख्या रेखा पर स्थानांतरित कीजिए (देखिए आकृति 1.7)।

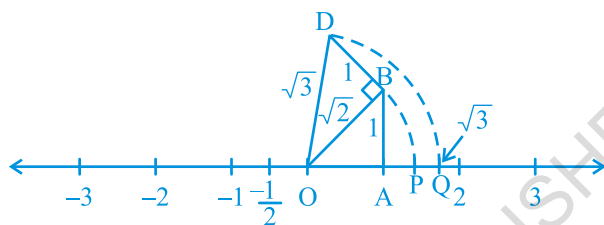


आकृति 1.7

अभी आपने देखा है कि  $OB = \sqrt{2}$  है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OB को त्रिज्या मानकर एक चाप(arc) खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है। तब बिन्दु P संख्या रेखा पर  $\sqrt{2}$  के संगत होता है।

**उदाहरण 4 :** वास्तविक संख्या रेखा पर  $\sqrt{3}$  का स्थान निर्धारण कीजिए।

**हल :** आइए हम आकृति 1.7 को पुनः लें।



आकृति 1.8

OB पर एकक लंबाई वाले लंब BD की रचना कीजिए (जैसा कि आकृति 1.8 में दिखाया गया है)। तब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हमें  $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$  प्राप्त होता है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है। तब Q,  $\sqrt{3}$  के संगत है।

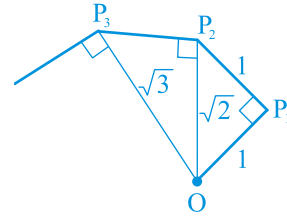
इसी प्रकार  $\sqrt{n-1}$  का स्थान निर्धारण हो जाने के बाद आप  $\sqrt{n}$  का स्थान निर्धारण कर सकते हैं, जहाँ  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है।

### प्रश्नावली 1.2

- नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।
  - प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।
  - संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु  $\sqrt{m}$  के रूप का होता है, जहाँ  $m$  एक प्राकृत संख्या है।
  - प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।
- क्या सभी धनात्मक पूर्णाकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं? यदि नहीं, तो एक ऐसी संख्या के वर्गमूल का उदाहरण दीजिए जो एक परिमेय संख्या है।

3. दिखाइए कि संख्या रेखा पर  $\sqrt{5}$  को किस प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

4. **कक्षा के लिए क्रियाकलाप (वर्गमूल सर्पिल की रचना) :** कागज की एक बड़ी शीट लीजिए और नीचे दी गई विधि से “वर्गमूल सर्पिल” (square root spiral) की रचना कीजिए। सबसे पहले एक बिन्दु O लीजिए और एक लंबाई का रेखाखंड (line segment) OP खींचिए। एक लंबाई वाले  $OP_1$  पर लंब रेखाखंड  $P_1P_2$  खींचिए (देखिए आकृति 1.9)। अब  $OP_2$  पर लंब रेखाखंड  $P_2P_3$  खींचिए। तब  $OP_3$  पर लंब रेखाखंड  $P_3P_4$  खींचिए।



**आकृति 1.9 : वर्गमूल सर्पिल की रचना**

इस प्रक्रिया को जारी रखते हुए  $OP_{n-1}$  पर एक लंबाई वाला लंब रेखाखंड खींचकर आप रेखाखंड  $P_{n-1}P_n$  प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार आप बिन्दु O,  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$  प्राप्त कर लेंगे और उन्हें मिलाकर  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$  को दर्शाने वाला एक सुंदर सर्पिल प्राप्त कर लेंगे।

### 1.3 वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार

इस अनुच्छेद में, हम एक अलग दृष्टिकोण से परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का अध्ययन करेंगे। इसके लिए हम वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार (expansions) पर विचार करेंगे और देखेंगे कि क्या हम परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं में भेद करने के लिए इन प्रसारों का प्रयोग कर सकते हैं या नहीं। यहाँ हम इस बात की भी व्याख्या करेंगे कि वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार का प्रयोग करके किस प्रकार संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं को प्रदर्शित किया जाता है। क्योंकि हम अपरिमेय संख्याओं की तुलना में परिमेय संख्याओं से अधिक परिचित हैं, इसलिए हम अपनी चर्चा इन्हीं संख्याओं से प्रारंभ करेंगे। यहाँ इनके तीन उदाहरण दिए गए हैं :  $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$ । शेषफलों पर विशेष ध्यान दीजिए और देखिए कि क्या आप कोई प्रतिरूप (pattern) प्राप्त कर सकते हैं।

**उदाहरण 5 :**  $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$  और  $\frac{1}{7}$  के दशमलव प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल :

|   |          |
|---|----------|
|   | 3.333... |
| 3 | 10       |
|   | 9        |
|   | 10       |
|   | 9        |
|   | 10       |
|   | 9        |
|   | 10       |
|   | 9        |
|   | 1        |

|   |       |
|---|-------|
|   | 0.875 |
| 8 | 7.0   |
|   | 64    |
|   | 60    |
|   | 56    |
|   | 40    |
|   | 40    |
|   | 0     |

|   |             |
|---|-------------|
|   | 0.142857... |
| 7 | 1.0         |
|   | 7           |
|   | 30          |
|   | 28          |
|   | 20          |
|   | 14          |
|   | 60          |
|   | 56          |
|   | 40          |
|   | 35          |
|   | 50          |
|   | 49          |
|   | 1           |

शेष : 1, 1, 1, 1, 1...  
भाजक : 3

शेष : 6, 4, 0  
भाजक : 8

शेष : 3, 2, 6, 4, 5, 1,  
3, 2, 6, 4, 5, 1, ...  
भाजक : 7

यहाँ आपने किन-किन बातों पर ध्यान दिया है? आपको कम से कम तीन बातों पर ध्यान देना चाहिए।

- कुछ चरण के बाद शेष या तो 0 हो जाते हैं या स्वयं की पुनरावृत्ति करना प्रारंभ कर देते हैं।
- शेषों की पुनरावृत्ति शृंखला में प्रविष्टियों (entries) की संख्या भाजक से कम होती है ( $\frac{1}{3}$  में एक संख्या की पुनरावृत्ति होती है और भाजक 3 है,  $\frac{1}{7}$  में शेषों की पुनरावृत्ति शृंखला में छः प्रविष्टियाँ 326451 हैं और भाजक 7 है)।
- यदि शेषों की पुनरावृत्ति होती हो, तो भागफल (quotient) में अंकों का एक पुनरावृत्ति खंड प्राप्त होता है ( $\frac{1}{3}$  के लिए भागफल में 3 की पुनरावृत्ति होती है और  $\frac{1}{7}$  के लिए भागफल में पुनरावृत्ति खंड 142857 प्राप्त होता है)।

यद्यपि केवल ऊपर दिए गए उदाहरणों से हमने यह प्रतिरूप प्राप्त किया है, परन्तु यह  $\frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ) के रूप की सभी परिमेय संख्याओं पर लागू होता है।  $q$  से  $p$  को भाग देने पर दो मुख्य बातें घटती हैं – या तो शेष शून्य हो जाता है या कभी भी शून्य नहीं होता है और तब हमें शेषफलों की एक पुनरावृत्ति शृंखला प्राप्त होती है। आइए हम प्रत्येक स्थिति पर अलग-अलग विचार करें।

**स्थिति (i) : शेष शून्य हो जाता है।**

$\frac{7}{8}$  वाले उदाहरण में हमने यह देखा है कि कुछ चरणों के बाद शेष शून्य हो जाता है और  $\frac{7}{8}$  का दशमलव प्रसार 0.875 है। अन्य उदाहरण हैं :  $\frac{1}{2} = 0.5$ ,  $\frac{639}{250} = 2.556$  है। इन सभी स्थितियों में कुछ परिमित चरणों के बाद दशमलव प्रसार का अंत हो जाता है। हम ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार को **सांत (terminating)** दशमलव कहते हैं।

**स्थिति (ii) : शेष कभी भी शून्य नहीं होता है।**

$\frac{1}{3}$  और  $\frac{1}{7}$  वाले उदाहरणों में, हम यह पाते हैं कि कुछ चरणों के बाद शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है, जिससे दशमलव प्रसार निरंतर जारी रहता है। दूसरे शब्दों में, हमें भागफल में अंकों का एक पुनरावृत्ति खंड प्राप्त होता है। तब हम यह कहते हैं कि यह प्रसार **अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring)** है। उदाहरण के लिए,  $\frac{1}{3} = 0.3333...$  और  $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$  है।

यह दिखाने के लिए कि  $\frac{1}{3}$  के भागफल में 3 की पुनरावृत्ति होती है, हम इसे  $0.\overline{3}$  के रूप में लिखते हैं। इसी प्रकार, क्योंकि  $\frac{1}{7}$  के भागफल में अंकों के खंड 142857 की पुनरावृत्ति होती है, इसलिए हम  $\frac{1}{7}$  को  $0.\overline{142857}$  के रूप में लिखते हैं, जहाँ अंकों के ऊपर लगाया गया दंड, अंकों के उस खंड को प्रकट करता है जिसकी पुनरावृत्ति होती है। साथ ही,  $3.57272...$  को  $3.\overline{572}$  के रूप में लिखा जा सकता है। अतः इन सभी उदाहरणों से अनवसानी आवर्ती (पुनरावृत्ति) दशमलव प्रसार प्राप्त होते हैं। इस तरह हम यह देखते हैं कि परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के केवल दो विकल्प होते हैं या तो वे सांत होते हैं या अनवसानी (असांत) आवर्ती होते हैं।

इसके विपरीत अब आप यह मान लीजिए कि संख्या रेखा पर चलने पर आपको 3.142678 जैसी संख्याएँ प्राप्त होती हैं जिसका दशमलव प्रसार सांत होता है या  $1.272727\dots$ , अर्थात्  $1.\overline{27}$  जैसी संख्या प्राप्त होती है, जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती है। इससे क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक परिमेय संख्या है? इसका उत्तर है, हाँ! इसे हम सिद्ध नहीं करेंगे, परन्तु कुछ उदाहरण लेकर इस तथ्य को प्रदर्शित करेंगे। सांत स्थितियाँ तो सरल हैं।

**उदाहरण 6 :** दिखाइए कि 3.142678 एक परिमेय संख्या है। दूसरे शब्दों, में 3.142678 को  $\frac{p}{q}$  के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।

**हल :** यहाँ  $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$  है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करें, जबकि दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती हो।

**उदाहरण 7 :** दिखाइए कि  $0.3333\dots = 0.\overline{3}$  को  $\frac{p}{q}$  के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।

**हल :** क्योंकि हम यह नहीं जानते हैं कि  $0.\overline{3}$  क्या है, अतः आइए इसे हम 'x' मान लें।  

$$x = 0.3333\dots$$

अब, यही वह स्थिति है जहाँ हमें कुछ युक्ति लगानी पड़ेगी।

$$\text{यहाँ,} \quad 10x = 10 \times (0.333\dots) = 3.333\dots$$

$$\text{अब,} \quad 3.333\dots = 3 + x, \text{ चूँकि } x = 0.3333\dots \text{ है।}$$

$$\text{इसलिए,} \quad 10x = 3 + x$$

$x$  के लिए हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$9x = 3$$

$$\text{अर्थात्,} \quad x = \frac{1}{3}$$

**उदाहरण 8 :** दिखाइए कि  $1.272727\dots = 1.\overline{27}$  को  $\frac{p}{q}$  के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।

**हल :** मान लीजिए  $x = 1.272727...$  है। क्योंकि यहाँ दो अंकों की पुनरावृत्ति है, इसलिए हम  $x$  को 100 से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$100x = 127.2727...$$

अतः,

$$100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

इसलिए,

$$100x - x = 126, \text{ अर्थात् } 99x = 126$$

अर्थात्,

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

आप इसके इस विलोम की जाँच कर सकते हैं कि  $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$  है।

**उदाहरण 9 :** दिखाइए कि  $0.2353535... = 0.2\overline{35}$  को  $\frac{p}{q}$  के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।

**हल :** मान लीजिए  $x = 0.2\overline{35}$  है। यहाँ यह देखिए कि 2 की पुनरावृत्ति नहीं होती है, परन्तु खंड 35 की पुनरावृत्ति होती है। क्योंकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है, इसलिए हम  $x$  को 100 से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$100x = 23.53535...$$

इसलिए,

$$100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

अतः,

$$99x = 23.3$$

अर्थात्,

$$99x = \frac{233}{10}, \text{ जिससे } x = \frac{233}{990} \text{ हुआ।}$$

आप इसके विलोम, अर्थात्  $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$  की भी जाँच कर सकते हैं।

अतः अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली प्रत्येक संख्या को  $\frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं। आइए हम अपने परिणामों को संक्षेप में इस प्रकार व्यक्त करें:

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, एक परिमेय संख्या होती है।

अब हम यह जानते हैं कि परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार क्या हो सकता है। अब प्रश्न उठता है कि अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार क्या होता है? ऊपर बताए गए गुण के अनुसार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि इन संख्याओं के दशमलव प्रसार **अनवसानी अनावर्ती (non-terminating non-recurring)** हैं। अतः ऊपर परिमेय संख्याओं के लिए बताए गए गुण के समान अपरिमेय संख्याओं का गुण यह होता है:

एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। विलोमतः वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है, अपरिमेय होती है।

पिछले अनुच्छेद में हमने एक अपरिमेय संख्या  $0.10110111011110\dots$  की चर्चा की थी। मान लीजिए कि  $s = 0.10110111011110\dots$  है। ध्यान दीजिए कि यह अनवसानी अनावर्ती है। अतः ऊपर बताए गए गुण के अनुसार यह अपरिमेय है। साथ ही, यह भी ध्यान दीजिए कि आप  $s$  के समरूप अपरिमित रूप से अनेक अपरिमेय संख्याएँ जनित कर सकते हैं।

सुप्रसिद्ध अपरिमेय संख्याओं  $\sqrt{2}$  और  $\pi$  के संबंध में आप क्या जानते हैं? यहाँ कुछ चरण तक उनके दशमलव प्रसार दिए गए हैं:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096\dots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950\dots$$

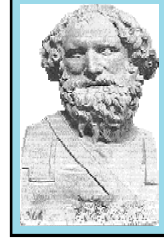
(ध्यान दीजिए कि हम प्रायः  $\frac{22}{7}$  को  $\pi$  का एक सन्निकट मान मानते हैं, जबकि  $\pi \neq \frac{22}{7}$  है।)

वर्षों से गणितज्ञों ने अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंकों को उत्पन्न करने की विभिन्न तकनीक विकसित की हैं। उदाहरण के लिए, संभवतः आपने विभाजन विधि (division method) से  $\sqrt{2}$  के दशमलव प्रसार में अंकों को ज्ञात करना अवश्य ही सीखा होगा। यह एक रोचक बात है कि सुल्बसूत्रों (जीवा-नियमों) में, जो वैदिक युग (800 ई.पू. - 500 ई.पू.) के गणितीय ग्रंथ हैं, हमें  $\sqrt{2}$  का एक सन्निकट मान प्राप्त होता है, जो यह है:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ध्यान दीजिए कि यह वही है जो कि ऊपर प्रथम पाँच दशमलव स्थानों तक के लिए दिया गया है।  $\pi$  के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंक प्राप्त करने का इतिहास काफी रोचक रहा है।

यूनान का प्रबुद्ध व्यक्ति आर्कमिडीज ही वह पहला व्यक्ति था जिसने  $\pi$  के दशमलव प्रसार में अंकों को अभिकलित किया था। उसने यह दिखाया कि  $3.140845 < \pi < 3.142857$  होता है। आर्यभट्ट (476–550 ई०) ने जो एक महान भारतीय गणितज्ञ और खगोलविद थे, चार दशमलव स्थानों तक शुद्ध  $\pi$  का मान (3.1416) ज्ञात किया था। उच्च चाल कंप्यूटरों और उन्नत कलन विधियों (algorithms) का प्रयोग करके 1.24 ट्रिलियन से भी अधिक दशमलव स्थानों तक  $\pi$  का मान अभिकलित किया जा चुका है।



**आर्कमिडीज**  
( 287 सा० यु० पू०–212 सा० यु० पू० )  
आकृति 1.10

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार अपरिमेय संख्याएँ प्राप्त की जाती हैं।

**उदाहरण 10 :**  $\frac{1}{7}$  और  $\frac{2}{7}$  के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

**हल :** हमने देखा है कि  $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$  है।

अतः हम सरलता से यह परिकलित कर सकते हैं कि  $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$  है।

$\frac{1}{7}$  और  $\frac{2}{7}$  के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, हम एक ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो इन दोनों के बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती होती है। इस प्रकार की आप अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार की संख्या का एक उदाहरण  $0.150150015000150000\dots$  है।

### प्रश्नावली 1.3

- निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है :

(i)  $\frac{36}{100}$

(ii)  $\frac{1}{11}$

(iii)  $4\frac{1}{8}$

(iv)  $\frac{3}{13}$

(v)  $\frac{2}{11}$

(vi)  $\frac{329}{400}$

- आप जानते हैं कि  $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$  है। वास्तव में, लंबा भाग दिए बिना क्या आप यह बता सकते

[संकेत :  $\frac{1}{7}$  का मान ज्ञात करते समय शेषफलों का अध्ययन सावधानी से कीजिए]

- ## 1.4 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि परिमेय संख्याएँ योग और गुणन के क्रमविनिमेय (commutative), साहचर्य (associative) और बंटन (distributive) नियमों को संतुष्ट करती हैं और हम यह भी पढ़ चुके हैं कि यदि हम दो परिमेय संख्याओं को जोड़ें, घटाएँ, गुणा करें या (शून्य छोड़कर) भाग दें, तब भी हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है [अर्थात् जोड़, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत (closed) होती हैं]। यहाँ

हम यह भी देखते हैं कि अपरिमेय संख्याएँ भी योग और गुणन के क्रमविनिमेय, साहचर्य और बंटन-नियमों को संतुष्ट करती हैं। परन्तु, अपरिमेय संख्याओं के योग, अंतर, भागफल और गुणनफल सदा अपरिमेय नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए,  $(\sqrt{2}) - (\sqrt{2}), (\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3})$  और

$$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} \text{ परिमेय संख्याएँ हैं।}$$

आइए अब यह देखें कि जब एक परिमेय संख्या में अपरिमेय संख्या जोड़ते हैं और एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से गुणा करते हैं, तो क्या होता है।

उदाहरण के लिए,  $\sqrt{3}$  एक अपरिमेय संख्या है। तब  $2 + \sqrt{3}$  और  $2\sqrt{3}$  क्या हैं? क्योंकि  $\sqrt{3}$  एक अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार है, इसलिए यही बात  $2 + \sqrt{3}$  और  $2\sqrt{3}$  के लिए भी सत्य है। अतः  $2 + \sqrt{3}$  और  $2\sqrt{3}$  भी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

**उदाहरण 11 :** जाँच कीजिए कि  $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2} + 21, \pi - 2$  अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं।

**हल :**  $\sqrt{5} = 2.236..., \sqrt{2} = 1.4142..., \pi = 3.1415...$  हैं।

$$\text{तब } 7\sqrt{5} = 15.652..., \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304... \text{ हैं।}$$

$$\sqrt{2} + 21 = 22.4142..., \pi - 2 = 1.1415...$$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव हैं। अतः ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

**उदाहरण 12 :**  $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$  और  $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$  को जोड़िए।

$$\begin{aligned} \text{हल : } (2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) &= (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \\ &= (2 + 1)\sqrt{2} + (5 - 3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

**उदाहरण 13 :**  $6\sqrt{5}$  को  $2\sqrt{5}$  से गुणा कीजिए।

$$\text{हल : } 6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$$

**उदाहरण 14 :**  $8\sqrt{15}$  को  $2\sqrt{3}$  से भाग दीजिए।

$$\text{हल : } 8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3 \times 5}}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$$

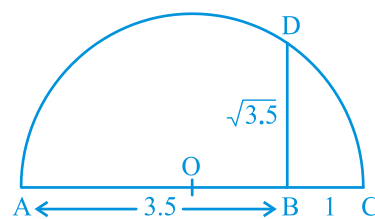
इन उदाहरणों से आप निम्नलिखित तथ्यों के होने की आशा कर सकते हैं जो सत्य हैं:

- एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का जोड़ या घटाना अपरिमेय होता है।
- एक अपरिमेय संख्या के साथ एक शून्येतर (non-zero) परिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल अपरिमेय होता है।
- यदि हम दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़ें, घटाएँ, गुणा करें या एक अपरिमेय संख्या को दूसरी अपरिमेय संख्या से भाग दें, तो परिणाम परिमेय या अपरिमेय कुछ भी हो सकता है।

अब हम अपनी चर्चा वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल निकालने की संक्रिया (operation) पर करेंगे। आपको याद होगा कि यदि  $a$  एक प्राकृत संख्या है, तब  $\sqrt{a} = b$  का अर्थ है  $b^2 = a$  और  $b > 0$ । यही परिभाषा धनात्मक वास्तविक संख्याओं पर भी लागू की जा सकती है।

मान लीजिए  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है। तब  $\sqrt{a} = b$  का अर्थ है  $b^2 = a$  और  $b > 0$  है।

अनुच्छेद 1.2 में, हमने यह देखा है कि किस प्रकार संख्या रेखा पर  $\sqrt{n}$  को, जहाँ  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है, निरूपित किया जाता है। अब हम यह दिखाएँगे कि किस प्रकार  $\sqrt{x}$  को, जहाँ  $x$  एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या है, ज्यामितीय (geometrically) रूप से ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, आइए हम इसे  $x = 3.5$  के लिए प्राप्त करें। अर्थात् हम  $\sqrt{3.5}$  को ज्यामितीय रूप से प्राप्त करेंगे।

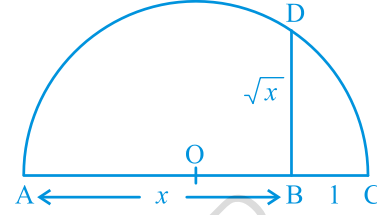


आकृति 1.11

एक दी हुई रेखा पर एक स्थिर बिन्दु A से 3.5 एकक की दूरी पर चिह्न लगाने पर एक ऐसा बिन्दु B प्राप्त होता है, जिससे कि  $AB = 3.5$  एकक (देखिए आकृति 1.11)। B से 1 एकक की दूरी पर चिह्न लगाइए और इस नए बिन्दु को C मान लीजिए। AC का मध्य-बिन्दु ज्ञात

कीजिए और उस बिंदु को O मान लीजिए। O को केन्द्र और OC को त्रिज्या मानकर एक अर्धवृत्त बनाइए। AC पर लंब एक ऐसी रेखा खींचिए जो B से होकर जाती हो और अर्धवृत्त को D पर काटती हो। तब  $BD = \sqrt{3.5}$  है।

अधिक व्यापक रूप में,  $\sqrt{x}$  का मान ज्ञात करने के लिए, जहाँ  $x$  एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, एक ऐसा बिंदु B लेते हैं, जिससे कि  $AB = x$  एकक हो और जैसा कि आकृति 1.12 में दिखाया गया है, एक ऐसा बिंदु C लीजिए जिससे कि  $BC = 1$  एकक हो। तब, जैसा कि हमने स्थिति  $x = 3.5$  के लिए किया



आकृति 1.12

है, हमें  $BD = \sqrt{x}$  प्राप्त होगा (आकृति 1.12)।

हम इस परिणाम को पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि आकृति 1.12 में,  $\triangle OBD$  एक समकोण त्रिभुज है। वृत्त की त्रिज्या  $\frac{x+1}{2}$  एकक है।

अतः,  $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$  एकक

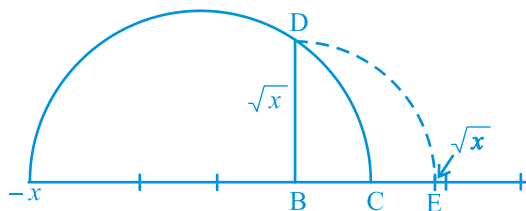
अब,  $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$ .

अतः, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

इससे यह पता चलता है कि  $BD = \sqrt{x}$  है।

इस रचना से यह दर्शाने की एक चित्रीय और ज्यामितीय विधि प्राप्त हो जाती है कि सभी वास्तविक संख्याओं  $x > 0$  के लिए,  $\sqrt{x}$  का अस्तित्व है। यदि हम संख्या रेखा पर  $\sqrt{x}$  की स्थिति जानना चाहते हैं, तो आइए हम रेखा BC को संख्या रेखा मान लें, B को शून्य मान लें और C को 1 मान लें, आदि-आदि। B को केन्द्र और BD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को E पर काटता है (देखिए आकृति 1.13)। तब E,  $\sqrt{x}$  निरूपित करता है।



आकृति 1.13

अब हम वर्गमूल की अवधारणा को घनमूलों, चतुर्थमूलों और व्यापक रूप से  $n$ वें मूलों, जहाँ  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है, पर लागू करना चाहेंगे। आपको याद होगा कि पिछली कक्षाओं में आप वर्गमूलों और घनमूलों का अध्ययन कर चुके हैं।

$\sqrt[3]{8}$  क्या है? हम जानते हैं कि यह एक धनात्मक संख्या है जिसका घन 8 है, और आपने यह अवश्य अनुमान लगा लिया होगा कि  $\sqrt[3]{8} = 2$  है। आइए हम  $\sqrt[3]{243}$  का मान ज्ञात करें। क्या आप एक ऐसी संख्या  $b$  जानते हैं जिससे कि  $b^3 = 243$  हो? उत्तर है 3, अतः,  $\sqrt[3]{243} = 3$  हुआ।

इन उदाहरणों से क्या आप  $\sqrt[n]{a}$  परिभाषित कर सकते हैं, जहाँ  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है और  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है?

मान लीजिए  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है और  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है। तब  $\sqrt[n]{a} = b$ , जबकि  $b^n = a$  और  $b > 0$ । ध्यान दीजिए कि  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$  आदि में प्रयुक्त प्रतीक “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” को करणी चिह्न (radical sign) कहा जाता है।

अब हम यहाँ वर्गमूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities) दे रहे हैं जो विभिन्न विधियों से उपयोगी होती हैं। पिछली कक्षाओं में आप इनमें से कुछ सर्वसमिकाओं से परिचित हो चुके हैं। शेष सर्वसमिकाएँ वास्तविक संख्याओं के योग पर गुणन के बंटन नियम से और सर्वसमिका  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$  से, जहाँ  $x$  और  $y$  वास्तविक संख्याएँ हैं, प्राप्त होती हैं।

मान लीजिए  $a$  और  $b$  धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। तब,

- |                                                            |                                                       |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$                         | (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ |
| (iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ | (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$         |

$$(v) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$$

$$(vi) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

आइए हम इन सर्वसमिकाओं की कुछ विशेष स्थितियों पर विचार करें।

**उदाहरण 15 :** निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए:

$$(i) (5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$$

$$(ii) (5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$$

$$(iii) (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$$

$$(iv) (\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$$

$$\text{हल : (i) } (5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$$

$$(ii) (5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$$

$$(iii) (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$$

$$(iv) (\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = 11 - 7 = 4$$

**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में दिए गए शब्द “सरल करना” का अर्थ यह है कि व्यंजक को परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के योग के रूप में लिखना चाहिए।

हम इस समस्या पर विचार करते हुए कि  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  संख्या रेखा पर कहाँ स्थित है, इस अनुच्छेद को यहीं समाप्त करते हैं। हम जानते हैं कि यह एक अपरिमेय है। यदि हर एक परिमेय संख्या हो, तो इसे सरलता से हल किया जा सकता है। आइए हम देखें कि क्या हम इसके हर का परिमेयकरण (rationalise) कर सकते हैं, अर्थात् क्या हर को एक परिमेय संख्या में परिवर्तित कर सकते हैं। इसके लिए हमें वर्गमूलों से संबंधित सर्वसमिकाओं की आवश्यकता होती है। आइए हम देखें कि इसे कैसे किया जा सकता है।

**उदाहरण 16 :**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  के हर का परिमेयकरण कीजिए।

**हल :** हम  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  को एक ऐसे तुल्य व्यंजक के रूप में लिखना चाहते हैं, जिसमें हर एक परिमेय संख्या

हो। हम जानते हैं कि  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$  परिमेय है। हम यह भी जानते हैं कि  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  को  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  से गुणा करने पर हमें एक तुल्य व्यंजक प्राप्त होता है, क्योंकि  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$  है। अतः इन दो तथ्यों को एक साथ लेने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

इस रूप में  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  को संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण सरल हो जाता है। यह 0 और  $\sqrt{2}$  के मध्य स्थित है।

**उदाहरण 17 :**  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  के हर का परिमेयकरण कीजिए।

**हल :** इसके लिए हम ऊपर दी गई सर्वसमिका (iv) का प्रयोग करते हैं।  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  को  $2 - \sqrt{3}$  से गुणा करने और भाग देने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

**उदाहरण 18 :**  $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$  के हर का परिमेयकरण कीजिए।

**हल :** यहाँ हम ऊपर दी गई सर्वसमिका (iii) का प्रयोग करते हैं।

$$\text{अतः, } \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3 - 5} = \left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

**उदाहरण 19 :**  $\frac{1}{7 + 3\sqrt{2}}$  के हर का परिमेयकरण कीजिए।

$$\text{हल : } \frac{1}{7 + 3\sqrt{2}} = \frac{1}{7 + 3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7 - 3\sqrt{2}}{7 - 3\sqrt{2}}\right) = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{49 - 18} = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{31}$$

अतः जब एक व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला एक पद होता है (या कोई संख्या करणी चिह्न के अंदर हो), तब इसे एक ऐसे तुल्य व्यंजक में, जिसका हर एक परिमेय संख्या है, रूपांतरित करने की क्रियाविधि को *हर का परिमेयकरण (rationalising the denominator)* कहा जाता है।

### प्रश्नावली 1.4

1. बताइए नीचे दी गई संख्याओं में कौन-कौन परिमेय हैं और कौन-कौन अपरिमेय हैं:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad 2 - \sqrt{5} & \text{(ii)} \quad (3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23} \quad \text{(iii)} \quad \frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} \\ \text{(iv)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{(v)} \quad 2\pi \end{array}$$

2. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2}) & \text{(ii)} \quad (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) \\ \text{(iii)} \quad (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 & \text{(iv)} \quad (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \end{array}$$

3. आपको याद होगा कि  $\pi$  को एक वृत्त की परिधि (मान लीजिए  $c$ ) और उसके व्यास (मान लीजिए  $d$ ) के अनुपात से परिभाषित किया जाता है, अर्थात्  $\pi = \frac{c}{d}$  है। यह इस तथ्य का अंतर्विरोध करता हुआ प्रतीत होता है कि  $\pi$  अपरिमेय है। इस अंतर्विरोध का निराकरण आप किस प्रकार करेंगे?

4. संख्या रेखा पर  $\sqrt{9.3}$  को निरूपित कीजिए।

5. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} \quad \frac{1}{\sqrt{7}} & \text{(ii)} \quad \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} & \text{(iii)} \quad \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \end{array}$$

### 1.5 वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक-नियम

क्या आपको याद है कि निम्नलिखित का सरलीकरण किस प्रकार करते हैं?

