கருநாடக அரசு

கணிதம்

Mathematics

Tamil Medium

9

ஒன்பதாம் வகுப்பு

பகுதி - 1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram,
Bengaluru - 560 003.

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity and to promote among them all;

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿತವಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ತಮಿಳು ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದ ಮಾಡಿ 2017–18ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ತಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2ರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀಮತಿ ಮಂಜುಶ್ರೀ ಭಾ.ಆ.ಸೇ.
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

Tamil Translation Committee

Sri. A. Dananjayan, Principal Sri Annamma Devi Vidyamandira English Medium High School, Kumarasvamy Layout, Bengaluru.

Sri. G. Sampath, Assistant Master Tagore Memorial High School, Yashwanthapur, Bengaluru.

Sri. M. Mani, Retired Teacher KGF, Kolar.

Sri. Nagaraj, Retired Teacher KGF, Kolar.

Smt. Jaishree, Assistant Teacher, Sri Sendil Kumarn Venkateshwara High School, Bengaluru .

Scrutiniser

Smt. Sujatha G. Rao, Sena Vihar, Kammanahalli, Bengaluru.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

Advice and Guidance

Sri M. P. Madegowda, Managing Director, Karnataka Textbook Society, Bengaluru.

Smt M. D. Usha, Deputy Director, Karnataka Textbook Society, Bengaluru.

Program Co-ordinators

Smt. Rajeshwari.U, Assistant director, Karnataka TextBook Society, Bengaluru.

பொருள் அடக்கம்

பகுதி - 1

X3K6A6

1. எண் அமைப்புகள் / முறைமை 1–27

1.1 முன்னுரை *1*

1.2 விகிதமுறா எண்கள் *5*

1.3 மெய் எண்களும் அவற்றின் தசம விரிவாக்கங்களும் *9*

1.4 மெய் எண்கள் மீதான செயல்பாடுகள் *16*

1.5 மெய் எண்களின்அடுக்குகளின் விதிகள் *23*

1.6 தொகுப்பு *26*

2. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் 28–54

2.1 முன்னுரை *28*

2.2 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள் *28*

2.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்கள் *34*

2.4 பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல் *39*

2.5 இயற்கணித முற்றொருமைகள் *44*

2.6 தொகுப்பு *53*

3. ஆயத்தொலை வடிவியல் 55–68

3.1 முன்னுரை 55

3.2 கார்டீஸியன் அமைப்பு 59

3.3 தொகுப்பு *67*

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் — 68–74

4.1 முன்னுரை — 68
4.2 ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் — 68
4.3 ஒரு படி சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் முறை — 71
4.4 தொகுப்பு — 74

5. 'யூக்ளிட்' இன் வடிவியலின் அறிமுகம் — 75–88

5.1 முன்னுரை — 75
5.2 யூக்ளிட்டின் வரையறைகள், எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்ப்பாடுகள். — 78
5.3 தொகுப்பு — 87

6. கோடுகளும் கோணங்களும் — 89–105

6.1 முன்னுரை — 89
6.2 அடிப்படை வார்த்தைகளும் வரையறைகளும் — 90
6.3 வெட்டு கோடுகள் மற்றும் வெட்டா கோடுகள் — 93
6.4 கோணங்களின் ஜோடிகள் — 94
6.5 ஒரே கோட்டுக்கு இணையான கோடுகள் — 100
6.6 தொகுப்பு — 105

பிற்சேர்க்கை : 1 — 106 – 130

A 1.1 முன்னுரை — 106
A 1.2 கணிதத்தில் ஒப்புகொள்ளப்பட்ட வாக்கியங்கள் — 107
A 1.3 பகுத்தறிதல் — 112
A1.4 தேற்றங்கள் அனுமானங்கள் அடிக்கோள்கள் — 115
A 1.5 கணித நிரூபணம் என்றால் என்ன? — 122
A1.6 தொகுப்பு — 130

விடைகள் /குறிப்புகள் — 131 – 146

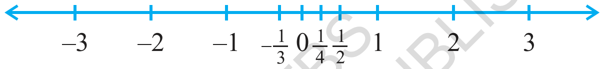
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பாடம் 1

எண் அமைப்புகள் / முறைமை (Number systems)

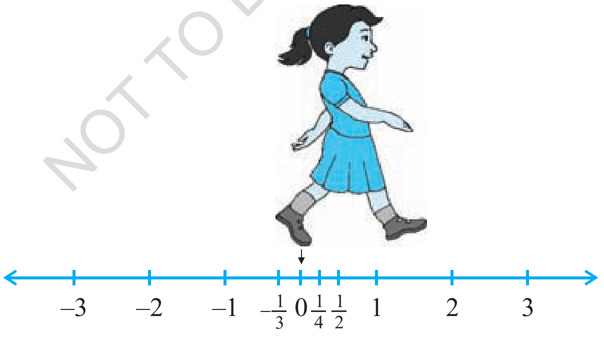
1.1 முன்னுரை

உன்னுடைய முந்தய வகுப்புகளில் நீ எண் கோடு (Number line) பற்றி அறிந்து கொண்டிருப்பாய். அதன் மீது பலவகையான எண்களை எப்படி அமைப்பது என்பது பற்றியும் படித்து அறிந்திருப்பாய். (பாடம் 1.1 ஐ பார்)



படம் 1.1 எண்கோடு

நீ சுழியத்திலிருந்து (zero) புறப்பட்டு வலது புறம் நேர்திசையில் இந்த எண் கோட்டின் மீது நடப்பதாக கற்பனை செய்துகொள். உன்னுடைய கண்கள் பார்ப்பது எண்கள், எண்கள் மற்றும் எண்கள் மட்டுமே.

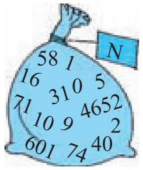


படம் 1.2

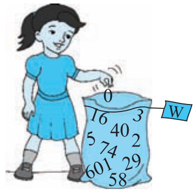
நீ எண் கோட்டின் மீது நடக்குப்பொழுது எண்களை சேகரிப்பதாக இருந்தால் அவற்றை போட ஒரு பையை தயார் நிலையில் வை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

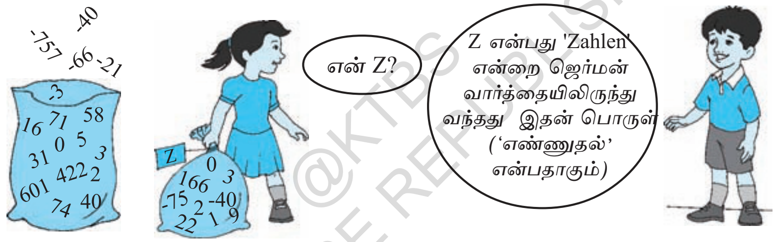
ஆரம்பத்தில் இயல் எண்கள் (Natural Number) *1, 2, 3* போன்ற எண்களை மட்டுமே பொறுக்கி எடு. இந்த பட்டியல் நீண்டுகொண்டே போவதை நீ பார்க்கலாம். (இது ஏன் சாத்தியமாகிறது?) உன்னுடைய பையில் அளவிடமுடியாத இயல் எண்கள் உள்ளன. இதை N என குறி.



இப்போது பின்னால் திரும்பி எதிர்திசையில் நட. சுழியம் (Zero) என்ற எண்ணை எடுத்து பையில் போடு. இப்போது நீ பையில் முழு எண்களை (whole numbers) சேகரித்து இருக்கிறாய். இதற்கு W என்ற குறியீட்டைக் கொடு.

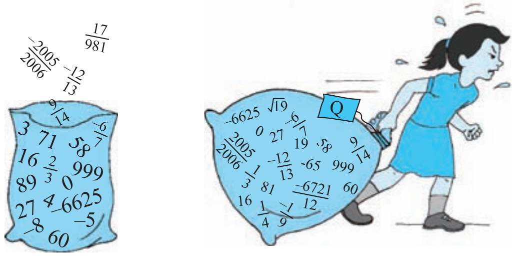


தற்போது உனக்கு முன்னால் பலப் பல எதிர் / குறை எண்கள் (Negative numbers) உள்ளன. எல்லா எதிர் எண்களையும் உன்பையில் போடு. உன்னுடைய புது சேகரிப்பு என்ன? இது எல்லா எண்களின் சேகரிப்பு என்பதை நீ அறிவாய் இதை Z குறியீட்டு மூலம் குறி, இதை முழுக்கள் (integers) என்பர்.



எண் கோட்டின் மீது வேறு ஏதாவது எண்கள் விடுபட்டு இருக்கின்றனவா? ஆமாம் $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ போன்ற எண்களும் $-\frac{2005}{2006}$ போன்ற எண்களும் கூட விடுபட்டுள்ளன.

இத்தகைய எண்களை கூட பையில் போட்டால் இப்போது பையில் உள்ளவை விகிதமுறு எண்களின் (Rational Number) தொகுப்பு ஆகும்.



விகிதமுறு எண்களின் தொகுப்பை Q என குறி. 'விகிதமுறு' என்ற வார்த்தை விகிதம் (Ratio) என்ற வார்த்தையிலிருந்து உருப்பெற்றது. Q என்பது 'Quotient' (விகிதமுறு எண்களின்கணம்) என்ற வார்த்தையில் இருந்து எடுக்கப்பட்டது.

'விகிதமுறு எண்கள்' இதன் வரையறையை நினைவு கூர்ந்துபார்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

> விகிதமுறு எண் என்பது $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவிலுள்ள எண்ணாகும். இதில் p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் எண்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(ஏன் நாம் $q \neq 0$. என்கிறோம்?)

எடுத்துக்காட்டாக : –25 என்பதை $-\frac{25}{1}$ என எழுதலாம். இங்கு $p = -25; q = 1$.

எனவே விகிதமுறு எண்கள் எனபது இயல் எண்கள், முழு எண்கள் மற்றும் முழுக்கள் (integers) சேர்ந்தவை ஆகும்.

விகிதமுறு எண்கள் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் (p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் எண்கள் மற்றும் $q \neq 0$) ஒரே அமைப்பை கொண்டதாக இல்லை என்பதை நீ அறிவாய்.

எடுத்துக்க காட்டாக $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ என்று நீண்டுகொண்டே இருக்கும்.

இவை சமமான விகிதமுறு எண்கள் (அல்லது பின்னங்கள்). இருப்பினும் $\frac{p}{q}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்று சொன்னால் அல்லது $\frac{p}{q}$ ஐ எண் கோட்டில் குறி த்தால் நாம் $q \neq 0$ என கருதுகிறோம். p மற்றும் q விற்கு 1 ஐ தவிர வேறு பொதுக் காரணிகள் இல்லை என கருதலாம். (அதாவது p மற்றும் q என்பன முக்கிய கூட்டு (co-prime) எனலாம். எனவே எண் கோட்டின் மீது $\frac{1}{2}$ சமமான கணக்கில் அடங்கா பல பின்னங்கள் உள்ளன. அவை எல்லாவற்றையும் $\frac{1}{2}$ என்பதே பிரதிபலிக்கிறது என்று கொள்வோம்.

நீங்கள் இதற்கு முன்பு படித்த வகுப்புக்களில் அறிந்த பலவகையான எண்களைப் பற்றிய எடுத்துக் காட்டுகளை தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்க் கண்ட வாக்கியங்கள் சரியா அல்லது தவறா? உன்னுடைய விடைக்கு காரணங்கள் கூறு.

(i) ஒவ்வொரு முழு எண்ணும் ஒரு இயல் எண்

(ii) ஒவ்வொரு முழுக்களும் ஒரு விகிதமுறு எண்

(iii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் ஒரு முழுக்கள்

தீர்வு:

(i) தவறு ஏனென்றால் 0 என்பது முழு எண் ஆனால் அது இயல் எண் அல்ல.

(ii) உண்மை (அல்லது) சரி : ஏனென்றால் ஒவ்வொரு முழுக்கள் m என்பதும் $\frac{m}{1}$ என்ற வடிவில் எழுத முடியும். எனவே அது விகிதமுறு எண் ஆகும்.

(iii) தவறு. ஏனென்றால் $\frac{3}{5}$ என்பது முழுக்கள் இல்லை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 2: *1 மற்றும் 2 என்ற எண்களுக்கிடைய உள்ள ஐந்து (5) விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடி .*

இந்த கணக்கை குறைந்த பட்சம் இரண்டு முறைகளில் தீர்க்கலாம்.

தீர்வு 1: r மற்றும் s என்ற இரு எண்களுக்கிடையே விகிதமுறு எண்ணை கண்டு பிடிக்க r மற்றும் s இரண்டையும் கூட்டி 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும் என்பதை நினைவுகொள். அதாவது $\frac{r+s}{2}$ என்பது r க்கும் s க்கும் இடையே உள்ளது. எனவே $\frac{3}{2}$ என்பது 1 க்கும் 2 க்கும் இடையேயுள்ள எண். இந்த வழியில் மேலும் நான்கு விகிதமுறு எண்களை கண்டறிய முயற்சி செய். அந்த நான்கு விகிதமுறு எண்கள் என்பன $\frac{5}{4},\frac{11}{8},\frac{13}{8}$ மற்றும் $\frac{7}{4}$ ஆகும்.

தீர்வு 2: 1 மற்றும் 2 க்கு இடையே ஐந்து விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடிக்க மற்றொரு வழி இதோ. 1 மற்றும் 2 என்ற விகிதமுறு எண்களை தொகுதி 5 + 1 கொண்டு எழுதலாம். அதாவது $1=\frac{6}{6}$ மற்றும் $2=\frac{12}{6}$ இதேபோல் $\frac{7}{6},\frac{8}{6},\frac{9}{6},\frac{10}{6}$ மற்றும் $\frac{11}{6}$ என்பன அனைத்தும் 1 மற்றும் 2 க்கு இடையேயுள்ள விகிதமுறு எண்களாகும்.

குறிப்பு: எடுத்துக்காட்டு இரண்டில் 1 க்கும் 2 க்கும் இடையே ஐந்து விகிதமுறு எண்களை கண்டுபிடிக்கச் சொல்லப்பட்டிருந்தாய். ஆயினும் 1 க்கும் 2 க்கும் இடையே எண்ணிலடங்காத அளவிற்கு பல விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்பதை நீ உணர்ந்திருப்பாய். பொதுவாக

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே கணக்கில்லா எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

எண்கோட்டை மீண்டும் ஒருமுறை பார்க்கலாம். நீ எல்லா எண்களையும் எடுத்தாயா? இல்லை, இன்னும் உள்ளது, உண்மை என்னவென்றால் இன்னும் கணக்கில்லா எண்கள் எண்கோட்டின் மீது உள்ளன. நீ பொறுக்கி எடுத்த எண்களுக்கு இடையே இன்னும் பல இடைவெளி உள்ளன. ஒன்று இரண்டு எண்கள் அல்ல பலப் பல கணக்கில் அடங்கா எண்கள் உள்ளன.

இந்த இடைவெளிகளுக்கு இடையேயும் கணக்கற்ற எண்கள் உள்ளன என்பது ஆச்சரியப் படக்கூடிய சங்கதிதானே. எனவே நமக்கு கீழ்க்கண்ட கேள்விகள் எழுகின்றன.

1. எண் கோட்டின் மீது விடுப்பட்ட எண்களை என்னவென்று அழைப்பது?
2. அவற்றை எப்படி கண்டறிவது? அவற்றை வகிதமுறு எண்களிலிருந்து எப்படி வேறுபடுத்தி பார்ப்பது?

இந்த வினாக்களுக்கு விடை அடுத்து வரும் பகுதிகளில் கிடைக்கும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 1.1

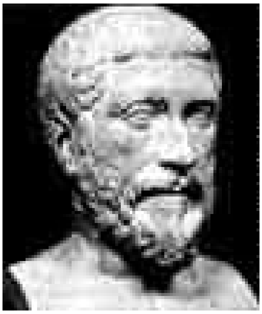
1. சுழியம் (zero) என்பது விகிதமுறு எண்ணா? அதை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவத்தில் உன்னால் எழுத முடியுமா? இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.
2. 3 மற்றும் 4 இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள ஐந்து விகிதமுறு எண்களை எழுது.
3. $\frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{4}{5}$ இடையேயுள்ள ஐந்து விகிதமுறு எண்களை எழுது.
4. கீழ்க் கண்ட வாக்கியங்கள் சரியா அல்லது தவறா எனக்கூறு உன்னுடைய பதிலுக்கு காரணம் கூறு.
   (i) ஒவ்வொரு இயல் எண்ணும் முழு எண்.
   (ii) ஒவ்வொரு முழுக்களும் ஒரு முழு எண்.
   (iii) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் முழு எண் ஆகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

முந்தைய பகுதியில் நாம் எண் கோட்டின் மீது உள்ள எண்களில் சில விகிதமுறு எண்கள் அல்ல எனப் பார்த்தோம். இந்த பகுதியில் நாம் அந்த எண்களைப் பற்றி ஆராயப்போகிறோம். இதுவரை நீ பார்த்த எண்கள் அனைத்தும் $\frac{p}{q}$ வடிவத்தில் இருந்தன. இதில் p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$. ஆகவே நீங்கள் கேட்கலாம் இந்த வடிவில் இல்லாத எண்கள் உள்ளனவா என்று? உண்மையாகவே அத்தகைய எண்கள் உள்ளன.

400 BC வருடத்திற்கு முன்பு பித்தகோரஸ் என்ற கிரீஸ் விஞ்ஞானியின் சீடர்கள் இந்த விகித முறு எண்கள் அல்லாத எண்களை கண்டுபிடித்தனர். இந்த எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் என அழைக்கப்பட்டன. எனென்றால் இந்த எண்களை விகித எண்கள் வடிவத் தில் எழுத முடியாது. இந்த கண்டு பிடிப்பு குறித்து பல கதைகள் உள்ளன. இப்பாகுஸ் என்பவர் $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என கண்டுபிடித்தது குறித்தோ அல்லது $\sqrt{2}$ என்பதை ரகசிய பித்தகோரஸ் குழுவிற்கு வெளியே இருந்த மற்ற இனத்தவருக்கு தெறிவித்து குறித்தோ அவருடைய வாழ்க்கை துரதிநஷ்டவசமான முடிவிற்கு வந்ததாக கதைகள் உண்டு.



பித்தகோரஸ்
(569 BCE - 479 BCE)
படம் 1.3

இந்த எண்கள் குறித்தான வரையறையை நாம் இப்போது பார்ப்போம்.

s என்ற ஒரு எண் $\dfrac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுத முடியாமல் இருந்தால் அந்த எண் விகிதமுறா எண் எனப்படும், இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

கணக்கில் அடங்கா எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன என்பது உனக்கு நன்றாகத் தெரியும். இதேபோல் கணக்கில் அடங்கா எண்ணற்ற விகிதமுறா எண்களும் உள்ளன.

சில எடுத்துக்காட்டுகள்;

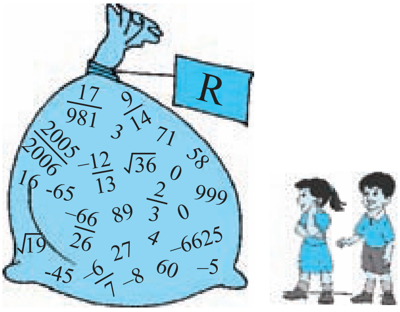
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \neq, 0.10110111011110.......$

குறிப்பு: $\sqrt{\ }$ என்ற குறியீட்டை உபயோகிக்கும் போது அது ஒரு எண்ணின் நேர் (+ve) மிகை வர்க்க மூலம் என ஊகித்துக் கொள்வோம். ஆகவே $\sqrt{4} = 2$ இருப்பினும் +2 மற்றும் –2 என்பன 4-ன் வர்க்க மூலங்கள் ஆகும்.

மேற்கண்ட வர்க்க மூல எண்களில் சில நீ அறிந்தவைதான். உதாரணமாக மேற்கண்ட வர்க்க மூலங்களில் பலதும் மற்றும் π யும் நீ அறிந்தவைதான்.

பிதகோரியன்கள் $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபித்தனர். பிறகு சுமார் 425 பொ.க.மு. வருடத்தில் 'சைரேனே' வின் தியோடோரஸ் என்பவர் $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ மற்றும் $\sqrt{17}$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் எனக் காட்டினார்.

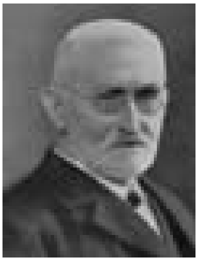
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}........$ என்பன விகிதமுறா எண்கள் என்ற நிரூபணத்தை நீங்கள் 10-ஆம் வகுப்பில் படிக்கலாம். ஆயிரக்கணக்கான ஆண்டுகளாகவே, பல கலாச்சாரங்கள் π என்பது விகிதமுறா எண் என்று அறிந்திருந்த போதிலும், 1700 வருட கடைசியில் லாம்பர்ட் (Lambert) மற்றும் லெஜண்ட்ரே (Legendre) என்பவர்கள் π என்பது விகிதமுறா எண் என நிரூபித்தனர். அடுத்த பகுதியில் 0.10110111011110....... மற்றும் π என்பன ஏன் விகிதமுறா எண்கள் என படிப்போம்.



இதற்குமுந்தைய பகுதியில் நாம் எழுப்பிய கேள்விக்கு வருவோம். விகிதமுறா எண்கள் உள்ளபையை நினைவு கூர். எல்லா விகிதமுறா எண்களையும் எண்கோட்டின் மீதிருந்து எடுத்து பையில் போட்டால் எண் கோட்டின் மீது ஏதாவது எண் விடுபட்டு இருக்குமா? விடை 'இல்லை' என்பதாகும்! விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தொகுப்பு மெய் எண்களின் தொகுப்பாக உள்ளன. இதை R எனக் குறிக்கிறோம். எனவே ஒரு இயல் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும். எனவே **ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் எண்கோட்டின் மீது ஒரு பிரத்யேக (unique) புள்ளியின் மீது குறிக்கப் பட்டிருக்கும். அதேபோல் எண்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு பிரத்யேக மெய் எண்ணைக் குறிக்கும்.**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எனவே எண்கோட்டை நாம் மெய் (real) எண்கோடு என்கிறோம்.



R. Dede kind (1831-1916)

1870 களில் டெடேகைண்டு மற்றும் கேன்டர் என்ற இரு ஜெர்மானிய விஞ்ஞானிகள் கீழ்க்கண்ட உண்மையை கண்டறிந்தனர்.

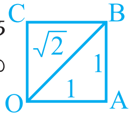
ஒவ்வொரு மெய் எண்ணுக்கும் மெய் எண்கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளி உள்ளது. இதேபோல் எண் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரு மெய் எண் உள்ளது.

G. Cantor (1845-1918)

எண்கோட்டின் மீது சில விகிதமுறா எண்களை எப்படி கண்டறிவது எனக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $\sqrt{2}$ என்பதை எண்கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டு.

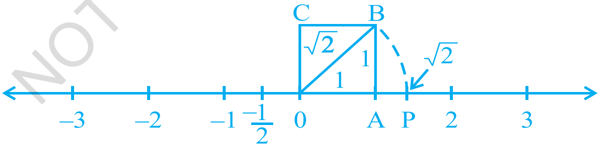
தீர்வு: கிரேக்கர்கள் $\sqrt{2}$ என்பதை எப்படி கண்டுபிடித்தார்கள் என்பதை காண்பது மிகவும் சுலபமாகும். OABC என்ற ஒரு சதுரத்தை எடுத்துக் கொள். இதன் ஒவ்வொருபக்கமும் *1* என்ற அலகு நீளம் கொண்டது (Fig. 1.7) என்க.



படம் 1.6

பிதகோரஸ் தேற்றத்தின்படி

OB = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ எண்கோட்டின் மீது $\sqrt{2}$ என்பதை எப்படி குறிப்பது. இது மிகவும் சுலபம். *1.7* என்ற படத்தை எண்கோட்டின் மீது படம் *1.7*ல் காட்டியபடி வரை. மூலைவிட்டம் (vertex) O என்பது சுழியத்தின் மீது படியும்படி வரையப் பட்டுள்ளது.



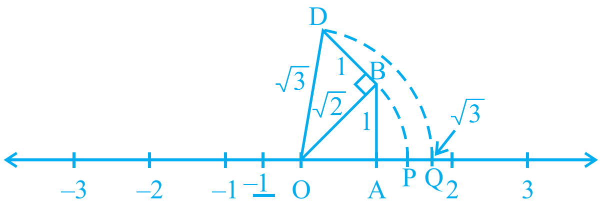
படம் 1.7

OB = $\sqrt{2}$ என நாம் கண்டோம். காம்பசை (கவராயம்) உபயோகித்து O வை மையமாக வைத்து OB யை ஆரமாகக் கொண்டு ஒரு வில் வரை. இது எண்கோட்டை *p*-ல் வெட்டும்படி வரை. *p* என்பது எண்கோட்டின் மீது $\sqrt{2}$ என்பதை குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4: $\sqrt{3}$ என்பதை எண்கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டு.

தீர்வு : படம் *1.7*ஐ கவனி. OB க்கு செங்குத்தாக *1* அலகு அளவான BD என்ற கோட்டை வரை. படம் *1.8* உள்ளபடி வரை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 1.8

பிதகோரஸ் தேற்றத்தை உபயோகித்து OD யை கண்டுபிடி.

$$OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

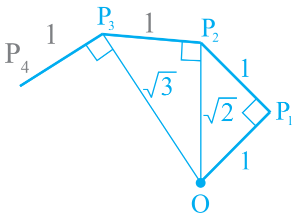
காம்பஸ் உதவியுடன் O வை மையமாக வைத்து OD யை ஆரமாகக் கொண்டு ஒருவில் வரை. இந்த வில் எண்கோட்டை Q வில் சந்திக்கட்டும். இப்போது Q என்பது $\sqrt{3}$ யை குறிக்கும்.

இதே வழியில் $\sqrt{n}$ என்ற எந்த ஒரு விகிதமுறா எண்ணையும் எண்கோட்டின் மீது குறிக்கலாம். n என்பது நேர் இயல் எண். $\sqrt{n-1}$ என்பதை குறித்த பிறகு இதை செய்யலாம்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்க்கண்ட வாக்கியங்கள் 'சரியா' அல்லது, தவறா என்பதைக் கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.
   (i) ஒவ்வொரு விகிதமுறா எண்ணும் ஒரு மெய் எண்.
   (ii) எண் கோட்டின்மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $\sqrt{m}$ என்ற வடிவில் உள்ளது. m என்பது இயல் எண்.
   (iii) ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் ஒரு விகிதமுறா எண்.
2. நேர் எண்களின் வர்க்க மூலம் ஒவ்வொன்றும் விகிதமுறா எண்களா? இல்லை எனில் விகிதமுறு எண்ணாக அமைந்த வர்க்கமூல எண் ஒன்றிற்கு உதாரணம் கொடு.
3. எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{5}$ என்பதை எப்படி குறித்து காட்டுவாய்? படம் வரைந்து விளக்கு.
4. **வகுப்பறை செயல்பாடு வர்க்க மூல சுருள்** (Square root spiral) **ஐ வரைதல்.**

பெரிய அளவிலான வெள்ளைத் தாளை எடுத்துக் கொள். அதில் படம் 1.9 ல் காட்டியபடி வர்க்க மூல சுருளை வரை.



படம் 1.9

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

O வில் ஆரம்பித்து 1 அலகுடன் OP_1 என்ற கோட்டை வரை. OP_1 க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு அளவுடன் p_1p_2 வரை. OP_2 க்கு செங்குத்தாக 1 அலகு அளவுடன் p_2p_3 வரை. இதே முறையில் p_3p_4 மற்றும் p_4p_5 வரையலாம். இவற்றை எல்லாம் படத்தில் காட்டியபடி அழகான சுருள் $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\right)$ படத்தை அமைக்கலாம்

1.3 மெய் எண்களும் அவற்றின் தசம விரிவாக்கங்களும் (Real Numbers and their Decimal Expansions)

இந்த பகுதியில் விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்கள் இவற்றை வேறொரு பார்வை கோணத்தில் படிக்கப் போகிறோம். மெய் எண்களின் தசம விரிவாக்கம் பற்றியும் அந்த தசம விரிவாக்கம் விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களை வேறுபடுத்திப் பார்க்க உதவுமா என்றும் நாம் பார்ப்போம்.

மெய் எண்களின் தசம விரிவாக்கத்தை பயன்படுத்தி எண் கோட்டின் மீது மெய் எண்களை எப்படி பதிய வைப்பது என்பது குறித்தும் கற்பனை செய்வதை விளக்குவோம். விகித முறு எண்கள் நமக்கு நல்ல முறையில் தெரிந்திருப்பதால் அதை வைத்து தொடங்குவோம்.

நாம் கீழ்க்கண்ட மூன்று எடுத்துக்காட்டுக்களை பார்ப்போம்.

$\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$

வகுக்கும்போது உண்டாகும் மீதி களை கூர்ந்து கவனி. அவற்றிலிருந்து எதாவது நல்ல அமைப்பை உருவாக்க முடியுமா என கவனி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக் காட்டு 5: $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ மற்றும் $\frac{1}{7}$ இவற்றின் தசம விரிவாக்கங்களை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.333... \\ \hline
3 & 10 \\
 & 9 \\ \hline
 & 10 \\
 & 9 \\ \hline
 & 10 \\
 & 9 \\ \hline
 & 10 \\
 & 9 \\ \hline
 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.875 \\ \hline
8 & 7.0 \\
 & 6.4 \\ \hline
 & 60 \\
 & 56 \\ \hline
 & 40 \\
 & 40 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.142857... \\ \hline
7 & 1.0 \\
 & 7 \\ \hline
 & 30 \\
 & 28 \\ \hline
 & 20 \\
 & 14 \\ \hline
 & 60 \\
 & 56 \\ \hline
 & 40 \\
 & 35 \\ \hline
 & 50 \\
 & 49 \\ \hline
 & 1
\end{array}
$$

மீதி: 1, 1, 1, 1, 1	*மீதி : 6, 4, 0*	*மீதி ; 3, 2, 6, 4, 5, 1*
வகுக்கும் எண் : 3	*வகுக்கும் எண் : 8*	*வகுக்கும் எண் : 7*

இதிலிருந்து என்ன தெரிகிறது ? மூன்று உண்மைகள் நமக்குப் புலப்படுகின்றன.

(i) மீதி என்பது சில படிகளுக்குப் பின் '0' ஆக வருகிறது அல்லது மீண்டும் வர ஆரம்பிக்கிறது.

(ii) மீண்டும் வர ஆரம்பிக்கும் மீதி எண்களின் எண்ணிக்கை வகுக்கும் எண்களை விட குறைந்த மதிப்புடையவை.

($\frac{10}{3}$ ல் ஒரு எண் திரும்ப திரும்ப மீதியாக வருகிறது வகுக்கும் எண் 3ஐ விட குறைவு, $\frac{1}{7}$ ல் 3, 2, 6, 4, 5, 1 என ஆறு 'மீதி' எண்கள் வருகின்றன. 7 என்பது வகுக்கும் எண்)

(iii) மீதி மீண்டும் மீண்டும் வந்தால் ஈ.வு (quotient) எண்ணில் எண்கள் வந்து கொண்டே இருக்கும்.

($\frac{10}{3}$ ல் ஈ.வின் 3 திரும்ப திரும்ப வருகிறது மற்றும் $\frac{1}{7}$ ல் ஈ.வு 142857 என்ற பட்டையாக வருகிறது)

ஒரு சில விகிதமுறு எண்களுக்கு இந்த அமைப்பு இருப்பதை உதாரணமாகப் பார்த்தோம். ஆனால் $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ என்ற வடிவில் உள்ள எல்லா விகிதமுறு எண்களுக்கும் இந்த அமைப்பு பொருந்தும். p யை q ஆல் வகுக்கும் போது இரண்டு முக்கிய நிகழ்வுகள் நடை பெறுகின்றன. ஒன்று மீதி "0" வருகிறது. அல்லது எப்போதும் '0' வருவதில்லை மற்றும் மீதி தொடர்ந்து வருகிறது. இந்த ஒவ்வரு நிகழ்வையும் தனித் தனியாக ஆராய்வோம்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிகழ்வு 1: மீதி சுழியம் (0) என வரும்

எடுத்துக்காட்டு $\frac{7}{8}$ ல் மீதி 0 வருகிறது எனப் பாரத்தோம். அதன் தசம விரிவாக்கம் 0.875 எனவும் பார்த்தோம். பிற எடுத்துக்காட்டுகள்.

$$\frac{1}{2} = 0.5; \frac{639}{250} = 2.556$$

இந்த எல்லா நிகழ்வுகளிலும் தசம விரிவாக்கம் சில அடிகளுக்கப் பின்னால் முடிவுக்கு வருகிறது. இத்தகைய எண்களின் தசம விரிவாக்கம் **முடிவுறுபவை** (texminating) என்கிறோம்.

நிகழ்வு (ii) மீதி எப்போதும் சுழியம் (0) என வராது.

$\frac{10}{3}$ மற்றும் $\frac{1}{7}$ என்ற எடுத்துக் காட்டுகளில் மீதி என்பது திரும்ப திரும்ப வந்து தசம விரிவாக்கத்தை கட்டாயமாக தொடரச் செய்கிறது. அதாவது ஈவில் தொடர்ந்து எண்கள் வந்து கொண்டே இருக்கின்றன. இந்த விரிவாக்கத்தை நாம் ***'முடிவுறா மீள்வரு தசம விரிவாக்கம்'*** (Non-terminating) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{3}$ = 0.3333....... மற்றும் $\frac{1}{7}$ = 0.142857142857142857......

$\frac{1}{3}$ என்பதில் 3 என்ற எண் ஈ.வில் மீண்டும் மீண்டும் வருவதை நாம் $\overline{0.3}$ என குறிக்கிறோம். இதே போல $\frac{1}{7}$ என்பதில் ஈ.வு பகுதியில் 142857 என்ற தொகுப்பு மீண்டும் மீண்டும் வருவதால் அதை $0.\overline{142857}$ என எழுதுகிறோம். எண்களின் மேலே உள்ளக் கோடு அந்த எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக் குறிக்கிறது. 3.57272 என்பதையும் $3.5\overline{72}$ எனக் குறிக்கலாம். மேற்கண்ட எல்லாமும் முடிவுறா தசம விரிவாக்கத்திற்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும். இப்படியாக விகிதமுறு எண்களின் தசம விரிவாக்கம் என்பது முடிவுறு தசம விரிவாக்கம் அல்லது முடிவுறா தசம விரிவாக்கம் என்ற இரண்டு நிலைகளில் உள்ளன. ஆனால் ஒரு வேளை நீ எண் கோட்டின் மீது நடக்கும் போது 3.142678 எண்ணை கடந்து வந்தால், இதன் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறுவதால் இதை விகித முறு எண் எனக் கொள்ளலாம். 1.272727 அதாவது $1.\overline{27}$ என்ற எண்ணை கடந்தால் அதன் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறாமல் மீண்டும் மீண்டும் வருவதாக இருப்பதால் இதையும் விகிதமுறு எண் எனக் கொள்ளலாமா? விடை 'ஆம்' என்பதாகும்.

இதை நாம் நிரூபணம் செய்ய மாட்டோம் ஆனால் உதாரணங்களுடன் விளக்க முடியும். முடியும் நிகழ்வுகள் மிகவும் சலபமானவை.

எடுத்துக்காட்டு 6: 3.142678 என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என்பதை விளக்கி காட்டு. வேறு விதமாக சொல்லவதானால் 3.142678 என்பதை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுது. இதில் p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

தீர்வு: $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ என்க

இது ஒரு விகிதமுறு எண்.

இப்பொழுது நாம் முடிவுறா தசம விரிவாக்கத்தைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 7: $0.3333 = 0.\bar{3}$ என்பதை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுத முடியும் எனக் காட்டு. இதில் p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

தீர்வு: $0.\bar{3}$ என்பது என்ன எண் என நமக்குத் தெரியாது. அதை x என்க.

$\therefore x = 0.3333.........$

இங்கே நமக்கு ஒரு சூழ்ச்சியான விளையாட்டு தெரிகிறது. கீழேபார்

$10x = 10 \times (0.3333.......) = 3.333.........$

இப்போது $3.333 = 3 + x$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஏனெனில் $x = 0.3333........$

$\therefore\ 10x = 3 + x$

இந்த சமன்பாட்டை தீர்த்தால்

$$10x - x = 3$$
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 8: $1.272727...... = 1.\overline{27}$ என்பதை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதலாம் எனக்காட்டு. இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

தீர்வு: $x = 1.272727......$ என்க

இரு எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதால் சமன் பாட்டின் இருபுறமும் 100 ஆல் பெருக்கு

$$100 \times x = 100 \times (1.272727..........)$$
$$100\,x = 127.2727......$$
$$100\,x = 126 + 1.2727........$$
$$100\,x = 126 + x\ (\because x = 1.272727\ ....)$$
$$\therefore\quad 100\,x - x = 126$$
$$99\,x = 126$$
$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

But $x = 1.\overline{27}$

$$\therefore\quad \frac{14}{11} = 1.\overline{27}$$

எடுத்துக்காட்டு 9: $0.2353535 = 0.2\overline{35}$ என்பதை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டு. இங்கு p மற்றும் q என்பன இயல் எண்கள் மற்றும் $q \neq 0$

தீர்வு : $x = 0.2\overline{35}$ என்க. இங்கு 2 என்பது மீண்டும் வருவதில்லை. ஆனால் 35 என்ற தொகுதி மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது. இரண்டு இலக்கங்கள் திரும்ப திரும்ப வருவதால் சமன் பாட்டின் இரண்டு பக்கமும் 100 ஆல் பெருக்கு.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\therefore \; 100 \times x = 100 \times 0.2\overline{35}$$

$$100\,x = 23.53535.....$$

$$100\,x = 23.3 + 0.2353535..........$$

$$100\,x = 23.3 + x$$

$$100\,x - x = 23.3$$

$$99\,x = 23.3$$

$$99\,x \times 10 = 23.3 \times 10$$

$$990\,x = 2.33$$

$$x = \frac{233}{990}$$

But $x = 0.2\overline{35}$

$$\therefore \; 0.2\overline{35} = \frac{233}{990}$$

எனவே முடிவுறா தசம விரிவாக்கம் ஒவ்வொன்றையும் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$ நம்முடைய விடையை கீழ்க்கண்டவாறு தொகுக்கலாம்.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் என்பது முடிவுறு தசம விரிவாக்கம் அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாக்கமாக உள்ளன. ஒரு முடிவுறு தசம விரிவாக்கம் அல்லது முடிவுறா சுழல் தசம விரிவாக்கம் என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக உள்ளது.

இபோது நமக்கு ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம விரிவாக்கம், என்பது என்ன எனத் தெரியும், விகித முறா எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் எப்படி இருக்கும்? மேற்கண்ட பண்பை வைத்து நாம் ஒரு முடிவுக்கு வரலாம். அதாவது விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறாதவையாகவும் மீண்டும் திரும்ப வராதவையாகவும் இருக்கும்.

எனவே விகிதமுறா எண்களின் பண்பை விகிதமுறு எண்களின் மேற்கண்ட பண்பை ஒத்து கூறுவதானால் அது

விகிதமுறா எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறாதவை மற்றும் மீண்டும் திரும்ப வராதவை. ஒரு எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறாதவை மீண்டும் திரும்ப வராதவை (சுழல் தனமை அற்றவை) எனில் அந்த எண் விகிதமுறா எண் என்க.

இதற்கு முன் பகுதியில் படித்த s = 0.10110111011110 என்பதை நினைவுகூர். இது முடிவுறாதவை மீண்டும் அதே திரும்பி வராதவை. எனவே இந்த பண்பை

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

வைத்து இதை விகிதமுறா எண் எனலாம். s ஐப் போல கணக்கில் அடங்கா விகித முறா எண்களை உருவாக்கலாம். மிகவும் புகழ் வாய்ந்த விகித முறா எண்கள் $\sqrt{2}$ மற்றும் π பற்றி என்ன கூறுகிறாய்? அவற்றின் தசம விரிவாக்கத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைவரை கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096.........$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950............$$

(நாம் π ன் தோராய மதிப்பை $\frac{22}{7}$ என குறிப்பிடுகிறோம். ஆனால் $\pi \neq \frac{22}{7}$

காலம் காலமாக கணிதமேதைகள் விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவாக்கத்திலுள்ள எண்களை கண்டறிய பல யுக்திகளை கையாண்டனர். உதாரணமாக $\sqrt{2}$ - ன் தசம விரிவாகத்தை கண்டுபிடிக்க வகுத்தல் முறையை உபயோகிக்கிறீர்கள்.

(800BC - 500BC) வேத காலத்தில் $\sqrt{2}$ - ன் தோராய மதிப்பைக் காண வட்டவில் விதியை (rules of chord) பயன் படுத்தினர். அதை கீழே காண்போம்

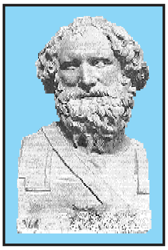
$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

இந்த விடைமேலே குறிப்பிட்ட விடையில் முதல் ஐந்து தசம எண்கள் ஒத்திருப்பதை காணலாம். π ன் தசம விரிவாக்க எண்களை கண்டுபிடிக்க நடந்த வேட்டையின் வரலாறு மிகுந்த விறுவிறுப்பு உடையது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முதன் முதலில் ஆர்க்கமெட்டிஸ் என்ற கிரேக்க விஞ்ஞானிதான் π ன் தசம் விரிவாக்க எண்களை காண முனைந்தார். அவர் கீழக் கண்டவாறு காட்டினார் 3.140845 < π < 3.142857. ஆரியபட்டா (476 – 550 CE)என்ற மிகப் பெரிய இந்திய கணித மேதை மற்றும் வானசாஸ்திர வல்லுனர் π–ன் மதிப்பை நான்கு தசம விரிவாக்கத்துடன் துல்லியமாக கணக்கீட்டார்.