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad 17^2 \cdot 17^5 = & \text{(ii)} \quad (5^2)^7 = \\ \text{(iii)} \quad \frac{23^{10}}{23^7} = & \text{(iv)} \quad 7^3 \cdot 9^3 = \end{array}$$

क्या आपने निम्नलिखित उत्तर प्राप्त किए थे?

$$(i) 17^2 \cdot 17^5 = 17^7$$

$$(ii) (5^2)^7 = 5^{14}$$

$$(iii) \frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$$

$$(iv) 7^3 \cdot 9^3 = 63^3$$

इन उत्तरों को प्राप्त करने के लिए, आपने निम्नलिखित घातांक-नियमों (laws of exponents) का प्रयोग अवश्य किया होगा, [यहाँ  $a$ ,  $n$  और  $m$  प्राकृत संख्याएँ हैं। आपको याद होगा कि  $a$  को आधार (base) और  $m$  और  $n$  को घातांक (exponents) कहा जाता है।] जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं:

$$(i) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ii) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(iii) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$$

$$(iv) a^m b^m = (ab)^m$$

$(a)^0$  क्या है? इसका मान 1 है। आप यह अध्ययन पहले ही कर चुके हैं कि  $(a)^0 = 1$  होता है। अतः, (iii) को लागू करके, आप  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  प्राप्त कर सकते हैं। अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं।

अतः, उदाहरण के लिए :

$$(i) 17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$$

$$(ii) (5^2)^{-7} = 5^{-14}$$

$$(iii) \frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$$

$$(iv) (7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$$

मान लीजिए हम निम्नलिखित अभिकलन करना चाहते हैं :

$$(i) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{3^5}\right)^4$$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$$

$$(iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$$

हम ये अभिकलन किस प्रकार करेंगे? यह देखा गया है कि वे घातांक-नियम, जिनका अध्ययन हम पहले कर चुके हैं, उस स्थिति में भी लागू हो सकते हैं, जबकि आधार धनात्मक वास्तविक संख्या हो और घातांक परिमेय संख्या हो (आगे अध्ययन करने पर हम यह देखेंगे

कि ये नियम वहाँ भी लागू हो सकते हैं, जहाँ घातांक वास्तविक संख्या हो।)। परन्तु, इन नियमों का कथन देने से पहले और इन नियमों को लागू करने से पहले, यह समझ लेना आवश्यक है कि, उदाहरण के लिए,  $4^{\frac{3}{2}}$  क्या है। अतः, इस संबंध में हमें कुछ करना होगा।

$\sqrt[n]{a}$  को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है, जहाँ  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है:

मान लीजिए  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है और  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है। तब  $\sqrt[n]{a} = b$  होता है, जबकि  $b^n = a$  और  $b > 0$  हो।

घातांकों की भाषा में, हम  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  के रूप में परिभाषित करते हैं। उदाहरण के लिए,  $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$  है। अब हम  $4^{\frac{3}{2}}$  को दो विधियों से देख सकते हैं।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

अतः, हमें यह परिभाषा प्राप्त होती है:

मान लीजिए  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है तथा  $m$  और  $n$  ऐसे पूर्णांक हैं कि 1 के अतिरिक्त इनका कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है और  $n > 0$  है। तब,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

अतः वांछित विस्तृत घातांक नियम ये हैं:

मान लीजिए  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है और  $p$  और  $q$  परिमेय संख्याएँ हैं। तब,

$$(i) \quad a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (ii) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (iv) \quad a^p b^p = (ab)^p$$

अब आप पहले पूछे गए प्रश्नों का उत्तर ज्ञात करने के लिए इन नियमों का प्रयोग कर सकते हैं।

**उदाहरण 20 :** सरल कीजिए: (i)  $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$$(ii) \quad \left(\frac{1}{3^5}\right)^4$$

$$(iii) \quad \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$$

$$(iv) \quad 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$$

हल :

$$(i) \quad 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2 \quad (ii) \quad \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$$

$$(iii) \quad \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}} \quad (iv) \quad 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$$

## प्रश्नावली 1.5

- ज्ञात कीजिए: (i)  $64^{\frac{1}{2}}$  (ii)  $32^{\frac{1}{5}}$  (iii)  $125^{\frac{1}{3}}$
- ज्ञात कीजिए: (i)  $9^{\frac{3}{2}}$  (ii)  $32^{\frac{2}{5}}$  (iii)  $16^{\frac{3}{4}}$  (iv)  $125^{\frac{-1}{3}}$
- सरल कीजिए: (i)  $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$  (ii)  $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$  (iii)  $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$  (iv)  $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

## 1.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

- संख्या  $r$  को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।
- संख्या  $s$  को अपरिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे  $\frac{p}{q}$  के रूप में न लिखा जा सकता हो, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं और  $q \neq 0$  है।
- एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, परिमेय होती है।
- एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, अपरिमेय होती है।
- सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।

6. यदि  $r$  परिमेय है और  $s$  अपरिमेय है, तब  $r+s$  और  $r-s$  अपरिमेय संख्याएँ होती हैं तथा  $rs$  और  $\frac{r}{s}$  अपरिमेय संख्याएँ होती हैं यदि  $r \neq 0$  है।

7. धनात्मक वास्तविक संख्याओं  $a$  और  $b$  के संबंध में निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ लागू होती हैं:

$$(i) \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$(ii) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(iii) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \quad (iv) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

$$(v) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

8.  $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$  के हर का परिमेयकरण करने के लिए, इसे हम  $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$  से गुणा करते हैं, जहाँ  $a$  और  $b$  पूर्णांक हैं।

9. मान लीजिए  $a > 0$  एक वास्तविक संख्या है और  $p$  और  $q$  परिमेय संख्याएँ हैं। तब,

$$(i) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(ii) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(iv) a^p b^p = (ab)^p$$



0963CH02

## अध्याय 2

### बहुपद

#### 2.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप बीजीय व्यंजकों और उनके जोड़, घटाना, गुणा और भाग का अध्ययन कर चुके हैं। वहाँ आप यह भी अध्ययन कर चुके हैं कि किस प्रकार कुछ बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन किया जाता है। आप निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं और उनका गुणनखंडन में उपयोग का पुनःस्मरण कर सकते हैं:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

और,

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

इस अध्याय में, सबसे पहले एक विशेष प्रकार के बीजीय व्यंजक का, जिसे बहुपद (*polynomial*) कहा जाता है, और उससे संबद्ध शब्दावली (*terminology*) का अध्ययन करेंगे। यहाँ हम शेषफल प्रमेय (*Remainder Theorem*), गुणनखंड प्रमेय (*Factor Theorem*) और बहुपदों के गुणनखंडन में इनके उपयोग का भी अध्ययन करेंगे। इनके अतिरिक्त, हम कुछ और बीजीय सर्वसमिकाओं का और कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनखंडन करने तथा मान निकालने के बारे में भी अध्ययन करेंगे।

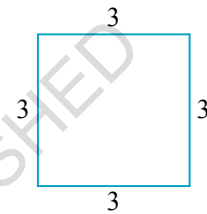
#### 2.2 एक चर वाले बहुपद

सबसे पहले हम याद करेंगे कि चर को एक प्रतीक से प्रकट किया जाता है जो कोई भी वास्तविक मान धारण कर सकता है। हम चरों को अक्षरों  $x, y, z$ , आदि से प्रकट करते हैं। ध्यान रहे कि  $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$  बीजीय व्यंजक हैं। ये सभी व्यंजक,  $(\text{एक अचर}) \times x$  के रूप के

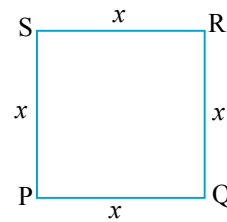
हैं। अब मान लीजिए कि हम एक ऐसा व्यंजक लिखना चाहते हैं जो कि (एक अक्षर)  $\times$  (एक चर) है और हम यह नहीं जानते कि अक्षर क्या है। ऐसी स्थितियों में, हम अक्षर को  $a, b, c$  आदि से प्रकट करते हैं। अतः व्यंजक, मान लीजिए,  $ax$  होगा।

फिर भी, अक्षर को प्रकट करने वाले अक्षर और चर को प्रकट करने वाले अक्षर में अंतर होता है। एक विशेष स्थिति में अक्षरों के मान सदा समान बने रहते हैं। अर्थात् एक दी हुई समस्या में अक्षर के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। परन्तु चर के मान में परिवर्तन होता रहता है।

अब 3 एकक की भुजा वाला एक वर्ग लीजिए (देखिए आकृति 2.1)। इसका परिमाप (perimeter) क्या है? आप जानते हैं कि वर्ग का परिमाप चारों भुजाओं की लंबाइयों का जोड़ होता है। यहाँ प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 एकक है। अतः इसका परिमाप  $4 \times 3$  अर्थात् 12 एकक है। यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा 10 एकक हो, तो परिमाप क्या होगा? परिमाप  $4 \times 10$  अर्थात् 40 एकक होगा। यदि प्रत्येक भुजा की लंबाई  $x$  एकक हो (देखिए आकृति 2.2), तो परिमाप  $4x$  एकक होता है। अतः हम यह पाते हैं कि भुजा की लंबाई में परिवर्तन होने पर परिमाप बदल जाता है।



आकृति 2.1



आकृति 2.2

क्या आप वर्ग PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? यह  $x \times x = x^2$  वर्ग एकक (मात्रक) है।  $x^2$  एक बीजीय व्यंजक है। आप  $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$  जैसे अन्य बीजीय व्यंजकों से भी परिचित हैं। ध्यान दीजिए कि अभी तक लिए गए सभी बीजीय व्यंजकों में चर के घातांक पूर्ण संख्या ही रहे हैं। इस रूप के व्यंजकों को एक चर वाला बहुपद (polynomials in one variable) कहा जाता है। ऊपर दिए गए उदाहरणों में चर  $x$  है। उदाहरण के लिए,  $x^3 - x^2 + 4x + 7$ , चर  $x$  में एक बहुपद है। इसी प्रकार  $3y^2 + 5y$ , चर  $y$  में एक बहुपद है और  $t^2 + 4$ , चर  $t$  में एक बहुपद है।

बहुपद  $x^2 + 2x$  में व्यंजक  $x^2$  और  $2x$  बहुपद के पद (terms) कहे जाते हैं। इसी प्रकार, बहुपद  $3y^2 + 5y + 7$  में तीन पद अर्थात्  $3y^2, 5y$  और  $7$  हैं। क्या आप बहुपद  $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$  के पद लिख सकते हैं? इस बहुपद के चार पद अर्थात्  $-x^3, 4x^2, 7x$  और  $-2$  हैं।

बहुपद के प्रत्येक पद का एक गुणांक (coefficient) होता है। अतः,  $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$  में  $x^3$  का गुणांक  $-1$  है,  $x^2$  का गुणांक  $4$  है,  $x$  का गुणांक  $7$  है और  $x^0$  का गुणांक  $-2$  है।

(स्मरण रहे कि  $x^0 = 1$  है)। क्या आप जानते हैं कि  $x^2 - x + 7$  में  $x$  का गुणांक क्या है?  $x$  का गुणांक  $-1$  है।

ध्यान रहे कि 2 भी एक बहुपद है। वस्तुतः 2,  $-5$ , 7 आदि अचर बहुपदों (constant polynomials) के उदाहरण हैं। अचर बहुपद 0 को **शून्य बहुपद** कहा जाता है। साथ ही, जैसा कि उच्च कक्षाओं में आप देखेंगे, सभी बहुपदों के संग्रह में शून्य बहुपद एक अति महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

अब आप  $x + \frac{1}{x}$ ,  $\sqrt{x} + 3$  और  $\sqrt[3]{y} + y^2$  जैसे बीजीय व्यंजक लीजिए। क्या आप जानते हैं कि आप  $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$  लिख सकते हैं? यहाँ दूसरे पद अर्थात्  $x^{-1}$  का घातांक  $-1$  है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है। अतः यह बीजीय व्यंजक एक बहुपद नहीं है। साथ ही,  $\sqrt{x} + 3$  को  $x^{\frac{1}{2}} + 3$  के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ  $x$  का घातांक  $\frac{1}{2}$  है, जो कि एक पूर्ण संख्या नहीं है। तो क्या आप यह समझते हैं कि  $\sqrt{x} + 3$  एक बहुपद है? नहीं, यह एक बहुपद नहीं है। क्या  $\sqrt[3]{y} + y^2$  एक बहुपद है? यह भी एक बहुपद नहीं है। (क्यों?)

यदि एक बहुपद में चर  $x$  हो, तो हम बहुपद को  $p(x)$  या  $q(x)$  या  $r(x)$ , आदि से प्रकट कर सकते हैं, उदाहरण के लिए, हम यह लिख सकते हैं:

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$q(x) = x^3 - 1$$

$$r(y) = y^3 + y + 1$$

$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

बहुपद में परिमित संख्या में कितने भी पद हो सकते हैं। उदाहरण के लिए,  $x^{150} + x^{149} + \dots + x^2 + x + 1$  एक बहुपद है, जिसमें 151 पद हैं।

अब बहुपद  $2x$ ,  $2$ ,  $5x^3$ ,  $-5x^2$ ,  $y$  और  $u^4$  लीजिए। क्या आप देखते हैं कि इन बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का केवल एक पद है। केवल एक पद वाले बहुपद को **एकपदी** (monomial) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'mono' का अर्थ है “एक”)

अब नीचे दिए गए बहुपदों में से प्रत्येक पर ध्यान दीजिए:

$$p(x) = x + 1, \quad q(x) = x^2 - x, \quad r(y) = y^{30} + 1, \quad t(u) = u^{43} - u^2$$

यहाँ प्रत्येक बहुपद में कितने पद हैं? इनमें से प्रत्येक बहुपद में केवल दो पद हैं। केवल दो पदों वाले बहुपदों को **द्विपद** (binomials) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द ‘bi’ का अर्थ है “दो”)

इसी प्रकार, केवल तीन पदों वाले बहुपदों को त्रिपद (*trinomials*) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'tri' का अर्थ है "तीन")। त्रिपद के कुछ उदाहरण ये हैं:

$$p(x) = x + x^2 + \pi,$$

$$q(x) = \sqrt{2} + x - x^2,$$

$$r(u) = u + u^2 - 2,$$

$$t(y) = y^4 + y + 5$$

अब बहुपद  $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$  को देखिए। इसमें  $x$  की अधिकतम घात वाला पद कौन-सा है? यह पद  $3x^7$  है। इस पद में  $x$  का घातांक 7 है। इसी प्रकार, बहुपद  $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$  में  $y$  की अधिकतम घात वाला पद  $5y^6$  है और इस पद में  $y$  का घातांक 6 है। एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को बहुपद की घात (*degree of the polynomial*) कहा जाता है। अतः बहुपद  $3x^7 - 4x^6 + x + 9$  की घात 7 है और बहुपद  $5y^6 - 4y^2 - 6$  की घात 6 है। एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।

**उदाहरण 1 :** नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए:

(i)  $x^5 - x^4 + 3$

(ii)  $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$

(iii) 2

**हल :** (i) चर का अधिकतम घातांक 5 है। अतः बहुपद की घात 5 है।

(ii) चर का अधिकतम घातांक 8 है। अतः बहुपद की घात 8 है।

(iii) यहाँ केवल एक पद 2 है जिसे  $2x^0$  के रूप में लिखा जा सकता है। अतः  $x$  का घातांक 0 है। इसलिए, बहुपद की घात 0 है।

अब बहुपदों  $p(x) = 4x + 5$ ,  $q(y) = 2y$ ,  $r(t) = t + \sqrt{2}$  और  $s(u) = 3 - u$  को लीजिए। क्या इनमें कोई सर्वनिष्ठ तथ्य देखने को मिलता है? इनमें प्रत्येक बहुपद की घात एक है। एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद (*linear polynomial*) कहा जाता है। एक चर में कुछ और रैखिक बहुपद  $2x - 1$ ,  $\sqrt{2}y + 1$  और  $2 - u$  हैं। अब क्या  $x$  में तीन पदों वाला एक रैखिक बहुपद हम ज्ञात कर सकते हैं? हम एक ऐसा रैखिक बहुपद ज्ञात नहीं कर सकते, क्योंकि  $x$  में एक रैखिक बहुपद में अधिक से अधिक दो पद हो सकते हैं। अतः  $x$  में कोई भी रैखिक बहुपद  $ax + b$  के रूप का होगा, जहाँ  $a$  और  $b$  अचर हैं और  $a \neq 0$  है। (क्यों?) इसी प्रकार  $ay + b$ ,  $y$  में एक रैखिक बहुपद है।

अब आप निम्नलिखित बहुपदों को लीजिए:

$$2x^2 + 5, 5x^2 + 3x + \pi, x^2 \text{ और } x^2 + \frac{2}{5}x$$

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि ऊपर दिए गए सभी बहुपद घात 2 वाले हैं? घात 2 वाले बहुपद को द्विघाती या द्विघात बहुपद (*quadratic polynomial*) कहा जाता है।

द्विघाती बहुपद के कुछ उदाहरण  $5 - y^2$ ,  $4y + 5y^2$  और  $6 - y - y^2$  हैं। क्या आप एक चर में चार अलग-अलग पदों वाले एक द्विघाती बहुपद को लिख सकते हैं? आप देखेंगे कि एक चर में एक द्विघाती बहुपद के अधिक से अधिक 3 पद होंगे। यदि आप कुछ और द्विघाती पद बना सकें तो आप पाएँगे कि  $x$  में कोई भी द्विघाती बहुपद  $ax^2 + bx + c$  के रूप का होगा, जहाँ  $a \neq 0$  और  $a, b, c$  अचर हैं। इसी प्रकार,  $y$  में द्विघाती बहुपद  $ay^2 + by + c$  के रूप का होगा, जबकि  $a \neq 0$  और  $a, b, c$  अचर हों।

तीन घात वाले बहुपद को *त्रिघाती बहुपद (cubic polynomial)* कहा जाता है।  $x$  में एक त्रिघाती बहुपद के कुछ उदाहरण  $4x^3$ ,  $2x^3 + 1$ ,  $5x^3 + x^2$ ,  $6x^3 - x$ ,  $6 - x^3$  और  $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$  हैं। आपके विचार से एक चर में त्रिघाती बहुपद में कितने पद हो सकते हैं? अधिक से अधिक 4 पद हो सकते हैं। इन्हें  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ  $a \neq 0$  और  $a, b, c$  और  $d$  अचर हैं।

अभी आपने देखा है कि घात 1, घात 2 या घात 3 वाले बहुपद देखने में लगभग समान ही लगते हैं, तो क्या आप एक चर में, घात  $n$  वाला एक बहुपद लिख सकते हैं, जहाँ  $n$  कोई प्राकृत संख्या है? एक चर  $x$  में, घात  $n$  वाला बहुपद निम्न रूप का एक व्यंजक होता है:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

जहाँ  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  अचर हैं और  $a_n \neq 0$  है।

विशेष रूप में, यदि  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$  हो (सभी अचर शून्य हों), तो हमें **शून्य बहुपद (zero polynomial)** प्राप्त होता है, जिसे 0 से प्रकट किया जाता है। शून्य बहुपद की घात क्या होती है? शून्य बहुपद की घात *परिभाषित नहीं* है।

अभी तक हमने केवल एक चर वाले बहुपदों के बारे में अध्ययन किया है। हम एक से अधिक चरों वाले बहुपद भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए,  $x^2 + y^2 + xyz$  (जहाँ चर  $x, y$  और  $z$  हैं) तीन चरों में एक बहुपद है। इसी प्रकार,  $p^2 + q^{10} + r$  (जहाँ चर  $p, q$  और  $r$  हैं),  $u^3 + v^2$  (जहाँ चर  $u$  और  $v$  हैं) क्रमशः तीन चरों और दो चरों में (वाले) बहुपद हैं। इस प्रकार के बहुपदों का विस्तार से अध्ययन हम बाद में करेंगे।

### प्रश्नावली 2.1

- निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i)  $4x^2 - 3x + 7$

(ii)  $y^2 + \sqrt{2}$

(iii)  $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv)  $y + \frac{2}{y}$

(v)  $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में  $x^2$  का गुणांक लिखिए:

(i)  $2 + x^2 + x$       (ii)  $2 - x^2 + x^3$       (iii)  $\frac{\pi}{2}x^2 + x$       (iv)  $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :

(i)  $5x^3 + 4x^2 + 7x$       (ii)  $4 - y^2$   
(iii)  $5t - \sqrt{7}$       (iv) 3

5. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन बहुपद रैखिक हैं, कौन-कौन द्विघाती हैं और कौन-कौन त्रिघाती हैं:

(i)  $x^2 + x$       (ii)  $x - x^3$       (iii)  $y + y^2 + 4$       (iv)  $1 + x$   
(v)  $3t$       (vi)  $t^2$       (vii)  $7x^3$

### 2.3 बहुपद के शून्यक

निम्नलिखित बहुपद लीजिए:

$$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

यदि  $p(x)$  में सर्वत्र  $x$  के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करें, तो हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

अतः, हम यह कह सकते हैं कि  $x = 1$  पर  $p(x)$  का मान 4 है।

इसी प्रकार, 
$$p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2 = -2$$

क्या आप  $p(-1)$  ज्ञात कर सकते हैं?

**उदाहरण 2 :** चरों के दिए गए मान पर नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद का मान ज्ञात कीजिए:

- (i)  $x = 1$  पर  $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$  का मान  
(ii)  $y = 2$  पर  $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$  का मान  
(iii)  $t = a$  पर  $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$  का मान

**हल :** (i)  $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$  पर बहुपद  $p(x)$  का मान यह होता है:

$$\begin{aligned} p(1) &= 5(1)^2 - 3(1) + 7 \\ &= 5 - 3 + 7 = 9 \end{aligned}$$

(ii)  $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$  पर बहुपद  $q(y)$  का मान यह होता है:

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii)  $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$  पर बहुपद  $p(t)$  का मान यह होता है:

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

अब बहुपद  $p(x) = x - 1$  लीजिए।

$p(1)$  क्या है? ध्यान दीजिए कि  $p(1) = 1 - 1 = 0$  है।

क्योंकि  $p(1) = 0$  है, इसलिए हम यह कहते हैं कि 1, बहुपद  $p(x)$  का एक शून्यक (zero) है।

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि 2,  $q(x)$  का एक शून्यक है, जहाँ  $q(x) = x - 2$  है।

व्यापक रूप में, हम यह कहते हैं कि बहुपद  $p(x)$  का शून्यक एक ऐसी संख्या  $c$  है कि  $p(c) = 0$  हो।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि बहुपद  $(x - 1)$  का शून्यक इस बहुपद को 0 के समीकृत करके प्राप्त किया जाता है। अर्थात्  $x - 1 = 0$ , जिससे  $x = 1$  प्राप्त होता है। तब हम कहते हैं कि  $p(x) = 0$  एक बहुपद समीकरण है और 1 इस बहुपद समीकरण  $p(x) = 0$  का एक मूल है। अतः हम यह कहते हैं कि 1, बहुपद  $x - 1$  का शून्यक है या यह बहुपद समीकरण  $x - 1 = 0$  का एक मूल (root) है।

अब अचर बहुपद 5 लीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि इसका शून्यक क्या है? इस बहुपद का कोई शून्यक नहीं है, क्योंकि  $5x^0$  में  $x$  के स्थान पर किसी भी संख्या को प्रतिस्थापित करने पर हमें 5 ही प्राप्त होता है। वस्तुतः, एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता। अब प्रश्न उठता है कि शून्य बहुपद के शून्यकों के बारे में क्या कहा जाए। परंपरा के अनुसार प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।

**उदाहरण 3 :** जाँच कीजिए कि  $-2$  और  $2$  बहुपद  $x + 2$  के शून्यक हैं या नहीं।

**हल :** मान लीजिए  $p(x) = x + 2$

तब  $p(2) = 2 + 2 = 4$ ,  $p(-2) = -2 + 2 = 0$

अतः  $-2$  बहुपद  $x + 2$  का एक शून्यक है, परन्तु  $2$  बहुपद  $x + 2$  का शून्यक नहीं है।

**उदाहरण 4 :** बहुपद  $p(x) = 2x + 1$  का एक शून्यक ज्ञात कीजिए।

**हल :**  $p(x)$  का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण

$$p(x) = 0$$

को हल करना।

अब  $2x + 1 = 0$  से हमें  $x = -\frac{1}{2}$  प्राप्त होता है।

अतः,  $-\frac{1}{2}$  बहुपद  $2x + 1$  का एक शून्यक है।

अब, यदि  $p(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$  एक रैखिक बहुपद हो, तो हम इस  $p(x)$  का शून्यक किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरण 4 से आपको इसका कुछ संकेत मिल सकता है। बहुपद  $p(x)$  का शून्यक ज्ञात करने का अर्थ है बहुपद समीकरण  $p(x) = 0$  को हल करना।

अब  $p(x) = 0$  का अर्थ है  $ax + b = 0$ ,  $a \neq 0$

अतः,  $ax = -b$

अर्थात्  $x = -\frac{b}{a}$

अतः,  $x = -\frac{b}{a}$  ही केवल  $p(x)$  का शून्यक है, अर्थात् रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।

अब हम यह कह सकते हैं कि  $1$ ,  $x - 1$  का केवल एक शून्यक है और  $-2$ ,  $x + 2$  का केवल एक शून्यक है।

**उदाहरण 5 :** सत्यापित कीजिए कि  $2$  और  $0$  बहुपद  $x^2 - 2x$  के शून्यक हैं।

**हल :** मान लीजिए  $p(x) = x^2 - 2x$

तब  $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

और  $p(0) = 0 - 0 = 0$

अतः, 2 और 0 दोनों ही बहुपद  $x^2 - 2x$  के शून्यक हैं।

आइए अब हम अपने प्रेक्षकों की सूची बनाएँ:

1. आवश्यक नहीं है कि बहुपद का शून्यक शून्य ही हो।
2. 0, बहुपद का एक शून्यक हो सकता है।
3. प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।
4. एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक हो सकते हैं।

### प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित पर बहुपद  $5x - 4x^2 + 3$  के मान ज्ञात कीजिए:
  - (i)  $x=0$
  - (ii)  $x=-1$
  - (iii)  $x=2$
2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए  $p(0)$ ,  $p(1)$  और  $p(2)$  ज्ञात कीजिए:
  - (i)  $p(y) = y^2 - y + 1$
  - (ii)  $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$
  - (iii)  $p(x) = x^3$
  - (iv)  $p(x) = (x-1)(x+1)$
3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं:
  - (i)  $p(x) = 3x + 1$ ;  $x = -\frac{1}{3}$
  - (ii)  $p(x) = 5x - \pi$ ;  $x = \frac{4}{5}$
  - (iii)  $p(x) = x^2 - 1$ ;  $x = 1, -1$
  - (iv)  $p(x) = (x+1)(x-2)$ ;  $x = -1, 2$
  - (v)  $p(x) = x^2$ ;  $x = 0$
  - (vi)  $p(x) = lx + m$ ;  $x = -\frac{m}{l}$
  - (vii)  $p(x) = 3x^2 - 1$ ;  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
  - (viii)  $p(x) = 2x + 1$ ;  $x = \frac{1}{2}$
4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए :
  - (i)  $p(x) = x + 5$
  - (ii)  $p(x) = x - 5$
  - (iii)  $p(x) = 2x + 5$
  - (iv)  $p(x) = 3x - 2$
  - (v)  $p(x) = 3x$
  - (vi)  $p(x) = ax$ ;  $a \neq 0$
  - (vii)  $p(x) = cx + d$ ;  $c \neq 0$ ,  $c, d$  वास्तविक संख्याएँ हैं।

### 2.4 बहुपदों का गुणनखंडन

आइए अब हम ऊपर के उदाहरण 10 की स्थिति पर ध्यानपूर्वक विचार करें। इसके अनुसार, क्योंकि शेषफल  $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$  है, इसलिए  $2t + 1$ ,  $q(t)$  का एक गुणनखंड है। अर्थात् किसी बहुपद  $g(t)$  के लिए,

$$q(t) = (2t + 1)g(t) \text{ होता है।}$$

यह नीचे दिए हुए प्रमेय की एक विशेष स्थिति है:

**गुणनखंड प्रमेय:** यदि  $p(x)$  घात  $n \geq 1$  वाला एक बहुपद हो और  $a$  कोई वास्तविक संख्या हो, तो

- (i)  $x - a$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड होता है, यदि  $p(a) = 0$  हो, और
- (ii)  $p(a) = 0$  होता है, यदि  $x - a$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड हो।

**उपपत्ति:** शेषफल प्रमेय द्वारा,  $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$ .

- (i) यदि  $p(a) = 0$ , तब  $p(x) = (x - a)q(x)$ , जो दर्शाता है कि  $x - a$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है।
- (ii) चूंकि  $x - a$ ,  $p(x)$  का एक गुण  $x - a$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है, तो किसी बहुपद  $g(x)$  के लिए  $p(x) = (x - a)g(x)$  होगा। इस स्थिति में,  $p(a) = (a - a)g(a) = 0$ .

**उदाहरण 6:** जाँच कीजिए कि  $x + 2$  बहुपदों  $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$  और  $2x + 4$  का एक गुणनखंड है या नहीं।

**हल:**  $x + 2$  का शून्यक  $-2$  है। मान लीजिए

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6 \text{ और } s(x) = 2x + 4$$

तब,

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem) के अनुसार  $x + 2$ ,  $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$  का एक गुणनखंड है।

पुनः,

$$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$$

अतः  $x + 2$ ,  $2x + 4$  का एक गुणनखंड है। वास्तव में, गुणनखंड प्रमेय लागू किए बिना ही आप इसकी जाँच कर सकते हैं, क्योंकि  $2x + 4 = 2(x + 2)$  है।

**उदाहरण 7:** यदि  $x - 1$ ,  $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$  का एक गुणनखंड है, तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल:** क्योंकि  $x - 1$ ,  $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$  का एक गुणनखंड है, इसलिए

$$p(1) = 0 \text{ होगा।}$$

अब,

$$p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$$

$$\text{इसलिए} \quad 4 + 3 - 4 + k = 0$$

$$\text{अर्थात्} \quad k = -3$$

अब हम घात 2 और घात 3 के कुछ बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करेंगे।

आप  $x^2 + lx + m$  जैसे द्विघाती बहुपद के गुणनखंडन से परिचित हैं। आपने मध्य पद  $lx$  को  $ax + bx$  में इस प्रकार विभक्त करके कि  $ab = m$  हो, गुणनखंडन किया था। तब  $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$  प्राप्त हुआ था। अब हम  $ax^2 + bx + c$ , जहाँ  $a \neq 0$  और  $a, b, c$  अचर हैं, के प्रकार के द्विघाती बहुपदों का गुणनखंडन करने का प्रयास करेंगे।

मध्य पद को विभक्त करके बहुपद  $ax^2 + bx + c$  का गुणनखंडन निम्न प्रकार से होता है:

मान लीजिए इसके गुणनखंड  $(px + q)$  और  $(rx + s)$  हैं। तब,

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

$x^2$  के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें  $a = pr$  प्राप्त होता है।

इसी प्रकार,  $x$  के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें  $b = ps + qr$  प्राप्त होता है।

साथ ही, अचर पदों की तुलना करने पर, हमें  $c = qs$  प्राप्त होता है।

इससे यह पता चलता है कि  $b$  दो संख्याओं  $ps$  और  $qr$  का योगफल है, जिनका गुणनफल  $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$  है। अतः  $ax^2 + bx + c$  का गुणनखंडन करने के लिए, हम  $b$  को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल  $ac$  हो। यह तथ्य नीचे दिए गए उदाहरण 13 से स्पष्ट हो जाएगा।

**उदाहरण 8 :** मध्य पद को विभक्त करके तथा गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करके  $6x^2 + 17x + 5$  का गुणनखंडन कीजिए।

**हल 1 :** (मध्य पद को विभक्त करके) : यदि हम ऐसी दो संख्याएँ  $p$  और  $q$  ज्ञात कर सकते हों जिससे कि

$$p + q = 17 \quad \text{और} \quad pq = 6 \times 5 = 30 \quad \text{हो, तो हम गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं।}$$

अतः आइए हम 30 के गुणनखंड-युग्मों को ढूँढ़ें। कुछ युग्म 1 और 30, 2 और 15, 3 और 10, 5 और 6 हैं।

इन युग्मों में, हमें 2 और 15 के युग्म से  $p + q = 17$  प्राप्त होगा।

$$\begin{aligned}
 \text{अतः } 6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)x + 5 \\
 &= 6x^2 + 2x + 15x + 5 \\
 &= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1) \\
 &= (3x + 1)(2x + 5)
 \end{aligned}$$

**हल 2 :** (गुणनखंड प्रमेय की सहायता से):

$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6 p(x), \text{ मान लीजिए। यदि } a \text{ और } b, p(x)$$

के शून्यक हों, तो  $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$  है। अतः  $ab = \frac{5}{6}$  होगा। आइए हम

$a$  और  $b$  के लिए कुछ संभावनाएँ देखें। ये  $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{2}, \pm 1$  हो सकते हैं। अब,

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0 \text{ है। परन्तु } p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \text{ है। अतः } \left(x + \frac{1}{3}\right), p(x) \text{ का एक}$$

गुणनखंड है। इसी प्रकार, जाँच करके आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि  $\left(x + \frac{5}{2}\right), p(x)$  का एक गुणनखंड है।

$$\begin{aligned}
 \text{अतः, } 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \\
 &= 6\left(\frac{3x + 1}{3}\right)\left(\frac{2x + 5}{2}\right) \\
 &= (3x + 1)(2x + 5)
 \end{aligned}$$

इस उदाहरण के लिए, विभक्त करने की विधि का प्रयोग अधिक प्रभावशाली है। फिर भी, आइए हम एक और उदाहरण लें।

**उदाहरण 9 :** गुणनखंड प्रमेय की सहायता से  $y^2 - 5y + 6$  का गुणनखंडन कीजिए।

**हल :** मान लीजिए  $p(y) = y^2 - 5y + 6$  है। अब, यदि  $p(y) = (y - a)(y - b)$  हो, तो हम जानते हैं कि इसका अचर पद  $ab$  होगा। अतः  $ab = 6$  है। इसलिए,  $p(y)$  के गुणनखंड प्राप्त करने के लिए हम 6 के गुणनखंड ज्ञात करते हैं।

6 के गुणनखंड 1, 2 और 3 हैं।

$$\text{अब, } p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$$

इसलिए  $y - 2$ ,  $p(y)$  का एक गुणनखंड है।

साथ ही,  $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

इसलिए,  $y - 3$  भी  $y^2 - 5y + 6$  का एक गुणनखंड है।

अतः,  $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

ध्यान दीजिए कि मध्य पद  $-5y$  को विभक्त करके भी  $y^2 - 5y + 6$  का गुणनखंडन किया जा सकता है।

आइए अब हम त्रिघाती बहुपदों का गुणनखंडन करें। यहाँ प्रारंभ में विभक्त-विधि अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं होगी। हमें पहले कम से कम एक गुणनखंड ज्ञात करना आवश्यक होता है, जैसा कि आप नीचे के उदाहरण में देखेंगे।

**उदाहरण 10 :**  $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$  का गुणनखंडन कीजिए।

**हल :** मान लीजिए  $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$  है।

अब हम  $-120$  के सभी गुणनखंडों का पता लगाएँगे। इनमें कुछ गुणनखंड हैं:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$$

जाँच करने पर, हम यह पाते हैं कि  $p(1) = 0$  है। अतः  $(x - 1)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

$$\begin{aligned} \text{अब हम देखते हैं कि } x^3 - 23x^2 + 142x - 120 &= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120 \\ &= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad (\text{क्यों?}) \\ &= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \quad [(x - 1) \text{ को सर्वनिष्ठ लेकर}] \end{aligned}$$

इसे  $p(x)$  को  $(x - 1)$  से भाग देकर भी प्राप्त किया जा सकता था।

अब  $x^2 - 22x + 120$  का गुणनखंडन या तो मध्य पद को विभक्त करके या गुणनखंड प्रमेय की सहायता से किया जा सकता है। मध्य पद को विभक्त करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

$$\text{अतः, } x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$$

### प्रश्नावली 2.3

- बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखंड  $x + 1$  है।
  - $x^3 + x^2 + x + 1$
  - $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
  - $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
  - $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$
- गुणनखंड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में  $g(x)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है या नहीं:
  - $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$
  - $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$
  - $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$
- $k$  का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में  $(x - 1)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड हो :
  - $p(x) = x^2 + x + k$
  - $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$
  - $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$
  - $p(x) = kx^2 - 3x + k$
- गुणनखंड ज्ञात कीजिए:
  - $12x^2 - 7x + 1$
  - $2x^2 + 7x + 3$
  - $6x^2 + 5x - 6$
  - $3x^2 - x - 4$
- गुणनखंड ज्ञात कीजिए:
  - $x^3 - 2x^2 - x + 2$
  - $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
  - $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$
  - $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

### 2.5 बीजीय सर्वसमिकाएँ

पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि बीजीय सर्वसमिका (algebraic identity) एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। पिछली कक्षाओं में, आप निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन कर चुके हैं:

**सर्वसमिका I :**  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

**सर्वसमिका II :**  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

**सर्वसमिका III :**  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

**सर्वसमिका IV :**  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

इन बीजीय सर्वसमिकाओं में से कुछ का प्रयोग आपने बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने में अवश्य किया होगा। आप इनकी उपयोगिता अभिकलनों (computations) में भी देख सकते हैं।

**उदाहरण 11 :** उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

$$(i) (x + 3)(x + 3) \quad (ii) (x - 3)(x + 5)$$

**हल :** (i) यहाँ हम सर्वसमिका I  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  का प्रयोग कर सकते हैं। इस सर्वसमिका में  $y = 3$  रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 3) &= (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

(ii) सर्वसमिका IV अर्थात्  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  को लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 5) &= x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5) \\ &= x^2 + 2x - 15\end{aligned}$$

**उदाहरण 12 :** सीधे गुणा न करके  $105 \times 106$  का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल :} \quad 105 \times 106 &= (100 + 5) \times (100 + 6) \\ &= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6) \quad (\text{सर्वसमिका IV लागू करके}) \\ &= 10000 + 1100 + 30 \\ &= 11130\end{aligned}$$

कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए, हमने ऊपर बतायी गई कुछ सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया है। ये सर्वसमिकाएँ बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने में भी उपयोगी होती हैं, जैसा कि आप नीचे दिए गए उदाहरण में देख सकते हैं।

**उदाहरण 13 :** गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

$$(i) 49a^2 + 70ab + 25b^2 \quad (ii) \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$$

**हल :** (i) यहाँ आप यह देख सकते हैं कि

$$49a^2 = (7a)^2, 25b^2 = (5b)^2, 70ab = 2(7a)(5b)$$

$x^2 + 2xy + y^2$  के साथ दिए हुए व्यंजक की तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि  $x = 7a$  और  $y = 5b$  है।

सर्वसमिका I लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

$$(ii) \text{ यहाँ } \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

सर्वसमिका III के साथ इसकी तुलना करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} \frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} &= \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right) \end{aligned}$$

अभी तक हमारी सभी सर्वसमिकाएँ द्विपदों के गुणनफलों से संबंधित रही हैं। आइए अब हम सर्वसमिका I को त्रिपद  $x + y + z$  पर लागू करें। हम सर्वसमिका I लागू करके,  $(x + y + z)^2$  का अभिकलन करेंगे।

मान लीजिए  $x + y = t$  है। तब,

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= (t + z)^2 \\ &= t^2 + 2tz + z^2 \quad (\text{सर्वसमिका I लागू करने पर}) \\ &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \quad (t \text{ का मान प्रतिस्थापित करने पर}) \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \quad (\text{सर्वसमिका I लागू करने पर}) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \quad (\text{पदों को विन्यासित करने पर}) \end{aligned}$$

अतः हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

$$\text{सर्वसमिका V : } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

**टिप्पणी :** हम दाएँ पक्ष के व्यंजक को बाएँ पक्ष के व्यंजक का प्रसारित रूप मानते हैं। ध्यान दीजिए कि  $(x + y + z)^2$  के प्रसार में तीन वर्ग पद और तीन गुणनफल पद हैं।

**उदाहरण 14 :**  $(3a + 4b + 5c)^2$  को प्रसारित रूप में लिखिए।

**हल :** दिए हुए व्यंजक की  $(x + y + z)^2$  के साथ तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि

$$x = 3a, y = 4b \text{ और } z = 5c$$

अतः सर्वसमिका V लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a) \\ = 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

**उदाहरण 15 :**  $(4a - 2b - 3c)^2$  का प्रसार कीजिए।

**हल :** सर्वसमिका V लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2 \\ = (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a) \\ = 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

**उदाहरण 16 :**  $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$  का गुणनखंडन कीजिए।

**हल :** यहाँ  $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) \\ + 2(-y)(z) + 2(2x)(z) \\ = [2x + (-y) + z]^2 \quad (\text{सर्वसमिका V लागू करने पर}) \\ = (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$

अभी तक हमने द्विघात पदों से संबंधित सर्वसमिकाओं का ही अध्ययन किया है। आइए अब हम सर्वसमिका I को  $(x + y)^3$  अभिकलित करने में लागू करें। यहाँ,

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2 \\ = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ = x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\ = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

अतः, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

**सर्वसमिका VI :**  $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

सर्वसमिका VI में  $y$  के स्थान पर  $-y$  रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

**सर्वसमिका VII :**  $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \\ = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

**उदाहरण 17 :** निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i)  $(3a + 4b)^3$                       (ii)  $(5p - 3q)^3$

**हल :** (i)  $(x + y)^3$  के साथ दिए गए व्यंजक की तुलना करने पर हम, यह पाते हैं कि

$$x = 3a \text{ और } y = 4b$$

अतः सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^3 &= (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b) \\ &= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2\end{aligned}$$

(ii)  $(x - y)^3$  के साथ दिए हुए व्यंजक की तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि

$$x = 5p \text{ और } y = 3q$$

सर्वसमिका VII लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}(5p - 3q)^3 &= (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q) \\ &= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2\end{aligned}$$

**उदाहरण 18 :** उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i)  $(104)^3$

(ii)  $(999)^3$

**हल :** (i) यहाँ

$$\begin{aligned}(104)^3 &= (100 + 4)^3 \\ &= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4) \\ &\quad \text{(सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर)} \\ &= 1000000 + 64 + 124800 \\ &= 1124864\end{aligned}$$

(ii) यहाँ

$$\begin{aligned}(999)^3 &= (1000 - 1)^3 \\ &= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1) \\ &\quad \text{(सर्वसमिका VII का प्रयोग करने पर)} \\ &= 1000000000 - 1 - 2997000 \\ &= 997002999\end{aligned}$$

**उदाहरण 19 :**  $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$  का गुणनखंडन कीजिए।

**हल :** दिए हुए व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\begin{aligned}(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) \\ &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 \\ &= (2x + 3y)^3 \quad \text{(सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर)} \\ &= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)\end{aligned}$$

अब  $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$  का प्रसार करने पर, हमें गुणनफल इस रूप में प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} & x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ & \quad + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz \\ & \quad + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad (\text{सरल करने पर}) \end{aligned}$$

अतः, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

**सर्वसमिका VIII :**  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

**उदाहरण 20 :**  $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$  का गुणनखंडन कीजिए।

**हल :** यहाँ,

$$\begin{aligned} & 8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ &= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z) \\ &= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)] \\ &= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz) \end{aligned}$$

### प्रश्नावली 2.4

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

- (i)  $(x+4)(x+10)$                       (ii)  $(x+8)(x-10)$                       (iii)  $(3x+4)(3x-5)$   
 (iv)  $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$                       (v)  $(3-2x)(3+2x)$

2. सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए:

- (i)  $103 \times 107$                       (ii)  $95 \times 96$                       (iii)  $104 \times 96$

3. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंडन कीजिए:

- (i)  $9x^2 + 6xy + y^2$                       (ii)  $4y^2 - 4y + 1$                       (iii)  $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

- (i)  $(x+2y+4z)^2$                       (ii)  $(2x-y+z)^2$                       (iii)  $(-2x+3y+2z)^2$   
 (iv)  $(3a-7b-c)^2$                       (v)  $(-2x+5y-3z)^2$                       (vi)  $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. गुणनखंडन कीजिए:

(i)  $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii)  $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i)  $(2x + 1)^3$

(ii)  $(2a - 3b)^3$

(iii)  $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

(iv)  $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i)  $(99)^3$

(ii)  $(102)^3$

(iii)  $(998)^3$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए:

(i)  $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii)  $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii)  $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv)  $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v)  $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. सत्यापित कीजिए: (i)  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$  (ii)  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए:

(i)  $27y^3 + 125z^3$

(ii)  $64m^3 - 343n^3$

[संकेत: देखिए प्रश्न 9]

11. गुणनखंडन कीजिए:  $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. सत्यापित कीजिए:  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. यदि  $x + y + z = 0$  हो, तो दिखाइए कि  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  है।

14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i)  $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii)  $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए:

क्षेत्रफल :  $25a^2 - 35a + 12$

(i)

क्षेत्रफल :  $35y^2 + 13y - 12$

(ii)

16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं?

$$\text{आयतन: } 3x^2 - 12x$$

(i)

$$\text{आयतन: } 12ky^2 + 6ky - 20k$$

(ii)

## 2.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक चर वाला बहुपद  $p(x)$  निम्न रूप का  $x$  में एक बीजीय व्यंजक है:  

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$
जहाँ  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  अचर हैं और  $a_n \neq 0$  है।  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  क्रमशः  $x^0, x, x^2, \dots, x^n$  के गुणांक हैं और  $n$  को बहुपद की घात कहा जाता है। प्रत्येक  $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_0$ , जहाँ  $a_n \neq 0$ , को बहुपद  $p(x)$  का पद कहा जाता है।
2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।
3. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।
4. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।
5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।
6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।
7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।
8. वास्तविक संख्या ' $a$ ', बहुपद  $p(x)$  का एक शून्यक होती है, यदि  $p(a) = 0$  हो।
9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
10. यदि  $p(a) = 0$  हो, तो  $x - a$  बहुपद  $p(x)$  का एक गुणनखंड होता है और यदि  $x - a, p(x)$  का एक गुणनखंड हो, तो  $p(a) = 0$  होता है।
11.  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
12.  $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
13.  $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
14.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$



0963CH03

## अध्याय 3

### निर्देशांक ज्यामिति

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines? So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

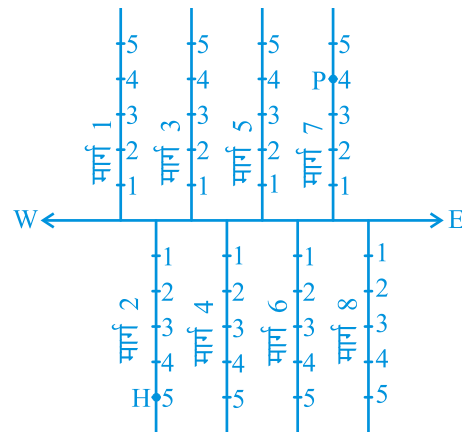
(मरकेटर के उत्तरी ध्रुवों और विषुवत वृत्तों, उष्ण कटिबंधों, मंडलों और यामोत्तर रेखाओं में क्या अच्छाई है? इसलिए बेलमैन ने शोर मचाया होगा और नाविक दल ने उत्तर दिया होगा, “ये केवल परंपरागत चिह्न हैं”।)

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

#### 3.1 भूमिका

आप यह पढ़ चुके हैं कि एक संख्या रेखा पर एक बिन्दु का स्थान निर्धारण किस प्रकार किया जाता है। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि एक रेखा पर एक बिन्दु की स्थिति की व्याख्या किस प्रकार की जाती है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं जिनमें एक बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी होती है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित स्थितियों पर विचार कीजिए:

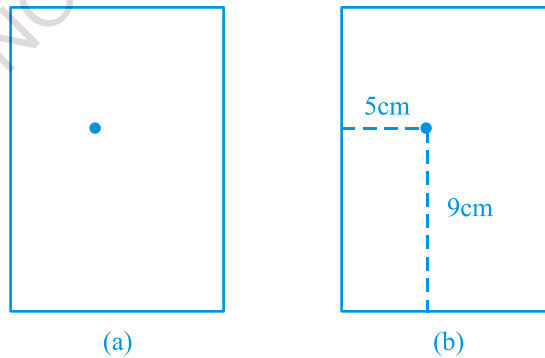
I. आकृति 3.1 में एक मुख्य मार्ग है जो पूर्व से पश्चिम की ओर जाता है और इस पर कुछ सड़कें बनी हैं, इनकी सड़क (मार्ग) संख्याएँ पश्चिम से पूर्व की ओर दी गई हैं।



आकृति 3.1

प्रत्येक सड़क (मार्ग) पर बने मकानों पर संख्याएँ अंकित कर दी गई हैं। आपको यहाँ अपनी सहेली के मकान का पता लगाना है। क्या इसके लिए केवल एक निर्देश-बिन्दु का ज्ञात होना पर्याप्त होगा? उदाहरण के लिए, यदि हमें केवल यह ज्ञात हो कि वह सड़क 2 पर रहती है तो क्या हम उसके घर का पता सरलता से लगा सकते हैं? उतनी सरलता से नहीं जितनी सरलता से तब जबकि हमें दो जानकारियाँ अर्थात् सड़क की वह संख्या जिस पर उसका मकान है और मकान की संख्या ज्ञात होने पर होती है। यदि आप उस मकान पर जाना चाहते हैं जो सड़क 2 पर स्थित है और जिसकी संख्या 5 है, तो सबसे पहले आपको यह पता लगाना होगा कि सड़क 2 कौन-सी है और तब उस मकान का पता लगाना होता है जिसकी संख्या 5 है। आकृति 3.1 में H इसी मकान का स्थान दर्शाता है। इसी प्रकार, P उस मकान को दर्शाता है जो सड़क संख्या 7 पर है और जिसकी संख्या 4 है।

II. मान लीजिए आप एक कागज की शीट पर एक बिन्दु लगा देते हैं [आकृति 3.2 (a)]। यदि हम आपसे कागज पर लगे बिन्दु की स्थिति के बारे में पूछें, तो आप इसे कैसे बताएँगे? संभवतः आप इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार दें : “बिन्दु कागज के आधे के ऊपरी भाग में स्थित है” या “यह भी कह सकते हैं कि यह बिन्दु कागज की बायीं कोर के निकट स्थित है” या “यह बिन्दु कागज की बायीं ओर के ऊपरी कोने के काफी निकट स्थित है।” क्या ऊपर दिए गए कथनों में से किसी भी कथन के आधार पर आप बिन्दु की ठीक-ठीक स्थिति बता सकते हैं? स्पष्ट है कि उत्तर “नहीं” है। परन्तु, यदि आप यह कहें कि “बिन्दु कागज की बायीं कोर से लगभग 5 cm दूर है, तो इससे आपको बिन्दु की स्थिति का आभास तो हो जाता है फिर भी ठीक-ठाक स्थिति का पता नहीं चलता। थोड़ा बहुत सोच-विचार के बाद आप यह कह सकते हैं कि सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु 9 cm की दूरी पर है। अब हम बिन्दु की स्थिति ठीक-ठाक बता सकते हैं।



आकृति 3.2

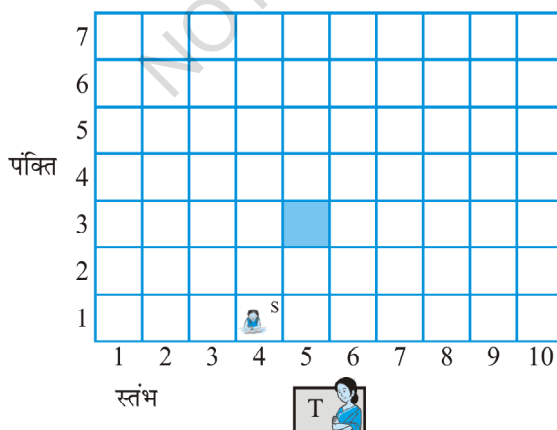
इसके लिए हम दो नियत रेखाओं अर्थात् कागज की बायीं कोर और कागज की सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु की स्थिति नियत करते हैं [आकृति 3.2 (b)]। दूसरे शब्दों में, हम यह कह सकते हैं कि बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिए दो स्वतंत्र सूचनाओं का होना आवश्यक होता है।

अब आप कक्षा में “बैठने की योजना” नामक निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए:

**क्रियाकलाप 1 (बैठने की योजना):** सभी मेजों को एक साथ खींचकर अपनी कक्षा में बैठने की एक योजना बनाइए। प्रत्येक मेज को एक वर्ग से निरूपित कीजिए। प्रत्येक वर्ग में उस विद्यार्थी का नाम लिखिए जिस पर वह बैठता है और जिसे वह वर्ग निरूपित करता है। कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की स्थिति का ठीक-ठीक निर्धारण निम्नलिखित दो सूचनाओं की सहायता से किया जाता है।

- वह स्तंभ जिसमें वह बैठता / बैठती है।
- वह पंक्ति जिसमें वह बैठता / बैठती है।

यदि आप उस मेज पर बैठते हैं जो 5वें स्तंभ और तीसरी पंक्ति में है, जिसे आकृति 3.3 में छायायित वर्ग से दिखाया गया है, तो आपकी स्थिति को (5, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ पहली संख्या स्तंभ संख्या को प्रकट करती है और दूसरी संख्या पंक्ति संख्या को प्रकट करती है। क्या यह वही है जो कि (3, 5) है? आप अपनी कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के नाम और उनके बैठने की स्थितियाँ लिखें। उदाहरण के लिए, यदि सोनिया चौथे स्तंभ और पहली पंक्ति में बैठती है, तो उसके लिए S(4, 1) लिखिए। शिक्षक की मेज आपके बैठने की योजना के अंतर्गत नहीं आती है। यहाँ हम शिक्षक को केवल एक प्रेक्षक ही मानते हैं।



T शिक्षक की मेज प्रदर्शित करता है  
S सोनिया की डेस्क प्रदर्शित करता है

आकृति 3.3

ऊपर की चर्चा में आपने यह देखा है कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो लंब रेखाओं की सहायता से निरूपित की जा सकती है। यदि वस्तु एक बिन्दु है, तो हमें सबसे नीचे वाली रेखा से और कागज की बायीं कोर से बिन्दु की दूरी ज्ञात होना आवश्यक होता है। “बैठने की योजना” के संबंध में हमें स्तंभ की संख्या और पंक्ति की संख्या का जानना आवश्यक होता है। इस सरल विचारधारा के दूरगामी परिणाम होते हैं और इससे गणित की **निर्देशांक ज्यामिति** (Coordinate Geometry) नामक एक अति महत्वपूर्ण शाखा की व्युत्पत्ति हुई। इस अध्याय में, हमारा लक्ष्य निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से आपको परिचित कराना है। इसके बारे में आप विस्तार से अध्ययन उच्च कक्षाओं में करेंगे। प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस अध्ययन को विकसित किया था।

कुछ लोग प्रातःकाल में बिस्तर पर लेटे रहना पसंद करते हैं। यही आदत सत्रहवीं शताब्दी के महान फ्रांसीसी गणितज्ञ **रेने दकार्ते** की थी। परन्तु वह आलसी व्यक्ति नहीं था, वह यह समझता था कि बिस्तर पर पड़े-पड़े ही अधिक चिंतन किया जा सकता है। एक दिन जबकि वह अपने बिस्तर पर लेटे-लेटे आराम कर रहा था, उसने एक तल में एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने से संबंधित समस्या का हल ढूँढ़ निकाला। जैसाकि आप देखेंगे उसकी विधि अक्षांश और देशांतर की पुरानी विचारधारा की ही एक विकसित रूप थी। एक तल की एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति (Cartesian System)** भी कहा जाता है।



**रेने दकार्ते (1596 -1650)**

आकृति 3.4

### प्रश्नावली 3.1

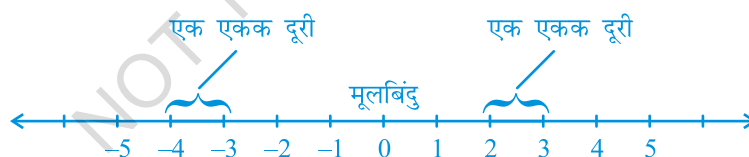
1. एक अन्य व्यक्ति को आप अपने अध्ययन मेज पर रखे टेबल लैंप की स्थिति किस तरह बताएँगे?
2. **(सड़क योजना)** : एक नगर में दो मुख्य सड़कें हैं, जो नगर के केन्द्र पर मिलती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण की दिशा और पूर्व-पश्चिम की दिशा में हैं। नगर की अन्य सभी सड़कें इन मुख्य सड़कों के समांतर परस्पर 200 मीटर की दूरी पर हैं। प्रत्येक दिशा में लगभग पाँच सड़कें हैं। 1 सेंटीमीटर = 200 मीटर का पैमाना लेकर अपनी नोट बुक में नगर का एक मॉडल बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं से निरूपित कीजिए।

आपके मॉडल में एक-दूसरे को काटती हुई अनेक क्रॉस-स्ट्रीट (चौराहे) हो सकती हैं। एक विशेष क्रॉस-स्ट्रीट दो सड़कों से बनी है, जिनमें से एक उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और दूसरी पूर्व-पश्चिम की दिशा में। प्रत्येक क्रॉस-स्ट्रीट का निर्देशन इस प्रकार किया जाता है: यदि दूसरी सड़क उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और पाँचवीं सड़क पूर्व-पश्चिम दिशा में जाती है और ये एक क्रॉसिंग पर मिलती हैं, तब इसे हम क्रॉस-स्ट्रीट  $(2, 5)$  कहेंगे। इसी परंपरा से यह ज्ञात कीजिए कि

- कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को  $(4, 3)$  माना जा सकता है।
- कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को  $(3, 4)$  माना जा सकता है।

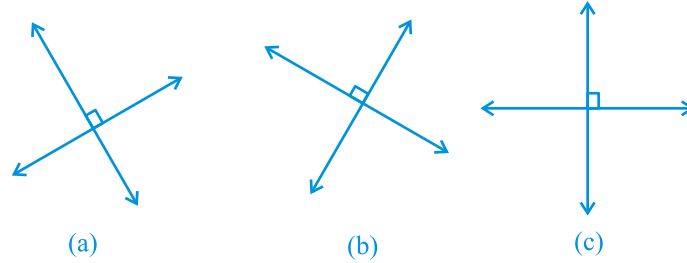
### 3.2 कार्तीय पद्धति

‘संख्या पद्धति’ के अध्याय में आप **संख्या रेखा** के बारे में पढ़ चुके हैं। संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से दूरियों को बराबर एककों में एक दिशा में धनात्मक और दूसरी दिशा में ऋणात्मक अंकित किया जाता है। उस बिन्दु को, जहाँ से दूरियाँ अंकित की जाती हैं, **मूल-बिन्दु (origin)** कहा जाता है। एक रेखा पर समान दूरियों पर बिन्दुओं को अंकित करके, हम संख्या रेखा का प्रयोग संख्याओं को निरूपित करने के लिए करते हैं। यदि एक एकक दूरी संख्या ‘1’ को निरूपित करती हो, तो 3 एकक दूरी संख्या ‘3’ को निरूपित करेगी, जहाँ ‘0’ मूलबिन्दु है। मूलबिन्दु से धनात्मक दिशा में दूरी  $r$  पर स्थित बिन्दु संख्या  $r$  को निरूपित करती है। मूलबिन्दु से ऋणात्मक दिशा में दूरी  $r$  पर स्थित बिन्दु संख्या  $r$  को निरूपित करती है। संख्या रेखा पर विभिन्न संख्याओं के स्थान आकृति 3.5 में दिखाए गए हैं।



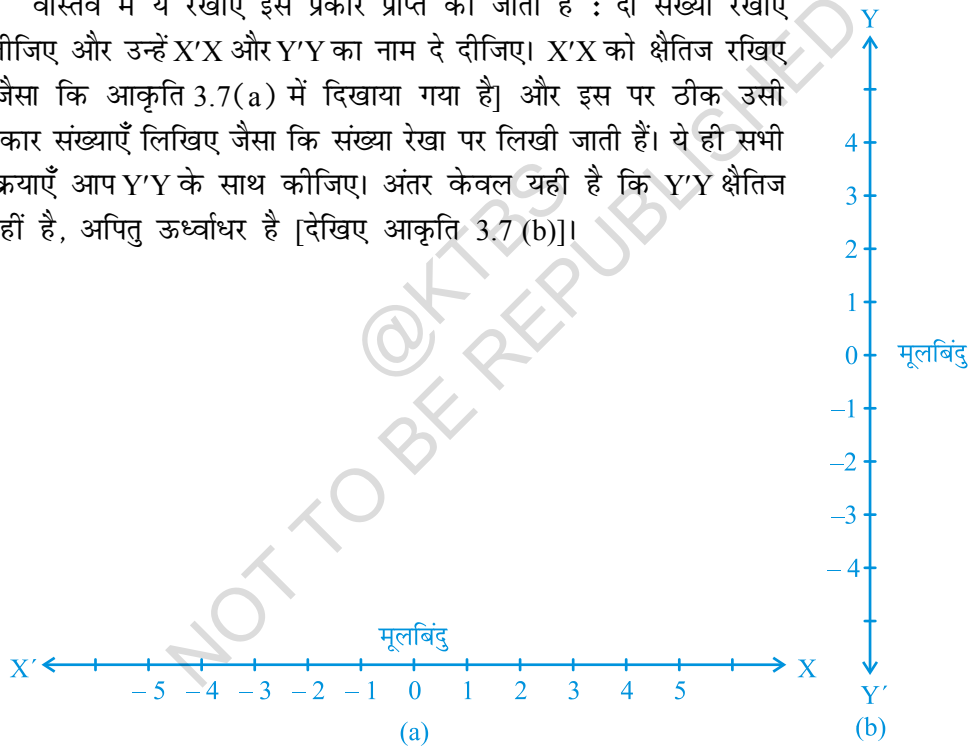
आकृति 3.5

दकार्ते ने एक तल पर एक दूसरे पर लंब दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं, जैसा कि आकृति 3.6 में दिखाया गया है। लेकिन जब हम इस अध्याय में एक तल में स्थित एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो रेखाएँ लेंगे, तो एक रेखा क्षैतिज होगी और दूसरी रेखा ऊर्ध्वाधर, जैसा कि आकृति 3.6 (c) में दिखाया गया है।



आकृति 3.6

वास्तव में ये रेखाएँ इस प्रकार प्राप्त की जाती हैं : दो संख्या रेखाएँ लीजिए और उन्हें  $X'X$  और  $Y'Y$  का नाम दे दीजिए।  $X'X$  को क्षैतिज रखिए [जैसा कि आकृति 3.7(a) में दिखाया गया है] और इस पर ठीक उसी प्रकार संख्याएँ लिखिए जैसा कि संख्या रेखा पर लिखी जाती हैं। ये ही सभी क्रियाएँ आप  $Y'Y$  के साथ कीजिए। अंतर केवल यही है कि  $Y'Y$  क्षैतिज नहीं है, अपितु ऊर्ध्वाधर है [देखिए आकृति 3.7 (b)]।

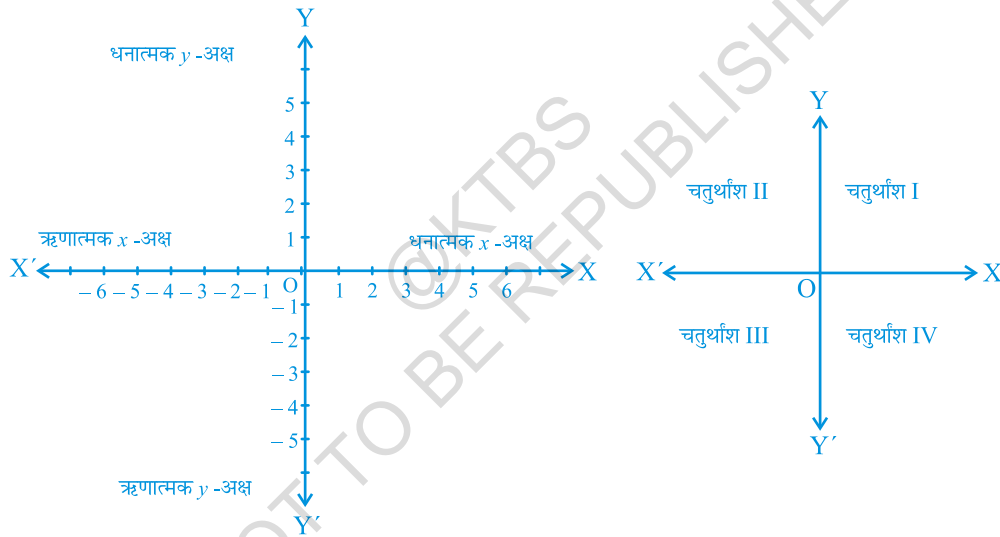


आकृति 3.7

दोनों रेखाओं का संयोजन इस प्रकार कीजिए कि ये दो रेखाएँ एक-दूसरे को मूलबिन्दु पर काटती हों (आकृति 3.8)। क्षैतिज रेखा  $X'X$  को  $x$ -अक्ष कहा जाता है और ऊर्ध्वाधर रेखा  $Y'Y$  को  $y$ -अक्ष कहा जाता है। वह बिन्दु, जहाँ  $X'X$  और  $Y'Y$  एक-दूसरे को काटती हैं, उसे **मूलबिन्दु (origin)** कहा जाता है और इसे  $O$  से प्रकट किया जाता है। क्योंकि धनात्मक संख्याएँ  $OX$  और  $OY$  की दिशाओं में स्थित हैं, इसलिए  $OX$  और  $OY$  को क्रमशः

$x$ -अक्ष और  $y$ -अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार,  $OX'$  और  $OY'$  को  $x$ -अक्ष और  $y$ -अक्ष की ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

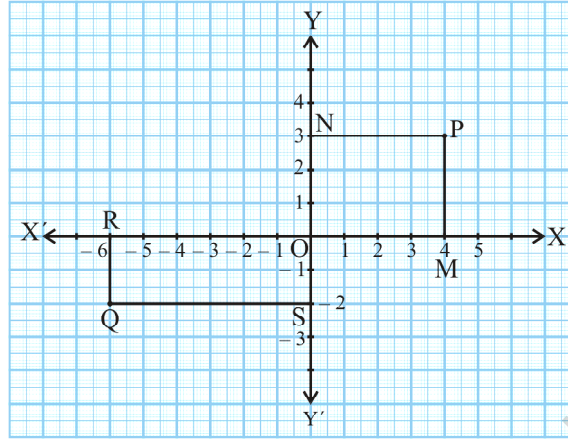
यहाँ आप यह देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** (एक-चौथाई) कहा जाता है।  $OX$  से वामावर्त दिशा में इन्हें I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है (देखिए आकृति 3.9)। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। हम इस तल को **कार्तीय तल (Cartesian plane)** या **निर्देशांक तल (Coordinate plane)** या  **$xy$ -तल ( $xy$ -plane)** कहते हैं। अक्षों को **निर्देशांक अक्ष (coordinate axes)** कहा जाता है।



आकृति 3.8

आकृति 3.9

आइए अब हम यह देखें कि गणित में इस पद्धति का इतना महत्व क्यों है और यह किस प्रकार उपयोगी होती है। आगे दिया गया आरेख लीजिए, जहाँ अक्षों को आलेख कागज (graph paper) पर खींचा गया है। आइए हम अक्षों से बिन्दुओं P और Q की दूरियाँ ज्ञात करें। इसके लिए  $x$ -अक्ष पर लंब PM और  $y$ -अक्ष पर लंब PN डालिए। इसी प्रकार, हम लंब QR और QS डालते हैं, जैसा कि आकृति 3.10 में दिखाया गया है।



आकृति 3.10

आप पाते हैं कि

- (i)  $y$ -अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे  $x$ -अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है,  $PN = OM = 4$  एकक है।
- (ii)  $x$ -अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे  $y$ -अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है,  $PM = ON = 3$  एकक है।
- (iii)  $y$ -अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे  $x$ -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है,  $OR = SQ = 6$  एकक है।
- (iv)  $x$ -अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे  $y$ -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है,  $OS = RQ = 2$  एकक है।

इन दूरियों की सहायता से हम बिन्दुओं का निर्धारण किस प्रकार करें कि कोई भ्रम न रह जाए?