அந்த எண் 3.1416. மிக வேகமான கணினியை பயன்படுத்தி π ன் மதிப்பை 1.24 டிரிலியன் தசமப் புள்ளிகளுடன் காணலாம்.



ஆர்க்கமெடிஸ்
287BCE - 212 BCE
படம் 1.10

இப்போது நாம் விகிதமுறா எண்களை எப்படி பெறுவது எனக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 10: $\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள விகிதமுறா எண் ஒன்றை கண்டுபிடி.

தீர்வு: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ எனப் பார்த்தோம். எனவே $\frac{2}{7}$ என்பதன் மதிப்பை $\frac{2}{7} = \overline{0.285714}$ என கணக்கிடலாம்.

$\frac{1}{7}$ மற்றும் $\frac{2}{7}$ இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள விகிதமுறா எண்ணைக் காண அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள முடிவுறாத திரும்ப வராத தசம விரிவாக்க எண்ணை காணவேண்டும். கணக்கில் அடங்கா அத்தகைய பல எண்களை காணலாம்.

அத்தகைய எண்ணிற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு

0.150150015000150000.........

பயிற்சி 1.3

1. கீழ்க் கண்ட எண்களை தசம வடிவில் எழுது. அவை எந்த வகையான தசம விரிவாக்கத்தைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக்கூறு.

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ என்பதை நீ அறிவாய். இதைக் கொண்டு கீழ்க் கண்டவற்றின் மதிப்பை கணிக்க முடியுமா? முடியும் எனில் எப்படி? வகுக்காமல் கணித்துக் காட்டு.

$\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$

(குறிப்பு: $\frac{1}{7}$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடிக்கும் போது 'மீதி' யை கவனத்துடன் பார்)

3. கீழ்க் கண்டவற்றை $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுது. p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99499 என்பதை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுது. உன்னுடைய விடை உனக்கு ஆச்சரியத்தை கொடுக்கிறதா? உன்னுடைய ஆசிரியர் மற்றும் வகுப்பு தோழர்களுடன் இது குறித்து வாதம் நடத்து.

5. $\frac{1}{17}$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவாகத்தில் திரும்ப திரும்ப வரும் எண்களின் தொகுதி அதிகபட்சம் எத்தனை இலக்கங்களைக் கொண்டதாக இருக்கும்? உன்னுடைய விடையை சரிபார்க்க வகுத்தல் முறையை உபயோகி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. $\frac{p}{q}$ வடிவில் ($q \neq 0$) உள்ள பல விகிதமுறு எண்களை கவனி (இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள். அவற்றினிடையே 1 ஐ தவிர பொதுகாரணி ஏதும் இல்லை. என்பதையும் மற்றும் முடிவுறு தசம விரிவாக்க எண்களுடன் உள்ளன என்பதையும் கவனி. q என்பது எத்தகைய பண்பை (property) கொண்டது என்பதை உன்னால் யூகிக்க முடிகிறதா?

7. தசம விரிவாக்கம் முடிவுறாதவை மற்றும் மீண்டும் திரும்ப வராத மூன்று எண்களை எழுது.

8. $\frac{5}{7}$ மற்றும் $\frac{9}{11}$ இவற்றிற்கு இடையே அமைந்த மூன்று வெவ்வேறான விகிதமுறா எண்களை கண்டுபிடி.

9. கீழ்க் கண்ட எண்களில் விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களை பிரிந்து எழுது.

   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478..... (v) 1.101001000100001....

1.4 மெய் எண்கள் மீதான செயல்பாடுகள் (Operations on Real Number)

ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் விதிகளுக்கு உட்பட்டு மாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு மற்றும் பங்கீட்டுப் பண்பு இவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

இரு விகிதமுறு எண்களை கூட்டினால், கழித்தால், பெருக்கினால் அல்லது வகுத்தால் (பூஜ்ஜியத்தை தவிர்த்து) நாம் மற்றொரு விகிதமுறு எண்ணைப் பெறலாம். அதாவது விகிதமுறு எண்கள் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் இவற்றைப் பொருத்து மூடப் பட்டன (closed). இதிலிருந்து நாம் திரும்ப பெறுவது என்னவெனில் விகித முறா எண்களும் கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் விதிகளுக்கு உட்பட்டு மாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு மற்றும் பங்கீட்டுப் பண்பு இவற்றை பூர்த்தி செய்கிறது. ஆனால் விகித முறா எண்களின் கூடுதல், வித்தியாசம் (கழித்தல்), பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் எப்போதும் விகிதமுறா எண்ணாகவே இருப்பதில்லை.

எடுத்துக் காட்டு 11:

$\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)$ மற்றும் $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ இவை விகிதமுறு எண்கள்.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணோடு ஒரு விகித முறா எண்ணை கூட்டினால் மற்றும் பெருக்கினால் என்ன நேர்கிறது எனப் பார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக $\sqrt{3}$ என்பது விகிதமுறா எண். $2+\sqrt{3}$ மற்றும் $2\sqrt{3}$ என்பவை என்ன? $\sqrt{3}$ என்பது முடிவுறா

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மீள் வரு தசம விரிவாக்கம். இந்த உண்மை $2+\sqrt{3}$ மற்றும் $2\sqrt{3}$ இவற்றிற்கும் பொருந்தும். எனவே $2+\sqrt{3}$ மற்றும் $2\sqrt{3}$ இரண்டும் கூட விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12: $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ என்பன விகித முறா எண்களா அல்லது இல்லையா என்பதை பரிசோதித்துப் பார்.

தீர்வு:

$$\sqrt{5} = 2.236....$$

$$\sqrt{2} = 1.4142....$$

$$\pi = 3.1415....$$

எனவே $7\sqrt{5} = 7 \times 2.236.......... = 15.652............$

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...........$$

$$\sqrt{2}+21 = 22.4142............$$

$$\pi - 2 = 1.1415........$$

இவை அனைத்தும் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவாக்கங்கள். எனவே இவை அனைத்தும் விகிதமுறா எண்கள்.

இந்த விகிதமுறா எண்களை கூட்டினால், கழித்தால், பெருக்கினால், வகுத்தால் அல்லது இருபடி மூலங்கள் ஆக்கினால் ஏன் 'n' படி மூலங்கள் ஆக்கினால் (n என்பது இயல் எண்) பொதுவாக இவற்றிற்கு என்ன நேர்கிறது எனப் பார்ப்போம். சில எடுத்துக் காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக் காட்டு 13: $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$ மற்றும் $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ இவற்றைக் கூட்டு

தீர்வு: $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$

$$= \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$$

$$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 14: $6\sqrt{5}$ ஐ $2\sqrt{5}$ ஆல் பெருக்கு

தீர்வு: $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}$

$$= 6\times 2\times \sqrt{5}.\sqrt{5}$$

$$= 12 \times 5$$

$$= 60$$

எடுத்துக் காட்டு 15: $8\sqrt{15}$ ஐ $2\sqrt{3}$ ஆல் வகு

தீர்வு: $8\sqrt{15} \surd 2\sqrt{3}$

$$= \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் கீழ்கண்ட வற்றை நிலைப் படுத்துகின்றன.

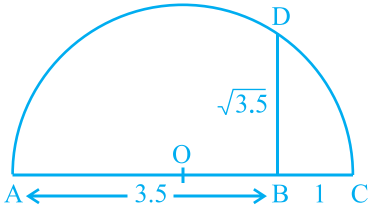
1. ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிமுறா எண் ஆகும்.
2. ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற விகிதமுறு எண் மற்றும் ஒரு விகிதமுறா எண் இவற்றின் பெருக்கல் அல்லது வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.
3. இரண்டு விகிதமுறா எண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

மெய் எண்களின் இருபடி (வர்க்க) மூலங்கள் கண்டு பிடிக்கும் செயல்கள் குறித்து கவனத்தை செறுத்துவோம். a என்பது இயல் எண் எனில் $\sqrt{a} = b$ அதாவது $b^2 = a$ மற்றும் $b > 0$. இதே வரையறை மிகை மெய் எண்களுக்கும் பொருந்தும்.

$a > 0$ என்க. இது ஒரு மெய் எண். பிறகு $\sqrt{a} = b$ அதாவது $b^2 = a$ மற்றும் $b > 0$.

1.2 பகுதியில் $\sqrt{n}$ என்பதை (n என்பது ஏதாவது மிகை முழு) எண் கோட்டின் மீது எப்படி குறிப்பது எனக் கண்டோம். கொடுக்கப் பட்ட x என்ற மிகை மெய் எண்ணிற்கு $\sqrt{x}$ என்பதை வடிவியல் மூலம் எப்படி காண்பது என பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக $x = 3.5$ என்க அதாவது $\sqrt{3.5}$ என்பதை வடிவியல் முறையில் காண்போம்.

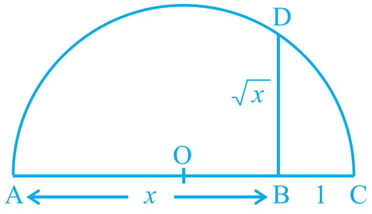


படம் 1.11

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்க்கோட்டின் மீது A என்ற புள்ளியிலிருந்து 3.5 அலகு தூரத்தில் B என்ற புள்ளியை குறி. AB = 3.5 அலகு. (படம் 1.11 ஐ பார்) B யிலிருந்து 1 அலகு தூரத்தில் C என்ற புள்ளியை குறி. AC-ன் மையப் புள்ளியை கண்டுபிடித்து அதற்கு O என பெயரிடு. O வை மையமாக வைத்து OC ஆரத்துடன்

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒரு அரைவட்டம் வரை. AC க்கு செங்குத்தாக B வழியாக செல்லும்படி கோடு வரை. இது அரை வட்டத்தை D ல் வெட்டட்டும். இப்போது $\sqrt{x}$ ஐ கண்டுபிடிக்க பொதுவாக நாம் $AB = x$ அலகு என எடுத்துக் கொள்ளவோம். படத்தில் உள்ளபடி $BC = 1$ அலகு இருக்கும்படி Cஎன்ற புள்ளியை குறி.



படம் 1.12

$x = 3.5$ எனில் $BD = \sqrt{x}$ என்பதை பித்தகோரஸ் தேற்றத்தை உபயோகித்து கண்டுபிடிக்கலாம். பார்க்க படம் *1.11.*

படம் 1.12ல் ΔOBD ஒரு செங்கோண முக்கோணம். வட்டத்தின் ஆரம் $\frac{x+1}{2}$ அலகு.

எனவே $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ அலகு

இப்போது $OC = x - \left(\frac{x+1}{2}\right)$

$OB = \frac{x-1}{2}$

பிதகோரஸ் தேற்றத்தின்படி

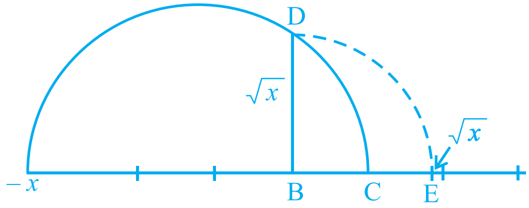
$$BD^2 = OD^2 - OB^2$$

$$BD^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

$$\therefore \ BD = \sqrt{x}$$

இந்த வரைமுறை நமக்கு வடிவியல் முறையில் $\sqrt{x}$ என்பது இருப்பதை உணர்த்துகிறது. $x > 0$ என்ற எல்லா மெய் எண்ணுக்கும் இது பொருந்தும். எண் கோட்டின் மீது $\sqrt{x}$ ன் நிலையை நீ அறிய வேண்டுமெனில் BC என்பதை எண்கோடாக எடுத்துக் கொள்வோம். 'O' என்பதை C எனக் கொண்டால் C என்பது *1.* இப்படியாக கற்பனை செய்து கொள். இப்போது Bயை மையமாக வைத்து BD ஆரத்துடன் படம் *1.13* ல் காட்டியபடி ஒரு வில் வரை. இது எண் கோட்டை E ல் வெட்டுகிறது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 1.13

இதற்கு முந்தைய வகுப்புகளில் நீ படித்த இருபடி (வர்க்க) மூலம், முப்படி (கன) மூலம் இவற்றை நினைவு கூர்ந்துபார். 'n' என்ற மிகை முழு (positive integer) வுக்கு வர்க்க மூலம், கனமூலம் நான்தடி மூலம் ஏன் 'n' அடி மூலத்தையும் காணும் யுக்தியை கையாளலாம்.

$\sqrt[3]{8}$ என்பது என்ன? இது ஒரு மிகை எண். இதன் முப்படி (கனம்) = 8. இப்போது நீ யூக்த்திருப்பாய் $\sqrt[3]{8}$ = 2 என்று இதேபோல் $\sqrt[5]{243}$ என்பதைக் காண முயற்சி செய். b^2 எனும்படி 'b' என்ற எண்ணை கண்டுபிடிக்க முடியுமா? இதன் விடை 3. எனவே $\sqrt[5]{243} = 3$ இந்த உதாரணங்களின் உதவியுடன் 'n' என்ற மிகை முழு $a > 0$ என்றால் $\sqrt[n]{a}$ என்பதற்கு வரையறை கூற முடியுமா?

$a > 0$ என்பது மெய் எண் மற்றும் 'n' என்பது மிகை முழு என்க.

$\therefore \quad \sqrt[n]{a} = b$ இதில் $b^n = a$ மற்றும் $b > 0$.

'$\sqrt{\ }$' என்ற குறி $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ என்பதில் உபயோகப் படுத்தபட்டுள்ளது. இது ஒரு அடிப் படை குறி (radical sign).

பல வகையில் உபயோகப்படக் கூடிய இருபடி மூலங்களுக்கு சம்பந்தபடக் கூடிய சில முற்றொருமைகளைப் (identities) பார்ப்போம். இது குறித்து ஏற்கனவே நீ முன் வகுப்புக்களில் படித்திருக்கிறாய். மீதியை கீழ்க் கண்டபடி அறிய முற்படலாம்.

மெய் எண்களின் கூட்டலின்படி பெருக்கலின் பங்கீட்டுப் பண்பை உபயோகித்தால் x மற்றும் y என்பன மெய் எண்கள் எனில் முற்றொருமை $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ஆகும்.

a மற்றும் b என்பன மிகை மெய் எண்கள் எனில்,

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இவற்றில் சில முற்றெருமைகள் பற்றிப் பார்ப்போம்

எடுத்துக்காட்டு 16: கீழ்க்கண்ட கோவைகளை சுருக்கு

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

தீர்வு: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$

$= 10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

$= 5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2$

$= 25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$

$= \left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}.\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2$

$= 3+2\sqrt{21}+7$

$= 10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

$= \left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$

$= 11-7=4$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

குறிப்பு: மேலே குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் சுருக்கு என்று சொன்னது கோவையை விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் கூடுதலாக எழுது என்ற அர்த்தத்தில் குறிப்பிட்டப் பட்டுள்ளது.

கீழ்க் கண்ட கணக்குடன் பாடத்தின் இந்த பகுதியை முடிப்போம். $\frac{1}{\sqrt{2}}$ என்பதைப் பார். இது எண்கோட்டின் மீது எங்கே இருக்கிறது? இது ஒரு விகிதமுறா எண் என்பது உனக்குத் தெரியும். இதன் பகுதி (Deminator) என்பது விகிதமுறு எண்ணாக இருந்தால் இந்த கணக்கை செய்து முடிப்பது மிகவும் சுலபம். பகுதியை விடுவித்து விகிதமுறு எண்ணாக எப்படி மாற்றுவது என கீழே பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 17: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ என்ற எண்ணில் பகுதியின் விகிதமுறா எண்ணை விடுவித்து விகிதமுறு எண்ணாக மாற்று.

தீர்வு : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ என்பதை சமன்பாட்டு நிலைக் கோவையாக (equivalent expression) எழுதலாம். இதில் பகுதி விகிதமுறு எண்ணாக மாறும். $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்பது நமக்குத் தெரியும். $\frac{1}{\sqrt{2}}$ வை $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ஆல் பெருக்கினால் சமன்பாட்டு கோவை கிடைக்கும். ஏனெனில் $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ இந்த இரண்டு உண்மைகளையும் ஒருங்கிணைத்து எழுதினால்.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

இந்த வடிவில் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ என்பதை எண் கோட்டின் மீது கண்டு பிடிப்பது சுலபம். O வுக்கும் $\sqrt{2}$ க்கும் பாதி தூரத்தில் இது உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 18: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ என்பதில் பகுதியை விடுவித்து (rationalise) எழுது.

தீர்வு: முன்பு கொடுக்கப்பட்ட முற்றொருமைகளில் (iv) ஐப் பயன் படுத்து

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ஐ $2-\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்கு மற்றும் வகு.

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 19: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ இதில் பகுதியை விடுவித்து விகிதமுறு எண்ணாக மாற்று.

தீர்வு: இங்கு முன்பு கொடுத்த முற்றொருமை (iii) ஐ பயன் படுத்து.

எனவே $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}$$

$$=\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 20: $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ என்பதில் பகுதியை விடுவித்து விகிதமுறு எண்ணாக மாற்று.

தீர்வு : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}}=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$$= \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}$$

$$= \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

எனவே ஒரு கோவையின் பகுதி வர்க்கமூலம் (இருபடி மூலம்) இதை பெற்றிருக்நால் (அல்லது வர்க்க மூலக்குறியை பெற்றிருந்தால்) பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக சமன்பாடு கோவை மூலம் மாற்றுவதை பகுதியை விடுவித்தல் (rationalising the denaminator) என்பர்.

பயிற்சி 1.4

1. கீழ்க் கண்டவற்றில் விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களை பிரித்தெழுதுக.

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$

   (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. கீழ்க் கண்டவற்றை சுருக்கி எழுதுக.

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. π என்பது ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு (Circumference - C) மற்றும் அதன் விட்டம் (diameter - d) இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள விகிதம் i.e., $\pi = \frac{c}{d}$ என்று வரையறுக்கிறோம்.

   ஆனால் π என்பது ஒரு விகிதமுறா எண் என்கிறோம். இது முரண்பாடாக இல்லையா? இந்த முரண்பாட்டை எப்படி தீர்ப்பாய்?

4. $\sqrt{9.3}$ ஐ எண்கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டு.

5. கீழ்க்க கண்டவற்றில் பகுதியை விடுவித்து எழுது.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

   (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 மெய் எண்களின் அடுக்குகளின் விதிகள் (Laws of Exponents of Real numbers)

கீழ்க் கண்டவற்றை எப்படி சுருக்குவது என தெரியுமா?

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

இவற்றின் விடை உனக்கு தெரிந்ததா?

அவை கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3.9^3 = 63^3$

இந்த விடையை கண்டுபிடிக்க கீழ்க்க கண்ட அடுக்குகளின் விதிகளை உபயோகித்துள்ளோம். இதை நீங்கள் கீழ் வகுப்புகளில் படித்திருக்கிறீர்கள். (இங்கு a, n மற்றும் m என்பன இயல் எண்கள். a என்பது அடிமானம் (base) எண். m மற்றும் n என்பன அடுக்குகள்).

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m > n)$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

a^0 ன் மதிப்பு என்ன? $a^0 = 1$ (iii) ஐ உபயோகித்து $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ஐப் பெறலாம்.

இனி குறை எண்களின் அடுக்கு விதியையும் பார்ப்போம்.

எடுத்தக் காட்டாக

(i) $17^2.17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3}.(9)^{-3} = (63)^{-3}$

கீழ்க் கண்டவற்றை தீர்க்க வேண்டுமெனில் நாம் என்ன செய்ய வேண்டும்?

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

இதை எப்படி முறைப் படுத்துவது? அடிமான எண் மிகைமெய் எண்ணாகவும் அடுக்குகள் விகிதமுறு எண்ணாகவும் உள்ள அடுக்கு விதிகளை பயன் படுத்துவோம். இந்த விதிகளை வரையறை செய்வதற்கு முன் நாம் தெரிந்துகொள்ள வேண்டியது பல. உதாரணமாக $4^{\frac{3}{2}}$. இது குறித்து சிவற்றை நாம் செய்ய வேண்டியுள்ளது.

1.4 பகுதியில் $\sqrt[n]{a}$ என்பதில் $a > 0$ மெய் எண் என்பதை வரையறுத்தோம். n என்பது மிகை முழு. பிறகு

$\sqrt[n]{a} = b$ இதில் $b^n = a$ மற்றும் $b > 0$ அடுக்கு விதிப்படி $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ என வரையறுத்துள்ளோம். எனவே

$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$ இப்போது நாம் $4^{3/2}$ ஐ இரண்டு விதமாக பார்க்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

ஏனவே கீழ்க்க கண்டவாறு வரையறை செய்யலாம்.

$a > 0$ என்க. a மெய் எண். m மற்றும் n என்பன மிகை முழு என்க. இவற்றின் பொதுக்காரணி 1 மட்டுமே என்க மற்றும் $n > 0$ பிறகு

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

இனி நாம் கீழ்க்க கண்ட அடுக்கு விதிகளை வரையறை செய்யலாம்.

$a > 0$என்பதில் a மெய் எண். p மற்றும் q என்பன விகிதமுறு எண்கள் எனில்.

(i) $a^p . a^q = q^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$)

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

இந்த விதிகளை இதற்கு முன்பு கேட்ட வினாக்களுக்கு விடையளிக்க பயன் படுத்தலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 21: சுருக்கு

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

தீர்வு :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}$

$= 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

(ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}$

$= 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$

(iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

பயிற்சி 1.5

1. மதிப்புக்களைக் காண்க

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. மதிப்புக்களைக் காண்க

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. சுருக்குக:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.6 தொகுப்பு (Summary)

இந்த அதிகாரத்தில் (பாடத்தில்) கீழ்க் கண்ட கூர்களை (points) படித்தீர்கள்.

1. ஒரு எண் r என்பது விகிதமுறு எண் என எப்போது அழைக்கப்படும் எனில் அதை $\frac{p}{q}$ வடிவில் எழுதினால் p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$

2. ஒரு எண் $\frac{p}{q}$ என்ற வடிவில் எழுத முடியாமல் இருந்தால் அந்த எண் s விகிதமுறா எண் எனப்படும். இங்கு p மற்றும் q என்பன முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$.

3. ஒரு விகித முறு எண்ணின் விரிவாக்கம் என்பது முடிவுறு தசம விரிவு அல்லது முடிவுறாமீள்வரு தசம விரிவு ஆகும். ஒரு எண் முடிவுறு தசமவிரிவு அல்லது முடிவுறா மீள் வரு தசம விரிவை கொண்டிருந்தால் அது விகிதமுறு எண்ணாகும்.

4. ஒரு விகித முறா எண்ணின் தசம விரிவாக்கம் முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றதாக இருக்கும். முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

5. எல்லா விகித முறு மற்றும் விகிமுறா எண்கள் கூடியதே மெய் எண்களின் தொகுப்பாகும்.

6. r என்பது விகிதமுறு எண் மற்றும் s என்பது விகித முறா எண் எனில் $r+s$ மற்றும் $r-s$ என்பன விகிதமுறா எண்கள். மேலும் rs மற்றும் r/s என்பன விகித முறா எண்கள். இதில் $r \neq 0$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

7. a மற்றும் b என்ற மிகை மெய் எண்கள் எனில் கீழ்க் கண்ட முற்றொருமைகள் உண்மை எனலாம்.

(i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

8. a மற்றும் b என்பன முழு க்கள் எனில்

$\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ன் பகுதியை விடுவிக்க இதை

$\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

9. p மற்றும் q என்பன விகித முறு எண் மற்றும் $a > 0$ மெய் எண் என்க. எனவே

(i) $a^p \, . \, a^q = a^{p+q}$

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ ($p > q$ எனில்)

(iv) $a^p b^p = (ab)^p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

U5Z9E3

பாடம் 2

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

2.1 முன்னுரை

முன் வகுப்புகளில் நீங்கள் இயற்கணிதக் கோவைகள் (algebraic Expressions) குறித்தும் அவற்றின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் குறித்தும் படித்துள்ளீர்கள். சில இயற்கணிதக் கோவைகளை எப்படி காரணிப் படுத்துவது என்பது குறித்தும் படித்தீர்கள். கீழ்க் கண்ட இயற்கணித முற்றொருமைகளை நினைவுக் கூர்.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

மற்றும் காரணிப் படுத்துவதிலும் இவை பயன்படுவதை நினைவுகூர். இந்த பாடத்தில் குறிப்பாக ஒரு குறிப்பிட்ட வகையான இயற் கணிதக் கோவைகள் அதாவது 'பல்லுறுப்புக் கோவைகள்' என்பது பற்றி படிப்போம். அதற்கு தொடர்புடைய சொற்றொடர்கள் குறித்தும் படிப்போம்.

மேலும் மீதித் தேற்றம் (Reminder Theorem) மற்றும் காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem) குறித்தும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப் படுத்து ததில் அவற்றின் பயன் குறித்தும் படிப்போம். மேலும் சில இயற்கணித முற்றொருமைகள் அவற்றை காரணிப் படுத்துதலில் பயன்படும் முறை, சில கோவைகளை விடுவித்தல் ஆகியவற்றைக் குறித்தும் படிப்போம்.

2.2 ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லூறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials in one variable)

ஒரு மாறி என்பது ஒரு குறியீடு மூலம் அறியப்படும். இந்த குறியீடு எந்த ஒரு மெய் எண்ணின் மதிப்பையும் அடையும் என்பதை நினைவு கூர்வோம். இதிலிருந்து இப்போது ஆரம்பிக்கலாம்.

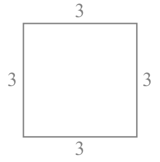
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

மாறிகளை குறிக்க $x, y, z,$ என்ற எழுத்துக் களைப் பயன் படுத்தலாம்.

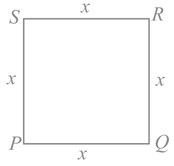
$2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ என்பன இயற் கணித கோவைகள் ஆகும். இந்த கோவைகள் அனைத்தும் மாறிலி $\times x$ என்ற வடிவில் உள்ளன. மாறிலி என்னவாக இருக்கும் தெரியாத மாறிலி $\times$ மாறி என்ற கோவையை நாம் எழுத வேண்டும். இதில் மாறிலிகளை a, b, c எனக் குறிப்போம் எனவே கோவை ax என்றாகும்.

எப்படியாயினும் 'மாறி' மற்றும் 'மாறிலி' இவற்றை குறிக்கும் எழுத்துக்களில் வித்தியாசம் உண்டு. மாறிலின் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட சூழலில் மாறாமல் இருக்கும். அதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கில் மாறிலி மாறாமல் இருக்கும். ஆனால் மாறிகளின் மதிப்பு மாற்றம் அடைந்து கொண்டே இருக்கலாம்.

இப்போது 3 அலகு பக்க அளவைக் கொண்ட ஒரு சதுரத்தை எடுத்துக் கொள். படம் 4.1 ஐ பார். அதன் சுற்றளவு என்ன? சதுரத்தின் சுற்றளவு என்பது 4 பக்கங்களின் அலகுகளின் கூடுதல் என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். இங்கு ஒவ்வொரு பக்கமும் 3 அலகுகள். எனவே இதன் சுற்றளவு 4×3 i.e., 12 அலகுகள். சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 அலகுகள் எனில் சுற்றளவு எவ்வளவு? சுற்றளவு 4×10 i.e., 40 அலகுகள். ஒருவேளை சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகு எனில் (படம் 4.2 ஐ பார்) சுற்றளவு $4x$ அலகுகள். சதுரத்தின் பக்கங்களின் அளவு மாற மாற சுற்றளவும் மாறும்.



படம் 2.1



படம் 2.2

சதுரம் PQRS - ன் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? பரப்பளவு $x \times x = x^2$ சதுர அலகுகள். x^2 என்பது ஒரு இயற்கணிதக் கோவை. உங்களுக்கு $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$. போன்ற இயற்கணித கோவைகள் பற்றியும் தெரியும். இதுவரை நாம் பார்த்த கோவைகள் அனைத்திலும் மாறிகளின் அடுக்குகள் முழு எண்களாகவே வந்துள்ளன. இந்த வடிவில் உள்ள கோவைகள் 'ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்' என்றழைக்கப்படுகின்றன. மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டில் மாறி என்பது x. மேலும் $x^3 - x^2 + 4x + 7$ என்பது x மாறி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதேபோல் $3y^2 + 5y$ என்பது y மாறி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் $t^2 + 4$ என்பது t மாறி உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

x^2+2x என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் x^2 மற்றும் $2x$ என்பன ‘உறுப்பு’க்கள் எனப்படும். இதேப்போல் $3y^2+5y+7$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் மூன்று உறுப்புக்கள் உள்ளன. அவை $3y^2, 5y$ மற்றும் 7 என்பன. பல்லுறுப்புக்கோவை $-x^3+4x^2+7x-2$ ன் உறுப்புக்களை உன்னால் எழுத முடியுமா? இந்த பல்லுறுப்புக் கோவையில் 4 உறுப்புக்கள் உள்ளன. அவை $-x^3$, $4x^2$, $7x$ மற்றும் -2 என்பன. பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரு கெழு (குணகம்) (coefficient) உள்ளது. ஆகவே $-x^3+4x^2+7x-2$ என் பதில் x^3 ன் கெழு -1, x^2 ன் கெழு $+4$, $x-$ ன் கெழு $+7$ மற்றும் -2 என்பது x^0 ன் கெழு ($x^0=1$ என்பதை நினைவுகூர்) x^2-x+7 என்பதில் x – ன் கெழு என்ன? அது -1 எனபதாகும்.

2 என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. உண்மையாகவே $2, -5, 7$ என்பன மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைகள். மாறிலி 0 பூஜ்ஜியம் (சுழியம்) என்பதை சுழிய (பூஜ்ஜிய) பல்லுறுப்புக் கோவை (zero polynomial) என்கிறோம். இது பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொகுப்பில் மிக முக்கிய இடத்தைப் பிடிக் கிறது. இதை நீங்கள் மேல் வகுப்புகளில் படிப்பீர்கள்.

இப்போது $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ மற்றும் $\sqrt[3]{y}+y^2$ என்ற இயற்கணிதக் கோவை களை கவனி, $x+\frac{1}{x}$ என்பதை $x+x^{-1}$ என எழுதலாம் என்பது உனக்குத் தெரியுமா? இங்கு இரண்டாவது உறுப்பு x^{-1} – ன் அடுக்கு -1 ஆகும். இது முழு எண் அல்ல. எனவே இந்த இயற் கணிதக் கோவை பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.

மேலும் $\sqrt{x}+3$ என்பதை $x^{\frac{1}{2}}+3$ என எழுதலாம். இதில் $x-$ ன் அடுக்கு $\frac{1}{2}$. இது முழு எண் இல்லை. எனவே $\sqrt{x}+3$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையா? இல்லை அது பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை, $\sqrt[3]{y}+y^2$ என்பது என்ன? இதுவும் பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை. (ஏன்?)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள மாறி x என்றால் நாம் பல்லுறுப்புக் கோவையை $p(x)$ அல்லது $q(x)$ அல்லது $r(x)$ போன்ற பல வடிவங்களில் குறிக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக இப்படி எழுதலாம்.

$$p(x) = 2x^2+5x-3$$

$$q(x) = x^3-1$$

$$r(y) = y^3+y+1$$

$$s(u) = 2-u-u^2+6u^5$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் எத்தனை (குறிப்பிட்ட) உறுப்புக்கள் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

உதாரணமாக, $x^{150} + x^{140} + ... + x^2 + x + 1$ என்பது 151 உறுப்புகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $2x, 2, 5x^3, -5x^2, y$ மற்றும் u^4 இவற்றை கவனி. இவற்றில் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டும் இருப்பதை கவனித்தாயா? இத்தகைய கோவை ('mono' means 'one') "ஓருறுப்புக் கோவைகள்" எனப்படும்.

கீழக் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி.

$$p(x) = x + x^2 + \pi$$

$$q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$$

$$r(u) = 4 + 4^2 - 2$$

$$t(y) = y^4 + y + 5$$

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ என்பதை கவனி. x - ன் மிக அதிகபட்ச அடுக்கு உள்ள உறுப்பு எது? அது $3x^7$ என்பதாகும். இந்த உறுப்பின் அடுக்கு 7 என்பதாகும். இதேபோல் பல்லுறுப்புக் கோவை $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ என்பதில் y - ன் அதிகபட்ச அடுக்கு கொண்ட உறுப்பு $5y^6$. இந்த உறுப்பின் அடுக்கு 6. மாறியின் அதிகபட்ச அடுக்கை நாம் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி The degree of the polynomial) என்கிறோம். எனவே பல்லுறுப்புக் கோவை $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ன் படி 7 இதேபோல் பல்லுறுப்புக் கோவை $5y^6 - 4y^2 - 6$ ன் படி 6. படி பூஜ்ஜியம் (சுழியம்) உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை "**மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை**" ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழே கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றின் படியையும் எழுது.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

தீர்வு: (i) மாறியின் அதிகப் பட்ச அடுக்கு 5. எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 5.

(ii) மாறியின் அதிகபட்ச அடுக்கு 8. எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 8.

(iii) இங்குள்ள ஒரே உறுப்பு 2. இதை $2x^0$ என எழுதலாம். x ன் அடுக்கு 0, எனவே பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 0.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி.

$$p(x) = 4x + 5$$
$$q(x) = 2y$$
$$r(y) = t + \sqrt{2}$$
$$s(u) = 3u$$

இவற்றில் பொதுவானவை ஏதாவது தென்படுகிறதா? இந்த ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியும் 1, **படி ஒன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ''ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை''** எனப்படும். ஒரு மாறி கொண்ட மற்றும் சில ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$2x-1,\ \sqrt{2}y+1,\ 2-u$ என்பன. இப்போது 3 உறுப்புக் கொண்ட x - ன் மாறியுடன் கூடிய ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையை கண்டுபிடி. உன்னால் கண்டுபிடிக்க முடியாது. ஏனெனில் ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையில் அதிக பட்சம் இரண்டு உறுப்புக்கள் மட்டுமே இருக்கும். எனவே x மாறி உடன் கூடி ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது $ax + b$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு a மற்றும் b என்பன 'மாறிலி' கள் மற்றும் $a \neq 0$ (ஏன்?). இதேபோல் $ay + b$ என்பது y - ல் ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை.

இப்போது கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை கவனி.

$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + 5,\ x^2$ மற்றும் $x^2 + \frac{2}{5}x$

இவை அனைத்தும் படி இரண்டு கொண்டவை என்பதை ஒப்புக் கொள்கிறாயா?

படி இரண்டாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை 'இருபடிப் பல்லுப்புக் கோவை' (quadratic polynomial) எனப்படும்.

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை களுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

$5 - y^2,\ 4y + 5y^2$

ஒரு மாறியுடன் கூடிய நான்கு வெவ்வேறு உறுப்புகள் கொண்ட இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையை எழுத முடியுமா? ஒரு மாறி கொண்ட இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் அதிகபட்சம் மூன்று உறுப்புக்களே இருக்கும். x ஐ மாறி ஆகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள். இதேபோல் yல் உள்ள இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை $ay^2 + by + c$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் a, b, c என்பன மாறிலிகள்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை (Cubic Polynomial) எனப்படும்.

x - ல் முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு சில உதாரணங்கள்.

$4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$.

ஒரு மாறி உள்ள முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் எத்தனை உறுப்புக்கள் இருக்கக் கூடும் என நீ நினைக்கிறாய்? அதிக பட்சமாக நான்கு உறுப்புக்கள் கொண்டதாக இருக்கும்.

இதை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இங்கே $a \neq 0$ மற்றும் a, b, c மற்றும் d என்பன மாறிலிகள்.

இப்போது படி 1, படி 2, படி 3 கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எப்படி இருக்கும் என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். இயல் எண் 'n' க்கு ஒரு மாறியுடன் கூடிய n படி கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை உன்னால் எழுத முடியுமா? ஒரு மாறி x - கொண்ட படி n உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது.

$a_n x^4 + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இங்கு $a_0, a_1, a_2 ....$ a_n என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$.

குறிப்பாக $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ (எல்லா மாறிலிகளும் 0) எனில் நமக்கு பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவை (zero polynomial) கிடைக்கிறது. இதை 0 எனக் குறிக்கிறோம். பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் 'படி' என்ன? இது வரையறுக்கப் படவில்லை.

இதுவரை நாம் ஒரு 'மாறி' உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றி மட்டும் அலசினோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் உள்ளன. எடுத்துக் காட்டாக $x^2 + y^2 + xyz$ (இங்கு x, y, z என்பன மாறிகள்) என்பது மூன்று மாறிகள் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை. இதேப்போல் $p^2 + q^{10} + r$ (இங்கு மாறிகள் p, q மற்றும்) $u^2 + v^2$ (இங்கு மாறிகள் u மற்றும் v) முதலியன இரண்டு மற்றும் மூன்று மாறிகள் உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகள். இது குறித்து நீங்கள் பிறகு விரிவாகப் படிப்பீர்கள்.

பயிற்சி 2.1

1. கீழ்க் கண்ட வற்றில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் ஒரு மாறியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவைப் அல்லாதது எது? ஒரு மாறி இல்லாதது எது? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் x^2 - ன் குணகங்களை (கெழு) எழுது.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு உதாரணம் கொடு

படி 35 கொண்ட ஈருறுப்புக் கோவை

படி 100 உடைய ஓருறுப்புக் கோவை

4. கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒவ்வொன்றின் படிகளை எழுது.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. கீழ்க் கண்டவற்றில் ஒருபடி, இருபடி மற்றும் முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப் படுத்து.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.3 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூஜ்ஜியங்கள் (Zeroes of Polynomials)

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ என்பதை எடுத்துக் கொள்

x இருக்கும் இடத்தில் 1 ஐ போட்டல்

$$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$
$$p(1) = 5(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

எனவே $p(x)$ என்பதின் மதிப்பு $x = 1$ எனும்போது 4 என்க. இதேபோல்

$p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2 = -2$

$p(-1)$ ன் மதிப்பைக் கண்டு பிடி.

எடுத்துக் காட்டு 2: கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்பையும் கொடுக்கப்பட்ட மாறியின் மதிப்பிற்கு ஏற்றவாறு கண்டுபிடி.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ இதில் $x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ இதில் $y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + a$ இதில் $t = a$

தீர்வு : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

ஆனால் $x = 1$ எனில்

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$p(1) = 5 - 3 + 7$

$p(1) = 12 - 3$

$p(1) = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

ஆனால் $y = 2$ எனில்

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11}$

$q(2) = 3(8) - 8 + \sqrt{11}$

$= 24 - 8 + \sqrt{11}$

$= 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

ஆனால் $t = a$ எனில்

$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

இப்போது பல்லுறுப்புக் கோவை

$p(x) = x - 1$ என்பதை எடுத்துக் கொள் இதில் $p(1)$ ன் மதிப்பு என்ன?

$p(1) = 1 - 1 = 0$

$p(1) = 0$ என்பதால் நாம் *1* என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் என்கிறோம். இதேபோல் *2* என்பது $q(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் இங்கே $q(x) = x - 2$. பொதுவாக ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் என்பது எண் c ஆகும். இங்கே $p(c) = 0$.

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. பின்னர் $p(x) = 0$ என்பது x - ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$p(x) = x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்க. $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x) = x - 1$ இன் பூஜ்ஜியமாகும். இப்போது

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

$p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது $x - 1 = 0$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $x - 1 = 0$ எனில் $x = 1$ ஆகும். $x = 1$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$ இன் மூலம் (root) ஆகும்.

இப்போது மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை **5** ஐ எடுத்துக் கொள். இதனுடைய பூஜ்ஜியம் என்னவென்று உன்னால் சொல்ல முடியுமா? இதற்கு பூஜ்ஜியம் கிடையாது ஏனெனில் $5x^0$ – ல் x க் பதிலாக எந்த எண்ணைக் கொடுத்தாலும் அதன் மதிப்பு **5** மட்டுமே வரும். எனவே பூஜ்ஜியம் அல்லாத மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதற்கு பூஜ்ஜியம் இல்லை. பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் என்பது என்ன? வழக்கப்படி ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: -2 மற்றும் 2 என்பன பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியமா எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $p(x) = x + 2$ என்க

பிறகு $p(2) = 2 + 2 = 4$

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

எனவே -2 என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியம் ஆகும். ஆனால் **2** என்பது இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4: பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)=2x+1$ என்பதின் பூஜ்ஜியத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியத்தை கண்டுபிடிப்பதற்கு சமன் பாட்டைத்தீர்.

$p(x) = 0$

இப்போது $2x + 1 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-1}{2}$$

எனவே $-\frac{1}{2}$ என்பது பல்லுறுப்புக் கோவை $2x + 1$ ன் பூஜ்ஜியமாகும்.

இப்போது $p(x) = ax + b$ and $a \neq 0$ இது ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x)$ - ன் பூஜ்ஜியத்தை நாம் எப்படி கண்டு பிடிப்பது? எடுத்துக் காட்டு *4* என்பது உங்களுக்கு சில வழிமுறையைக் காட்டும். பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ - ன் பூஜ்ஜியத்தைக் காண பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாடு $p(x) = 0$ என்பதை தீர்க்கவேண்டும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது $p(x) = 0$ எனில்

$ax + b = 0$ மற்றும் $a \neq 0$

எனவே

$ax = -b$

i.e $x = \frac{-b}{a}$

$x = \frac{-b}{a}$ என்பது மட்டுமே $p(x)$ என்பதன் பூஜ்ஜியமாகும். எனவே

ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தை பெற்றிருக்கும்.

இப்போது நாம் இப்படி கூறலாம்.

1 என்பது $x - 1$ ன் பூஜ்ஜியம்

-2 என்பது $x + 2$ ன் பூஜ்ஜியம்

எடுத்துக்காட்டு 5: *2* மற்றும் *0* என்பன பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - 2x$ என்பதன் பூஜ்ஜியங்களா என்பதை சரிபார்.