हम निम्नलिखित परंपराओं को ध्यान में रखकर एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते हैं:

- (i) एक बिन्दु का  $x$  - निर्देशांक ( $x$ -coordinate),  $y$ -अक्ष से इस बिन्दु की लांबिक दूरी है, जिसे  $x$ -अक्ष पर मापा जाता है (जो कि  $x$ -अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और  $x$ -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह +4 है और Q के लिए यह -6 है।  $x$  - निर्देशांक को **भुज (abscissa)** भी कहा जाता है।

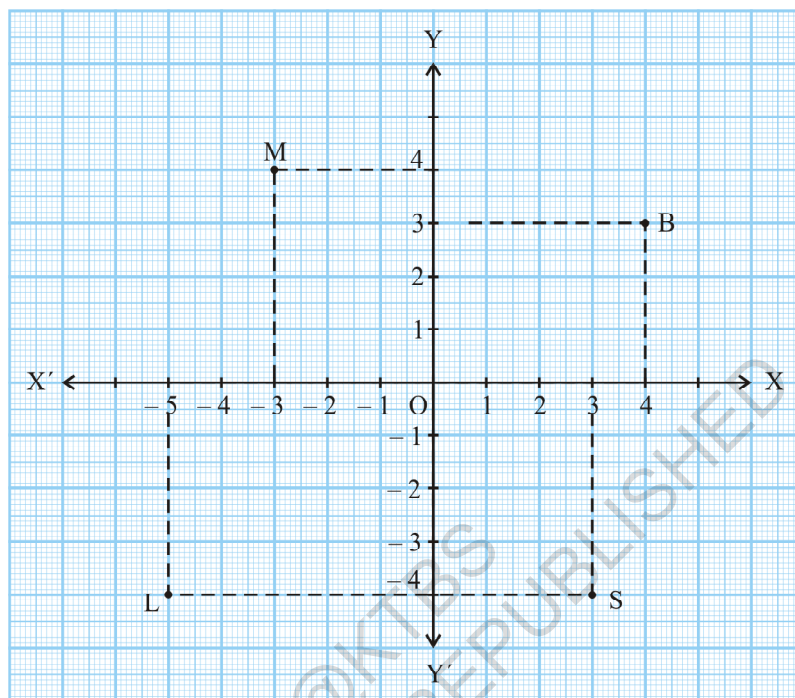
- (ii) एक बिन्दु का  $y$ -निर्देशांक,  $x$ -अक्ष से उसकी लॉबिक दूरी होती है जिसे  $y$ -अक्ष पर मापा जाता है (जो  $y$ -अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और  $y$ -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह + 3 है और Q के लिए -2 है।  $y$ -निर्देशांक को **कोटि (ordinate)** भी कहा जाता है।
- (iii) निर्देशांक तल में एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते समय पहले  $x$ -निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद  $y$ -निर्देशांक लिखते हैं। हम निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखते हैं।

अतः P के निर्देशांक (4, 3) हैं और Q के निर्देशांक (- 6, - 2) हैं।

ध्यान दीजिए कि तल में एक बिन्दु के निर्देशांक अद्वितीय होते हैं। इसके अनुसार निर्देशांक (3, 4) और निर्देशांक (4, 3) समान नहीं हैं।

**उदाहरण 1 :** आकृति 3.11 को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए:

- (i) बिन्दु B का भुज और कोटि क्रमशः \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_ हैं। अतः B के निर्देशांक (\_\_\_\_, \_\_\_\_ ) हैं।
- (ii) बिन्दु M के  $x$ -निर्देशांक और  $y$ -निर्देशांक क्रमशः \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_ हैं। अतः M के निर्देशांक (\_\_\_\_, \_\_\_\_ ) हैं।
- (iii) बिन्दु L के  $x$ -निर्देशांक और  $y$ -निर्देशांक क्रमशः \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_ हैं। अतः L के निर्देशांक (\_\_\_\_, \_\_\_\_ ) हैं।
- (iv) बिन्दु S के  $x$ -निर्देशांक और  $y$ -निर्देशांक क्रमशः \_\_\_\_\_ और \_\_\_\_\_ हैं। अतः S के निर्देशांक (\_\_\_\_, \_\_\_\_ ) हैं।



आकृति 3.11

**हल :** (i) क्योंकि  $y$ -अक्ष से बिन्दु B की दूरी 4 एकक है, इसलिए बिन्दु B का  $x$ -निर्देशांक या भुज 4 होगा।  $x$ -अक्ष से बिन्दु B की दूरी 3 एकक है, इसलिए बिन्दु B का  $y$ -निर्देशांक अर्थात् कोटि 3 होगी। अतः बिन्दु B के निर्देशांक  $(4, 3)$  हैं।

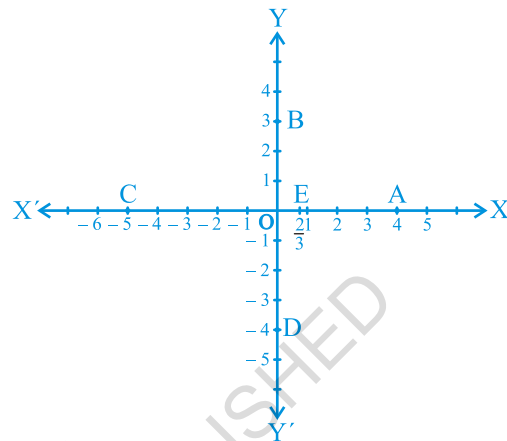
ऊपर (i) की भांति:

- (ii) बिन्दु M के  $x$ -निर्देशांक और  $y$ -निर्देशांक क्रमशः  $-3$  और  $4$  हैं। अतः बिन्दु M के निर्देशांक  $(-3, 4)$  हैं।
- (iii) बिन्दु L के  $x$ -निर्देशांक और  $y$ -निर्देशांक क्रमशः  $-5$  और  $-4$  हैं। अतः बिन्दु L के निर्देशांक  $(-5, -4)$  हैं।
- (iv) बिन्दु S के  $x$ -निर्देशांक और  $y$ -निर्देशांक क्रमशः  $3$  और  $-4$  हैं। अतः बिन्दु S के निर्देशांक  $(3, -4)$  हैं।

**उदाहरण 2 :** आकृति 3.12 में अक्षों पर अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए:

**हल :** आप यहाँ देख सकते हैं कि :

- बिन्दु A,  $y$ -अक्ष से + 4 एकक की दूरी पर है और  $x$ -अक्ष से दूरी 0 पर है। अतः बिन्दु A का  $x$ -निर्देशांक 4 है और  $y$ -निर्देशांक 0 है। इसलिए A के निर्देशांक (4, 0) हैं।
- B के निर्देशांक (0, 3) हैं। क्यों?
- C के निर्देशांक (-5, 0) हैं। क्यों?
- D के निर्देशांक (0, -4) हैं। क्यों?
- E के निर्देशांक  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$  हैं। क्यों?



आकृति 3.12

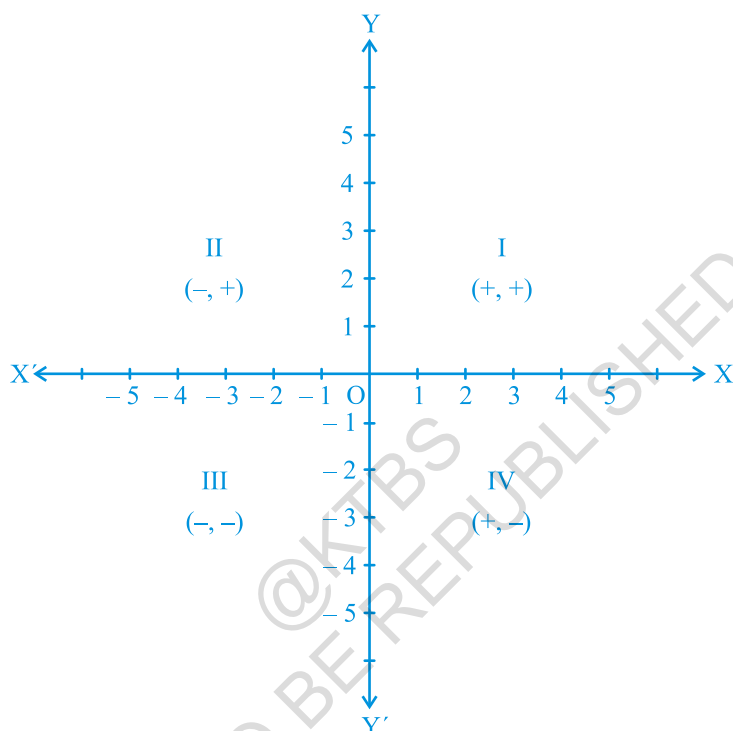
क्योंकि  $x$ -अक्ष का प्रत्येक बिन्दु  $x$ -अक्ष से शून्य दूरी पर है, इसलिए  $x$ -अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का  $y$ -निर्देशांक सदा ही शून्य होगा। इस तरह,  $x$ -अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक  $(x, 0)$  के रूप के होंगे, जहाँ  $y$ -अक्ष से बिन्दु की दूरी  $x$  है। इसी प्रकार,  $y$ -अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक  $(0, y)$  के रूप के होंगे, जहाँ  $x$ -अक्ष से बिन्दु की दूरी  $y$  है। क्यों?

मूलबिन्दु O के निर्देशांक क्या हैं? क्योंकि दोनों अक्षों से इसकी दूरी शून्य है, इसलिए इसके भुज और कोटि दोनों ही शून्य होंगे। अतः मूलबिन्दु के निर्देशांक (0, 0) होते हैं।

ऊपर के उदाहरणों में, आपने एक बिन्दु के निर्देशांकों में लगे चिह्नों और उस बिन्दु के चतुर्थांश, जिसमें वह स्थित है, के बीच के निम्नलिखित संबंधों की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा:

- यदि बिन्दु पहले चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, +) के रूप का होगा, क्योंकि पहला चतुर्थांश धनात्मक  $x$ -अक्ष और धनात्मक  $y$ -अक्ष से परिबद्ध है।
- यदि बिन्दु दूसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (-, +) के रूप का होगा, क्योंकि दूसरा चतुर्थांश ऋणात्मक  $x$ -अक्ष और धनात्मक  $y$ -अक्ष से परिबद्ध है।
- यदि बिन्दु तीसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (-, -) के रूप में होगा, क्योंकि तीसरा चतुर्थांश ऋणात्मक  $x$ -अक्ष और ऋणात्मक  $y$ -अक्ष से परिबद्ध है।

- (iv) यदि बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु  $(+, -)$  के रूप में होगा, क्योंकि चौथा चतुर्थांश धनात्मक  $x$ -अक्ष और ऋणात्मक  $y$ -अक्ष से परिबद्ध है (देखिए आकृति 3.13)।



आकृति 3.13

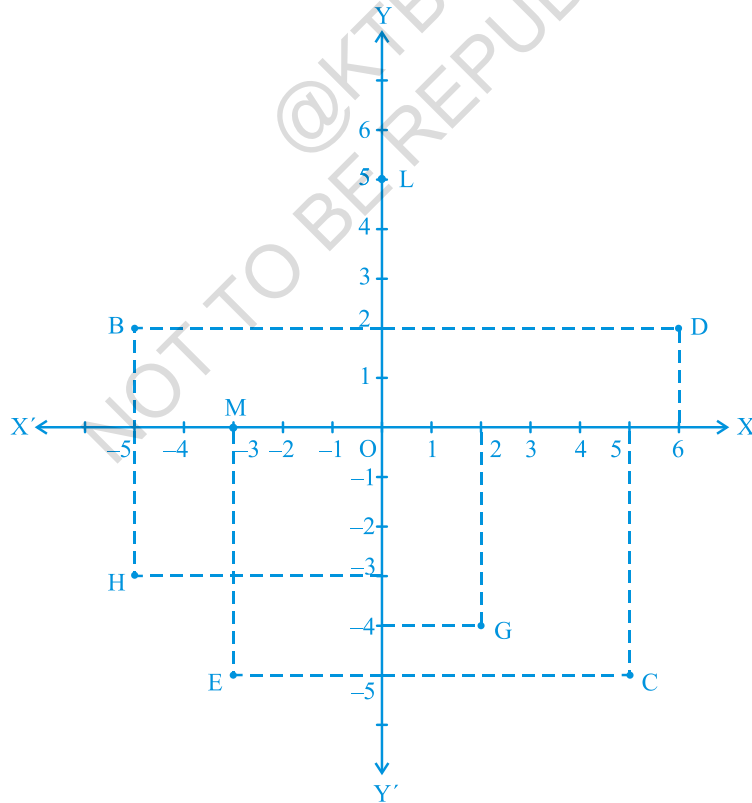
**टिप्पणी :** एक तल में स्थित एक बिन्दु की व्याख्या करने के संबंध में ऊपर हमने जिस पद्धति के बारे में चर्चा की है, वह केवल एक परंपरा है जिसको पूरे विश्व में स्वीकार किया जाता है। उदाहरण के लिए, पद्धति में ऐसा भी हो सकता है कि पहले कोटि लिखी जाए और उसके बाद भुज लिखा जाए। फिर भी, जिस पद्धति का उल्लेख हमने किया है उसे पूरा विश्व बिना किसी भ्रम के स्वीकार करता है।

### प्रश्नावली 3.2

- निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए:
  - कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं?

- (ii) इन दो रेखाओं से बने तल के प्रत्येक भाग के नाम बताइए।  
 (iii) उस बिन्दु का नाम बताइए जहाँ ये दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं।
2. आकृति 3.14 देखकर निम्नलिखित को लिखिए:

- (i) B के निर्देशांक  
 (ii) C के निर्देशांक  
 (iii) निर्देशांक  $(-3, -5)$  द्वारा पहचाना गया बिन्दु  
 (iv) निर्देशांक  $(2, -4)$  द्वारा पहचाना गया बिन्दु  
 (v) D का भुज  
 (vi) बिन्दु H की कोटि  
 (vii) बिन्दु L के निर्देशांक  
 (viii) बिन्दु M के निर्देशांक



आकृति 3.14

### 3.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. एक तल में एक वस्तु या एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो लांबिक रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमें एक क्षैतिज होती है और दूसरी ऊर्ध्वाधर होती है।
2. तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहा जाता है और रेखाओं को निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।
3. क्षैतिज रेखा को  $x$ -अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को  $y$ -अक्ष कहा जाता है।
4. निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में बाँट देते हैं, जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।
5. अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूलबिन्दु कहा जाता है।
6.  $y$ -अक्ष से किसी बिन्दु की दूरी को उसका  $x$ -निर्देशांक या भुज कहा जाता है। साथ ही,  $x$ -अक्ष से बिन्दु की दूरी को  $y$ -निर्देशांक या कोटि कहा जाता है।
7. यदि एक बिन्दु का भुज  $x$  हो और कोटि  $y$  हो, तो  $(x, y)$  को बिन्दु के निर्देशांक कहा जाता है।
8.  $x$ -अक्ष पर एक बिन्दु के निर्देशांक  $(x, 0)$  के रूप के होते हैं और  $y$ -अक्ष पर बिन्दु के निर्देशांक  $(0, y)$  के रूप के होते हैं।
9. मूलबिन्दु के निर्देशांक  $(0, 0)$  होते हैं।
10. एक बिन्दु के निर्देशांक पहले चतुर्थांश में  $(+, +)$  के रूप के दूसरे चतुर्थांश में  $(-, +)$  के रूप के, तीसरे चतुर्थांश में  $(-, -)$  के रूप के और चौथे चतुर्थांश में  $(+, -)$  के रूप के होते हैं, जहाँ  $+$  एक धनात्मक वास्तविक संख्या को और  $-$  एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या को प्रकट करते हैं।
11. यदि  $x \neq y$  हो, तो  $(x, y) \neq (y, x)$  होगा और यदि  $x = y$  हो, तो  $(x, y) = (y, x)$  होगा।



0963CH04

## अध्याय 4

### दो चरों वाले रैखिक समीकरण

*The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.*

(वैश्लेषिक कला का मुख्य प्रयोग गणितीय समस्याओं को समीकरण में लाना है और इन समीकरणों को यथासंभव सरल पदों में प्रस्तुत करना है)।

—Edmund Halley

#### 4.1 भूमिका

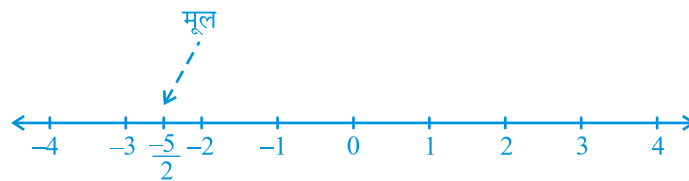
पिछली कक्षाओं में, आप एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। क्या आप एक चर वाला कोई रैखिक समीकरण लिख सकते हैं? आप कह सकते हैं कि  $x + 1 = 0$ ,  $x + \sqrt{2} = 0$  और  $\sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$  एक चर वाले रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। आप यह भी जानते हैं कि ऐसे समीकरणों का एक अद्वितीय (अर्थात् एक और केवल एक) हल होता है। आपको संभवतः यह भी याद होगा कि एक संख्या रेखा पर हल को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। इस अध्याय में, हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों पर पुनः विचार करेंगे और उनसे संबंधित ज्ञान को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों पर लागू करेंगे। यहाँ हम इस प्रकार के प्रश्नों पर विचार करेंगे: क्या दो चरों वाले रैखिक समीकरण का एक हल होता है? यदि हाँ, तो क्या यह अद्वितीय होता है? कार्तीय तल पर हल किस प्रकार दिखाई पड़ता है? इस प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करने के लिए, हम अध्याय 3 में बताई गई संकल्पनाओं का भी प्रयोग करेंगे।

#### 4.2 रैखिक समीकरण

आइए पहले हम यह देखें कि अभी तक आपने क्या-क्या अध्ययन किया है। आइए हम निम्नलिखित समीकरण लें :

$$2x + 5 = 0$$

इसका हल, अर्थात् समीकरण का मूल  $-\frac{5}{2}$  है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे की आकृति में दिखाया गया है :



आकृति 4.1

एक समीकरण को हल करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना होता है।

एक रैखिक समीकरण पर तब कोई प्रभाव नहीं पड़ता जबकि:

- (i) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटाई जाती है।
- (ii) समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग दिया जाता है।

आइए अब हम निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

नागपुर में भारत और श्रीलंका के बीच खेले गए एक एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एक साथ मिलकर 176 रन बनाए। इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों में से किसी भी बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रन ज्ञात नहीं हैं, अर्थात् यहाँ दो अज्ञात राशियाँ हैं। आइए हम इन अज्ञात राशियों को  $x$  और  $y$  से प्रकट करें। इस तरह एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या  $x$  है और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या  $y$  है। हम जानते हैं कि

$$x + y = 176$$

है, जो कि अभीष्ट समीकरण है।

यह दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण का एक उदाहरण है। यह परंपरा रही है कि इस प्रकार के समीकरणों के चरों को  $x$  और  $y$  से प्रकट किया जाता है, परंतु अन्य अक्षरों का भी प्रयोग किया जा सकता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के कुछ उदाहरण ये हैं:

$$1.2s + 3t = 5, p + 4q = 7, \pi u + 5v = 9 \text{ और } 3 = \sqrt{2}x - 7y$$

क्या आप कुछ और उदाहरण दे सकते हैं? ध्यान दीजिए कि आप इन समीकरणों को क्रमशः  $1.2s + 3t - 5 = 0$ ,  $p + 4q - 7 = 0$ ,  $\pi u + 5v - 9 = 0$  और  $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$  के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अतः उस समीकरण को, जिसे  $ax + by + c = 0$  के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ  $a$ ,  $b$  और  $c$  वास्तविक संख्याएँ हैं और  $a$  और  $b$  दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण (linear equation in two variables) कहा जाता है।

**उदाहरण 1 :** नीचे दिए गए समीकरणों को  $ax + by + c = 0$  के रूप में लिखिए और प्रत्येक स्थिति में  $a$ ,  $b$  और  $c$  के मान बताइए :

$$(i) 2x + 3y = 4.37 \quad (ii) x - 4 = \sqrt{3}y \quad (iii) 4 = 5x - 3y \quad (iv) 2x = y$$

**हल :** (i)  $2x + 3y = 4.37$  को  $2x + 3y - 4.37 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ  $a = 2$ ,  $b = 3$  और  $c = -4.37$  है।

(ii) समीकरण  $x - 4 = \sqrt{3}y$  को  $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ  $a = 1$ ,  $b = -\sqrt{3}$  और  $c = -4$  है।

(iii) समीकरण  $4 = 5x - 3y$  को  $5x - 3y - 4 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ  $a = 5$ ,  $b = -3$  और  $c = -4$  है। क्या आप इस बात से सहमत हैं कि इसे  $-5x + 3y + 4 = 0$  के रूप में भी लिखा जा सकता है? इस स्थिति में,  $a = -5$ ,  $b = 3$  और  $c = 4$  है।

(iv) समीकरण  $2x = y$  को  $2x - y + 0 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ  $a = 2$ ,  $b = -1$  और  $c = 0$  है।

समीकरण  $ax + b = 0$  भी दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का ही एक उदाहरण है, क्योंकि इसे  $ax + 0.y + b = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण के लिए,  $4 - 3x = 0$  को  $-3x + 0.y + 4 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है।

**उदाहरण 2 :** निम्नलिखित में से प्रत्येक को दो चरों वाले समीकरणों के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$(i) x = -5 \quad (ii) y = 2 \quad (iii) 2x = 3 \quad (iv) 5y = 2$$

**हल :** (i)  $x = -5$  को  $1.x + 0.y = -5$ , या  $1.x + 0.y + 5 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है।

(ii)  $y = 2$  को  $0.x + 1.y = 2$ , या  $0.x + 1.y - 2 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है।

(iii)  $2x = 3$  को  $2.x + 0.y - 3 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है।

(iv)  $5y = 2$  को  $0.x + 5.y - 2 = 0$  के रूप में लिखा जा सकता है।

### प्रश्नावली 4.1

1. एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दो गुनी है। इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।  
(संकेत : मान लीजिए, नोटबुक की कीमत  $x$  रु है और कलम की कीमत  $y$  रु है)।
2. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को  $ax + by + c = 0$  के रूप में व्यक्त कीजिए और प्रत्येक स्थिति में  $a$ ,  $b$  और  $c$  के मान बताइए:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} \quad 2x + 3y = 9.35 & \text{(ii)} \quad x - \frac{y}{5} - 10 = 0 & \text{(iii)} \quad -2x + 3y = 6 & \text{(iv)} \quad x = 3y \\ \text{(v)} \quad 2x = -5y & \text{(vi)} \quad 3x + 2 = 0 & \text{(vii)} \quad y - 2 = 0 & \text{(viii)} \quad 5 = 2x \end{array}$$

### 4.3 रैखिक समीकरण का हल

आपने देखा है कि एक चर वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय हल होता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्योंकि समीकरण में दो चर हैं, इसलिए हल का अर्थ होता है  $x$  तथा  $y$  के उन मानों का युग्म जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। आइए, हम समीकरण  $2x + 3y = 12$  लें। यहाँ  $x = 3$  और  $y = 2$  एक हल है, क्योंकि जब हम ऊपर के समीकरण में  $x = 3$  और  $y = 2$  प्रतिस्थापित करते हैं तब हमें यह प्राप्त होता है:

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

इस हल को एक क्रमित युग्म  $(3, 2)$  के रूप में लिखा जाता है, जिसमें पहले  $x$  का और उसके बाद  $y$  का मान लिखा जाता है। इसी प्रकार,  $(0, 4)$  भी ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल है।

इसके विपरीत,  $(1, 4)$  ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल नहीं है, क्योंकि  $x = 1$  और  $y = 4$  प्रतिस्थापित करने पर हमें  $2x + 3y = 14$  प्राप्त होता है जो 12 नहीं है। ध्यान दीजिए कि  $(0, 4)$  तो एक हल है परंतु  $(4, 0)$  एक हल नहीं है। इस तरह आपने  $2x + 3y = 12$  के कम से कम दो हल  $(3, 2)$  और  $(0, 4)$  प्राप्त कर लिए हैं।

क्या आप कोई अन्य हल प्राप्त कर सकते हैं? क्या आप इस बात से सहमत हैं कि  $(6, 0)$  एक अन्य हल है? यदि हाँ, तो आप इसे सत्यापित कीजिए। वस्तुतः निम्न विधि से हम कई हल प्राप्त कर सकते हैं:

आप  $2x + 3y = 12$  में अपनी इच्छानुसार  $x$  का एक मान (मान लीजिए  $x = 2$ ) ले सकते हैं। तब समीकरण  $4 + 3y = 12$  हो जाता है, जो कि एक चर वाला रैखिक समीकरण

है। इसे हल करने पर हमें  $y = \frac{8}{3}$  प्राप्त होता है। अतः  $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ ,  $2x + 3y = 12$  का एक अन्य हल है। इसी प्रकार,  $x = -5$  लेने पर हम पाते हैं कि समीकरण  $-10 + 3y = 12$  हो जाता है। इससे  $y = \frac{22}{3}$  प्राप्त होता है। अतः  $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ ,  $2x + 3y = 12$  का एक अन्य हल है। इसलिए दो चरों वाले रैखिक समीकरण के विभिन्न हलों का कोई अंत नहीं है। कहने का अर्थ है कि दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

**उदाहरण 3 :** समीकरण  $x + 2y = 6$  के चार अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।

**हल :** देखने पर  $x = 2, y = 2$  एक हल है, क्योंकि  $x = 2, y = 2$  पर

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

है। आइए, अब हम  $x = 0$  लें।  $x$  के इस मान पर दिया हुआ समीकरण  $2y = 6$  हो जाता है, जिसका कि एक अद्वितीय हल  $y = 3$  होता है। अतः  $x = 0, y = 3$  भी  $x + 2y = 6$  का एक हल है। इसी प्रकार,  $y = 0$  लेने पर दिया हुआ समीकरण  $x = 6$  हो जाता है। अतः  $x = 6, y = 0$  भी  $x + 2y = 6$  का एक हल है। अंत में, आइए हम  $y = 1$  लें। अब दिया हुआ समीकरण  $x + 2 = 6$  हो जाता है, जिसका हल  $x = 4$  है। इसलिए,  $(4, 1)$  भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। अतः, दिए हुए समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हलों में चार हल ये हैं:

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ और } (4, 1)$$

**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि एक हल प्राप्त करने की सरल विधि  $x = 0$  लेना है और  $y$  का संगत मान प्राप्त करना है। इसी प्रकार, हम  $y = 0$  ले सकते हैं और तब  $x$  का संगत मान प्राप्त कर लेते हैं।

**उदाहरण 4 :** निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात कीजिए:

$$(i) 4x + 3y = 12$$

$$(ii) 2x + 5y = 0$$

$$(iii) 3y + 4 = 0$$

**हल :** (i)  $x = 0$  लेने पर, हमें  $3y = 12$ , अर्थात्  $y = 4$  प्राप्त होता है। अतः  $(0, 4)$  भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। इसी प्रकार,  $y = 0$  लेने पर हमें  $x = 3$  प्राप्त होता है। इस तरह,  $(3, 0)$  भी एक हल है।

(ii)  $x = 0$  लेने पर, हमें  $5y = 0$ , अर्थात्  $y = 0$  प्राप्त होता है। इसलिए  $(0, 0)$  दिए हुए समीकरण का एक हल है।

अब, यदि हम  $y = 0$  लें, तो हमें एक हल के रूप में पुनः  $(0, 0)$  प्राप्त होता है; जो कि वही है जिसे हमने पहले प्राप्त किया था। एक अन्य हल प्राप्त करने के लिए  $x = 1$  लीजिए।

तब आप देख सकते हैं कि  $y$  का संगत मान  $-\frac{2}{5}$  है। अतः  $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ ,  $2x + 5y = 0$  का एक अन्य हल है।

(iii) समीकरण  $3y + 4 = 0$  को  $0.x + 3y + 4 = 0$  के रूप में लिखने पर,  $x$  के किसी भी मान पर हमें  $y = -\frac{4}{3}$  प्राप्त होगा। अतः हमें दो हल  $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$  और  $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$  प्राप्त हो सकते हैं।

### प्रश्नावली 4.2

- निम्नलिखित विकल्पों में कौन-सा विकल्प सत्य है, और क्यों?  
 $y = 3x + 5$  का  
 (i) एक अद्वितीय हल है (ii) केवल दो हल हैं (iii) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं
- निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के चार हल लिखिए:  
 (i)  $2x + y = 7$  (ii)  $px + y = 9$  (iii)  $x = 4y$
- बताइए कि निम्नलिखित हलों में कौन-कौन समीकरण  $x - 2y = 4$  के हल हैं और कौन-कौन हल नहीं हैं :  
 (i)  $(0, 2)$  (ii)  $(2, 0)$  (iii)  $(4, 0)$  (iv)  $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$  (v)  $(1, 1)$
- $k$  का मान ज्ञात कीजिए जबकि  $x = 2, y = 1$  समीकरण  $2x + 3y = k$  का एक हल हो।

### 4.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

- $ax + by + c = 0$  के रूप के समीकरण को जहाँ,  $a, b$  और  $c$  वास्तविक संख्याएँ हैं और  $a$  और  $b$  दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु रैखिक समीकरण का एक हल होता है। साथ ही, रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित एक बिंदु होता है।



0963CH05

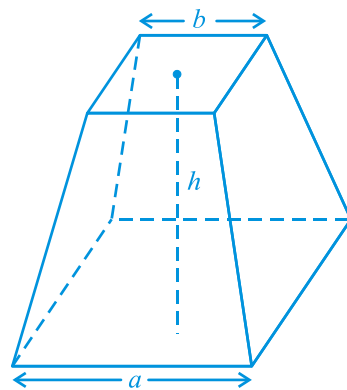
## अध्याय 5

### यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

#### 5.1 भूमिका

शब्द 'ज्यामिति' (geometry) यूनानी भाषा के शब्दों 'जियो' (geo) और 'मीट्रीन' (metrein) से मिल कर बना है। जियो का अर्थ है 'पृथ्वी' या 'भूमि' और मीट्रीन का अर्थ है 'मापना'। इससे ऐसा प्रतीत होता है कि ज्यामिति का उद्गम भूमि मापने की आवश्यकता के कारण हुआ है। गणित की इस शाखा का अध्ययन विभिन्न रूपों में प्रत्येक प्राचीन सभ्यताओं द्वारा किया गया, चाहे वह मिस्र हो, बेबीलोन हो, चीन हो, भारत हो, यूनान हो या इनकास (incas), इत्यादि। इन सभ्यताओं के लोगों को अनेक व्यावहारिक समस्याओं का सामना करना पड़ा जिनमें ज्यामिति के विकास की विभिन्न प्रकार से आवश्यकता पड़ी।

उदाहरण के तौर पर, जब भी नील नदी में बाढ़ आती थी, तो विभिन्न भूमि स्वामियों के संलग्न खेतों के बीच की परिसीमाओं (boundaries) को अपने साथ बहा ले जाती थी। इन बाढ़ों के बाद, इन परिसीमाओं को पुनः बनाया जाता था। इस कार्य के लिए, मिस्रवासियों ने सरल क्षेत्रफल परिकलित करने के साथ ही सरल रचनाएँ करने के लिए, अनेक ज्यामितीय तकनीकें और नियम विकसित किए। उन्होंने ज्यामिति के ज्ञान का उपयोग अन्नभण्डारों के आयतन निकालने तथा नहरों और पिरामिडों (pyramids) के निर्माण करने में किया। वे एक कटे हुए पिरामिड (truncated pyramid) (देखिए आकृति 5.1) का आयतन ज्ञात करने का सही



आकृति 5.1 : कटा हुआ पिरामिड

सूत्र भी जानते थे। आप जानते हैं कि पिरामिड एक ऐसी ठोस आकृति होती है, जिसका आधार एक त्रिभुज या वर्ग या कोई अन्य बहुभुज होता है और जिसके पार्श्व फलक (side faces या lateral faces), ऊपर एक ही बिंदु पर मिलने वाले त्रिभुज होते हैं।

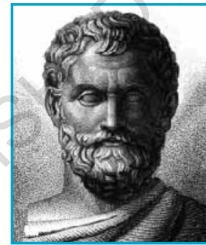
भारतीय उप-महाद्वीप में, हड़प्पा और मोहनजोदड़ो, इत्यादि की खुदाइयों से यह पता लगता है कि सिन्धु घाटी की सभ्यता (लगभग 3000 ई०पू०) ने ज्यामिति का प्रचुर मात्रा में उपयोग किया। वह एक उच्च कोटि का संगठित समाज था। शहर अत्याधिक रूप से विकसित थे और बड़े योजनाबद्ध ढंग से निर्मित किए गए थे। उदाहरणार्थ, सड़कें परस्पर समांतर होती थीं और भूमिगत नालियों की व्यवस्था थी। घरों में विभिन्न प्रकार के अनेक कमरे हुआ करते थे। ये बातें दर्शाती हैं कि नगरवासी क्षेत्रमिति (mensuration) और व्यावहारिक अंकगणित में पूर्ण रूप से निपुण थे। निर्माण कार्य में प्रयोग की जाने वाली ईंटें भट्टों पर पकाई (बनाई) जाती थीं और इन ईंटों के लिए अनुपात लम्बाई : चौड़ाई : मोटाई, 4 : 2 : 1 होता था।

प्राचीन भारत में, सुल्बासूत्र (800 ई०पू०-500 ई०पू०) ज्यामितीय रचनाओं के लिए महत्वपूर्ण ग्रंथ थे। वैदिक काल की ज्यामिति का उद्गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक भिन्न-भिन्न प्रकार की वेदियों और अग्नि-कुण्डों के निर्माण कार्य से हुआ। पवित्र अग्नियों को अधिक प्रभावशाली साधक होने के लिए, उनके स्थान, उनके आकारों और क्षेत्रफलों के बारे में स्पष्ट रूप से निर्धारित अनुदेशों के अनुसार, होते थे। घरेलू धार्मिक क्रियाओं के लिए, वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियों का प्रयोग किया जाता था, जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों के लिए आयतों, त्रिभुजों और समलंबों के संयोजनों (मिले जुले) से बने आकारों का प्रयोग आवश्यक होता था। (अथर्ववेद में दिए) 'श्रीयंत्र' में एक दूसरे के साथ जुड़े नौ समद्विबाहु त्रिभुज अंतर्निहित हैं। ये त्रिभुज इस प्रकार व्यवस्थित किए गए हैं कि इनसे 43 छोटे (या गौण) त्रिभुजों का निर्माण होता है। यद्यपि वेदियों की रचना करने में परिशुद्ध ज्यामितीय विधियों का उपयोग किया गया था, फिर भी इनसे संबंधित सिद्धांतों की कोई चर्चा नहीं की गई।

उपरोक्त उदाहरण यह दर्शाते हैं कि ज्यामिति का विकास और अनुप्रयोग विश्व के सभी स्थानों पर होता रहा। परन्तु यह बड़े अव्यवस्थित प्रकार से हो रहा था। प्राचीन विश्व में, ज्यामिति के विकास की इन गतिविधियों की एक रोचक बात यह है कि इनका ज्ञान एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी को या तो मौखिक रूप से या ताड़ के वृक्ष की पत्तियों पर लिखे संदेशों या कुछ अन्य विधियों द्वारा दिया जाता रहा। साथ ही, हम यह भी पाते हैं कि कुछ सभ्यताओं, जैसे कि बेबीलोनिया में, ज्यामिति एक अत्याधिक व्यावहारिक दृष्टिकोण वाले विषय तक

सीमित रही तथा ऐसा ही भारत और रोम में रहा। मिस्रवासियों द्वारा विकसित की गई ज्यामिति में मुख्यतः परिणामों के कथन ही निहित थे। इनमें प्रक्रियाओं (अथवा विधियों) के कोई व्यापक नियम नहीं दिए गए। वस्तुतः बेबीलोन और मिस्रवासियों दोनों ही ने ज्यामिति का उपयोग अधिकांशतः व्यावहारिक कार्यों के लिए ही किया तथा उसको एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम काम किया। परन्तु यूनान जैसी सभ्यताओं में इस तर्क पर बल दिया जाता था कि कुछ रचनाएँ किस प्रकार हो जाती हैं। यूनानियों की अभिरुचि उन कथनों, जिनको उन्होंने स्थापित किया था, की सत्यता निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) का उपयोग करके जाँचने में थी (देखिए परिशिष्ट 1)।

एक यूनानी गणितज्ञ थेल्स (Thales) को श्रेय जाता है कि उन्होंने सबसे पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) प्रदान की। यह उपपत्ति इस कथन की थी कि वृत्त का व्यास वृत्त को समद्विभाजित (अर्थात् दो बराबर भागों में विभाजित) करता है। थेल्स का एक सबसे प्रसिद्ध शिष्य पाइथागोरस (572 ई०पू०) था, जिसका नाम आपने अवश्य सुना होगा। पाइथागोरस और उसके साथियों ने अनेक ज्यामितीय गुणों की खोज की और ज्यामिति के सिद्धांतों का अत्यधिक विकास किया। यह प्रक्रिया 300 ई०पू० तक जारी रही। इसी समय मिस्र में अलेक्जेंड्रिया के एक गणित के शिक्षक यूक्लिड (Euclid) ने उस समय तक ज्ञात गणित के सभी ज्ञान को एकत्रित किया और **एलीमेंट्स (Elements)** नामक अपने प्रसिद्ध ग्रंथ के रूप में उसे व्यवस्थित किया। उन्होंने एलीमेंट्स को 13 अध्यायों में विभाजित किया, जिनमें से प्रत्येक को 'पुस्तिका' माना जाता है। इन पुस्तिकाओं ने समस्त विश्व की ज्यामिति संबंधी समझ को आने वाली पीढ़ियों तक प्रभावित किया।



थेल्स

(640 सा०यु०पू०-546 सा०यु०पू०)

आकृति 5.2



यूक्लिड

(325 सा०यु०पू०-265 सा०यु०पू०)

आकृति 5.3

इस अध्याय में, हम ज्यामिति के प्रति यूक्लिड के दृष्टिकोण की चर्चा करेंगे और ज्यामिति के वर्तमान स्वरूप से इसे जोड़ने का प्रयत्न करेंगे।

## 5.2 यूक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ

यूक्लिड के समय के यूनानी गणितज्ञों ने ज्यामिति को उस विश्व का एक सिद्धांतीय प्रतिमान (model) सोचा जिसमें वे रहते थे। बिंदु (point), रेखा (line), तल (plane) [या पृष्ठ (surface)],

इत्यादि की अवधारणाएँ उन वस्तुओं से स्थापित की गईं जो उनके आस-पास थीं। आकाश (space) और उनके आस-पास के ठोसों के अध्ययनों के आधार पर, एक ठोस वस्तु की सिद्धांतीय ज्यामितीय अवधारणा विकसित की गई। एक ठोस (solid) का आकार होता है, माप और स्थिति होती है तथा उसे एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाया जा सकता है। इसकी परिसीमाएँ **पृष्ठ (surface)** कहलाती हैं। ये आकाश के एक भाग को दूसरे भाग से पृथक् करती हैं और इनकी कोई मोटाई नहीं होती। पृष्ठों की परिसीमाएँ **वक्र (curves)** या सीधी **रेखाएँ (lines)** होती हैं। इन रेखाओं के सिरे बिंदु (points) होते हैं।

ठोसों से बिंदुओं (ठोस-पृष्ठ-रेखाएँ-बिंदु) तक के तीन चरणों पर विचार कीजिए। प्रत्येक चरण में, हम एक विस्तार, जिसे हम विमा (dimension) भी कहते हैं, से वंचित होते हैं। इसलिए, यह कहा जाता है कि एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं, एक पृष्ठ की दो विमाएँ, एक रेखा की एक विमा होती है और एक बिंदु की कोई विमा नहीं होती। यूक्लिड ने इन कथनों को संक्षिप्त रूप से परिभाषाओं के रूप में प्रस्तुत किया। उन्होंने अपने इन रहस्योद्घाटनों का प्रारम्भ 'एलीमेंट्स' की पुस्तक 1 में 23 परिभाषाएँ (definitions) देकर किया। इनमें से कुछ परिभाषाएँ नीचे दी जा रही हैं:

1. एक **बिंदु (point)** वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
2. एक **रेखा (line)** चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
3. एक रेखा के सिरे बिंदु होते हैं।
4. एक **सीधी रेखा** ऐसी रेखा है जो स्वयं पर बिंदुओं के साथ सपाट रूप से स्थित होती है।
5. एक **पृष्ठ (surface)** वह है जिसकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है।
6. पृष्ठ के **किनारे (edges)** रेखाएँ होती हैं।
7. एक समतल पृष्ठ (**plane surface**) ऐसा पृष्ठ है जो स्वयं पर सीधी रेखाओं के साथ सपाट रूप से स्थित होता है।

यदि आप ध्यानपूर्वक इन परिभाषाओं को देखें, तो आप पाएँगे कि कुछ पदों जैसे भाग, चौड़ाई, लम्बाई, सपाट रूप से, इत्यादि को स्पष्ट रूप से आगे और अधिक समझाने की आवश्यकता है। उदाहरणार्थ, बिंदु की परिभाषा पर विचार कीजिए जो यूक्लिड ने दी है। इस परिभाषा में, 'एक भाग' को परिभाषित करने की आवश्यकता है। मान लीजिए कि हम यह परिभाषित करें कि एक भाग वह है जो 'क्षेत्र' घेरता है, तो हमें पुनः 'क्षेत्र' को परिभाषित करने की आवश्यकता होगी। अतः एक वस्तु को परिभाषित करने के लिए, आपको अनेक वस्तुओं

को परिभाषित करने की आवश्यकता होती है और बिना किसी अंत के परिभाषाओं की एक लम्बी शृंखला प्राप्त हो सकती है। इन्हीं कारणवश, गणितज्ञों द्वारा यह सुविधाजनक पाया गया कि कुछ ज्यामितीय पदों को अपरिभाषित (*undefined*) मान लिया जाए। इस विधि से, हम एक बिंदु की ज्यामितीय संकल्पना का ऊपर दी हुई 'परिभाषा' की तुलना में एक बेहतर अंतर्ज्ञानात्मक आभास प्राप्त करेंगे। इसलिए, हम बिंदु को एक सूक्ष्म बिंदी (dot) से निरूपित करते हैं, परन्तु इस सूक्ष्म बिंदी की कुछ न कुछ विमा अवश्य होती है।

इसी प्रकार की समस्या उपरोक्त परिभाषा 2 में भी आती है। इसमें चौड़ाई और लम्बाई का संदर्भ आता है और इनमें से किसी को भी पहले परिभाषित नहीं किया गया है। इसी कारण, किसी भी विषय के अध्ययन के लिए कुछ पदों को अपरिभाषित रखा गया है। इसलिए, ज्यामिति में हम बिंदु, रेखा और तल (यूक्लिड के शब्दों में समतल पृष्ठ) को अपरिभाषित शब्दों के रूप में मान कर चलते हैं। केवल यह बात अवश्य है कि हम इन्हें अंतर्ज्ञानात्मक रूप से निरूपित कर सकते हैं अथवा 'भौतिक प्रतिमानों' (वस्तुओं) की सहायता से स्पष्ट कर सकते हैं।

अपनी इन परिभाषाओं से प्रारम्भ करते हुए, यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य कथन मानने की कल्पना की। ये कल्पनाएँ वास्तव में 'स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य' थे। उन्होंने इनको दो वर्गों में विभाजित किया। ये वर्ग थे : **अभिगृहीत (axioms)** और **अभिधारणाएँ (postulates)**। उन्होंने **अभिधारणा** शब्द का प्रयोग उन कल्पनाओं के लिए किया जो विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबंधित थीं। दूसरी ओर, सामान्य अवधारणाएँ [जिन्हें प्रायः **अभिगृहीत (axioms)** कहा गया] वे कल्पनाएँ थीं जिन्हें निरंतर गणित में प्रयोग किया गया और जिनका केवल ज्यामिति से ही विशेष संबंध नहीं था। अभिगृहीत और अभिधारणाओं की और अधिक जानकारी के लिए परिशिष्ट 1 को देखिए।

**यूक्लिड के कुछ अभिगृहीतों** को, बिना उनके द्वारा दिए क्रम के, नीचे दिया जा रहा है:

- (1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों एक दूसरे के बराबर होती हैं।
- (2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
- (3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
- (4) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।
- (5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
- (6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।
- (7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

ये सामान्य अवधारणाएँ किसी प्रकार के परिमाणों (magnitudes) के संदर्भ में कही गई हैं। पहली सामान्य अवधारणा को समतलीय आकृतियों के लिए प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर हो और इस आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल भी वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

एक ही प्रकार के परिमाणों की तुलना की जा सकती है और उन्हें जोड़ा भी जा सकता है, परंतु भिन्न-भिन्न प्रकार के परिमाणों की तुलना नहीं की जा सकती है। उदाहरणार्थ, एक रेखा को एक आयत में जोड़ा नहीं जा सकता और न ही एक कोण की एक पंचभुज (pentagon) से तुलना की जा सकती है।

ऊपर दिया हुआ चौथा अभिगृहीत यह बताता हुआ प्रतीत होता है कि यदि दो वस्तुएँ सर्वसम (identical) हों (अर्थात् वे एक ही हों), तो वे बराबर होती हैं। दूसरे शब्दों में, कोई भी वस्तु स्वयं के बराबर होती है। यह अध्यारोपण (superposition) के सिद्धांत की तर्कसंगतता प्रकट करता है। अभिगृहीत (5) 'से बड़ा है (greater than)' की परिभाषा देता है। उदाहरणार्थ, यदि कोई राशि B, किसी अन्य राशि A का एक भाग हो, तो A को राशि B और एक अन्य राशि C के योग के रूप में लिखा जा सकता है। सांकेतिक रूप से,  $A > B$  का अर्थ है कि कोई C ऐसा है कि  $A = B + C$  है।

आइए अब यूक्लिड की पाँच अभिधारणाओं (postulates) की चर्चा करें। ये इस प्रकार हैं:

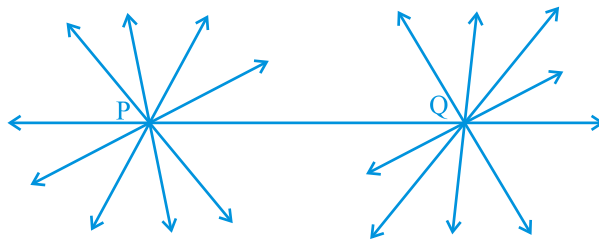
**अभिधारणा 1 :** एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

ध्यान दीजिए कि यह अभिधारणा हमें बताती है कि दो भिन्न (distinct) बिंदुओं से होकर कम से कम एक रेखा अवश्य खींची जा सकती है, परन्तु इससे यह नहीं ज्ञात होता कि ऐसी एक से अधिक सीधी रेखाएँ नहीं हो सकतीं। परन्तु अपने समस्त कार्यों में यूक्लिड ने, बिना कुछ बताए, यह बार-बार कल्पना की है कि दो भिन्न बिंदुओं से एक अद्वितीय (unique) रेखा ही खींची जा सकती है। हम इस परिणाम को एक अभिगृहीत के रूप में नीचे दे रहे हैं:

**अभिगृहीत 5.1 :** दिए हुए दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

बिंदु P से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं जो बिंदु Q से होकर भी जाती हों (देखिए आकृति 5.4)? केवल एक। यह रेखा PQ है। बिंदु Q से होकर जाने वाली ऐसी

कितनी रेखाएँ हैं जो बिंदु P से होकर भी जाती हैं? केवल एक, अर्थात् रेखा PQ। इस प्रकार, उपरोक्त कथन एक स्वयं सिद्ध (self evident) सत्य है और इसीलिए हम इसे एक अभिगृहीत के रूप में मान लेते हैं।



आकृति 5.4

**अभिधारणा 2 :** एक सांत रेखा (terminated line) को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

ध्यान दीजिए जिसको हम आजकल रेखाखंड (line segment) कहते हैं, उसे यूक्लिड ने सांत रेखा कहा था। अतः, वर्तमान की भाषा में, दूसरी अभिधारणा यह कहती है कि एक रेखाखंड को दोनों ओर विस्तृत करके एक रेखा बनाई जा सकती है (देखिए आकृति 5.5)।



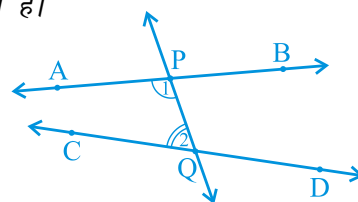
आकृति 5.5

**अभिधारणा 3 :** किसी को केन्द्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

**अभिधारणा 4 :** सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

**अभिधारणा 5 :** यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंतः कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिल कर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

उदाहरणार्थ, आकृति 5.6 में, रेखा PQ रेखाओं AB और CD पर इस प्रकार गिरती है कि अंतः कोणों 1 और 2 का योग, जो PQ के बाईं ओर स्थित हैं,  $180^\circ$  से कम है। अतः, रेखाएँ AB और CD अंततः PQ के बाईं ओर प्रतिच्छेद करेंगी।



आकृति 5.6

उपरोक्त पाँचों अभिधारणाओं को केवल देखने मात्र से, हमें यह स्पष्टतः पता चल जाएगा कि अन्य अभिधारणाओं की तुलना में अभिधारणा 5 कुछ अधिक जटिल है। दूसरी ओर, अभिधारणाएँ 1 से 4 इतनी सरल और स्पष्ट हैं कि उन्हें स्वयं सिद्ध सत्य के रूप में मान लिया जाता है। परन्तु, इन्हें सिद्ध करना संभव नहीं है। इसलिए, इन कथनों को बिना उपपत्ति (proof) के स्वीकृत कर लिया गया है (देखिए परिशिष्ट 1)। इस जटिलता के कारण, पाँचवीं अभिधारणा पर अगले अनुच्छेद में अधिक ध्यान दिया जाएगा।

आजकल, 'अभिधारणा' और 'अभिगृहीत' दोनों पदों को एक दूसरे के लिए एक ही अर्थ में प्रयोग किया जाता है। वास्तव में, अभिधारणा एक क्रिया (verb) है। जब हम कहते हैं कि 'आइए अभिधारणा करें', तो इसका अर्थ है कि 'आइए विश्व में प्रेक्षित परिघटनाओं (phenomena) के आधार पर कुछ कथन कहें।' इसकी सत्यता/मान्यता की जाँच बाद में की जाती है। यदि वह सत्य है, तो उसे 'अभिधारणा' के रूप में स्वीकृत कर लिया जाता है।

कुछ अभिगृहीतों का एक निकाय (system) *अविरोधी* (consistent) कहलाता है (देखिए परिशिष्ट 1), यदि इन अभिगृहीतों से ऐसा कथन निर्मित करना असंभव हो, जो किसी अन्य अभिगृहीत या पहले सिद्ध किए गए किसी कथन के विरोधी (contradictory) हो। अतः, यदि अभिगृहीतों का कोई निकाय दिया हो, तो यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि यह निकाय अविरोधी हो।

यूक्लिड ने अपनी अभिधारणाएँ और अभिगृहीतों को देने के बाद, इनका प्रयोग अन्य परिणामों को सिद्ध करने में किया। फिर इन परिणामों का प्रयोग करके, उन्होंने निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) द्वारा कुछ और परिणामों को सिद्ध किया। जिन कथनों को सिद्ध किया वे **साध्य** (propositions) या **प्रमेय** (theorems) कहलाती थीं। यूक्लिड ने अपनी अभिगृहीतों, अभिधारणाओं, परिभाषाओं और पहले सिद्ध की गई प्रमेयों का प्रयोग करके, एक तार्किक शृंखला में 465 साध्य निगमित (deduce) किए। ज्यामिति के कुछ अगले अध्यायों में आप इन अभिगृहीतों का प्रयोग करके कुछ प्रमेयों को सिद्ध करेंगे।

आइए आगे आने वाले उदाहरणों में देखें कि यूक्लिड ने कुछ परिणामों को सिद्ध करने के लिए अपनी अभिगृहीतों और अभिधारणाओं का किस प्रकार प्रयोग किया।

**उदाहरण 1 :** यदि A, B और C एक रेखा पर स्थित तीन बिंदु हैं और B बिंदुओं A और C के बीच में स्थित है (देखिए आकृति 5.7), तो सिद्ध कीजिए कि  $AB + BC = AC$  है।



आकृति 5.7

**हल :** उपरोक्त आकृति में,  $AB + BC$  के साथ  $AC$  संपाती है।

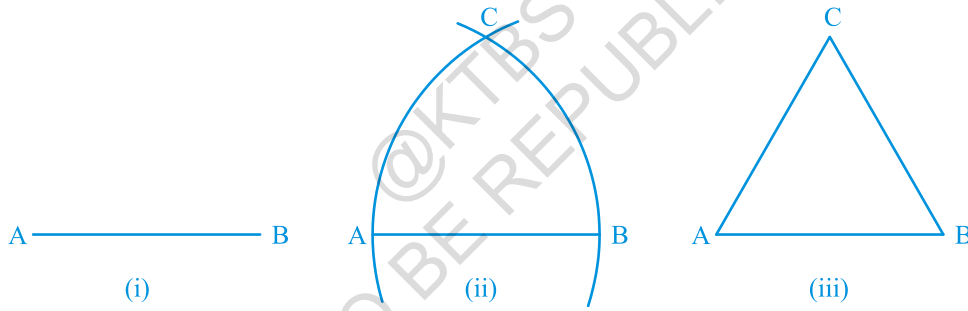
साथ ही, यूक्लिड का अभिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती हैं। अतः, यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$AB + BC = AC$$

है। ध्यान दीजिए कि इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

**उदाहरण 2 :** सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए रेखाखंड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

**हल :** उपरोक्त कथन में, एक दी हुई लम्बाई का एक रेखाखंड, मान लीजिए,  $AB$  दिया है [देखिए आकृति 5.8 (i)]।



आकृति 5.8

यहाँ आपको कुछ रचना करने की आवश्यकता है। यूक्लिड की अभिधारणा (3) का प्रयोग करके, आप बिंदु A को केन्द्र और AB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं [देखिए आकृति 5.8 (ii)]। इसी प्रकार, B को केन्द्र मानकर और BA त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा जा सकता है। ये दोनों वृत्त मान लीजिए बिंदु C पर मिलते हैं। अब रेखाखंडों AC और BC खींच कर  $\triangle ABC$  बनाइए [देखिए आकृति 5.8 (iii)]।

इसलिए, आपको सिद्ध करना है कि यह त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है; अर्थात्  $AB = AC = BC$  है।

अब,  $AB = AC$  है, क्योंकि ये एक वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। (1)

इसी प्रकार,  $AB = BC$  (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ) (2)

उपरोक्त दोनों तथ्यों और यूक्लिड के पहले अभिगृहीत (वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती हैं एक दूसरे के बराबर होती हैं) से आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि  $AB = BC = AC$  है।

अतः,  $\Delta ABC$  एक समबाहु त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए कि यहाँ यूक्लिड ने, बिना कहीं बताए, यह मान लिया है कि केन्द्रों A और B को लेकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक बिंदु पर मिलेंगे।

अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे जो विभिन्न परिणामों में अनेक बार अधिकांशतः प्रयोग की जाती है:

**प्रमेय 5.1 :** दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं हो सकता।

**उपपत्ति :** यहाँ, हमें दो रेखाएँ  $l$  और  $m$  दी हुई हैं। हमें यह सिद्ध करना है कि  $l$  और  $m$  में केवल एक बिंदु उभयनिष्ठ है।

थोड़े समय के लिए, यह मान लीजिए कि ये दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती हैं।

इस प्रकार, दो भिन्न बिंदुओं P और Q से होकर जाने वाली आपके पास दो रेखाएँ  $l$  और  $m$  हो जाती हैं। परन्तु यह कथन अभिगृहीत 5.1 के विरुद्ध है, जिसके अनुसार दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है। अतः, हम जिस कल्पना से चले थे कि दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाती हैं गलत है।

इससे हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? हम निष्कर्ष निकालने पर बाध्य हो जाते हैं कि दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होगा।

### प्रश्नावली 5.1

- निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।
  - एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।
  - दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ हैं।
  - एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।
  - यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।
  - आकृति 5.9 में, यदि  $AB = PQ$  और  $PQ = XY$  है, तो  $AB = XY$  होगा।



आकृति 5.9

2. निम्नलिखित पदों में से प्रत्येक की परिभाषा दीजिए। क्या इनके लिए कुछ ऐसे पद हैं, जिन्हें परिभाषित करने की आवश्यकता है? वे क्या हैं और आप इन्हें कैसे परिभाषित कर पाएँगे?
  - (i) समांतर रेखाएँ
  - (ii) लम्ब रेखाएँ
  - (iii) रेखाखंड
  - (iv) वृत्त की त्रिज्या
  - (v) वर्ग
3. नीचे दी हुई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए :
  - (i) दो भिन्न बिंदु A और B दिए रहने पर, एक तीसरा बिंदु C ऐसा विद्यमान है जो A और B के बीच स्थित होता है।
  - (ii) यहाँ कम से कम ऐसे तीन बिंदु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।
 क्या इन अभिधारणाओं में कोई अपरिभाषित शब्द हैं? क्या ये अभिधारणाएँ अवरोधी हैं? क्या ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त होती हैं? स्पष्ट कीजिए।
4. यदि दो बिंदुओं A और B के बीच एक बिंदु C ऐसा स्थित है कि  $AC = BC$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $AC = \frac{1}{2}AB$  है। एक आकृति खींच कर इसे स्पष्ट कीजिए।
5. प्रश्न 4 में, C रेखाखंड AB का एक मध्य-बिंदु कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखंड का एक और केवल एक ही मध्य-बिंदु होता है।
6. आकृति 5.10 में, यदि  $AC = BD$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $AB = CD$  है।



आकृति 5.10

7. यूक्लिड की अभिगृहीतों की सूची में दिया हुआ अभिगृहीत 5 एक सर्वव्यापी सत्य क्यों माना जाता है? (ध्यान दीजिए कि यह प्रश्न पाँचवीं अभिधारणा से संबंधित नहीं है।)

### 5.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. यद्यपि यूक्लिड ने बिंदु, रेखा और तल को परिभाषित किया है, परन्तु गणितज्ञों ने इन परिभाषाओं को स्वीकार नहीं किया है। इसलिए ज्यामिति में इन्हें अब अपरिभाषित पदों के रूप में लिया जाता है।

2. अभिगृहीत और अभिधारणाएँ ऐसी कल्पनाएँ हैं जो स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य होती हैं। इन्हें सिद्ध नहीं किया जाता है।
3. प्रमेय वे कथन हैं जिन्हें परिभाषाओं, अभिगृहीतों, पहले सिद्ध किए गए कथनों और निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध किया जाता है।
4. यूक्लिड के कुछ अभिगृहीत थे :
  - (1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।
  - (2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
  - (3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
  - (4) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती हैं।
  - (5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
  - (6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।
  - (7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।
5. यूक्लिड की अभिधारणाएँ निम्न थीं :

**अभिधारणा 1 :** एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

**अभिधारणा 2 :** एक सांत रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

**अभिधारणा 3 :** किसी को केन्द्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

**अभिधारणा 4 :** सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।



0963CH06

## अध्याय 6

### रेखाएँ और कोण

#### 6.1 भूमिका

अध्याय 5 में, आप पढ़ चुके हैं कि एक रेखा को खींचने के लिए न्यूनतम दो बिंदुओं की आवश्यकता होती है। आपने कुछ अभिगृहीतों (axioms) का भी अध्ययन किया है और उनकी सहायता से कुछ अन्य कथनों को सिद्ध किया है। इस अध्याय में, आप कोणों के उन गुणों का अध्ययन करेंगे जब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं और कोणों के उन गुणों का भी अध्ययन करेंगे जब एक रेखा दो या अधिक समांतर रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है। साथ ही, आप इन गुणों का निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) द्वारा कुछ कथनों को सिद्ध करने में भी प्रयोग करेंगे (देखिए परिशिष्ट 1)। आप पिछली कक्षाओं में इन कथनों की कुछ क्रियाकलापों द्वारा जाँच (पुष्टि) कर चुके हैं।

आप अपने दैनिक जीवन में समतल पृष्ठों के किनारों (edges) के बीच बने अनेक प्रकार के कोण देखते हैं। समतल पृष्ठों का प्रयोग करके, एक ही प्रकार के मॉडल बनाने के लिए, आपको कोणों के बारे में विस्तृत जानकारी की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, आप अपने विद्यालय की प्रदर्शनी के लिए बाँसों का प्रयोग करके एक झोंपड़ी का मॉडल बनाना चाहते हैं। सोचिए, आप इसे कैसे बनाएँगे। कुछ बाँसों को आप परस्पर समांतर रखेंगे और कुछ को तिरछा रखेंगे। जब एक आर्किटेक्ट (architect) एक बहुतलीय भवन के लिए एक रेखाचित्र खींचता है, तो उसे विभिन्न कोणों पर प्रतिच्छेदी और समांतर रेखाएँ खींचनी पड़ती हैं। क्या आप सोचते हैं कि वह रेखाओं और कोणों के ज्ञान के बिना इस भवन की रूपरेखा खींच सकता है?

विज्ञान में, आप प्रकाश के गुणों का किरण आरेख (ray diagrams) खींच कर अध्ययन करते हैं। उदाहरणार्थ, प्रकाश के अपवर्तन (refraction) गुण का अध्ययन करने के लिए, जब

प्रकाश की किरणें एक माध्यम (medium) से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती हैं, आप प्रतिच्छेदी रेखाओं और समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करते हैं। जब एक पिंड पर दो या अधिक बल कार्य कर रहे हों, तो आप इन बलों का उस पिंड पर परिणामी बल ज्ञात करने के लिए, एक ऐसा आरेख खींचते हैं जिसमें बलों को दिष्ट रेखाखंडों (directed line segments) द्वारा निरूपित किया जाता है। उस समय, आपको उन कोणों के बीच संबंध जानने की आवश्यकता होगी जिनकी किरणें (अथवा रेखाखंड) परस्पर समांतर या प्रतिच्छेदी होंगी। एक मीनार की ऊँचाई ज्ञात करने अथवा किसी जहाज की एक प्रकाश पुंज (light house) से दूरी ज्ञात करने के लिए, हमें क्षैतिज और दृष्टि रेखा (line of sight) के बीच बने कोण की जानकारी की आवश्यकता होगी। प्रचुर मात्रा में ऐसे उदाहरण दिए जा सकते हैं जहाँ रेखाओं और कोणों का प्रयोग किया जाता है। ज्यामिति के आने वाले अध्यायों में, आप रेखाओं और कोणों के इन गुणों का अन्य उपयोगी गुणों को निगमित (निकालने) करने में प्रयोग करेंगे।

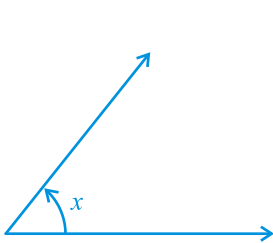
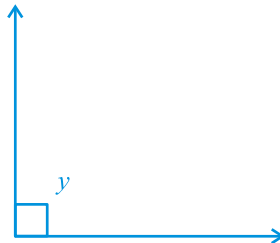
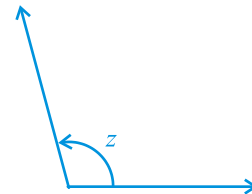
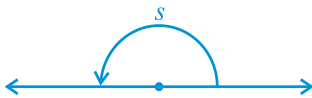
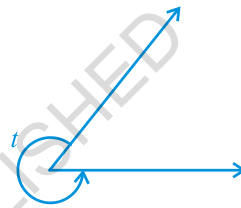
आइए पहले हम पिछली कक्षाओं में रेखाओं और कोणों से संबंधित पढ़े गए पदों और परिभाषाओं का पुनर्विलोकन करें।

## 6.2 आधारभूत पद और परिभाषाएँ

याद कीजिए कि एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों एक **रेखाखंड** कहलाता है और रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिंदु हो एक **किरण** कहलाता है। ध्यान दीजिए कि रेखाखंड  $AB$  को  $\overline{AB}$  से व्यक्त किया जाता है और उसकी लंबाई को  $AB$  से व्यक्त किया जाता है। किरण  $AB$  को  $\overrightarrow{AB}$  से और रेखा  $AB$  को  $\overleftrightarrow{AB}$  से व्यक्त किया जाता है। परन्तु हम इन संकेतनों का प्रयोग नहीं करेंगे तथा रेखा  $AB$ , किरण  $AB$ , रेखाखंड  $AB$  और उसकी लंबाई को एक ही संकेत  $AB$  से व्यक्त करेंगे। इनका अर्थ संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा। कभी-कभी छोटे अक्षर जैसे  $l, m, n$  इत्यादि का प्रयोग रेखाओं को व्यक्त करने में किया जाएगा।

यदि तीन या अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों, तो वे **सरेख बिंदु (collinear points)** कहलाते हैं, अन्यथा वे **असरेख बिंदु (non-collinear points)** कहलाते हैं।

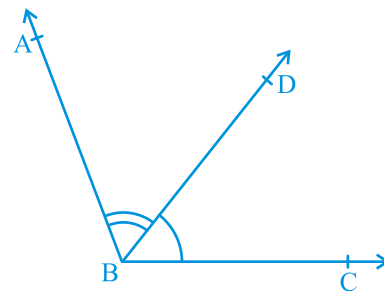
याद कीजिए कि जब दो किरणें एक ही अंत बिंदु से प्रारम्भ होती हैं, तो एक **कोण (angle)** बनता है। कोण को बनाने वाली दोनों किरणें कोण की **भुजाएँ (arms या sides)** कहलाती हैं और वह उभयनिष्ठ अंत बिंदु कोण का **शीर्ष (vertex)** कहलाता है। आप पिछली कक्षाओं में, विभिन्न प्रकार के कोणों जैसे न्यून कोण (acute angle), समकोण (right angle), अधिक कोण (obtuse angle), ऋजु कोण (straight angle) और प्रतिवर्ती कोण (reflex angle) के बारे में पढ़ चुके हैं (देखिए आकृति 6.1)।

(i) न्यून कोण:  $0^\circ < x < 90^\circ$ (ii) समकोण:  $y = 90^\circ$ (iii) अधिक कोण:  $90^\circ < z < 180^\circ$ (iv) ऋजु कोण:  $s = 180^\circ$ (v) प्रतिवर्ती कोण:  $180^\circ < t < 360^\circ$ 

#### आकृति 6.1 : कोणों के प्रकार

एक **न्यून कोण** का माप  $0^\circ$  और  $90^\circ$  के बीच होता है, जबकि एक **समकोण** का माप ठीक  $90^\circ$  होता है।  $90^\circ$  से अधिक परन्तु  $180^\circ$  से कम माप वाला कोण **अधिक कोण** कहलाता है। साथ ही, याद कीजिए कि एक **ऋजु कोण**  $180^\circ$  के बराबर होता है। वह कोण जो  $180^\circ$  से अधिक, परन्तु  $360^\circ$  से कम माप का होता है एक **प्रतिवर्ती कोण** कहलाता है। इसके अतिरिक्त, यदि दो कोणों का योग एक समकोण के बराबर हो, तो ऐसे कोण **पूरक कोण (complementary angles)** कहलाते हैं और वे दो कोण, जिनका योग  $180^\circ$  हो, **संपूरक कोण (supplementary angles)** कहलाते हैं।

आप पिछली कक्षाओं में आसन्न कोणों (adjacent angles) के बारे में भी पढ़ चुके हैं (देखिए आकृति 6.2)। दो कोण **आसन्न कोण (adjacent angles)** कहलाते हैं, यदि उनमें एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो, एक उभयनिष्ठ भुजा हो और उनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हों। आकृति 6.2 में,  $\angle ABD$  और  $\angle DBC$  आसन्न कोण हैं। किरण BD इनकी उभयनिष्ठ भुजा है और B इनका उभयनिष्ठ



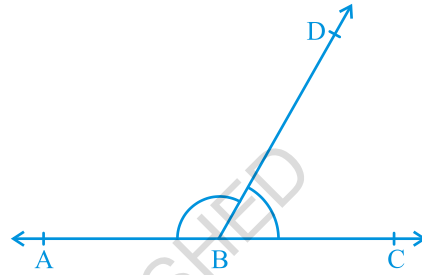
आकृति 6.2 : आसन्न कोण

शीर्ष है। किरण BA और किरण BC वे भुजाएँ हैं जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। इसके अतिरिक्त, जब दो कोण आसन्न कोण होते हैं, तो उनका योग उस कोण के बराबर होता है जो इनकी उन भुजाओं से बनता है, जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। अतः हम लिख सकते हैं कि  $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$  है।

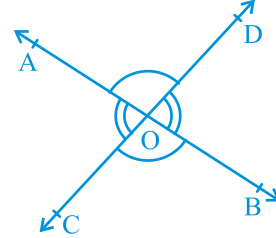
ध्यान दीजिए कि  $\angle ABC$  और  $\angle ABD$  आसन्न कोण नहीं हैं। क्यों? इसका कारण यह है कि अउभयनिष्ठ भुजाएँ (अर्थात् वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं) BD और BC उभयनिष्ठ भुजा BA के एक ही ओर स्थित है।

यदि आकृति 6.2 में, अउभयनिष्ठ भुजाएँ BA और BC एक रेखा बनाएँ, तो यह आकृति 6.3 जैसा लगेगा। इस स्थिति में,  $\angle ABD$  और  $\angle DBC$  कोणों का एक रैखिक युग्म (linear pair of angles) बनाते हैं।

आप शीर्षाभिमुख कोणों (vertically opposite angles) को भी याद कर सकते हैं, जो दो रेखाओं, मान लीजिए, AB और CD को परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करने पर बनते हैं (देखिए आकृति 6.4)। यहाँ शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म हैं। इनमें से एक युग्म  $\angle AOD$  और  $\angle BOC$  का है। क्या आप दूसरा युग्म ज्ञात कर सकते हैं?