தீர்வு : $p(x) = x^2 - 2x$ என்க

எனவே $p(2) = 2^2 - 2(2)$

$= 4 - 4 = 0$

மற்றும் $p(0) = 0^2 - 2(0)$

$= 0 - 0 = 0$

எனவே *2* மற்றும் *0* என்பன

பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 - x$ என்பதன் பூஜ்ஜியங்கள் ஆகும்.

கீழே நம்முடைய மதிப்பீடுகளைப் பட்டியலிடுவோம்.

(i) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியமானது *0* ஆக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

(ii) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியம் *0* ஆக இருக்கலாம்.

(iii) ஒவ்வொரு ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவையும் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியத்தை பெற்றிருக்கும்.

(iv) ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒன்றிற்கும் அதிகமான பூஜ்ஜியங்களைப் பெற்றிருக்கும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 2.2

1. பல்லுறுப்புக் கோவை $5x - 4x^2 + 3$ ன் மதிப்பை கீழ்க் கண்டவற்றின் உதவியுடன் கண்டுபிடி.

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் $p(0), p(1)$ மற்றும் $p(2)$இவற்றின் மதிப்புக் களை கண்டுபிடி.

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. கீழ்க் கண்டவை அவற்றிற்கு எதிரே கொடுக்கப் பட்டுள்ளபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியங்களா என சரிப்பார்.

   (i) $p(x) = 3x + 1 \; ; \; x = -\frac{1}{3}$

   (ii) $p(x) = 5x - \pi \; ; \; x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1 \; ; \; x = 1, -1$

   (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2) \; ; \; x = -1, 2$

   (v) $p(x) = x^2 \; ; \; x = 0$

   (vi) $p(x) = lx + m \; ; \; x = -\frac{m}{l}$

   (vii) $p(x) = 3x^2 - 1 \; ; \; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

   (viii) $p(x) = 2x + 1 \; ; \; x = \frac{1}{2}$

4. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிற்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியத்தைக் கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$

   (iii) $p(x) = 2x + 5$ (iv) $p(x) = 3x - 2$

   (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

   (vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d,$ ஆகியன மெய் எண்கள்

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

2.4 பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation of Polynomials)

இப்பொழுது எடுத்துக் காட்டு 10ஐ மீண்டும் ஒருமுறை கூர்ந்து கவனி. அது நமக்கு சொல்லுவது என்னவெனில் மீதி $q\left(-\frac{1}{2}\right)=0,(2t+1)$ என்பது $q(t)$ ன் காரணி, அதாவது

$q(t) = (2t + 1)\, g(t)$ இதில்

$g(t)$ யானது ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்றால் பொருந்தும். இது

கீழ்க் கண்ட தேற்றத்திற்குரிய குறிப்பான ஒரு செயல்.

காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

$p(x)$ என்பது படி $n \geq 1$ உடைய ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை, மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் என்க. (i) $p(a) = 0$ எனில் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி எனில் $p(a) = 0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிரூபணம்:

மீதித் தேற்றத்தின்படி

$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ எனில் பிறகு $p(x) = (x - a)\, q(x)$ இது எதைக் காட்டுகிறது என்றால் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி என்பதைக் காட்டுகிறது.

(ii) $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி என்பதால், $p(x) = (x - a)\, g(x)$ இது பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x)$ க்காக. இந்த செயலில் $p(a - a)\, g(a) = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 6: $(x + 2)$ என்பது $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ மற்றும் $2x + 4$ இவற்றின் காரணியா என்பதை கண்டுபிடி.

தீர்வு: $x + 2$ இன் பூஜ்ஜியம் என்பது -2

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ என்க

$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$p(-2) = -8 + 12 - 10 + 6 = 0$

எனவே காரணி தேற்றத்தின்படி $(x + 2)$

என்பது $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ ன் காரணி ஆகும்.

இதேபோல் $s(x) = 2x + 4$ என்க

$$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$$

எனவே $(x + 2)$ என்பது $2x + 4$ ன் காரணி ஆகும்.

காரணித் தேற்றத்தை பயன் படுத்தாமலே இதை நீ நிருபிக்கலாம் எப்படி எனில்.

$$2x + 4 = 2(x + 2)$$

எடுத்துக்காட்டு 7: $x - 1$ என்பது $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ன் காரணி எனில் k ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $x - 1$ என்பது $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ன்

காரணி என்பதால் $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

$$= 4 + 3 - 4 + k$$

எனவே

$$4 + 3 - 4 + k = 0$$

$$7 - 4 + k = 0$$

$$3 + k = 0$$

$$k = -3$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

படி 2 மற்றும் 3 கொண்ட சில பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப் படுத்த காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம். ஏற்கனவே நீங்கள் இருபடி கோவை களை காரணிப் படுத்தும் முறையை அறிந்திருக்கிறீர்கள். உதாரணமாக $x^2 + lx + m$. இதில் மைய உறுப்பு lx ஐ பிரித்து அதாவது $lx = ax + bx$ இதில் $ab = m$ பிறகு $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$. இப்போது இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $ax^2 + bx + c$ என்ற வடிவில் உள்ளதை காரணிப் படுத்துவோம். இங்கு $a \neq 0$ மற்றும் a,b மற்றும் c என்பன மாறிலிகள்.

$ax^2 + bx + c$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் **மைய உறுப்பைப் பிரித்து** கீழ்க் கண்டவாறு காரணிப் படுத்தலாம்.

அவற்றின் காரணிகள் $(px + q)$ மற்றும்

$(rx + s)$ என்க. ஆகவே,

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$$

$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2 ன் குணகங்களை ஒப்பிடும் போது

$a = pr$ எனக் கிடைக்கிறது. இதேபோல் x-ன் குணகங்களை ஒப்பிடும்போது நமக்கு கிடைப்பது $b = ps + qr$ அதேபோல் மாறிலிகளை ஒப்பிடும்போது $c = qs$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது எதை காட்டுகிறது எனில் b என்பது ps மற்றும் qr என்ற இரு எண்களின் கூடுதல் இவற்றின் பெருக்கல்

$$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$$

எனவே $ax^2 + bx + c$ என்பதைக் காரணிப் படுத்த b என்பதை இரு எண்களின் கூடுதலாக எழுத வேண்டும். அந்த இரு எண்களின் பெருக்கல் ac. எடுத்துக்காட்டு 8 மூலம் இதை சரியாக புரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8: காரணி தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தியும் மைய உறுப்பைப் பிரிததும் $6x^2 + 17x + 5$ ஐ காரணிப் படுத்து

தீர்வு : 1

பிரிக்கும் முறை (By splitting method)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இரண்டு எண்கள் p மற்றும் q என்பதில் $p + q = 17$ எனவும் $pq = 6 \times 5 = 30$ எனவும் வருமானால் நமக்கு காரணிகள் கிடைக்கும். எனவே 30 என்பதன் காரணிகளின் ஜோடியைக் காண்போம். 1 மற்றும் 30, 2 மற்றும் 15, 3 மற்றும் 10, 5 மற்றும் 6 இந்த ஜோடிகளில் 2 மற்றும் 15 என்பவை $p + q = 17$ என்று வருகிறது. எனவே

$$6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

தீர்வு 2: காரணித் தேற்றத்தை பயன் படுத்துதல்

$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right)$$

$$= 6p(x)$$

a மற்றும் b என்பன $p(x)$ ன் பூஜ்ஜியம் எனில் $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$ ஆகையால் $ab = \frac{5}{6}$ இப்போது a மற்றும் b இவற்றிற்கு சில சாத்தியக் கூறு களைப் பார்ப்போம். அவை ஒருவேளை $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ என இருக்கலாம்.

இப்போது $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ ஆனால் $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ ஆகையால் $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி ஆகும். இதேபோல் முயற்சித்தால் $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி என அறியலாம்.

$$\begin{aligned} \therefore\ 6x^2 + 17x + 5 &= 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) \\ &= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{3x+5}{2}\right) \\ &= (3x + 1)(2x + 5) \end{aligned}$$

மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டில் பிரிக்கும் முறை தகுந்ததாக உள்ளது எனலாம். எனினும் மற்றும் ஒரு எடுத்துக் காட்டை காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $y^2 - 5y + 6$ ஐ காரணித் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தி காரணிப் படுத்து.

$p(y) = y^2 - 5y + 6$ என்க

$p(y) = (y - a)(y - b)$ எனில் இதன் மாறிலி உறுப்பு $= ab$ எனவே $ab = 6$

$p(y)$ ன் காரணிகளை கண்டுபிடிக்க முதலில் 6 ன் காரணிகளை கண்டுபிடி.

6 ன் காரணிகள் *1, 2,* மற்றும் *3* எனபன

இப்போது $p(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

எனவே $y - 2$ என்பது $p(y)$ ன் காரணி

இதேபோல் $p(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 0$

எனவே $y - 3$ என்பதும் $y^2 - 5y + 6$ ன் காரணி

$\therefore\ y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$y^2 - 5y + 6$ என்பதை மைய உறுப்பு $-5y$ யை பிரித்தும் காரணிப் படுத்தலாம்.

இப்போது முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளை காரணிப் படுத்துதல் எப்படி என பார்ப்போம். இங்கு பிரித்தல் முறையை பயன் படுத்துவது சரி வராது. நாம் முதலில் குறைந்த பட்சம் ஒரு காரணியையாவது கண்டுபிடிப்பது அவசியம். இதை கீழ்க் கண்ட எடுத்துக் காட்டில் பார்ப்பாய்.

எடுத்துக்காட்டு 10: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ *இதை காரணிப் படுத்து*

தீர்வு: $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142 - 120$ என்க இப்போது -120 ன் எல்லா காரணிகளையும் பார்ப்போம். அவற்றில் சில $\pm 1, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$.

இவற்றுள் எவ்வாறு காரணிகளை வைத்து முயற்சி செய்ததில் நமக்கு கிடைத்தது $p(1) = 0$ எனவே $x - 1$ என்பது $p(x)$ ன் காரணி

இப்போது

$x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

$= x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2 (x - 1) - 22 (x - 1) + 120 (x - 1)$ *(ஏன்?)*

பொதுவாக $(x - 1)$ ஐ எடுக்க

$= (x - 1) (x^2 - 22x + 120)$

இதை $p(x)$ ஐ $(x - 1)$ ஆல் வகுத்தும் பெற்றிருக்கலாம்.

இப்போது $x^2 - 22x + 120$ ஐயும் காரணிப்படுத்தலாம். மைய உறுப்பைப் பிரித்தல் முறையால்,

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

எனவே $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x - 1) (x - 10) (x - 12)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் $(x + 1)$ ஐ காரணியாகக் கொண்டவை எவை என்பதைக் கண்டுபிடி.

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் $g(x)$ என்பது $p(x)$ ன் காரணியா என்பதை காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 2$

3. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றிலும் $p(x)$ ன் காரணி $x - 1$ எனில் k ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. காரணிப் படுத்து

   (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

   (iii) $6x^2 + 5x + 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. காரணிப் படுத்து

   (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.5 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Indentities)

இயற் கணித முற்றொருமை என்பது ஒரு இயற் கணித சமன் பாட்டில் வரும் மாறிகளுக்கு எந்த மதிப்பு அளித்தாலும் அதுசரியாக இருக்கும் என்பதை நீங்கள் முன் வகுப்புகளில் படித்ததை நினைவு கூறுங்கள். கீழ்க்கண்ட இயற்கணித முற்றொருமைகளை நீங்கள் ஏற்கனவே படித்துள்ளீர்கள்.

முற்றொருமை (I) : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

முற்றொருமை (II) : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

முற்றொருமை (III) : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

முற்றொருமை (IV) : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

இயற் கணிதக் கோவைகளை காரணிப் படுத்த மேற்கண்ட முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி இருப்பிர்கள். அவற்றின் பயன்பாடை கீழேப்பாருங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 11: முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி கண்டுபிடி.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

தீர்வு: (i) $(x + 3)(x + 3)$ இங்கே

முற்றொருமை *1* ஐ பயன்படுத்த வேண்டும் $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$y = 3$ எனில்

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2x(3) + (3)^2$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) முற்றொருமை IV ஐ பயன் படுத்தினால்

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(+5)$$

$$= x^2 + 2x - 15$$

எடுத்துக் காட்டு 12: 105×106 இதை நேரடியாக பெருக்காமல் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு: $(105) \times (106) = (100 + 5) \times (100 + 6)$

முற்றொருமை IV ஐ பயன்படுத்தினால்

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore (100 + 5)(100 + 6) = (100)^2 + (5 + 6)100 + (5 \times 6)$$

$$= 10000 + 1100 + 30$$

$$= 11130$$

கொடுக்கப் பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் பெருக்கல் பலனைக்காண முற்றொருமைகளை பயன் படுத்தியதைப் பாரத்தோம். இந்த முற்றொருமைகள் இயற்கணிதக் கோவைகளை காரணிப் படுத்தவும் பயன் படுவதை கீழேக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 13 : காரணிப் படுத்து :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தீர்வு : $49a^2 = (7a)^2$

$25b^2 = (5b)^2$

$70ab = 2(7a)(5b)$

கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $x^2 + 2xy + y^2$ என்பதுடன் ஒப்பிட்டால் நாம் கவனிப்பது $x = 7a$ மற்றும் $y = 5b$ முற்றொருமை I ஐ பயன் படுத்தினால்

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2$$

$$= (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

முற்றொருமை III உடன் ஒப்பிட்டால்

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

இதுவரை ஈருறுப்புக் கோவைகளை முற்றொருமை உதவியுடன் தீர்த்தோம். இப்பொழுது முற்றொருமை I ஐ மூவுறுப்புக் கோவை $x + y + z$ என்பதில் எப்படி பயன் படுத்துவது எனப் பார்ப்போம். $(x + y + z)^2$ என்பதை முற்றொருமை I ஐ பயன் படுத்தி விரிவுப் படுத்துவோம்.

$(x + y + z)^2$ இதில்

$x + y = k$ என்க

$$\therefore (x + y + z)^2 = (t + z)^2$$

$$= t^2 + 2tz + t^2$$

$$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$$

$$(\because t = x + y)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2zx + 2yz + z^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

எனவே நமக்கு கீழ்க்க கண்ட முற்றொருமை கிடைக்கிறது

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முற்றொருமை (V) : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

குறிப்பு : வலது புற கோவை இடதுபுற கோவையின் விரிவாக்கம் என்கிறோம். $(x + y + z)^2$ என்பதன் விரிவாக்கம் மூன்று வர்க்க (square) உறுப்புக்களையும் மூன்று பெருக்கல் உறுப்புக்களையும் கொண்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 14: $(3a + 4b + 5c)^2$ இதன் விரிவாக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப் பட்ட கோவையை

$(x + y + z)^2$ உடன் ஒப்பிடும்போது,

$x = 3a, y = 4b$ மற்றும் $z = 5c$

முற்றொருமை V ஐ பயன்படுத்துக.

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ca$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 15: விரிவாக்கு $(4a - 2b - 3c)^2$

தீர்வு: முற்றொருமை V ஐ பயன் படுத்தினால்

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$(4a - 2b - 3c)^2 = (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ca$$

எடுத்துக்காட்டு 16: காரணிப் படுத்து $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

தீர்வு: $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

$$= (2x)^2 + y^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$$

முற்றொருமை V ஐ பயன் படுத்தினால்.

$$= (2x - y + z)^2$$

$$= (2x - y + z)\ (2x - y + z)$$

இதுவரை நாம் இரண்டு அடுக்கு கொண்ட முற்றொருமைகளைப் பற்றிப் பார்த்தோம். இப்போது முற்றொருமை I ஐ உபயோகித்து $(x + y)^3$ ஐ எப்படி விரிவாக்குவது எனபார்ப்போம்.

$$(x + y)^3 = (x + y)\ (x + y)^2$$

$$= (x + y)\ (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

கீழ்க் கண்ட முற்றொருமை நமக்கு கிடைத்தது.

முற்றொருமை (VI) : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

இதேபோல் முற்றொருமை VI ல் y க்கு பதிலாக $-y$ ஐ பயன் படுத்தினால் நமக்கு கிடைப்பது $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135 + q^2$$

முற்றொருமை (V) : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

எடுத்துக்காட்டு 17: கீழ்க்கண்ட முப்படி கோவைகளை விரிவுப்படுத்தி எழுதுக.

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோவையை $(x + y)^3$ உடன் ஒப்பிடும் போது $x = 3a$ மற்றும் $y = 4b$.

முற்றொருமை VI ஐ பயன் படுத்தினால்

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$$

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)\,(4b)\,(3a + 4b)$$

$$= 27a^3 + 64b^3 + 36ab + (3a + 4b)$$

$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2.$$

(ii) கொடுக்கப்ட்ட கோவையை $(x - y)^3$ உடன் ஒப்பிடும்போது $x = 5p$, $y = 3q$

முற்றொருமை VII ஐ பயன் படுத்தினால்

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$$

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)\,(3q)\,(5p - 3q)$$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 18: உரிய முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி கீழ்க் கண்டவற்றை விரிவாக்கி மதிப்பைக் காண்

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

தீர்வு : $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$

முற்றொருமை VI ன் படி.

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $999^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$

முற்றொருமை VII ன் படி.

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999.$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எடுத்துக்காட்டு 19: காரணிப்படுத்து $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

தீர்வு : கொடுக்கப் பட்ட கோவையை இப்படி எழுதலாம்

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$

முற்றொருமை VI ஐ பயன் படுத்தினால்

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

இப்போது $(x + \mathrm{y} + z)(x^2 + y^2 + \mathrm{z}^2 - xy - yz - zx)$

என்பதை எடுத்தக்கொள். இதை விரிவாக்கி பெருக்கினால்

$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) +$

$z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2) + (x^2y + y^3 + yz^2 -$

$xy^2 - y^2z - xyz) + (x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2)$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (சுருக்கினால்) கிடைக்கிறது

எனவே நமக்குக் கீழ்க் கண்ட முற்றொருமை கிடைக்கிறது.

முற்றொருமை VIII : $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

எடுத்துக்காட்டு 20:

காரணிப் படுத்து : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

முற்றொருமை VII ஐ பயன் படுத்துக

$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$

$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$

பயிற்சி 2.4

1. தகுந்த முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி கீழ்க் கண்டவற்றின் பெருக்கலைக் கண்டுபிடி.

   (i) $(x + 4)(x + 10)$

   (ii) $(x + 8)(x - 10)$

   (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

   (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

   (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. கீழ்க் கண்டவற்றை நேரடியாக பெருக்காமல் மதிப்புக் களைக் காண்.

   (i) 103×107

   (ii) 95×96

   (iii) 104×96

3. கீழ்க் கண்டவற்றை சரியான முற்றொருமைகளை உபயோகித்து காரணிப் படுத்து.

   (i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

4. சரியான முற்றொருமைகளைப் பயன் படுத்தி கீழ்க் கண்டவற்றை விரிவாக்கு

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

(ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

(vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. காரணிப் படுத்துக

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. கீழ்க் கண்ட முப்படிகளை விரிவாக்கு.

(i) $(2x + 1)^3$

(ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

(iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. சரியான முற்றொருமைகளை உபயோகித்து கீழ்க் கண்டவற்றின் மதிப்புக்ளைக் காண்.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றையும் காரணிப் படுத்துக.

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. *சரி பார்க்கவும்:*

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. *கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொன்றையும் காரணிப்படுத்து.*

(i) $27y^3 + 125z^3$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

11. *காரணிப் படுத்து :*

$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. *சரிப் பார்*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

13. $x + y + z = 0$ *எனில்* $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ *என நிரூபி.*

14. *கீழ்க் கண்டவற்றின் மதிப்புகளை முப்படிப் படுத்திப் பார்க்காமல் முற்றொருமையை உபயோகித்துக் கண்டுபிடி.*

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. *செவ்வகத்தின் பரப்பளவு கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவற்றின் நீளம் மற்றும் அகலத்தை கோவை வடிவில் கூறு.*

பரப்பளவு: $27a^2 - 35a + 12$	*பரப்பளவு:* $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. *கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு கீழேக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன அவற்றின் அளவை கோவை மூலம் கூறு.*

கன அளவு: $3x^2 - 12x$	*கன அளவு:* $12ky^2 + 8ky - 20k$
(i)	(ii)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.6 தொகுப்பு (Summary)

இந்த பாடத்தில் நீங்கள் கீழ்க் கண்டவற்றை கற்றுக் கொண்டீர்கள்.

1. ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை P(x) என்பது ஒரு மாறி x உடன் x ல் ஒரு இயற்கணிதக் கோவையின் வடிவம்.

   $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \text{----} + a_2x^2 + a_1x + a_0$ இங்கே a_0, a_1, a_2 ------ a_n என்பன மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$.

   a_0, a_1, a_2 ------ a_n என்பன முறையே

   x^0, x^1, x^2 ----x^n என்பனவற்றின் குணங்கள் மற்றும் n என்பது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி. $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}$,--- a_0 இதில் ($a_n \neq 0$) இவை ஒவ்ஒன்றும் பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ ன் உறுப்புக்கள்.

2. ஓர் உறுப்பை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

3. இரண்டு உறுப்புக்களை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

4. மூன்று உறுப்புக்களை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

5. படி ஒன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரு படி பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

6. படி இரண்டாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

7. படி மூன்றாக உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

8. $p(x)$ என்பது x ல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்க. $p(x) = 0$ எனில், a எனபது $p(x)$ ன் ஒரு பூஜ்ஜியம் எனக் கூறுவோம். இதில் a என்பது சமன்பாடு $p(x) = 0$ ன் மூலம் (root) எனப்படும்.

9. ஒரு 'மாறி' கொண்ட ஒவ்வொரு ஒருபடிக் கோவையும் ஒரு பிரத்யேக (unique) பூஜ்ஜியத்தை உடையதாக இருக்கும். பூஜ்ஜியம் அல்லாத மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூஜ்ஜியம் கிடையாது. ஒவ்வொரு மெய் எண்ணும் பூஜ்ஜிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூஜ்ஜியமாகும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10. **காரணித் தேற்றம்**

$p(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் a என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் என்க. $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்

11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$

14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

பாடம் 3

ஆயத்தொலை வடிவியல் (Coordinate Geometry)

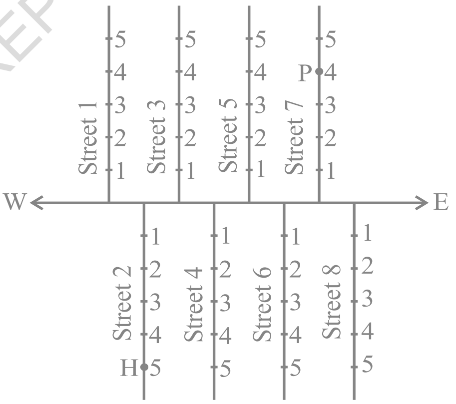
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?' So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, ***The Hunting of the Snark***

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.1 முன்னுரை (Introduction)

ஒரு எண் கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளியை இடங் குறிப்பது எப்படி என்பது குறித்து நீங்கள் ஏற்பகெனவே படித்துள்ளீர்கள். ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலையை எப்படி விவரிப்பது என்பது குறித்தும் நீங்கள் அறிந்திருக்கிறீர்கள். பல சூழலில் நாம் ஒரு புள்ளியை கண்டுபிடிக்க ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட கோடுகளை மேற்கோள் காட்ட வேண்டியுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக கீழ்க்கண்ட சூழலை கவனி.



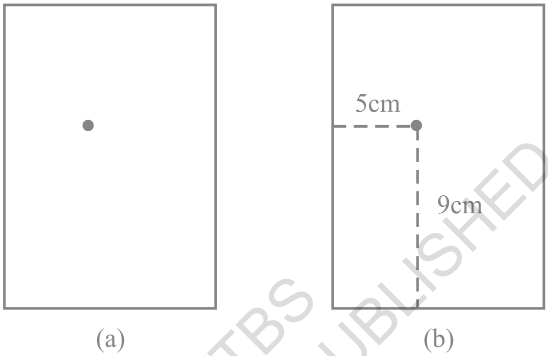
படம் 3.1

I. படம் 3.1ல் கிழக்கு மேற்கு திசையில் பிரதான சாலை செல்கிறது. மேற்கிலிருந்து கிழக்காகத் தெருக்களின் எண்கள் குறிக்கப் பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தெருவிலும் வீட்டு எண்கள் குறிக்கப் பட்டுள்ளன.

இங்குள்ள உன் நண்பனின் வீட்டை அடையாளம் காண ஒரே ஒரு தகவல் போதுமானதா? அவர் இரண்டாவது தெருவில் வசிக்கிறார் என்ற தகவல் மட்டும் அவர் வீட்டை கண்டுபிடிக்க போது மானதா? அது அவ்வளவு சுலம்பமானது அல்ல. தெரு எண் மற்றும் வீட்டு எண் இருந்தால் வீட்டை

கண்டிபிடப்பது சுலபம். இரண்டாவது தெருவில் 5 ஆம் எண் வீட்டை அடைய வேண்டுமெனில் முதலில் 2 வது தெருவிற்கு சென்று பிறகு 5 ஆம் வீட்டை அடையாளம் காணலாம் படம் Fig. 3.1ல் Hஎன்பது அந்த வீட்டின் அடையாளம் ஆகும். இதேபோல் P என்பது 7 வது தெருவிலுள்ள 4 வது வீட்டை குறிக்கிறது.

II ஒரு வெள்ளைத் தாளின் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறி. (படம் 3.2 (a)). இப்போது நாங்கள் உன்னை வெள்ளைத் தாளின் மீது புள்ளி எங்கே உள்ளது எனக் கேட்டால் என்ன சொல்வாய்?



படம் 3.2

ஒருவேளை நீ என்ன சொல்லக் கூடும் எனில் புள்ளி வெள்ளைத் தாளின் மேல் பாதி பகுதியில் உள்ளது. அல்லது அது தாளின இடது ஓரத்திற்கு அருகே உள்ளது எனச் சொல்வாய். அல்லது புள்ளி இடப்புறத்தின் மேல் மூலைக்கு அருகே உள்ளது என்று சொல்வாய். மேற்கண்ட மூன்று பதில்களும் புள்ளியின் சரியான இடத்தைக் காண உதவுகின்றனவா? இல்லை. ஆளுல் நீங்கள் ஒரு வேளை அந்தப் புள்ளி இடது ஓரத்திலிருந்து 5 செ.மீ தூரத்தில் உள்ளது என்று கூறினால் அது புள்ளியின் இருப்பிடத்தை அறிய ஓரளவிற்கு மட்டுமே உதவும். இருந்தாலும் அது புள்ளியின் சரியான இடத்தைக் குறிக்காது. அந்த புள்ளி கீழே உள்ள கோட்டிலிருந்து 9 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளது என்று சொன்னால் புள்ளியின் சரியான இடத்தைக் குறிக்கும்.

எனவே புள்ளியின் சரியான இடத்தை குறிக்க இடது ஓரத்திலிருந்து உள்ள தூரம் மற்றும் கீழே உள்ள ஓரத்திலிருந்து தூம் ஆகிய இரண்டு விவரங்கள் தேவைப் படுகின்றன. (படம் 3.2 (b). வேறு வகையில் சொல்வதனால் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க இரண்டு தனியான விவரங்கள் தேவைப் படுகின்றன.

தற்போது கீழ்க்கண்ட வகுப்பறை செயல்பாட்டை செய்துப்பார்.

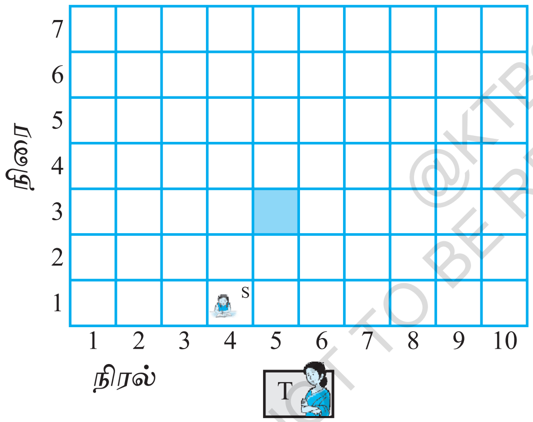
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

செயல்பாடு 1 (இருக்கை வசதி) உன்னுடைய வகுப்பறையில் உள்ள சாய்வு மேசை அனைத்தையும் கணக்கில் கொண்டு மாணவர்கள் இருக்கை குறித்து திட்டம் தயார் செய். ஒவ்வொரு சாய்வுமேஜைக்கும் ஒரு சதுரமாகக் குறி, ஒவ்வொரு சதுரத்திலும் அந்த மேஜையில் உட்கார்ந்திருக்கும் மாணவனின் பெயரை எழுது. வகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு மாணவனின் சரியான இருப்பிடமும் கீழ்க்கண்ட இரண்டு விவரங்கள் மூலம் தெரியவரும்.

(i) அவன் அல்லது அவள் உட்காரும் நிரல் (Column) வரிசை

(ii) அவன் அல்லது அவள் உடகாரும் நிரை (Row) வரிசை

நீ உடக்கார்ந்திருக்கும் சாய்வுமேசை 5 வது நிரல் வரிசை 3 வது நிரை வரிசை எனில் உன்னுடைய இடத்தின் நிலை 9.3 படத்தில் காட்டியபடி இருக்கும். இதை (5, 3) என குறிக்கலாம். முதலில் வருவது நிரல் வரிசையின் அளவு இரண்டாவது உருவது நிரை வரிசையின் அளவு. இது (3, 5) போன்றதாக இருக்குமா?



T என்பது ஆசிரியரின் இருக்கை
S என்பது சோனியாவின் இருக்கை

படம் 3.3

இதேபோல் மற்ற மாணவர்கள் உட்காரும் இடத்தின் நிலையை குறித்துக் கட்டு, எடுத்துக்காட்டாக சோனியா என்பவர் 4 வது நிரல் வரிசை மற்றும் 1 வது நிரை வரிசையில் உட்கார்ந்துள்ளார் என எடுத்துக் கொண்டால் இதை S(4, 1) என எழுதலாம். உன்னுடைய இருக்கை திட்டத்தில் ஆசிரியரின் இருக்கை இடம் பெறவில்லை. அவர் வெறும் பார்வையாளராக கருதப்படுகிறார்.

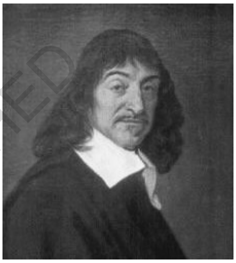
மேற்கண்ட விளக்கத்திலிருந்து நீ அறிந்துகொள்வது என்னவென்றால் ஒரு சமதளத்தின் மீதுள்ள ஒரு பொருளின் நிலையை இரு செங்குத்துக் கோடுகள் உதவியுடன் குறிக்கலாம். ஒரு புள்ளியை குறிப்பது எனில் கீழ்வரிசை

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கோட்டிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம் மற்றும் வெள்ளைத் தாளின் இடது ஓரத்திலிருந்து உள்ள தூரம் இவை தேவைப் படுகின்றன. இருக்கை திட்டதில் நமக்குத் தவைப் படுவது நிரல் வரிசை எண் மற்றும் நிரைவரிசை எண் ஆகும். இந்த எளிய எண்ணமானது **ஆயத் தொலை வடிவியல் (Coordinate Geometry)** என்ற முக்கியமான கணித உட்பிரிவிற்கு வித்திட்டுள்ளது. இந்த பாடத்தில் ஆயத் தொலை வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துக்கள் குறித்து படிப்போம். இது குறித்து அதிகமாக மேல் வகுப்புக் களில் படிப்பீர்கள்.

இயற் கணிதத்தைப் பயன் படுத்தி வடிவியலைக் கற்கும் முறையினை பிரஞ்சு தத்துவ மேதையும் கணிதவியல் அறிஞருமான **ரெனி டெஸ்கார்டிஸ்** (Rene descartes) அறிமுகப் படுத்தினார்.

17வது நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த மிகப் பெரிய கணிதமேதை ரெனி டெஸ்கார்டிஸ். அவர் படுக்கையில் படுத்துக் கொண்டே சிந்திப் பதில் விருப்பம் உடையவர். ஒரு நாள் அவ்வாறு சிந்தித்த போது சமதளத்தில் உள்ள புள்ளியின் நிலையை விளக்கும் முறையை கண்டறிந்தார். அவரது முறையானது பண்டைய அட்சரேகை. தீர்க்க ரேகைகளின் சிந்தனையின் அபிவிருத்தியே. சமதளத்தில் புள்ளியை குறிப்பதை கார்டீஸ்யன் முறை எனப்படும்.



ரெனி டெஸ்கார்டிஸ்
(1596 1650)

படம் 3.4

பயிற்சி 3.1

1. உன்னுடைய படிப்பு அறையிலுள்ள மேசை மின் விளக்கின் நிலையை வேறொருவருக்கு எப்படி எடுத்துக் கூறுவாய்?
2. **தெரு திட்டம்:** ஒரு நகரத்தில் இரண்டு பிரதான சாலைகள் நகர மையத்தில் ஒன்றை ஒன்று குறுக்குவெட்டி செல்கின்றன. இந்த இரண்டு சாலைகளும் வடக்கு தெற்காகவும் மற்றும் கிழக்கு மேற்காகவும் உள்ளன. இந்த சாலையிலுள்ள மற்றத் தெருக்கள் இந்த சாலைகளுக்கு இணையாக 200 மீட்டர் தூரத்தில் செல்கின்றன. ஒவ்வொரு திசையிலும் 5 தெருக்கள் உள்ளன. 1 செ.மீ = 200 மீ. என்ற அளவை பயன் படுத்தி நகரத்தின் மாதிரிப் படத்தை உன்னுடைய நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரை. சாலைகளையும் தெருக்களையும் ஒற்றைக் கோடு மூலம் காட்டு.

உன்னுடைய மாதிரிப் படத்தில் பல குறுக்கு தெருக்கள் உள்ளன. ஒரு குறிப்பிட்ட குறுக்குத் தெரு வடக்கு தெற்கு மற்றும் கிழக்கு மேற்காகச்

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

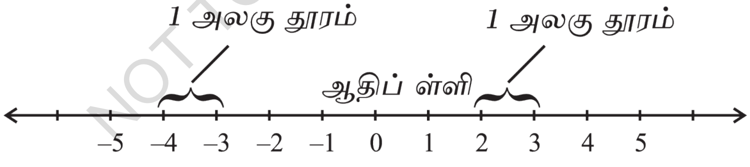
செல்லும் இரண்டு தெருக்களால் ஆனது என்பதை கவனி. ஒவ்வொரு குறுக்குத் தெருவும் கீழக்க கண்டவாறு அமைக்கப் பட்டிருக்கும். வடக்கு தெற்காக செல்லும் 2 வது தெருவும் கிழக்கு மேற்காகச் செல்லும் 5 வது தெருவும் ஒரு குறுக்கில் சந்திக்கும். இந்த குறுக்குத் தெருவை நாம் (2, 5) என குறிப்பிடுவோம். இந்த முறையைப் பயன் படுத்தி கீழ்க் கண்டவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) (4,3) என எத்தனை குறுக்குத் தெருக்கள் குறிக்கப் பட்டிருக்கும்?

(ii) (3,4) என எத்தனை குறுக்குத் தெருக்கள் குறிக்கப் பட்டிருக்கும்?

3.2 கார்டீஸியன் அமைப்பு (Cartesian system)

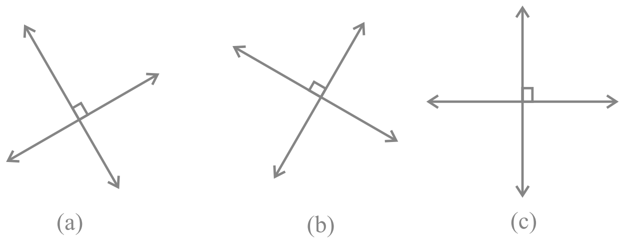
எண் அமைப்பு என்ற பாடத்தில் எண் கோட்டைப் பற்றி படித்தீர்கள். எண் கோட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து சம அலகுகளாக ஒருபக்கம் மிகை (+) எண்களாகவும் எதிர் பக்கம் குறை (–) எண்களாகவும் குறிக்கப் பட்டிருக்கும். எந்த புள்ளியிலிருந்து அளவு துவங்குகிறதோ அந்தப் புள்ளியை ஆரம்பப் (ஆதி) புள்ளி (origin) என்கிறோம். எண் கோட்டினை அதன் மீது சம தூரத்தில் எண்களை குறிக்கப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒரு தூரம் 1 எனக் குறித்துகிறோம். ஒரு தூரம் 1 எனக் குறித்தால் 3 அலகு தூரம் 3 என்ற எண்ணைக் குறிக்கும். `0' என்பது ஆதிப் புள்ளி, மிகை (+) திசையில் r தூரத்தில் உள்ள புள்ளி r எனவும் எதிர்ப்பக்கம் ஆதிப் புள்ளியிலிருந்து r தூரம் உள்ளப் புள்ளி $-r$ எனவும், குறிக்கப் படும். படம் 3.5ல் வெவ்வேறு எண்களை எண் கோட்டின் மீது குறித்திருப் பதைக் காண்கிறோம்.



படம் 3.5

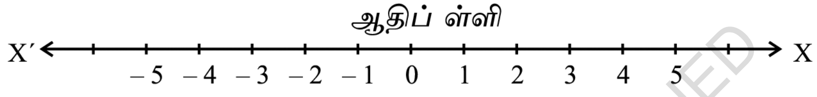
டெஸ்கார்டிஸ் (Descartes) என்பவர் அத்தகைய இரு கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக சமதளத்தின் மீது வைக்கும் முறையைக் கண்டு பிடித்தார் மற்றும் அதன் மீது புள்ளிகளை குறிக்கும் முறையையும் அறிமுகப் படுத்தினார். செங்குத்துக் கோடுகள் படம் 3.6 ல் காட்டிய படி எந்த திசையிலும் இருக்கலாம். ஆனால் இந்த இரு கோடுகளையும் நாம் தேர்ந்தெடுக்கும்போது சமதளத்தில் அவற்றின் மீது புள்ளிகளை குறிக்க ஒன்றை கிடைக்கோடாகவும் (Horizontal) மற்றொன்றை குத்துக் கோடாகவும் (Vertical line) படம் 3.6(e) ல் காட்டியபடி இந்த பாடத்தில் உபயோகப் படுத்துகிறோம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

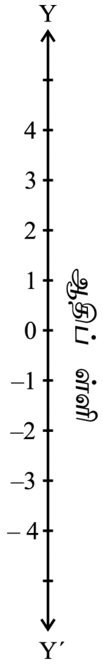


படம் 3.6

இந்த கோடுகள் எவ்வாறு கிடைக்கின்றன என்பதை இப்போது பார்ப்போம். இரண்டு எண்கோடுகளை எடுத்துக் கொள். அவற்றை X'X எனவும் Y'Y எனவும் குறி. *(படம் 3.7 (a))* பிறகு அவற்றின் மீது



(a)



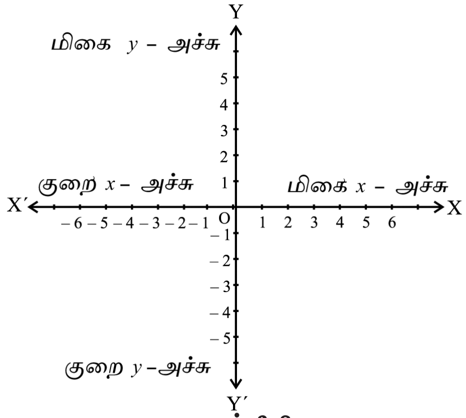
(b)

படம் 3.7

எண்கோட்டின் மீது எண்களை எழுதுவதுபோல் எழுது.

இதேபோல் Y'Y மீதும் எண்களை குறிப்போம். ஆனால் Y'Y என்பது கிடைக் கோடாக இல்லாமல் படம் 3.7(b) ல் காட்டியபடி செங்குத்தாக இருக்கும்.

இந்த இருகோடுகளும் ஆதிப் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் படி *படம் 3.8ல்* உள்ளப்படி சேர்க்க வேண்டும். கிடைக்கோடு X'X என்பது x – அச்சு எனவும் செங்குத்துக் கோடு Y'Y என்பது y – அச்சு எனவும் அழைக்கப்படும். X'X மற்றும் Y'Y இவை வெட்டும் புள்ளி அதிப் புள்ளி (origion) எனப்படும். மிகை எண்கள் OX மற்றும் OY திசைகளில் அமைவதால் OX மற்றும் OY என்பன



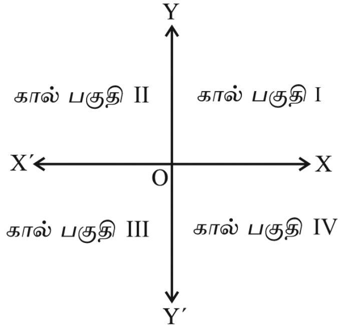
படம் 3.8

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

x – அச்சின் மற்றும் y – அச்சின் **நேர்திசைகள்** என்றழைக்கப் படும். இதேப்போல் OX' மற்றும் OY' என்பன எதிர் திசைகள் என்றழைக்கபடும்.

ஆதிப் புள்ளியை '0' எனக் குறிக்கலாம்.