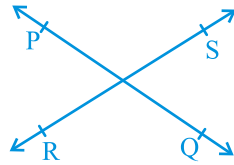
आकृति 6.3 : कोणों का रैखिक युग्म



आकृति 6.4 : शीर्षाभिमुख कोण

### 6.3 प्रतिच्छेदी रेखाएँ और अप्रतिच्छेदी रेखाएँ

एक कागज पर दो भिन्न रेखाएँ PQ और RS खींचिए। आप देखेंगे कि आप इन रेखाओं को दो प्रकार से खींच सकते हैं, जैसा कि आकृति 6.5 (i) और आकृति 6.5 (ii) में दर्शाया गया है।



(i) प्रतिच्छेदी रेखाएँ



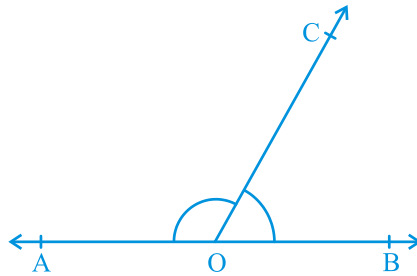
(ii) अप्रतिच्छेदी (समांतर) रेखाएँ

### आकृति 6.5 : दो रेखाएँ खींचने के विभिन्न प्रकार

रेखा की इस अवधारणा को भी याद कीजिए कि वह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है। रेखाएँ PQ और RS आकृति 6.5 (i) में प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं और आकृति 6.5 (ii) में ये समांतर रेखाएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इन दोनों समांतर रेखाओं के विभिन्न बिंदुओं पर उनके उभयनिष्ठ लम्बों की लंबाइयाँ समान रहेंगी। यह समान लंबाई दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी कहलाती है।

### 6.4 कोणों के युग्म

अनुच्छेद 6.2 में, आप कोणों के कुछ युग्मों जैसे पूरक कोण, संपूरक कोण, आसन्न कोण, कोणों का रैखिक युग्म, इत्यादि की परिभाषाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। क्या आप इन कोणों में किसी संबंध के बारे में सोच सकते हैं? आइए अब उन कोणों में संबंध पर विचार करें जिन्हें कोई किरण किसी रेखा पर स्थित होकर बनाती है, जैसा कि आकृति 6.6 में दर्शाया गया है। रेखा को AB और किरण को OC कहिए। बिंदु O पर बनने वाले कोण क्या हैं? ये  $\angle AOC$ ,  $\angle BOC$  और  $\angle AOB$  हैं।



आकृति 6.6 : कोणों का रैखिक युग्म

क्या हम  $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$  लिख सकते हैं? (1)

हाँ! (क्यों? अनुच्छेद 6.2 में दिए आसन्न कोणों को देखिए।)

$\angle AOB$  का माप क्या है? यह  $180^\circ$  है। (क्यों?) (2)

क्या (1) और (2) से, आप कह सकते हैं कि  $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$  है? हाँ! (क्यों?)

उपरोक्त चर्चा के आधार पर, हम निम्न अभिगृहीत को लिख सकते हैं:

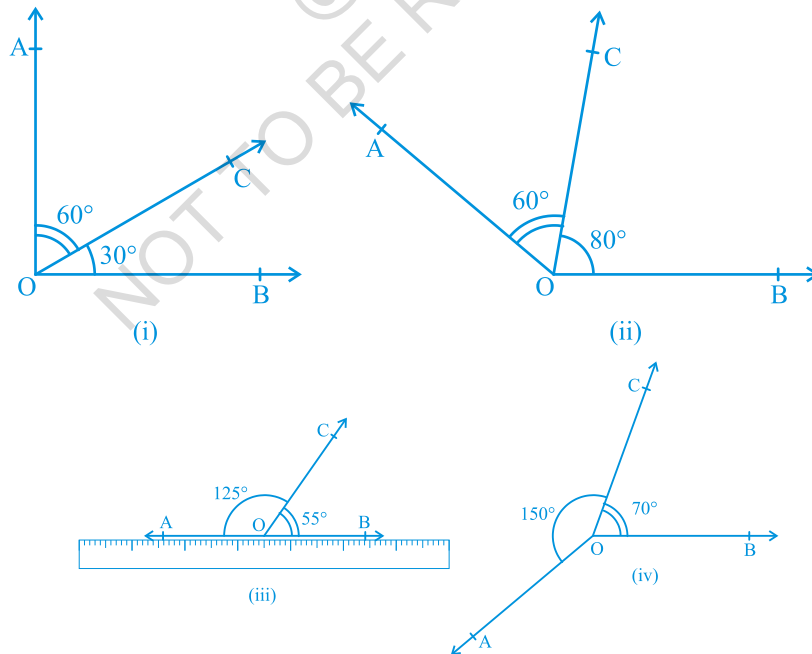
**अभिगृहीत 6.1 :** यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  होता है।

याद कीजिए कि जब दो आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  हो, तो वे कोणों का एक **रैखिक युग्म** बनाते हैं।

अभिगृहीत 6.1 में यह दिया है कि 'एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो'। इस दिए हुए से, हमने निष्कर्ष निकाला कि इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  होता है। क्या हम अभिगृहीत 6.1 को एक विपरीत प्रकार से लिख सकते हैं? अर्थात् अभिगृहीत 6.1 के निष्कर्ष को दिया हुआ मानें और उसके दिए हुए को निष्कर्ष मानें। तब हमें यह प्राप्त होगा:

(A) यदि दो आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  है, तो एक किरण एक रेखा पर खड़ी होती है (अर्थात् अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक ही रेखा में हैं)।

अब आप देखते हैं कि अभिगृहीत 6.1 और कथन (A) एक दूसरे के विपरीत हैं। हम इनमें से प्रत्येक को दूसरे का **विलोम (converse)** कहते हैं। हम यह नहीं जानते कि कथन (A) सत्य है या नहीं। आइए इसकी जाँच करें। विभिन्न मापों के, आकृति 6.7 में दर्शाए अनुसार, आसन्न कोण खींचिए। प्रत्येक स्थिति में, अउभयनिष्ठ भुजाओं में से एक भुजा के अनुदिश एक पट्टी (ruler) रखिए। क्या दूसरी भुजा भी इस पट्टी के अनुदिश स्थित है?



**आकृति 6.7 :** विभिन्न मापों के आसन्न कोण

आप पाएँगे कि केवल आकृति 6.7 (iii) में ही दोनों अउभयनिष्ठ भुजाएँ पटरी के अनुदिश हैं, अर्थात् A, O और B एक ही रेखा पर स्थित हैं और किरण OC इस रेखा पर खड़ी है। साथ ही, यह भी देखिए कि  $\angle AOC + \angle COB = 125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$  है। इससे आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि कथन (A) सत्य है। अतः, आप इसे एक अभिगृहीत के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

**अभिगृहीत 6.2 :** यदि दो आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  है, तो उनकी अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं।

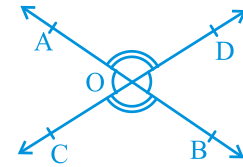
स्पष्ट कारणों से, उपरोक्त दोनों अभिगृहीतों को मिला कर **रैखिक युग्म अभिगृहीत (Linear Pair Axiom)** कहते हैं।

आइए अब उस स्थिति की जाँच करें जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं।

पिछली कक्षाओं से आपको याद होगा कि यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं। आइए अब इस परिणाम को सिद्ध करें। एक उपपत्ति (proof) में निहित अवयवों के लिए, परिशिष्ट 1 को देखिए और नीचे दी हुई उपपत्ति को पढ़ते समय इन्हें ध्यान में रखिए।

**प्रमेय 6.1 :** यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

**उपपत्ति :** उपरोक्त कथन में यह दिया है कि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः मान लीजिए कि AB और CD दो रेखाएँ हैं जो परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं, जैसा कि आकृति 6.8 में दर्शाया गया है। इससे हमें शीर्षाभिमुख कोणों के निम्न दो युग्म प्राप्त होते हैं:



आकृति 6.8 : शीर्षाभिमुख कोण

(i)  $\angle AOC$  और  $\angle BOD$  (ii)  $\angle AOD$  और  $\angle BOC$

हमें सिद्ध करना है कि  $\angle AOC = \angle BOD$  है और  $\angle AOD = \angle BOC$  है।

अब किरण OA रेखा CD पर खड़ी है।

अतः,  $\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$

(रैखिक युग्म अभिगृहीत) (1)

क्या हम  $\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$  लिख सकते हैं? हाँ। (क्यों?)

(2)

(1) और (2) से, हम लिख सकते हैं कि:

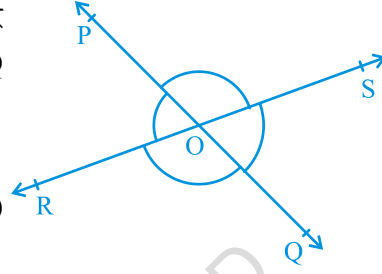
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि  $\angle AOC = \angle BOD$  (अनुच्छेद 5.2 का अभिगृहीत 3 देखिए)

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि  $\angle AOD = \angle BOC$  है।

आइए अब रैखिक युग्म अभिगृहीत और प्रमेय 6.1 पर आधारित कुछ उदाहरण हल करें।

**उदाहरण 1 :** आकृति 6.9 में, रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि  $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$  है, तो सभी कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.9

**हल :**  $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$

(रैखिक युग्म के कोण)

परन्तु,  $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$  (दिया है)

$$\text{अतः,} \quad \angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$$

$$\text{इसी प्रकार,} \quad \angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$$

$$\text{अब} \quad \angle POS = \angle ROQ = 105^\circ \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

$$\text{और} \quad \angle SOQ = \angle POR = 75^\circ \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

**उदाहरण 2 :** आकृति 6.10 में, किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है। किरण OR और OT क्रमशः  $\angle POS$  और  $\angle SOQ$  के समद्विभाजक हैं। यदि  $\angle POS = x$  है, तो  $\angle ROT$  ज्ञात कीजिए।

**हल :** किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है।

$$\text{अतः,} \quad \angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$$

$$\text{परन्तु,} \quad \angle POS = x$$

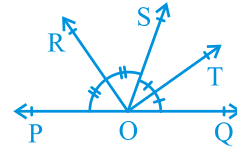
$$\text{अतः,} \quad x + \angle SOQ = 180^\circ$$

$$\text{इसलिए,} \quad \angle SOQ = 180^\circ - x$$

अब किरण OR,  $\angle POS$  को समद्विभाजित करती है।

$$\text{इसलिए,} \quad \angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$



आकृति 6.10

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned}\angle SOT &= \frac{1}{2} \times \angle SOQ \\ &= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x) \\ &= 90^\circ - \frac{x}{2}\end{aligned}$$

अब,

$$\begin{aligned}\angle ROT &= \angle ROS + \angle SOT \\ &= \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2} \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

**उदाहरण 3 :** आकृति 6.11 में, OP, OQ, OR और OS चार किरणें हैं। सिद्ध कीजिए कि  $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$  है।

**हल :** आकृति 6.11 में, आपको किरणों OP, OQ, OR और OS में से किसी एक को पीछे एक बिंदु तक बढ़ाए जाने की आवश्यकता है। आइए किरण OQ को एक बिंदु T तक पीछे बढ़ा दें ताकि TOQ एक रेखा हो (देखिए आकृति 6.12)।

अब किरण OP रेखा TOQ पर खड़ी है।

अतः,

$$\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ \quad (1)$$

(रैखिक युग्म अभिगृहीत)

इसी प्रकार, किरण OS रेखा TOQ पर खड़ी है।

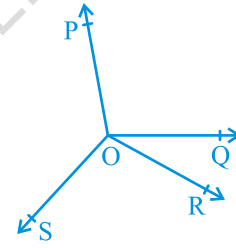
अतः,

$$\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ \quad (2)$$

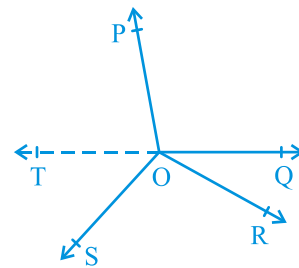
परन्तु  $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$  है।

अतः, (2) निम्न हो जाती है :

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^\circ \quad (3)$$



आकृति 6.11



आकृति 6.12

अब, (1) और (3) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा:

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ \quad (4)$$

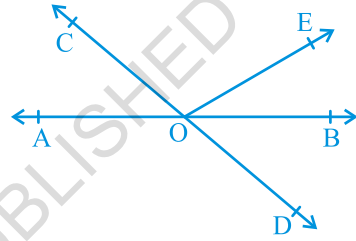
परन्तु  $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$  है।

अतः, (4) निम्न हो जाती है :

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$$

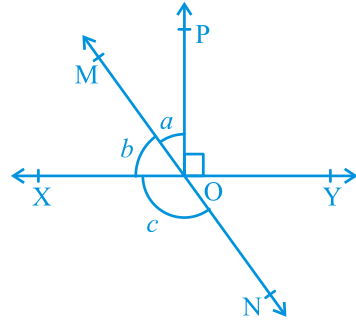
### प्रश्नावली 6.1

1. आकृति 6.13 में, रेखाएँ AB और CD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि  $\angle AOC + \angle BOE = 70^\circ$  है और  $\angle BOD = 40^\circ$  है, तो  $\angle BOE$  और प्रतिवर्ती  $\angle COE$  ज्ञात कीजिए।



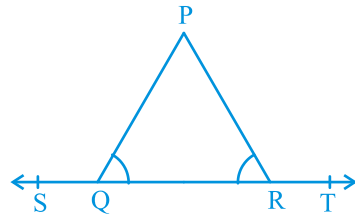
आकृति 6.13

2. आकृति 6.14 में, रेखाएँ XY और MN बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि  $\angle POY = 90^\circ$  और  $a : b = 2 : 3$  है, तो  $c$  ज्ञात कीजिए।



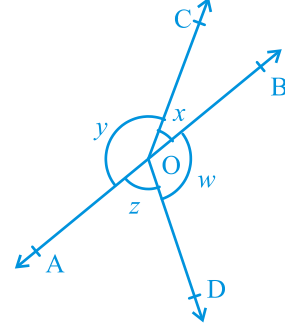
आकृति 6.14

3. आकृति 6.15 में, यदि  $\angle PQR = \angle PRQ$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\angle PQS = \angle PRT$  है।



आकृति 6.15

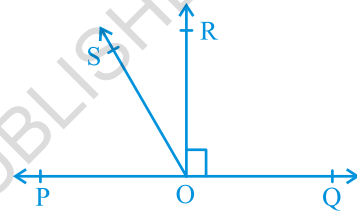
4. आकृति 6.16 में, यदि  $x + y = w + z$  है, तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक रेखा है।



आकृति 6.16

5. आकृति 6.17 में, POQ एक रेखा है। किरण OR रेखा PQ पर लम्ब है। किरणों OP और OR के बीच में OS एक अन्य किरण है। सिद्ध कीजिए:

$$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$$



आकृति 6.17

6. यह दिया है कि  $\angle XYZ = 64^\circ$  है और XY को बिंदु P तक बढ़ाया गया है। दी हुई सूचना से एक आकृति खींचिए। यदि किरण YQ,  $\angle ZYP$  को समद्विभाजित करती है, तो  $\angle XYQ$  और प्रतिवर्ती  $\angle QYP$  के मान ज्ञात कीजिए।

### 6.5 एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ

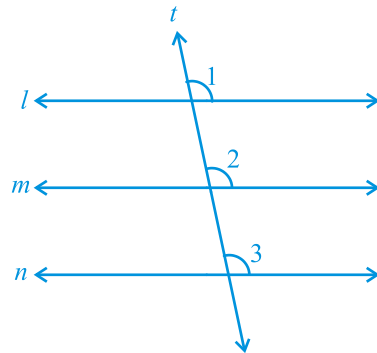
यदि दो रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर हों, तो क्या वे परस्पर समांतर होंगी? आइए इसकी जाँच करें। आकृति 6.18 को देखिए, जिसमें  $m \parallel l$  है और  $n \parallel l$  है। आइए रेखाओं  $l$ ,  $m$  और  $n$  के लिए एक तिर्यक रेखा  $t$  खींचें। यह दिया है कि  $m \parallel l$  है और  $n \parallel l$  है।

अतः,  $\angle 1 = \angle 2$  और  $\angle 1 = \angle 3$  है।

(संगत कोण अभिगृहीत)

इसलिए,  $\angle 2 = \angle 3$  (क्यों?)

परन्तु  $\angle 2$  और  $\angle 3$  संगत कोण हैं और बराबर हैं।



आकृति 6.18

अतः, आप कह सकते हैं कि

$$m \parallel n \quad (\text{संगत कोण अभिगृहीत का विलोम})$$

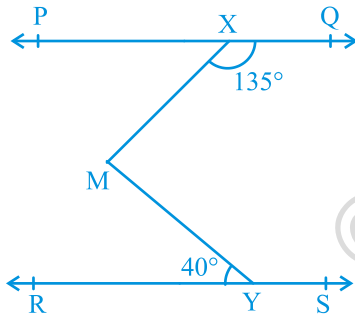
इस परिणाम को एक प्रमेय के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

**प्रमेय 6.2 :** वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती हैं।

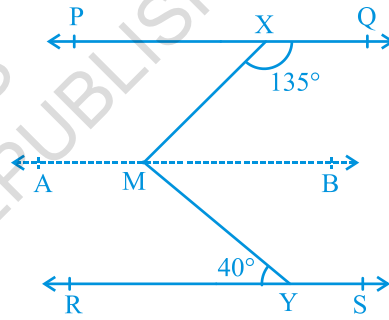
**टिप्पणी :** उपरोक्त गुण को दो से अधिक रेखाओं के लिए भी लागू किया जा सकता है।

आइए अब समांतर रेखाओं से संबंधित कुछ प्रश्न हल करें:

**उदाहरण 4 :** आकृति 6.19 में, यदि  $PQ \parallel RS$ ,  $\angle MXQ = 135^\circ$  और  $\angle MYR = 40^\circ$  है, तो  $\angle XMY$  ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.19



आकृति 6.20

**हल :** यहाँ हमें  $m$  से होकर, रेखा PQ के समांतर एक रेखा AB खींचने की आवश्यकता है, जैसा कि आकृति 6.20 में दिखाया गया है। अब,  $AB \parallel PQ$  और  $PQ \parallel RS$  है।

अतः,  $AB \parallel RS$  है। (क्यों?)

अब,  $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$

( $AB \parallel PQ$ , तिर्यक रेखा XM के एक ही ओर के अंतः कोण)

परन्तु,  $\angle QXM = 135^\circ$  है। इसलिए,

$$135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$$

अतः,  $\angle XMB = 45^\circ$  (1)

अब,  $\angle BMY = \angle MYR$  ( $AB \parallel RS$ , एकांतर कोण)

अतः,  $\angle BMY = 40^\circ$  (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा :

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$$

अर्थात्,

$$\angle XMY = 85^\circ$$

**उदाहरण 5 :** यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों के एक युग्म के समद्विभाजक परस्पर समांतर हों, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों रेखाएँ भी परस्पर समांतर होती हैं।

**हल :** आकृति 6.21 में, एक तिर्यक रेखा AD दो रेखाओं PQ और RS को क्रमशः बिंदुओं B और C पर प्रतिच्छेद करती है। किरण BE,  $\angle ABQ$  की समद्विभाजक है और किरण CG,  $\angle BCS$  की समद्विभाजक है तथा  $BE \parallel CG$  है।

हमें सिद्ध करना है कि  $PQ \parallel RS$  है।

यह दिया है कि किरण BE,  $\angle ABQ$  की समद्विभाजक है।

$$\text{अतः,} \quad \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ \quad (1)$$

इसी प्रकार किरण CG,  $\angle BCS$  की समद्विभाजक है।

$$\text{अतः,} \quad \angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS \quad (2)$$

परन्तु,  $BE \parallel CG$  है और AD एक तिर्यक रेखा है।

$$\text{अतः,} \quad \angle ABE = \angle BCG$$

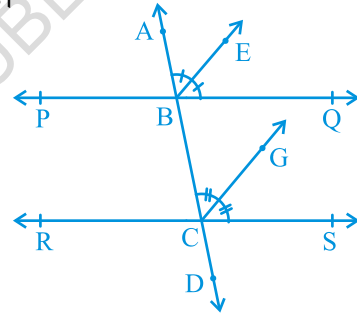
(संगत कोण अभिगृहीत) (3)

(3) में, (1) और (2) को प्रतिस्थापित करने पर, आपको प्राप्त होगा:

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

$$\text{अर्थात्,} \quad \angle ABQ = \angle BCS$$

परन्तु, ये तिर्यक रेखा AD द्वारा रेखाओं PQ और RS के साथ बनाए गए संगत कोण हैं और ये बराबर हैं।



आकृति 6.21

अतः,  $PQ \parallel RS$   
(संगत कोण अभिगृहीत का विलोम)

**उदाहरण 6 :** आकृति 6.22 में,  $AB \parallel CD$  और  $CD \parallel EF$  है। साथ ही,  $EA \perp AB$  है। यदि  $\angle BEF = 55^\circ$  है, तो  $x, y$  और  $z$  के मान ज्ञात कीजिए।

**हल :**  $y + 55^\circ = 180^\circ$  ( $CD \parallel EF$ , तिर्यक रेखा  $ED$  के एक ही ओर के अंतः कोण)

अतः,  $y = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

पुनः,  $x = y$  ( $AB \parallel CD$ , संगत कोण अभिगृहीत)

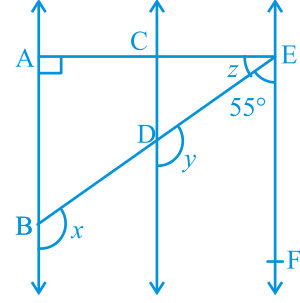
इसलिए,  $x = 125^\circ$

अब चूँकि  $AB \parallel CD$  और  $CD \parallel EF$  है, इसलिए  $AB \parallel EF$  है।

अतः,  $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$   
(तिर्यक रेखा  $EA$  के एक ही ओर के अंतः कोण)

इसलिए,  $90^\circ + z + 55^\circ = 180^\circ$

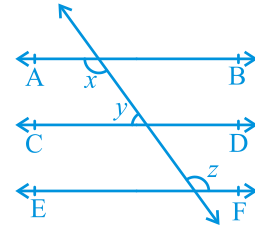
जिससे,  $z = 35^\circ$  प्राप्त होता है।



आकृति 6.22

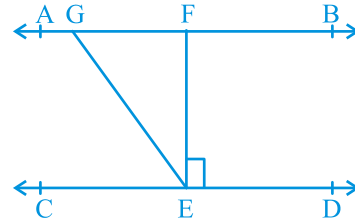
### प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.23 में, यदि  $AB \parallel CD$ ,  $CD \parallel EF$  और  $y : z = 3 : 7$  है, तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.23

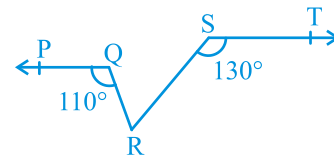
2. आकृति 6.24 में, यदि  $AB \parallel CD$ ,  $EF \perp CD$  और  $\angle GED = 126^\circ$  है, तो  $\angle AGE$ ,  $\angle GEF$  और  $\angle FGE$  ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.24

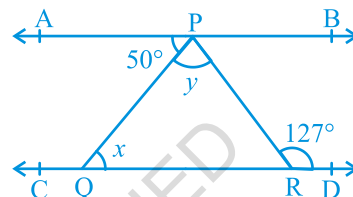
3. आकृति 6.25 में, यदि  $PQ \parallel ST$ ,  $\angle PQR = 110^\circ$  और  $\angle RST = 130^\circ$  है, तो  $\angle QRS$  ज्ञात कीजिए।

[संकेत : बिंदु R से होकर ST के समांतर एक रेखा खींचिए।]



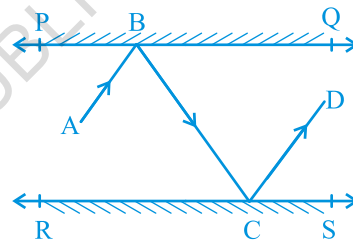
आकृति 6.25

4. आकृति 6.26 में, यदि  $AB \parallel CD$ ,  $\angle APQ = 50^\circ$  और  $\angle PRD = 127^\circ$  है, तो  $x$  और  $y$  ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.26

5. आकृति 6.27 में, PQ और RS दो दर्पण हैं जो एक दूसरे के समांतर रखे गए हैं। एक आपतन किरण (incident ray) AB, दर्पण PQ से B पर टकराती है और परावर्तित किरण (reflected ray) पथ BC पर चलकर दर्पण RS से C पर टकराती है तथा पुनः CD के अनुदिश परावर्तित हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि  $AB \parallel CD$  है।



आकृति 6.27

## 6.6 सारांश

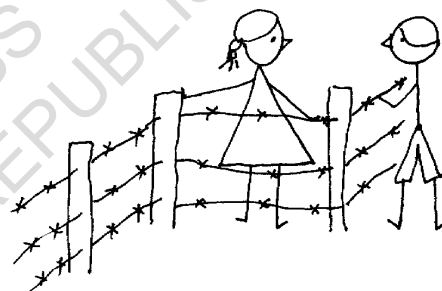
इस अध्याय में, आपने निम्न बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  होता है और विलोमतः यदि दो आसन्न कोणों का योग  $180^\circ$  है, तो उनकी अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं। इन गुणों को मिलाकर रैखिक युग्म अभिगृहीत कहते हैं।
2. यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।
3. वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर होती हैं परस्पर समांतर होती हैं।

## गणित में उपपत्तियाँ

### A1.1 भूमिका

मान लीजिए आपके परिवार के पास एक भूखंड है, परन्तु उसके चारों ओर कोई बाड़ (fence) नहीं बनी है। एक दिन आपके पड़ोसी ने अपने भूखंड के चारों ओर बाड़ (fence) बनाने का निर्णय लिया। जब पड़ोसी ने बाड़ बना ली, तब आपको पता चला कि बाड़ के अंदर आपके परिवार के भूखंड का कुछ भाग चला गया है। आप अपने पड़ोसी को कैसे सिद्ध करेंगे कि उसने आपके भूखंड के कुछ भाग पर



कब्जा करने की कोशिश की है। इस संबंध में आपका पहला काम परिसीमा वाले विवाद को सुलझाने के लिए गाँव के बुजुर्गों से सहायता लेना हो सकता है। परन्तु, मान लीजिए कि इस मामले में बुजुर्गों के अलग-अलग मत हैं। कुछ बुजुर्ग आपके दावे को सही मानते हैं और कुछ आपके पड़ोसी के दावे को सही मानते हैं। तब, ऐसी स्थिति में आप क्या करेंगे? इस संबंध में आपके सामने केवल यही विकल्प रह जाता है कि अपने भूखंड की परिसीमाओं पर अपने दावे को स्थापित करने के लिए आप एक ऐसी विधि निकालें जो कि सभी को स्वीकार्य हो। उदाहरण के लिए, अपने दावे को सही सिद्ध करने और अपने पड़ोसी के दावे को गलत सिद्ध करने के लिए, आप यदि आवश्यक हुआ तो न्यायालय में, सरकार द्वारा अनुमोदित अपने गाँव के सर्वेक्षण मानचित्र का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति पर विचार करें। मान लीजिए आपकी माँ ने अगस्त महीने, 2005 का घर की बिजली के बिल का भुगतान कर दिया है। परन्तु सितंबर, 2005 के बिल में यह दर्शाया गया है कि अगस्त के बिल का भुगतान नहीं किया गया है। बिजली विभाग द्वारा किए गए इए दावे को आप किस प्रकार गलत सिद्ध करेंगे? इसके लिए आपको भुगतान बिल रसीद प्रस्तुत करनी होगी, जो यह सिद्ध कर देगी कि अगस्त महीने के बिल का भुगतान किया जा चुका है।

ऊपर के उदाहरणों से यह पता चलता है कि हमें अपने दैनिक जीवन में प्रायः यह सिद्ध करना होता है कि अमुक कथन या दावा सत्य है या असत्य। फिर भी, ऐसे अनेक कथन होते हैं जिन्हें सिद्ध किए बिना ही हम स्वीकार कर लेते हैं। परन्तु, गणित में हम किसी कथन को सत्य या असत्य केवल तभी स्वीकार करते हैं (कुछ अभिगृहीतों को छोड़कर) जब गणित के तर्क के अनुसार इस कथन को सिद्ध कर दिया गया हो।

वस्तुतः, गणित में उपपत्तियों का अस्तित्व हजारों वर्षों से रहा है और ये गणित की किसी भी शाखा के केंद्र होती हैं। ऐसा विश्वास किया जाता है कि पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) एक यूनानी दार्शनिक और गणितज्ञ थेल्स ने प्रस्तुत की थी। यूँ तो मेसोपोटामिया, मिस्र, चीन और भारत जैसी अनेक प्राचीन सभ्यताओं में गणित केंद्रित है, फिर भी इस बात का कोई स्पष्ट प्रमाण नहीं मिलता है कि उन्होंने उपपत्तियों का प्रयोग उस प्रकार किया था जिस प्रकार आज हम करते हैं।

इस अध्याय में, हम देखेंगे कि कथन क्या होते हैं, गणित में किस प्रकार तर्क दिया जाता है और एक गणितीय उपपत्ति में क्या-क्या अवयव निहित होते हैं।

### A1.2 गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन

इस अनुच्छेद में, हम गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन (mathematically acceptable statement) के अर्थ की व्याख्या करने का प्रयास करेंगे। ‘कथन’ वह वाक्य है जो न तो आदेश सूचक वाक्य होता है और न ही विस्मयादि बोधक (exclamatory) वाक्य। निःसंदेह, कथन एक प्रश्न भी नहीं है! उदाहरण के लिए,

“आपके बालों का रंग क्या है?” यह एक कथन नहीं है। यह एक प्रश्न है।

“कृपया जाइए और मेरे लिए पानी लाइए” एक अनुरोध या एक आदेश है। यह एक कथन नहीं है।

“कितना मनमोहक सूर्यास्त है !” एक विस्मयादि बोधक टिप्पणी है। यह एक कथन नहीं है।

फिर भी, “आपके बालों का रंग काला है” एक कथन है।

सामान्यतः, कथन निम्नलिखित प्रकारों में से एक हो सकता है:

- सदैव सत्य (always true)
- सदैव असत्य (always false)
- संदिग्ध (ambiguous)

यहाँ शब्द “संदिग्ध” की कुछ व्याख्या कर देना आवश्यक है। ऐसी दो स्थितियाँ होती हैं जिनसे कथन संदिग्ध बन जाता है। पहली स्थिति तो वह होती है जबकि हम यह निर्णय नहीं ले पाते कि कथन सदैव सत्य है या सदैव असत्य है। उदाहरण के लिए, “कल गुरुवार है” संदिग्ध है, क्योंकि संदर्भ में इतना कुछ नहीं बताया गया है, जिससे हम यह निर्णय ले सकें कि कथन सत्य है या असत्य।

संदिग्धता की दूसरी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब कथन व्यक्तिपरक (subjective) होता है। अर्थात् कुछ व्यक्तियों के लिए यह सत्य होता है और अन्य व्यक्तियों के लिए असत्य होता है। उदाहरण के लिए, “कुत्ते बुद्धिमान होते हैं” संदिग्ध कथन है, क्योंकि कुछ लोग इसे सत्य मानते हैं और कुछ इसे सत्य नहीं मानते हैं।

**उदाहरण 1 :** बताइए कि निम्न कथनों में कौन-कौन से कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। अपने उत्तर की कारण सहित पुष्टि कीजिए।

- एक सप्ताह में आठ दिन होते हैं।
- यहाँ वर्षा हो रही है।
- पश्चिम में सूर्यास्त होता है।
- गौरी एक दयालु लड़की है।
- दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सम होता है।
- दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।

**हल :**

- कथन सदैव असत्य है, क्योंकि एक सप्ताह में 7 दिन होते हैं।
- यह कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ कहाँ है।
- कथन सदैव सत्य है। हम कहीं भी रहते हों, सूर्यास्त पश्चिम में ही होता है।
- कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह व्यक्तिपरक है। कुछ लोगों के लिए गौरी दयालु हो सकती है और अन्य लोगों के लिए नहीं।
- कथन सदैव असत्य है। दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सदैव विषम होता है।
- यह कथन सदैव सत्य है। फिर भी इस बात की पुष्टि करने के लिए कि यह सत्य है, हमें कुछ और करने की आवश्यकता होगी। इसे अनुच्छेद A1.4 में सिद्ध किया जाएगा।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि अपने दैनिक जीवन में हम कथनों की मान्यता के प्रति अधिक सावधान नहीं रहते। उदाहरण के लिए, मान लीजिए आपकी सहेली आपको यह बताती है कि केरल के मन्तावड़ी में जुलाई के महीने में प्रतिदिन वर्षा होती है। पूर्ण विश्वास के साथ आप उसके इस कथन को सत्य मान लेंगी, यद्यपि यह संभव है कि जुलाई के महीने में एक या दो दिन वर्षा न भी हुई हो और, यदि आप वकील नहीं हैं, तो आप उससे बहस नहीं करेंगी।

एक अन्य उदाहरण के रूप में कुछ ऐसे कथन लीजिए, जिन्हें हम प्रायः एक दूसरे से कहते रहते हैं जैसे “आज बहुत गर्मी है।” हम ऐसे कथनों को सरलता से स्वीकार कर लेते हैं, क्योंकि हम संदर्भ जानते हैं, यद्यपि ये कथन संदिग्ध हैं। “आज बहुत गर्मी है” का अर्थ अलग-अलग लोगों के लिए अलग-अलग हो सकता है, क्योंकि कुमायूँ के व्यक्ति के लिए जो मौसम बहुत गर्म होगा, वह चैन्नई के व्यक्ति के लिए गर्म नहीं भी हो सकता है।



परन्तु गणितीय कथन संदिग्ध नहीं हो सकता है। गणित में कथन केवल स्वीकार्य या मान्य (valid) होता है, जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो। जब यह सदैव सत्य होता है, तब हम कहते हैं कि यह एक सत्य कथन (true statement) है अन्यथा कथन असत्य होता है।

उदाहरण के लिए,  $5 + 2 = 7$  सदैव सत्य है। अतः ' $5 + 2 = 7$ ' एक सत्य कथन है।  $5 + 3 = 7$  असत्य है। अतः ' $5 + 3 = 7$ ' एक असत्य कथन है।