அச்சுக்கள் இரண்டும் சமதளத்தை 4 பாகங்களாகப் பிரிப்பதை கவனி. இந்த நான்கு பாகங்களும் கால் பகுதிகள் (quadrant) என அழைக்கப்படும். இவை OX லிருந்து கடிகார முள் முறலும் திசைக்கு எதிர் திசையில் I, II, III, IV என எண் இடப்படும். படம் 3.9ஐ பார்க்கவும். எனவே சமதளத்தில் இரண்டு அச்சுக்கள் மற்றும் இந்தக் கால் பகுதிகள் உள்ளன. இந்த சமதளத்தை கார்டீஸியன் தளம் (Cartesian plane) அல்லது

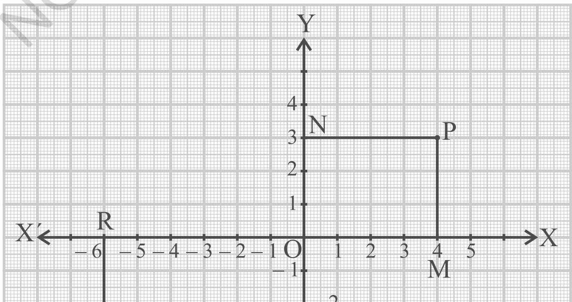


படம் 3.9

ஆயத் தொலை தளம் (coordinate plane) அல்லது xy – தளம் என்கிறோம். அச்சுக்களை ஆயத்தொலை அச்சுக்கள் (coordinate axes) என்கிறோம்.

இந்த அமைப்பு ஏன் கணிதத்திற்கு அடிதளமாக உள்ளது எனவும் இது எப்படி உதவுகிறது எனவும் நாம் இப்போது பார்ப்போம். கீழ்க் கண்ட படத்தைப் பார். அச்சுக்கள் வரைபடத் தாளின் மீது வரையப் பட்டுள்ளன.

இப்போது P மற்றும் Q புள்ளிகள் அச்சுக்களிலிருந்து எவ்வளவு தூரம் உள்ளன எனப் பார்ப்போம். அதற்காக நாம் x – அச்சின் மீது PM என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் y – அச்சின் மீது PN என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் வரைய வேண்டும். படம் 3.10ல் உள்ளப்படி QR மற்றும் QS என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை வரையலாம்.



படம் 3.10

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்போது நீங்கள் அறிவது

(i) y–அச்சில்லிருந்து புள்ளி P க்கான வரையப்பட்ட செங்குத்துத் தூரம் நேர்திசையில் x அச்சின் மீது அளக்கப் படும் தூரம் PN = OM = 4 அலகுகள்.

(ii) x –அச்சிலிருந்து புள்ளி P ன் செங்குத்து தூரம் y அச்சின் மீது அளக்கும்போது PM = ON = 3 அலகுகள்.

(iii) y அச்சிலிருந்து புள்ளி Q ன் செங்குத்து தூரம் x – அச்சின் மீது எதிர் திசையில் அளக்கும்போது QR = SQ = 6 அலகுகள்.

(iv) x அச்சிலிருந்து புள்ளி Q ன் செங்குத்து தூரம் y – அச்சின் எதிர் திசையில் அளக்கும்போது QR = RQ = 2 அலகுகள்.

இந்த அளவுகளைப் பயன்படுத்தி குழப்பம் இல்லாமல் புள்ளிகளை விவரிப்பது எப்படி.

கீழ்க் கண்ட வழக்கப் (மரபு) படி புள்ளியின் ஆயத் தொலைவை எழுதலாம்.

(i) ஒரு புள்ளியின் x– ஆய தொலைவுகள் (x-coordinate) y அச்சிலிருந்து செங்குத்து தூரம், இது x– அச்சு வழியாக (x அச்சின் நேர் திசையில் 'நேர்' ஆகவும், x அச்சின் எதிர் திசையில் 'எதிர்' ஆகவும்) அளக்கப் படும். புள்ளி P க்கு இது +4 மற்றும் புள்ளி Q விற்கு இது –6.

(ii) ஒரு புள்ளியின் y – ஆயத் தொலைகள் (y-coordinates) என்பது x அச்சிலிருந்து செங்குத்து தூரம் ஆகும். இதை y அச்சின் கோட்டின் மீது அளக்கப்படும். (y – அச்சின் நேர் திசையில் மிகை எண்ணும் y அச்சின் எதிர் திசையில் குறை எண்ணுமாக அளைக்கப்படும்) புள்ளி P க்கு இது + 3 மற்றும் புள்ளி Q க்கு இது –2 ஆகும். y அச்சு என்பது y– அச்சு எனவும் அழைக்கப்படும்.

(iii) ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலை அச்சு தூரங்களைக் குறிக்கும்போது முதலில் x – அச்சு புள்ளியின் அளவாகும், பிறகு y– அச்சு புள்ளியின் அளவும்வரும். எனவே P யின் அச்சுப் புள்ளிகள் (4,3) மற்றும் Q வின் அச்சுப் புள்ளிகள் (–6, –2) தளத்தில் அச்சுப் புள்ளிகள் ஒரு பிரத்யேக புள்ளியை மட்டுமே குறிக்கும். (3, 4) என்பது (4, 3) போன்றதே அல்ல. அது வேறு புள்ளி. இதுவேறு புள்ளி .

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 1: படம் 3.11ஐப் பார் பிறகு கீழே கொடுக்கப் பட்ட கூற்றுகளை பூர்த்திசெய்.

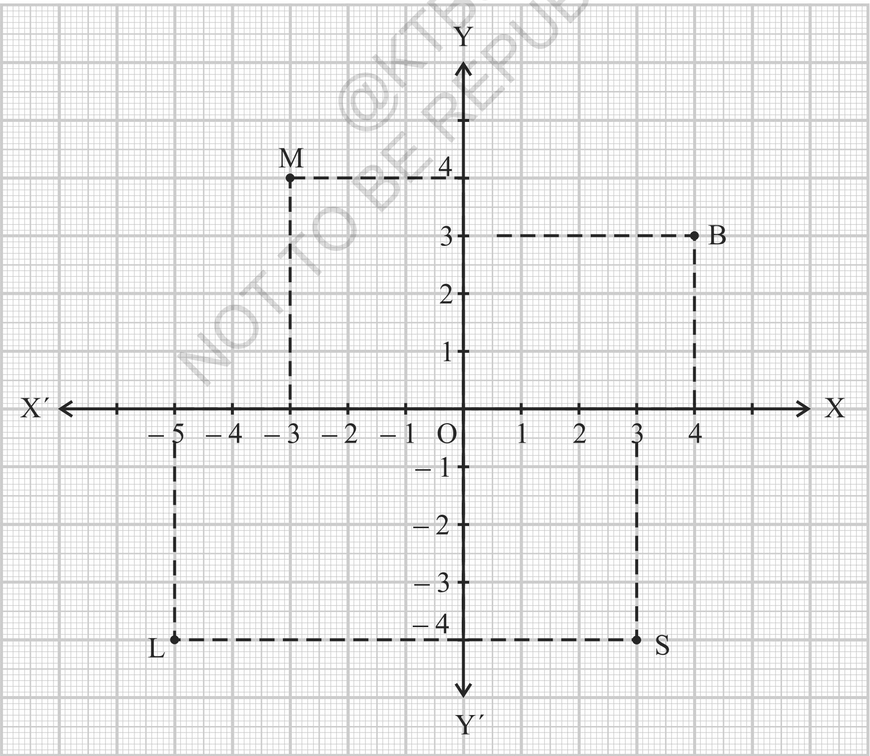
(i) புள்ளி B யின் x அச்சு மற்றும் y அச்சு தொலைவுகள் எனபவை முறையே, _______ மற்றும் _______ என்பன. எனவே B– ன் அச்சுத்தூரங்கள் (_______ , _______) ஆகும்.

(ii) புள்ளி M– ன் x அச்சு மற்றும் y அச்சு தொலைவுகள் என்பன முறையே _______ மற்றும் _______ ஆகும். எனவே –M அச்சுத்தூரங்கள் (_______., _______) ஆகும்.

(iii) புள்ளி L– ன் x அச்சு மற்றும் y அச்சு தொலைவுகள் என்பன முறையே _______ மற்றும் _______ ஆகும். எனவே L– ன் அச்சுத்தூரங்கள் (_______ , _______) ஆகும்.

(iv) புள்ளி S ன் x அச்சு மற்றும் y அச்சு தொலைவுகள் என்பன முறையே _______ மற்றும் _______ ஆகும். எனவே S அச்சுத்தூரங்கள் (_______, _______) ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



படம் 3.11

தீர்வு : (i) புள்ளி B ன் தூரம் y அச்சிலிருந்து *4 அலகுகள் என்பதால்* x*– அச்சு என்பது 4. புள்ளி* B*– ன் தூரம்* x *அச்சிலிருந்து 3 அலகுகள் என்பதால்* y*– அச்சு தூரம் என்பது 3. எனவே புள்ளி* B*(4,3) எனப்படும்.*

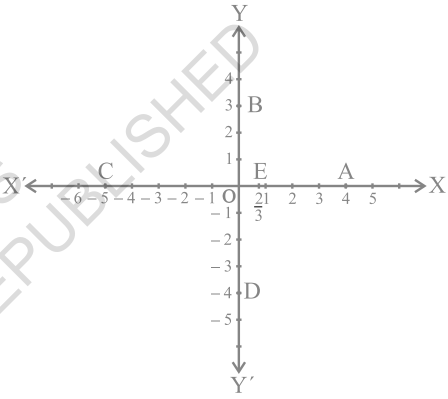
(ii) x *அச்சு மற்றும்* y*– அச்சின் தூரங்கள் முறையே 3 மற்றும் 4. என்பதால் புள்ளி* M *என்பது (3,4) ஆகும்.*

(iii) *புள்ளி* L *ன்* x *அச்சு மற்றும்* y *அச்சின் தூரங்கள் முறையே 5 மற்றும் 4. என்பதால் புள்ளி* L *என்பது* $+-5, -4$ *எனக் குறிக்கப்படும்.*

(iv) *புள்ளி* S *ன்* x *அச்சு மற்றும்* y *அச்சின் தூரங்கள் 3 மற்றும் -4 எனக் குறிக்கப் படும்*

எடுத்துக்காட்டு 2: *படம் 3.12ல் அச்சுகளின் மீது குறிக்கப் பட்டுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களை எழுதுக.*

தீர்வு: (i) A *என்ற புள்ளி* y *அச்சிலிருந்து 4 அலகுகள் தூரத்திலும் மற்றும்* x *அச்சிலிருந்து) 0 அலகு தூரத்திலும் உள்ளது. எனவே* x *அச்சுத்தூரம்* +4 *மற்றும்* y *அச்சுத்தூரம் 0. எனவே புள்ளி* A *என்பது* (4, 0) *எனக் குறிக்கப் படும்.*



படம் 3.12

(ii) B ன் அச்சுதூரம் (0, 3) ஏன்?

(iii) C ன் அச்சுகள் (–5, 0), ஏன்?

(iv) D ன் அச்சுகள் (0, –4) ஏன்?

(v) E ன் அச்சுகள் $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ஏன்?

x *அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளின்* $y-$ *அச்சுத் தொலைவு பூஜ்ஜியம் (0) ஆகும். எனவே* $x-$ *அச்சு மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும்* $(x, 0)$ *எனக் குறிக்கப்படும் இங்கே,* x *என்பது* $y-$ *அச்சிலிருந்து புள்ளி உள்ளதூரம் ஆகும். இதேபோல்* y *அச்சின் மீதுள்ள எந்த ஒருப்புள்ளியும்* $(0, y)$ *எனக் குறிக்கப் படும். இங்கே,* y *என்பது* x*–அச்சிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம். ஏன்?*

ஆதிப் புள்ளி **'O'** *என்பது* x *மற்றும்* y *அச்சிலிருந்து பூஜ்ஜிய தூரத்திலிருக்கும். எனவே ஆதிப் புள்ளியை* **(0, 0)** *எனக் குறிப்போம்.*

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

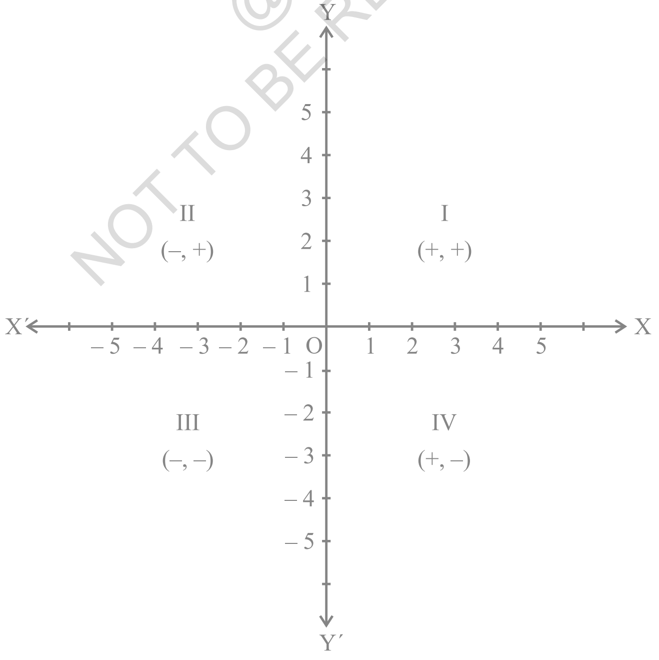
மேற் கண்ட எடுத்துக் காட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் குறியீட்டிற்கும் (sign) அப்புள்ளி அமைந்திருக்கும் காற்பகுதிகளுக்கும் (quadrants) இருக்கும் தொடர்பை நீ கவனித்திருப்பாய்.

(i) ஒரு புள்ளி முதல் கால் பகுதியில் இருந்தால் அது (+, +) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் முதல் கால் பகுதி x – அச்சின் மிகை எண்கள் மற்றும் y – அச்சின் மிகை எண்கள் அடங்கிய பகுதி ஆகும்.

(ii) ஒரு புள்ளி 2-வது கால் பகுதியில் இருந்தால் அது (–, +) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் இரண்டாவது கால் பகுதி x – அச்சின் குறை எண்கள் மற்றும் y – அச்சின் மிகை எண்கள் அடங்கியப் பகுதி ஆகும். படம் 3.13ஐப் பார்.

(iii) ஒரு புள்ளி 3-வது கால் பகுதியில் இருந்தால் அது (–, –) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் மூன்றாவது பகால் பகுதி x – அச்சின் குறை எண்கள் மற்றும் y – அச்சின் குறை எண்கள் அடங்கியப் பகுதி ஆகும்.

(iv) ஒரு புள்ளி 4 வது கால் பகுதியில் இருந்தால் அது (+, –) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் 4 வது கால் பகுதி x– அச்சின் மிகை எண்கள் மற்றும் y – அச்சின் குறை எண்கள் அடங்கியப் பகுதி ஆகும். படம் 3.13 ஐப் பார்.



படம் 3.13

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

குறிப்பு: நாம் விவரித்த மேற்கண்ட சமதளப் புள்ளியை குறிக்கும் முறை உலகம் முழுதும் உள்ளவர்களால் ஏற்றுக் கொள்ளப் பட்ட அமைப்பு ஆகும். y– அச்சு முதலாகவும் x – அச்சு இரண்டவதாகக் கூட வந்திருக்கலாம் ஆனால் அது குழப்பத்தை உருவாக்கும்.

எனவே இந்த குழப்பத்தைப் போக்க உலகம் முழுதும் நாம் விவரித்த அமைப்பு முறையே பயன் படுத்தப் படுகிறது.

பயிற்சி 3.2

1. கீழ்க் கண்ட வினாக்களுக்கு விடை அளி.

(i) கார்டீஸியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் இடத்தை நிர்ணயிக்க உதவும் கிடைக்கோடு (Horizontal line) மற்றும் குத்துக் கோடு (Vertical line) இவற்றின் பெயர் என்ன?

(ii) இந்த கோடுகளால் தளத்தின் மீது உருவாகும் ஒவ்வொரு பகுதியின் பெயரும் என்ன?

(iii) இந்த இரு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியின் பெயரை எழுதுக.

2. படம் 3.14ஐப் பார்த்து கீழ்க்கண்டவற்றை எழுது.

(i) புள்ளி B ன் அச்சுத்தூரம் (coordinates)

(ii) புள்ளி C ன் அச்சுத்தூரம்

(iii) *(3,5)* அச்சுத்தூரம் குறிக்கும் புள்ளியின் பெயர்.

(iv) *(2, 4)* அச்சுத்தூரம் குறிக்கும் புள்ளியின் பெயர்.

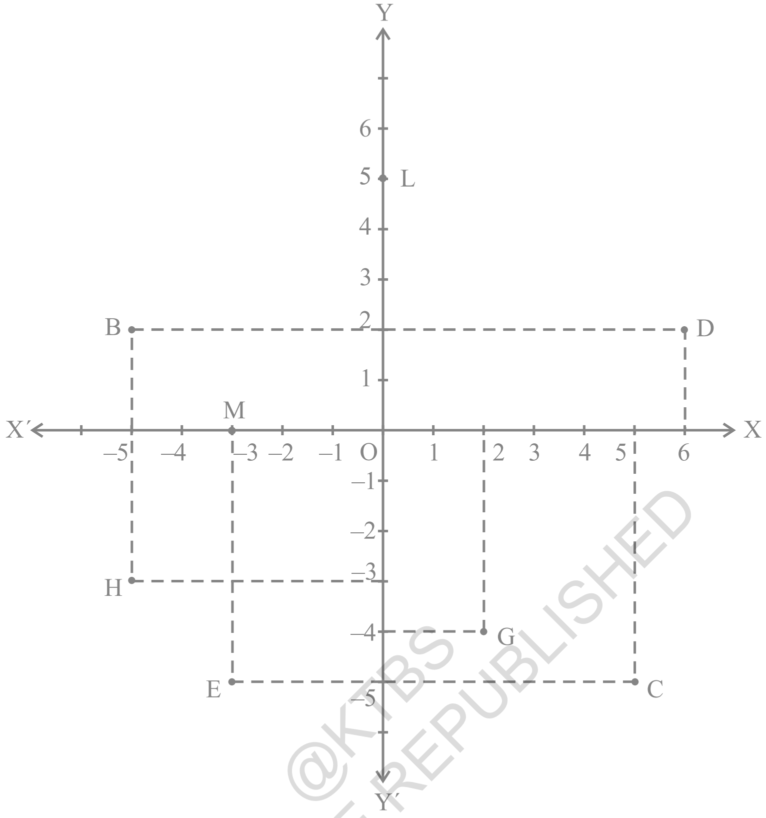
(v) புள்ளி D ன் x அச்சுத்தூரம்

(vi) புள்ளி H ன் x அச்சுத்தூரம்

(vii) L புள்ளியின் அச்சுத்தூரம்

(viii) புள்ளி M ன் அச்சுத்தூரம்

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 3.14

3.3. தொகுப்பு:

இந்த பாடத்தில் கீழ்க் கடவற்றை படித்துள்ளாய்.

1. சமதளத்தின் மீது ஒரு புள்ளி அல்லது பொருளை குறிக்க இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகள் தேவை. அவற்றில் ஒன்று கிடைக்கோடு மற்றொன்று குத்துக் கோடு.

2. சமதளம் 'கார்டீஸியன் தளம்' என்றோ அல்லது ஆயத் தொலைத் தளம் என்றோ அழைக்கப்படும்.

3. கிடைக்கோடு x – அச்சு என அழைக்கப்படும் மற்றும் குத்துக் கோடு y – அச்சு என அழைக்கப் படும்.

4. ஆய தொலை அச்சுக்கள் சமதளத்தை நான்கு சமமான கால் பகுதிகளாக பிரிக்கின்றன.

5. அச்சுக்களின் வெட்டுப்புள்ளி ஆதிப்புள்ளி என அழைக்கப் படுகிறது.

6. y – அச்சியிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம் x – அச்சு தூரம் எனவும் x – அச்சிலிருந்து புள்ளி உள்ள தூரம் y – அச்சு தூரம் எனவும் அழைக்கப் படுகிறது.

7. ஒரு புள்ளி உள்ள தூரத்தை (x, y) என குறிக்கிறோம். x என்பது x அச்சு தூரத்தையும் y என்பது y அச்சு தூரத்தையும் குறிக்கும்.

8. x அச்சின் மீது உள்ள புள்ளிகள் $(x, 0)$ என்ற வடிவிலும் y அச்சின் மீதுள்ள புள்ளிகள் $(0, y)$ என்ற வடிவிலும் இருக்கும்.

9. ஆதிப்புள்ளி $(0,0)$ என குறிக்கப்படும்.

10. முதல் கால் பகுதியில் $(+, +)$, எனவும் இரண்டாம் கால்பகுதியில் $(–, +)$, எனவும் மூன்றாம் கால்பகுதியில் $(–, –)$ எனவும் நான்காம் கால் பகுதியில் $(+, –)$ எனவும் புள்ளிகள் குறிக்கப் படும்.

11. $x \neq y$ எனில் $(x, y) \neq (y, x)$ மற்றும் $x = y$ எனில் $(x, y) = (y, x)$.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

U9R9R2

பாடம் 4

இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்
(Linear Equations in Two Variable)

The principal use of the Anatblic art is to bring mathematical problems to Equations and to exhibit those equaitons in the most simple terms that can be.

- Edmund Halley

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.1 முன்னுரை : (Introduction)

இதற்கு முந்தய வகுப்புக்களில் நீங்கள் ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன் பாடுகள் குறித்து படித்தீர்கள். ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றை உன்னால் எழுத முடியுமா? $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ மற்றும் $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ என்பன ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒரு படிச் சமன்பாடுகளுக்கு சில எடுத்துக் காட்டுகள் என நீ சொல்லலாம். இத்தகைய சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு என்பதையும் நீ அறிவாய். இந்த தீர்வை எண் கோட்டின் மீது எப்படி குறிப்பது என்பதையும் ஞாபகப் படுத்திக் கொள். இந்தப் பாடத்தில் ஒரு மாறிக் கொண்ட ஒரு படிச் சமன்பாடுகள் குறித்து ஞாபகப் படுத்தி பிறகு இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன் பாடுகள் குறித்து படிப்போம்.

கீழ்க் கண்ட கேள்விகள் குறித்து யோசித்துப் பார்.

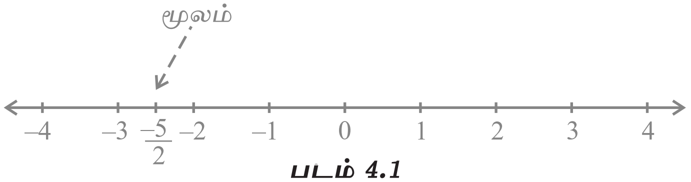
இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடிச் சமன் பாட்டிற்கு தீர்வு உண்டா? ஆம் எனில் அது ஒரே தீர்வா? கார்டீசியன் சமதளத்தில் அந்த தீர்வு எப்படி இருக்கும்? இத்தகைய கேள்விகளுக்கு பதில் காண பாடம் மூன்றில் படித்தவற்றை உபயோகப் படுத்திக் கொள்.

4.2 ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations)

இதுவரை நீ படித்தவற்றை மீண்டும் நினைவுப் படுத்திக் கொள். கீழ்க் கண்ட சமன்பாட்டை கவனி.

$2x + 5 = 0$

இதன் தீர்வு அதாவது இதன் மூலம் என்பது $\frac{-5}{2}$ இதை கீழ்க் கண்டவாறு எண் கோட்டின் மீது குறித்துக் காட்டலாம்.



படம் 4.1

ஒரு சமன்பாட்டை தீர்க்கும்போது கீழ்க்கண்ட உண்மைகளை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு ஒருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வு எப்போது பாதிக்காது எனில்.

(i) ஒரே எண்ணை சமன்பாட்டின் இருபுறமும் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ.

(ii) மேலும் சமன் பாட்டின் இருபுறத்தையும் பூஜ்ஜியம் அல்லாத எண்ணால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ.

கீழ்க் கண்ட சூழலை நாம் இப்போது கவனிப்போம்.

நாக்பூரில் இந்தியாவிற்கும் இலங்கைக்கும் இடையே நடந்த ஒரு நாள் கிரிகெட் போட்டியில் இரண்டு இந்திய மட்டை வீச்சாளர்கள் (bats man) சேர்ந்து எடுத்த ஓட்டம் (runs) *176*. இந்த செய்தியை சமன்பாட்டின் மூலம் தெரிவி.

இங்கு எந்த ஒரு மட்டை வீச்சாளரின் ஓட்டமும் கொடுக்கப் படவில்லை. அதாவது இரண்டு தெரியாத அளவுகள் உள்ளன. அவற்றை x மற்றும் y மூலம் குறிப்போம். எனவே ஒரு மட்டை வீச்சாளர் எடுத்த ஓட்டங்கள் x எனவும் மற்றொருவர் எடுத்து ஓட்டங்கள் y எனவும் கொள்க. எனவே நமக்குத் தெரியும்.

$x + y = 176$

இதுவே நமக்குத் தேவையான சமன்பாடு ஆகும்.

இது இரண்டு மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு ஒரு உதாரணம் ஆகும். x மற்றும் y எனக் குறிப்பது மரபு. ஆனால் இதை வேறு எடுத்துக்களாலும் குறிக்கலாம். இரண்டு மாறிகள் கொண்ட இருபடி சமன்பட்டிற்கு மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுக்கள்.

$1.2s + 3t = 5$, $p + 4q = 7$, $\pi u + 5v = 9$ மற்றும் $3 = \sqrt{2}x - 7y$ இந்த சமன்பாடுகளை

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கீழ்க் கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$1.2s + 3t - 5 = 0$; $p + 4q - 7 = 0$,

$\pi u + 5v - 9 = 0$, $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$

எனவே $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் எழுதப்படும் எந்த சமன்பாடும் இரண்டுமாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடு என்ப்படும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மெய் எண்கள் மற்றும் a மற்றும் b இவை இரண்டும் பூஜ்ஜியம் இல்லை. இதுபோன்று பல சமன்பாடுகள் குறித்து நீ சிந்திக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் எழுது மற்றும் a, b மற்றும் c இவற்றின் மதிப்புகளை ஒவ்வொன்றிலும் கண்டுபிடி.

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$

(iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$.

(v) $4x + 5x\ 3 - y$

தீர்வு : (i) $2x + 3y = 4.37$ இதை $2x + 3y - 4.37 = 0$ என எழுதலாம், இங்கு $a = 2$, $b = 3$ மற்றும் $c = -4.37$

(ii) சமன்பாடு $x - 4 = \sqrt{3}y$ என்பதை $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ மற்றும் $c = -4$.

(iii) சமன்பாடுஎன்பதை $5x - 3y - 4 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $a = 5, b = -3$ மற்றும் $c = -4$.

(iv) சமன்பாடு $2x = y$ என்பதை $2x - y + 0 = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $x = 2$, $y = -1$ மற்றும் $c = 0$

$ax + b = 0$ என்ற வகையான சமன்பாடுகளும் இரு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடு எனலாம். ஏனெனில் அவற்றை

$ax + 0.\ y + 6 = 0$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $4 - 3x = 0$ என்பதை $-3x + 0.\ y + 4 = 0$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொன்றையும் இரண்டு மாறிகள் கொண்ட சமன்பாடுகளாக எழுது.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

தீர்வு : $x = -5$ என்பதை $1.\ x + 0.y = -5$ அல்லது $1.\ x + 0.\ y + 5 = 0$ என எழுதலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) $y = 2$ என்பதை , $0.x + 1.y = 2$ அல்லது $0.x + 1.y - 2 = 0$ என எழுதலாம்.

(iii) $2x = 3$ என்பதை $2x + 0.y = -3$ அல்லது $2x + 0y - 3 = 0$ என எழுதலாம்.

(iv) $5y = 2$ என்பதை $0.x + 5y - 2 = 0$ என எழுதலாம்.

பயிற்சி 4.1

1. ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ஒரு பேனாவின் விலையைப் போல் இரு மடங்கு. இந்த உண்மையை விளக்க இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒரு ஒருபடி சமன்பட்டை எழுது. (நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை ₹x எனவும் பேனாவின் விலை ₹y எனவும் கொள்க)

2. கீழ்க் கண்ட ஒருபடி சமன்பாடுகளை $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் எழுதுக. ஒவ்வொன்றிலும் a, b மற்றும் c ன் மதிப்புகளை எழுதுக.

(i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$	(ii) $x - \frac{y}{5}10 = 0$	(iii) $-2x + 3y = 6$
(iv) $x = 3y$	(v) $2x = -5y$	(vi) $3x + 2 = 0$
(vii) $y - 2 = 0$	(viii) $5 = 2x$	

4.3 ஒரு படி சமன்பாடுகளை தீர்க்கும் முறை

(Solution of a linear equation)

ஒரு மாறி கொண்ட ஒரு படி சமன் பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டுமே உண்டு என்பதை நீ அறிவாய். இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு என்ன என்பது குறித்து நீ என்ன சொல்கிறாய்? சமன்பாட்டில்இரண்டுமாறிகள்இருப்பதால்தீர்வும்ஒருஜோடியாகஇருக்கும். ஒரு மதிப்பு x க்கும் இன்னொரு மதிப்பு y க்கும் ஆக இரண்டு இருக்கும். $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டை கவனி இங்கு $x = 3$ மற்றும் $y = 2$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. சமன்பாட்டில் இந்த மதிப்புக்களை அளித்தால்.

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

இந்த தீர்வை (3, 2) என்ற ஜோடியாக எழுதலாம். முதலில் xன் மதிப்பையும் இரண்டாவதாக yன் மதிப்பையும் எழுதவேண்டும். இதேபோல் (0, 4) என்பதும் மேற்கண்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு ஆகும்.

(1,4) என்பது $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு இல்லை. ஏனெனில், $x = 1$ மற்றும் $y = 4$ என்ற மதிப்புக்களை அளித்தால் சமன்பாடு $2x + 3y = 14$ என வருகிறது. எனவே (1,4) என்பது தீர்வு இல்லை. (0,4) என்பது தீர்வு ஆனால் (4,0) என்பது தீர்வு இல்லை என்பதை கவனி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தது இரண்டு தீர்வுகள் அதாவது (3,2) மற்றும் *(0, 4)*எனப் பார்த்தோம். வேறு ஏதாவது தீர்வை உன்னால் கண்டுபிடிக்க முடியுமா? (6, 0) என்பது மற்றொரு தீர்வு என்பதை நீ ஒத்துக் கொள்கிறாயா? இதை சரிப்பார். கீழ்க்கண்ட வழி முறைப்படி பல தீர்வுகளை நாம் காணலாம். x க்கு உன்னுடைய விருப்பப்படி ஒரு மதிப்பை அளி. $2x + 3y = 12$ என்ற சமன்பாட்டில் $x = 2$ என மதிப்பளித்தால் அது $4 + 3y = 12$ என்ற ஒருபடிச்சமன்பாடாக அது குறைகிறது. இதை சுருக்கினால் $y = \frac{8}{3}$ எனவருகிறது. எனவே $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ எனபதும் மற்றொரு தீர்வு ஆகும். இதேபோல் $x = -5$ என எடுத்துக்கொண்டால் சமன்பாடு $-10 + 3y = 12$ என ஆகிறது. இது $y = \frac{22}{3}$ என்ற மதிப்பைக் கொடுக்கிறது. எனவே $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ என்பது $2x+3y=12$ என்பதன் மற்றொரு தீர்வு ஆகும். இப்படி முடிவில்லாமல் தீர்வுகளை கண்டு பிடித்துக் கொண்டே போகலாம்.

எனவே இருமாறிகள் கொண்ட ஒரு ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு கணக்கில் அடங்கா தீர்வுகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $x + 2y = 6$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நான்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை கண்டுபிடி.

தீர்வு : மேற்பார்வையில் $x = 2$ மற்றும் $y = 2$ எனலாம்,

ஏனெனில் $x = 2, y = 2, x + 2y = 2 + 4 = 6$.

இப்போது $x = 0$ என எடுத்துக் கொள்வோம். x க்கு இந்த மதிப்பை அளித்தால் சமன்பாடு $2y = 6$ என ஆகிறது. எனவே $y = 3$ ஆகையால், $x = 0, y = 3$ என்பதும் ஒரு தீர்வு ஆகும். இதேபோல் $y = 0$ என எடுத்துக் கொண்டால் சமன்பாடு $x = 6$ என வருகிறது. எனவே $x = 6,\ y = 0$ என்பது மற்றொரு தீர்வு ஆகும். கடைசியாக $y = 1$ என எடுத்துக் கொள்வோம். சமன்பாடு $x + 2 = 6$ என ஆகிறது. எனவே $x = 4$. ஆகையால் (4, 1) என்பதும் கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டிற்கு தீர்வு ஆகும். எனவே கணக்கற்ற தீர்வுகளில் கண்டுபிடிக்கப் பட்ட நான்கு தீர்வுகள்.

(2,2), (0,3), (6,0) மற்றும் (4,1) என்பன

குறிப்பு : எளிய வழி என்னவென்றால் x க்கு 0 மதிப்பளித்து y மதிப்பையும், y க்கு 0 மதிப்பளித்து x இன் மதிப்பையும் கண்டுபிடிப்பதாகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 4: *கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் இரண்டு தீர்வுகளைக் கண்டுபிடி.*

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

தீர்வு :

(i) $x = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால் $3y = 12$ அதாவது $y = 4$ எனவே $(0, 4)$. என்பது ஒரு தீர்வு. இதேபோல் $y = 0$ என எடுத்துக்கொண்டால், $x = 3$ என வருகிறது. எனவே $(3, 0)$ என்பது இன்னும் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

(ii) $2x + 5y = 0$ இதில் $x = 0$ எனில் $5y = 0$ அதாவது $y = 0$ எனவே $(0, 0)$ என்பது ஒரு தீர்வு. $y = 0$ என எடுத்துகொண்டால் மீண்டும் $(0, 0)$ என்பதே தீர்வாக கிடைக்கிறது. இது முன்பைப் போலவே இருப்பதால் $x = 1$ என எடுத்துக்கொள். சமன்பாடு $2x + 5y = 0$ எனவே $y = -\frac{2}{5}$.

ஆகையால் தீர்வு $\left(1, -\frac{2}{6}\right)$ என்றாகிறது.

(iii) $3y + 4 + 0$ என்பதை $0.x + 3y + 4 = 0$ என எழுதலாம். x க்கு எந்த மதிப்பு அளித்தாலும் $y = \frac{4}{3}$ என வரும். எனவே $\left(0, -\frac{4}{3}\right), \left(1, -\frac{4}{3}\right)$ என்பன தீர்வுகள் ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 4.2

1. *கீழ்க்கண்டவற்றில் எது உண்மை? ஏன்?*

   $y = 3x + 5$ என்பதற்கு

   (i) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

   (ii) இரண்டு தீர்வுகள் உண்டு

   (iii) கணக்கில் அடங்கா பல தீர்வுகள் உண்டு.

2. *கீழ்க் கண்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் நான்கு தீர்வுகளைக் கண்டுபிடி.*

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. *கீழ்க் கண்டவற்றுள் எவை* $x - 2y = 4$ *என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்பதை கண்டு பிடி.*

   (i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$, (v) $(1, 1)$

4. $2x + 3y = k$ *என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு* $x = 2, y = 1$ *எனில்* k *ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.*

4.4 தொகுப்பு (Summary)

1. $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் உள்ள சமன்பாடு இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாடு என அழைக்கப்படும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மெய் எண்கள் மற்றும் a மற்றும் b என்பன ஒரே சமயத்தில் சுழியம் (0) இல்லை.

2. இரண்டு மாறிகள் கொண்ட ஒருபடி சமன்பாட்டிற்கு கணக்கில் அடங்கா பல தீர்வுகள் உண்டு.

3. இரண்டு மாறிகள் கொண்டு ஒரு படி சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

N6W6W7

பாடம் – 5

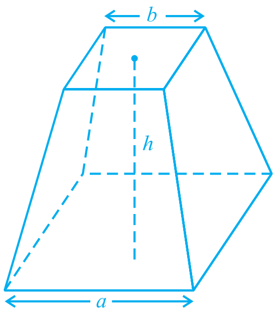
‘யூக்ளிட்’ இன் வடிவியலின் அறிமுகம்
(Introduction to Euclid's Geometry)

5.1 முன்னுரை

'Geometry' என்ற வார்த்தை 'Geo' என்ற கீரேக்க வார்த்தையிலிருந்தும் metrein என்ற கிரேக்க வார்த்தையை இணைத்தும் பிறந்தது. 'Geo' என்றால் புவி அல்லது பூமி என்பதாகும். 'metrein' என்றால் ‘அளவிடல்’ என்பதை குறிக்கும். இந்த வடிவியல் (Geometry) என்பது நிலத்தை அளப்பதிலிருந்து பிறந்த தாகும். கணிதத்தின் இந்தப் பிரிவு பண்டைய நாகரிகமான எகிப்து, பாபிலோனியா, சீனா, இந்தியா, கிரீஸ், இன்கா இவைகளில் படிக்கப் பட்டு வந்தன. இந்த நாகரீகத்தினர் பல செயல்முறை பிரச்சனைகளை எதிர்கொண்டார்கள். இது பலவழிகளில் வடிவியலை உருவாக்க வழி வகுத்தது.

NOT TO BE REPUBLISHED
@KTBS

எடுத்துக் காட்டாக நைல் நதியில் வெள்ளம் பெருக்கெடுத்து ஓடியபோது அருகிலுள்ள வயல்களின் எல்லைகள் அழிக்கப் பட்டன. வெள்ளத்திற்கு பிறகு வயலின் எல்லைகள் திருப்பி வரையறுக்கப் பட்டன. இதற்காக எகிப்தியர்கள் பலதரப்பட்ட வடிவியல் யுக்திகளை எளிய பரப்புகளைக் கணக்கிடுவதற்கும், எளிய கட்டமைப்புகளை உறுவாக்குவதற்கும் கையாண்டனர். வடிவியல் அறிவை கால்வாய்கள் வெட்டுதல், பிரமிடுகளை கட்டுதல் போன்றவற்றிலும் பயன்படுத்தினார்கள்.



படம் 5.1: A Truncated Pyramid

தானியக் களஞ்சியங்களும் உருவாக்க வடிவியல் அறிவைப் பயன் படுத்தினர். மேற்பகுதி திறக்கப்பட்ட கூம்பகங்களின் (பிரமிடுகளின்) கொள்ளவை காண உதவும் சூத்திரத்தையும் அவர்கள் அறிந்திருந்தனர். (படம் 5.1 ஐப் பார்). கூம்பகங்கள் என்பது ஒரு திட உருவம். அதன் அடிப்பாகம் முக்கோண வடிவமானது அல்லது சதுர வடிவமானது அல்லது வேறு எந்த பலகோண வடிவமானது அல்லது வேறு எந்த பலகோண வடிவம் கொண்டாதாக இருக்கும். பக்க வடிவங்கள் முக்கோண வடிவம் கொண்டு மேல் பகுதி குவிந்து இருக்கும்.

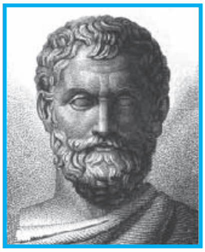
இந்திய துணை கண்டத்தில் பண்டைய நாகரிகங்களான மொகஞ் சோதாரோ மற்றும் ஹாரப்பா போன்ற பகுதிகளில் வடிவியலை வெகுவாகப் பயன்படுத்தியுள்ளனர். சிந்து சமவெளி நாகரிகம் (சுமார் கி.மு 3000) வளர்ந்த காலத்தில் வடிவியல் வெகுவாகப் பயன் படுத்தப் பட்டன. அது ஒரு மிகப் பெரிய திட்டமிடப் பட்ட சமூகம். நகரங்கள் மிகவும் வளர்ச்சிப் பெற்ற திட்டமிடப் பட்டதாக இருந்தன. எடுத்துக் காட்டாக சாலைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருந்தன. பூமிக்கடியில் வடிகால்கள் அமைக்கப் பட்டிருந்தன. வீடுகள் பல மாதிரி வடிவங்களில் கட்டப் பட்டன. இது நகரத்தில் வாழ்ந்தவர்களின் செயல் வடிவக் கணித அறிவை வெளிப்படுத்துகிறது. வீடு கட்ட உபயோகப் படுத்தப் பட்ட செங்கற்கள்சுட்டகற்களாகும். இவற்றின்நீளம், அகலம் மற்றும் பருமன்அளவு 4 : 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் இருந்தன.

பழங்கால இந்தியாவில் சுல்பசூத்ராஸ் (sulbasutras 800 BCE to 500 BCE) என்பன வடிவியலின் கட்டுமானக் கைப்பிரதிகள் ஆகும். வேத காலத்தில் நெருப்புக் குண்டங்களின் கட்டுமானம் அக்கால வடிவியல் அறிவை வெளிப் படுத்துகின்றன. புனித நெருப்பு உண்டாக்கப் படும் இடம் அதன் வடிவம் மற்றும் பரப்பு குறிப்பிட்ட ஆலோசனைப்படி உருவாக்கப்பட்டன. அதன் தாக்கம் உண்டாக அவ்வாறு உருவாக்கப் பட்டன. வீட்டில் நடக்கும் பூசைகளுக்கும் சதுரவடிவ அல்லது வட்ட வடிவ பீடங்கள் உருவாக்கப் பட்டன. பொது வழிபாட்டிற்கு செவ்வகம், சரிவகம் மற்றும் முக்கோணம் ஆகிய உருவங்களின் கலப்பாக பீடங்கள் கட்டப் பட்டன. ஸ்ரீயந்திரா (அதர்வண வேதத்தில் உள்ளது) ஒன்பது ஒன்றோடு ஒன்றிணைந்த இருசமபக்க முக்கோணங்களை கொண்டதாக இருந்தது. அவை 43 சிறிய முக்கோணங்களை உருவாக்கக் கூடிய வகையில் அமைக்கப்பட்டன. மிகவும் சரியான முறைகள் பயன்படுத்தப் பட்டாலும் அவற்றின் பின்னால் உள்ள தத்துவங்கள் விளக்கப் படவில்லை.

NOT TO BE REPUBLISHED

இந்த எடுத்துக்காட்டுகள் எதை விளக்குகிறது என்றால் உலகம் முழுவதும் வடிவியல் வளர்ச்சி அடைந்ததையும் அவை பயன்பட்டதையும் விளக்குகிறது. ஆனால் இது ஒரு வரையறையில்லாமல் இருந்தன. இருப்பினும் இதிலுள்ள அதிசயம் என்னவென்றால் தலைமுறை தலைமுறையாக வாய் வழியாகவோ கை இலை செய்தியாகவோ அல்லது மற்ற எந்த வகையிலோ பரவி வந்தன. இந்தியா அல்லது ரோமாபுரியைப் போல பாபிலோனியா நாகரிக காலத்திலும் வடிவியல் செயல்வடிவில் பரவிவந்தன. எகிப்தியர்கள் கடைபிடித்த வடிவியல் முடிவின் அடிப்படையாகக் கொண்டது. பொதுவான விதிகள் எதுவும் வுருவாக்கப் படவில்லை. பாபிலோனியர்களும் எகிப்தியர்களும் வடிவியலை அன்றாட வாழ்வில் கடைப்பிடித்தனர் ஆனால் அவர்கள் அதை முறையான விஞ்ஞானமாக வளர்க்கவில்லை. ஆனால் கிரீஸில் சில கட்டுமானங்கள் எதற்காக இப்படி உள்ளன என்ற காரணங்களோடு விளக்கப் பட்டன. கிரேக்கர்கள் அறிக்கையின் பின்னால் உள்ள உண்மைகளை விளக்க ஆர்வம் காட்டினார்கள். அவர்கள் துப்பறியும் விதமாக காரணங்களை கண்டுபிடித்தனர். (பின் குறிப்பு 1 ஐ பார்க்கவும்)

தேலீஸ் (Thales) என்ற கிரேக்க கணித மேதை வடிவியலில் கருத்தியல் மற்றும் வரைதல் புரிதலுக்காக நன்கு அறியப்பட்டவர். ஒரு விட்டமானது, அவ்வட்டதை இருசம பகுதிகளாகக் கூறிடும் என்ற தேற்றத்திற்கு நிரூபணத்தை அளித்தார்.



Thales
(640 BCE – 546 BCE)

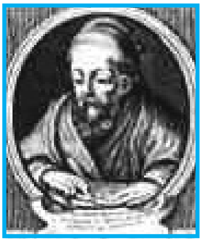
படம் 5.2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இவருடைய முக்கியமான மாணவர்களின் ஒருவர் பிதகோரஸ் (Pythagoras 572 BCE) இவரைப் பற்றி நீங்கள் கேள்விப் பட்டுள்ளீர்கள். பிதகோரஸ் மற்றும் குழுவினர்கள் பல வடிவியல் குணங்களை கண்டுபிடித்தனர். மற்றும் இவர்கள் வடிவியலின் கோட்பாடுகளை விளக்கினர். இந்த செயல் முறை 300 BCE வரை நீடித்தது. இந்தக் காலத்தில் எகிப்தில் உள்ள அலெக்ஸாண்டிரியாவின் யூக்ளிட் (Euclid) என அறியப்பட்ட, கிரேக்க கணிதமேதை தெரிந்த எல்லா வடிவியல் கருத்தியல்களை சேகரித்து முறைப் படுத்தி எழுதி எலிமெண்ட்ஸ் (Elements) என்ற ஆய்வுக்கட்டுரையாக வெளியிட்டார்.

‘எலமண்ட்ஸ்’ தொகுதியை 13 பாகங்களாகப் பிரித்து ஒவ்வொன்றையும் ஒரு புத்தகமாக வெளியிட்டார். இந்த புத்தகங்கள் உலகம் உழுவதும் வடிவியலைப் பற்றி அறிந்துக் கொள்ள தலை முறை தலைமுறையாக உதவி வருகின்றன.

இந்த பாடத்தில் யூக்ளிட் வடிவியலை அணுகிய விதம் குறித்தும் அதை இன்றைய வடிவியலுடன் தொடர்பு படுத்தவும் முயற்சி செய்யலாம்.



யூக்ளிட்
BCE 352 - BCE 265
படம் 5.3

5.2 யூக்ளிட்டின் வரையறைகள், எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகள். (Euclid's Definitions, Axioms and Postulates)

யூக்ளிட் காலத்தில் வாழ்ந்த கிரேக்க கணிதவியலாளர்கள் வடிவியலை அவர்கள் வாழ்ந்த உலகின் ஒரு கருத்தியல் படைப்பாக மட்டுமே பார்த்தனர். புள்ளி, கோடு, சமதளம் முதலிய கருத்துக்களை அவர்களை சுற்றியுள்ள பொருட்களை பார்த்தவற்றிலிருந்து நிரூபித்தனர். வெற்றிடம் மற்றும் திடப்பொருள் இவற்றின் கருத்துருவாக்கத்திலிருந்து திடப் பொருள்களின் தன்மைகளை விளக்கினர். திடப்பொருளுக்கு உருவம் உண்டு, அளவு மற்றும் இருப்பிடம் உண்டு. அதை ஓரிடத்திலிருந்து மற்றொரு இடத் திற்கு நகர்த்தலாம் அல்லது எடுத்துச் செல்லலாம். அவற்றின் எல்லைகள் வெளிப்பரப்பு அல்லது மேற்பரப்பு எனப்படும். மேற்பரப்பானது ஒரு வெற்றிடத்தை ஒரு பகுதியிலிருந்து மற்றொரு பகுதியை பிரிக்கிறது. அதற்கு தடிப்பளவு இல்லை. மேற்பரப்பின் எல்லைகள் **வளைவுக் கோடாகவோ** அல்லது **நேர்க்கோடாகவோ** இருக்கும். இந்தக் கோடுகள் **புள்ளியில்** முடிவுறும்.

திடப்பொருளிலிருந்து புள்ளிவரை முக்கிய மூன்று படிகளை கவனி (திடப்பொருள் - மேற்பரப்பு-நேர்க்கோடு - புள்ளி). ஒவ்வொரு படியிலும் நாம் ஒரு விரிவாகத்தை இழக்கிறோம். அது நீள, அகல, உயர பரிமாணக் கூறு எனப்படும். எனவே திடப் பொருளுக்கு மூன்று பரிமாணம், மேற்பரப்பிற்கு இரண்டு பரிமாணம் மற்றும் நேர்க்கோட்டிற்கு ஒரு பரிமாணம் உண்டு. புள்ளிக்கு எந்த பரிமாணமும் இல்லை. யூக்ளிட் இந்த உண்மைகளை தொகுத்து வரையறைகளாக வெளியிட்டார். எலிமெண்டஸ் (Elements) என்ற தொகுப்பில் புத்தகம் 1ல் 23 வரையறைகளை எழுதி தனது கண்டுபிடிப்பு பயணத்தை தொடங்கினார். அவற்றில் சில கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1. ஒரு **புள்ளிக்கு** எந்த பாகமும் இல்லை.
2. ஒரு **கோடு** என்பது அகலமற்ற நீளம்.
3. ஒரு கோட்டின் முடிவுகள் புள்ளிகள்.
4. ஒரு **நேர்க்கோடு** என்பது ஒரேதளமாக அதன் மீது புள்ளிகள் கொண்டகோடு.
5. **மேற்பரப்பிற்கு** நீளம் அகலம் உண்டு.
6. மேற்பரப்பின் விளிம்பு நேர்க்கோடு ஆகும்.
7. ஒரு சமதள மேற்பரப்யானது தன் மீது நேர்க்கோடுகளை கொண்டிருக்கும்.

இந்த வரையறைகளை நீங்கள் கவனமாக படிப்பீர்களானால் சில சொற்கள் குறிப்பாக பாகம், அகலம், நீளம், சமதளமாக போன்றவை இன்னும் சரியான முறையில் விளக்கப் பட வேண்டும் என்பது விளங்கும். உதாரணமாக அவருடைய புள்ளி, என்ற வரையறையை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள், இதில் பாகம் என்பது வரையறுக்கப் படவேண்டும். பாகம் என்பது பரப்பளவை கொண்டது என வரையறுத்தால் மீண்டும் பரப்பளவு என்பது என்ன என்பதை வரையறுக்க வேண்டும். எனவே ஒன்றை வரையறுக்க வேண்டுமானால் இன்னும் பலவற்றை வரையறுக்க வேண்டியுள்ளது. முடிவு இல்லாத நீண்ட சங்கிலிப் போன்ற வரையறைகள் கிடைக்கும். அத்தகைய காரணங்களுக்காக கணித மேதைகள் சில வடிவ கணிதக் கூறுகளை வரையறுக்காமல் விட ஒப்புக் கொண்டனர். புள்ளி என்று வடிவில் கூறு குறித்து நமக்கும் வியத்தகு கருத்து வரையறைக்கும் மேலாக உள்ளது. எனவே ஒரு புள்ளியை (Points) சிறு குறி (dot) என்கிறோம். இதற்கும் சில அளவீடுகள் உண்டு.

வரையறை 2 டிலும் இதேபோன்ற பிரச்சனை உள்ளது. இதில் நீளம் மற்றும் அகலம் பற்றி குறிப்பிடப் பட்டுள்ளது. இது இரண்டு குறித்தும் வரையறை இல்லை. எனவே சில பாடத் தொகுதிகளை எழுதும் போது சில சொற்கள் வரையறுக்கப் படாமல் விடப்பட்டுள்ளது. வடிவ கணிதத் தில் நாம் ஒரு புள்ளி, ஒரு கோடு மற்றும் ஒரு சமதளம் இவற்றை எடுத்துக் கொள்வோம். (யூக்ளிட் வார்த்தையில் ஒரு சமதள பரப்பு) இவை வரையறுக்கப் படாத வார்த்தைகள். இவற்றை உருவ மாதிரிகளை வைத்து விளக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

'யூக்ளிட்' தன் வரையறைகளை சில தனிப் பண்புகளை யூகத்தை அடிப்படையாக வைத்துக் கூறினார். ஆனால் அவை நிரூபிக்கப் படவில்லை. அந்த யூகங்கள் வெளிப்படையான உலக உண்மைகளாகவே இருந்தன. அவற்றை இரு வகையாகப் பிரித்தார். அவை எடுகோள்கள் (Axioms) மற்றும் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் (Postulates) ஆகும். வடிவக் கணிதத்திற்கு மட்டுமே உரித்தான யூகங்களை அடிப்படைக் கோட்பாடு கொளகை (Postulate) என்று கூறினார். பொதுவான குறியீடு முறைகள் எடுகோள்கள் (axioms) என்பது குறிப்பாக வடிவியலுக்கு மட்டுமே சம்பந்தப்பட்டதாக அல்லாமல் கணிதப் பாடம் அனைத்திலும் யூகிக்கப்பட்ட உண்மைகளாக கருத்தப் பட்டன. எடுகோள்கள் மற்றும் அடிப்படைக் கோட்பாடு கொள்கைகளுக்கு அதிக விளக்கம் பெற பிற்சேர்க்கை I ஐ பார்க்கவும். யூக்ளிட்டின் எடுகோள்களில் சில கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. யூக்ளிட் எழுதிய வரிசையில் அவை இல்லை.

1. ஒரு பொருளுக்கு சமமாக உள்ள வெவ்வேறு பொருட்கள். ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கும்.
2. சமமானவற்றை சமமானவைகளுடன் கூட்டினால் கிடைக்கும் பூர்த்திகளும் சமம்.
3. சமமானவைகளை சமமானவற்றிலிருந்து கழித்தால் மீதிகள் சமம்.
4. ஒன்றுக்கொன்று பொருந்தும் பொருட்கள் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை.
5. முழுமையானவை பகுதியை விடபெரியது.
6. ஒரு பொருட்களின் இருமடங்குகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை
7. ஒன்றைப் போலவே உள்ள பொருட்களின் அரை மடங்குகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

இந்த பொதுவான கருத்துகள் அளவுகள் சிலவற்றை உருவகப் படுத்தி காட்டுகிறது. முதல் பொதுக் கருத்து சமதள படங்களுக்கு பொருந்தும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பிற்கு சமமானால் மற்றும் அந்த செவ்வகத்தின் பரப்பு ஒரு சதுரத்தின் பரப்பிற்கு சமமானால் அந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு சதுரத்தின் பரப்பிற்கு சமமாகும்.

ஒரே வகையான மதிப்புக்களை கூட்டலாம் அல்லது ஒப்பிடலாம். ஆனால் வெவ்வேறு வகையான மதிப்புக்களை ஒப்பிட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நேர்க்கோட்டை ஒரு செவ்வகத்துடன் கூட்ட

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

முடியாது. இதேபோல் ஒரு கோணத்தை ஒரு ஐங்கோண வடிவத்துடன் ஒப்பிட முடியாது.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட *4* வது எடுகோளில் இரண்டு பொருட்கள் ஒரே மாதிரி இருந்தால் (அவை ஒன்றே போன்றவை) எனில் அவை சமம் என்கிறது. வேறுவிதமாக கூறுவதனால் அவை ஒன்றுக்கொன்று சமபடுத்துகிறது. இது மிகப் பெரிய கோட்டபாட்டின் தத்துவம். எடுகோள் *5* ஆனது ஒன்றைவிடமற்றொன்று பெரியது என்பதை விளக்குகிறது. எடுத்துக் காட்டாக B என்ற ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருள் A வின் ஒரு பாகம் எனில் பிறகு A என்பது B மற்றும் மூன்றாவது பொருள் C ன் கூடுதல் என்பதாகும். இதை குறியீடு மூலம் சொல்வதானால் $A > B$ மற்றும் $A = B + C$.

தற்போது யூக்ளிட்டின் 5 கோட்பாடுகள் குறித்து விவாதிப்போம். அவை

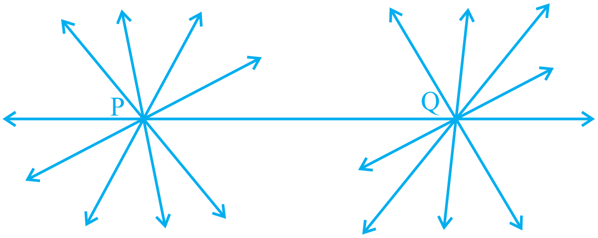
கோட்பாடு 1 : ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்கோடு வரையலாம்.

இந்த கோட்பாடு சொல்வதென்னவென்றால் இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள் வழியே ஒரு நேர்க்கோடு செல்கிறது. அந்த ஒரு கோட்டைத் தவிர வேறுகோடுகள் இருக்காது என அது சொல்லவில்லை. இருந்தாலும் யூக்ளீட் தன்னுடைய கட்டுரைகளில் பல இடங்களில் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே ஒரு நேர்க்கோடு செல்வதாக யூகித்துள்ளார். இந்த முடிவை கீழ்க்கண்ட எடுகோள் வடிவில் நாம் கூறலாம்.

எடுகோள் 2.1: கொடுக்க பட்ட இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே ஒரு நேர்க் கோடு செல்கிறது.

படம் *5.4* ஐப் பார். P வழியாக செல்லும் எத்தனை கோடுகள் Q வழியாகவும் செல்கின்றன? ஒரே ஒரு கோடு PQ என்பது மட்டுமே. Q வழியாக செல்லும் எத்தனை கோடுகள் P வழியாகவும் செல்கின்றன?

அது ஒன்றே ஒன்று அது PQ. எனவே மேலே கொடுக்கப்பட்ட கூற்று சொந்த நிரூபணம், எனவே அது எடுகோளாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது.

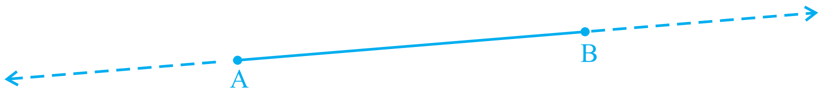


படம் 5.4

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கோட்பாடு 2: ஒரு முடிவுற்றக் கோட்டை அளவில்லாமல் நீட்டிக்கலாம்.

இந்த காலத்தில் நாம் கோட்டுத்துண்டு (line segment) என்பதை யூக்ளிட் முடிவுற்றக் கோடு (terminated line) என்கிறார். எனவே இக்கால சொற்கள்படி அந்த இரண்டாவது கோட்டபாடு கூறுவது என்ன வென்றால் கோட்டுத் துண்டை இரு பக்கமும் நீட்டித்து ஒரு கோடாக உருவாக்கலாம். படம் 5.5 ஐப் பார்.



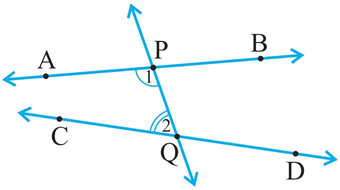
படம் 5.5

கோட்டபாடு 3: எந்த ஒரு ஆரத்தைக் கொண்டும் எந்த மையப் புள்ளியைக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையமுடியும்.

கோட்டபாடு 4 : எல்லா செங்கோணங்களும் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை.

கோட்டுபாடு 5 : ஒரு நேர்க்கோடு இரண்டு நேர்க்கோடுகளை வெட்டினால், ஒரே பக்கத்தில் இரண்டு உட்கோணங்களை உண் டாக்குகின்றன. அந்த கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டும் இரண்டு செங்கோணங்களுக்கு குறைவு எனில் அந்த இரண்டு நேர்க்கோடுகளையும் அளவற்று (indefinitely) நீட்டினால் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டு செங்கோணங்களை விட குறைவாக உள்ள பக்கத்தில் அந்த இரண்டுகளும் சந்திக்கும்.

எடுத்துக்கட்டாக படம் 5.6ல் PQஎன்ற கோடு AB மற்றும் CD என்ற கோடுகளை வெட்டுகிறது. PQ இடது புறம் உள்ள உட்கோணங்கள் 1 மற்றும் 2 இவற்றின் கூடுதல் 180° விடக்குறைவு. எனவே AB மற்றும் CD என்ற கோடுகள் PQ விற்கு இடதுபுறம் கண்டிப்பாக வெட்டிக் கொள்ளும்.



படம் 5.6

5 கோட்பாட்டபாடுகளையும் படிக்கும்போது கோட்டபாடு 5 என்பது மற்ற நான்கு கோட்பாடுகளைக் காட்டிலும் சிக்கல்வாய்ந்ததாக உள்ளது. அதற்கு மாறாக கோட்பாடுகள் 1 முதல் 4 வரை மிகவும் எளிதாக புரிந்துக் கொள்ளக் கூடிய தாகவும் தானே விளக்கக்கூடிய விளக்கக்கடிய கூடிய உண்மையானதாகவும் உள்ளன. இருந்தாலும் அவற்றை நிரூபிக்க முடியாது. எனவே இவை எந்த நிரூபணமும் இன்றி ஒப்புக் கொள்ளப்பட்டன. (பிற்சேர்க்க 1 ஐ பார்க்கவும்). சிக்கல் நிறைந்த தாக இருப்பதால் கோட்பாடு 5 க்கு அடுத்த பகுதியில் அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இன்றைய நாளில் எடுகோள் மற்றும் கோட்பாடு இரண்டும் ஒன்றுக் கொன்று இடம் மாறி ஒரே பொருளை கொடுக்கக் கூடிய வகையில் பயன் படுத்தப் படுகின்றன. கோட்பாடு என்பது ஒரு வினைச் சொல். நாம் கோட்பாடாக்கலாம் எனக் கூறினால் உலகில் நாம் கண்டவற்றை ஒரு அறிக்கையாக வெளியிடலாம் என்பதாகும். இதன் உண்மையான மதிப்பு பிறகு சரிபார்க்கப்படும். அது உண்மை எனில் அது கோட்பாடாக ஏற்றுக் கொள்ளப் படும்.

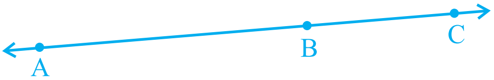
எடுகோள்களின் ஒழுங்குமுறை என்பது முரண்பாடு இல்லாதது. (பிற்ச்சேர்க்கை 1 ஐ பார்க்க). அது இதற்கு முன்பு நிரூபிக்கப்பட்ட எடுகோள்களுக்கு முரண்பட்டதாக இருக்க முடியாது. எனவே ஏதாவது ஒரு எடுகோளின் ஒழுங்கு முறை கொடுக்கப்பட்டால் அது முரண்பாடற்றது என்பது ஒப்புக் கொள்ளப் பட வேண்டும்.

யூக்ளிட் தன்னுடைய எடுகோள்கள் மற்றும் கோட்பாடுகளை மற்ற முடிவுகளை நிரூபிக்கப் பயன்படுத்தினார். இந்த முடிவுகளை பிற உண்மைகளை நிரூபிக்க பயன்படுத்தினார். அப்படி நிரூபிக்கப்பட்ட உண்மைகள் தேற்றங்கள் (theorems) என்றழைக்கப் படுகின்றன. யூக்ளிட்தன்னுடைய எடுகோள்கள், கோட்பாடுகள் இவற்றைப் பயன்படுத்தி 465 தேற்றங்களை நிரூபித்தார். அடுத்த சில பாடங்களில் இத்தகைய கோட்பாடுகளையும் எடுகோள்களையும் பயன்படத்தி சில தேற்றங்களை நிரூபிக்கலாம்.

யூக்ளிட் தனது கோட்பாடுகள் மற்றும் எடுகோள்களைப் பயன்படுத்தி எப்படி உண்மைகளை நிரூபித்தார் என இப்போது சில எடுத்துக் காட்டுகள் மூலம் பார்ப்போம்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

எடுத்துக்காட்டு 1 : A, B மற்றும் C என்பன ஒரு கோட்டின் மீது உள்ள மூன்று புள்ளிகள். B என்பது A விற்கும் C க்கும் இடையே உள்ளது (படம் 5.7 ஐப் பார்) எனில் AB + BC = AC என நிரூபி.



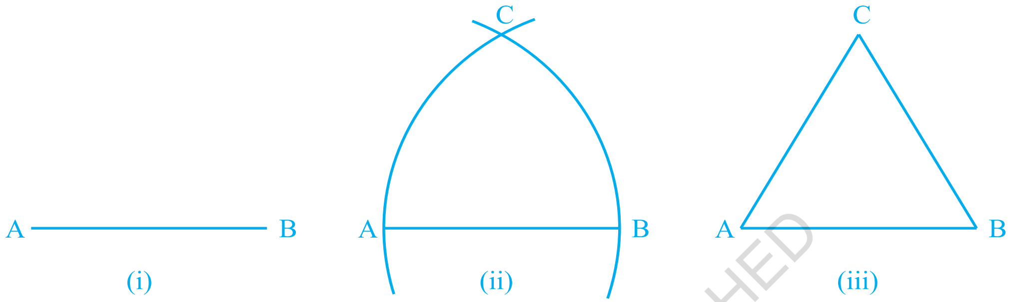
படம் 5.7

தீர்வு : கொடுக்கப் பட்ட படத்தில் AC என்பது AB + BC க்கு துல்லியமாக ஒத்திருக்கிறது. யூக்ளிட்டின் 4 வது எடுகோளின்படி ஒரு பொருள் ஒன்றுக்கொன்று துல்லியமாக ஒத்திருந்தால் அவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை. எனவே நாம். AB + BC = AC என்ற முடிவிற்கு வரலாம். இந்த

தீர்வில் இரண்டு புள்ளிக்கு இடையே ஒரே ஒரு நேர்க்கோடு மட்டுமே செல்கிறது என்பதை கவனி.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்க் கோட்டு துண்டின் மீது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைய முடியும் என்பதை நிரூபி.

தீர்வு : மேற்க் கண்ட அறிவிக்கையில் ஏதோ ஒரு அளவும் கொண்ட துண்டுகோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (படம் *5.8* (i)ஐப் பார்).



படம் 5.8

இங்கே நீங்கள் சிலவற்றை வரைய வேண்டும். யூக்ளிட்டின் *3* வது கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி புள்ளி A வை மையமாக வைத்து AB யை ஆரமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையலாம். (படம் *5.8* (ii) ஐப் பார்) இதேபோல் B என்ற புள்ளியை மையமாக வைத்து BA வை ஆரமாக்க கொண்டு மற்றொருவட்டம் வரை. அந்த இரண்டு வட்டங்களும் C என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்போது AC மற்றும் BC யை இணைக்கும்படி கோடுகள் ΔABC அமையும் படி வரை. (படம் 5.8 (iii) ஐப் பார்) எனவே இந்த முக்கோணம் சம பக்க முக்கோணம் என நிரூபிக்க வேண்டும். அதாவது $AB = AC = BC$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இப்போது $AB = AC$ ஏனெனில் அவை ஒரே வட்டத்தின ஆரங்கள் ..... (i) இதேபோல் $AB = BC$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரங்கள்) ....(2) யூக்ளிட்டின் சமமான பொருட்களுக்கு சமமான மற்றப் பொருட்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கும் என்ற கூற்றுப்படி $AB = BC = AC$ என்ற முடிவிற்கு நீ வரலாம். எனவே ΔABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

A மற்றும் B என்ற மையங்களைக் கொண்ட வட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதை சொல்லாமலேயே யூக்ளிட் யூகித்தார் என்பதை கவனி.

இனி, பல்வேறு முடிவுகளில் பயன்படுத்தப்படும் தேற்றம் ஒன்றை நிரூபிக்கலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் 2.1: இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகளுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொது புள்ளி இருக்காது.

நிரூபணம்: இங்கு l மற்றும் m என்ற இருக் கோடுகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவை இரண்டிற்கும் ஒரே ஒரு பொதுப்புள்ளி மட்டுமே உள்ளது என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும்.

இரண்டு கோடுகள் வெவ்வேறான P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது இரண்டு கோடுகள் இரண்டு வெவ்வேறான புள்ளிகள் P மற்றும் Q வழியாக செல்கின்றன. ஆனால் இரண்டு வெவ்வேறான புள்ளிகள் வழியே ஒரு பொதுக்கோடு மட்டுமே செல்லும் என்ற எடுகோளுக்கு இது நேர்மாறாக உள்ளது. எனவே நாம் யூகித்த இரண்டு கோடுகள் இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும் என்பது தவறு.

இதிலிருந்து நாம் என்ன முடிவுக்கு வரலாம்? இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகளுக்கு ஒரு பொது புள்ளியைத் தவிர வேறில்லை என்ற முடிவுக்குத் தான் நாம் வரவேண்டும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 5.1

1. கீழ்கண்ட கூற்றுகளில் எது உண்மை? எது பொய்? உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

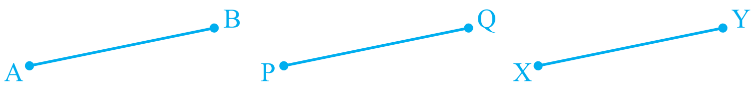
   (i) ஒரு புள்ளி வழியே ஒரே ஒரு கோடு மட்டும் செல்லும்.

   (ii) இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளிடையே எண்ணற்ற கோடுகள் வரைய முடியும்.

   (iii) ஒரு கிடைக்கோட்டை இரண்டு பக்கமும் அளவற்று நீட்ட முடியும்.

   (iv) இரண்டு வட்டங்கள் சமம் எனில் அவற்றின் ஆரங்கள் சமம்.

   (v) படம் 5.9 ல், AB = PQ மற்றும் PQ = XY எனில் AB = XY



படம் 5.9

2. கீழ்க் கண்டவற்றிற்கு வரையறை கூறு. இதற்கு முன்பு வேறுசொற்கள் வரையறுக்கப் பட வேண்டுமா? அந்த சொற்கள் யாவை மற்றும் அவற்றை எப்படி வரையறை செய்வாய்?

(i) இணைக் கோடுகள் (ii) செங்குத்துக் கோடுகள்

(iii) துண்டுக்கோடு (iv) ஒருவட்டத்தின் ஆரம்

(v) சதுரம்

3. கீழே கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோட்டபாடுகளை கவனி.

(i) A மற்றும் B என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகள். என்றால் மூன்றாவதாக ஒரு புள்ளி C என்பது A மற்றும் B புள்ளிக்கு இடையே உள்ளது.

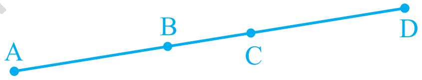
(ii) ஒரே நேர்க்கோட்டின் மீது அமையாத வாறு குறைபட்சம் மூன்று புள்ளிகள் உள்ளன.

இந்த கோட்டபாடுகளில் வரையறுக்கப்படாத சொற்கள் உள்ளனவா? இந்த கோட்பாடுகள் சரியானவைதானா? அவை யூக்ளிட்டின் கோட்பாடுகளிலிருந்து வந்தவையா? விளக்கு.

4. C என்ற புள்ளி A மற்றும் B புள்ளிகளுக்கு இடையே $AC = BC$ என்ற வகையில் அமைந்தது எனில் $AC = \frac{1}{2}AB$ என நிரூபி. படம் வரைந்து விளக்கு.

5. வினா 4 ல் C என்பது AB கோட்டின் மையப்புள்ளி. ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் ஒரே ஒரு மையப்புள்ளி மட்டுமே உள்ளது என்பதை நிரூபி.

6. படம் 5.10ல் $AC = BD$ எனில் $AB = CD$ என நிரூபி.



படம் 5.10

7. யூக்ளிட்டின் எடுகோள்களில் 5 வது எடுகோள் உலகளாவிய உண்மை என ஏன் கூறப் படுகிறது? (கேள்வி 5 வது கோட்பாடு பற்றியது அல்ல)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.3 தொகுப்பு

இவ்வலகில், கீழ்காணும் கருத்துகளை நீ படித்திருக்கிறாய்:

1. யூக்கிலிட் என்பவர் ஒரு புள்ளி, கோடு மற்றும் தளம் இவற்றை வறையறுத்திருந்தாலும் வரையரைகளை கணக்கியல் ஆய்வளார்கள் ஏற்றுக் கொள்வதில்லை. எனவே, இச்சொற்கள் வரையறுக்கப்படாதவைகளாகவே கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

2. எடுகோள்கள் மற்றும் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் இவை தெளிவாகத் தெரியும் உலகியல் உண்மைகள். அவை நிரூபிக்கப் படுவதில்லை.

3. தேற்றங்கள் என்பன, வரையரைகள், எடுகோள்கள், முன்னமே நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றுகள் மற்றும் துப்பறிந்து பகுத்தறிதல் இவற்றைக் கொண்டு நிரூபிக்கப்பட்ட கூற்றுகள் ஆகும்.

4. யூக்லிட் - இன் சில எடுகோள்கள்:

   1. ஒரு பொருளுக்கு சமமாக உள்ள வெவேறு பொருட்கள். ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கும்.
   2. சமமானவற்றை சமமானவைகளுடன் கூட்டினால் கிடைக்கும் பூர்த்திகளும் சமம்.
   3. சமமானவைகளை சமமானவற்றிலிருந்து கழித்தால் மீதிகள் சமம்.
   4. ஒன்றுக்கொன்று பொருந்தும் பொருட்கள் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை.
   5. முழுமையானவை பகுதியை விடபெரியது.
   6. ஒன்றைப் போலவே உள்ள பொருட்களின் இருமடங்குகள் அனைத்துமே ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை
   7. ஒன்றைப் போலவே உள்ள பொருட்களின் அரை மடங்குகள் அனைத்துமே ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. யூக்லிட் - இன் இடிப்படைக் கோட்பாடுகளானவை:

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர்கோடு வரையலாம்.

2. ஒரு முடிவுற்றக் கோட்டை அளவில்லாமல் நீட்டிக்கலாம்.

3. எந்த ஒரு ஆரத்தைக் கொண்டும் எந்த மையப் புள்ளியைக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையமுடியும்.

4. எல்லா செங்கோணங்களும் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை.

5. ஒரு நேர்க்கோடு இரண்டு நேர்க்கோடுகளை வெட்டினால், ஒரே பக்கத்தில் இரண்டு உட்கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன. அந்த கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டும் இரண்டு செங்கோணங்களுக்கு குறைவு எனில் அந்த இரண்டு நேர்க்கோடுகளையும் அளவற்று **(indefinitely)** நீட்டினால் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டு செங்கோணங்களை விட குறைவாக உள்ள பக்கத்தில் அந்த இரண்டுகளும் சந்திக்கும்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

T7J2P1

பாடம் 6

கோடுகளும் கோணங்களும் (Lines and Angles)

6.1 முன்னுரை

ஒரு கோடு வரைவதற்கு குறைந்தது இரண்டு புள்ளிகள் தேவை என்பதை நீங்கள் பாடம் 2 இல் படித்துள்ளீர். மேலும் நீங்கள் இதனுடன் சில நிபந்தனை (axioms) கற்றுள்ளீர். இவை மற்ற வாக்கியங்களை நிருபிக்க வழிவகுக்கின்றன. இந்த பாடத்தில் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் போது உறுவாகும் கோணங்களின் பண்புகளையும், மேலும் ஒரு நேர்க்கோட்டால் இரண்டு அல்லது அதற்கும் அதிகமான இணைக் கோடுகள் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும் போது உண்டாகும் கோணங்களின் பண்புகளையும் கற்போம். அடுத்தது நீங்கள் இந்த பண்புகளைப் பயன்படுத்தியும், சில நுண்ணாய்வு (deductive) காரணத்துடனும் சில வாக்கியங்களை நிருபிக்கலாம் (பிற்ச்சேர்க்கை 1 இல் பார்க்கவும்) சில செயல்பாட்டின் வழியாக இந்த மாதிரியான வாக்கியங்களை நீங்கள் முந்திய வகுப்புகளில் சரிப்பார்த்துள்ளீர்கள்.

உங்களுடைய அன்றாட வாழ்க்கையில், தளபரப்பு (உருவங்கள்) முனைகளுக்கு இடையில் பல்வேறு கோணங்கள் உருவாகிருப்பதை நீங்கள் பார்த்திருக்கின்றீர்கள். இதே போல சில வகை உருவமாதிரிகள் (models) உருவாக்க தளப்பரப்புகளை நாம் பயன்படுத்து கின்றோம் இதற்கு "கோணம்" (Angle) என்பது என்ன என்ற அறிவு பெற நமக்கு தேவைப்படுகின்றன. ஒரு வேளை நீங்கள் மூங்கில் குச்சிகளைப் பயன்படுத்தி குடிசைஉருவமாதிரி ஒன்று செய்து, பள்ளிக்கூடப் பொருட்காட்சியில் வைக்க வேண்டும் என்றால் அது எவ்வாறு செய்திருப்போம் என்று கற்பனை செய்து பார்? சில குச்சிகள் ஒன்றுக்கு மற்றொன்று இணையாகவும், சில குச்சிகள் சாய்வாகவும் வைத்திருப்போம். கட்டக்கலை நிபுணர்கள் பல அடுக்குமாடி கட்டங்களை கட்டுவதற்கான திட்ட வரைப்படங்கள் வரைந்திருப்பதை

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எப்போ தாவது பார்த்துண்டா? அவற்றில் பல்வேறு பட்ட கோணங்களில், சில கோடுகள் இணையாகவும், சில கோடுகள் குறுக்கு வெட்டாகவும் வரையப் பட்டு இருக்கும். இத்தகைய கோடுகள் மற்றும் கோணங்கள் அவற்றின் பண்புகளின் அறிவுயின்றி கட்டடங்களை அடங்கிய குடியிருப்பு திட்ட வரைப்படங்கள் வரைய முடியுமா நினைத்து பாருங்கள்?

அறிவியல் பாடத்தில், ஒளிக்கதிர் வரைந்து ஒளியின் பண்புகளை நாம் படித்திருக்கின்றோம் எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் ஊடகத்தில் இருந்து மற்றொர் ஊடகத்திற்கு ஒளிக்கதிர் நுழையும் போது ஒளியின் பிரதிப்பலிப்பு பண்பு படிக்க, நாம் இணைக்கோடுகள் மற்றும் குறுக்கு வெட்டுக் கோடுகளின் பண்பு இவற்றை பயன் படுத்துகின்றோம். ஒரு பொருளின் மீது இரண்டு அல்லது அதற்கும் அதிகமான விசைகள் செயல்படும் போது அந்த விசை களின் தொகுபயன் (மொத்த நிகர விளைவு) னை படிக்க எந்த ஒரு விசை யையும் அடையாளப் படுத்தவும், நாம் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகளால் படத்தில் குறிக்கின்றோம் அதே நேரத்தில் நீங்கள், கதிர்கள் அல்லது கோடு கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் போதும் உண்டாகும் கோணங்கள் இவற்றிற்கு இடையில் உள்ள தொடர்பு அறிந்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு கோபுரத்தின் உயர்த்தை கணக்கிடவோ அல்லது கலங்கரை "விளக்கி" லிருந்து ஒரு கப்பல் உள்ள தூரம் கண்டுபிடிக்க. பார்வை கோடுக்கும், கிடைக் கோடுக்கும் இடையே அமைந்த கோணம் ஒன்று தெரிந்திருப்பது தேவை (வேண்டும்). வடிவியலில் கோடு மற்றும் கோணம் இவற்றினை பயன்படுத்தும் எடுத்துக்காட்டுகள் பல உள்ளன.

தொடர்ந்து வரும் வடிவியல் பாடங்களில், நீங்கள் கோடுகள் மற்றும் கோணங்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி இன்னும் பல பயனுள்ள பண்புகளை தெரிந்து கொள்வீர்கள்.

முதலில் முந்திய வகுப்புகளில் கற்றுக் கொண்ட கோணம் மற்றும் கோடுகள் ஆகியவற்றிற்கு உள்ள தொடர்ப்பு, வரையறை, வார்த்தைகள் போன்றவை மீள்பார்வைக்கு எடுத்துக்கொள்வோம்.

6.2 அடிப்படை வார்த்தைகளும் வரையறைகளும் (Basic Terms and Definitions)

இரண்டு முடிவுப்புள்ளிகளுடன் இருக்கும் ஒரு கோட்டின் ஒரு பகுதி துண்டு ''கோட்டுத்துண்டு'' (Line Segment) என அழைக்கப் படுகிறது. மற்றும் ஒரு முடிவுப்புள்ளி உடன் இருக்கும் ஒரு கோட்டின் பகுதியை கதிர் என கூறுவதும் நாம் மீண்டும் நினைவுப்படுத்துவோம். கவனிக்கவும், AB என்ற கோட்டுத்துண்டை $\overline{AB}$ என்ற குறியீட்டு அடையாளத் தினாலும் மற்றும் அதன் நீளத்தை AB ஆலும் குறிக்கப் படுகிறது. கதிர் AB ஐ $\overline{AB}$

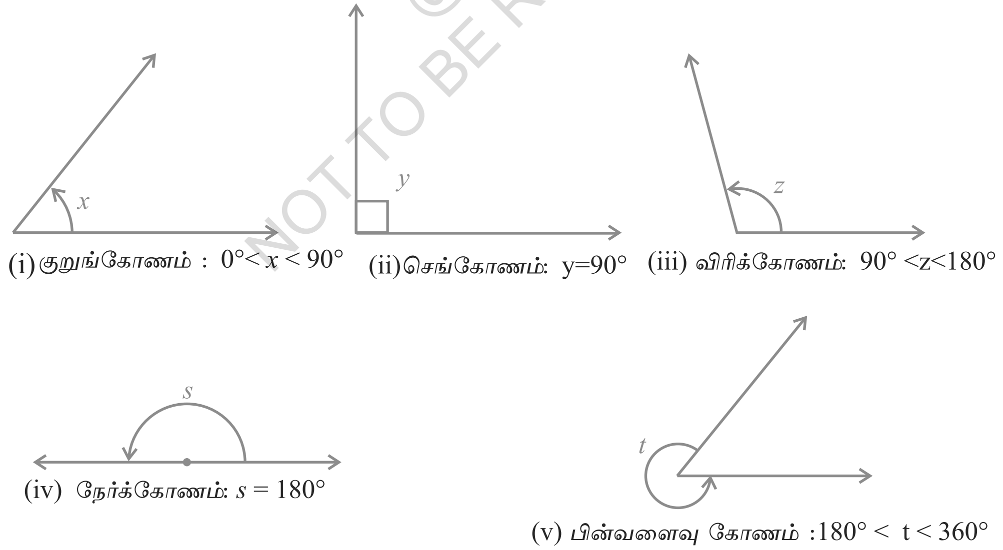
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

குறியீட்டால் மற்றும் ஒரு கோடு $\overline{AB}$ ஆல் அடையாளப் படுத்தப்படுகிறது. எவ்வாறு இருப்பினும் நாம் அடையாளக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தாமல் AB கோட்டுத்துண்டு, AB கதிர், AB நீளம், AB கோடு என்ற ஒரேமாதிரியான குறியீட்டால் குறிப்போம். AB என்பது அந்த அமைப்பிலிருந்து தெளிவான வேறுபாட்டை தருகிறது. சில சமயங்களில் கோடுகளை ஆங்கில சிறு எடுத்துக்களான *l, m, n* ஆகியவற்றால் குறிக்கிறோம்.

மூன்று அல்லது அதிகமான புள்ளிகள் ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் அவைகளை "**ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகள்**" (collinear points) என அழைக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு அமையாவிட்டால் நேர்க்கோட்டில் "**அமையா புள்ளிகள்**" என அழைக்கப்படுகிறது.