**उदाहरण 2 :** बताइए कि नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य :

- (i) एक त्रिभुज के अंतःकोणों का योग  $180^\circ$  होता है।
- (ii) 1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है।
- (iii) किसी भी वास्तविक संख्या  $x$  के लिए  $4x + x = 5x$  होता है।
- (iv) प्रत्येक वास्तविक संख्या  $x$  के लिए  $2x > x$  होगा।
- (v) प्रत्येक वास्तविक संख्या  $x$  के लिए  $x^2 \geq x$  होगा।
- (vi) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

**हल :**

- (i) यह कथन सत्य है। आप इसे अध्याय 6 में सिद्ध कर चुके हैं।
- (ii) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए 9 एक अभाज्य संख्या नहीं है।
- (iii) यह कथन सत्य है।
- (iv) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए,  $2 \times (-1) = -2$ , और  $-2, -1$  से बड़ा नहीं है।
- (v) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए,  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , और  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  से बड़ा नहीं है।
- (vi) यह कथन असत्य है; क्योंकि समचतुर्भुज की बराबर भुजाएँ तो होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि वह एक वर्ग है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यह स्थापित करने के लिए कि गणित के अनुसार कथन सत्य नहीं है, हमें एक ऐसा उदाहरण या ऐसी स्थिति देनी होगी, जहाँ यह लागू नहीं होता। अतः (ii) में, क्योंकि 9 अभाज्य संख्या नहीं है, यह एक उदाहरण है जो यह दर्शाता है कि कथन "1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है", सत्य नहीं है। इस प्रकार का उदाहरण, जो कथन के अनुकूल न हो, प्रत्युदाहरण (counter example) कहलाता है। हम अनुच्छेद A1.5 में प्रत्युदाहरणों पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस बात की ओर भी आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यद्यपि कथन (iv), (v) और (vi) असत्य हैं, फिर भी इन पर कुछ प्रतिबंध लगाकर आप इन्हें सत्य बना सकते हैं।

**उदाहरण 3 :** उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों को पुनः इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन हो जाएँ।

- (i) प्रत्येक वास्तविक संख्या  $x$  के लिए  $2x > x$  होगा।
- (ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या  $x$  के लिए  $x^2 \geq x$  होगा।
- (iii) यदि आप एक संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव ही 1 प्राप्त होगा।
- (iv) वृत्त के एक बिंदु पर उसकी जीवा द्वारा अंतरित कोण  $90^\circ$  का होता है।
- (v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

**हल :**

- (i) यदि  $x > 0$  हो, तो  $2x > x$  होगा।
- (ii) यदि  $x \leq 0$  हो या  $x \geq 1$  हो, तो  $x^2 \geq x$  होगा।
- (iii) यदि शून्य के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव 1 प्राप्त होगा।
- (iv) वृत्त के एक बिंदु पर वृत्त के एक व्यास द्वारा अंतरित कोण  $90^\circ$  का होता है।
- (v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ और सभी अंतःकोण बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

### प्रश्नावली A 1.1

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
  - (i) एक वर्ष में 13 महीने होते हैं।
  - (ii) दीवाली शुक्रवार को पड़ रही है।
  - (iii) मगादी में तापमान  $26^\circ \text{C}$  है।
  - (iv) पृथ्वी का एक चन्द्रमा है।
  - (v) कुत्ते उड़ सकते हैं।
  - (vi) फरवरी में केवल 28 दिन होते हैं।
2. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित उत्तर दीजिए।
  - (i) एक चतुर्भुज के अंतःकोणों का योग  $350^\circ$  होता है।
  - (ii) किसी भी वास्तविक संख्या  $x$  के लिए  $x^2 \geq 0$  है।
  - (iii) समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।
  - (iv) दो सम संख्याओं का योग सम होता है।
  - (v) दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है।

3. उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर, निम्नलिखित कथनों को इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन बन जाएँ:
- सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।
  - एक वास्तविक संख्या का दुगुना सदा एक सम संख्या होती है।
  - किसी भी  $x$  के लिए,  $3x + 1 > 4$  होता है।
  - किसी भी  $x$  के लिए,  $x^3 \geq 0$  होता है।
  - प्रत्येक त्रिभुज में माध्यिका एक कोण समद्विभाजक भी होती है।

### A1.3 निगमनिक तर्कण

एक **असंदिग्ध (unambiguous)** कथन की सत्यता स्थापित करने में प्रयुक्त मुख्य तर्कसंगत साधन **निगमनिक तर्कण (deductive reasoning)** है।

निगमनिक तर्कण को समझने के लिए, आइए हम एक पहेली से प्रारंभ करें जिसे आपको हल करना है।

मान लीजिए आपको चार कार्ड दिए गए हैं। प्रत्येक कार्ड की एक ओर एक संख्या छपी है और दूसरी ओर एक अक्षर छपा है।



मान लीजिए आपको यह बताया जाता है कि ये कार्ड निम्नलिखित नियम का पालन करते हैं:

“यदि कार्ड की एक ओर एक सम संख्या हो, तो दूसरी ओर एक स्वर (vowel) होता है।”

नियम की सत्यता की जाँच करने के लिए, **कम से कम** कितने कार्डों को उलटने की आवश्यकता होगी।

हाँ, यह विकल्प तो आपके पास है ही कि आप सभी कार्डों को उलट सकते हैं और जाँच कर सकते हैं। परन्तु क्या आप कम संख्या में कार्डों को उलट कर, दिए हुए कथन की जाँच कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि कथन में यह बताया गया है कि वह कार्ड जिसकी एक ओर सम संख्या है उसकी दूसरी ओर एक स्वर होता है। इस कथन में यह नहीं बताया गया है कि जिस कार्ड की एक ओर स्वर है उसकी दूसरी ओर एक सम संख्या अवश्य होनी चाहिए। ऐसा हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। नियम में यह भी नहीं बताया गया है कि वह कार्ड जिसके एक ओर एक विषम संख्या है, उसके दूसरी ओर व्यंजन (consonant) होना ही चाहिए। यह हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है।

अतः क्या हमें 'A' को उलटने की आवश्यकता होगी? उत्तर है: नहीं। दूसरी ओर चाहें एक सम संख्या हो या एक विषम संख्या हो, नियम तब भी लागू होता है।

“5” के संबंध में आप क्या कहेंगे? यहाँ भी हमें कार्ड उलटने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि दूसरी ओर चाहे स्वर हो या व्यंजन, नियम तब भी लागू होता है।

परन्तु V और 6 वाले कार्डों को उलटने की आवश्यकता है। यदि V की दूसरी ओर एक सम संख्या हो, तो नियम भंग हो जाता है। इसी प्रकार, यदि 6 की दूसरी ओर एक व्यंजन हो, तो भी नियम भंग हो जाता है।

इस पहेली को हल करने के लिए हमने जिस प्रकार के तर्कण का प्रयोग किया है, उसे **निगमनिक तर्कण (deductive reasoning)** कहा जाता है। इसे 'निगमनिक' इसलिए कहा जाता है, क्योंकि तर्क का प्रयोग करके पहले स्थापित किए गए कथन से हम एक परिणाम या कथन प्राप्त (अर्थात् निगमित) कर सकते हैं। उदाहरण के लिए ऊपर की पहेली में, निगमित किए गए अनेक तर्कों से हमने यह निगमित (प्राप्त) किया कि केवल V और 6 को ही उलटने की आवश्यकता है।

निगमनिक तर्कण की सहायता से, हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अमुक कथन सत्य है, क्योंकि यह एक अति व्यापक कथन की, जिसे सत्य माना गया है, एक विशिष्ट स्थिति है। उदाहरण के लिए, एक बार जब हम यह सिद्ध कर लेते हैं कि दो विषम संख्याओं का गुणनफल सदैव ही विषम होता है, तब (बिना अभिकलन के) हम तुरंत यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि  $70001 \times 134563$  विषम होगा, क्योंकि 70001 और 134563 दोनों संख्याएँ ही विषम हैं।

शताब्दियों से निगमनिक तर्कण मानव चिंतन का एक अंग रहा है और इसका प्रयोग हमारे दैनिक जीवन में सदा होता रहता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए ये कथन कि “पुष्प सोलारिस केवल तब खिलता है, जबकि पिछले दिन का अधिकतम तापमान  $28^{\circ}\text{C}$  से अधिक होता है “और” 15 सितंबर, 2005 को काल्पनिक घाटी (imaginary valley) में सोलारिस खिला था, सत्य है। तब निगमनिक तर्कण का प्रयोग करके, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि काल्पनिक घाटी में 14 सितंबर, 2005 को अधिकतम तापमान  $28^{\circ}\text{C}$  से अधिक था।

हमारा दुर्भाग्य यह है कि हम अपने दैनिक जीवन में सही तर्कण का प्रयोग सदा नहीं करते। हम प्रायः सदोष (गलत) तर्कण के आधार पर अनेक निष्कर्ष निकाल लेते हैं। उदाहरण के लिए, यदि आपकी सहेली एक दिन आपको देखकर मुस्कराती नहीं है, तब आप यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि वह आपसे नाराज है। यद्यपि यह सत्य भी हो सकता है कि “यदि वह मुझसे नाराज है, तो मुझे देखकर वह नहीं मुस्कराएगी”; परन्तु यह भी सत्य हो सकता है कि “यदि उसके सिर में बहुत दर्द हो, तो वह मुझे देखकर नहीं मुस्कराएगी”। आप कुछ निष्कर्षों की जाँच क्यों नहीं कर लेते जो कि आप प्रतिदिन निकालते रहते हैं और देखें कि ये निष्कर्ष मान्य तर्कण पर आधारित हैं या सदोष तर्कण पर आधारित हैं?

## प्रश्नावली A 1.2

1. निगमनिक तर्कण द्वारा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- (i) मानव स्तनधारी होते हैं। सभी स्तनधारी कशेरुकों (vertebrates) होते हैं। इन दो कथनों के आधार पर आप मानव के संबंध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
- (ii) एंथनी एक नाई है। दिनेश ने अपने बाल कटवाए हैं। क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एंथनी ने दिनेश के बाल काटे हैं?
- (iii) मार्टियन (Martians) की जीभ लाल होती है। गुलग एक मार्टियन है। इन दो कथनों के आधार पर आप गुलग के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
- (iv) यदि किसी दिन चार घंटे से अधिक समय तक वर्षा होती है, तो अगले दिन गटरों की सफाई करनी पड़ती है। आज 6 घंटे तक वर्षा हुई है। कल गटर की अवस्था क्या होगी, इसके बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
- (v) नीचे के कार्टून में दिए गए गाय के तर्क में क्या विरोधाभास (fallacy) है?



2. आपको फिर से चार कार्ड दिए गए हैं। प्रत्येक कार्ड के एक ओर एक संख्या और दूसरी ओर एक अक्षर छपा है। नीचे दिया गया नियम लागू होता है या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए, वे कौन-से दो कार्ड होंगे जिन्हें उलटने की आवश्यकता होगी?

“यदि एक कार्ड की एक ओर एक व्यंजन हो, तो उसकी दूसरी ओर एक विषम संख्या होती है।”



### A1.4 प्रमेय, कंजेक्चर और अभिगृहीत

अभी तक हमने कुछ कथनों पर चर्चा की है और देखा है कि इन कथनों की मान्यता की जाँच किस प्रकार की जाती है। इस अनुच्छेद में, आप उन तीन अलग-अलग प्रकार के कथनों में भेद करने के बारे में अध्ययन करेंगे जिनसे गणित का निर्माण हुआ है। ये हैं: प्रमेय, कंजेक्चर (conjecture) और अभिगृहीत।

आप पहले भी अनेक प्रमेयों को देख चुके हैं। अतः प्रमेय क्या है? उस गणितीय कथन को जिसकी सत्यता स्थापित (सिद्ध) कर दी गई है, प्रमेय (theorem) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, नीचे दिए गए कथन प्रमेय हैं, जैसा कि आप अनुच्छेद A1.5 में देखेंगे।

**प्रमेय A 1.1 :** एक त्रिभुज के अंतःकोण का योग  $180^\circ$  होता है।

**प्रमेय A 1.2 :** दो प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।

**प्रमेय A 1.3 :** किन्हीं भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

कंजेक्चर वह कथन है, जिसे हम अपने गणितीय ज्ञान और अनुभव अर्थात् गणितीय अंतर्ज्ञान (intuition) के आधार पर सत्य मानते हैं। कंजेक्चर सत्य या असत्य हो सकता है। साथ ही, यदि हम इसे सिद्ध भी कर सकें, तो यह एक प्रमेय हो जाता है। प्रतिरूपों को देखने और बुद्धिमतापूर्ण गणितीय अनुमान लगाने के लिए, गणितज्ञ प्रायः कंजेक्चर का प्रयोग करते हैं। आइए हम कुछ प्रतिरूप लें और देखें कि हम किस प्रकार का बुद्धिमतापूर्ण अनुमान लगा सकते हैं।

**उदाहरण 4 :** कोई भी तीन क्रमागत सम संख्याएँ लीजिए और उन्हें जोड़िए, जैसे

$$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, 20 + 22 + 24 = 66$$

आदि। क्या आप इन योगफलों से किसी प्रतिरूप का अनुमान लगा सकते हैं? इनके बारे में आप क्या कंजेक्चर दे सकते हैं?

**हल :** एक कंजेक्चर यह हो सकता है:

(i) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग सम होता है।

अन्य कंजेक्चर यह हो सकता है:

(ii) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से विभाज्य होता है।

**उदाहरण 5 :** संख्याओं का निम्न प्रतिरूप लीजिए जिसे पास्कल-त्रिभुज कहा जाता है :

| पंक्ति | संख्याओं का योग |  |  |   |   |    |    |   |    |    |
|--------|-----------------|--|--|---|---|----|----|---|----|----|
| 1      |                 |  |  | 1 |   |    | 1  |   |    |    |
| 2      |                 |  |  | 1 | 1 |    | 2  |   |    |    |
| 3      |                 |  |  | 1 | 2 | 1  | 4  |   |    |    |
| 4      |                 |  |  | 1 | 3 | 3  | 1  | 8 |    |    |
| 5      |                 |  |  | 1 | 4 | 6  | 4  | 1 | 16 |    |
| 6      |                 |  |  | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1  | 32 |
| 7      |                 |  |  | : |   |    |    | : |    | :  |
| 8      |                 |  |  | : |   |    |    | : |    | :  |

पंक्तियों 7 और 8 की संख्याओं के योगफलों के लिए कंजेक्चर आप क्या दे सकते हैं? पंक्ति 21 की संख्याओं के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या आप एक प्रतिरूप देख रहे हैं? पंक्ति  $n$  की संख्याओं के योग के एक सूत्र के बारे में अनुमान लगाइए।

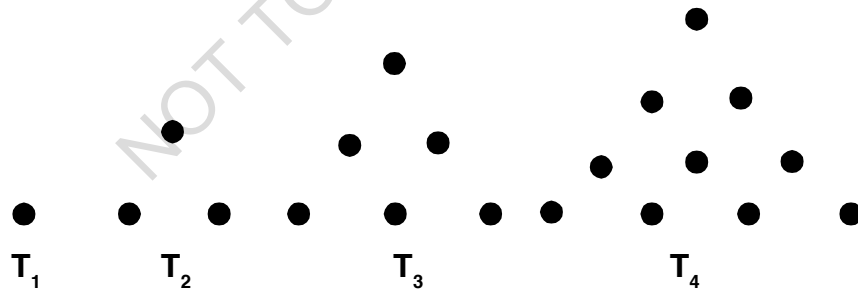
**हल :** पंक्ति 7 की संख्याओं का योग  $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$  है।

पंक्ति 8 की संख्याओं का योग  $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$  है।

पंक्ति 21 की संख्याओं का योग  $= 2^{20}$  है।

पंक्ति  $n$  की संख्याओं का योग  $= 2^{n-1}$  है।

**उदाहरण 6 :** तथाकथित त्रिभुजीय संख्याएँ  $T_n$  लीजिए:

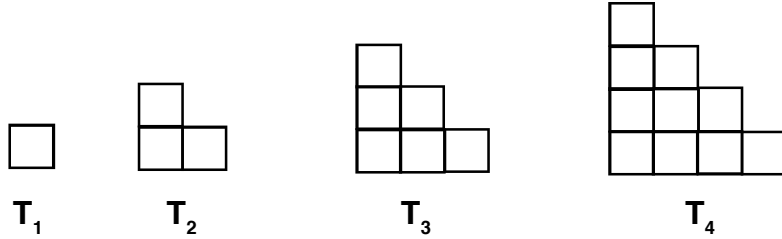


#### आकृति A 1.1

बिंदुओं का विन्यास इस प्रकार किया गया है कि इनसे एक त्रिभुज बनता है। यहाँ  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 6$ ,  $T_4 = 10$ , आदि-आदि। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि  $T_5$  क्या है?  $T_6$  के बारे में आप क्या कह सकते हैं?  $T_n$  के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

$T_n$  का एक कंजेक्चर दीजिए।

यदि आप इन्हें नीचे दी गई विधि से पुनः खींचें, तो इससे आपको सहायता मिल सकती है:



आकृति A.1.2

**हल :**

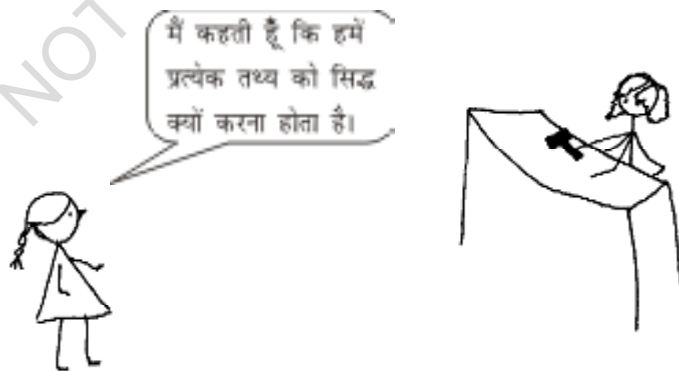
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

कंजेक्चर का एक अनुकूल उदाहरण जो कि अभी भी खुला हुआ है (अर्थात् अभी तक सिद्ध नहीं किया गया है कि यह सत्य है या असत्य), गणितज्ञ क्रिश्चियन गोल्डबाक (1690-1764) के नाम पर रखा गया गोल्डबाक कंजेक्चर है। इस कंजेक्चर का कथन यह है: “4 से बड़े प्रत्येक सम पूर्णांक को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।” यदि आप यह सिद्ध कर लेंगे कि यह परिणाम सत्य है या असत्य तो आप प्रसिद्ध हो जाएँगे।

यह देखकर आपको अवश्य आश्चर्य हुआ होगा कि गणित में हमारे सामने जो कुछ भी आता है, क्या उसे सिद्ध करना आवश्यक है, और यदि नहीं, तो क्यों नहीं?



वास्तविकता तो यह है कि गणित का प्रत्येक क्षेत्र कुछ कथनों पर आधारित होता है जिन्हें हम सत्य मान लेते हैं और उन्हें सिद्ध नहीं करते। ये “स्व-प्रमाणित सत्य” हैं जिन्हें हम बिना उपपत्ति के

सत्य मान लेते हैं। इन कथनों को अभिगृहीत (axioms) कहा जाता है। अध्याय 5 में आप यूक्लिड के अभिगृहीतों और अभिधारणाओं (postulates) का अध्ययन कर चुके हैं (आजकल अभिगृहीतों और अभिधारणाओं के बीच कोई भेद नहीं रखा जाता है)।

उदाहरण के लिए यूक्लिड की पहली अभिधारणा है:

किसी एक बिंदु से किसी अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।

और उनकी तीसरी अभिधारणा है:

कोई भी केंद्र और कोई भी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

ये कथन पूर्णतः सत्य दिखाई पड़ते हैं और यूक्लिड ने इन्हें सत्य मान लिया था। क्यों?

उन्होंने इसे सत्य इसलिए मान लिया था, क्योंकि हम प्रत्येक तथ्य को सिद्ध नहीं कर सकते और हमें कहीं न कहीं से प्रारंभ तो करना ही पड़ता है। इसके लिए, हमें कुछ कथनों की आवश्यकता होती है, जिन्हें हम सत्य मान लेते हैं और फिर इन अभिगृहीतों पर आधारित तर्क के नियमों का प्रयोग करके हम अपने ज्ञान का निर्माण कर सकते हैं।

आपको यह जानकर आश्चर्य हो सकता है कि तब हम उन सभी कथनों को स्वीकार क्यों नहीं कर लेते जो स्व-प्रमाणित प्रतीत होते हैं। इसके अनेक कारण हैं। प्रायः हमारा अंतर्ज्ञान गलत सिद्ध हो सकता है; चित्र या प्रतिरूप हमें धोखा दे सकते हैं और फिर हमारे सामने केवल एक ही विकल्प बच जाता है कि दिए हुए तथ्य को सिद्ध करें। उदाहरण के लिए, हममें से अनेक व्यक्ति यह विश्वास करते हैं कि यदि एक संख्या को एक अन्य संख्या से गुणा करें, तो प्राप्त परिणाम दोनों संख्याओं से बड़ा होगा। परन्तु हम यह जानते हैं कि यह सदैव सत्य नहीं होता है। उदाहरण के लिए,  $5 \times 0.2 = 1$  है, जो कि 5 से कम है।

अब आप नीचे दी गई आकृति देखिए। कौन सा रेखाखंड अधिक लंबा है, AB या CD?



आकृति A 1.3

दोनों ही रेखाखंड ठीक-ठीक समान लंबाई के हैं, यद्यपि AB छोटा दिखाई पड़ता है।

तब आप अभिगृहीतों की मान्यता के संबंध में आश्चर्य कर सकते हैं। आपने अंतर्ज्ञान के आधार पर वे अभिगृहीत लिए गए हैं जो स्व-प्रमाणित दिखाई पड़ते हैं। फिर भी संभव है कि बाद में चलकर हमें पता चल सकता है कि अमुक अभिगृहीत सत्य नहीं है। इस संभावना से किस प्रकार बचाव किया जाए? इसके लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाते हैं:

- (i) अभिगृहीतों की संख्या कम से कम रखिए। उदाहरण के लिए, यूक्लिड के केवल अभिगृहीतों और 5 अभिधारणाओं के आधार पर हम सैकड़ों परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं।

- (ii) सुनिश्चित हो जाइए कि अभिगृहीत संगत (अविरोधी) (consistent) है।

हम अभिगृहीतों के संग्रह को असंगत (inconsistent) तब कहते हैं जबकि हम इनका प्रयोग करते हुए, यह सिद्ध कर लें कि इनमें से एक अभिगृहीत सत्य नहीं है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित दो कथन लीजिए। यहाँ हम यह दिखाएँगे कि ये कथन असंगत हैं।

कथन 1 : कोई भी पूर्ण संख्या अपनी परवर्ती संख्या के बराबर नहीं होती।

कथन 2 : एक पूर्ण संख्या को शून्य से भाग देने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

(स्मरण रहे कि शून्य से दिया गया भाग परिभाषित नहीं है।) परन्तु, एक क्षण के लिए यह मान लीजिए कि ऐसा संभव है और फिर देखते हैं कि क्या होता है।)

कथन 2 से हमें  $\frac{1}{0} = a$  प्राप्त होता है, जहाँ  $a$  एक पूर्ण संख्या है। इससे यह पता चलता है कि  $1 = 0$  है। परन्तु कथन 1 को, जो कहता है कि कोई भी पूर्ण संख्या अपनी परवर्ती पूर्ण संख्या के बराबर नहीं होती, यह असत्य सिद्ध कर देता है।

- (iii) कभी न कभी एक असत्य अभिगृहीत के कारण अंतर्विरोध अवश्य होगा। हम अंतर्विरोध तब मानते हैं जबकि हमें एक ऐसा कथन प्राप्त होता है, जिससे कि कथन और उसका निषेध (negation) दोनों ही सत्य हो जाएँ। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए कथन 1 और कथन 2 को पुनः लीजिए।

कथन 1 से हम यह परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं कि  $2 \neq 1$  है।

अब आप  $x^2 - x^2$  लीजिए। इसका गुणनखंडन हम दो विधियों से कर सकते हैं :

(i)  $x^2 - x^2 = x(x - x)$  और

(ii)  $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

अतः,  $x(x - x) = (x + x)(x - x)$  हुआ।

कथन 2 के अनुसार, हम दोनों पक्षों से  $(x - x)$  काट सकते हैं।

तब हमें  $x = 2x$  प्राप्त होता है, जिससे यह पता चलता है कि  $2 = 1$  है।

अतः कथन  $2 \neq 1$  और इसका निषेध  $2 = 1$  दोनों ही सत्य हैं। यह एक अंतर्विरोध है। यह अंतर्विरोध असत्य अभिगृहीत के कारण है, जोकि यह है कि एक पूर्ण संख्या को 0 से भाग देने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

अतः, हम जिन कथनों को अभिगृहीत मानते हैं, उसके लिए बहुत सोच-विचार और अंतर्दृष्टि की आवश्यकता होती है। इस संबंध में हमें यह अवश्य सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि इनसे कोई असंगतता या तर्कसंगत अंतर्विरोध न हो, फिर भी, कभी-कभी अभिगृहीतों या अभिधारणों के चयन से कुछ नए तथ्यों का पता लगता है। अध्याय 5 से आप यूक्लिड के पाँचवीं अभिधारणा और अयूक्लिडीय ज्यामितियों के आविष्कार से आप परिचित हैं। वहाँ आपने यह देखा है कि गणितज्ञों का यह विश्वास था कि पाँचवीं अभिधारणा को एक अभिधारणा लेने की आवश्यकता नहीं है और वास्तव में यह एक प्रमेय है, जिसे पहली चार अभिधारणाओं की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। आश्चर्य है कि इन कार्यों से अयूक्लिडीय ज्यामितियों का आविष्कार हो गया।

अभिगृहीत, प्रमेय और कंजेक्चर के बीच के अंतरों को बताते हुए, हम इस अनुच्छेद को यहीं समाप्त करते हैं। **अभिगृहीत** एक गणितीय कथन है जिसे बिना उपपत्ति के सत्य मान लिया जाता है। कंजेक्चर एक गणितीय कथन है जिसकी सत्यता या असत्यता को अभी स्थापित करना शेष है, और प्रमेय एक गणितीय कथन है जिसकी सत्यता तार्किक रूप से स्थापित की गई है।

### प्रश्नावली A 1.3

- कोई भी तीन क्रमागत सम संख्याएँ लीजिए और उनका गुणनफल ज्ञात कीजिए : उदाहरण के लिए,  $2 \times 4 \times 6 = 48$ ,  $4 \times 6 \times 8 = 192$ , आदि आदि। इन गुणनफलों के तीन कंजेक्चर बनाइए।
- पास्कल-त्रिभुज पर आ जाइए।  
 पंक्ति 1 :  $1 = 11^0$   
 पंक्ति 2 :  $1 \ 1 = 11^1$   
 पंक्ति 3 :  $1 \ 2 \ 1 = 11^2$   
 पंक्ति 4 और पंक्ति 5 के लिए एक-एक कंजेक्चर बनाइए। क्या आपका कंजेक्चर सत्य है? क्या आपका कंजेक्चर पंक्ति 6 पर भी लागू होता है?
- आइए हम त्रिभुजीय संख्याओं को पुनः देखें (आकृति A1.2) दो क्रमागत संख्याओं को जोड़िए। उदाहरण के लिए,  $T_1 + T_2 = 4$ ,  $T_2 + T_3 = 9$ ,  $T_3 + T_4 = 16$  है।  
 $T_4 + T_5$  के बारे में आपका क्या कहना है?  $T_{n-1} + T_n$  का एक कंजेक्चर बनाइए।
- निम्नलिखित प्रतिरूप देखिए :  
 $1^2 = 1$   
 $11^2 = 121$   
 $111^2 = 12321$   
 $1111^2 = 1234321$   
 $11111^2 = 123454321$   
 निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक कंजेक्चर बनाइए:  
 $111111^2 =$   
 $1111111^2 =$   
 जाँच कीजिए कि आपका कंजेक्चर सत्य है या नहीं।
- इस पुस्तक में प्रयुक्त पाँच अभिगृहीत (अभिधारणाएँ) बताइए।

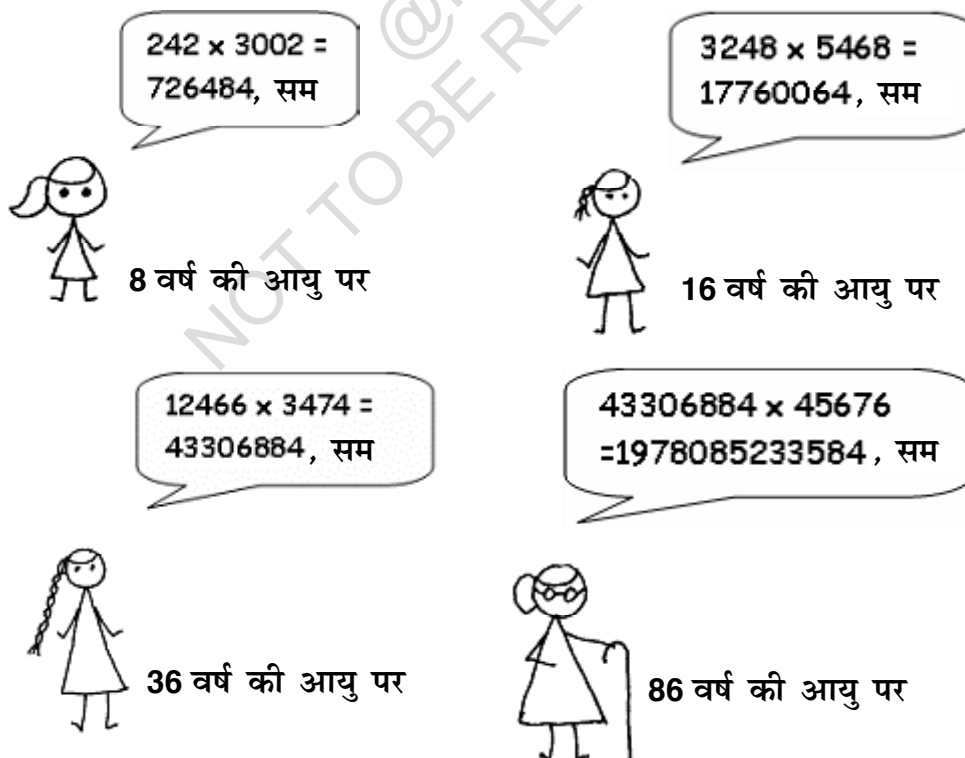
### A1.5 गणितीय उपपत्ति क्या है?

आइए हम उपपत्तियों के विभिन्न पहलुओं पर विचार करें। सबसे पहले हम सत्यापन (verification) और उपपत्ति (proof) के बीच के अंतर को समझेंगे। गणित में उपपत्तियों का अध्ययन करने से पहले, आपसे कथनों को सत्यापित करने के लिए कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, उदाहरणों के साथ यह सत्यापित करने के लिए कहा जा सकता है कि “दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है”। अतः इसके लिए आप यदृच्छया दो सम संख्या ले सकते हैं। मान लीजिए वे संख्याएँ 24 और 2006 ली जा सकती हैं और जाँच की जा सकती है कि  $24 \times 2006 = 48144$  एक सम संख्या है। इस तरह के और उदाहरण लेकर भी आप यह क्रिया कर सकते हैं।

आपको कक्षा में अनेक त्रिभुज खींचने और इनके अंतःकोणों का योग अभिकलित करने के लिए कहा जा सकता है। मापन में त्रुटियाँ न होने पर त्रिभुज के अंतःकोणों का योग  $180^\circ$  होता है।

इस विधि में त्रुटि (flaw) क्या है? ऐसी अनेक समस्याएँ हैं, जिनका सत्यापन करना है। इसकी सहायता से आप यह तो कह सकते हैं कि जिस कथन को आप सही मानते हैं वह सत्य है, परन्तु आप इस बात से सुनिश्चित नहीं हो सकते कि यह सभी स्थितियों के लिए सत्य है। उदाहरण के लिए, सम संख्याओं के अनेक युग्मों के गुणन से आप यह अनुमान तो लगा सकते हैं कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है। फिर भी, आप सुनिश्चित नहीं हो पाते कि सम संख्याओं के सभी युग्मों का गुणनफल सम है। आप व्यक्तिगत रूप से सम संख्याओं के सभी युग्मों के गुणनफलों की जाँच नहीं कर सकते। यदि ऐसा आप कर पाते तो कार्टून में दिखाई गई लड़की की भाँति अपने शेष जीवन में सम संख्याओं के गुणनफलों का परिकलन करते ही रहते। इसी प्रकार, कुछ ऐसे भी त्रिभुज हो सकते हैं जिन्हें अभी तक आपने नहीं बनाया है और जिनके अंतःकोणों का योग  $180^\circ$  नहीं है। हम सभी संभव त्रिभुजों के अंतःकोणों को नहीं माप सकते।



प्रायः सत्यापन भी भ्रामक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, पहले किए गए सत्यापनों के आधार पर पास्कल-त्रिभुज (प्रश्नावली A1.3 का प्रश्न 2) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि  $11^5 = 15101051$  है। परन्तु वास्तव में  $11^5 = 161051$  है।

अतः आपको एक अन्य विधि से सोचना होगा जो कि केवल कुछ स्थितियों के सत्यापन पर ही निर्भर न हो। एक अन्य विधि है जिसमें कथन को सिद्ध करके दिखाया जाता है। वह प्रक्रम, जो केवल तर्कसंगत तर्कों के आधार पर गणितीय कथन की सत्यता स्थापित कर सकता है उसे *गणितीय उपपत्ति* (mathematical proof) कहा जाता है।

अनुच्छेद A1.2 के उदाहरण 2 में, आपने यह देखा है कि गणितीय कथन को असत्य स्थापित करने के लिए एक प्रत्युदाहरण प्राप्त कर लेना ही पर्याप्त है। अतः, यद्यपि हजारों स्थितियाँ लेकर एक गणितीय कथन की जाँच करके अथवा सत्यापन करके इसकी मान्यता स्थापित करना पर्याप्त नहीं होता। फिर भी, इसके लिए एक ऐसा प्रत्युदाहरण प्राप्त कर देना ही पर्याप्त होता है जो कथन को असत्य सिद्ध कर देता है (अर्थात् यह दिखाना कि कुछ असत्य है)। इस बात पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है।



गणितीय कथन को असत्य दर्शाने के लिए एक प्रत्युदाहरण ज्ञात कर लेना ही पर्याप्त होता है।

अतः,  $7 + 5 = 12$  कथन दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है, का एक प्रत्युदाहरण है।

आइए अब हम एक उपपत्ति के आधारभूत अवयवों की सूची देखें :

- (i) एक प्रमेय को सिद्ध करने के लिए, हमें इस बात का एक स्थूल विचार (rough idea) होना चाहिए कि यह प्रक्रिया किस प्रकार की जाती है।
- (ii) प्रमेय में पहले से दी गई सूचनाओं (अर्थात् परिकल्पना) को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए और प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण के लिए, प्रमेय A1.2 में, जो यह है कि दो सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है, हमें दो सम प्राकृत संख्याएँ दी हुई हैं। अतः हमें इनके गुणों का प्रयोग करना चाहिए। (अध्याय 2 के) गुणनखंड प्रमेय में एक बहुपद  $p(x)$  दिया गया है और बताया गया है कि  $p(a) = 0$  का यह दर्शाने के लिए आपको प्रयोग करना है कि  $(x - a)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, गुणनखंड प्रमेय के विलोम (converse) के लिए यह दिया गया है कि  $(x - a)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है और इसका प्रयोग आपको इस परिकल्पना (hypothesis) को सिद्ध करने के लिए करना है कि  $p(a) = 0$  है।

एक प्रमेय को सिद्ध करने के प्रक्रम में, आप रचनाओं का भी प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यह सिद्ध करने के लिए कि एक त्रिभुज के कोणों का योग  $180^\circ$  होता है, हम किसी एक भुजा के समांतर और उस भुजा के सम्मुख शीर्ष से होकर जाने वाली एक रेखा खींचते हैं और समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करते हैं।

- (iii) उपपत्ति में गणितीय कथनों का एक उत्तरोत्तर (successive) अनुक्रम होता है। उपपत्ति का प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से, पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, एक अभिगृहीत से या अपनी परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित हो जाता है।
- (iv) एक तार्किक रूप से सही क्रम में विन्यासित गणितीय रूप से सत्य कथनों के अनुक्रम का निष्कर्ष वही होना चाहिए जिसे हम सिद्ध करना चाहते हैं, अर्थात् यह वह होना चाहिए जिसका प्रमेय में दावा किया गया है।

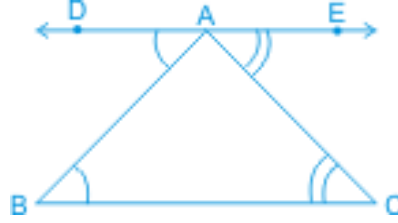
इन अवयवों को समझने के लिए, हम प्रमेय A1.1 और उसकी उपपत्ति का विश्लेषण करेंगे। आप अध्याय 6 में इस प्रमेय को पढ़ चुके हैं। परन्तु पहले हम ज्यामिति की उपपत्तियों के संबंध में कुछ टिप्पणी देंगे। प्रायः हम प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए आकृतियों या आरेखों की सहायता लेते हैं और यह एक अति महत्वपूर्ण बात है। फिर भी, उपपत्ति के प्रत्येक कथन को केवल तर्क की सहायता से स्थापित करना होता है। प्रायः हमने विद्यार्थियों को यह कहते सुना है कि “वे दो कोण बराबर हैं, क्योंकि आकृति में वे बराबर दिखाई पड़ते हैं” या “वह कोण  $90^\circ$  का होगा, क्योंकि दो रेखाएँ ऐसी दिखाई पड़ती हैं जैसे वे एक-दूसरे पर लंब हैं।” अतः, जो कुछ भी आप देखते हैं, उससे धोखा न खा जाइए। आकृति A1.4 को पुनः ध्यान से देखिए।

अतः आइए अब हम प्रमेय A1.1 लें।

**प्रमेय A1.1 :** एक त्रिभुज के अंतःकोणों का योगफल  $180^\circ$  होता है।

**उपपत्ति :** त्रिभुज ABC लीजिए (देखिए आकृति A1.4)

हमें यह सिद्ध करना है कि  $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$  (1)



आकृति A1.4

BC के समांतर एक रेखा DE खींचिए जो A से होकर जाती है। (2)

DE, BC के समांतर है और AB एक तिर्यक रेखा (transversal) है।

अतः,  $\angle DAB$  और  $\angle ABC$  एकांतर कोण हैं। इसलिए अध्याय 6 के प्रमेय 6.2 के अनुसार, ये कोण बराबर हैं। अर्थात्  $\angle DAB = \angle ABC$  है। (3)

इसी प्रकार,  $\angle CAE = \angle ACB$  (4)

इसलिए,  $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$  (5)

परन्तु  $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$  है, क्योंकि इनसे एक ऋजु कोण (straight angle) बनता है। (6)

अतः,  $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$  (7)

अब हम उपपत्ति में प्रयुक्त प्रत्येक चरण पर टिप्पणी देंगे।

**चरण 1 :** क्योंकि हमारे प्रमेय का संबंध त्रिभुज के एक गुण से है, इसलिए सबसे पहले हम एक त्रिभुज लेंगे।

**चरण 2 :** यह एक मुख्य विचार है-अंतर्ज्ञानात्मक प्रारंभिक कदम या यह समझ लेना कि कौन सी प्रक्रिया अपनाई जाए जिससे हम प्रमेय सिद्ध कर सकें। प्रायः ज्यामितीय उपपत्तियों में रचना करने की आवश्यकता होती है।

**चरण 3 और 4 :** इस तथ्य का प्रयोग करके कि DE, BC के समांतर है (अपनी रचना से) और पहले सिद्ध किए गए प्रमेय 6.2 से, जो यह है कि यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती हो, तो एकांतर कोण बराबर होते हैं, यहाँ हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि  $\angle DAB = \angle ABC$  और  $\angle CAE = \angle ACB$  है।

**चरण 5 :** यहाँ हम निम्नलिखित निगमित करने के लिए यूक्लिड के अभिग्रहीत (देखिए अध्याय 5) का प्रयोग करते हैं, जो यह है “यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूरे बराबर होते हैं।”

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$$

अर्थात् त्रिभुज के अंतःकोणों का योग एक ऋजु रेखा पर के कोणों के योग के बराबर होता है।

**चरण 6 :** यह दिखाने के लिए कि  $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$  है, हम अध्याय 6 के रैखिक युग्म अभिगृहीत का प्रयोग करते हैं, जिसका कथन यह है कि एक ऋजु रेखा पर के कोणों का योग  $180^\circ$  होता है।

**चरण 7 :** यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि  $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$  है, हम यूक्लिड के अभिगृहीत का प्रयोग करते हैं, जो यह है “वे वस्तुएँ जो समान वस्तु के बराबर हैं, एक-दूसरे के बराबर होती हैं। ध्यान दीजिए कि चरण 7 उस प्रमेय द्वारा किया गया दावा है, जिसे हमें सिद्ध करना है।

अब हम विश्लेषण किए बिना ही प्रमेयों A1.2 और A1.3 को सिद्ध करेंगे।

**प्रमेय A1.2 :** दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।

**उपपत्ति :** मान लीजिए  $x$  और  $y$  कोई दो सम प्राकृत संख्याएँ हैं।

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि  $xy$  सम है।

क्योंकि  $x$  और  $y$  सम हैं, इसलिए ये 2 से भाज्य हैं। इसीलिए,  $x = 2m$  के रूप में, जहाँ  $m$  कोई प्राकृत संख्या है और  $y = 2n$  के रूप में, जहाँ  $n$  कोई प्राकृत संख्या है, व्यक्त किया जा सकता है।

तब  $xy = 4mn$  है और क्योंकि  $4mn$ , 2 से भाज्य है, इसलिए  $xy$  भी दो से भाज्य होगा।

अतः,  $xy$  सम है।

**प्रमेय A1.3 :** किन्हीं भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

**उपपत्ति :** कोई भी तीन क्रमागत सम प्राकृत संख्या  $2n$ ,  $2n + 2$  और  $2n + 4$  के रूप की होगी, जहाँ  $n$  कोई प्राकृत संख्या है। हमें यह सिद्ध करना है कि इनका गुणनफल  $2n(2n + 2)(2n + 4)$  16 से भाज्य है।

$$\text{अब, } 2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$$

$$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$$

अब हमारे सामने दो स्थितियाँ हैं: या तो  $n$  सम है या विषम है। आइए हम प्रत्येक स्थिति की जाँच करें।

मान लीजिए  $n$  सम है। तब हम  $n = 2m$  लिख सकते हैं, जहाँ  $m$  कोई प्राकृत संख्या है।

$$\text{साथ ही, तब } 2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$$

अतः,  $2n(2n + 2)(2n + 4)$ , 16 से भाज्य है।

अब, मान लीजिए  $n$  विषम है। तब  $n + 1$  सम होगा और हम  $n + 1 = 2r$  लिख सकते हैं, जहाँ  $r$  कोई प्राकृत संख्या है।

$$\text{तब } 2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$

$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

अतः,  $2n(2n + 2)(2n + 4)$ , 16 से भाज्य है।

अतः, दोनों स्थितियों में, हमने यह दर्शा दिया है कि किन्ही भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल 16 से भाज्य होता है।

गणितज्ञों ने किस प्रकार परिणामों की खोज की है और किस प्रकार औपचारिक दृढ़ उपपत्तियाँ लिखी गई हैं इनके अंतर पर कुछ टिप्पणी देते हुए, हम इस अध्याय को यहीं समाप्त करते हैं। जैसा कि ऊपर बताया गया है, प्रत्येक उपपत्ति का एक मुख्य अंतर्ज्ञानात्मक विचार (कभी-कभी एक से अधिक) होता है। गणितज्ञों की चिंतन-विधि और परिणामों का पता लगाने में अंतर्ज्ञान केंद्र बिंदु काम करता है। प्रायः प्रमेय की उपपत्ति गणितज्ञों के मस्तिष्क में अपने आप आने लगती है। सही हल या उपपत्ति प्राप्त करने से पहले विभिन्न चिंतन-विधियों और तर्क और उदाहरणों के साथ गणितज्ञ प्रायः प्रयोग करता रहता है। सर्जनात्मक प्रावस्था के दब जाने के बाद ही सभी तर्कों को एक साथ लेकर उचित उपपत्ति प्रस्तुत की जाती है।

यहाँ यह उल्लेख कर देना आवश्यक है कि अपने कथनों तक पहुँचने के लिए, भारत के महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन ने उच्च स्तर के अंतर्ज्ञान का प्रयोग किया था, जिनके संबंध में उनका यह दावा था कि वे सत्य हैं। इनमें से अनेक जो सत्य सिद्ध हो गए हैं वे सुपरिचित प्रमेय हो गए हैं। जो अभी तक सिद्ध नहीं हो पाए हैं उनमें से कुछ दावों (कंजेक्चर) को सिद्ध करने (या असत्य सिद्ध करने) में आज भी पूरे विश्व के गणितज्ञ लगे हुए हैं।



श्रीनिवास रामानुजन  
(1887–1920)  
आकृति A1.5

#### प्रश्नावली A1.4

- निम्नलिखित कथनों को असत्य सिद्ध करने के लिए प्रत्युदाहरण ज्ञात कीजिए।
  - यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
  - वह चतुर्भुज, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं एक वर्ग होता है।
  - वह चतुर्भुज, जिसके सभी कोण बराबर हैं, एक वर्ग होता है।
  - यदि  $a$  और  $b$  पूर्णांक हैं, तो  $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$  है।
  - $2n^2 + 11$  एक अभाज्य संख्या है, जहाँ  $n$  पूर्ण संख्या है।
  - सभी धनात्मक पूर्णांकों  $n$  के लिए  $n^2 - n + 41$  एक अभाज्य संख्या है।
- आप अपने पसंद की उपपत्ति लीजिए और ऊपर चर्चित की गई विधियों, (अंतर्ज्ञानात्मक प्रारम्भिक कदम क्या है, क्या दिया हुआ है, क्या निगमित किया गया है, किन प्रमेयों और अभिगृहीतों का प्रयोग किया गया है, आदि आदि) के अनुसार इसका चरणशः विश्लेषण कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि दो विषम संख्याओं का योग सम होता है।
4. सिद्ध कीजिए कि दो विषम संख्याओं का गुणनफल विषम होता है।
5. सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से भाज्य होता है।
6. सिद्ध कीजिए कि उस रेखा पर अपरिमित रूप से अनेक बिंदु होते हैं जिसका समीकरण  $y = 2x$  है।  
(संकेत : बिंदु  $(n, 2n)$  लीजिए, जहाँ  $n$  कोई पूर्णांक है।)
7. आपके मित्र ने कभी आपको कहा होगा कि आप अपने मन में एक संख्या सोच लीजिए और उसके साथ विभिन्न क्रियाएँ कीजिए, और तब आपकी मूल संख्या जाने बिना ही उसने बता दिया होगा कि वह वास्तविक संख्या कौन-सी थी। आपके पास कौन-सी संख्या बची है। यहाँ दो उदाहरण दिए गए हैं। सिद्ध कीजिए कि ये दोनों उदाहरण सत्य क्यों हैं?
  - (i) एक संख्या लीजिए, उसका दो गुना कीजिए, उसमें नौ जोड़िए, अपनी मूल संख्या जोड़िए। इसे तीन से भाग दीजिए। अपनी मूल संख्या को इसमें से घटाइए। आपका परिणाम 7 है।
  - (ii) कोई भी तीन अंकों वाली एक संख्या लीजिए (उदाहरण के लिए 425 लीजिए) इन अंकों को उसी क्रम में दोबारा लिखकर एक छ अंक वाली संख्या बनाइए (425425)। आपकी नई संख्या 7,11 और 13 से भाज्य है।

### A1.6 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. गणित में कोई कथन तब स्वीकार्य होता है जबकि यह कथन सदैव सत्य हो या असत्य हो।
2. यह दर्शाने के लिए कि गणितीय कथन असत्य है एक प्रत्युदाहरण ज्ञात कर लेना ही पर्याप्त होता है।
3. अभिगृहीत वे कथन हैं जिन्हें उपपत्ति बिना सत्य मान लिया गया है।
4. एक कंजेक्चर वह कथन है जिसे हम अपने गणितीय अंतर्ज्ञान के आधार पर सत्य मान लेते हैं, परन्तु जिन्हें हमें अभी सिद्ध करना है।
5. उस गणितीय कथन को, जिसकी सत्यता स्थापित (या सिद्ध) कर दी गई है, प्रमेय कहा जाता है।
6. गणितीय कथनों को सिद्ध करने का एक मुख्य तार्किक साधन निगमनिक तर्कण है।
7. उपपत्ति गणितीय कथनों का एक उत्तरोत्तर अनुक्रम होती है। उपपत्ति का प्रत्येक कथन पहले से ज्ञात कथन से, या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या एक अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित किया जाता है।

## उत्तर/संकेत

### प्रश्नावली 1.1

- हाँ,  $0 = \frac{0}{1} - \frac{0}{2} - \frac{0}{3}$  आदि, हर  $q$  को भी ऋण पूर्णांक माना जा सकता है।
- संख्याओं 3 और 4 के बीच अनंततः अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती हैं; इन्हें लेने की एक विधि है  
 $3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$  . तब छः संख्याएँ हैं  $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$  .
- $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$  . अतः पाँच परिमेय संख्याएँ हैं:  $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$
- (i) सत्य है, क्योंकि पूर्ण संख्याओं के संग्रह में सभी प्राकृत संख्याएँ होती हैं।  
(ii) असत्य है, उदाहरण के लिए  $-2$  एक पूर्ण संख्या नहीं है।  
(iii) असत्य है, उदाहरण के लिए  $\frac{1}{2}$  परिमेय संख्या है, परन्तु पूर्ण संख्या नहीं है।

### प्रश्नावली 1.2

- (i) सत्य है, क्योंकि वास्तविक संख्याओं का संग्रह परिमेय और अपरिमेय संख्याओं से बना होता है।  
(ii) असत्य है, क्योंकि कोई भी ऋण संख्या किसी प्राकृत संख्या का वर्गमूल नहीं हो सकती।  
(iii) असत्य, उदाहरणार्थ 2 वास्तविक संख्या है किन्तु अपरिमेय नहीं।
- नहीं। उदाहरण के लिए,  $\sqrt{4} = 2$  एक परिमेय संख्या है।
- आकृति 1.8 में दी गई क्रियाविधि को अनेक बार कीजिए। पहले  $\sqrt{4}$  प्राप्त कीजिए और तब  $\sqrt{5}$  प्राप्त कीजिए।

### प्रश्नावली 1.3

- (i) 0.36, सांत (ii)  $0.\overline{09}$ , अनवसानी पुनरावर्ती  
(iii) 4.125, सांत (iv)  $0.\overline{230769}$ , अनवसानी पुनरावर्ती  
(v)  $0.\overline{18}$  अनवसानी पुनरावर्ती (vi) 0.8225 सांत

2.  $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$ ,  $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$ ,  $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$ ,  
 $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$ ,  $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$
3. (i)  $\frac{2}{3}$  [मानलीजिए  $x = 0.666\ldots$  अतः,  $10x = 6.666\ldots$  या,  $10x = 6 + x$  या,  $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ]  
(ii)  $\frac{43}{90}$  (iii)  $\frac{1}{999}$
4. 1 [मानलीजिए  $x = 0.9999\ldots$  अतः,  $10x = 9.999\ldots$  या,  $10x = 9 + x$  या,  $x = 1$ ]
5.  $0.0588235294117647$
6.  $q$  के अभाज्य गुणनखंडन में केवल 2 के घात, या 5 के घात या दोनों होते हैं।
7.  $0.01001000100001\ldots, 0.202002000200002\ldots, 0.003000300003\ldots$
8.  $0.75075007500075000075\ldots, 0.767076700767000767\ldots, 0.808008000800008\ldots$
9. (i), (iv) और (v) अपरिमेय है; (ii) और (iii) परिमेय है।

### प्रश्नावली 1.4

1. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय (iii) परिमेय (iv) अपरिमेय  
(v) अपरिमेय
2. (i)  $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$  (ii) 6 (iii)  $7 + 2\sqrt{10}$  (iv) 3
3. इसका कोई अंतर्विरोध नहीं है। स्मरण रहे कि जब कभी-भी एक स्केल से या किसी अन्य युक्ति से लंबाई मापते हैं, तब आपको केवल एक सन्निकट परिमेय मान प्राप्त होता है। अतः आप यह अनुभव नहीं कर पाते कि  $c$  या  $d$  अपरिमेय है।
4. देखिए आकृति 1.17.
5. (i)  $\frac{\sqrt{7}}{7}$  (ii)  $\sqrt{7} + \sqrt{6}$  (iii)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$  (iv)  $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

### प्रश्नावली 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5      2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv)  $\frac{1}{5} \left[ (125)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1} \right]$
3. (i)  $2^{\frac{13}{15}}$  (ii)  $3^{-21}$  (iii)  $11^{\frac{1}{4}}$  (iv)  $56^{\frac{1}{2}}$

### प्रश्नावली 2.1

1. (i) और (ii) एक चर में बहुपद है। (v) तीन चरों में एक बहुपद है, (iii), (iv) बहुपद नहीं है, क्योंकि चर का प्रत्येक घातांक पूर्ण संख्या नहीं है।
2. (i) 1 (ii) -1 (iii)  $\frac{\pi}{2}$  (iv) 0
3.  $3x^{35} - 4; \sqrt{2}y^{100}$  (अलग-अलग गुणांकों वाले कुछ और बहुपद आप लिख सकते हैं।)
4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0
5. (i) द्विघाती (ii) त्रिघाती (iii) द्विघाती (iv) रैखिक  
(v) रैखिक (vi) द्विघाती (vii) त्रिघाती

### प्रश्नावली 2.2

1. (i) 3 (ii) -6 (iii) -3
2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3
3. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) हाँ  
(v) हाँ (vi) हाँ
- (vii)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  बहुपद का एक शून्यक है, परन्तु  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  बहुपद का एक शून्यक नहीं है। (viii) नहीं
4. (i) -5 (ii) 5 (iii)  $-\frac{5}{2}$  (iv)  $\frac{2}{3}$   
(v) 0 (vi) 0 (vii)  $-\frac{d}{c}$

### प्रश्नावली 2.3

1.  $(x+1)$ , (i) का एक गुणनखंड है परन्तु (ii), (iii) और (iv) का गुणनखंड नहीं है।
2. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ

3. (i)  $-2$  (ii)  $-(2 + \sqrt{2})$  (iii)  $\sqrt{2} - 1$  (iv)  $\frac{3}{2}$   
 4. (i)  $(3x-1)(4x-1)$  (ii)  $(x+3)(2x+1)$  (iii)  $(2x+3)(3x-2)$  (iv)  $(x+1)(3x-4)$   
 5. (i)  $(x-2)(x-1)(x+1)$  (ii)  $(x+1)(x+1)(x-5)$   
 (iii)  $(x+1)(x+2)(x+10)$  (iv)  $(y-1)(y+1)(2y+1)$

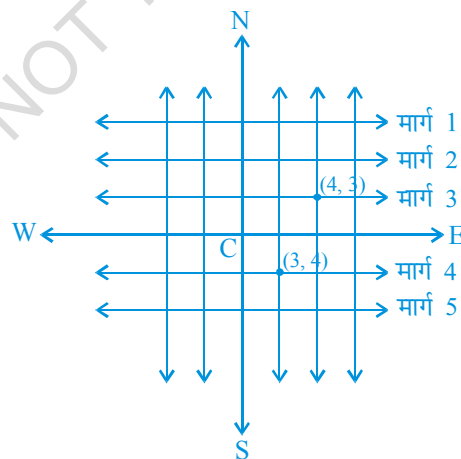
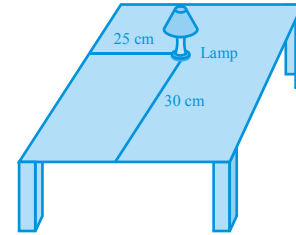
### प्रश्नावली 2.4

1. (i)  $x^2 + 14x + 40$  (ii)  $x^2 - 2x - 80$  (iii)  $9x^2 - 3x - 20$   
 (iv)  $y^2 - \frac{9}{4}$  (v)  $9 - 4x^2$   
 2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984  
 3. (i)  $(3x+y)(3x+y)$  (ii)  $(2y-1)(2y-1)$  (iii)  $\left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$   
 4. (i)  $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$   
 (ii)  $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$   
 (iii)  $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$   
 (iv)  $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$   
 (v)  $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$   
 (vi)  $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$   
 5. (i)  $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$  (ii)  $(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$   
 6. (i)  $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$  (ii)  $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$   
 (iii)  $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$  (iv)  $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$   
 7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992  
 8. (i)  $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$  (ii)  $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$   
 (iii)  $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$  (iv)  $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$   
 (v)  $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$   
 10. (i)  $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$  (ii)  $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

11.  $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$
12. दक्षिण पक्ष को सरल कीजिए।
13. सर्वसमिका VIII में  $x + y + z = 0$  रखिए।
14. (i)  $-1260$ . Let  $a = -12$ ,  $b = 7$ ,  $c = 5$ . यहाँ  $a + b + c = 0$ . प्रश्न 13 में दिए गए परिणाम का प्रयोग कीजिए।  
(ii)  $16380$
15. (i) एक संभव उत्तर है: लंबाई  $= 5a - 3$ , चौड़ाई  $= 5a - 4$   
(ii) एक संभव उत्तर है: लंबाई  $= 7y - 3$ , चौड़ाई  $= 5y + 4$
16. (i) एक संभव उत्तर है:  $3, x$  और  $x - 4$ .  
(ii) एक संभव उत्तर है:  $4k, 3y + 5$  और  $y - 1$ .

### प्रश्नावली 3.1

1. लैम्प को एक बिन्दु मान लीजिए और मेज को एक समतल। मेज का कोई भी दो लंब कोर लीजिए। बड़े कोर से लैम्प की दूरी माप लीजिए। मान लीजिए यह दूरी 25 सेमी है। अब, छोटे कोर से लैम्प की दूरी मापिए और मान लीजिए यह दूरी 30 सेमी है। जिस क्रम में आपने लैम्प रखा है उसके अनुसार उसकी स्थिति को  $(30, 25)$  या  $(25, 30)$  लिख सकते हैं।
2. मार्ग योजना नीचे दी गई आकृति में दिखाई गई है



दोनों की क्रास मार्ग ऊपर की आकृति में चिह्नित किए गए हैं। ये अद्वितीयतः प्राप्त किए जाते हैं, क्योंकि दो संदर्भ रेखाओं में हमने स्थान निर्धारण के लिए दोनों का प्रयोग किया है।

### प्रश्नावली 3.2

- (i)  $x$  - अक्ष और  $y$  - अक्ष (ii) चतुर्थांश (iii) मूल बिन्दु
- (i)  $(-5, 2)$  (ii)  $(5, -5)$  (iii) E (iv) G (v) 6 (vi)  $-3$  (vii)  $(0, 5)$  (viii)  $(-3, 0)$

### प्रश्नावली 4.1

- $x = 2y$  या  $x - 2y = 0$
- (i)  $2x + 3y - 9.35 = 0; a = 2, b = 3, c = -9.35$   
 (ii)  $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$   
 (iii)  $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$   
 (iv)  $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$   
 (v)  $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$   
 (vi)  $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$   
 (vii)  $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$   
 (viii)  $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

### प्रश्नावली 4.2

- (iii), क्योंकि  $x$  के प्रत्येक मान के लिये,  $y$  का एक संगत मान होता है और विलोमतः भी।
- (i)  $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, -1)$   
 (ii)  $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$   
 (iii)  $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$
- (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) नहीं
- 7

### प्रश्नावली 5.1

1. (i) असत्य : इसे छात्र अपनी आँखों से देख सकते हैं।  
 (ii) असत्य : यह अभिगृहीत 5.1 का अंतर्विरोध करता है।  
 (iii) सत्य : (अभिगृहीत-2)  
 (iv) सत्य : यदि एक वृत्त से परिवर्द्ध प्रदेश को दूसरे प्रदेश पर अध्यारोपित करें, तो वे संपाती होंगे।  
 अतः इनके केन्द्र और परिसीमाएँ संपाती होती हैं। अतः इनकी त्रिज्याएँ संपाती होंगी।  
 (v) सत्य : यूक्लिड का प्रथम अभिगृहीत
3. ऐसे अनेक अपरिभाषित शब्द हैं जिनकी जानकारी छात्र को होनी चाहिए। ये संगत होते हैं, क्योंकि इनमें दो अलग-अलग स्थितियों का अध्ययन किया जाता है अर्थात् (i) यदि दो बिन्दु A और B दिए हुए हों, तो उनके बीच में स्थिति एक बिन्दु C होता है; (ii) यदि A और B दिए हुए हों, तो आप एक ऐसा बिन्दु C ले सकते हैं जो A और B से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित नहीं होता।  
 ये अभिगृहीत यूक्लिड की अभिगृहीतों का अनुसरण नहीं करते। फिर भी ये अभिगृहीत 5.1 का अनुसरण करते हैं।
4.  $AC = BC$   
 इसलिए  $AC + AC = BC + AC$  (बराबरों को बराबरों में जोड़ा गया है।)  
 अर्थात्  $2AC = AB$  (BC + AC, AB के संपाती हैं।)  
 इसलिए  $AC = \frac{1}{2} AB$
5. अस्थायी रूप से यह मानलीजिए कि AB के दो मध्य बिन्दु C और D हैं जहाँ C और D अलग अलग हैं। अब हम यह दिखाएँगे कि बिन्दु C और D दो अलग-अलग बिन्दु नहीं हैं।
6.  $AC = BD$  (दिया हुआ है) (1)  
 $AC = AB + BC$  (बिन्दु B, बिन्दुओं A और C के बीच स्थिति है) (2)  
 $BD = BC + CD$  (बिन्दु C, बिन्दुओं B और D के बीच स्थिति है) (3)  
 (1) में (2) और (3) को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है।  
 $AB + BC = BC + CD$   
 इसलिए,  $AB = CD$  (बराबरों में से बराबरों को घटाने पर)
7. क्योंकि विश्व के किसी भाग में किसी भी वस्तु के लिए यह सत्य होता है, इसलिए इसे सार्वभौमिक सत्य माना जाता है।

## प्रश्नावली 6.1

1.  $30^\circ, 250^\circ$       2.  $126^\circ$       4. एक बिन्दु पर सभी कोणों का योग  $= 360^\circ$
5.  $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$  और  $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$       6.  $122^\circ, 302^\circ$

## प्रश्नावली 6.2

1.  $126^\circ$       2.  $126^\circ, 36^\circ, 54^\circ$       3.  $60^\circ$       4.  $50^\circ, 77^\circ$
5. आपतन कोण = परावर्तन कोण। बिन्दु B पर  $BE \perp PQ$  खींचिए और बिन्दु C पर  $CF \perp RS$  खींचिए।

## प्रश्नावली A1.1

1. (i) सदा असत्य। एक वर्ष में 12 महीने होते हैं।  
 (ii) संदिग्ध : एक दिए हुए वर्ष में दीवाली शुक्रवार को पड़ सकती है और नहीं भी पड़ सकती है।  
 (iii) संदिग्ध : वर्ष में कभी-कभी मगादी में तापमान  $26^\circ$  हो सकता है।  
 (iv) सदा सत्य  
 (v) सदा असत्य : कुत्ते उड़ नहीं सकते हैं।  
 (vi) संदिग्ध : एक लीप वर्ष में फरवरी 29 दिन का होता है।
2. (i) असत्य। एक चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग  $360^\circ$  होता है।  
 (ii) सत्य      (iii) सत्य      (iv) सत्य  
 (v) असत्य। उदाहरण के लिए  $7 + 5 = 12$  जो एक विषम संख्या नहीं है।
3. (i) 2 से बड़ी सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।  
 (ii) प्राकृत संख्या का दोगुना सदैव सम होता है।  
 (iii) किसी भी  $x > 1$  के लिए,  $3x + 1 > 4$   
 (iv) किसी भी  $x \geq 0$  के लिए,  $x^3 \geq 0$   
 (v) एक समबाहु त्रिभुज में माध्यिका कोण-अर्धक भी होती है।

## प्रश्नावली A1.2

1. (i) मानव मेरुदंड वाले होते हैं। (ii) नहीं, दिनेश अपने बाल किसी अन्य दिन भी कटवा सकता था। (iii) गुलग की लाल जीभ है। (iv) हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि गटर की सफाई तुरंत हो जानी चाहिए। (v) यह आवश्यक नहीं है कि पूँछ वाले सभी जानवर कुत्ते ही हों। उदाहरण के लिए, बैल, बंदर जैसे जानवरों की पूँछ होती है, परन्तु वे कुत्ते नहीं हैं।
2. अब आपको उलटकर B और 8 को देखना होता है। यदि दूसरी ओर B पर एक सम संख्या हो, तो नियम भंग हो जाता है। इसी प्रकार, यदि दूसरी ओर 8 पर एक स्वर हो, तो नियम भंग हो जाता है।

### प्रश्नावली A1.3

- तीन संभव कंजक्चर ये हैं :  
(i) किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल सम होता है। (ii) किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल, 4 से भाज्य होता है। (iii) किन्हीं भी तीन क्रमागत सम संख्याओं का गुणनफल 6 से भाज्य होता है।
- पंक्ति 4:  $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$ ; पंक्ति 5:  $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$ ; पंक्ति 4 और पंक्ति 5 पर कंजक्चर लागू होता है। नहीं, क्योंकि  $11^5 \neq 15101051$ .
- $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$ ;  $T_{n-1} + T_n = n^2$ .
- $111111^2 = 12345654321$ ;  $1111111^2 = 1234567654321$
- विद्यार्थी का अपना उत्तर। उदाहरण के लिए, यूक्लिड की अभिधारणाएँ।

### प्रश्नावली A1.4

- (i) समान कोण, परन्तु अलग-अलग भुजाओं वाले कोई भी दो त्रिभुज हो सकते हैं।  
(ii) समभुज की भुजाएँ तो बराबर होती हैं, परन्तु यह वर्ग नहीं भी हो सकता है।  
(iii) आयत के कोण बराबर होते हैं, परन्तु यह वर्ग नहीं भी हो सकता है।  
(iv)  $a = 3$  और  $b = 4$  पर कथन सत्य नहीं है।  
(v)  $n = 11$  पर  $2n^2 + 11 = 253$  जो अभाज्य नहीं है।  
(vi)  $n = 41$  पर  $n^2 - n + 41$  अभाज्य नहीं है।
- विद्यार्थी का अपना उत्तर।
- माना  $x$  तथा  $y$  दो विषम संख्याएँ हैं। तब  $x = 2m + 1$ , जहाँ  $m$  एक प्राकृत संख्या है तथा  $y = 2n + 1$ , जहाँ  $n$  भी एक प्राकृत संख्या है।  
 $x + y = 2(m + n + 1)$ । इसलिए,  $x + y$  दो से भाज्य है तथा सम है।
- प्रश्न 3 देखिए।  $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$ .  
अतः  $xy$ , 2 से भाज्य नहीं है। इसलिए यह विषम है।
- मान लीजिए  $2n$ ,  $2n + 2$  और  $2n + 4$  तीन क्रमागत सम संख्याएँ हैं। तब इनका योग  $6(n + 1)$  है जो कि 6 से भाज्य है।
- (i) मान लीजिए मूल संख्या  $n$  है। तब हम निम्नलिखित संक्रियाएँ करते हैं।  
$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9 \rightarrow \frac{3n + 9}{3} = n + 3 \rightarrow n + 3 + 4 = n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7$$
  
(ii) ध्यान दीजिए कि  $7 \times 11 \times 13 = 1001$ . कोई भी तीन अंकों वाली संख्या, मान लीजिए  $abc$  लीजिए। तब  $abc \times 1001 = abcabc$ . अतः छः अंकों वाली  $abcabc$ , 7, 11 और 13 से भाज्य है।