இரண்டு கதிர்கள் ஒரு பொதுவான முடிவு புள்ளியிலிருந்து தொடங்கும்போது அமைக்கப் பட்ட இடைவெளியே **கோணம்** என்பதை நினைவுப் படுத்திக் கொள்வோம். கோணத்தை உண்டாக்கும் அந்த கதிர்களை கோணத்தின் **புயங்கள்** எனவும், அந்த கதிரினுடைய முடிவு புள்ளியை கோணத்தின் **உச்சி** (Vertex) என்றும் அழைக்கின்றோம். முந்திய வகுப்புகளில் குறுங்கோணம், செங்கோணம், விரிக்கோணம், நேர்க்கோணம் மற்றும் பின்வளைவு கோணம் போன்ற பல்வகை கோணங்களைப் பற்றி படித்துள்ளீர்கள் (படம் 6.1 இல் பார்)

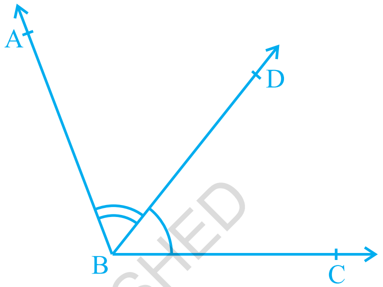
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



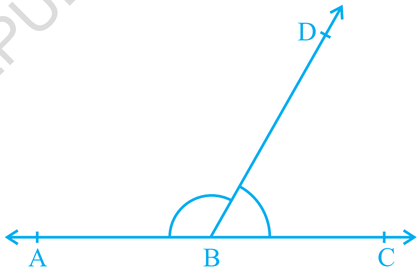
படம் 6.1 : பல்வகை கோணங்கள்

குறுங்கோணம் 0° மற்றும் 90° அளவுக்கு இடையிலும், **செங்கோணம்** சரியாக 90° க்கு சமமாகவும், 90°ஐ விட அதிகமாகவும் 180°ஐ விட

குறைவாகவும் உள்ள ஒரு கோணத்தை **விரிக்கோணம்** என்றும், அதனுடன் 180° க்கு சமமானவை **நேர்க்கோணம்** என்றும், 180° ஐ விட அதிகமாகவும் ஆனால் 360° ஐ விட குறைவாகவும் உள்ள ஒரு கோணத்தை **பின்வளைவுக் கோணம்** என்று அழைக்கப்படுவதை நினைவுக்கு கொண்டு வருவோம். மேலும் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 90° ஆக இருப்பதை **நிரப்பு கோணம்** எனவும் மற்றும் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக இருப்பதை **மிகை நிரப்பு கோணம்** எனவும் அழைக்கப் படுகின்றன.



படம் 6.2 அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள்



படம் 6.3 நேர்கோட்டுக் கோணங்களின் ஜோடிகள்

இவைகளுடன் அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களைப்பற்றி முந்திய வகுப்புகளில் படித்துள்ளீர் (படம் 6.2 ஐ பார்) இவை **அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள்** (இரண்டு கோணங்கள்) ஆகும். அவை ஒரு பொதுவான உச்சி, ஒரு பொதுவான புயம் (Arm) அல்லது பக்கம், மற்றும் பொதுவான புயத்திற்கு இரண்டு பக்கங்களிலும் பொதுவில்லாத புயங்கள் இருக்கின்றன. படம் 6.2 இல் ∠ABD மற்றும் ∠DBC என்பன அடுத்தடுத்துள்ள உள்ள கோணங்கள். கதிர் BD அவற்றின் பொதுவான புயம்; புள்ளி B என்பது அவற்றின் கோணங்கள் கதிர் BD இவற்றின் பொதுவான புயம் மற்றும் அடுத்துடுத்து B பொதுவான உச்சி, கதிர் BA மற்றும் கதிர் BC என்பன பொதுவில்லா புயங்கள். இன்னும் இந்த இரண்டு கோணங்கள் அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களாக இருக்கும் போது அவற்றின் கூடுதயானது பொது வில்லா புயங்களால் ஆன. (பக்கங்களால் ஆன) கோணத்திற்கு சமமாக எப்போதும் இருக்கும் ஆகையால்

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \cdot$$

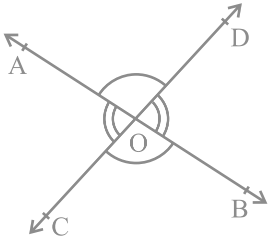
என நம்மால் எழுத முடியும்.

இவற்றைக் கவனி, ∠ABC மற்றும் ∠ABD என்பவை அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள் அல்ல ஏன்? ஏன்னெற்றால் அவற்றில் பொதுவான புயத்திற்கு ஒரே பக்கத்தில் BD மற்றும் BC என்ற பொதுவில்லா புயங்கள் (பக்கங்கள்) உள்ளன.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 3.2 இல் BA மற்றும் BC என்ற பொதுவில்லா புயங்கள் ஒரு கோட்டால் உருவாக்க படுமாயின்,. இவ்வகையில், ∠ABD மற்றும் ∠DBC ஐ நேர்க்கோட்டு கோணங்களின் சோடிகள் (Linear Pair of Angles) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று புள்ளி "O" வில் வெட்டிக் கொள்கின்ற போது உண்டாகும் குத்தெதிர் கோணங்கள் மீண்டும் நீங்கள் நினைப்படுத்திக் கொள்ளுங்களை (படம் 6.4ஐ பார்) அவைகள் இரண்டு ஜோடி **குத்தெதிர்க் கோணங்கள்** எனப்படும்.

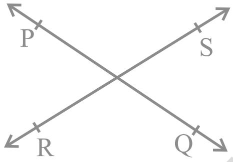


படம் 6.4: குத்தெதிர்க் கோணங்கள்

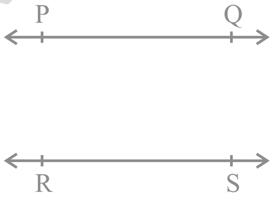
∠AOD மற்றும் ∠BOC என்பன ஒரு ஜோடி கோணங்கள் ஆகும் உங்களால் மற்றொரு ஜோடியை கண்டுபிடிக்க **முடியுமா**?

6.3 வெட்டு கோடுகள் மற்றும் வெட்டா கோடுகள்

இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகள் PQ மற்றும் RS ஒரு தாள் மீது வரையவும், அவைகள் படம் 6.5 (i) மற்றும் படம் 6.5 (ii) இல் காட்டப் பட்டது போல இரண்டு வெவ்வேறான வழிகளில் நீங்கள் வரைந்து பார்க்க முடியும்.



(i) குறுக்குவெட்டு



(ii) வெட்டா கோடுகள் (இணைக்கோடுகள்)

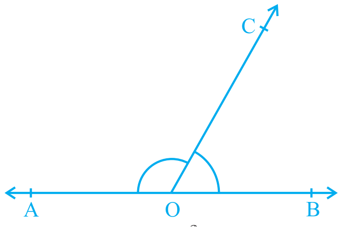
படம் 6.5: வரையப்பட்ட இரண்டு கோடுகளின் வேறுபட்ட வகைகள்

நினைவுப்படுத்திகொள்! ஒரு கோட்டில் உள்ள அடையாளக் குறியீடு கவனி. அவை இரண்டு திசைகளிலும் மடிவில்லாத வரை நீட்டப் பட்டவை. PQ மற்றும் RS என்ற கோடுகள் படம் 6.5 (i) இல் (உள்ளதுபோல்) வெட்டிக் கொள்கின்றன. படம் 6.5 (ii) இல் இணைக் கோடுகளாக இருக்கின்றன. வெவ்வேறு புள்ளிகளிலிருந்து இரண்டு செங்குத்தாய்களை இணைக்கோடுகளுக்கு இடையே வரையும் போது மற்றும் அவைகளுக்கு இடையில் பொதுவான நீளம் (இடைவெளி) இருப்பதையும் கவனிக்கவும். இந்த இரண்டு இணைக் கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள நிளத்தை (இடைவெளிதூரம்) "**சம நீளம்**" (Equal Length) உள்ளவை என அழைக்கின்றோம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.4 கோணங்களின் ஜோடிகள்

6.2 பிரிவில், நிரப்புக் கோணங்கள், மிகை நிரப்புக் கோணங்கள், அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள், கோணங்களின் நேர்க்கோட்டுச் ஜோடிகள் போன்ற சிலவற்றின்“வரையறைகளை” கற்றிந்துள்ளீர். அந்தக் கோணங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்புகள் சிலவற்றை நினைத்து பார்க்க முடியுமா? இப்போது



படம் 6.6 கோணங்களின் நேர் கோட்டு ஜோடிகள்

ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் நிற்கும்போது (அமையும் போது) உண்டாகும் கோணங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொர்பை, (உறவு) கண்டறிய நாம் எடுத்துக்கொள்வோம். படம் 6.6 இல் காட்டப்பட்டது போல, ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமையும் படி படம் வரைக. கோடு AB மற்றும் கதிர் OC என பெயரிடுக.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எந்தமாதிரியான கோணம் "O" இல் உருவாகின்றன?

அவைகள் ∠AOC, ∠BOC மற்றும் ∠AOB ஆகும்.

∠AOC +∠BOC = ∠AOB என நாம் எழுத முடியுமா? ஆம், முடியும் (ஏன்?) .....(1)

(6.2 பிரிவில் உள்ள அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களை பார்த்து ஆய்வுக்கு எடுத்துக்கொள்)

∠AOB இன் அளவு எவ்வளவு? அவை 180° ஆகும் (ஏன்?) .....(2)

(1) மற்றும் (2) இருந்து ∠AOC + ∠BOC = 180° என நீங்கள் (உங்களால்) சொல்ல முடியுமா? ஆம்! (ஏன்?) மேற்கண்ட முடிவினை கலந்தாலோசித்த பிறகு அதிலிருந்து பின்வரும்

நிபந்தனையை (axiom) நாம் கூறமுடியும்.

நிபந்தனை 6.1 : ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமையுமானால் அதனால் உருவாகும் அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.

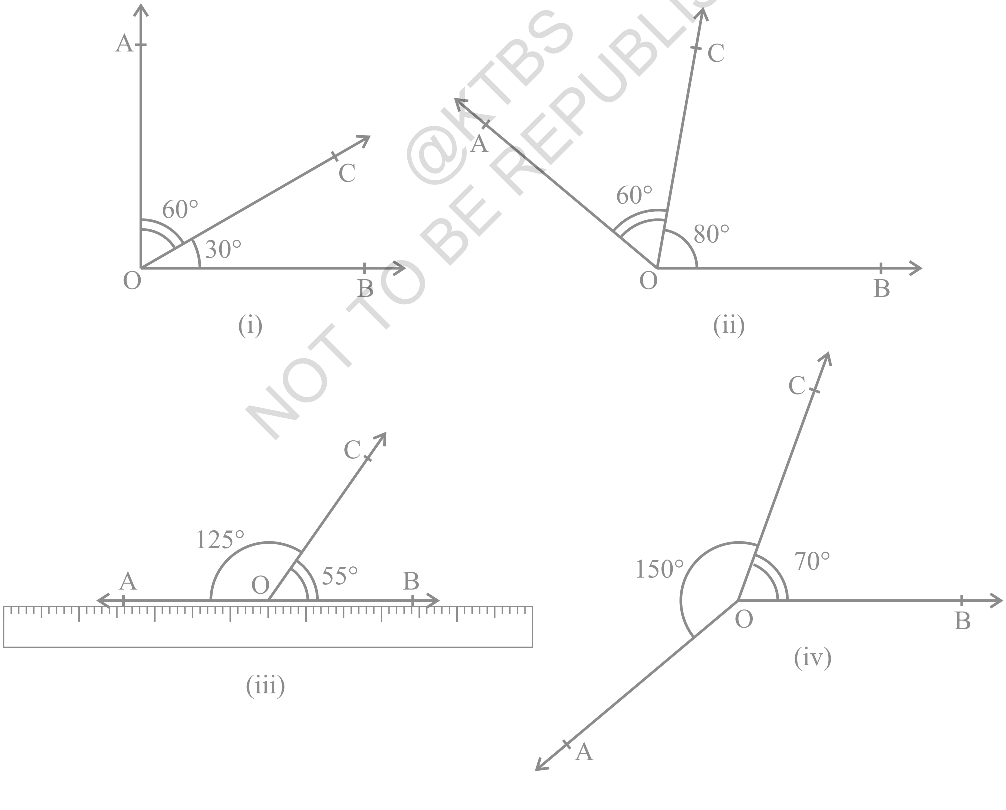
இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக இருக்கும் போது அந்த கோணங்கள் “**கோணங்களின் நேர்கோட்டு ஜோடிகள்**” என அழைக்கப்படுவதை நினைவுக்கு கொண்டு வாருங்கள்.

நிபந்தனை 6.1 இல் கொடுக்கப்ட்டவை, ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு கதிர் அமைந்துள்ளது. அக்கதிரினால் இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும் என்ற முடிவுக்கு நாம் வரலாம்.

நிபந்தனை *6.1* ஐ வேறு வழி முறையில் எழுத முடியுமா? (A) இரண்டு அடுத்துடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° இருக்குமேயானால் அவை ஒரு கோட்டின் மீது ஒரு கதிர் அமைந்திருக்கும் இவை ஒரு கோட்டால் உருவாக்கப்ட்ட பொது வில்லாத புயங்களை கொண்டிருக்கும்.

இப்போது நீங்கள் பார்ப்பது நிபந்தனை *6.1* மற்றும் வார்த்தை (A) ஒன்று மற்றொன்றின் மறுதலையாக இருப்பதை உணர்த்துகிறது.

நாம் இவற்றை ஒன்று மற்றொன்றை மாற்றத்தக்கவை என்கிறோம். வார்த்தை (A) உண்மை அல்லது உண்மையற்றதா நாம் அறிந்துகொள்ள இயலாது. எனவே சரிப்பார்க்க எடுத்துகொள். படம் 6.7 இல் உள்ளவாறு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள் பல அளவுகளில் வெவ்வேறாக வரைக. அவற்றுடன் பொதுவான புயங்கள் இல்லாதவாறு என்ற விதிமுறையை மனதில் வைத்துக் கொண்டு ஒன்றுமட்டும் வரைக இந்த பொதுவில்லா புயத்தை கொண்டுள்ள விதி முறையானது. மற்றவைகளுக்கும் பொருந்துகிறதா?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படம் 6.7 பல்வேறுவகையான அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்கள்

படம் 6.7 (iii) இல் உள்ளவை, இரண்டு பொதுவில்லா புயங்களை (பக்கங்களை) இதில் மட்டும் கொண்டுள்ளதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்கவும். அதில் விதிமுறை கடைப்பிடிக்க பட்டுள்ளதா? இதில் புள்ளிகள் A, O மற்றும் B ஒரே கோட்டின் மேல் அமைக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் கதிர் OC அதன்மீது அமைந்துள்ளன அத்துடன் $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ இதிலிருந்து வார்த்தை (A) உண்மை என்ற முடிவுக்கு நீங்கள் வரக்கூடும் ஆகையால் பின்வருபவைகளில் எந்தமாதிரியான நிபந்தனையில் உருவாக்கப் பட்டுள்ளன என்ற வார்த்தையை நீங்கள் கூற முடியும்.

நிபந்தனை 6.2: இரண்டு அடுத்தடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° இருந்தால், அதனுடைய கோணங்களின் பொதுவில்லாத புயங்கள் ஒரு நேர்கோட்டை உருவாக்கும்.

பொருத்தமான காரணத்திற்காக, மேலே உள்ள இரண்டு நிபந்தனைகளையும் சேர்த்து கோணங்களின் ''**நேர்க்கோட்டு ஜோடிகளின் நிபந்தனை**'' என்கிறோம்.

இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் போது உண்டாகும் கோணங்கள் என்ற வகையில் உள்ள கோணங்களை இப்போது பரிசோதித்தலுக்கு எடுத்துக்கொள்வோம்.

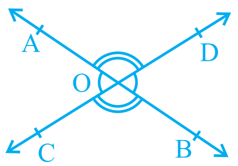
நினைவுப்படுத்துக, முந்திய வகுப்புகளில் பயின்றவை, "இரண்டு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளவதால் உண்டாகும் குத்தெதிரிக் கோணங்கள் சமம்"

இப்பொழுது அதன் முடிவுகளை நிருபிக்க எடுத்துக்கொள்வோம். பிற்ச்சோர்க்கை 1 இல் உள்ளதை பார்க்கவும், நிருபணத்தின் (ingredients) காக மற்றும் கீழேயுள்ளவற்றை நிருப்பதற்காக அவைகள் மனதில் வை.

தேற்றம் (6.1): "இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்வதனால் உண்டாகும் குத்தெரிக் கோணங்கள் சமம்''

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

நிருபணம்: மேலுள்ள வாக்கியத்தில் "இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன" என்பவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன ஆகையால். AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு கோடு கள் "O" வில் வெட்டில் கொள்வதை படம் 6.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது போல எடுத்துக்கொள் அந்த இரண்டு குத்தெதிர்க் கோண ஜோடிகளுக்கு பெயர் வைப்போம்.



படம் 6.8 குத்தெதிர்க் கோணங்கள்

பெயர்கள் (i) $\angle AOC$ மற்றும் $\angle BOD$

(ii) $\angle AOD$ மற்றும் $\angle BOC$

நாம் ∠AOC = ∠BOD மற்றும் ∠AOD =∠BOC என நிருபிக்க வேண்டும்.

இப்போது, OA கதிர்யானது CD கோட்டின் மேல் நிற்கிறது (அமைந்துள்ளது).

அப்படியென்றால் ∠AOC + ∠AOD = 180° ஆகும் .....(1)

∠AOD + ∠BOD = 180° என நம்மால் எழுதமுடியுமா? ஆம், எழுதமுடியும். (ஏன்?) .....(2)

(1) மற்றும் (2) இவற்றில் இருந்து நம்மால் எழுதமுடியும்.

∠AOC + ∠ AOD = ∠ AOD + ∠ BOD

அதிலிருந்து ∠AOC = ∠ BOD

இதேபோல், ∠AOD = ∠ BOC என்று

நிருபிக்கப்படுகிறது.

(5.2 பிரிவையும் நிபந்தனை 3 யும் பார்த்து கற்றிதல்)

இப்போது 6.1 மற்றும் நேர்க்கோட்டு ஜோடி

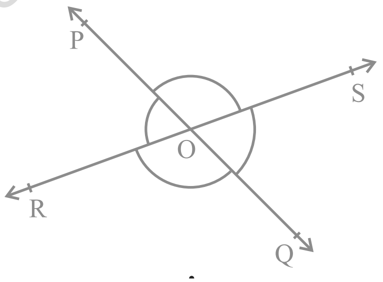
நிபந்தனைநின் அடிப்படையில் சில எடுத்துக்காட்டுகளை பரிசோதிப்பதற்காக எடுத்துக்கொள்வோம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

எடுத்துக்காட்டு 1: படம் 6.9 இல், PQ மற்றும் RS என்ற கோடுகள் "O" வில் வெட்டிக் கொள்கிறது.

∠ POR : ∠ ROQ = 5:7 என்றால்

அனைத்து கோணங்களையும் கண்டுபிடி.



படம் 6.9

தீர்வு : ∠ POR + ∠ ROQ = 180°

(கோணங்களின் நேர்க்கோட்டுச் ஜோடிகள்)

ஆனால் ∠ POR : ∠ ROQ = 5 : 7 (கொடுக்கப்பட்டவை)

அப்படியானால் ∠ POR = $\frac{5}{12} \times 180° = 75°$

இதேபோல் ∠ ROQ = $\frac{7}{12} \times 180° = 105°$

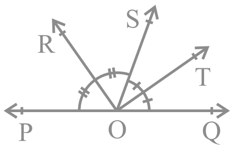
இப்போது ∠ POS = ∠ ROQ = 105° (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

மற்றும் ∠ SOQ = ∠ POR = 75° (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

எடுத்துக்காட்டு 2: *படம் 3.10* இல், கதிர் OS ஆனது POQ என்ற ஒரு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளது, கதிர் OR மற்றும் கதிர் OT ஆனவை

$\angle$ POS மற்றும் $\angle$ SOQ இன் கோண இருசம வெட்டிகள் ஆகும், $\angle$ POS $= x$ எனில் $\angle$ ROT யை கண்டுபிடி

தீர்வு: கதிர் OS ஆனது POQ கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது



படம் 6.10

ஆகையால் $\angle POS + \angle SOQ = 180^{o}$

ஆனால் $\angle POS = x$

அப்படியானால் $x + \angle SOQ = 180°$

எனவே $\angle SOQ = 180° - x$

இப்போது கதிர் OR ஆனது $\angle$POS கோண இருசமவெட்டி

அப்படியானால் $\angle ROS = \frac{1}{2} \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

இதேபோல $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x) = 90° - \frac{x}{2}$

$\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2} = 90°$

எடுத்துக்காட்டு 3: *படம் 6.11* இல், OP, OQ, OR, மற்றும் OS என்பன நான்கு கதிர்கள், எனில்

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ என நிருபி

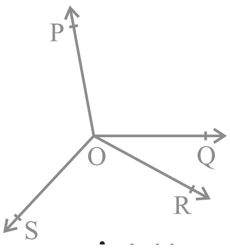
தீர்வு: நீங்கள் OP, OQ, OR, அல்லது OS இவற்றில் ஏதாவது ஒரு கதிரை புள்ளிக்கு பின்னோக்கி நீட்ட வேண்டும். கதிர் OQ வை புள்ளிக்கு பின்னோக்கி T வரை நீட்டப்பட்டதாக எடுத்துக்கொளவோம் ஆகையால் TOQ ஒரு கோடு ஆகும் (படம் **6.12** ஐ பார்) இப்போது, கதிர் OP யானது, TOQ கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது

அப்படியானால் $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ ...(1)

(நேர்க்கோட்டு ஜோடி நிபந்த்னை படி)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

இதேபோல, கதிர் OS ஆனது TOQ கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ளது அப்படியானால்
∠ TOS + ∠ SOQ = 180° ...(2)



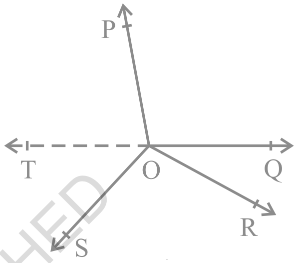
படம் 6.11

ஆனால் ∠SOQ = ∠ SOR + ∠QOR

எனவே, (2) பின்வருமாறு ஆகும்

∠TOS + ∠SOR + ∠QOR = 180° ...(3)

இப்போது, (1) மற்றும் (2) ஐ கூட்டினால் நாம் பெறுவது



படம் 6.12

∠TOP + ∠POQ + ∠TOS + ∠SOR + ∠QOR=360° ...(4)

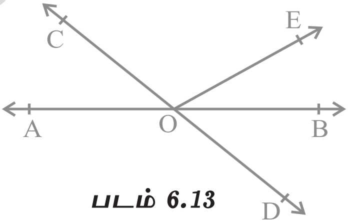
ஆனால் : ∠ TOP + ∠ TOS = ∠ POS

அப்படியொனால் (4) ஆனது.

∠ POQ + ∠ QOR +∠ SOR + ∠ POS = 360°

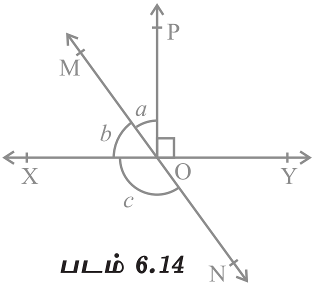
பயிற்சி 6.1

1. படம் 6.13 இல், AB மற்றும் CD என்ற கோடுகள் O வில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ∠AOC + ∠ BOE = 70° மற்றும் ∠BOD = 40° ஆக இருந்தால் ∠ BOEமற்றும் பின்வளைவு கோணம் ∠ COE ஐ கண்டுபிடி.



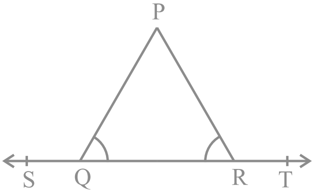
படம் 6.13

2. படம் 6.14 இல், XY மற்றும் MN என்ற கோடுகள் "O" என்ற புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. ∠POY = 90° மற்றும் $a : b = 2 : 3$ஆயின் "c" ஐ கண்டுபிடி.



படம் 6.14

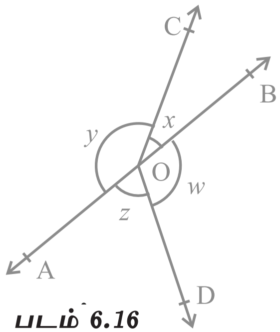
3. படம் 6.15 இல் ∠PQR =∠PRQ ஆயின் ∠PQS =∠ PRT என நிறுவுக.



படம் 6.15

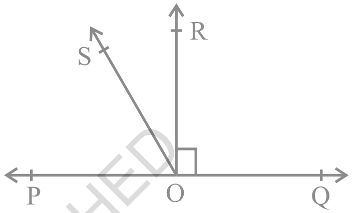
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. படம் *6.16* இல் $x + y = w + z$ எனில் AOB என்பது ஒரு கோடு என நிருபி.



படம் 6.16

5. படம் *6.17* இல் POQ என்பது ஒரு கோடு, OR கதிர் ஆனது PQ கோட்டுக்கு செங்குத்தாக உள்ளது OS என்பது மற்றொருகதிர் OP மற்றும் OR கதிர்களுக்கு இடையில் அமைக்கப் பட்டுள்ளன .



படம் 6.17

$\angle$ ROS $= \frac{1}{2}$ ($\angle$ QOS – $\angle$ POS) என நிருபி.

6. $\angle XYZ = 64^{o}$ என கொடுக்கப் பட்டுள்ளது மற்றும் XY ஆனது P என்ற புள்ளிவரை நீட்டிக்க படுகிறது. இந்த விளக்கத்திற்கு படம் வரைக. கதிர் YQ ஆனது $\angle ZYP$ ஐ இருசமமாக வெட்டுகிறது எனில் $\angle XYQ$ மற்றும் $\angle QYP$ பின் வளைவு கோணங்களைக் காண்க.

6.5 ஒரே கோட்டுக்கு இணையான கோடுகள்

இரண்டு கோடுகள் ஒரு கோட்டுக்கு இணையாக இருந்தால் இருந்தால், அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணைக்கோடுகளாக இருக்குமா? அதை சரிப்பார்க்க படம் *6.18* இல் உள்ளதுபோல எடுத்துக்கொள்வோம் அதில்.

கோடுகள்ள $m \parallel$ கோடு l மற்றும் $n \parallel$ கோடு l.

கோடுகள் l, m மற்றும் n கோடுகளுக்கு t என்ற ஒரு வெட்டுக்கோடு வரை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அதில் கோடுள் $m \parallel$ கோடு l மற்றும் $n \parallel$ கோடு l என்பது கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

அப்படியென்றால்

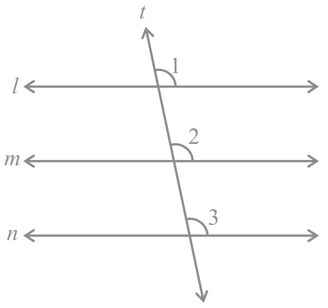
$\angle 1 = \angle 2$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 3$

(ஒத்தகோணங்கள் நிபந்தனை) எனவே $\angle 2 = \angle 3$ (ஏன்?)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆனால் $\angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ ஒன்றை விட்ட கோணங்கள் மற்றும் அவைகள் சமம்.

அப்படியானால் கோடு $m \parallel$ கோடு n என்று உங்களால் சொல்ல முடியும் (ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனையின் மறுதலை யாகும்)



படம் 6.18

இதன் முடிவை பின்வரும் தேற்றமாக சொல்ல முடியும்.

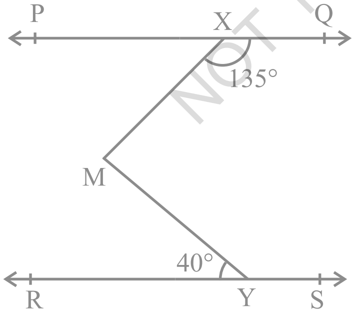
தேற்றம் 6.6: ஒரே கோட்டிற்கு இணையாக அமைந்த கோடுகளானவை ஒன்றிற்கு ஒன்று இணையாக அமையும்.

குறிப்பு : மேற்குறிப்பிட்ட பண்பானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளுக்கும் நீட்டிக்க முடியும்.

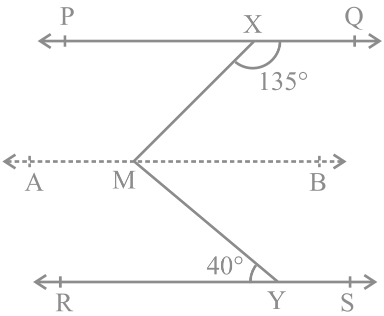
இப்போது இணைக்கோடுகளுக்கு தொடர்பான தீர்வை காண சில எடுத்துக் காட்டுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: படம் 6.19 இல், $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 135^o$ மற்றும் $\angle MYR = 40^o$ எனில் $\angle XMY$ஐ கண்டுபிடி.

தீர்வு: இங்கு, படம் 6.20 இல் காட்டப்பட்டது போல கோடு PQ க்கு இணையாக ஒரு கோடு AB யை புள்ளி M இன் வழியாக வரையவேண்டும்.



படம் 6.19



படம் 6.20

இப்போது $AB \parallel PQ$ மற்றும் $PQ \parallel RS$

அப்படியென்றால் $AB \parallel RS$ (ஏன்?)

இப்போது, $\angle QXM + \angle XMB = 180^o$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(AB||PQ, XM வெட்டுக்கோட்டின் ஒரே பக்கத்தின் மீதுள்ள உள்கோணங்கள்)

ஆனால், $\angle QXM = 135^o$

ஆகையால் $135^\circ + \angle XMB = 180^o$

அப்படியானால் $\angle XMB = 45^o$ .....(1)

இப்பொழுது $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS ஒன்றைவிட்ட கோணம்)

ஆகையால் $\angle BMY = 40^o$ .....(2)

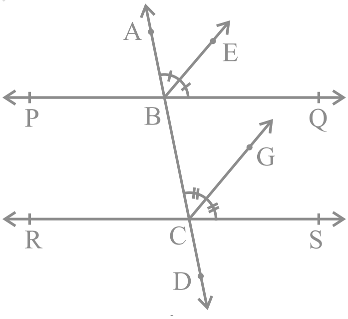
(1) மற்றும் (2) ஐ கூட்டினால் நாம் பெறுவது

$\angle XMB + \angle BMY = 45^o + 40^o$

$\therefore \angle XMY = 85^o$ இப்படி இருக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 5: ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோடானது இரண்டு கோடுகளை வெட்டும் போது உருவான ஒத்த கோணங்களின் ஒரு ஜோடியை இருசமமாக வெட்டும்கோடுகள் இணைக்கோடுகளாக இருந்தால் அந்த இரண்டு கோடுகளும் இணைக் கோடுகளாகும் - என நிருபி.

தீர்வு : படம் 6.21 இல் AD என்ற ஒரு குறுக்கு வெட்டுக் கோடானது PQ மற்றும் RS என்ற இரண்டு கோடுகளை B மற்றும் C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. கதிர் BC ஆனது $\angle ABQ$ இன் இருசமவெட்டுக் கோடு மற்றும் கதிர் CG, $\angle BCS$ இன் இரு சமவெட்டி என்பது கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.



படம் 6.21

நாம் PQ || RS என நிருபிக்க,

ஆகையால் $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ .....(1)

இதேபோன்று $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ ......(2)

ஆனால் BE||CD மற்றும் AD என்பது ஒரு குறுக்கு வெட்டு கோடு.

ஆகையால் $\angle ABE = \angle BCG$ ....(3)

(ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனை)

(1) மற்றும் (2) ஐ (3) இல் பதிலீடு செய்தால் நமக்கு கிடைப்பது.

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

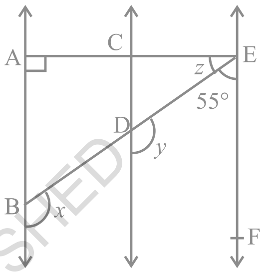
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

எனவே $\angle ABQ = \angle BCS$

ஆனால் அவைகளின் AD குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டால் PQ மற்றும் RS உடன் வெட்டும் போது உருவான ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கிறது.

அப்படியானால் PQ || RS (ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனை இன் மறுதலை ஆகும்)

எடுத்துக்காட்டு 6: *படம் 6.22 இல்,* AB || CD *மற்றும்* CD || EF *அதனுடன்* $EA \perp AB$, $\angle BEF = 55°$ *எனில் x, y மற்றும் z இன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.*



படம் 6.22

தீர்வு: $y + 55° = 180°$ *(ED என்ற குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் மேலுள்ள உள்கோணங்கள்)*

ஆகையால் $y = 180° - 55° = 125°$

மீண்டும் $x = y$ (AB || CD, ஒத்த கோணங்களின் நிபந்தனை)

அப்படியானால் $x = 125°$

இப்போது, AB || CD மற்றும் CD || EF இல் இருந்து

AB || EF

ஆகையால், $\angle EAB + \angle FEA = 180°$ *(EA என்ற குறுக்கு வெட்டுக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தின் மேல் அமைந்த உள்கோணங்கள்)*

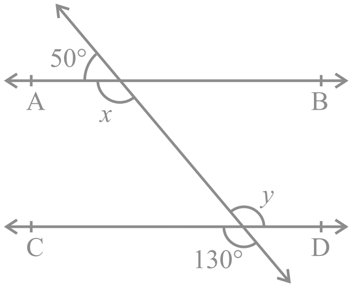
எனவே $90° + Z + 55° = 180°$

$Z = 35°$ என தருகிறது,

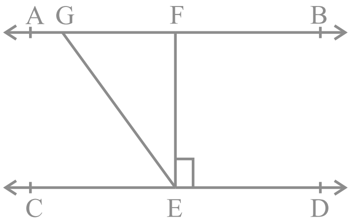
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 6.2

1. படம் 6.23 இல் x மற்றும் y இன் மதிப்புகள் கண்டுபிடி மற்றும் AB || CD எனக் காட்டுக.

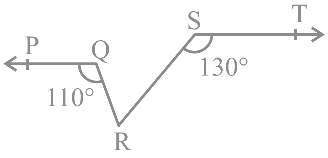


படம் 6.23



படம் 6.24

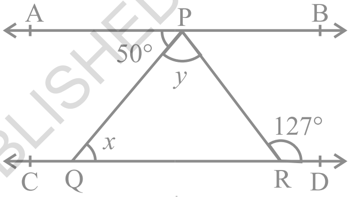
2. படம் *6.24* இல் AB || CD, EF ⊥ CD மற்றும் ∠GED =126° எனில் ∠AGE, ∠GEF மற்றும் ∠FGE இன் அளவுகள் காண்க.



படம் 6.25

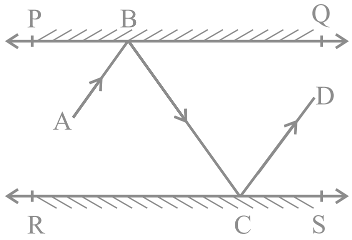
4. படம் *6.25* இல், PQ || ST, ∠PQR = 110° மற்றும் ∠RST = 130° எனில் ∠QRS ஐ கண்டுபிடி.

(குறிப்பு புள்ளி R இன்வழியாக ST க்கு இணைக்கோடுகள் வரைக)



படம் 6.26

5. படம் *6.26* இல், AB || CD, ∠APQ = 50° மற்றும் ∠PRD =127° எனில் x மற்றும் y இன் மதிப்புகளை காண்க.



படம் 6.27

6. படம் *6.27* இல் PQ மற்றும் RS என்ற இரண்டு ஆடிகளை ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவைக்கப்படுள்ளது. கதிர் AB யானது PQ மீது B இல் (பட்டு) அக்கதிர் பிரதிபலிக்கப்பட்டு BC வழியாக ஆடி RS இன் மேல் C. இல் (பட்டு) CD யின் மூலம் வெளியேறுகிறது, என்றால் AB||CD என நிருபி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.6 தொகுப்பு (Summary)

இந்த பாடத்தில் நீங்கள் பின்வரும் முக்கியமானவை கருத்துக்களை படித்துள்ளீர்.

1. ஒரு கதிர் ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்து அதனால் உருவாக்கும் இரண்டு அடுத்துள்ள கோணங்கள் கூடுதல் 180° இருகிறது மற்றும் மறுத்தலை (vice versa) யாகவும் அமைகிறது. இந்த பண்பு நேர்க்கோட்டு ஜோடி நிபந்தனை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

2. இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் அதனால் ஏற்படும் குத்தெரிக் கோண ங்கள் சமமாக உள்ளது.

3. கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு கோட்டிக்கு எந்தெந்த கோடுகள் இணையாகிறனவோ அவைகள் ஒன்றுக் கொன்று இணை கோடுகளாகும்.

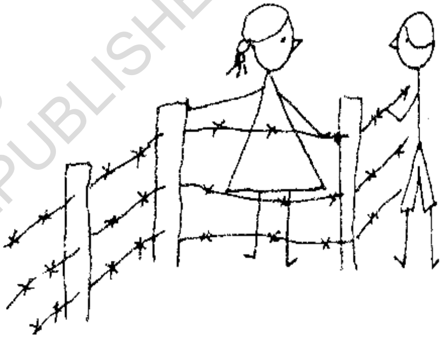
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

பிற்ச்சேர்க்கை : 1

கணிதத்தில் நிரூபணங்கள்

A 1.1 முன்னுரை

உங்களுடைய குடும்பத்தினர் ஒரு நிலத்தை வாங்கியுள்ளனர் ஆனால் அதனைச் சுற்றி வேலி போடவில்லை. உங்களுடைய அண்டை நிலத்தவர் அவருடைய நிலத்தைச் சுற்றி வேலி போட முடிவு செய்தார். உங்கள் நிலம் அவரது வேலிக்குள் ஆக்கிரமிப்பு செய்யப்பட்டுள்ளுது, என்பதை அவர் வேலி போட்ட பிறகு நீங்கள் அறிந்தீர்கள்.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

உங்கள் அண்டை நிலத்துக்காரர் உங்கள் நிலத்தை ஆக்ரமித்துள்ளார் என்பதை எவ்வாறு நிரூபிப்பீர்கள்? உங்கள் கிராமத்து பெரியவர்கள் உதவியை நாடி வேலிக்கு உட்பட்ட பகுதியை மீட்டுத்தர கேட்கலாம். சிலர் உங்கள் கருத்து சரி எனவும், சிலர் உங்கள் அண்டை வீட்டுக்காரர் கருத்து சரி எனவும் கூறலாம். நீங்கள் என்ன செய்வீர்கள்? உங்கள் நிலத்தை மீட்க எல்லோராலும் ஒத்துக்கொள்ளக்கூடிய ஒரு வழியை நீங்கள் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக அரசாங்கத்தால் அங்கீகரிக்கப்பட்ட உங்கள் கிராமத்தின் நில அளவு வரைப்படத்தை உபயோகிக்லாம் அல்லது தேவையானால் நீதி மன்றத்தில் சட்டத்தை நாடி உங்கள் கருத்து சரி என்றும் உங்கள் அண்டை நிலத்துக்காரின் கருத்து தவறு என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

மற்றொரு சூழ்நிலையை எடுத்துக்கொள்வோம். உங்கள் தாய் உங்களின் வீட்டு மின்சாரகட்டணம் ஆகஸ்ட் 2005-க்கு கட்டினார். ஆனால் செப்டம்பர் 2005 ரசீதில் ஆகஸ்ட் 2005 மாத கட்டணம் செலுத்தவில்லை என வந்துள்ளது. மின்சார துறையினர் கூறியுள்ளது தவறு என்பதை எவ்வாறு நிரூபிப்பீர்கள்?

நீங்கள் ஆகஸ்ட் மாதம் மின்சார கட்டிணம் செலுத்தி விட்டீர்கள் என்பதை நீங்கள் ஆகஸ்ட் மாத ரசீதை கட்டி நிரூபிக்கலாம்.

நம் அன்றாட வாழ்வில் சில **வாக்கியங்கள்** அல்லது கூற்றுகளை உண்மை அல்லது பொய் என்று நிரூபிக்க வேண்டியுள்ள சில எடுத்துக்காட்டுக்களை கண்டோம். பல **வாக்கியங்களை** நிரூபிக்க வேண்டிய எந்த நிர்பந்தமும் இல்லாம்ல ஒத்துக்கொள்கிறோம். ஆனால் கணிதத்தில் ஒரு கூற்று தவறு அல்லது சரி என ஒத்துக் கொள்ள கணிதத்தில் தர்க வழியில் நிரூபிக்க படவேண்டும். (சில **அடிகோள்களைத்** தவிர)

மேலும், உண்மையாகவே ஆயிரம் ஆண்டுகளாகவே கணிதத்தில் நிரூபணங்கள் உள்ளன. மேலும் அவை கணிதத்தின் அனைத்து பிரிவுகளுக்கும் மையமாகவே உள்ளன. முதல் அறிந்த நிரூபணம் கிரேக்க தத்துவ ஞானி மற்றும் கணித அறிஞர் தாலஸ் என்பவரால் அளிக்கப்பட்டது. மெசபடோமியா, எகிப்து, சீனா மற்றும் இந்தியா போன்ற பழங்கால நாகரீகங்களுக்கு கணிதம் மையம் என்று அறிந்தாலும் நாம் தற்பொழுது உபயோகிப்பது போல் நிரூபணங்களை உபயோகித்தனர் என்பதற்கு தகுந்த சான்றுகள் இல்லை.

இந்த பாடத்தில் வாக்கியம் அல்லது கூற்று என்றால் என்ன? எவ்வித காரணங்கள் கணிதத்தில் இடம் பெற்றுள்ளன? கணித நிரூபணத்தில் இருப்பவை எவை என்பதைப் பற்றி காணலாம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A 1.2 கணிதத்தில் ஒப்புகொள்ளப்பட்ட வாக்கியங்கள்

இந்த பிரிவில் கணிதத்தில் ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட **வாக்கியங்கள்?** என்பதை விளக்க முயற்சி செய்வோம், 'வாக்கியம்' என்பது ஒரு கட்டளை வாக்கியமோ அல்லது ஆச்சிரியமாக கூறும் வாக்கியமோ அன்று. மேலும் இது கேள்வி வாக்கிமோ அன்று! எடுத்து காட்டாக, ''உன்னுடைய கூந்தல் எந்த நிறம்?'' இது வாக்கியம் அல்ல, கேள்வி, ''தயவு செய்து எனக்கு தண்ணீர் எடுத்து வா'' இது பணிவு அல்லது **கட்டளை வாக்கியம், ஆனால் வாக்கியம் அல்ல.**

''சூரிய அஸ்தமனம் எவ்வளவு அழகாக உள்ளது'' இது ஆச்சரிய வாக்கியம், வாக்கியம் அல்ல.

''உன்னுடைய கூந்தலின் நிறம் கருப்பு'' என்பது வாக்கியம். பொதுவாக வாக்கியங்கள் பின்வருவனவற்றில் ஏதாவது ஒரு வகையாக இருக்கும்.

எப்பொழுதும் உண்மை

எப்பொழுதும் பொய்

தெளிவற்றவை

'தெளிவற்றவை' என்பதற்கு சில விளக்கம் தேவை. பொதுவாக ஒரு வாக்கியத்தை தெளிவற்றவை என கூறுவதற்கு இரண்டு சூழநிலைகள் உள்ளன. முதல் சூழ்நிலை கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியத்தை எப்பொழுதும் உண்மை அல்லது எப்பொழுதும் பொய் என்று நம்மால் கூறமுடியாது. எடுத்துக்காடாக ''நாளை வியாழக்கிழமை'' என்ற வாக்கியம் தெளிவற்றது சரியான வார்த்தைகள் கொடுக்கப்பட்டாத்தால் இந்த வாக்கியம் உண்மை என்றோ அல்லது பொய் என்றோ கூற முடியாது.

இரண்டாவது சூழ்நிலையானது, கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியம் பொருளைச் சார்ந்தது அது சிலருக்கு உண்மையாகவும் சிலருக்கு பொய்யாகவும் இருக்கும். எடுத்து காட்டாக ''நாய்கள் புத்திகூர்மை உடையவை'' என்பது தெளிவற்றது, ஏனெனில் சிலர் இதனை உண்மை என்றும், சிலர் இதனை பொய் என்றும் கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டு 1: பின்வரும் வாக்கியங்கள் எப்பொழுதும் உண்மை, எப்பொழுதும் பொய் அல்லது தெளிவற்றது என வகைப்படுத்து உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

1. ஒரு வாரத்தில் எட்டு நாட்கள் உள்ளன?
2. இங்கு மழை பெய்கிறது.
3. சூரியன் மேற்கில் மறைகிறது.
4. கௌரி அன்பான பெண்.
5. இரு ஒற்றைபடை முழுக்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டைப்படை எண்.
6. இரண்டு இரட்டைபடை இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகை ஓர் இரட்டைபடை எண்.

தீர்வு:

1. எப்பொழுதும் பொய், ஏனெனில் ஒரு வாரத்திற்கு 7 நாட்கள்.
2. தெளிவற்றது 'இங்கு' என்பது சரியாக விளக்கப்பட வில்லை.
3. எப்பொழொதும் உண்மை சூரியன் எப்பொழுதும் மேற்கில் மறையும்.
4. தெளிவற்றது கௌரி என்ற பெண் சிலருக்கு அன்பானவளாகவும், சிலருக்கு அன்பில்லாதவளாகவும் இருக்கலாம்.

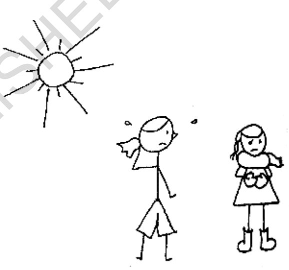
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

5. எப்பொழுதும் பொய் இரண்டு ஒன்றைபடை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஒற்றைப் படை எண்.

6. எப்பொழுதும் உண்மை. இருப்பினும் இதை நிரூபிக்க நாம் சில வேலைகளை செய்ய வேண்டியுள்ளது. பிரிவு A 1.4ல் இது நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

நாம் முதலில் கூறியபடி, வாக்கியங்களின் உண்மைகளில் நாம் அதிகம் கவனம் செலுத்துவது இல்லை. எடுத்துகாட்டாக, உன்னுடைய நண்பன் கேராளாவில் மானன்தவடியில் ஜூலை மாதத்தில் தினமும் மழை பெய்யும் என்று கூறுகிறான். ஜூலை மாதத்தில் ஒன்று அல்லது இரண்டு நாள் மழை பெய்யாவிடிலும் நீ, உன்னுடைய நண்பன் சொன்ன கூற்றை நம்புவதற்கு எல்லா சாத்திய கூறுகள் உண்டு நீ வக்கீலாக இருந்தால் தான் நீ அவனிடம் வாதாடுவாய்.

மற்றொரு எடுத்துக்காட்டில் ''இன்று மிகவும் வெப்பமாக உள்ளது'' இது நாம் அடிக் கடி உபயோகிக்கும் ஒரு வாக்கியம். நாம் இது போன்ற வாக்கியங்கள் தெளிவற்றவையாக இருந்தாலும் அவற்றை ஒத்துக் கொள்கிறோம். ''இன்று மிகவும் வெப்பமாக உள்ளது'' என்ற வாக்கியம் வேறுபட்ட மனிதர்களுக்கு வேறுபட்ட பொருளை தரும். ஏனெனில் குயூமானில் உள்ள மனிதனுக்கு மிகவும் வெப்பம் என்பது சென்னையிலுள்ள மனிதனுக்கு வெப்பமாக இருக்காது.



ஆனால் கணித வாக்கியம் என்பது தெளிவற்றவையாக இருக்க கூடாது. ''கணிதத்தில் வாக்கியம்' (கூற்று என்பது உண்மை அல்லது பொய் என்றாலும் அது ஒத்துக் கொள்ளக்கூடியதாக அல்லது ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடியதாக இருக்கும். ஒருவாக்கியம் உண்மை எனில் அது எப்பொழுதும் உண்மை இல்லாவிடில் அது பொய் வாக்கியம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $5 + 2 = 7$ என்பது எப்பொழுதும் உண்மை ஆகவே, ''$5 + 2 = 7$'' என்பது உண்மை வாக்கியம். $5 + 3 = 7$ என்பது பொய் வாக்கியம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : பின்வரும் வாக்கியங்கள் உண்மை அல்லது பொய் வாக்கியங்களாக எனக் கூறு.

1. முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் $180°$.

2. ஒன்றை விட அதிகமாக ஒவ்வொரு ஒற்றைபடை எண்ணும் பகா எண்.

3. எல்லா மெய் எண்களுக்கும் (x), $4x + x = 5x$

4. ஒவ்வொரு மெய் எண் x - இற்கும் (x), $2x > x$

5. ஒவ்வொரு மெய் எண் x - இற்கும் (x), $x^2 \geq x$

6. ஒரு நாற்கரத்தில் உள்ள எல்லா பக்கங்களும் சமம் எனில் அது சதுரம்.

தீர்வு :

1. இது உண்மை வாக்கியம். அலகு 6-ல் இது நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.
2. இது பொய் வாக்கியம் எடுத்துக்காட்டு 9 என்பது பகா எண் அல்ல.
3. இது உண்மை வாக்கியம்.
4. இது பொய் வாக்கியம் எடுத்துக்காட்டு, $2x(-1) = -2$, மேலும் -2 என்பது -1 ஐ விட பெரியது அல்ல.
5. இது பொய் வாக்கியம், எடுத்துக்காட்டாக $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ மேலும் $\frac{1}{4}$ என்பது $\frac{1}{2}$ ஐ விட பெரியது அல்ல.
6. இது பொய் வாக்கியம் ஏனெனில் சாய்சதுரத்திற்கு எல்லா பக்கங்களும் சமம். ஆகவே அது சதுரமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்ல.

கணிதத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியம் பொய் என நிரூபிப்பதற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டைக் கொண்டு அதனை நிரூபிக்க வேண்டியுள்ளது. ஆகவே (2)-ல் 9 என்பது பகா எண் அல்ல என்ற எடுத்துக்காட்டை கொண்டு 1-ஐ விட அதிகமான ஒவ்வொரு ஒற்றை படை எண்ணும் பகா எண் என்பது தவறு என காட்டுகிறது. இந்த வகை எடுத்துக்காட்டு வாக்கியத்தை எதிர்த்து கூறுவதால் இவை எதிர் உதாரணம் (Counter-Example) எனக் கூறலாம். எதிர் உதாரணம் பற்றி பிரிவு A1.5-ல் நாம் விரிவாக காணலாம்.

வாக்கியங்கள் (4), (5) மற்றும் (6) பொய் என்றாலும் அவற்றை உண்மை வாக்கியங்களாக மாற்ற அவற்றை மாற்றி எழுத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: பின்வரும் வாக்கியங்களை, உண்மை வாக்கியங்களாக அதற்கான காரணங்களுடன் மாற்றி எழுதுக.

1. ஒவ்வொரு இயல் எண் x, இற்கும் $2x > x$
2. ஒவ்வொரு இயல் எண் x, இற்கும் $x^2 \geq x$
3. ஒரு எண்ணை அதே எண்ணால் வகுத்தால் '1' என்பதே கிடைக்கும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணினால் வட்டத்தின் மீது எதிரமைந்த கோணம் 90°.

5. ஒரு நாற்கரத்தில் எல்லா பக்கங்களும் சமம் எனில் அது சதுரம்.

தீர்வு :

1. $x > 0$ எனில் $2x > x$

2. $x \leq 0$ அல்லது $x \geq 1$ எனில் $x^2 \geq x$

3. 0 ஐ தவிர மற்ற எண்களை அதே எண்களால் வகுத்தல் 1 கிடைக்கும்.

4. ஒரு வட்டத்தில் விட்டத்தினால் வட்டத்தின் மீதமைந்த புள்ளியால் எதிரமையும் கோணமானது 90°

5. ஒரு நாற்கரத்தில் எல்லா பக்கங்களும், எல்லா உட்கோணங்களும் சமம் எனில் அது சதுரம்.

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

பயிற்சி A 1.1

1. பின்வரும் வாக்கியங்கள் எப்பொழுதும் உண்மையா, எப்பொழுதும் பொய்யா அல்லது தெளிவற்றவை எனக் கூறு. உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

    1. ஒரு வருடத்தில 13 மாதங்கள் உள்ளன.
    2. தீபாவளி வெள்ளிக்கிழமை அன்று வரும்.
    3. மாகடியின் வெப்பநிலை 26°C
    4. பூமிக்கு ஒரே ஒரு சந்திரனே உள்ளது.
    5. நாய்களால் பறக்க முடியும்.
    6. பிப்பரவரி மாதத்தில் 28 நாட்களே உள்ளன.

2. பின்வரும் வாக்கியங்கள் உண்மை அல்லது பொய் வாக்கியமா எனக் கூறு உன்னுடைய விடைக்கு காரணம் கூறு.

    1. ஒரு நாற்கரத்தின் எல்லா உட் கோணங்களின் கூடுதல் 350°
    2. எல்லா மெய் எண்கள் x, இற்கும் $x^2 \geq 0$
    3. சாய்சதுரம் என்பது ஓர் நாற்கரம் ஆகும்.
    4. இரண்டு இரட்டை படை எண்களின் கூடுதல் ஓர் இரட்டை படை எண்
    5. இரண்டு ஒற்றைபடை எண்களின் கூடுதல் ஓர் ஒற்றைப்படை எண்.

3. பின்வரும் வாக்கியங்களை, உண்மை வாக்கியங்களாக மாற்றுவதற்கான உரிய நிபந்தனைகளை எழுதுக.

1. எல்லா பகா எண்களும் ஒற்றைப்படை எண்கள்.
2. ஓர் மெய் எண்ணின் இருமடங்கானது ஓர் இரட்டை படை எண்.
3. x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $3x + 1 > 4$
4. x இன் எல்லா மதிப்பிற்கும், $x^3 \geq 0$
5. ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடு என்பது கோணங்களின் இரு சம வெட்டி.

A 1.3 பகுத்தறிதல்

தெளிவான வாக்கியத்தின் உண்மையை நிலைநாட்ட உபயோகப்படுத்தப்படும் முக்கியமாக தர்கவழி பகுத்தறிதல். பகுத்தறிதல் என்ன என்பதை அறிந்து கொள்ள, நீங்கள் ஒரு புதிரை தீர்ப்பதன் மூலம் நாம் தொடங்கலாம்.

உங்களுக்கு நான்கு அட்டைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு அட்டையிலும் ஓர் எண் ஒரு புறமும் ஓர் எழுத்து மற்றொரு புறமும் அச்சடிக்கப்பட்டுள்ளது.

A	V	6	5

''அட்டையின் ஒரு புறத்தில் இரட்டைபடை எண் அச்சடிக்கப்பட்டிருந்தால் மறுபுறம் ஆங்கில உயிரெழுத்து (Vowels) மறுபுறம் அச்சடிக்கப் பட்டிருக்கும்'' என்பது கொடுக்கப்பட்ட விதி.

நீ குறைந்தபட்சமாக எத்தனை அட்டைகளை திருப்பி, கொடுக்கப்பட்ட விதி சரியா என நிரூபிப்பாய்?

எல்லா அட்டைகளையும் திருப்பி கொடுக்கப்பட்ட விதியை சரி பார்க்கலாம். ஆனால் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையில அட்டைகளைத் திருப்பி சரிபார்க்க உன்னால் முடியுமா?

அட்டையின் ஒரு புறம் இரட்டைபடை எண் எனில் மறுபுறம் ஆங்கில உயிரெழுத்து என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் ஆங்கில உயிர் எழுத்து ஒருபுறம் இருந்தால் மறுபுறம் கண்டிப்பாக இரட்டைபடை எண் என கொடுக்கப்படவில்லை. இரட்டைபடை எண் இருந்தாலும் இருக்கலாம், இல்லாமல் இருந்தாலும் இருக்கலாம். அதே போல் ஒற்றை

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படை எண் ஒருபுறம் இருந்தால் மறுபுறம் ஆங்கில மெய்எழுத்து தான் இருக்கும் என்பதும் குறிப்பிட வில்லை அதுவும் இருந்தாலும் இருக்கலாம்.

ஆகவே, நாம் **A** அட்டையை திருப்பி சரிப்பார்க்கலா! முடியாது. மறுபுறம் இரட்டை படை எண் அல்லது ஒற்றைபடை எணி இருக்கலாம். விதி எப்பொழுதும் பொருந்தும்.

5 அட்டையை திருப்பலாமா? இதையும் திருப்பி சரிபார்க்க முடியாது மறுபுறம் ஆங்கில உயிரெழுத்து இருந்தாலும் இல்லா விட்டாலும் விதி இப்பொழுதும் பொருந்தும்.

ஆகவே நீ V மற்றும் 6 என்ற அட்டைகளையே திருப்பி பார்க்க வேண்டும். Vன் மறுபுறம் இரட்டை எண் இருந்தால் விதி தவறு அதேபோல் 6-ன் மறுபுறம் ஆங்கில மெய் எழுத்து இருந்தாலும் விதி தவறு.

இந்த புதிரை தீர்க்க உபயோகித்த இதை போன்ற பகுத்தறிதல், துப்பறியும் பகுத்தறிதல் (Deductive reasoning) என்று சொல்படுகின்றன. இவ்வாறாக அழைக்கப்பட காரணம், நாம் முன்பே தர்கமுறையில் கண்டறிந்த உண்மைகளை உபயோகித்து முடிவை அடைகிறோம். எடுத்து காட்டாக, மேலுள்ள புதிரில் தர்கமுறையில் விவாதித்து நாம் V மற்றும் 6 என்ற அட்டைகளை மட்டும் திருப்பினால் போதும் என்ற முடிவிற்கு வந்தோம்.

துப்பறியும் பகுத்தறிதல் கொடுக்கப்பட்ட வாக்கியம் உண்மை வாக்கியமா என்ற முடிவிற்கு வர உதவி புரிகிறது. ஏனெனில் அந்த வாக்கியங்கள் உண்மை வாக்கியம் என அறியப்பட்டது.

எடுத்துகாட்டாக ஒரு முறை நாம் 2 ஒற்றைபடை எண்களின் பெருக்குத் தொகை ஒரு ஒற்றைபடை எண் என ஒரு முறை நிரூபித்தால் நாம் 70001 × 134563 எனபதன் பெருக்கல்பலனும் ஓர் ஒற்றைபடை எண் என்பதை பெருக்காமலே கூறி விடலாம். ஏனெனில் 70001 மற்றும் 134563 என்பவை ஒற்றை படை எண்கள்.

பல நூற்றாண்டுகளாக துப்பறியும் பகுத்தறிதல் என்பது மனிதனுடைய சிந்திக்கும் திறனில் ஒரு பகுதியாகும் மேலும் இதனை நம்முடைய தினசரி வாழ்வில் எப்பொழுதும் உபயோகிக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக சோலரிஸ் என்ற பூக்கள் முதல் நாள் வெப்பநிலை 28°க்கு அதிகமாக இருந்தால் தான் பூக்கும் ''மற்றும்'' 2005 செப்டம்பர் 15 அன்று சொலரிஸ் என்ற பூக்கள் மலர்ந்தது என்ற வாக்கியங்களை கவனிக்கவும் இவற்றை பகுத்தறித்தல் கொண்டு நான் செப்டம்பர் 14 அன்று வெப்பநிலை 28° C க்கு அதிகமாக இருந்த்து என்ற முடிவுக்கு வரலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஆனால் துரதிர்ஷ்டவசமாக நம்முடைய அன்றாட வாழ்வில் நாம் சரியான காரணங்களை உபயோகிப்பதில்லை. அநேக முடிவுகளை நாம் அடிக்கடி தவறான காரணங்களை கொண்டு எடுத்து விடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக உன்னுடைய நண்பன் உன்னைப் பார்த்து ஒரு நாள் சிரிக்கவில்லை எனில் உடனே நீ அவன் உன்மீது கோபமாக உள்ளான் என்ற முடிவிற்கு வந்து விடுகிறாய் ''அவன் கோபமாய் இருப்பதால் தான் என்னைப் பார்த்து சிரிக்கவில்லை'' என்பது சரியாக இருந்தாலும் கூட ''அவனுக்கு தலைவலி அதிகமாய் இருந்தால் என்னை பார்த்து சிரிக்கவில்லை'' என்பதும் சரியாக இருக்கும். நீங்கள் உங்களுடைய வாழ்க்கையில் பல சமயங்களில் எடுத்த முடிவுகள் ஒத்துக் கொள்ளக்கூடிய காரணங்கள் அல்லது தவறான காரணங்களா? என ஏன் ஆராய்ச்சி செய்யக் கூடாது?

பயிற்சி A1.2

1. *துப்பறியும் பகுத்தறிதலை உபயோகித்து பின்வருவனவற்றிற்கு விடையளி.*

   1. மனிதர்கள் அனைவரும் பாலூட்டிகள் எல்லா பாலூட்டிகளும் முதுகெலும்புள்ளவை இந்த இரு வாக்கியங்களை கொண்டு மனிதர்களைப் பற்றிய உன்னுடைய முடிவுகள் என்ன?
   2. ஆன்டனி என்பவர் முடி திருத்தம் செய்பவர் தினேஷ் தன்னுடைய முடியை திருத்திக் கொண்டான். இந்த இரண்டு வாக்கியங்களைக் கொண்டு, ஆன்டனியிடம் தினேஷ் முடி திருத்திக் கொண்டான் என்ற முடிவிற்கு வர முடியுமா?
   3. செவ்வாய் கிரகத்தில் உள்ளவர்கள் சிவப்பு நாக்கை உடையவர். குலாங் ஒரு செவ்வாய்கிரக வாசி, இந்த இரண்டு வாக்கியங்களைக் கொண்டு குலாங் பற்றிய உன்னுடைய முடிவு என்ன?
   4. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் 4 மணி நேரத்திற்கு மேல் மழை பெய்தால் அடுத்த நாள் வடிகால்கள் சுத்தம் செய்யப்பட வேண்டும். ஒரு நாள் 6 மணி நேரம் மழை பெய்தது. மறுநாள் வடிகால்களின் நிலை குறித்து நாம் என்ன முடிவினை கூற முடியும்?
   5. இப்படத்திலுள்ள பசுவின் பகுத்தறிதலில் உள்ள **போலி வாதத்தை** எவ்வாறு குறிப்பிடுவாய்?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. மறுபடியும் 4 அட்டைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு அட்டையிலும் ஒரு எண் ஒருபுறமும், ஓர் எழுத்து மறுபுறமும் அச்சடிக்கப்பட்டுள்ளது. எந்த இரண்டே இரண்டு அட்டைகளை திருப்பி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விதி சரியாக பொருந்துகிறது என காண்போம்?

‘‘அட்டையின் ஒரு புறம் ஆங்கில **மெய் எழுத்து** இருந்தால் மறுபுறம் ஒற்றைபடை எண் இருக்கும்.’’

B	3	U	8

A1.4 தேற்றங்கள், அனுமானங்கள் மற்றும் அடிக்கோள்கள்

இதுவரை நாம் வாக்கியங்கள் பற்றியும் அவற்றின் உண்மை தன்மை பற்றியும் விவாதித்தோம். இந்த பிரிவில் மூன்று வகை வாக்கியங்களான கணிதம் தோன்ற உதவிய தேற்றங்கள் **அனுமானங்கள்**, அடிகோள்களை எவ்வாறு வேறுபடுத்துவது என்பது பற்றியும் படிக்கலாம்.

இதற்கு முன்பு நீங்கள் பல தேற்றங்களை படித்துள்ளீர்கள்! ஆகவே தேற்றம் என்றால் என்ன? தேற்றம் என்பது உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்ட ஓர் கணித வாக்கியம் ஆகும். எடுத்துகாட்டாக பின்வரும் வாக்கியங்கள் பிரிவு A1.5-ல் நீங்கள் பார்த்த தேற்றங்கள்.

தேற்றம் A1.1 : ஒரு முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் $180°$

தேற்றம் A1.2: 2 இரட்டைபடை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டைபடை எண்.

தேற்றம் A1.3: மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை படை எண்களின் பெருக்கு தொகை 16 ஆல் வகுபடும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அனுமானங்கள் என்பது உண்மையான வாக்கியங்கள் என்று நம்மால் நம் அனுபவங்களால் ஒத்துக் கொள்ளப்பட்ட கணித வாக்கியங்கள், அனுமானங்கள் உண்மையாகவொ அல்லது (அ) பொய்யாகவும் மாறலாம். அதன் உண்மையை நிரூபித்தால் அது தேற்றங்களாகும். கணித அறிஞர்கள் சில அனுமானங்களை அதன் அமைப்பைக் கொண்டு புத்திசாலியான கணித ஊகிப்புகளை கொண்டு வந்தனர். சில அமைப்புகளை கொண்டு எந்தவித ஊகிப்பினை நம்மால் கொண்டுவர முடியும் என பார்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஏதேனும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை படை எண்களை எடுத்து கொள் பின் அவற்றை கூட்டுக: எடுத்துக்காட்டாக,

$$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, 20 + 22 + 24 = 66$$

இந்த கூட்டுத் தொகையில் ஏதேனும் அமைப்பு இருப்பதாக உன்னால் ஊகிக்க முடிகிறதா! இவற்றை பற்றிய உன் அனுமானம் என்ன?

தீர்வு: ஒரு அனுமானம்

1. 3 அடுத்தடுத்த இரட்டை படை எண்ணின் கூடுதல் ஓர் இரட்டை படை எண்.
2. மற்றொன்று, மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைபடை எண்களின் கூடுதல் 6 ஆல் வகுபடும்.

எடுத்துக்காட்டு 5: பின்வரும் எண்களின் அமைப்பை எடுத்துக்கொள் இது பாஸ்கல் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.

வரி		எண்களின் கூடுதல்
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	
8		

7 மற்றும் 8 வது வரிகளில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் பற்றிய உன்னுடைய அனுமானம் என்னவாக இருக்கும்? 21 வது வரிவயில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் என்ன? ஏதாவது அமைப்பு உனக்கு தோன்றுகிறதா? வரி n-ல் உள்ள எண்களின் கூடுதல் காண ஒரு சூத்திரத்தை ஊகிப்பாய்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

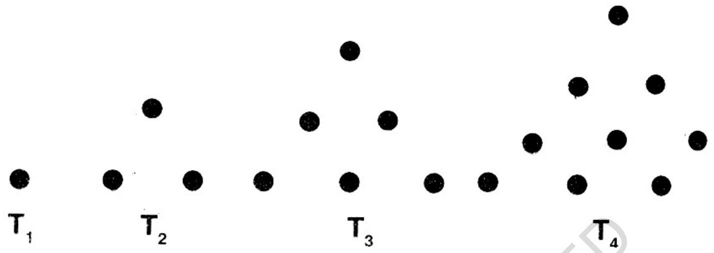
தீர்வு: *7 வது வரியில் உள்ள எண்களின் கூடுதல்* $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8 வது வரியில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 வது வரியில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2^{20}$

n வது வரியில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் $= 2^{n-1}$

எடுத்துகாட்டு 6 : பின்வரும் முக்கோண எண்கள் T_n ஐ கவனிக்கவும்.

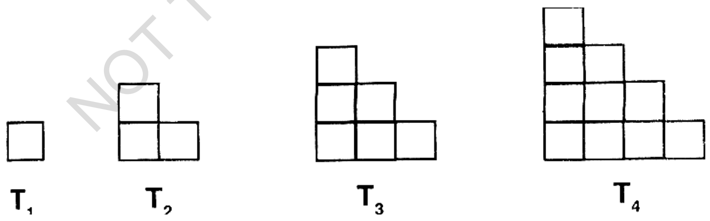


படம் A *1.1*

இங்கு புள்ளிகள் முக்கோணம் அமையுமாறு வரிசைப் படுத்தப் பட்டுள்ளது. இங்கு $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$ இன்னும் பல T_5-ன் மதிப்பு என்ன என்று உன்னால் ஊகிக்க முடிகிறதா! T_6 ன் மதிப்பு யாது? T_nன் மதிப்பு யாது?

T_n பற்றிய உன்னுடைய அனுமானத்தை அமை.

அந்த எண்களை பின்வருமாறு வரைந்தால் அது உங்களுக்கு உதவி புரியலாம்.



பட்ம A*1.2*

தீர்வு : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

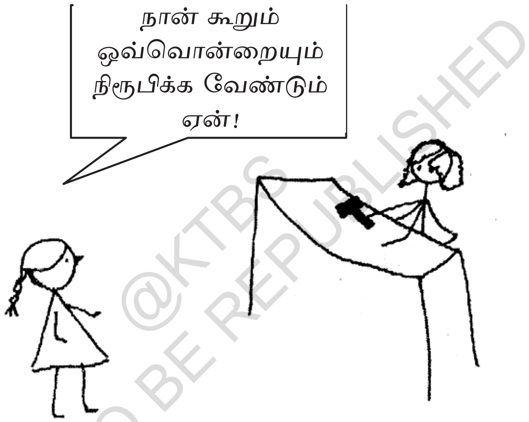
$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அனுமானத்திற்கு புகழ்பெற்ற ஓர் எடுத்துக்காட்டு (இன்னும் அதனை உண்மையா அல்லது பொய்யா என்று நிரூபிக்க முடியவில்லை) கோல்ட்பேக் அனுமானம் (Gold bach conjecture) என்று அதனை கண்டுபிடித்த கிறிஸ்டியன் கோல்ட்பேக் *(1690-764)* என்று அவர் பெயரால் அழைக்கப்படுகிறது. அந்த அனுமானம் ஆனது 4ஐ விட அதிகமான ஒவ்வொரு இரட்டைபடை எண்ணையும் இரண்டு ஒன்றைபடை எண்களின் கூடுதலாக எழுதமுடியும். இதனை உண்மையா அல்லது நீபணையா என்று நீங்கள் நீருபித்தால் நீங்கள் புகழ்பெற்றவர்களாக முடியும்.

நீங்கள் ஆச்சரியப் படலாம் - ஏன் கணிதத்தில் உபயோகிக்கும் ஒவ்வொன்றையும் நிரூபிக்க வேண்டும்? அல்லது நிரூபிக்க வேண்டாம் எனில் ஏன்?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

கணிதத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவும் உண்மை என்று ஒத்து கொள்ளப் பட்ட அல்லது இன்னும் நிரூபிக்கப்படாத சில உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது என்பதை ஒரு உண்மையே. இவை சுயதெளிவான உண்மைகள் எனப்படுகின்றன. இவற்றை எவ்வித நிரூபணமும் இன்றி உண்மை என ஒத்துக் கொள்ளலாம். இவை அடிகோள்கள் எனப்படுகின்றன. அலகு 5-ல் அடிகோள்கள் மற்றும் ஒப்புக்கொள்கைகளை பற்றி படித்துள்ளீர்கள் (தற்பொழுது அடிகோள்கள் மற்றும் ஒப்புகொள்கைளநாம் வேறு படுத்துவதில்லை)

எடுத்துக்காட்டாக, யூக்லிடின் முதல் ஒப்புக்ஒகள்கையானது.

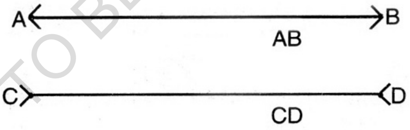
ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்ற வேறொரு புள்ளிக்கு ஒரு நேர் கோடு வரைய முடியும்.

மூன்றாவது ஒப்புக்கொள்கையானது,

ஏந்த ஒரு மையப்பள்ளியிலிருந்து, எந்த ஒரு ஆரத்திலும் வட்டம் வரைய முடியும்.

இந்த வாக்கியங்கள் முழுவதும் உண்மையான வாக்கியங்களாக தோன்றினாலும் யூக்லிட் இவற்றை உண்மையாக இருக்கலாம் என கருதினார். ஏன்? நம்மால் ஒவ்ஒன்றையும் நிரூபிக்க முடியாது. மேலும் நாம் ஏதாவது ஒரு இடத்தில் தொடங்க வேண்டியிருக்கும். நம்மால் உண்மை என ஒப்புக் கொள்ளப்பட்ட வாக்கியங்கள் நமக்கு தேவை. பின் அவற்றை கொண்டு தர்க ரீதியில் அடிகோள்களின் உதவியைக் கொண்டு நம்மால் நம் கணித அறிவை வளர்த்து கொள்ளலாம்.

ஏன் எல்லா சுய தெளிவான வாக்கியங்களையும் உண்மை என ஒத்துக் கொள்ளக்கூடாது? இதற்கு பல காரணங்கள். நமது அனுமானங்கள் தவறாக, படங்களும் அமைப்பும் ஏமாற்றலாம், வாக்கியங்கள் உண்மை என ஒத்துக்கொள்ள அவை நிரூபிக்கபட வேண்டும். எடுத்துகாட்டாக, ஒரு எண்ணை மற்றொரு எண்ணால் பெருக்க கிடைக்கும் பெருக்குத்தொகை அந்த இரண்டு எண்களை விட பெரியதாக இருக்கும். என நம்மால் பலரும் நினைத்துக் கொண்டுளோம். ஆனால் இது எப்பொழுது உண்மை அல்ல. எடுத்துகட்டாக $5 \times 0.2 = 1$, இது 5ஐ விட சிறிந்து மேலும் படம் A1–3 எந்த கோட்டுத்துண்டு பெரியது AB அல்லது CD?



படம் A*1.3*

AB பார்பதற்கு சிறியதாக தோன்றினாலும் இவை இரண்டும் ஒரே நீளமாக உள்ளன.

அடிகோள்களின் ஒத்துக்கொள்ளும் தன்மையை அறிந்தால் நீங்கள் அச்சரிய படலாம். அடிக்கோள்கள் நம் உள்ளுணர்வின் அடிப்படையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறன. மேலும் தானாக நிரூபிக்கப்பட்டது போல் தோன்றுகிறது. ஆகவே நாம் அவற்றை உண்மையாக இருக்கும் என நினைக்கிறோம். குறிப்பிட்ட அடிகோள் ஆனது பிண்ணனில் தவறாக இருக்க வாய்ப்புகள் உள்ளது. இந்த வாய்ப்புகளை எவ்வாறு காப்பாற்றுவது?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பின்வரும் வழிகளை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

1. அடிகோள்கள் மிகவும் குறைந்த எண்ணிக்கையில் இருத்தல் வேண்டும். எடுத்துக்காடாடக சில அடிகோள்கள் மற்றும் யூக்லிடின் 5 ஒப்புக்கொள்களை கொண்டு நூற்றுக்கும் மேற்பட்ட தேற்றங்களை நம்மால் உருவாக்க முடியும்.

2. அடிகோள்கள் நிலையான கருத்தை உடையவை என்பதில் உறுதியாய் இருங்கள்.

பல அடிகோள்கள் நிலையற்றவை. ஒரு அடிகோளைக் கொண்டு மற்றொரு அடிகோள் உணமை அல்ல என்பதை நிரூபிக்கலாம் பின்வரும் இரண்டு வாக்கியங்களை கவனிக்க அவை நிலையற்றவை என்பதை நாம் நிரூபிக்கலாம்.

வாக்கியம் 1 : எந்த ஒரு முழு எண்ணும் அதன் அடுத்த எண்ணிற்கு சமமாக இருக்காது.

வாக்கியம் 2: ஒரு முழு எண்ணை 0 ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது ஒரு முழு எண்.

(0 ஆல் வகுப்பது என்பது வரையறுக்க முடியாதது என்பதை நாம் அறிவோம். ஆனால் உதாரணத்திற்கு 0 ஆல் வகுக்கு முடியும் என்றும் வகுத்தால் என்ன நிகழும் என்பது பற்றியும் பார்க்கலாம்)

இரண்டாவது வாக்கியத்தில் $\frac{1}{0} = a$, a என்பது ஒரு முழு எண் எனலாம் இதைக் கொண்டால் $1 = 0$ என கிடைக்கிறது.

ஆனால் இது முதல் வாக்கியத்தை பொய்யாக்கிறது. அதாவது எந்த ஒரு முழு எண்ணும் அதன் அடுத்த எண்ணிற்கு சமமாக இருக்காது.

முதல் வாக்கியத்திலிருந்து,

$2 \neq 1$ என்ற முடிவை நாம் பெறலாம். $x^2 - x^2$ என்பதை எடுத்துக்கொள்க இதனை பின்வருமாறு இரண்டு வழிகளில் காரணப்படுத்தலாம்.

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ மற்றும்

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

ஆகவே $x\,(x - x) = (x + x)(x - x)$

இரண்டாவது வாக்கியத்திலிருந்து,

மேற்கண்ட வாக்கியத்திலிருந்து இருபுறமும் $(x - x)$ யை நீக்கினால் $x =$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$2x$ இது $2 = 1$ என்பதை தருகிறது.

ஆகவே $2 \neq 1$ என்ற வாக்கியமும் அதன் $2 = 1$ என்ற வாக்கியமும் உண்மை என நாம் அறிகிறோம். இது ஒரு கருத்து வேறுபாடு இது போன்றே ஒரு முழு எண்ணை 0 ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது ஓர் முழு எண் என்ற கருத்து வேறுபாடு தோன்றியதன் காரணம் ஓர் பொய்யான அடிகோள் ஆகும்.

ஆகவே, அடிக்கோள்களாக நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் வாக்கியம் அதிகமாக யோசித்தே தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். அவை நிலையற்ற தன்மையையும் தர்க்க கருத்து வேறுபாடுகளுக்கும் காரணமாய் இருக்கக் கூடாது என்பதில் நாம் உறுதியாக இருக்க வேண்டும். நாம் தேர்ந்தெடுக்கும் அடிக்கோள்கள் சில நேரங்களில் புதிய கண்டுப்பிடிப்புகளுக்கு, காரணமாகின்றன. அலகு 5-லிருந்து யூக்லிடின் 5 - வது ஒப்புக் கொள்கையையும், யூக்லிடியன் அல்லாத வடிவியிலின் கண்டு பிடிப்வையும்

நீங்க்ள் அறிந்துள்ளீர்கள் 5-வது ஒப்புக்கொள்கை ஒப்பு கொள்கையக இருக்க வேண்டியதில்லை. இது முதல் 4-ஒப்பு கொள்கைகளை கொண்டு நிரூபிக்கப்பட்ட ஒருத்தேற்றம்.

அடிக்கொள், தேற்றம், அனுமானம் இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள வேறுப்பாட்டை நினைவுப்படுத்தி கொண்டு இந்த பிரிவினை முடிவுச்செயலாம். அடிக்கோள் என்பது எந்த ஒரு நிரூபனமும் இன்று உண்மையென்று ஒப்புக் கொள்ளப்பட்ட ஒரு கணித வாக்கியம். அனுமானங்கள் என்பது அதன் உண்மையோ அல்லது பொய்யோ இன்னும் நிரூபிக்கப்படாத கணித வாக்கியங்கள். தேற்றங்கள் என்பது அதன் உண்மை தர்க்க ரீதியில் நிரூபிக்கப்பட்ட கணித வாக்கயிங்கள்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A1–3

1. அடுத்தடுத்த 3 இரட்டைப் படை எண்களை எடுத்துக்கொண்டு அதன் பெருக்குத் தொகையைக கணக்கிடு? எடுத்துக்காட்டாக $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$. மற்றும் பல இந்தப் பெருக்கல் பலன்களுக்கு 3 அனுமானங்கள் அமைக்க.
2. பாஸ்கள் முக்கோணத்தை அமைக்க

   வரிணை 1 : $1 = 11^0$

   வரிசை 2 : $11 = 11^1$

   வரிசை 3 : $121 = 11^2$

வரிசை 4 மற்றும் 5-யில் அனுமானங்களை எழுது. உன்னுடைய அனுமானம் பொருந்துமா? இந்த அனுமானம் வரிசை 6-க்கும் பொருந்துமா?

(3) முக்கோண எண்களை மறுபடியும் எடுத்துக்கொள்க 2 அடுத்தடுத்த முக்கோண எண்களின் கூடதுலை காண் எடுத்துக்காட்டாக $T_1 + T_2 = 4, T_2 + T_3 = 9, T_3 + T_4 = 16, T_4 + T_5 = ?$ என்தைப் பற்றி என்ன நினைக்கிறாய்? $T_{x-1} + T_n$ இதற்கு அனுமானம் எழுதுக.

4. பின்வரும் அமைப்பை கவனி

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

பின்வருவனவற்றின் அனுமானங்களை எழுது

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

உன்னுடைய அனுமானம் சரியா என சோதித்துப் பார்.

5. இந்த பாடப்புத்தகத்தில் உபயோகப்படுத்தப்பட்டுள்ள 5 அடிகோள்களை எழுது.

A 1.5 கணித நிரூபணம் என்றால் என்ன?

நிரூபணத்தில் பல்வேறு நிலைகளை நாம் காண்போம். நாம் சரிப்பார்த்தல் மற்றும் நிரூபணத்திற்கு இடையே உள்ள வேற்றுமைகளை புரிந்து கொள்வோம். கணிதத்தில் நிரூபணம் பற்றி படிப்பதற்கு முன் வாக்கியங்களை சரிபார்க்கவேண்டி கேட்கபடலாம்.

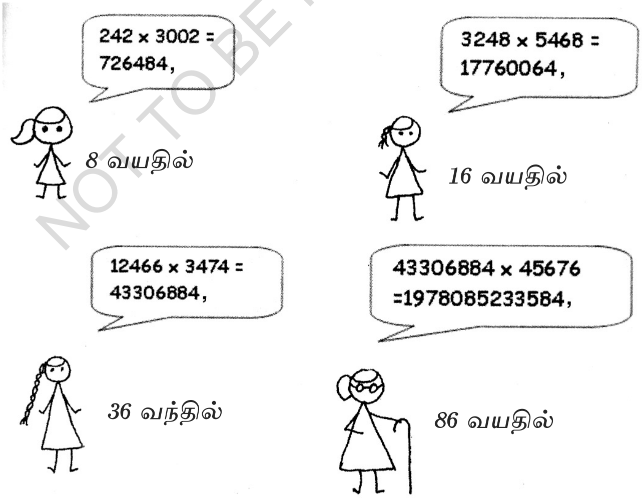
எடுத்துக்காட்டாக இரண்டு இரட்டை படை எண்களின் பெருக்குத் தொகை ஓர் இரட்டை படை எண் என்பதனை எடுத்து காட்டுகளை கொண்டு உங்களை சரிபார்க்க சொல்லலாம். ஆகவே நீங்கள் ஏதேனும் 2 இரட்டைபடை எண்களை 24 மற்றும் 2006 எடுத்துகொண்டு அவற்றின் பெருக்கல் பலன் $24 \times 2006 = 48144$ ஒரு இரட்டை படை எண்ணா என பார்க்கலாம். இதே போன்று மேலும் பல எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு செய்யலாம்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

அதே போல் உங்கள் வகுப்பில் பல முக்கோணங்களை வரைந்து அவற்றின் உட்கோணங்களின் கூடுதலை காணச் சொல்லி ஒரு செயல் கொடுக்கப்படலாம். நீங்கள் அளக்கும் பொழுது உண்டாகும் சிறு தவறுகளை விட்டு, ஒரு முக்கோணத்தில் உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° என்பதை நீங்கள் கண்டறியலாம்.

இந்த முறையில் உள்ள குறைபாடு என்ன? சரிபார்த்தல் முறையில் அநேக பிரச்சனைகள் உள்ளன. இது உங்கள் கூற்றினை உண்மை என நம்புவதற்கு உதவலாம். ஆனால் அது எல்லா சமயங்களில் உண்மை என உறுதியாக கூற முடியாது எடுத்துகாட்டாக, அநேக இரட்டை படை ஜோடிகளின் பெருக்கல் பலன் இரட்டை படை எண் என்ற நினைப்பினைதரும். கூற்றிர் எல்லா இரட்டைப் படை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டைபடை எண் என கூறுதியாக சொல்ல முடியாது. அதே போல் எல்லா இரட்டைப்டை எண்களின் ஜோடிகளை எடுத்துகொண்டு பெருக்கில் பார்ப்பது என்பதும் நடைமுறையில் சாதிக்க முடியாது. நீங்கள் இவ்வாறு பெருக்கினால் கீழே உள்ள படத்தில் உள்ள பெண் பெருத்தொகை காண்பது போல உங்கள் வாழ்க்கையின் மீதி உள்ள எல்லா நாட்களும் பெருக்கி கொண்டிருக்க வேண்டும். அதே போல் சில முக்கோணங்களின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° வராமலும் இருக்கலாம். எல்லா முக்கோணங்களின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் நம்மால் அளக்க முடியாது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



சில சமயங்களில் சரி பார்த்தல் தவறான வழிகாட்டும் எடுத்துக்காட்டாக (பயிற்சி A1.3 யின் கேள்வி-ல் உள்ள பாங்கல் முக்கோணத்தின் படி $11^5 = 15101051$ ஆனால் $11^5 = 161051$

ஆகவே சில சமயங்களில் சரி பார்த்தால் தவிர்த்து வேறு முறை உங்களுக்கு தேவைப்படலாம். மற்றொரு முறை வாக்கியத்தை (கூற்றினை) நிரூபித்தல், கணித வாக்கியத்தின் உண்மையினை தர்க்க ரீதியில் வாதிட்டு அதனை நிலை நிறுத்துவது கணித நிரூபணம் ஆகும்.

பாகம் A1.2-ல் எடுத்துக்காட்டு - 2 - ல் ஒரு கணித வாக்கியம் பொய் என நிரூபிக்க, ஒரே ஒரு எடுத்துக்காட்டு போதுமானது என நீங்கள் பார்த்துள்ளீர்கள். ஆகவே ஒரு கணித வாக்கியத்தின் உண்மைத்தன்மையினை ஆயிரம் உதாரணங்களை சோதித்து அல்லது சரி பார்பதற்கு பதிலாக ஒன்றே ஒன்று உதாரணம். அதனை பொய் என நிரூபிப்பதற்கு போதுமானது.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ஒரு கணித வாக்கியம் பொய் எனில் அதனை நிரூபிக்க ஒரே ஒரு உதாரணம் போதுமானது.

ஆகவே 7 + 5 = 12 என்பது இரண்டு ஒர்றைபடை எண்களின் கூடுதல் ஓர் ஒற்றைபடை எண் என்பதை நிரூபிக்க ஒரே ஒரு உதாரணம் போதும்.

நிரூபணத்தில் காணப்படும் அடிபடை மூலம் பொருட்களின் பட்டியலை பார்போம்.

1. ஒரு வாக்கியத்தினை நிரூபிக்க, எவ்வாறு அதனை அடைவது என்பதைப் பற்றிய தோராயமான கருத்து வேண்டும்.

2. தேற்றத்தில் கொடுக்கபட்ட விவரங்கள் சரியாக புரிந்துகொள்ள படவேண்டும் மற்றும் உபயோகப்படுத்தப்படவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக இரண்டு இரட்டை படை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டை படை எண் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள A1.2 தேற்றத்தில் இரண்டு இரட்டைபடை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே அவற்றின் பண்புகளை நாம் உபயோகப் படுத்த வேண்டும். காரணி தேற்றத்தில் (பாடம் 2) பல்லுறுப்பு கோவை $p(x)$ மற்றும் $p(a) = 0$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை நாம் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி என்பதை நிரூபிக்க பயன்படுத்த வேண்டும். அதேபோல் காரணி தேற்றத்தின் மறுதலையில் $(x - a)$ என்பது $p(x)$ ன் ஒரு காரணி மற்றும் $p(a) = 0$ என்று நிரூபிக்க பயன்படுத்த வேண்டும்.

தேற்றத்தினை நிரூபிக்க நாம் அமைப்புகளை பயன்படுத்தலாம். எடுத்துகாட்டாக முக்கோணத்தின் கூடுதல் 180° என நிரூபிக்க முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியில் அதன் எதிர்பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு நேர் கோடு வரைந்து இணை கோடுகளின் பண்புகளைக் கொண்டு நிரூபிக்கலாம்.

3. தொடர்ச்சியான கணித வாக்கியங்களினை கொண்டே நிரூபிணம் அமைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வாக்கியமும் தர்க ரீதியில் அதன் முந்தைய வாக்கியத்திலிருந்து அல்லது அடிகோள்களிலிருந்து கருதி கோள்களைக் கொண்டு கண்டறியப்படுகிறது.

4. தொடர்ச்சியான கணித உண்மை வாக்கியங்களின் முடிவானது தர்க்க் ரீதியில் சரியான வரிசையில், எதனை நாம் நிரூபிக்க வேண்டுமோ, அதாவது, தேற்றம் எதனை உண்மை எனக்கூறுகிறதோ, அது வரையில் கொண்டு செல்ல வேண்டும்.

இந்த உட்பொருட்களை புரிந்து கொள்ள நாம் தேற்றம் A1.1 ஐ பகுத்தறியலாம். நீங்கள் முன்னமே பாடம் 6-ல் இந்த தேற்றத்தைப் படித்துள்ளீர்கள். நிரூபணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு வாக்கியமும் தர்க்க ரீதியில் அமைக்கப்பட்டது. இரண்டு கோணங்கள் பார்ப்பதற்கு ஒரே மாதிரி இருப்பதால் அவை இரண்டும் சமம். அல்லது ''இரண்டு நேர் கோடுகள் அவை ஒன்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால் கோணம் 90°'' போன்ற வாக்கியங்களை மாணவர்கள் அடிக்கடி கூற கேட்டிருக்கிறோம். நீங்கள் பார்பதைக் கொண்டு ஏமாற்றப்படலாம் என்பதில் கவனமாய் இருக்க வேண்டும் (படம் A 1.3 நினைவிற்கொள்)

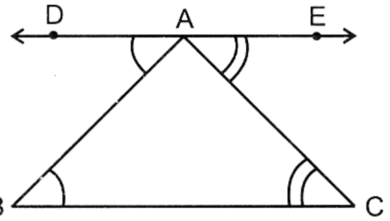
நாம் இப்பொழுது தேற்றம் A1.1க்குச்செல்லலாம்.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

தேற்றம் A1.1: முக்கோணத்தின் உட்கோணத்தின் கூடுதல் 180°

நிரூபணம் : ΔABC ஐ எடுத்துகொள் (படம் A*1.4*ஐ கவனி)

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ என நிரூபிக்க வேண்டும். .....*(1)*



படம் A*1.4*

புள்ளி A-ல் BC க்கு இணையான கோடு DE ஐ வரைக ......*(2)*

DE என்பது BC க்கு இணை மற்றும் AB ஒரு குறுக்கு வெட்டி

ஆகவே $\angle DAB$ மற்றும் $\angle ABC$ என்பவை ஒன்று விட்ட கோணங்கள் ஆகவே பாடம் 6-ல் உள்ள தேற்றம் 6-ன் படி இக்கோணங்கள் சமம்......(3)

அதேபோல், $\angle CAE = \angle ABC$ .....(4)

ஆகவே, $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ .....(5)

ஆனால், $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ஏனெனில் அவை ஓர்நேர்கோட்டை உண்டாக்குகின்றன.

ஆகவே

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

படி 1: நமது தேற்றம் முக்கோணத்தின் பண்புகளோடு தொடர்பு உடையது ஆகையால் நாம் முக்கோணத்தில் இருந்து தொடங்கலாம்.

படி 2: இது முக்கிய யோசனை. இந்த தேற்றத்தை நிரூபிக்க எவ்வாறு தொடங்குவது என்பதை யோசிக்க வேண்டும். வடிவியல் நிரூபணங்களுக்கு நமக்கு உரைதல்கள் / அமைப்புகள் தேவைப்படும்.

படி 3 மற்றும் 4: மேலும் DE என்பது BC க்கு இணை (அமைப்பு) என்ற கருத்தை கொண்டு நாம் $\angle DAE = \angle ABC$ மற்றும் $\angle CAE = \angle ACB$ எனலாம்.

முன்பே நிரூபித்த தேற்றம் 6.2-ல் கூறியுள்ளபடி இரண்டு இணைகோடுகள் ஒரு குறுக்கு வெட்டியில் வெட்டப்படும் பொழுது உண் டாகும் கோணங்கள் சமம்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

படி 5: நாம் யூக்லிட் அடிகோள் (படம் 6) அதாவது சமமானவைகளை சமமானவற்றோடு கூட்டினால் கிடைக்கும் மொத்தமும் சமம் என்பதைக் கொண்டு $\underline{|ABC} + \underline{|BCA} + \underline{|ACB} = \underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE}$.

அதாவது முக்கோணத்தின் கூடுதல் நேர்கோட்டின் மீதுள்ள கோணங்களின் கூடுதலுக்கு சமம்.

படி 6 : இங்கு பாடம் 6-ல் உள்ள அடுத்துள்ள கோணங்கள் அடிக்கோளைக்கொண்டு அதாவது ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் கோணங்களின் கூடுதல் 180° என்பதை கொண்டு, $\underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE} = 180^\circ$ எனலாம்.

படி 7: யூக்லிட் இன் அடிகோள் அதாவது ‘‘இருவெவ்வேறு பொருட்கள் ஒரே பொருளுக்கு சமமானால் அவை இரண்டும் ஒன்றுகொன்று சமம்’’ என்பதை கொண்டு

$\underline{|ABC} + \underline{|BCA} + \underline{|ACB} = \underline{|DAB} + \underline{|BAC} + \underline{|CAE} = 180^\circ$ என்ற முடிவிற்கு வரலாம்.

படி 7 ல் உள்ளதே, இந்த தேற்றத்தில் நாம் நிரூபிக்க வேண்டியது ஆகும். இப்பொழுது A1.2 மற்றும் A1.3 தேற்றங்களை அவற்றை ஆராய்ச்சி செய்யாமல் நாம் இப்பொழுது நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் A1.2 : இரண்டு இரட்டைபடை இயல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டைபடை எண்

நிரூபிணம் : x மற்றும் y என்பவை இரண்டு இரட்டை படை இயல் எண்கள். என்க

xy என்பது ஓர் இரட்டை படை எண் என நிரூபிக்கப்பட வேண்டும்.

x மற்றும் y என்பவை இரட்டைபடை எண எனில் அவை 2 ஆல் வகுபடும் $x = 2m$ மற்றும் $y = 2n$ எனக் கொண்டால் m மற்றும் n என்பன ஏதேனும் இரண்டு இயல் எண்கள். $xy = 4mn$ என்பது 2 ஆல் வகுபடும் ஆகவே xy இரண்டால் வகுபடும்.

தேற்றம் A1.3: அடுத்தடுத்த மூன்று இரட்டை இயல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் 16 ஆல் வகு படும்.

நிரூபணம் : இயல் எண் n எனில் அடுத்தடுத்த மூன்று இரட்டை எண்கள் $2n$, $2n + 2$ மற்றும் $2n + 4$ என்ற வடிவில் இருக்கும். இவற்றின் பெருக்கல் பலன் $2n(2n + 2)(2n + 4)$ ஆனது 16-ல் வகுபடும் என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

இப்பொழுது $2n\ (2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2x\ (n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n\ (n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$

இப்பொழுது நம்மிடம் **2** விதங்கள் உள்ளன. ஒன்று 'n' என்பது ஒர்றைபடை எண் அல்லது இரட்டை படை எண். ஒவ்ஒரு விதத்தையும் சோதிக்கலாம்.

'n' என்பது இரட்டைபடை எண் எனில் n = 2m என்பது ஒரு இரட்டை படை எண் ஆகவே,

$2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n\ (n + 1)(n + 2) = 16\text{m}\ (2\text{m} + 1)(2\text{m} + 2)$

ஆகவே $2n(n + 2)(2n + 4)$ என்பது **16** ஆல் வகுபடும்.

இரண்டாவது விதம், n என்பது ஓர் ஒற்றைபடை எண் எனில் $n + 1$ என்பது ஓர் இரட்டை படை எண். மேலும் $n + 1 = 2r$, r என்பது இயல் எண் என எழுதலாம்.

ஆகவே, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)\ (n + 2)$

$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$

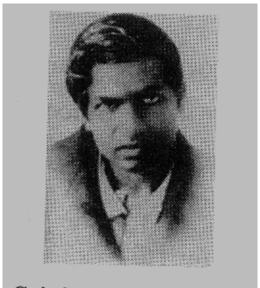
$= 16r\ (2r - 1)(2r - 1)$

ஆகவே $2n\ (2n + 2)(2n + 4)$ என்பது **16** ஆல் வகுபடும். ஆகவே இரண்டு விதங்களிலும் மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைபடை எண்களின் பெருக்கல் பலன் **16**ல் வகுபடும் என்பது காட்டப்பட்டு உள்ளது.

கணித வல்லுனர்கள் எவ்வாறு முடிவை கண்டறிந்தர்கள் பற்றும் எவ்வாறு நிரூபணத்தை எழுதினார்கள் என்பதற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டினை பற்றிய சில குறிப்புகளுடன் இந்தப்பாடத்தினை முடிக்கலாம். மேலே குறிப்பிட்டபடி ஒவ்வொரு நிரூபணமும். ஒரு முக்கிய குறிப்பு (ஒன்றைவிட அதிகமா) உண்டு ஒவ்வொரு கணதவல்லுஞர்களின் யோசிக்கும் வழி மற்றும் முடிவுகளை கண்டறிதல் சுய அறிவை அடிப்படையாக கொண்டது கணித அறிஞர்களுக்கு நிரூபணம் தானாகவே கிடைத்ததாகும். ஒரு கணித அறிஞர் தன்னுடைய முடிவை அல்லது சரியான நிரூபணத்தை அடைவதற்கு பல முறைகளில் யோசிக்க வேண்டும். தர்க்க ரீதியில் யோசிக்க வேண்டும் உதாரணங்கள் பலவற்றை சிந்திக்க வேண்டும். எல்லா விவாதங்களும் ஒன்றாக சேர்ந்து ஒரு புதிய நிலை தோன்றுதலே நிரூபணம் ஆகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

புகழ்பெற்ற இந்திய கணித அறிஞர் ஸ்ரீநிவாச இராமனுசரின் பல கூற்றுகள் உண்மை என கூறப்பட்டவை. அவை அவருக்கு தோன்றிய உள்ளணர்வினாலே கூறியவை என்பதை நாம் கூற பெருமைப் பட வேண்டும். அக் கூற்றுகள் அனைத்தும் உண்மை என்றும், புகழ் பெற்ற தேற்றங்கள் எனவும் மாறியவை, உலகில் உள்ள கணித அறிஞர்கள் இன்னும் அவருடைய கருத்துக்களை நிரூபிக்கவும் அல்லது (பொய் என்று நிரூபிக்கவும்) போராடி வருகிறார்கள்.



Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

பயிற்சி A1.4

1. பின்வரும் வாக்கியங்களை பொய் என நிரூபிக்க எதிர் உதாரணங்களைத் தருக.

   (i) இரண்டு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில், அந்த முக்கோணங்கள் சர்வசமம்.

   (ii) எல்லா பக்கங்களும் சமமாக உள்ள நாற்கரம் ஓர் சதுரம்.

   (iii) எல்லா கோணங்களும் சமமாக உள்ள நாற்கரம் ஓர் சதுரம்.

   (iv) மெய் எண்கள் a மற்றும் b எனில் $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

   (v) n என்பது மிகை முழுக்களை குறிக்கிறது எனில் $n^2 - n + 41$ என்பது ஒரு பகா எண்.

   (vi) எல்லா முழு எண்களுக்கும் $n^2 - n + 41$ எனில், n என்பது ஓர் பகா எண்.

2. பிரிவு A1.5ல் கூறியுள்ளபடி உன்னுடைய விருப்பமான நிரூபணத்தை எடுத்துக்கொண்டு ஒவ்வொரு வரியையும் ஆய்வு செய். (கொடுக்கப்பட்டது எது, எது நிரூபிக்கபட வேண்டியது, எந்த அடிகோள்கள் மற்றும் தேற்றங்கள் உபயோகப்படுத்தப்பட்டுள்ளன மற்றும் பல)

3. இரண்டு ஒற்றைப்படை எண்களின் கூடுதல் இரட்டை படை எண் என நிரூபி.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. இரண்டு ஒற்றைபடை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் ஒற்றைபடை எண் என நிரூபி.

5. மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை படை எண்களின் கூடுதல் 6 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.

6. $y = 2x$ என்ற சமன்பாட்டிற்கான நேர்கோட்டின் மீது எண்ணற்ற புள்ளிகள் உள்ளன என நிரூபி.

   (குறிப்பு $(n, 2n)$ என்ற புள்ளியினை எடுத்துக்கொள்க) இதில் n என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு)

7. உன்னுடைய நண்பன், உன்னை ஓர் எண்ணை நினைத்துக் கொள்ளச் சொல்லி பல செயல்களை செய்யச் சொல்லி, நீ நினைத்த எண்ணை அறியாமலே, கடைசியில் நீ பெற்ற விடையைக் கூறுவான். இங்கு இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகள் உள்ளன. அவற்றை சோதித்துப் பார்.

   (i) ஓர் எண்ணை நினைத்துக் கொள். அதனை இருமடங்காக மாற்று. ஒன்பதை கூட்டு நீ நினைத்த எண்ணை கூட்டு, மூன்றால் வகு, 4ஐ கூட்டு, நீ நினைத்த எண்ணை கழி உன்னுடைய விடை ஏழு.

   (ii) ஏதேனும் மூன்று இலக்க எண்ணை எழுது, (எடுத்துக் காட்டாக 425). அதே எண்ணை இரண்டு முறை எழுதி ஆறு இலக்க எண்ணாக மாற்று, (425425). உன்னுடைய புது எண் 7, 11 மற்றும் 13 ஆல் வகுபடும்.

A1.6 தொகுப்பு

இந்த பிற்சேற்கையில் நாம் பின்வரும் கருத்துக்களை படித்துள்ளோம்.

1. கணிதத்தில் வாக்கியம் அல்லது கூற்று என்பது எப்பொழுதும் உண்மை அல்லது எப்பொழுதும் பொய்யாக இருந்தால் ஒத்துக் மட்டுமே கொள்ளப்படும்.

2. கணித வாக்கியம் என்பது பொய் என நிரூபிக்க ஒரே ஒரு எதிர் உதாரணம் போதும்.

3. அடிகோள்கள் என்பவை எவ்வித நிரூபணமின்றி உண்மை என ஒத்துக் கொள்ளப்பட்ட கூற்றுகள்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. அனுமானங்கள் என்பவை நமது உர்ளுணர்வினால் உண்மை என்று நம்பப்பட்ட இன்னும் நிரூபிக்கப் படாத வாக்கியங்கள்.

5. உண்மை என நிரூபிக்கப்பட்ட கணிதவாக்கியமே தேற்றம் எனப்படும் உண்மை நிரூபிக்கப் படுவதே தேற்றம்.

6. கணித வாக்கியத்தை நிரூபிக்க உதவும் தர்க்க முறை துப்பறியும் பகுத்தறிவு.

7. தொடர்ச்சியான கணித கூற்றுகளைக் கொண்டே நிரூபணம் அமைகிறது. நிரூபணத்தின் ஒவ்வொரு வாக்கியமும் முன்பே அறிந்த வாக்கியங்களிலிருந்து முன்பே நிரூபிக்கப்பட்ட தேற்றங்களிலிருந்து அல்லது அடிகோள்கள் அல்லது அனுமானங்களிலிருந்தது எழுதப்பட்டது.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

விடைகள்/குறிப்புகள்

பயிற்சி 1.1

1. ஆம், $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ இன்றும் பல, பகுதி q ஐ எதிர் (குறை) முழு எண் என கொள்ளலாம்.

2. 3 மற்றும் 4 க்கு இடையே முடிவில்லா விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

   அவைகளை தேர்ந்தெடுக்கும் ஒரு வழி $3 = \frac{21}{6+1}$ மற்றும் $4 = \frac{28}{6+1}$

   ஆகவே ஆறு எண்கள். $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7,}, \frac{27}{7}$.

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ ஆகவே ஐந்து விகிதமுறு எண்கள் $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$.

4. (i) உண்மை, முழு எண்களின் சேகரிப்பு என்பது இயல் எண்களைக் கொண்டிருக்கும்.

   (ii) தவறு எடுத்துகாட்டாக, -2 என்பது ஓர்முழு எண் அல்ல.

   (iii) தவறு, எடுத்துக்காட்டாக் $\frac{1}{2}$ என்பது விகிதமுறு எண் ஆனால் ஓர் முழு எண் அல்ல.

பயிற்சி 1.2

1. (i) உண்மை, விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் வகிதமுறா எண்களின் தொகுப்பே மெய் எண்கள் ஆகும்.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

(ii) பொய், எந்த ஒரு இயில் எண்களின் விகிதமுறு வர்கமூலம் எதிர் எண்ணாக இருக்காது..

(iii) பொய், 2 என்பது மெய் எண் ஆனால் விகிதமுறா எண் அல்ல.

2. பொய், எடுத்துகாட்டாக $\sqrt{4}=2$, என்பது விகிதமுறு எண்.

3. படம் 1.8ல் கொடுக்கப்பட்ட முறையில் மீண்டும் மீண்டும் செய்தால் முதலில் $\sqrt{4}$ பின் $\sqrt{5}$ கிடைக்கும்

பயிற்சில் 1.3

1. (i) 0.36 முடிவுறு

(ii) $0.\overline{09}$, முடிவுறு, திரும்ப வருதல்

(iii) 4.125 முடிவுறு

(iv) $0.\overline{230769}$ முடிவுறாது, திரும்ப வருதல்

(v) $0.\overline{18}$ முடிவுறாது, திரும்ப வருதல்

(vi) 0.8225 முடிவுறு

2. $\frac{2}{7}=2\times\frac{1}{7}=0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7}=3\times\frac{1}{7}=0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7}=4\times\frac{1}{7}=0.\overline{5714258}$,
$\frac{5}{7}=5\times\frac{1}{7}=0.\overline{714285}$, $\frac{6}{7}=6\times\frac{1}{7}=0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [$x=0.666......$ என்க. ஆகவே $10\ x=6.666......$அல்லது $10x = 6+x$ அல்லது $x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (ii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [$x=0.9999......$ என்க ஆகவே $10x + 9.9999........$ அல்லது $10x = 9 + x$ அல்லது $x=\frac{9}{9}=1$

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ன் பகா காரணிகள் இரண்டின் அடுக்குகளிலோ அல்லது 5-ன் அடுக்குகளிலோ அல்லது இரண்டுலுமோ இருக்கும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. 0.75075007500075000075........, 0.767076700767000767 ....

, 0.80800800080008 ....

9. (i) மற்றும் (v) விகிதமுறா (ii), (iii) மற்றும் (iv) விகிதமுறு

பயிற்சி 1.4

1. (i) விகிதமுறா (ii) விகிதமுறு
   (iii) விகிதமுறு (iv) விகிதமுறா
   (v) விகிதமுறா

2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6
   (iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. கருத்து வேறுபாடு இல்லை. நீலத்தை நீங்கள் ஸ்கேல் மற்றும் வேறு அளத்தியினால் அளந்தால் உங்களுக்கே தோராயமன விகிதமுறு எண் மதிப்பு கிடைக்கும். ஆகவே அல்லது d விகிதமுறா எண் என்று கூற முடியும்.

4. படம் 1.17ஐ ஒப்பிடுக.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$
   (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

பயிற்சி 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8
   (iv) $\frac{1}{5}\left[125^{-\frac{1}{3}}=\left(5^{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{5}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 2.1

1. (i) மற்றும் (ii) ஒரு மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்பு கோவைகள்

   (v) மூன்று மாறியை கொண்ட பல்லுறுப்பு கோவைகள்.

   (iii) (iv) பல்லுறுப்பு கோவைகள் அல்ல. ஏனெனில் மாறியின் அடுக்கு முழு எண் அல்ல.

2. (i) 1 (ii) −1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0.

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (மேலும் பல பல்லுறுப்பு கோவைகளை மாறுபட்ட குணகங்கள் கொண்டு எழுதலாம்)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) இருபடி (ii) முப்படி (iii) இருபடி (iv) ஒருபடி

   (v) ஒருபடி (vi) இருபடி (vii) முப்படி

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 2.2

1. (i) 3 (ii) −6 (iii) −3
2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4, (iii) 0, 1, 8 (iv) −1, 0, 3
3. (i) ஆம் (ii) இல்லை (iii) ஆம் (iv) ஆம்

   (v) ஆம் (vi) ஆம்

   (vi) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ன் மதிப்பு 0 ஆனால் $\frac{2}{\sqrt{3}}$ என்பது பல்லுறுப்பு கோவையின் பூச்சியம் அல்ல.

   (viii) இல்லை

4. (i) − 5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

   (v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-d}{c}$

பயிற்சி 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$

(iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$

(v) $\frac{27}{}$

2. $5a$

3. இல்லை மீதி 0 இல்லையாதலால்

பயிற்சி 2.4

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$

(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984.

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$

(iii) $\left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$.

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 17xy - 17xy - 2yz + 4xz$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12yz + 12yz - 8xz$

(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{av}{4} - b + \frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$

(ii) $\left(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

(ii) $\left(-\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z}\right)\left(-2\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z}\right)$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$

(iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$

(iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$ (v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y+52)\left(9y^2+25z^2-15yz\right)$

(ii) $\left(4m-7n\right)\left(16m^2+49m^2+28mn\right)$

11. $(3x+y-2)\left(9n^2+y^2+2^2-3xy-yz-3xz\right)$.

12. RHS ஐ சுருக்குக

13. முற்றொருமை VIII ல் $x+y+z=0$ என பிரிதியிடு.

14. (i) −1260. A = – 12, $b=7$, $c=5$ என்க, இங்கு $a+b+c=0$ கேள்வி **13** ல் உள்ள விடையை உபயோகி.

(ii) 16380

15. (i) ஒரு வரக்கூடிய விடை நீளம் = $5a-3$, அகலம் = $5a-4$

(ii) ஒரு வரக்கூடிய விடை நீளம் = $7y-3$, அகலம் = $5y+4$

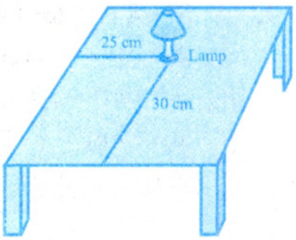
16. (i) ஒரு வரக்கூடிய விடை : $3, x$, மற்றும் $x-4$.

(ii) ஒரு வரக்கூடிய விடை: $4k, 3y+5$. மற்றும் $y-1$

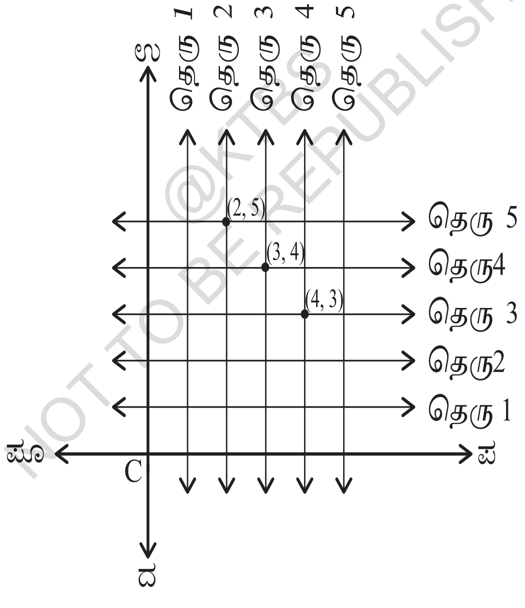
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 3.1

1. மேசையை தளம் என்று கருதி விள்க்கை புள்ளி என்றும் கொள்க. மேசையில் இரு செங்குத்து முளைகளை எடுத்துக் கொள்க. நீளமான முனையிலிருந்து விளக்கு உள்ள தூரத்தை அளக்கவும் அது 25 செ.மீ என்க. மறுபடியும் குறைவான நீளம் உள்ள முனையிலிருந்து விளக்கு உள்ள தூரத்தை அளக்கவும் அது 30 செ.மீ என்க. விளக்கின் இடத்தை (30, 25) அல்லது (25, 30) என நீங்கள் எடுத்துக் கொண்ட வரிசையில் எழுதலாம்.



2. தெருவின் அமைப்பு கீழே உள்ளவாறு கொடுக்கப்பட்டது.



இரண்டு குறுக்குத் தெருக்களும் படத்திலுள்ளவாறு குறிப்பிடப் பட்டுள்ள. இவை தனிப்பட்டு காணப்படுகின்றன, ஏனெனில் அவற்றை இடங்குறிக்க இரு குறிப்புகள் பயன் படுகின்றன.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 3.2

1. (i) x − அச்சு மற்றும் y − அச்சு

   (ii) கால்பகுதிகள்

   (iii) தொடக்கப்புள்ளி (ஆதிப்புள்ளி)

2. (i) (−5, 2) (ii) (5, − 5)

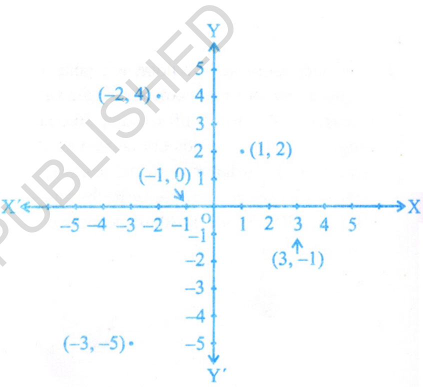
   (iii) E (iv) G

   (v) 6 (vi) −3

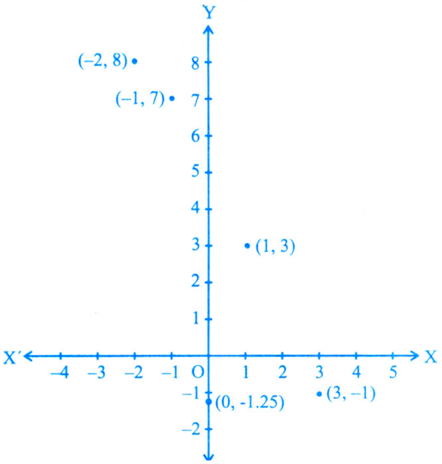
   (vii) (0, 5) (viii) (−3, 0)

பயிற்சி 3.3

1. (−2, 4) என்ற புள்ளி II கால் பகுதியில் அமைந்துள்ளது, (3, −1) என்ற புள்ளி IV கால் பகுதியில் அமைந்துள்ளது (−1, 0) என்ற புள்ளி x − அச்சில் எதிர்புள்ளி அச்சில் அமைந்துள்ளது. (1, 2) என்ற புள்ளி I கால் பகுதியில் அமைந்துள்ளது.(−3, −5) என்ப புள்ளி III கால் பகுதியில் அமைந்துள்ளது. புள்ளிகளின் இடம் பக்கத்திலுள்ள படத்தில் அமைத்து குறிக்கப்பட்டுள்ளது



2. புள்ளிகளின் இடஅமைப்பு புள்ளிகளாக படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0$; $a = 2,\ b = 3,\ c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$; $a = 1,\ b = -\frac{1}{5},\ c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0$; $a = -2, b = 3,\ c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0$; $a = 1, b = -3,\ c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0$; $a = 2, b = 5, c = 0.$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0$; $a = 3,\ b = 0, c = 2$

(vii) $0 . x + 1.y - 2 = 0$; $a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0$; $a = -2, b = 0, c = 5.$

பயிற்சி 4.2

1. (iii) ஏனெனில் x ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் தொடர்புடைய y ன் மதிப்பு உண்டு அதேபோல் (vise versa) மறுதலையும் உண்டு

2. (i) (0,7), (1,5), (2,3), (4,–1).

(ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), (2, \frac{1}{2})$

3. (i) இல்லை

(ii) இல்லை

(iii) ஆம்

(iv) இல்லை

(v) இல்லை

4. 7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 5.1

1. (i) *தவறு, மாணவர்களால் கண்ணால் பார்க்க முடியும்.*

   (ii) *தவறு, அடிகோள் 2.1க்கு முரண்டபாடானது.*

   (iii) *சரி (ஒப்பு கொள்கை 2)*

   (iv) *சரி. இரண்டு வட்டங்களால் சூழப்பட்ட பகுதியை ஒன்றின் மீது ஒன்று வைத்தால் அவை ஒன்றோடு ஒன்று பொருந்தும். ஆகவே அவற்றின் மையங்கள் மற்றும் சுற்று பகுதி பொருந்தும் ஆகவே அவற்றின் ஆரங்கள் பொருந்தும்.*

   (v) *சரி, யுக்லிடின் முதல் அடிகோள்.*

3. *மாணவர்களால் உருவாக்கப்பட்ட பட்டியில் வரையறுக்கப்படாத பல உறுப்புகள் உள்ளன. அவை நிலையானவை. ஏனெனில் அவை இரண்டு சூழ்நிலைகளை வேறுபட்ட கொண்டுள்ளது.*

   (i) *புள்ளி* C *ஆனது கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள்* A *மற்றும்* B *க்கு இடையில் அமையும் எனக் கூறுகிறது.*

   (ii) *புள்ளி* C *ஆனது கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள்* A *மற்றும்* B *க்கு இடையில் அமையாது எனக் கூறுகிறது.*

   இந்த ஒப்புக் கொள்ளகைகள் யூக்லிடின் ஒப்புக்கொள்கையை பின்பற்றவில்லை. அவை அடிக்கோள் 2.1ஐ பின்பற்றுகிறது.

4. $AC = BC$

ஆகவே $AC + AC = BC + AC$ [சமமானவை சமமானவற்றுடன் கூட்டப்பட்டுள்ளது.]

$AC = AB$ [BC + AC ஆனது AB உடன் பொருந்துகிறது]

ஆகவே $AC = \frac{1}{2} AB$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. AB யின் மையப்புள்ளிகள் C மற்றும் D என்று தற்காலிக கணிப்பை கொள்க. C மற்றும் D என்பன வேறுவேறு புள்ளிகள் அல்ல என காட்டுக.

6. AC = BD (கொடுக்கப்பட்டது) (1)

AC = AB + BC (புள்ளி B ஆனது A மற்றும் C க்கு இடையில் அமைந்துள்ளது)(2)

BD = BC + CD (புள்ளி B ஆனது C க்கு இடையில் அமைந்துள்ளது) (3)

(1) ல் (2) மற்றும் (3) ஐ பிரதியிட்டால் உங்களுக்கு கிடைப்பது,

AB + BC = BC + CD

AB = CD (சமமானவை சமமானவற்றிலிருந்து கழிக்கப்படுகிறது)

7. உலகில் எந்த பகுதியிலும் எல்லாவற்றிற்கும் இது உண்மை எளில் இது உலகத்திற்கு உண்மை.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி 5.2

1. மாணவர்களால் கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரத்தினை அதன் நம்பகத் தன்மையினை சோதிக்க வகுப்பில் தர்க்கம் செய்ய வேண்டும்.

2. இரண்டு நேர் கோடுகள் m மற்றும் n ன் மீது l என்றகுறுக்குக்கோடு செல்கிறது. எனில் l ன் ஒரு பக்கத்தில் அமையும் உட்கோணங்களின் கூடுதல் இரண்டு செங்கோணங்கள். யூக்ளடின் 5 வது ஒப்புக் கொள்கைபடி lன் இந்த கோடுகள் சந்திக்காது. பக்கத்தில்மறுபக்கத்திறுவாகும் கோணங்கள் இரண்டு செங்கோணங்கள். ஆகவே அடுத்த பக்கத்திலும் 2 கோடுகளும் சந்திகாது. ஆகவே m மற்றும் n என்ற கோடுகள் சந்திக்கவே சந்திகாது. ஆகவே அவை இணை.

பயிற்சி 6.1

1. 30°, 250°
2. 126°

4. ஒரு புள்ளியில் எல்லா கோணங்களின் கூடுதல் = 360°
5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ மற்றும் $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$.
6. 122°, 302°

பயிற்சி 6.2

1. 130°, 130°
2. 126°
3. 126°, 36°, 54°
4. 60°
5. 50°, 77°
6. படுகோணம் விலகுகோணம். புள்ளி B ல் $BE \perp PQ$ வரைக. புள்ளி C ல் $CF \perp RS$ வரைக.

6. ΔPQR ன் கோணங்களின் கூடுதல் = ΔQTR கோணங்களின் கூடுதல் மற்றும் $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A *1.1*

1\. (i) பொய், ஒரு வருடத்திற்கு 12 மாதங்கள்.

(ii) தெளிவற்றது கொடுக்கப்பட்ட வருடத்தில் தீபாவளி வெள்ளிக்கிழமை அன்று வரலாம் அல்லது வராமல் இருக்கலாம்.

(iii) தெளிவற்றது வருடத்தில் சில சமயங்களில் மாகடியின் வெப்பநிலை 26°C ஆக இருக்கலாம்.

(iv) எப்பொழுதும் உண்மை.

(v) பொய், நாய்களால் பறக்க முடியாது.

(vi) தெளிவற்றவை, லீப்வருடத்தில் பிப்ரவரி மாதத்திற்கு 29 நாட்கள்.

2\. (i) பொய், நாற்கரத்திற்கு உபகோணங்களின் கூடுதல் 360°.

(ii) உண்மை

(iii) உண்மை

(iv) உண்மை

(v) பொய், எடுத்துக்காட்டாக $7 + 5 = 12$ என்பது ஒற்றைபடை எண் அல்ல.

3\. (i) 2ஐ விட பெரிய எல்லா பகா எண்களும் ஒற்றை படை எண்கள்.

(ii) ஓர் இயல் எண்ணின் இருமடங்கு எப்பொழுதும் இரட்டை படை எண்.

(iii) $x > 1$ ன் எந்த மதிப்பிற்கும் $3x + 1 > 4$

(iv) $x \geq 0$ ன் எந்த மதிப்பிற்கும் $x^3 \geq 0$.

(v) சமபக்க முக்கோணத்தின் நடுக்கோடு எப்பொழுதும் கோணங்களின் இருசமவெட்டி

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A 1.2

1. (i) மனிதர்கள் பாலூட்டிகள்

   (ii) இல்லை. தினேஷ் யாரிடம் வேண்டுமானாலும் முடியை திருத்திக் கொள்ளலாம்.

   (iii) குலாக் - சிவப்பு நிற நாக்கை கொண்டிருக்கும்.

   (iv) வடிகால்கள் நாளை சுத்தம் செய்யப்படும் என்ற முடவிற்கு வரலாம்.

   (v) வாலைக் கொண்டுள்ள எல்லா மிருகங்களும் நாயாக இருக்க வேண்டியது இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக எருது, குரங்கு, பூவை போன்ற பல வாலைக் கொண்டிருந்தாலும் அவைகள் நாய்கள் அல்ல.

2. 'B' மற்றும் 8 அட்டைகளை நீங்கள் திருப்ப வேண்டும். B யின் மறுபக்கம் இரட்டைபடை எண் இருந்தால் விதி தவறாகும். அதேபோல் 8ன் மறுபக்கம் மெய் எழுத்து இருந்தால் விதி தவறாகும்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A 1.3

3. மூன்று அனுமானங்கள் உள்ளன

   (i) மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைபடை எண்களின் பெருக்கல் பலன் ஓர் இரட்டை படை எண்.

   (ii) மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை படை எண்களின் பெருக்கல் பலன் 4-ல் வகுபகும்.

   (iii) மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டை படை எண்களின் பெருக்குத் தொகை 6ல் வகுபடும்.

2. வரிசை 4 : 1331 = 11^3

   வரிசை 5 : 14 641 = 11^4

   அனுமானம், வரி 4 மற்றும் 5 க்கு பொருந்தும்

   இல்லை, ஏனெனில் $11^5 \neq 15101051$

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$, $T_{n-1} + T_n = n^2$

4. $1111^2 = 12345654321$

   $1111111^2 = 1234567654321.$

5. மாணவர்களின் சுய விடை எடுத்துக்காட்டாக, யூக்லிட் ஒப்புக்கொள்கைகள்.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

பயிற்சி A 1.4

1. (i) சமமான கோணங்கள் மற்றும் மாறுபட்ட பக்கங்கள் உள்ள ஏதேனும் இரண்டு முக்கோணங்கள்.

   (ii) சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் சமம். ஆனால் அது சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

   (iii) செவ்வகத்தின் கோணங்கள் சமம். ஆனால் சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

   (iv) $a = 3$ மற்றும் $b = 4$ என்ற மதிப்பிற்கு வாக்கியம் உண்மையல்ல.

   (v) $n = 11$ என்ற மதிப்பிற்கு $2n^2 + 11 = 253$,என்பது பகா எண் அல்ல.

   (vi) $n = 41$ என்ற மதிப்பிற்கு $n^2 - n + 41$ என்பது பகா எண் அல்ல.

2. மாணவர்களின் சுய பதில்.

3. x மற்றும் y என்பவை இரண்டு ஒற்றை படை எண்கள் என்க.

   $x = 2m + 1$ என்பது சில இயல் எண்கள் m க்கும் $y = 2n + 1$; என்பது சில இயல் எண்கள் n க்கும் ஆகும்.

   $x + y = 2(m + n + 1)$ ஆகவே $x + y$ என்பது **2** ஆல் வகுப்படும் மற்றும் ஓர் இரட்டை படை எண்.

4. கேள்வி ***3*** ஐ பார்க்கவும். (xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(mn + m +m n) ஆகவே xy என்பது **2** ஆல் வகுபடாது ஆகவே ஒற்றை படை எண்.

5. $2n, 2n + 2$ மற்றும் $2n + 4$ என்பவை மூன்று அடுத்தடுத்த இரட்டைபடை எண்கள் என்க. அவற்றின் கூடுதல் $6(n + 1)$ இது **6** ல் வகுப்படும்.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. (i) உண்மை எண் '*n*' என்க. பின்வரும் செயல்களை நாம் செய்தால்,

$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow 2n+9+n=3n+9$

$\rightarrow 3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3}=n+3 \rightarrow$

$\rightarrow n+3+4=7 \rightarrow n+7-n=7$

(ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ஏதேனும் மூன்று இலக்க எண் abc எடுத்துக் கொள்க. $1001 \times abc = abcabc$ ஆகவே ஆறு இலக்க எண் *abcabc* ஆனது 7, 11, 13 ஆகியவற்றால் வகுபடும்.

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED