

कर्नाटक सरकार

गणित प्रकाश

इयत्ता 8 वी साठी गणिताचे पाठ्यपुस्तक

इयत्ता

8

भाग-1

मराठी माध्यम

EIGHTH STANDARD
MARATHI MEDIUM



राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003

0874 – Ganita Prakash
Textbook of Mathematics for Grade 8 (Part-I)

ISBN 978-93-5729-642-7

First Edition
July 2025 Ashadha 1947

PD 1500T BS

©National Council of Educational Research and Training, 2025

ALL RIGHTS RESERVED

- No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without the prior permission of the publisher.
- This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade, be lent, re-sold, hired out or otherwise disposed of without the publisher's consent, in any form of binding or cover other than that in which it is published.
- The correct price of this publication is the price printed on this page, Any revised price indicated by a rubber stamp or by a sticker or by any other means is incorrect and should be unacceptable.

OFFICES OF THE PUBLICATION DIVISION, NCERT

NCERT Campus
Sri Aurobindo Marg
New Delhi 110 016 **Phone : 011-26562708**

108, 100 Feet Road
Hosdakere Halli Extension
Banashankari III Stage
Bengaluru 560 085 **Phone : 080-26725740**

Navjivan Trust Building
P.O.Navjivan
Ahmedabad 380 014 **Phone : 079-27541446**

CWC Campus
Opp. Dhankal Bus Stop
Panihati
Kolkata 700 114 **Phone : 033-25530454**

CWC Complex
Maligaon
Guwahati 781 021 **Phone : 0361-2674869**

₹ 65.00

Publication Team

Head, Publication Division : *M.V. Srinivasan*
Chief Editor : *Bijnan Sutar*
Chief Production Officer (In charge) : *Jahan Lal*
Chief Business Manager : *Amitabh Kumar*
Production Assistant : *Ashwani Machra*

Cover and Layout
Creative Art Studio

Illustrations
Chetan Sharma and Madhushree Basu

Printed on 80 GSM paper with NCERT watermark

Published at the Publication Division by the Secretary, National Council of Educational Research and Training, Sri Aurobindo Marg, New Delhi 110 016 and printed at Shivam Offset, Plot No. D-111, Kagal Five Star M.I.D.C. Kagal, Kolhapur-416236

Foreword

The National Education Policy (NEP) 2020 envisages a system of education in the country that is rooted in an Indian ethos and its civilisational accomplishments in all fields of knowledge and human endeavour. At the same time, it aims to prepare students to engage constructively with the opportunities and challenges of the twenty-first century. The basis for this aspirational vision has been well laid out by the National Curriculum Framework for School Education (NCF-SE) 2023 across curricular areas at all stages. By nurturing students' inherent abilities across all five planes of human existence (*pañchakośhas*), the Foundational and Preparatory Stages set the Stage for further learning at the Middle Stage. Spanning Grades 6 to 8, the Middle Stage serves as a critical three-year bridge between the Preparatory and Secondary Stages.

The NCF-SE 2023, at the Middle Stage, aims to equip students with the skills that are needed to grow, as they advance in their lives. It aims to enhance their analytical, descriptive, and narrative capabilities, and to prepare them for the challenges and opportunities that await them. A diverse curriculum, covering nine subjects ranging from three languages—including at least two languages native to India—to Science, Mathematics, Social Sciences, Art Education, Physical Education and Well-being, and Vocational Education promotes their holistic development.

Such a transformative learning culture requires certain essential conditions. One of them is to have appropriate textbooks in different curricular areas, as these textbooks are intended to play a central role in mediating between content and pedagogy's role that helps strike a judicious balance between direct instruction and opportunities for exploration and inquiry. Among the other conditions, classroom arrangement and teacher preparation are crucial to establish conceptual connections both within and across curricular areas.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT), on its part, is committed to providing students with such high-quality textbooks. Various Curricular Area Groups (CAGs), which have been constituted for this purpose, comprising notable subject-experts, pedagogues, and practising teachers as their members, have made all possible efforts to develop such textbooks. *Ganita Prakash*, the textbook

of mathematics for Grade 8 (Part 1) is designed to make learning fun, engaging, and meaningful. Aligned with NEP 2020 and NCF-SE 2023, the textbook continues to foster the spirit of experiential and inquiry-based learning, a spirit already introduced in the mathematics textbooks for Grades 6 and 7. It encourages students to ask questions, think critically, and understand concepts of mathematics through real-world contexts. The textbook makes efforts to encourage the students to observe and explore patterns around them and discover mathematical concepts on their own. The content is structured in a way that supports a joyful and progressive understanding of increasingly complex concepts, easing students into more advanced learning. The content attempts to integrate mathematics with other subject areas, such as Science, Social Science with cross-cutting themes like environmental education, value education, inclusive education, and Indian Knowledge Systems (IKS). At most of the places the concept begins with either a story or a puzzle that not only makes students think but also feels the importance of the concept.

However, in addition to this textbook, students at this stage should also be encouraged to explore various other learning resources. School libraries play a crucial role in making such resources available. Besides, the role of parents and teachers will also be invaluable in guiding and encouraging students to do so.

With this, I express my gratitude to all those who have been involved in the development of this textbook, and hope that it will meet the expectations of all stakeholders. At the same time, I also invite suggestions and feedback from all its users for further improvement in the coming years.

Dinesh Prasad Saklani
Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
June 2025

About the Book

Mathematics helps students develop not only basic arithmetic skills, but also the crucial capacities of logical reasoning, creative problem-solving, and clear and precise communication (both oral and written). Mathematical knowledge also plays a crucial role in understanding concepts in other school subjects, such as Science and Social Science, and even Arts, Physical Education, and Vocational Education. Learning Mathematics contributes to the development of capacities to make informed choices and decisions. Understanding numbers and quantitative arguments is necessary for effective and meaningful democratic and economic participation. Mathematics thus plays an important role in achieving the overall aims of school education.

Mathematics at the Middle Stage is a major challenge and performs the dual role of being both close to the experience and environment of a learner and being abstract. It performs the role of developing intuition, while also maintaining and emphasising rigour. It is enhancing critical and logical thinking, while also developing artistry and creativity, and a sense of elegance and aesthetics. Mathematics provides students with plenty of opportunities to explore and discover concepts on their own while also teaching the best-known methods in the global repertoire of mathematics.

This textbook attempts to address the goals and challenges of learning mathematics. The writers have aimed to strike a judicious balance between informal and formal definitions and methods in helping students to develop both intuition and rigour. The textbook also provides numerous opportunities for student-student and student–teacher interaction in the classroom to promote active and experiential learning. A number of questions, puzzles, and interactive exercises are posed throughout the textbook to encourage constant exploration. Many of the questions are open-ended to stimulate classroom discussion.

The Chapter 1: 'A Square and A Cube' is an introduction to the special types of numbers called squares and cubes through engaging explorations, and contexts. Chapter 2: 'Power Play' considers short and logical ways of expressing very large numbers, and discusses how they can be written and read without ambiguity. Chapter 3: 'A Story of Numbers' reveals how the idea of number and number representation evolved over the course of time, across different places in the world, to finally reach its modern efficient form. Chapter 4: 'Quadrilaterals' discusses some interesting types of four-sided figures and problems based on them. Chapter 5: 'Number Play' shows different properties of numbers studied by the students with a balance of engaging activities through visualisation and rigorous mathematical reasoning. Chapter 6: 'We Distribute, Yet Things Multiply' covers aspects related to Algebra, and in particular, the distributive law. Chapter 7: 'Proportional Reasoning' explores a new way to compare two quantities using daily life situations. In all the chapters, an attempt has been made to emphasise connections with other subjects including Art, History and Science.

By weaving storytelling and hands-on activities together, as done in Grades 6 and 7, we hope that an immersive learning experience will be created that ignites curiosity and fosters a love for mathematics. It is hoped that teachers would give students the opportunity to discuss, play, engage with each other and provide logical arguments for different ideas, and find loopholes in arguments presented. This is

necessary for the learners to eventually develop the ability to understand what it means to prove something and also become confident about the underlying concepts. The mathematics classroom should not expect a blind application of algorithms but should rather encourage students to find many different ways to solve problems.

As per the National Education Policy (NEP) 2020, computational thinking has also been gently introduced through puzzles, games, and interactive exercises that encourage students on these aspects. Indian rootedness has also been kept in mind while giving contexts for different concepts. The contributions of Indian mathematicians have also been given as part of a problem-solving approach to make students aware of India's rich mathematical heritage and its global contributions to mathematics.

The concepts and problems in this textbook are related to daily life situations. An attempt has been made to use contexts and materials that students are familiar with. Learning material sheets have been given at the back of the book that may be photocopied and used in the classroom. Exercises or activities are often given to encourage peer group efforts and discussions. However, this textbook intends to address the learning needs of a diverse group of students in the classroom.

We have tried to link concepts learnt in initial chapters with ideas in subsequent chapters, to show the connectedness and unity of mathematics. We hope that teachers can revise these concepts in a spiralling way so that students are able to appreciate the entire conceptual structure of mathematics. We hope that teachers may focus more on the ideas of squares and cubes, exponents, evolution of numbers and other notions that are new to the students, and are foundational for further learning.

Finally, this textbook aims to be more than just a textbook—it is a passport to a world of mathematical discovery and exploration. Whether used in the classroom or at home, we hope that it inspires students to embark on their own mathematical adventures, empowering them to see the beauty and relevance of Mathematics in everything. With its engaging approach and comprehensive coverage of Grade 8 mathematics concepts, this textbook aims to captivate young minds and set them on a lifelong journey of mathematical discovery.

I once again thank all the writers of and contributors of this textbook for their valuable contribution and service to the nation's mathematics teachers, learners and enthusiasts.

We look forward to your comments and suggestions regarding the textbook and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you may develop while teaching and learning for future editions.

Ashutosh Wazalwar
Professor and *Academic Convener*
Department of Education in
Science and Mathematics
National Council of Educational
Research and Training

National Syllabus and Teaching Learning Material Committee (NSTC)

1. M.C. Pant, *Chancellor*, National Institute of Educational Planning and Administration (NIEPA) **(Chairperson)**
2. Manjul Bhargava, *Professor*, Princeton University **(Co-Chairperson)**
3. Sudha Murty, Acclaimed *Writer* and *Educationist*
4. Bibek Debroy, *Chairperson*, Economic Advisory Council to the Prime Minister (EAC–PM)
5. Shekhar Mande, Former *Director General*, CSIR, Distinguished Professor, Savitribai Phule Pune University, Pune
6. Sujatha Ramdorai, *Professor*, University of British Columbia, Canada
7. Shankar Mahadevan, Music Maestro, Mumbai
8. U. Vimal Kumar, *Director*, Prakash Padukone Badminton Academy, Bengaluru
9. Michel Danino, Visiting Professor, IIT–Gandhinagar
10. Surina Rajan, *IAS* (Retd.), Haryana, Former *Director General*, HIPA
11. Chamu Krishna Shastri, *Chairperson*, Bharatiya Bhasha Samiti, Ministry of Education
12. Sanjeev Sanyal, Member, Economic Advisory Council to the Prime Minister (EAC–PM)
13. M.D. Srinivas, *Chairperson*, Centre for Policy Studies, Chennai
14. Gajanan Londhe, *Head*, Programme Office
15. Rabin Chhetri, *Director*, SCERT, Sikkim
16. Pratyusa Kumar Mandal, *Professor*, Department of Education in Social Sciences, NCERT, New Delhi
17. Dinesh Kumar, *Professor*, Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, New Delhi
18. Kirti Kapur, *Professor*, Department of Education in Languages, NCERT, New Delhi
19. Ranjana Arora, *Professor* and *Head*, Department of Curriculum Studies and Development, NCERT **(Member-Secretary)**

Textbook Development Team

Contributors

Amartya Kumar Dutta, *Professor*, Stat-math Unit, Indian Statistical Institute (ISI), Kolkata

Anjali Gupte, *Principal* (Retd.), Vidya Bhavan Public School, Udaipur

Ashutosh Kedarnath Wazalwar, *Professor*, Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, New Delhi—CAG (Mathematics) **(Member Coordinator)**

H. S. Sharada, *Assistant Mistress*, Government High School, M. C. Thalalu, H. D. Kote Taluk, Mysore, Karnataka

Madhavan Mukund, *Director*, Chennai Mathematical Institute, Chennai—CAG *Chairperson* (Mathematics)

Madhu B., *Assistant Professor*, Regional Institute of Education (RIE), Mysuru

Manjul Bhargava, *Professor*, Princeton University, and *Co-Chairperson*, NSTC

Padmapriya Shirali, Former *Principal*, Sahyadri School KFI, Pune

Patanjali Sharma, *Assistant Professor*, Regional Institute of Education, (RIE), Ajmer

Ramchandar Krishnamurthy, *Principal*, Azim Premji School, Bengaluru

Shivkumar K. M., *Senior Consultant*, Programme Office, NSTC,

Shravan S. K., *Senior Consultant*, Programme Office, NSTC

Reviewers

Aaloka Kanhere, *Project Scientific Officer*, Homi Bhabha Centre for Science Education, Mumbai

Aparna Lalingakar, *Director*, Aksharbrahma Consultancy, Pune—(Team Leader)

Rakhi Bannerjee, *Associate Professor*, Azim Premji University, Bengaluru

Sujatha Ramdorai, *Professor*, University of British Columbia, Canada, Member NSTC

Vijayan K., *Professor*, Department of Curriculum Studies and Development, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) acknowledges the guidance and support of the esteemed Chairperson and members of the Curricular Area Group (CAG): Mathematics, and other concerned CAGs for their guidelines on cross-cutting themes in developing this textbook. During the development of this textbook, various workshops were organised and subject experts from different Institutions were invited. The NCERT acknowledges the valuable views and inputs given by subject experts — Sreelatha Iyengar, *TGT* Mathematics, Bengaluru; Jaspal Kaur, TGT (Maths), School of Excellence, Delhi; Sunita Sharma, *TGT* Mathematics, The Heritage School, Delhi; Sangeeta Solanki, *TGT* Mathematics, The Heritage School, Delhi; Rishikesh Kumar, *Assistant Professor*, DESM, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the efforts of Nidhi M. Shastri and Tarun Choubisa from the Programme Office; and Sneha Titus, *Cheif Editor*, At Right Angles, Azim Premji University, Bengaluru, Ramu MS *Philatelist*, for providing the pictures of the stamps of some endangered species; Shweta Rao, Banyan Tree, New Delhi for providing Infographic; and Arkaprovo Das for making world maps.

Acknowledgements are due for the academic and administrative support of Sunita Farkya, *Professor* and *Head*, DESM, NCERT, New Delhi.

The Council appreciates the contributions of Sushmita Joshi, *Senior Research Associate,* Department of Education in Science and Mathematics, NCERT for providing support in the development of the textbook. The NCERT gratefully acknowledges the contributions of Kishore Singhal, Ayaz Ahmad Ansari, DTP Operators (contractual), Publication Division, and Abhilash Kumar, DTP Operator of DESM NCERT for all their efforts.

The Council acknowledges the efforts of Ilma Nasir, *Editor* (contractual); Adiba Tasneem, Ariba Usman, Jatinder Kumar, Praveen Kumar and Talha Faisal Khan, *Proofreaders* (contractual), Publication Division, NCERT. The Council also appreciates the efforts of Pawan Kumar Barriar, *In charge*, DTP Cell; Mohan Singh, Vivek Mandal and Anita Kumari *DTP Operators* (contractual), Publication Division, NCERT, for finalising this textbook.

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

CONSTITUTION OF INDIA

Part III (Articles 12 – 35)
(Subject to certain conditions, some exceptions
and reasonable restrictions)

guarantees these

Fundamental Rights

Right to Equality

- before law and equal protection of laws;
- irrespective of religion, race, caste, sex or place of birth;
- of opportunity in public employment;
- by abolition of untouchability and titles.

Right to Freedom

- of expression, assembly, association, movement, residence and profession;
- of certain protections in respect of conviction for offences;
- of protection of life and personal liberty;
- of free and compulsory education for children between the age of six and fourteen years;
- of protection against arrest and detention in certain cases.

Right against Exploitation

- for prohibition of traffic in human beings and forced labour;
- for prohibition of employment of children in hazardous jobs.

Right to Freedom of Religion

- freedom of conscience and free profession, practice and propagation of religion;
- freedom to manage religious affairs;
- freedom as to payment of taxes for promotion of any particular religion;
- freedom as to attendance at religious instruction or religious worship in educational institutions wholly maintained by the State.

Cultural and Educational Rights

- for protection of interests of minorities to conserve their language, script and culture;
- for minorities to establish and administer educational institutions of their choice.

Right to Constitutional Remedies

- by issuance of directions or orders or writs by the Supreme Court and High Courts for enforcement of these Fundamental Rights.

शिक्षकांसाठी सुचना

आम्हाला आशा आहे की, 'गणित प्रकाश ' हे पुस्तक तुमच्यासमोर असलेले रोमांचक कार्य साध्य करण्यासाठी एक मजबूत आधार म्हणून सेवा देईल. गणित या सुंदर विषयाच्या अध्ययनाचा आनंद पुढील पिढीपर्यंत पोहोचविण्यास मदत करेल.

या कार्याकरिता विद्यार्थ्यांच्या मनामध्ये गणितीय विचार फुलविण्यासाठी एक सुपीक वातावरण तयार करणे गरजेचे आहे. वर्गखोली ज्यामध्ये विद्यार्थी सांगितलेले ऐकतात आणि फळ्यावर जे कांही लिहिले जाते ते लिहून घेतात. तरी गणित विषयाच्या अध्यापनामध्ये आवश्यक परिस्थितीमध्ये कांही त्रुटी आहेत. त्याऐवजी वर्गखोल्या या अशी जागा असावी लागते की ज्यामध्ये विद्यार्थी गणितीय कल्पनाशी खेळण्यात, शोधण्यात आणि चर्चा करण्यात गुंतलेले असले पाहिजेत आणि नमुने आणि समस्या निवारणासाठी एकत्रितपणे सर्जनशील रणनिती विकसित केली पाहिजेत. विद्यार्थ्यांना आपल्या समस्या एकमेकांसमोर मांडता आल्या पाहिजेत आणि संभाव्य उपायावर चर्चा केली पाहिजे. खर तर या परिस्थितीमुळेच आतापर्यंत गणिताचा पूर्ण विकास झाला आहे आणि त्यामुळेच अशा परिस्थितीविना विद्यार्थी गणितीय विचार आणि समज विकसित करु शकतील याची अपेक्षा करता येत नाही.

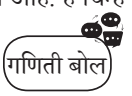
सुदैवाने अशी परिस्थिती निर्माण करणे कठीण नाही. त्यासाठी फक्त एक मनोरंजक प्रश्न, समस्या, नमुना किंवा आव्हान नियमितपणे विद्यार्थ्यांसमोर मुक्तपणे ठेवणे आवश्यक आहे, त्याना वर्गामध्ये किंवा जोडीने किंवा गटामध्ये खेळण्यासाठी, चर्चा करण्यासाठी आणि त्यावर काम करण्यासाठी पुरेसा वेळ देणे गरजेचे आहे.

त्यासोबतच चुका स्वीकारणारे आणि अध्ययनाचे महत्व मान्य करणारे पोषक वातावरण जोपासले गेले पाहिजेत.

वर्गामध्ये गणितीय विचारसरणी सुरु करण्याची चमक निर्माण करणे कठीण नसले त्तरी ते टिकवून ठेवणे आव्हानात्मक असू शकते आणि त्यासाठी तुम्हाला अधिक परिश्रम घ्यावे लागतील. तरीपण प्रश्न, समस्या, नमुना किंवा आव्हाने उघडण्याचा पहिला भाग आठवड्यातून किमान एकदा -दोन वेळा केला गेला तरी, विद्यार्थ्यांना खेळण्यासाठी चर्चा करण्यासाठी आणि त्यावर काम करण्यासाठी तुमच्याकडून पुरेशी वाट पाहण्याचा वेळ मिळाला तरी विद्यार्थ्यांचा गणिताकडे पाहण्याचा आणि लक्ष देण्याचा दृष्टीकोन यावर मोठा सकारात्मक परिणाम होऊ शकतो.

हे लक्षात घेतले पाहिजेत की हा सकारात्मक परिणाम केवळ एका रात्रीत होणार नाही. यासाठी वेळ द्यावा लागतो आणि तो तुम्ही समस्या सोडविण्यासाठी किती संधी देता, तुमचा संयम आणि विद्यार्थ्यांना किती प्रोत्साहन देता यासारख्या विविध घटकावर अवलंबून असतो.

समस्या मांडण्यासाठी तुम्हाला मदत व्हावी यासाठी या पुस्तकातील सर्व समस्या किंवा प्रश्न ? आणि (?) ही चिन्हे वापरुन चिन्हांकीत केले आहे. हे चिन्ह वर्गामध्ये समस्या सोडविण्याची आणि शोध घेण्याची प्रक्रिया पुढे सुरु ठेवणाऱ्या संभाव्य संधीच सुचक आहे तुम्हाला



असे लिहिलेल्या कांही समस्या आढळतील, त्यांना विशेषतः वर्गातील चर्चेचे विषय म्हणून बनविता येतात.

पाठ्यपुस्तकात विविध ठिकाणी घुबडांचे शुभंकर दिसले जे महत्वाच्या गणितीय प्रक्रिया विचार करण्याच्या पध्दती आणि समस्या सोडविण्याच्या पध्दतीवर प्रकाश टाकते. वर्गातील चर्चेच्यावेळी जिथे घुबड दिसते आणि इतर सारख्याच परिस्थितीमध्ये हे लक्षात आणून या विद्यार्थ्यांची गणितीय विचारसरणी आणि संकल्पनांची समज विकसित करण्यासही पुरेशा संख्येने प्रश्न दिलेले आहेत. ते सर्व व्यापण्याच्या प्रयत्नात विद्यार्थ्यांना खेळण्यासाठी आणि चर्चा करण्यासाठी वेळ दिला जाणार नाही हे घडणार नाही याची काळजी घ्यावी.

हे समजून घेणे महत्वाचे आहे की शोधात्मक समस्या या केवळ समस्या सोडविण्याच्या कौशल्यांना चालना देण्यासाठी नसतात. तर तेव्हा मुले शोधात गुंतू लागतातः तेव्हा प्रक्रियात्मक प्रवाहात्ला बळकट करण्यासाठी सुध्दा मदत करतात.

विद्यार्थ्यांना स्वतंत्र अध्ययनकर्ता बनविण्याचे प्रयत्न केले पाहिजेत. यासाठी आवश्यक असलेला एक महत्वाचा पैलू म्हणजे गणिती संदर्भ वाचून आकलन करण्याची क्षमता. या कौशल्याना चालना देण्यासाठी विद्यार्थ्यांना स्वतः आणि गटामध्ये पुस्तक वाचण्यास

प्रोत्साहीत केले पाहिजे. ते जे वाचतात आणि समजून घेतात त्याला व्यक्त करण्यासाठी संधी द्यावी. यामुळे गणिले बोलण्यात आणि शब्दांचा अर्थ लावण्यास विद्यार्थ्यांना येणाऱ्या मोठ्या समस्यांचे देखील निराकरण होईल.

या पुस्तकामध्ये अनेक खुल्या समस्या आहेत. त्यामध्ये कांही नवीन संकल्पनावर उपचार सुध्दा आहेत. तुम्ही जर यापैकी कांही सोडवू शकला नाही किंवा कांही लगेच समजू शकल्या नाहीत तर ते पूर्णपणे ठिक आहे. सर्वांना सर्व कांही माहीत होतच असे नाही. संदर्भ समजून घेऊन त्यावर चिंतन करून प्रयत्न करण्याबरोबर ते वर्गात घेऊन जाणे आणि चर्चेसाठी खुले ठेवणे फायद्याचे ठरेल. चर्चेनंतर स्पष्ट केलेल्या आणि स्पष्ट न झालेल्या गोष्टी स्पष्टपणे सारांशीत केल्या जाऊ शकतात असे केल्याने घटकांशावर बराच प्रकाश टाकला जाऊ शकतो.

या चर्चेमध्ये तुम्ही एक सहकारी साधक म्हणून सहभागी होऊ शकता आणि जेव्हा शिक्षकांना कांहीतरी समजून घेण्याचा प्रयत्न करताना आणि विचार करताना पाहतात, तेव्हा ते एक अदभूत उदाहरण बनते.

तुम्ही आणि तुमचे विद्यार्थी या पुस्तकाचा उपयोग करुन खुप छान आणि फलदायी वेळ घालवाल अशी आशा करतो!

मुख्य मुद्यांचा सारांश

शोधण्यासाठी वेळ

1 विद्यार्थ्यांना दररोज नवीन समस्या, नमुने किंवा आव्हाने देणे आणि त्यांना वैधानिकपणे गटामध्ये खेळण्यासाठी, चर्चा करण्यासाठी आणि त्यावर कार्य करण्यासाठी पुरेसा वेळ देणे हे महत्वाचे आहे.

2. या दरम्यान त्यांच्या चूका स्वीकारणे आणि अध्ययनात त्यांचे महत्व मान्य करणार वातावरण जोपासले गेले पाहिजे.

3. अशी संस्कृती असायला पाहिजे की, येथे विद्यार्थी एकमेकांसमोर समस्या मंडतील आणि त्या समस्या सोडविण्यासाठी विविध प्रकारे एकमेकांशी चर्चा करतील.

पुस्तकातील समस्याविषयी

1 पुस्तकातील शोधात्मक समस्या या केवळ समस्या नाहीत तर मुले जेव्हा शोधात गुंतू लागतात तेव्हा प्रक्रियात्मक प्रवाहांना बळकटी देण्याचा त्यांचा उद्देश असतो.

2. पुस्तकातील सर्व समस्यांचा समावेश करण्याचा प्रयत्न करताना, विद्यार्थ्यांना खेळण्यात चर्चा करण्यात आणि त्या सोडविताना त्यांना दर्जेदार खेळात वेळ घालविण्यापासून रोखले जाऊ नये.

वाचन

1. विद्यार्थ्यांना वैयक्तिक आणि गटामध्ये पुस्तक वाचण्यास प्रोत्साहन देणे.

2. त्यांना वाचन केलेल्या गोष्टींचा अर्थ लावणे आणि इतरांना समजावून सांगण्याची संधी देणे.

न समजण्याचा अधिकार

1. जर कांही घटकांश समजला नाही तर पूर्णपणे ठिक आहे. अशा घटकांशाला समजून घेण्याचा आणि त्यावर चिंतन करण्याचा प्रयत्न करण्याबरोबर त्यांना वर्गात घेऊन जाऊन चर्चेसाठी खुला ठेवणे चर्चेत ज्या गोष्टी स्पष्ट आहेत आणि ज्या अद्याप स्पष्ट नाहीत त्यांचा सारांश स्पष्टपणे सांगता येतो. तुम्ही या चर्चेमध्ये एक सहकारी साधक म्हणून सहभागी होऊ शकता आणि ज्यावेळी विद्यार्थी शिक्षकांना कांहीतरी शोधताना आणि समजून घेताना पाहतात तेव्हा हे त्यांच्यासाठी एक उत्तम उदाहरण असते.

2 अध्ययन करणे ही एक सतत चालणारी प्रक्रिया आहे. खरंच, गणितामध्ये असे आणखी खुप कांही आहे, ज्यांची माहिती नाही आणि त्यासाठी अधिक शोध लावणे गरजेचे आहे.

विद्यार्थ्यांना सुचना

गणिताच्या कला समजून घेवून आनंद घेण्यासाठी फक्त निष्क्रिय प्रेक्षक असणे पुरेसे नाही. ज्याप्रमाणे एखादा गुप्तहेर रहस्य उलगडण्यासाठी कार्य करतो त्याचप्रमाणे तुम्ही स्वतःला यामध्ये सामावून घेणे आवश्यक आहे.

ज्यावेळी तुमच्या समोर नवीन समस्या (प्रश्न) उदभवतो किंवा तुमच्या स्वतःच्या अंतर्जानातून प्रश्न निर्माण होतो किंवा तुम्हाला एखादा सुंदर नमुना दिसतो. त्यावेळी विशेष करून याची गरज भासते. जेव्हा तुम्ही यांचा सामना करता किंवा सामोरे जाता तेव्हा वाचन थांबवा आणि प्रश्न रचन्यासाठी किंवा नमुना समजून घेण्यासाठी आणि आनंद अनुभवण्यासाठी सृजनशीतलेचा वापर करा.

तुम्हाला असे आढळून येईल की कांही प्रश्नासोबत त्यांची उत्तरे देखील असतात जरी परिस्थिती अशी असली तरी उत्तर पाहण्यासाठी स्वतः किंवा गटामध्ये त्या समस्येवर कार्य करणे फायद्याचे ठरेल.

हे तुम्हाला तुमचे पुस्तक वाचण्याचा आनंद वृद्धीगत करेल!

ज्या-ज्यावेळी तुमच्यासमोर प्रश्न उपस्थित होतील, त्या त्यावेळी तुम्ही ? व (?) अशी चिन्हे पाहाल. हे तुम्हाला सुचित करेल की ही वेळ त्या गोष्टीचा शोध घेण्याची आहे.

घुबडाचे चिन्ह  आणि  हे चिन्ह गणित अध्ययनाच्या प्रक्रियेमधील कांही महत्वाच्या सुचना आपल्याला देतील.

"शोधा पाहू" या शिर्षकाखाली कधी कधी तुम्हाला एकाच ठिकाणी संग्रहीत केलेले अनेक प्रश्न दिसून येतील.

कांही प्रश्नांसमोर 

ही खूण आहे. या प्रश्नांचा अर्थ असा होतो की हे प्रश्न तुमच्या वर्ग मित्रासोबत चर्चा करून सोडवा.

शेवटी हे 

अशी खुण करुन दिलेले प्रश्न आहेत. अशा प्रश्नांची उत्तरे सोडविताना अधिक सृजनशिलतेची गरज आहे आणि त्यामुळेच बहुतेक वेळा उत्तरे अधिक मजेदार देखील असतील!

ಮುನ್ನುಡಿ

2026–27 ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಲಿನಿಂದ ರಾಜ್ಯದ ಎಲ್ಲಾ 8ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲಿಕೆಗಾಗಿ ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತಿರುವ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಯು 2020 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿ ಹಾಗೂ 2023 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಚೌಕಟ್ಟು (ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ)ಗಳ ಆಶಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡು ರಚಿಸಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೊಂದಿಗೆ 21 ನೇ ಶತಮಾನದ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವಂತೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬೇಕಿರುವುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅವರ ಭವಿಷ್ಯದ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ದಕ್ಕಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಿ, ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಸದ್ಬಳಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಿದ್ಧರಿರುವಂತೆ ಅವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ, ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ನಿರೂಪಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪೋಷಿಸಬೇಕಿದೆ. ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಹತ್ತರವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ ತಪ್ಪಾಗಲಾರದು.

ಪಠ್ಯವಸ್ತು ಹಾಗೂ ಬೋಧನಾ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಸಮನ್ವಯಗೊಂಡಿರುವ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕುತೂಹಲಕ್ಕೆ ನೀರು ಎರೆಯುತ್ತಾ, ಅವರ ವಿಚಾರಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ, ಅನ್ವೇಷಣಾ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನ ಕಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳಲು ಹೇರಳ ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ತನ್ನ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಿನ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಶೋಧಿಸಿ ಅಲ್ಲಿ ಅನುಭವಿಸುವ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿರುವ ವರ್ಣರಂಜಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಸಂವಾದಾತ್ಮಕ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಬುನಾದಿಯನ್ನು ಬಲಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿ ಸಂಕೀರ್ಣ ಗಣತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಯಿಸಲು ಪಠ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಕಥೆಗಳು, ಸಂವಾದಗಳು ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳ ಸಹಜ, ಸರಳ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನಾವೀನ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುವುದುರಿಂದ ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳು ಗಮನವನ್ನು ಕಲಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಲು ಹಾಗೂ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಂಡು ಅನ್ವಯಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂಲಕ ತಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಅಲೋಚನಾ (Computational Thinking) ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರೇರಣೆ ನೀಡುತ್ತವೆ.

ನೀಡಿರುವ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹಾಗೂ ಬಳಸಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ನಿತ್ಯಜೀವನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅನ್ವಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸರಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲೂ ಕಲೆ, ಇತಿಹಾಸ, ವಿಜ್ಞಾನ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಳನಗೊಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಬಹುಶಿಸ್ತೀಯ ಕಲಿಕೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಥನ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಮಾಡಿ ಕಲಿ ತತ್ತ್ವದಡಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಸಲು ಅವಕಾಶ ನೀಡಿರುವುದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಕುತೂಹಲ ಮತ್ತು ಪ್ರೀತಿ ಹೆಚ್ಚುವುದರಲ್ಲಿ ಅನುಮಾನವಿಲ್ಲ.

ಇಷ್ಟೆಲ್ಲ ವಿಶೇಷ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಗಮಕಾರರು ತಮ್ಮ ತರಗತಿಯನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಹಾಗೂ ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಸಿದ್ಧತೆಯೊಂದಿಗೆ ತರಗತಿ ನಿರ್ವಹಣೆ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಕುರುಡು ಲೆಕ್ಕಾಚರದ ಬದಲಿಗೆ ಒಗಟು, ಚರ್ಚೆ, ಸಂವಾದ, ಆಟ, ಪರಸ್ಪರ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ, ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಒಳಗೊಂಡ ಸುಗಮಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಸುಗಮಕಾರರು ಹುಸಿ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ನಂಬಿಕೆ ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯದ್ದಾಗಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಮಟ್ಟದ ಎಲ್ಲಾ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ತನ್ನದಾಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬ ಆಶಯದೊಂದಿಗೆ 2026–27 ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಲಿನಿಂದ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅನುಮತಿ ನೀಡಿದ ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರದ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಬಳಕೆಗೆ ಅವಕಾಶ ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುವಾದಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಡಿ.ಟಿ.ಪಿ ಆಪರೇಟರ್‌ಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಮುದ್ರಕರಿಗೆ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀ ಎಂ.ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ.)
ಬೆಂಗಳೂರು.

Marathi Translation Committee

Shri J.U. Ghadi, Head Master, New Girls High School, Shahapur Goaves, Belgaum - 590003.

Shri. A.V. Patil, Assistant Master, Marathi Vidyalaya, Vijaypur - 586101

Shri. A.B. Patil, Cantonment Board Marathi High School Camp, Belgaum - 590001.

Chief Advisors

Sri. M.P. Madegowda, Managing Director, Karnataka Textbook Society(R.) Bengaluru.

Smt. M.D. Usha, Deputy Director, Karnataka Textbook Society(R.), Bengaluru.

Programme Co-Ordinator

Smt. Bhagyalakshmi, Assistant Director, Karnataka Textbook Society(R.), Bengaluru.

अनुक्रमणिका

Z6Y1E3

भाग - 1

अ.नं.	प्रकरण	पृष्ठ क्रमांक
1	वर्ग आणि घन	01
2	घातांकांचा खेळ	21
3	संख्यांची कहाणी	52
4	चौकोन	86
5	संख्यांचा खेळ	117
6	आम्ही विभागतो, तरीही त्यांचा गुणाकार करतो	143
7	प्रमाणित तर्क-1	167

1 वर्ग आणि घन (A square and a cube)

E8G1C8

राणी रत्नमंजुरी यांनी एक मृत्यूपत्र लिहीले होते त्यामध्ये त्यांच्या रत्नांच्या (मौल्यवान दगडांच्या) नशीबाचे वर्णन केले होते आणि त्यामध्ये एका कोड्याचा देखील समावेश आहे. त्यांचा मुलगा खोईसनाम आणि त्यांच्या 99 नातेवाईकांना त्यांच्या मृत्यूपत्राच्या वाचनासाठी आमंत्रित केले होते. त्यांना त्यांचे हे सर्व रत्न त्यांच्या मुलाला द्यायचे होते, परंतु तिला माहित होते की तिने जर असे केले असते तर त्याचे सर्व नातेवाईक मिळून त्याला त्रास देतील. तिला अशी आशा होती की कोडे सोडविण्यासाठी ज्या गोष्टींची माहिती असणे गरजेचे होते. ते सर्व तिने त्याला आधिच शिकविलेले आहे. तिने आपल्या मृत्यूपत्रामध्ये खालील माहिती नमूद केली आहे.

"मी एक कोडे बनविले आहे. जर तुम्ही सर्व 100 जणांनी एकाचवेळी त्याचे उत्तर दिले तर तुम्हाला ही माझी रत्ने समान प्रमाणात प्रत्येकाला वाटून मिळतील. तरी सुद्धा, जर तुम्ही या प्रश्नाचे उत्तर सोडविणारे पहिले असाल तर तुम्हाला या सर्व रत्नांचा वारसा तुमच्याकडेच राहील. "तुम्हाला यासाठी शुभेच्छा".

मंत्री खोइसनाम आणि त्यांच्या 99 नातेवाईकांना एका गुप्त हवेलीमधील खोलीत घेवून गेले ज्यामध्ये 100 लॉकर्स होते.

मंत्र्यानी पुढे स्पष्ट केले की, "प्रत्येक व्यक्तीला 1 ते 100 पर्यंतच्या अंकाचे क्रमांक दिले."

- व्यक्ती 1 ने प्रत्येक लॉकर उघडायचा आहे.
- व्यक्ती 2 ही प्रत्येक दुसऱ्या लॉकरला खुंटीने बांधेल (म्हणजेच ते उघडे असल्यास बंद करेल आणि ते बंद असेल तर उघडेल.)
- व्यक्ती 3 ही प्रत्येकी तिसऱ्या लॉकरला खुंटीने बांधेल. (तिसरी, सहावी, नववी .....इ. हे पुढे चालू राहील.)
- व्यक्ती 4 ही प्रत्येकी चौथ्या लॉकरला खुंटीने बांधेल. (चौथे, आठवे, बारावे आणि इ. हे पुढे चालू राहील.)

हे सर्व त्या 100 जणांची पाळी येईल तोपर्यंत चालू राहील.

शेवटी, कांही लॉकर्स उघडे राहतील. तिजोरीतील नशीबाचा कोड सुरक्षितपणे. हे उघडे लॉकर्स उघड करतात.

? ही प्रक्रिया सुरु होण्या पूर्वीच खोईसनामला कळते की शेवटी कोणते लॉकर्स उघडे असतील.
तर याचे उत्तर त्याने कसे शोधले असावे.
सुचना: प्रत्येक लॉकर किती वेळा टॉगल (खुंटीने बांधला आहे ते शोधा.)



जर लॉकर विषम संख्येने टॉगल केले तर ते उघडे राहतील. नाहीतर ते बंद असतील. लॉकर किती वेळा टॉगल गेले आहेत हे लॉकर क्रमांकाच्या संख्येइतकेच राहतील. उदाहरणार्थ. 6 वा लॉकर हा व्यक्ती 1 ने उघडलेला आहे तर व्यक्ती 2ही त्याला बंद करते. व्यक्ती 3 ही उघडते आणि व्यक्ती 6वी ती बंद करते.

संख्या 1,2,3 आणि 6 या 6 चे अवयव आहेत. जर अवयवांची संख्या सम असेल तर लॉकर सम संख्येच्या व्यक्तीमार्फत टॉगल केले जातील आणि शेवटी ते बंद होतील.

6:
1×6
2×3
1, 2, 3, 6 हे अवयव आहेत.

लक्षात घ्या की, संख्येच्या प्रत्येक अवयवाना एक "भागीदारी अवयव" असतो त्यामुळे अवयवांच्या जोडीच्या गुणाकाराने दिलेली संख्या मिळते. येथे, 1 आणि 6 हे 6 चे भागीदारी अवयव आहेत आणि 2 व 3 हे दुसरी जोडी तयार करतात.

(?) प्रत्येक संख्येला सम संख्येचे अवयव असतात का?

1:
1×1
एकमेव अवयव 1 हा आहे.

4:
1×4
2×2
1, 2, 4 हे अवयव आहेत.

9:
1×9
3×3
1, 3, 9 हे अवयव आहेत.

कांही उदाहरणामध्ये जसे की 2×2, येथे आपल्याला दिसेल की जोडीतील संख्या समान आहेत.

(?) तुम्ही या अंतर्ज्ञानाचा वापर विषम संख्येच्या अवयवासह अधिक संख्या शोधण्यासाठी करू शकाल का?

उदाहरणार्थ, 36 ची अवयव जोडी 6×6 आहे, जेथे दोन्ही संख्या 6 आहेत. या संख्येला विषम संख्येचे अवयव आहेत का? जर 6 च्या व्यतिरीक्त 36 चा वेगळा अवयव हा भागीदार वेगळा असेल तर आपण खात्रीने सांगू शकतो की 36 ला विषम संख्येने अवयव आहेत. हे सत्य आहे का ते तपासा.

म्हणून खालील सर्व संख्याना विषम संख्येचे अवयव आहेत.

$$1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \ldots$$

एखाद्या संख्येचा त्याच संख्येशी गुणाकार म्हणून व्यक्त केलेला असेल त्याला **वर्ग संख्या** किंवा फक्त **वर्ग** असे म्हणतात केवळ संख्या ज्याना विषम संख्येने अवयव असतात त्यांना वर्ग म्हणतात. कारण त्यांना प्रत्येकी एक अवयव असतो जो त्याच्याशीच गुणला असता त्या संख्येइतका बनतो. म्हणून ज्या लॉकरचा क्रमांक वर्ग असतो तो तो प्रत्येक लॉकर उघडा राहील.

? उघड्या असलेल्या लॉकरच्या संख्या लिहा.

खोईसनाम ताबडतोबपणे या 10 लॉकर्समधून शब्दांचे संकेत गोळा करतो आणि ते वाचतो. "पासकोड (उघडण्याचा संकेत) मध्ये पहिल्या पाच लॉकर च्या संख्या आहेत ज्याना अगदी दोन वेळा स्पर्श केला होता".

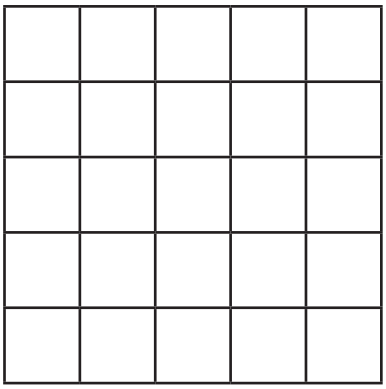
? हे पाच लॉकर कोणते आहेत?

दोन वेळा टॉगल केलेले लॉकर हे मुळ संख्या आहेत, कारण प्रत्येक मुळ संख्येमध्ये 1 आणि ती संख्या हे अवयव आहेत. त्यामुळे कोड (संकेत) 2-3-5-7-11 हा आहे.

1.1. वर्ग संख्या [Square Numbers]

1,4, 9, 16....., या संख्यांना वर्ग संख्या असे का म्हणतात ? आपल्याला माहित आहे की चौरसातील एकक वर्ग संख्या या त्याच्या बाजूंचा गुणाकार आहे. (चौरसाचे क्षेत्रफळ) खालील कोष्टकामध्ये वेगवेगळ्या बाजू असलेल्या चौरसांची क्षेत्रफळे दिलेली आहेत.

बाजूंची लांबी (एककामध्ये)	क्षेत्रफळ (चौरस एककामध्ये)
1	$1 \times 1 = 1$ चौ. एकके
2	$2 \times 2 = 4$ चौ. एकके
3	$3 \times 3 = 9$ चौ. एकके
4	$4 \times 4 = 16$ चौ. एकके
5	$5 \times 5 = 25$ चौ. एकके
10	$10 \times 10 = 100$ चौ. एकके



आपण वर्गासाठी खालील चिन्हे वापरतो.

$1 \times 1 = 1^2 = 1$
$2 \times 2 = 2^2 = 4$
$3 \times 3 = 3^2 = 9$
$4 \times 4 = 4^2 = 16$
$5 \times 5 = 5^2 = 25$
⋮

सामान्यपणे कोणत्याही n या संख्येसाठी आपण $n \times n = n^2$, असे लिहितो. ते 'n' चा वर्ग असे वाचतात.

$\frac{3}{5}$ आणि 2.5 एकके बाजूंची लांबी असणारे चौरस आपल्याला मिळतील का?

होय, चौरस एककामध्ये त्यांची क्षेत्रफळे $(\frac{3}{5})^2 = (\frac{3}{5}) \times (\frac{3}{5}) = (\frac{9}{25})$,

..... आणि $(2.5)^2 = (2.5) \times (2.5) = 6.25$.

नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गाला **पूर्ण वर्ग** असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ, 1, 4, 9, 16, 25..... सर्व पूर्ण वर्ग आहेत.

पूर्ण वर्गाचे नमुने आणि गुणधर्म:

पहिल्या 30 नैसर्गिक संख्यांचे वर्ग शोधा आणि खालील कोष्टक पूर्ण करा.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 = 9$	$13^2 =$	
$4^2 = 16$	$14^2 =$	
$5^2 = 25$	$15^2 =$	
$6^2 =$	$16^2 =$	
$7^2 =$	$17^2 =$	
$8^2 =$	$18^2 =$	
$9^2 =$	$19^2 =$	
$10^2 =$	$20^2 =$	



(?) तुमच्या लक्षात कोणते नमुने आले आहेत? तुमची निरीक्षणे मांडा आणि अनुमान काढा. वरील कोष्टकातील संख्यांचा अभ्यास करा या संख्यांच्या एकक स्थानी कोणते अंक आहेत? त्या सर्व संख्याचा शेवट 0, 1, 4, 5, 6 किंवा 9 अंकानी होतो. त्यापैकी कोणत्याही संख्यांचा शेवट 2, 3, 7 किंवा 8 अंकानी होत नाही.



(?) जर एखाद्या संख्येचा शेवट 0, 1, 4, 5, 6 किंवा 9 अंकानी होत असेल तर त्या नेहमी वर्ग असतात का? 16 आणि 36 या दोन्ही वर्ग संख्या असून त्यांच्या एकक स्थानी 6 हा अंक आहे. तरीसुध्दा 26 या संख्येच्या एकक स्थानी 6 अंक असून सुध्दा ती वर्ग संख्या नाही म्हणून केवळ संख्येच्या एकक स्थानी असलेल्या अंकाकडे पाहून ती संख्या वर्ग आहे की नाही हे ठरवू शकत नाही, परंतु एकक स्थानावरील अंक आपल्याला सांगू शकतो की ती संख्या वर्ग आहे की नाही. जर संख्याचा शेवट 2, 3, 7 किंवा 8 या अंकानी होत असेल तर आपण निश्चितपणे सांगू शकतो की ती संख्या वर्ग नाही.

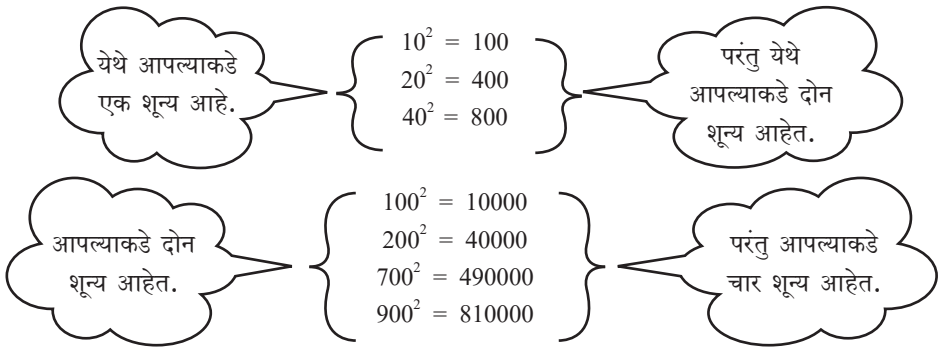
(?) अशा 5 संख्या लिहा की त्यांच्या एकक स्थानांचा अंक पाहून त्या वर्ग संख्या नाहीत हे ठरवू शकाल. 1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2 आणि 29^2 या सर्व संख्यांच्या एकक स्थानी 1 आहेत. पुढील दोन वर्ग लिहा. लक्षात घ्या की जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 1 किंवा 9 हे अंक असतील तर त्या संख्यांच्या वर्गाचा शेवट 1 ने होतो.

(?) 6 अंकाने शेवट होणाऱ्या सख्यांच्या वर्गाचा विचार करुया. $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, $196 = 14^2$, $256 = 16^2$, $576 = 24^2$ आणि $676 = 26^2$

खालीलपैकी कोणत्या संख्यांच्या एकक स्थानी 6 हा अंक आहे?
(i) 38^2 ii) 34^2 (iii) 46^2 (iv) 56^2 (v) 74^2 (vi) 82^2

(?) तुम्ही यापूर्वी भरलेल्या कोष्टकातील संख्या आणि त्यांचे वर्ग पाहून असे आणखी कांही नमुने शोधा.

खालील संख्या आणि त्यांचे वर्ग विचारात घ्या



(?) जर एखाद्या संख्येच्या शेवटी 3 शून्य असतील तर त्याच्या वर्गाच्या शेवटी किती शून्य असतील ?

(?) संख्येच्या शेवटी असलेल्या शून्यांची संख्या आणि संख्येच्या वर्गाच्या शेवटी असलेल्या शून्यांच्या संख्येविषयी तुमच्या लक्षात काय येते? हे नेहमीच असे घडेल का? आम्ही असे म्हणू शकतो का की संख्येच्या वर्गाच्या शेवटी सम संख्येने शून्य असतात?

(?) आपण संख्या आणि त्यांचा वर्ग यांच्या समानतेविषयी कांही सांगू शकतो का?

पूर्ण वर्ग आणि विषम संख्या

दोन क्रमवार वर्गातील फरकाचा शोध घेऊया, तुमच्या लक्षात काय येते?

$4-1=3$ $9-4=5$ $16-9=7$ $25-16=9$

पुढील कांही वर्ग संख्यासाठी ही मांडणी होऊ शकते का ते पहा.

यावरून आपल्याला असे दिसून येते की 1 पासून सुरुवात करून क्रमवार विषम संख्याची बेरीज करत गेल्यास खालीलप्रमाणे वर्ग संख्या मिळतात.

$1 = \mathbf{1}$

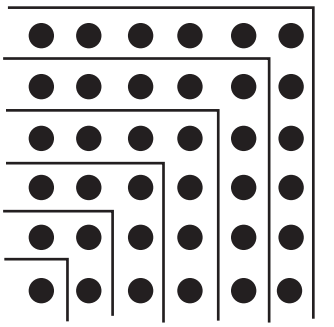
$1 + 3 = \mathbf{4}$

$1 + 3 + 5 = \mathbf{9}$

$1 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{16}$

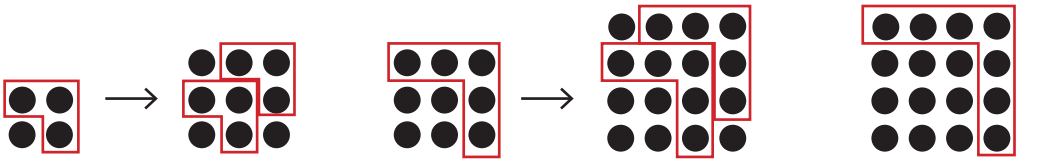
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \mathbf{36}$



तुम्हाला 6 वी च्या वर्गातील हा नमुना आठवतो का ?

खालील चित्र स्पष्ट करते की प्रत्येक उलट केलेले L हे पुढील विषम संख्या का देते?



आपण पाहू शकतो की पहिल्या "n" विषम नैसर्गिक संख्याची बेरीज n^2 असते किंवा प्रत्येक वर्ग संख्या ही 1 पासून सुरु होणाऱ्या क्रमवार विषम संख्यांची बेरीज असते.



कांही वेळेला गणितमध्ये युक्तीवाद आणि तर्क हे शब्दाविना सादर केले जाऊ शकतात, दृष्ये हीच स्वतः सिध्दता देऊ शकतात.

तसेच क्रमवार विषम संख्याची वजाबाकी करून संख्या पूर्ण वर्ग आहे की नाही हे शोधू शकतो. 25 ही संख्या विचारात घ्या, क्रमवारपणे 1, 3, 5... या वजा करत चला जोपर्यंत '0' (शून्य) मिळत नाही किंवा ओलांडत नाही.

$25 - 1 = 24$ $\quad 24 - 3 = 21$ $\quad 21 - 5 = 16$ $\quad 16 - 7 = 9$ $\quad 9 - 9 = 0$

याचा अर्थ $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ हा सुध्दा पूर्ण वर्ग आहे. कारण येथे आपण पहिल्या पाच विषम संख्या वजा केल्या आहेत. $25 = 5^2$

? वरील नमुना वापरुन 36^2 शोधा. दिलेले आहे की $35^2 = 1225$.

प्रश्नावरून आपल्याला समजून येते की 1225 ही पहिल्या 35 विषम संख्याची बेरीज आहे. 36^2 वर्ग शोधण्यासाठी 1225 ला 36 वी विषम संख्या मिळवावी लागेल.

(?) 36 वी विषम संख्या आम्ही कशी शोधू शकतो?

पहिली विषम संख्या 1 आहे. दुसरी विषम संख्या 3 आहे, तिसरी विषम संख्या 5 आहे. ... 6 वी विषम संख्या 11 आहे आणि असेच पुढे चालू राहील.

(?) n वी विषम संख्या कोणती ?

n वी विषम संख्या $2n$-1 ही आहे.

म्हणून 36 वी विषम संख्या 71 ही आहे.

1225 मध्ये 71 मिळविले तर आम्हाला 1296 मिळतील. ती म्हणजे 36^2 आहे. एक संख्या जी पूर्ण वर्ग नाही तिचा विचार करा ती म्हणजे 38 यामधून 1 पासून सुरवात करून क्रमवार विषम संख्या वजा करू.

$38 - 1 = 37$ $37 - 3 = 34$ $34 - 5 = 29$ $29 - 7 = 22$ $22 - 9 = 13$

$13 - 11 = 2$ $2 - 13 = -11$

यावरून असे दिसून येते की 38 ही 1 ने सुरु होणाऱ्या क्रमावर विषम संख्यांची बेरीज म्हणून व्यक्त करता येत नाही.

म्हणून आम्ही असे म्हणू शकतो की जर नैसर्गिक संख्या 1 पासून सूरू करून क्रमवार विषम नैसर्गिक संख्या बेरजेच्या स्वरूपात व्यक्त करता येत नसेल तर ती पूर्ण वर्ग संख्या नसते. आम्ही हा निकाल वापरून नैसर्गिक संख्या पूर्ण वर्ग आहेत की नाहीत हे पाहू शकतो.

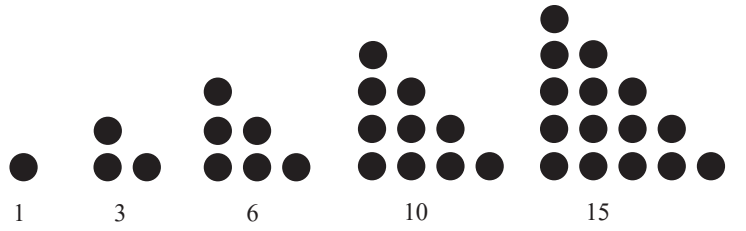
(?) दोन सलग किंवा क्रमवार पूर्ण वर्ग संख्यांच्यामध्ये किती संख्या आहेत हे आपण शोधू शकतो याचा नमुना तुमच्या लक्षात येतो का?

(?) 1 ते 100 यामध्ये किती पूर्ण वर्ग संख्या आहेत? तसेच 101 ते 200 यामध्ये किती वर्ग संख्या आहेत? यापूर्वी तुम्ही पूर्ण केलेल्या वर्ग संख्यांच्या कोष्टकाचा वापर करून खालीलप्रमाणे दिलेल्या जागेमध्ये भरून प्रत्येकी जागामध्ये 100 मधील वर्गाचे कोष्टक रचा.

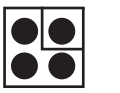
1 –100	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500
_____	_____	_____	_____	_____
501 – 600	601 – 700	701 – 800	801 – 900	901 – 1000
_____	_____	_____	_____	_____

पूर्ण वर्ग आणि त्रिकोणी संख्या

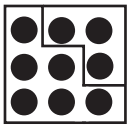
तुम्हाला त्रिकोणी संख्या आठवतात का?



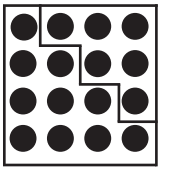
? तुम्हाला त्रिकोणी संख्या आणि वर्ग संख्या यामध्ये कोणतातरी संबंध दिसून येतो का ? दर्शविलेला नमुना पुढे वाढवा आणि पुढील पदे काढा.



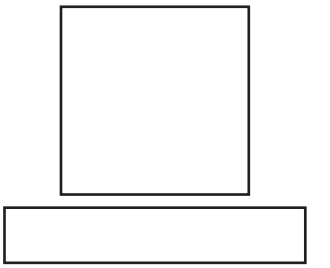
$1 + 3 = 4 = 2^2$



$3 + 6 = 9 = 3^2$



$6 + 10 = 16 = 4^2$



वर्गमूळे [Square Roots]

चौरसाचे क्षेत्रफळ 49 चौ.सें.मी. आहे तर त्याच्या बाजूची लांबी किती? आपल्याला माहित आहे की $7 \times 7 = 49$ किंवा $7^2 = 49$

त्यामुळे 49 चौ सें.मी. क्षेत्रफळ असलेल्या चौरसाची बाजू 7 सें. मी. आहे. आपण 7 हे 49 चे **वर्गमूळ** आहे असे म्हणतो.

सामान्यपणे जर $y = x^2$ असेल तर x हे y चे **वर्गमूळ** आहे.

? 64 चे वर्गमूळ किती ?

आपल्याला माहित आहे की $8 \times 8 = 64$. त्यामुळे 64 चे वर्गमूळ 8 आहे. जर -8×-8 असेल तर काय? ते सुध्दा 64 आहेत.

$\therefore 8^2 = 64$ आणि $(-8)^2 = 64$

त्यामुळे 64 चे वर्गमूळ हे +8 आणि -8 आहे.

प्रत्येक पुर्ण वर्गाला दोन पूर्णांक वर्गमूळे असतात. एक धन आणि दुसरी ऋण असते. एखाद्या संख्येचे वर्गमूळ हे $\sqrt{\ }$ ने दर्शवितात.

म्हणून $\sqrt{64} = \pm 8$ आणि $\sqrt{100} = \pm 10$

लक्षात घ्या की, $\sqrt{8^2} = \pm 8$ आणि $\sqrt{10^2} = \pm 10$. सामान्यपणे $\sqrt{n^2} = \pm n$

या प्रकरणात आपण फक्त धन वर्गमूळाचा विचार करणार आहोत.



? 576 आणि 327 यासारख्या संख्या दिलेल्या असतील तर त्या पूर्ण वर्ग आहेत की नाहीत ते कसे सांगू शकतो? जर त्या पूर्ण वर्ग असतील तर त्यांचे वर्गमूळ कसे शोधले जाऊ शकते?

आपल्याला माहित आहे पूर्ण वर्ग संख्येचा शेवट 1, 4, 9, 6, 5 किंवा शून्यांची संख्या सम असते. परंतु या अटीची पुर्तता करणारी संख्या ही पूर्ण वर्ग आहे की नाही हे निश्चित नाही.

आपण स्पष्टपणे सांगू शकतो की 327 ही पूर्ण वर्ग संख्या नाही. तरी सुध्दा आम्ही 576 ही पूर्ण वर्ग आहे की नाही हे खात्रीपूर्वक सांगू शकत नाही.

1. आपण सर्व वर्ग संख्यांची क्रमवार यादी करून त्यामध्ये 576 येतात का ते पाहू शकतो. आपल्याला माहित आहे की, 20^2=400, आपण 21, 22, 23..... इ. या संख्याचे वर्ग 576 मिळेपर्यंत शोधू शकतो किंवा 576 पेक्षा मोठी संख्या मिळेपर्यंत शोधू शकतो.

   $20^2 = 400$, $21^2 = 441$ $22^2 = 484$ $23^2 = 529$ $24^2 = 576$

   तरी पण ही पध्दत मोठ्या संख्यांचे वर्गमूळ काढण्यासाठी पुरेशी नाही.

2. लक्षात घ्या की प्रत्येक वर्ग 1 पासून सुरू होणाऱ्या क्रमवार विषम संख्यांच्या बेरजेच्या स्वरुपात व्यक्त करता येतात.

   $\sqrt{81}$ याचा विचार करा.

   $81 - 1 = 80$ $80 - 3 = 77$ $77 - 5 = 72$ $72 - 7 = 65$ $65 - 9 = 56$

   $56 - 11 = 45$ $45 - 13 = 32$ $32 - 15 = 17$ $17 - 17 = 0$

   81 मधून आपण 1 पासून सुरु होणाऱ्या क्रमवार विषम संख्या वजा करत गेले असता 9 व्या पायरीत 0 मिळतो म्हणून $\sqrt{81} = 9$

   ही पध्दत वापरून आपण 729 चे वर्गमूळ शोधू शकतो का? होय परंतु ही पध्दत वेळ काढू आणि कंटाळवाणी आहे.

3. आपल्याला माहित आहे की, एका पुर्णांकाचा त्याच्याशीच गुणाकार केला असता पूर्ण वर्ग संख्या मिळते. संख्येकडे पाहून मूळ अवयवीकरण हे पूर्ण वर्ग आहे की नाही हे शोधण्यास मदत होते का?

   होय. जर आपण एखाद्या संख्येच्या मूळ अवयवाना दोन समान गटामध्ये विभागून नंतर त्या दोन गटातील मूळ अवयवांचा गुणाकार करून वर्गमूळाचे स्वरूप शोधू शकतो.

? 324 ही पूर्ण वर्ग संख्या आहे का ?

$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

यांचा असा ही गट करू शकतो. $324 = (2 \times 3 \times 3)(2 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2$

आपण हे मूळ अवयव जोडीमध्ये सुध्दा लिहू शकतो. ते म्हणजे

$324 = (2 \times 2)(3 \times 3)(3 \times 3)$

हे 324 हे पूर्ण वर्ग आहे हे दर्शविते. म्हणून

$324 = (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2$

म्हणून $\sqrt{324} = 18$

? 156 हा पूर्ण वर्ग आहे का?

156 चे मूळ अवयवीकरण $2 \times 2 \times 3 \times 13$ हे आहे.

या अवयवांची आपण जोडी करू शकत नाही.

म्हणून 156 ही पूर्ण वर्ग संख्या नाही.

? मूळ अवयवीकरणाने 1156 आणि 2800 हे पूर्ण वर्ग आहेत का ते ओळखा.

आपल्याला परिचित असलेल्या जवळील पूर्ण वर्गाकडे पाहून आणि नंतर शोधण्यासाठीच्या कालावधी कमी करून आपण मोठ्या संख्यांच्या पूर्ण वर्गाचा अंदाज करू शकतो. उदाहरणार्थ $\sqrt{1936}$ चे वर्गमूळ शोधताना आपण पुढीलप्रमाणे विचार करु शकतो.

(i) 1936 ही संख्या 1600 (40^2) आणि 2500 (50^2), $40 < \sqrt{1936} < 50$.

(ii) 1936 चा शेवटचा अंक 6 आहे म्हणून वर्गमूळाचा शेवटचा अंक 4 किंवा 6 पैकी आहे. तो 44 किंवा 46 असू शकतो.

(iii) जर आपण 45^2 ची गणना केली तर त्याची तुलना 1936 शी करुन त्यांचा कालावधी 40-50 पासून 40-45 किंवा 45-50 यापैकी असू शकतो. आपण $(45)^2$ हे
$(40 + 5)(40 + 5) = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$ असे लिहितो.

(iv) $2025 > 1936$ म्हणून $40 < \sqrt{1936} < 45$

(v) (ii) या मुद्यावरून निरीक्षणाने आपण अंदाज करू शकतो आणि पडताळू शकतो की $\sqrt{1936} = 44$ आहे.

खालील घटनेचा विचार करा.

अरिबाम आणि बिजौ एक खेळ खेळू शकतात. एकटा संख्या सांगतो आणि दुसरा त्याचे उत्तर वर्गमूळात देतो. अरीबाम सुरुवात करून 25 असे म्हणतो बिजौ लगेच 5 असे उत्तर देतो. नंतर बिजौ

म्हणतो 81 आणि अरिबाम 9 हे उत्तर देतो. अरिबाम 250 म्हणेपर्यंत हा खेळ सुरु राहतो. बिजौ याचे उत्तर देऊ शकत नाही कारण ती पूर्ण वर्ग नाही. अरिबाम बिजौला पुन्हा 250 च्या वर्गमूळाच्या जवळील संख्या कमीतकमी सांगायला सांगतो यासाठी बिजौला 250 चे वर्गमूळ काढावे लागणार आहे.

आपल्याला माहित आहे की $100 < 250 < 400$ आणि $\sqrt{100} = 10$ आणि $\sqrt{400} = 20$ म्हणून $10 < \sqrt{250} < 20$

परंतु अजूनही आपण 250 च्या वर्गमूळाच्या जवळपास नाही.

आम्हाला माहित आहे की $15^2 = 225$ आणि $16^2 = 256$

म्हणून $15 < \sqrt{250} < 16$ ज्याअर्थी 250 ही 225 पेक्षा 256 या संख्येजवळील आहे. अंदाजे $\sqrt{250}$ हे 16 आहेत. आपल्याला हे ही माहित आहे की ती 16 पेक्षा कमी आहे. येथे वर्गमूळाचा अंदाज करताना आणखी एक समस्या आहे.

आखिलकडे 125 चौ. सें. मी. या क्षेत्रफळाचा चौरसाकृती कपड्याचा तुकडा आहे. 15 सेंमी बाजू असलेला चौरसाकृती रुमाल या कपड्यापासून तयार करु शकतो का? हे त्याला पाहायचे आहे. जर नसेल तर त्याला बाजूची लांबी पूर्णांक असणारा जास्तीत जास्त आकाराचा रुमाल या कपड्यापासून कापायचा आहे. 125 ही पूर्ण वर्ग नाही. जवळील पूर्ण वर्ग संख्या $11^2 = 121$ आणि $12^2 = 144$ आहे. म्हणून या कपड्यातून बाजूची लांबी 11 सें. मी. पूर्णांक असलेला रुमाल होऊ शकतो.

? शोधा पाहू. [Find it Out]

1. खालीलपैकी कोणत्या पूर्ण वर्ग संख्या नाहीत ?
   (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089
2. 64^2, 108^2, 292^2, 36^2 यापैकी कोणत्या संख्येचा शेवटचा अंक 4 असेल ?
3. $125^2 = 15625$ हे दिलेले आहे तर 126^2 ची किंमत किती?
   (i) $15625 + 126$ (ii) $15625 + 26^2$ (iii) $15625 + 253$
   (iv) $15625 + 251$ (v) $15625 + 51^2$
4. 441 चौ. मी. क्षेत्रफळ असणाऱ्या चौरसाच्या बाजूची लांबी शोधा.
5. 4, 9 आणि 10 या संख्यांनी प्रत्येकी भाग जाणारी लहानात लहान वर्ग संख्या काढा.
6. 9408 ला कोणत्या लहानात लहान संख्येने गुणले असता येणारा गुणाकार ही पूर्ण वर्ग संख्या होईल? त्याचे वर्गमूळ काढा.
7. खालील संख्यांच्या वर्गामध्ये येणाऱ्या संख्या किती?
   (i) 16 आणि 17 (ii) 99 आणि 100

8. खालील नमुन्यामधील गाळलेल्या जागा संख्यांनी भरा.

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$

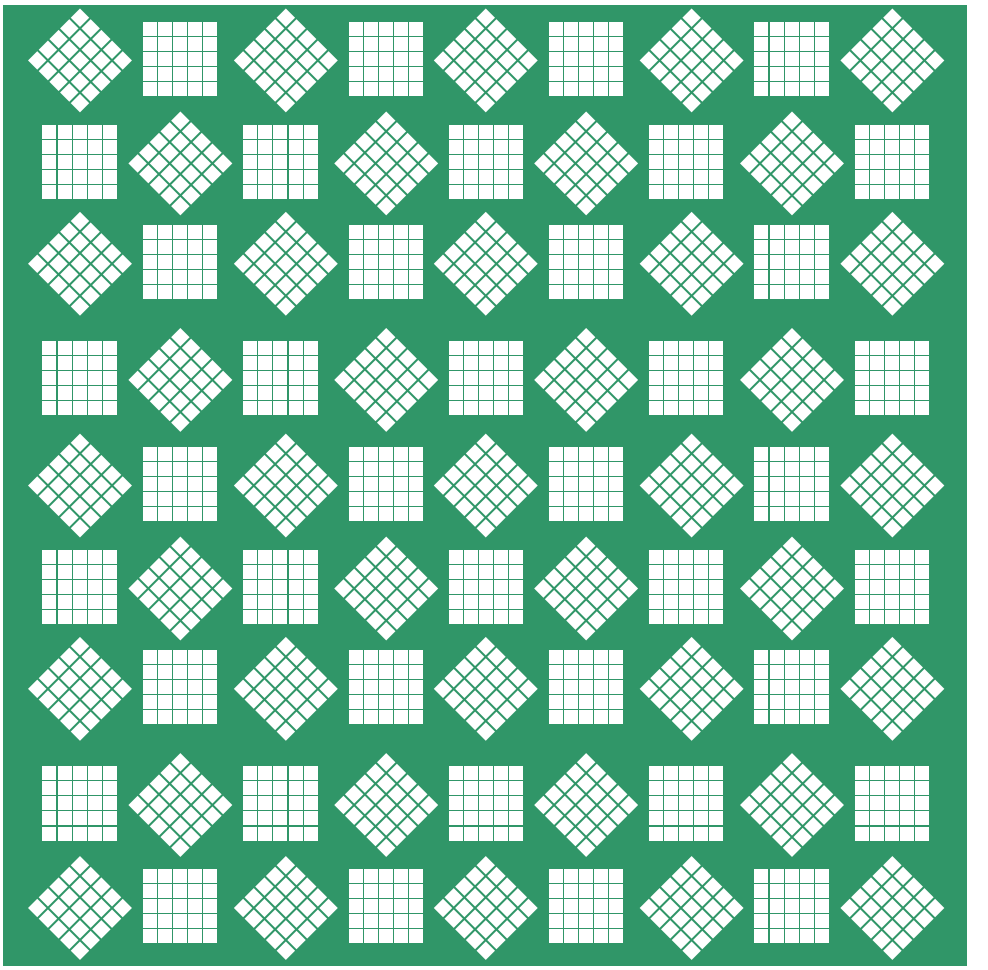
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

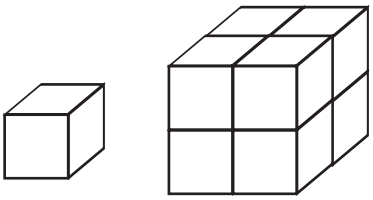
$$4^2 + 5^2 + 20^2 = (\_\_\_)^2$$

$$9^2 + 10^2 + (\_\_\_)^2 = (\_\_\_)^2$$

9. खालीलप्रमाणे दिलेल्या चित्रामध्ये किती सुक्ष्म (लहान) चौरस आहेत? लहान चौरसांच्या संख्येचे मूळ अवयवीकरण लिहा.



1.2. घन संख्या [Cubic Numbers]



भुमितीमधील घन हा शब्द तुम्हाला माहित आहे. घन ही एक भरीव आकृती असून तिच्या सर्व बाजू एकमेकाला काटकोनात मिळतात आणि समान असतात 2 सें. मी. बाजूचा घन बनविण्यासाठी एक सें. मी. बाजूचे किती घन घ्यावे लागतील?

? 1 सें. मी. बाजूच्या किती घनापासून 3 सें. मी. बाजूचा घन बनतो ?

1, 8, 27, ... या संख्यांचा विचार करा.

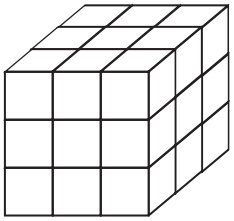
या संख्यांना **पूर्ण घन** असे म्हणतात. त्यांना असे का म्हणतात हे तुम्ही पाहिलात का? या संख्या त्याच संख्येला तीन वेळा गुणाकार करून मिळविल्या जातात.

$$1 = 1 \times 1 \times 1$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

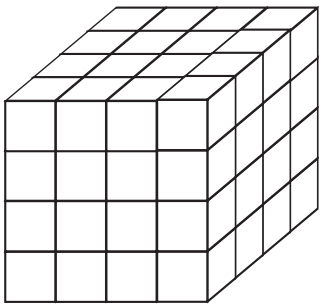
$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

? 9 ही संख्या घन आहे का?



आपण पाहू शकतो की $2 \times 2 \times 2 = 8$ आणि $3 \times 3 \times 3 = 27$ हे दर्शविते की 9 ही पूर्ण घन नाही. तसेच 10 ते 26 मध्ये कोणत्याही घन संख्या नाहीत.

? घनाच्या कडांची लांबी 4 एकक असेल तर त्यामध्ये असणाऱ्या घनांच्या संख्येचा तुम्ही अंदाज करु शकाल का? त्यामध्ये 64 एकक घन आहेत ! जर तुम्ही काळजीपूर्वक लक्ष दिले तर या घनाच्या प्रत्येक थरामध्ये 4×4 एकक घन आहेत. प्रत्येक चौरस थरामध्ये $(4 \times 4) = 16$ एकक घन आहेत. आणि तेथे असेच चार थर आहेत. म्हणून एकूण एकक घनांची संख्या $4 \times 4 \times 4 = 64$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, म्हणून 125 हा घन आहे.



सामान्यपणे कोणत्याही 'n' संख्येसाठी आम्ही तिचा घन $n \times n \times n$ हा n^3 असे लिहितो.

? खालील कोष्टक पूर्ण करा.

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$
$2^3 = 8$	$12^3 =$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$
$5^3 = 125$	$15^3 =$
$6^3 =$	$16^3 =$
$7^3 =$	$17^3 = 4913$
$8^3 =$	$18^3 = 5832$
$9^3 =$	$19^3 = 6859$
$10^3 =$	$20^3 =$

? वरील कोष्टकावरून तुमच्या लक्षात कोणता नमुना आला आहे?



? आपल्याला माहित आहे की वर्ग संख्येचा शेवटचा शक्य असलेला अंक 0,1,4,5,6,9 हा आहे. तर घनामध्ये शक्य असलेला शेवटचा अंक कोणता?

? वर्गाप्रमाणेच तुम्ही 1 अंकी, 2 अंकी आणि 3 अंकी संख्याचे घन शोधू शकाल का?

? घनाचा शेवट अगदी दोन शून्य (00) नी होईल का? स्पष्ट करा.

जसे आपण अपुर्णांकाचे आणि दशांशाचे वर्ग घेऊ शकतो - $(\frac{4}{6})^2$, $(13.08)^2$ आणि $(-6)^2$

आपण अशा संख्यांच्या घनांची सुध्दा गणना करु शकेन - $(\frac{4}{6})^3$, $(13.08)^3$ आणि $(-6)^3$

$$(\frac{4}{6})^3 = (\frac{4}{6}) \times (\frac{4}{6}) \times (\frac{4}{6}) = (\frac{64}{216})$$

$$(13.08)^3 = 13.08 \times 13.08 \times 13.08 = 2237.810112$$

$$(-6)^3 = -6 \times -6 \times -6 = -216.$$



टॅक्सीकॅब संख्या (Taxicab Numbers)

एकदा श्रीनिवास रामानुजन हे जी. एच. हार्डी यांच्या सोबत केंब्रिज विद्यापीठात काम करत असताना, हार्डी हे आजारी रामानुजनना भेटण्यासाठी हॉस्पिटल मध्ये आले होते. हार्डी हे 1729 या संख्येच्या टॅक्सीकॅब मधून प्रवास करून आले होते आणि त्यांनी 1729 ही 'एक कंटाळवाणी संख्या' आहे असे म्हटले होते आणि

पुढे म्हणाले की मला आशा आहे की ही कांही वाईट लक्षणे नाहीत. त्यावेळी रामानुजननी लगेच उत्तर दिले की, "नाही, हार्डी ही एक मनोरंजक संख्या आहे. ते म्हणाले की ही सर्वात लहान संख्या अशी आहे जी दोन घनांची बेरीज म्हणून दोन वेगवेगळ्या प्रकारे व्यक्त केली जाऊ शकते."

$$1729 = 1^3 + 12^3$$
$$= 9^3 + 10^3$$

तेव्हापासून त्या कथेमुळे 1729 ला **हार्डी-रामानुजन** संख्या म्हणून ओळखले जाते आणि ज्या संख्या दोन घनांच्या बेरजेमध्ये दोन वेगवेगळ्या प्रकारे व्यक्त करता येतात त्यांना **टॅक्सीकॅब संख्या** असे म्हणतात.

? 1729 नंतरच्या पुढील दोन टॅक्सीकॅब संख्या 4104 आणि 13832 आहेत. या प्रत्येक संख्या दोन घनांच्या बेरीज म्हणून कोणत्या दोन वेगवेगळ्या प्रकारे व्यक्त करता येतील ते शोधा?

प्रयत्न करा

हे रामानुजनला कसे समजले? बर, त्यांना संख्यांची फार आवड होती. आयुष्यभर त्यांनी संख्यांशी छेडछाड केली. केंब्रिजमध्ये रामानुजनच्या काळात इतर अनियंत्रित वाटणाऱ्या संख्यामध्ये खोलवरचे नमुने पाहण्याची त्यांची क्षमता बघून त्यांचे सहकारी अनेकवेळा आश्चर्यचकित व्हायचे. त्यांचे सहकारी जॉन लिटलवुड एकदा म्हणाले होते की, "प्रत्येक घन पूर्णांक हा त्यांचा (रामानुजन) वैयक्तिक मित्रापैकी एक होता".

पूर्ण घन आणि क्रमवार विषम संख्या

घन संख्यामध्ये सुध्दा क्रमवार विषम संख्या भुमिका बजावितात. खालील नमुन्याकडे पहा.

$$1 = 1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3.$$

नंतर आपल्याला या मालिकेतील खालील क्रमवार संख्याचा सट मिळतो.

$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109.$$

? यांची गणना न करता बेरीज किती होईल हे सांगू शकाल का?

घनमूळ [Cube Roots]

आपल्याला माहित आहे की $8 = 2^3$

आपण 8 चे घनमूळ 2 आहे असे म्हणतो आणि ते $\sqrt[3]{8} = 2$ असे दर्शवितात. अधिक सामान्यपणे जर $y=x^3$ असेल तर x हे y चे घनमूळ आहे. हे आपण $x = \sqrt[3]{y}$ तसेच $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{2^3} = 2$

त्याचप्रमाणे $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ आणि $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 3$ सामान्यपणे $\sqrt[3]{n^3} = n$ एखादी संख्या ही घन आहे की नाही हे आपण कसे शोधू शकतो? यावरून प्रेरणा घेवून जसे वर्गामध्ये पाहिले, त्याप्रमाणे आपण येथे मूळ अवयवीकरण वापरु शकतो का ते पाहू.

? 3375 ही पूर्ण घन आहे का ते तपासू

$$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$$

येथे अवयवाना तीन सारख्याच गटात विभागले जाऊ शकते का ? 3375 साठी आपण (3×5) चे तीन गट करु शकतो. त्यामुळे

$$3375 = (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^3 = 15^3$$

तपासण्याची आणखी पध्दत म्हणजे अवयवांचे त्रिके मध्ये गट करणे,

$$3375 = (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 3^3 \times 5^3$$

याचा अर्थ $\sqrt[3]{3375} = 15$.

? 500 ही पूर्ण घन आहे का ?

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ आम्ही येथे पाहतो की अवयवाना तीन समान गटामध्ये विभागले जाऊ शकत नाही. त्यामुळे 500 ही पूर्ण घन नाही.

संख्येचे मुळ अवयव	च्या घनांचे मूळ अवयवीकरण
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

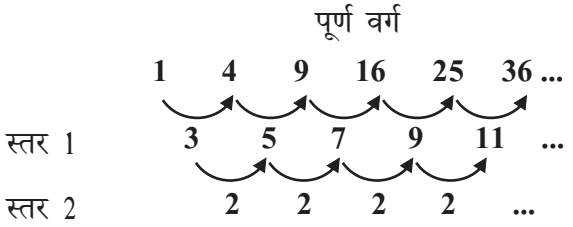
निरीक्षण करा की घनांच्या मूळ अवयवीकरणामध्ये मुळ संख्याचे अवयव तीन वेळा येतात.

? खालील संख्यांचे घनमूळ शोधा.

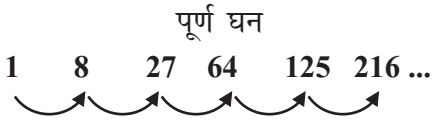
(i) $\sqrt[3]{64}$ = (ii) $\sqrt[3]{512}$ = (iii) $\sqrt[3]{729}$ =

सलग फरक [Successive Differences]

आपल्याला माहित आहे की सलग (क्रमवार) पूर्ण वर्गामधील फरक विषम संख्याचा क्रम देतो. खालील आकृती पहा. जेथे पूर्ण वर्गासाठी क्रमवारपणे फरकांची गणना केली आहे दोन स्तरानंतर फरक सारखाच आहे.



? एका स्तरावर सर्व फरक समान होईपर्यंत पूर्ण घनासाठी स्तरावर सलगपणे फरकांची गणना करा. तुमच्या लक्षात काय येते?



1.3 थोडासा इतिहास (A Pinch of History)



पूर्ण वर्ग आणि पूर्ण घनाची पहिली ज्ञात यादी बेबिलोनियन लोकांनी 1700 इ.पू. मध्ये संकलीत केलेली होती. मातीच्या पाटयावर आढळणाऱ्या या यादीचा उपयोग जलदपणे वर्गमूळ आणि घनमूळ शोधून जमिनीचे मोजमाप स्थापत्य रचना आणि भौमितिक गणना आवश्यक असलेल्या इतर क्षेत्रांशी संबंधित मूळ समस्यांचे निवारण करण्यासाठी केला जात होता.

प्राचीन संस्कृत ग्रंथामध्ये 'वर्ग' हा शब्द चौरसाच्या आकृतीसाठी किंवा त्याचे क्षेत्रफळ तसेच वर्ग हा घातांकासाठी वापरला जात होता आणि 'ghana' (घन) हा शब्द भरीव घन तसेच एकाच समान संख्येचा त्याच संख्येशी तीन वेळा गुणाकार यासाठी वापरला जात होता. चौथा घातांक त्याला वर्ग-वर्ग असे म्हणतात. हे शब्द भारतामध्ये किमान तिसऱ्या शतकापासून वापरले जात होते.

आर्यभट्ट (इ.स. 499) सिद्धांत

"चार समान बाजू आणि तिचे क्षेत्रफळ दर्शविणारी संख्या असलेल्या चौरस आकृतीला **वर्ग** (verga) असे म्हणतात. दोन समान राशींच्या गुणाकाराला देखील **वर्ग** असे म्हणतात."

अशारितीने वर्ग घातांकासाठी **वर्ग** हा शब्द चौरसाच्या आकृत्यांचे आलेखाचे सादरीकरण यामधून उगम पावला आहे.

गणितीय क्रिया $\sqrt{}$ (वर्गमूळ, घनमूळ इ.) साठी 'मूळ' (वनस्पतींचे मूळ) हा शब्द का वापरला ?

याचे कारण आहे प्राचीन भारतामध्ये 'मूळ' (Mula) हा संस्कृत शब्द असून त्याचा अर्थ वनस्पतीचे मूळ, पाया, कारण, उगम इ. असून तो मूळाच्या गणितीय क्रियासाठी वापरला जात असे.

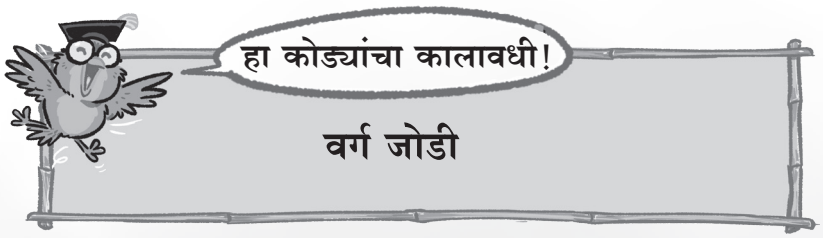
संस्कृतमध्ये वर्गमूळ (Verga Mula) (पाया, कारण, चौरसाचा उगम) हा वर्गमुळासाठी आणि 'घन मूळ' (ghana-Mula) घनमूळासाठी वापरला आहे. मूळांच्या गणितीय संकल्पनेसाठी मूळाचा (Mula) वापर नंतर अरबी आणि लॅटिनमध्ये वनस्पतींच्या मूळासाठी अनुक्रमे जिध्र (Jidhr) आणि मूलांक (radix) या शब्दाव्दारे केला गेला मूळांसाठी 'मूळ' (Mula) हा शब्द किमान पहिल्या शतकापासून भारतामध्ये वापरला जात होता. आणखी एक शब्द पद (Pada) (पाय, पाया, कारण, उगम) ब्रम्हगुप्तानी (इ.स 628) मध्ये स्पष्ट केला आहे. 'कृती' (चौरस) चे पद (pada) मूळ म्हणजे तो चौरस असतो.

शोधा पाहू. [Figure it Out]

1. 27000 आणि 10648 चे घनमूळ काढा.
2. 1323 ला कोणत्या संख्येने गुणले असता ती घन संख्या होईल ?
3. बरोबर की चूक ते लिहा तुमच्या उत्तराचे कारण लिहा.
   (i) कोणत्याही विषम संख्येचा घन सम संख्या असते.
   (ii) 8 ने शेवट होणारी संख्या पूर्ण घन नसते.
   (iii) 2-अंकी संख्येचा घन हा 3-अंकी संख्या सुध्दा असू शकतो.
   (iv) 2-अंकी संख्येच्या घनामध्ये 7 किंवा अधिक अंक असू शकतात.
   (v) घन संख्येमध्ये अवयव विषम संख्येने असतात.
4. तुम्हाला 1331 ही पूर्ण घन संख्या आहे असे सांगितले आहे. तर अवयव न काढता त्या संख्येचे घनमूळ कोणते ते अंदाज करू शकता का? त्याचप्रकारे 4913, 12167 आणि 32768 च्या घनमूळांचा अंदाज करा.
5. खालीलपैकी कोणते मोठे आहे? तुमच्या उत्तराचे कारण लिहा.
   (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$

सारांश [Summery]

- एखाद्या संख्येला त्याच संख्येशी गुणाकार करून मिळणाऱ्या संख्येला **वर्ग संख्या** असे म्हणतात नैसर्गिक संख्यांच्या वर्गाला **पूर्ण वर्ग** म्हणतात.
- पूर्ण वर्ग संख्यांचा शेवट 0, 1, 4, 5, 6 किंवा 9 या अंकानी होतो. वर्ग संख्यांच्या शेवटी सम संख्येनी शून्यांची संख्या असते.
- **वर्गमूळ** म्हणजे वर्गाची व्यस्त क्रिया आहे. प्रत्येक पूर्ण वर्गाला दोन पूर्णांक वर्गमूळे असतात. संख्येचे धन वर्गमूळ '$\sqrt{}$' या चिन्हाने दर्शवितात उदाहरणार्थ $\sqrt{9} = 3$
- एखाद्या संख्येचा तीनवेळा गुणाकार करून मिळविलेल्या संख्येला **घन** असे म्हणतातः उदाहरणार्थ, 1, 8, 27, ... या घन संख्या आहेत.
- जर एखाद्या संख्येचे मूळ अवयव दोन समान गटामध्ये विभागले असतील तर ती संख्या पूर्ण वर्ग असते.
- जर एखाद्या संख्येचे मूळ अवयव तीन समान गटामध्ये विभागलेले असतील तर ते पूर्ण घन असतात
- $\sqrt[3]{\ }$ हे चिन्ह घनमूळ दर्शविते. उदाहरणार्थ $\sqrt[3]{27} = 3$



वर्ग जोडी

3, 6, 10, 15, 1 या संख्यांच्याकडे पहा. त्यांची मांडणी अशी केली आहे की संलग्न संख्यांच्या प्रत्येक जोडीची बेरीज एक वर्ग संख्या होते.

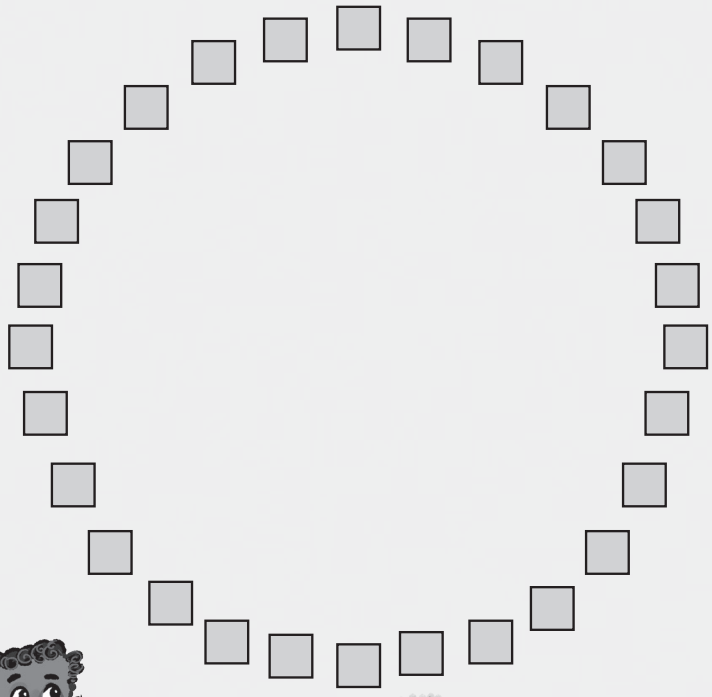
$$3 + 6 = 9, \quad 6 + 10 = 16, \quad 10 + 15 = 25, \quad 15 + 1 = 16.$$

1 ते 17 पर्यंतच्या संख्या (पुन्हा न घेता) एकाच पध्दतीने एक सारख्या ओळीमध्ये मांडूण, प्रत्येक संलग्न संख्यांच्या जोडीची बेरीज वर्ग संख्या असते.

तुम्ही त्यांची मांडणी एका पेक्षा जास्त पध्दतीनी करु शकता का? जर नाही तर त्याचे वर्णन कराल का?



तुम्ही 1 ते 32 पर्यंतच्या संख्यासाठी असेच करू शकाल का? (पुन्हा, पुनरावर्तित न होता) परंतु या संख्यांची मांडणी वर्तुळामध्ये करून.





2 घातांकांचा खेळ (Power Play)

H7L8I7

2.1 घातांकाच्या खेळाचा अनुभव घेणे [Experiencing the Power Play]

एक अशक्य धाडस (An Impossible Venture!)

तुम्हाला शक्य असेल तितके मोठे कागदाचे एक पान घ्या. त्याची एकदा घडी करा. त्यानंतर त्याची पुन्हा-पुन्हा घडी घाला.

? तुम्ही एकमेकावर त्याची किती वेळा घडी घालू शकता ?

ईस्तू म्हणतो. "मी ऐकलय की एका कागदाची घडी 7 पेक्षा जास्त वेळा घालता येत नाही."

रॉक्सी उत्तर देते की, "जर आपण वर्तमान पत्र किंवा टिशू पेपरचा वापर केला तर काय होईल?"

वेगवेगळ्या प्रकारचे कागद घ्या आणि प्रयत्न करुन काय घडते ते पहा.



? समजा की कागदाच्या पानाला तुम्ही तुमच्या मर्जीप्रमाणे कितीही वेळा घडी घालू शकता - 30 वेळा दुमडल्यानंतर त्या कागदाची जाडी किती होईल? याचा अंदाज करा.

46 वेळा घडी घातल्यानंतर कागदाच्या पानाची जाडी किती होईल हे शोधूया समजा की कागदाची जाडी 0.001 सें. मी. आहे.

? खालील कोष्टकामध्ये प्रत्येक घडीनंतर होणारी कागदाची जाडी दिली आहे. निरीक्षण करा की प्रत्येक घडीनंतर कागदाची जाडी दुप्पट होत जाईल.

घडी	जाडी	घडी	जाडी	घडी	जाडी
1	0.002 सें.मी.	7	0.128 सें.मी.	13	8.192 सें.मी.
2	0.004 सें.मी.	8	0.256 सें.मी.	14	16.384 सें.मी.
3	0.008 सें.मी.	9	0.512 सें.मी.	15	32.768 सें.मी.
4	0.016 सें.मी.	10	1.024 सें.मी.	16	65.536 सें.मी.
5	0.032 सें.मी.	11	2.048 सें.मी.	17	≈ 131 सें.मी.
6	0.064 सें.मी.	12	4.096 सें.मी.		

(आपण अंदाजे जवळपासची समान लांबी दर्शविण्यासाठी "≈" हे चिन्ह वापरतो) 10 व्या घडीनंतर जाडी ही फक्त 1 सें. मी (1.024) पेक्षा थोडी जास्त होते.

17 व्या घडीनंतर जाडी सुमारे 131 सें.मी. (4 फुटापेक्षा जास्त होते)

? आता 30 व्या आणि 45 व्या घडीनंतर जाडी किती होईल? अंदाज करा.

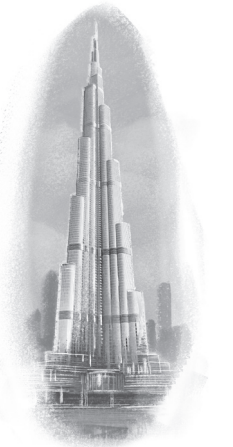


? खालील तक्ता भरा.

घडी	जाडी	घडी	जाडी	घडी	जाडी
18	≈ 262 सें.मी.	21	-	24	-
19	≈ 524 सें.मी.	22	-	25	-
20	≈ 10.4 मी.	23	-	26	-

26 व्या घडीनंतर अंदाजे जाडी 670 मीटर होते. बुर्ज खलिफा दुबईमधील सर्वात उंच इमारत 830 मीटर उंच आहे.

घडी	जाडी	घडी	जाडी
27	≈ 1.3 कि.मी.	29	
28		30	



30 व्या घडीनंतर पेपरची जाडी सुमारे 10.7 कि. मी. होईल. याच प्रकारच्या उंचीवर विमानाचे उड्डाण होते. महासागरामध्ये सापडलेला सर्वात खोल बिंदू म्हणजे मारीयाना ट्रेंच ज्याची खोली 11 कि. मी. आहे.



घडी	जाडी	घडी	जाडी	घडी	जाडी
31	-	36	-	41	-
32	-	37	-	42	-
33	-	38	-	43	-
34	-	39	-	44	-
35	-	40	-	45	-

फक्त 46 घड्यानंतर जाडी 7,00,000 कि. मी. पेक्षा जास्त होते हे सत्य पचविणे अत्यंत कठीण आहे. हा **गुणाकार वाढीचा घातांक** आहे याला **घातांकीय वाढ** असेही म्हणतात. या वाढीचे विश्लेषण करु.

आपण पाहिलत की प्रत्येक घडीनंतर जाडी दुप्पट होत जाते.

चौथी घडी	0.016 सें.मी.
पाचवी घडी	0.032 सें.मी.

9 वी घडी	0.512 सें.मी.
10 वी घडी	1.024 सें.मी.

दोन घड्यानंतर होणाऱ्या जाडीकडे लक्ष द्या. ती किती प्रमाणात वाढली आहे?

चौथी घडी	0.016 सें.मी.
सहावी घडी	0.064 सें.मी.

कोणत्याही तीन घड्यानंतर जाडीमध्ये 8 पटीने वाढ झाली आहे. ($= 2 \times 2 \times 2$) हे सत्य आहे का ते तपासा. याचप्रमाणे कोणत्याही एका बिंदूमध्ये 10 व्या घडीनंतर जाडी 1024 पटीने वाढते. (= 2 ही त्याच्याशीच 10 वेळा गुणली आहे) हे खालील कोष्टकामध्ये दाखविलेले आहे.

घडी	जाडी	पटीमध्ये झालेली वाढ
0 ते 10	1.024 सें.मी. – 0.001 सें.मी. = 1.023 सें.मी.	1.024 ÷ 0.001 = 1024
10 ते 20	10.485 मी. – 1.024 सें.मी. ≈ 10.474 मी.	10.485 मी. ÷ 1.024 सें.मी. = 1024
20 ते 30	10.737 कि.मी. – 10.485 मी. ≈ 10.726 कि.मी.	10.737 कि.मी. ÷ 10.485 मी. = 1024
30 ते 40	10995 कि.मी. – 10.737 कि.मी. ≈ 10984.2 कि.मी.	10995 कि.मी. ÷ 10.737 कि.मी. = 1024

2.2 घातांक चिन्ह आणि क्रिया [Exponential Notation and Operations]

कागदाच्या पानाची सुरूवातीची जाडी 0.001 सें.मी. होती.

एकदा घडी घातल्यानंतर त्याची जाडी 0.001 सें.मी. × 2 = 0.002 सें.मी. झाली.

तिची घडी दोनवेळा घातल्यानंतरची जाडी.

0.001 सें.मी. × 2 × 2 = 0.004 सें.मी. किंवा 0.001 सें.मी. × 2^2 = 0.004 सें.मी. (थोडक्यात)

तिची घडी तीनवेळा घातल्यानंतरची जाडी,

0.001 सें.मी. × 2 × 2 × 2 किंवा 0.001 सें. मी. × 2^3 = 0.008 सें.मी.

तिची घडी 4 वेळा घातल्यानंतरची जाडी

0.001 सें.मी. × 2 × 2 × 2 × 2 किंवा 0.001 सें.मी. × 2^4 = 0.016 सें.मी.

याचप्रमाणे, जेंव्हा कागदाच्या 7 घड्या घातल्यातर त्याच्या जाडीची राशी 0.001 सें.मी. × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 किंवा 0.001 सें.मी. × 2^7 = 0.128 सें.मी. होते.

आपण पाहिलेले आहे की वर्ग ही n^2 आणि घन संख्या ही n^3 ने व्यक्त केली जाते.

$n \times n = n^2$ (n चा वर्ग असे वाचतात किंवा 'n' चा घातांक 2 असेही वाचतात)

$n \times n \times n = n^3$ ('n' चा घन किंवा 'n' चा घातांक 3 असे वाचतात)

$n \times n \times n \times n = n^4$ (n चा घातांक 4 किंवा 'n' चा चौथा घात असे वाचतात)

$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^7$ (n चा घातांक 7 किंवा 'n' चा सातवा घात असे वाचतात) आणि पुढे चालू राहते. सामान्यपणे आपण n^a असे लिहितो n चा त्याच्याशीच 'a' वेळा गुणाकार असे दर्शवितात.

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

5^4 हे 625 चे घातांक रूप आहे. येथे 4 हा **घातांक (घात)** आहे आणि 5 हा **आधारांक** आहे. 5^n च्या स्वरुपातील घातांकाना 5 चा घातांक n म्हणतात. $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, इ. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$ यापूर्वीचे 1024 तुम्हाला आठवते का? तेथे याचा अर्थ प्रत्येकी 10 घड्यानंतर जाडी 1024 ने वाढते असा होता.

5^4 हे 5 चा घातांक 4 किंवा 5 चा घात 4 असे वाचतात किंवा 5 चा चौथा घात.

? कागदाच्या पानाची 10 वेळा घडी घातल्यानंतर त्याची जाडी कोणती राशी दर्शविते ? सुरुवातीची जाडी अक्षर संख्या v ने दर्शविली जाते.

(i) $10v$ (ii) $10 + v$ (iii) $2 \times 10 \times v$

(iv) 2^{10} (v) $2^{10}v$ (vi) 10^2v

घातांकीय चिन्हातील आणखी कांही उदाहरणे,

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64.$

$(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3 = -64$

त्याचप्रमाणे, $a \times a \times a \times b \times b$ हे $a^3 b^2$ असे व्यक्त करतात (a चा घन, b चा वर्ग असे वाचतात) $a \times a \times b \times b \times b \times b$ हे $a^2 b^4$ असे व्यक्त करतात (a चा वर्ग, b चा घातांक चार असे वाचतात) आठवण करा की $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$, तर $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

? 32400 ही संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात लिहा आणि त्याचे मूळ अवयव घातांक रूपात दर्शवा.

$32400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$

घातांक रुपामध्ये हे $32400 = 2^4 \times 5^2 \times 3^4$ होते.

2	32400
2	16200
2	8100
2	4050
5	2025
5	405
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

? $(-1)^5$ ची किंमत किती ? ती धन आहे की ऋण आहे ? $(-1)^{56}$ ची किंमत किती ?

? $(-2)^4 = 16$ आहे का ? पडताळून पहा.

0^2, 0^5 ची किंमत किती?
0^n ची किंमत किती?

? **शोधा पाहू. [Find it out]**

1. खालील संख्या घातांक रुपामध्ये व्यक्त करा.

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $y \times y$

   (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

   (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

2. खालीलपैकी प्रत्येक संख्या मूळ अवयवांच्या घातांकाच्या स्वरुपात व्यक्त करा.

   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

3. खालील प्रत्येकाची संख्यात्मक किंमत लिहा.

   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^3$

   (iii) 3×4^4 (iv) $(-3)^2 \times (-5)^2$

   (v) $3^2 \times 10^4$ (vi) $(-2)^5 \times (-10)^6$

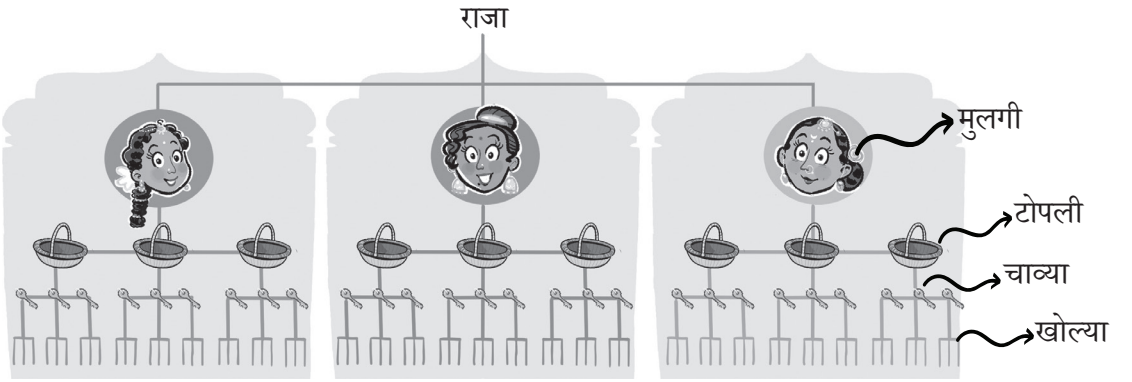
चकाकणारे दगड [The Stones that Shine]



? उत्सुक डोळ्यांच्या तीन मुली, प्रत्येकीकडे तीन टोपल्या आहेत - एक राजेशाही बक्षीस. प्रत्येक टोपलीत 3 चांदीच्या चाव्या (किल्ल्या) होत्या. प्रत्येकी सहजपणे उघडणाऱ्या तीन खोल्या आहेत. प्रत्येक खोलीमध्ये एक, दोन, तीन असे टेबल आहेत. तुम्ही पाहाल की प्रत्येकावर चमकदार दागिने आहेत. प्रत्येक दागिन्यामध्ये (हारामध्ये) इतके सुंदर असे तीन हिरे आहेत. तर त्यापैकी चमकणारे दगड (हिरे) तुम्ही मोजू शकाल का ? (सुचना- टोपलींची आणि खोल्यांची संख्या शोधा)

? तेथे एकूण किती खोल्या आहेत ?

दिलेली माहिती खालीलप्रमाणे दिलेल्यानुसार दृष्यांकृत केली जाऊ शकते.



आकृतीवरुन खोल्यांची संख्या 3^4 आहे. याची गणना आपण तीनचा त्याच्याशीच पुन्हा-पुन्हा गुणाकार करून घेऊ शकतो.

$$3 \times 3 = 9$$
$$9 \times 3 = 27$$
$$27 \times 3 = 81$$
$$81 \times 3 = 243$$

? तेथे एकूण किती हिरे आहेत ? वरील गुणाकाराचा उपयोग करून आम्ही फक्त एकदाच गुणाकार करून ते मिळवू शकता का ?

हिऱ्यांची एकूण संख्या ही $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$ ही आहे.

आपण हे असेही लिहू $3^7 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$ आम्ही ते 3^4 पर्यंत मोजले आहे. 3^7 शोधण्यासाठी आम्हाला केवळ $3^4 (= 81)$ चा $3^3 (= 27)$ शी गुणाकार करावा लागेल.

$$= 3^4 \times 3^3$$
$$= 81 \times 27 = 2187$$

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3^4} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3^3}$$

? 3^7 हे $3^2 \times 3^5$ असे सुध्दा लिहीले जाऊ शकते. तुम्ही असे का याचे कारण देऊ शकता का ? हे सहजरित्या अशा गुणाकारामध्ये वाढविता येते जेथे घातांक हे समान अक्षरी संख्या असतात.

? $p^4 \times p^6$ या गुणाकाराला घातांक रुपात लिहा.

$p^4 \times p^6 = (p \times p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p \times p \times p) = p^{10}$

याचे आपण सामान्यीकरण करु.

$n^a \times n^b = n^{a+b}$ जेथे 'a' आणि 'b' या मोज संख्या आहेत.

? ही निरीक्षणे वापरून खालील संख्यांची गणना करा.

(i) 2^9 (ii) 5^7 (iii) 4^6



4^6 हे खालील दोन पध्दतीनी सोडविले जाऊ शकते,

$(4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^3 \times 4^3$ $= 64 \times 64$ $= 4096.$	$(4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$ $= 16 \times 16 \times 16$ $= 4096.$
$4^3 \times 4^3$ हे 4^3 चा वर्ग आहे. म्हणजेच $4^3 \times 4^3$ हे $(4^3)^2$ असे सुद्धा लिहिले जाऊ शकते.	$4^2 \times 4^2 \times 4^2$ हे 4^2 चा घन आहे. म्हणजेच $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ हे $(4^2)^3$ असे सुद्धा लिहिले जाऊ शकते.

याच प्रमाणे, $7^4 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^2 \times 7^2 = (7^2)^2$ आणि

$2^{10} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

$= (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$

$= (2^2)^5$

? 2^{10} हा $(2^5)^2$ शी समान आहे का ? ते गुणाकार रुपात लिहा.

$2^{10} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (2^5) \times (2^5)$

$= (2^5)^2$

सामान्यपणे $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b} = n^{ab}$ येथे a, b या मोज संख्या आहेत.

? खालील राशीना घातांकाचा घातांक यामध्ये कमीतकमी दोन प्रकारे लिहा.

(i) 8^6 (ii) 7^{15} (iii) 9^{14} (iv) 5^8

जादुई तलाव (डबके) [Magical Pond]



? एका सुंदर जादुई तलावाच्यामध्ये तेजस्वी गुलाबी कमळे आहेत. प्रत्येक दिवशी या तलावमधील कमळांची संख्या दुप्पट होते. 30 दिवसानंतर हा तलाव कमळांनी पुर्णपणे भरलेला आहे. तर कोणत्या दिवशी हा तलाव कमळांनी अर्धा भरला होता ?

जर तलाव 30 दिवसात कमळांनी भरत असेल तर 29 व्या दिवशी तो किती कमळांनी व्यापलेला होता ?

ज्याअर्थी प्रत्येक दिवशी कमळांची संख्या दुप्पटीने वाढत होती त्याअर्थी 29 व्या दिवशी तलाव अर्धा भरला असावा.

? ज्यावेळी तलाव (i) पूर्ण व्यापलेला (ii) अर्धा व्यापलेला होता, त्यावेळी तलावामध्ये असलेल्या कमळांची संख्या घातांक रुपात लिहा.

? तेथे आणखी एक तलाव होता ज्यामध्ये प्रत्येक दिवशी कमळांची संख्या तिप्पट होत होती. जेंव्हा दोन्ही तलावामध्ये कमळ नव्हते, तेव्हा दमयंतीने दुप्पटीने वाढणाऱ्या तलावामध्ये एक कमळ ठेवले. त्यानंतर 4 दिवसानी ती सर्व कमळे घेऊन तिप्पटीने वाढणाऱ्या तलावामध्ये ठेवली. तर तिप्पटीने वाढणाऱ्या तलावामधील 4 दिवसानंतर कमळांची संख्या किती ?

4 दिवसानंतर दुप्पटीने वाढणाऱ्या तलावामधील कमळ $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

पुढील 4 दिवसानंतर तिप्पटीने वाढणाऱ्या तलावामधील कमळ $2^4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

? जर दमयंतीने तलावामध्ये ठेवलेल्या फुलांचा क्रम बदलला असता तर तिथे किती कमळे असतील ?

$$1 \times 3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

? हा गुणाकार m^n या घातांक रुपात व्यक्त केला जाऊ शकतो का ? जेथे m, n या कांही मोज संख्या आहेत.

संख्याचा पुन्हा गट करुन $= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$

$$= (3 \times 2)^4 = 6^4$$

सामान्यरूप $m^a \times n^a = (mn)^a$ जेथे 'a' ही मोज संख्या आहे.

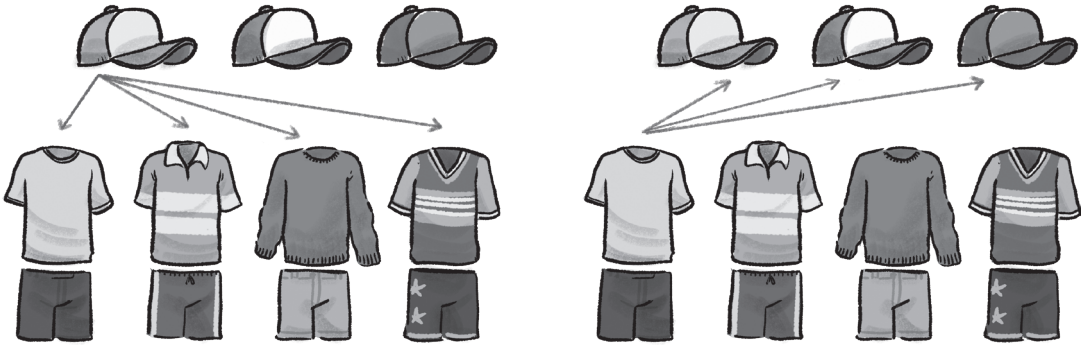
ही निरीक्षणे वापरून $2^5 \times 5^5$ ची किंमत काढा.

$\frac{10^4}{5^4}$ ला संक्षिप्तरूप द्या आणि घातांक रुपात लिहा. सामान्यरित्या आपण $\frac{m^a}{n^a} = (\frac{m}{n})^a$ असे दर्शवू शकतो.

किती संयोग (एकीकरण) [How Many Combinations]

? ईस्तूकडे 4 पोषाख (कपडे) आणि 3 टोप्या आहेत. तर ईस्तू कपडे आणि टोप्या यांचा वेगवेगळ्या किती प्रकारे संयोग (वापर) करु शकते ?

प्रत्येकी एका टोपीसाठी 4 पैकी कोणताही एक पोषाख (कपडे) निवडू शकते, $4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$ संयोग शक्य आहेत. आम्ही हे एका पोषाख (कपडे) साठी सुध्दा घेऊ शकतो ईस्तू 4 पोषाख (ड्रेस) साठी 3 पैकी 1 टोपीची निवड करु शकते. $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$ संयोग शक्य आहेत.



? रॉक्सीकडे 7 पोषाख, 2 टोप्या आणि 3 बूटांचे जोड आहेत. तर तो स्वतःला किती प्रकारे तयार करु शकतो?

(**सुचना:** वरीलप्रमाणे दिलेल्यासारखे आकृती काढून प्रयत्न करा.)

? ईस्तू आणि रॉक्सी याना त्यांच्या पणजोबानी संग्रहीत केलेले स्टॅम्प (पोस्ट तिकिटे) आणि नाणी सापडली. ही 5 - अंकी पासवर्ड असलेल्या पेटीत सुरक्षित ठेवली आहेत. हा पासवर्ड कोणालाही माहित नसल्यामुळे शक्य असलेले सर्व पासवर्डचा प्रयत्न करून ते उघडले पाहिजे. त्यामध्ये त्यांना नशीबाने साथ दिली नाही, शेवटी सर्व शक्य ते प्रयत्न केल्यानंतर शेवटच्या प्रयत्नात ते उघडले. तर त्यांनी एकूण किती पासवर्ड तपासले ?





जर तुम्हाला समस्यांचे निवारण करता आले नाही तर त्या समस्येचे सोपे रूप शोधण्याचा प्रयत्न करा जे तुम्ही सोडवू शकता. हे तंत्र अनेकवेळा तुम्हाला उपयोगी पडू शकते.

5 - अंकी लॉक ऐवजी 2 - अंकी लॉक आहे असे समजून शक्य असलेले सर्व पासवर्ड शोधण्याचा प्रयत्न करा.

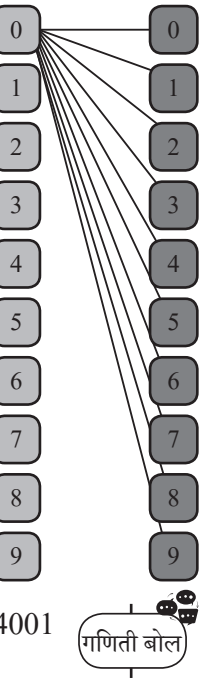
(0 ते 9) या अंकासाठी 10 पर्याय शक्य आहेत. या प्रत्येकासाठी येथे दुसऱ्या अंकासाठी 10 पर्याय आहेत. (जर 0 हा पहिला अंक असेल तर 01, 02, 03, 04, - - - - - - 09 हे शक्य आहेत.) त्यामुळे 2 अंकी संख्येसाठी सर्व शक्य संयोग $10 \times 10 = 100$ आहेत.

आता समजा की आपल्याकडे 3 - अंकी लॉक आहे. यापूर्वीच्या 2 - अंकी संख्यांसाठी 100 पासवर्ड असून 3 च्या अंकासाठी येथे 10 पर्याय आहेत. त्यामुळे येथे $100 \times 10 = 1000$ हे 3 - अंकी लॉक संयोग आहेत. त्यांची यादी तुम्ही 000, 001, 002 - - - - - - - - 997, 998, 999 अशी करु शकता.

किती 5 - अंकी पासवर्ड शक्य आहेत?



प्रत्येक अंकासाठी 10 पर्याय उपलब्ध आहेत. त्यामुळे 5 - अंकी संख्यामध्ये असलेले $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 = 1,00,000$ पासवर्ड आहेत. हे 99,999 पर्यंत सर्व अंक लिहिण्याशी समान आहेत. जे सर्व 5 - अंकी आहेत. म्हणजेच, 00000, 00001, 00002, …00010, 00011, …, 00100, 00101, …, 00999, …, 30456, …, 99998, 99999.



ईस्तू म्हणतो की, मी पुढीलवेळी 6 खाचा असलेला A ते Z मुळाक्षरे असलेला लॉक खरेदी करतो. मला वाटते की तो अधिक सुरक्षित असेल.

(?) अशा लॉकसाठी शक्य असलेले सर्व पासवर्ड किती ?

(?) विविध संदर्भावरुन शक्य असलेल्या सर्व संयोगांची संख्या किती याचा विचार करा.

(i) भारतातील ठिकाणांचे पिन कोड - मध्यप्रदेशमधील व्हिदिशाचा पिनकोड 464001 आहे. मिझोराममधील झेमबॉकचा पिन कोड 796017 आहे.

(ii) मोबाईल संख्या (भ्रमण यंत्र क्रमांक)

(iii) वाहन नोंदणी संख्या

हे संकेत किंवा संख्या कशा प्रकारे दिल्या जातात / तयार करतात हे शोधण्याचा प्रयत्न करा.

2.3 घातांकांची दुसरी बाजू [The Other Side of Powers]

16 सें. मी. लांबीच्या एका रेषेची कल्पना करा. जर त्या रेषेचा अर्धा भाग पूसून टाकला तर

$$2^4 \div 2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \text{ एकके}$$

पुन्हा एकदा त्याचा अर्धा भाग पूसून टाकला तर

$$(2^4 \div 2) \div 2 = 2^4 \div 2^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2 = 4 \text{ एकके}$$

16 सें. मी. चे 3 वेळा अर्धा भाग हे असे लिहितात.

$$2^4 \div 2^3 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 = 2^1 = 2 \text{ एकके}$$

यावरून आपण पाहू शकतो की, $2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 2^1$

? 2 च्या घातांक रुपामध्ये $2^{100} \div 2^{25}$ किती होतात ?

सामान्यरुप $n^a \div n^b = n^{a-b}$

जेथे $n \neq 0$ a, b या मोजसंख्या असून $a > b$

? येथे n हे शून्य का असू शकत नाही ?

? जेव्हा घातांक शून्य असतो, अशी उदाहरणे घेतलेली नाहीत उदाहरणार्थ 2^O हे किती ? वरील सामान्य रुप सत्य होईल अशाप्रकारे आपण 2^O ची व्याख्या करु

गणिती बोल

$$2^0 = 2^{4-4} = 2^4 \div 2^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 1$$

प्रत्यक्षात कोणत्याही 'a' अक्षर संख्यासाठी,

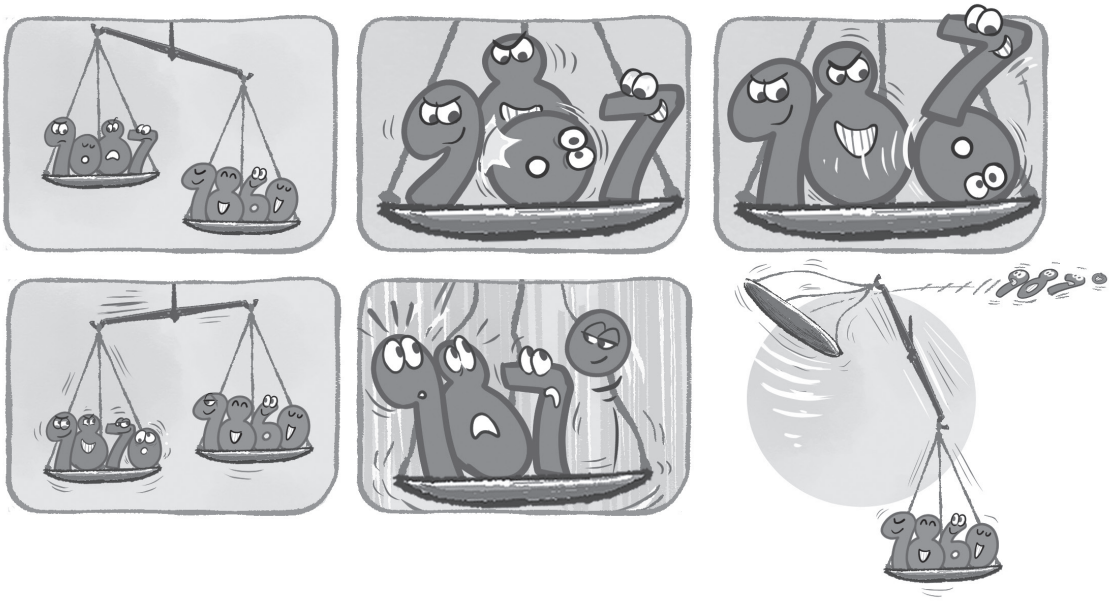
$$2^0 = 2^{a-a} = 2^a \div 2^a = 1$$

सामान्यपणे, $x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0$ आणि पुढे असेच चालू राहील.

$$1 = x^0$$

जेथे $x \neq 0$ आणि ही मोजसंख्या आहे.

जेव्हा घातांक शून्य असतो.



जेव्हा 2^4 लांबीच्या रेषेचे 5 वेळा अर्ध्यामध्ये विभागले तर

$$2^4 \div 2^5 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ एकके}$$

जर सामान्यीकरण $2^4 \div 2^5 = 2^{(4-5)} = 2^{-1}$ म्हणून आम्हाला मिळते

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

जर 2^4 लांबीच्या रेषेला 10 वेळा अर्ध्यामध्ये विभागले तर

$$2^4 \div 2^{10} = 2^{(4-10)} = 2^{-6} \text{ एकके}$$

विस्तार करुन $2^4 \div 2^{10} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$,

$\therefore 2^{-6}$ हे $\frac{1}{2^6}$ असे लिहितात व त्याची किंमत $\frac{1}{64}$ येते.

याचप्रमाणे $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{1000}$, $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7 \times 7} = \frac{1}{49}$ इ.

? 10^3 हे $\frac{1}{10^{-3}}$ असे सुद्धा लिहू शकतो का ?

आम्ही लिहू की, $\frac{1}{10^{-3}} = \frac{1}{1/10^3} = 1 \div 10^{-3} = 1 \times 10^3 = 10^3$.

याचप्रमाणे $7^2 = \frac{1}{7^{-2}}$ आणि $4^a = \frac{1}{4^{-a}}$

गणिती बोल

सामान्य रुपामध्ये $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$ आणि $n^a = \frac{1}{n^{-a}}$ जेथे $n \neq 0$

आम्ही ओळखलेल्या खालील प्रमाणे असलेल्या सामान्यरुपाचा विचार करा.

$n^a \times n^b = n^{a+b}$	$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$	$n^a \div n^b = n^{a-b}$

? आपल्याला 'a' आणि 'b' या मोज संख्याची आवश्यकता आहे. 'a' आणि 'b' हे पूर्णांक असू शकतात का? याना सुध्दा सामान्यरुप लागू होते का ?

? खालील संख्यांचे सममूल्य रुप लिहा.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) $(-7)^{-2}$

(iv) $(-5)^{-3}$ (v) 10^{-100}

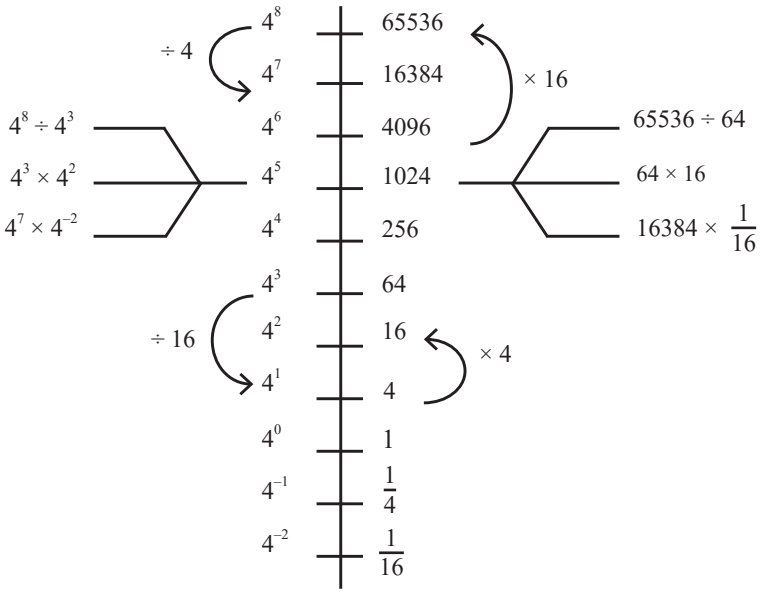
? संक्षिप्तरुप लिहा आणि उत्तर घातांकरुपात लिहा.

(i) $2^{-4} \times 2^7$ (ii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $2^4 \times (-4)^{-2}$ (v) $8^p \times 8^q$

घातांक रेषा [Power Lines]

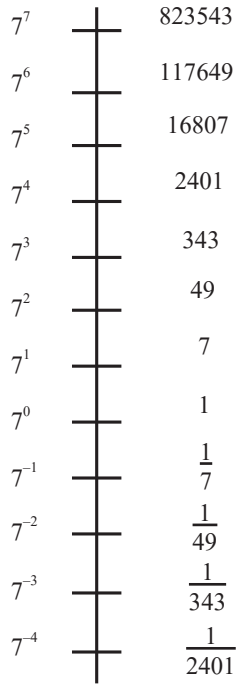
4 च्या घातांकाची मांडणी रेषेवर करुया.



? आपण असे म्हणू शकतो की 16384 (4^7) हे 1024 (4^5) पेक्षा 16 (4^2) वेळा मोठे आहे ?
होय, $4^7 \div 4^5 = 4^2$ आहे.

? 4^2 हे 4^{-2} पेक्षा कितीने (किती पटीने) मोठे आहे ?

? खालील प्रश्नांची उत्तरे देण्यासाठी 7 ची घातांक रेषा वापरा.



$2,401 \times 49 =$

$49^3 =$

$343 \times 2,401 =$

$\frac{16,807}{49} =$

$\frac{7}{343} =$

$\frac{16,807}{8,23,543} =$

$1,17,649 \times \frac{1}{343} =$

$\frac{1}{343} \times \frac{1}{343} =$

2.4 10 चे घातांक [Powers of 10]

आपण 10, 100, 1000 आणि पुढे चालू यासारख्या संख्या वापरलेल्या आहेत ज्या भारतीय पध्दतीमध्ये विस्तारीत रूपात लिहीतात.

$$47561 = (4 \times 10000) + (7 \times 1000) + (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1$$

हे आपण 10 घातांक वापरुन लिहू शकतो.

$$(4 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$$

? या संख्या सारख्याच पध्दतीने लिहा. (i) 172 (ii) 5642 (iii) 6374

? आपण 561.903 ही कशी लिहू शकतो ?

$$561.903 = (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1 + (9 \times \frac{1}{10}) + (0 \times \frac{1}{100}) + (3 \times \frac{1}{1000})$$

10 चा घातांक वापरुन हे लिहू.

$$561.903 = (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3})$$

वैज्ञानिक चिन्ह [Scientific Notation]

मोठ्या संख्यांचा समावेश असलेल्या गोष्टी पाहूया.

(i) आमच्या दुग्धगंगा आकाशगंगेच्या मध्यापासून सूर्य 30,00,00,00,00,00,00,00,00,000 मी. अंतरावर आहे.

(ii) आमच्या आकाशगंगेतील ताऱ्यांची संख्या 1,00,00,00,00,000 आहे.

(iii) पृथ्वीचे वस्तुमान 59,76,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 कि. ग्रॅ. आहे.

जशी अंकाची संख्या वाढते तसे त्याचे बरोबर वाचन करणे कठीण जाते. आपण शून्यांची संख्या चुकीची मोजू शकतो किंवा स्वल्पविराम चूकीचा देऊ शकतो. त्यामुळे आपण चुकीचे मूल्य वाचू शकतो. हे आपल्याला ₹ 50,000 मिळण्याच्या ऐवजी ₹ 5,000 मिळाल्यासारखे आहे. अनेक घटनामध्ये शून्यांची संख्या ही सुरूवातीच्या संख्येपेक्षा महत्वाची आहे.

अशा खुप मोठ्या संख्येचे वाचन सोपे होण्यासाठी आणि बरोबर होण्यासाठी आपण घातांक चिन्हांचा वापर करु शकतो का ?

उदाहरणार्थ 5900 ही संख्या अशी व्यक्त करु शकतो.

$$\begin{aligned} 5900 &= 590 \times 10 = 590 \times 10^1 \\ &= 59 \times 100 = 59 \times 10^2 \\ &= 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3 \\ &= 0.59 \times 10000 = 0.59 \times 10^4 \end{aligned}$$

कोणतीही संख्या 1 ते 10 मधील आणि 10 च्या घातांकाच्या गुणाकारात लिहिता येते. उदाहरणार्थ,

$5900 = 5.9 \times 10^3$ $20800 = 2.08 \times 10^4$ $80,00,000 = 8 \times 10^6$

? आपण आधी वाचलेल्या मोठ्या संख्यांची उदाहरणे या स्वरुपात लिहा.

वैज्ञानिक चिन्हामध्ये किंवा **वैज्ञानिक स्वरुपामध्ये** (**प्रमाणित नमुन्यामध्ये** असे सुध्दा म्हणतात) ती संख्या आपण $x \times 10^y$, असे लिहितो. जेथे $x \geq 1$ आणि $x < 10$ हा सहगुणक आणि y हा कोणताही पुर्णांकाचा घातांक आहे. बहुतेकवेळा घातांक y हा सहगुणक x पेक्षा अधिक महत्वाचा आहे. जेव्हा आपण मुंबईची 2 कोटी लोकसंख्या ही 2×10^7 असे लिहितो त्यावेळी 7 हे 2 पेक्षा अधिक महत्वाचे आहे. नक्कीच, जर 2 हे 3 मध्ये बदलले तर लोकसंख्या अर्ध्याने वाढते. म्हणजेच 2 कोटी ते 3 कोटी, जर 7 हे 8 मध्ये बदलले तर लोकसंख्या 10 पटीने बदलते. म्हणजेच 2 कोटी ते 20 कोटी, म्हणून प्रमाणित स्वरुपात स्पष्टपणे घातांकाचा उल्लेख आहे. जो अंकाची संख्या दर्शवितो.

जर आपण म्हटले की कोहिमाची लोकसंख्या 1,42,395 आहे. तर असे दिसते की आपल्याला एकक स्थानापर्यंत या संख्येविषयी खात्री आहे. जेव्हा आपण मोठ्या संख्येचा वापर करतो तेंव्हा बहुतेक उदाहरणामध्ये आपल्याला अचूक मुल्यापेक्षा प्रमाण किंवा मापे किती मोठी आहेत याची जास्त काळजी असते. जर आपल्याला फक्त हे नक्की करायचे आहे की लोकसंख्या सुमारे 1 लाख 42 हजार आहे तर आपण ते 1.42×10^5 असे लिहू शकतो. सहगुणकामधील अंकाची संख्या किती चांगली आहे हे दर्शविते. कोणत्याही वैज्ञानिक स्वरुपात लिहिलेली संख्या ही घातांक असते आणि नंतर सहगुणकाचा पहिला अंक असतो. सहगुणकानंतरचे अंक लहान असतील तर पहिल्या अंकामध्ये दुरुस्ती केली जाते.



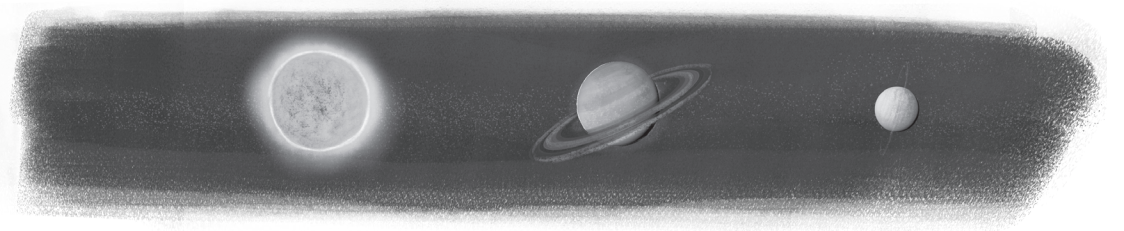
या किंमती पूर्णाकी, अंदाजे, सरासरी आणि जवळपासच्या आहेत. जास्तीत जास्त वेळा त्या हातातील उद्देश साध्य करण्यासाठी असतात.

सूर्य आणि शनि यामधील अंतर 14,33,50,00,00,000 मी. $= 1.4335 \times 10^{12}$ मी. आहे.

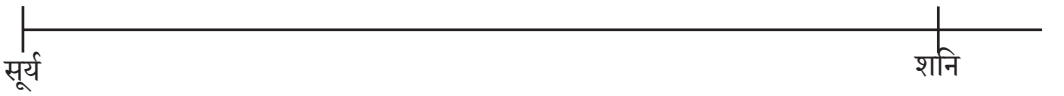
शनि आणि यूरेनस यामधील अंतर 14,39,00,00,00,000 मी. $= 1.439 \times 10^{12}$ मी. आहे.

सूर्य आणि पृथ्वी यामधील अंतर 1,49,60,00,00,000 मी. $= 1.496 \times 10^{11}$ मी. आहे.

या तीन अंतरापैकी सर्वात कमी अंतर कोणते हे तुम्ही सांगू शकाल ?



खालील संख्या रेषा सूर्य आणि शनि यामधील अंतर दर्शविते $(1.4335 \times 10^{12}$ मी.) खालील संख्या रेषेवर पृथ्वीचे सापेक्ष स्थान याची खूण करा. सूर्य आणि पृथ्वी यामधील अंतर 1.496×10^{11} मी. आहे.



खालील संख्या प्रमाणित नमुन्यात व्यक्त करा.

(i) 59,853 (ii) 65,950

(iii) 34,30,000 (iv) 70,04,00,00,000

2.5 तुम्हाला याचे कधीतरी आश्चर्य वाटले का ?

मागील वर्षी, आपण मोठ्या संख्यावरील प्रकरणामध्ये मनोरंजक विचारांचे प्रयोग पाहिले आहेत. त्यांचा प्रवास आपण पुढे चालू ठेऊया.

नंजुंडप्पा रॉक्सीच्या वजनाइतकेच गुळ दान करू इच्छितो आणि ईस्तूच्या वजनाइतके गहू सुध्दा दान करतो. याचा खर्च किती येतो याचा तो विचार करत आहे.





दान केलेल्या गुळाची किंमत (रूपयामध्ये) किती असेल ? दान केलेल्या गहूची किंमत (रूपयामध्ये) किती असेल ?

हे शोधताना प्रथम आपल्याला त्या राशीमधील आताच्या संबंधाचे वर्णन करावे लागेल.

गुळाची किंमत (रुपयामध्ये) = रॉक्सीचे कि. ग्रॅ. मधील वजन × 1 कि. ग्रॅ. गुळाची किंमत

गुळाची किंमत (रुपयामध्ये) = ईस्तूचे किलो ग्रॅ. मधील वजन × 1 किलो गहूची किंमत

(?) माहित नसलेल्या गोष्टींची आवश्यक योग्य गृहीतके बनवा आणि उत्तरे शोधा. लक्षात ठेवा की रॉक्सीचे वय 13 वर्षे आणि ईस्तूचे वय 11 वर्षे आहे.

रॉक्सीचे वजन 45 कि. ग्रॅ. आणि 1 कि. ग्रॅ. गुळाची किंमत ₹ 70 गृहीत मानून, दान केलेल्या गुळाची किंमत ही 45 × 70 = ₹ 3150 आहे. ईस्तूचे वजन 50 कि. ग्रॅ. आणि 1 कि. ग्रॅ. गहूची किंमत ₹ 50 गृहीत मानून दान केलेल्या गहूची किंमत ही 50 × 50 = ₹ 2500 आहे.

व्यक्तीच्या वजनाइतकी वस्तू दान करण्यांची प्रथा जूनी आहे तिला तुलाभार किंवा तुलाभारंभ म्हणतात. अजूनही दक्षिण भारतामध्ये ही पाळली जाते. हे भक्तीने दान (स्वतःला समर्पण) करण्याचे प्रतिक आहे. ही समुदायाला सुध्दा मदत करते.

? रॉक्सी विचार करते, "जर गुळा ऐवजी 1 - रुपयाची नाणी वापरली तर माझ्या वजनासाठी किती नाण्यांची गरज लागेल? हे आपण कसे शोधू शकेन ?

यासारख्या प्रश्नांसाठी तुम्ही खालीलप्रमाणे सुचविलेल्या पायऱ्यांचा वापर करण्याचा विचार करु शकता.

1. तर्क करणे उत्तर काय असू शकते याचा लगेच कोणत्याही गणनेशिवाय अंदाज करा.
2. अंदाज आणि जवळपास यांचा वापर करून गणना करणे.

(i) ज्यांचे उत्तर शोधायचे आहे त्या राशीमध्ये असलेल्या आवश्यक संबंधाचे वर्णन करा.

(ii) जर आवश्यक माहिती उपलब्ध नसेल तर योग्य गृहीतकावरून अंदाज काढा.

(iii) गणना करा आणि उत्तर शोधा (तुमचा तर्क किती जवळील आहे हे तपासा)

? नाण्यांची संख्या ही शेकडो, हजारो, लाखो कोटी किंवा त्यापेक्षाही जास्त असेल का ? एक आंतरिक तर्क काढा.

(?) माहित नसलेल्या गोष्टीविषयी योग्य गृहीतके आणि जवळचा अंदाज घेवून उत्तर शोधा. लक्षात असू द्या की आपण अगदी जवळील अंदाज करत आहोत.

1 रुपयाच्या नाण्यांचे वजन मोजून कसे कळेल ?



सुरुवातीला, तुमचा तर्क उत्तरापासून खुप दूर असू शकतो आणि हे अगदी ठिक आहे! तुम्ही हे कधीतरी आणि वेगवेगळ्या परिस्थितीत करून तुम्ही सुधारणा कराल. तर्क आणि अंदाज यामुळे संख्या आणि राशीविषयी अंतर्ज्ञान निर्माण होऊ शकते.

ईस्तू विचारतो की, जर आपण ₹ 5 ची नाणी किंवा ₹ 10 च्या नोटा वापरल्या तर किती पैसे असू शकतात ?

(?) प्रथम सहजपणे तर्क लावा नंतर शोध घ्या. [माहित नसलेल्या माहिती विषयी आवश्यक आणि योग्य गृहीतके बनवा आणि उत्तरे शोधा.)

ईस्तू म्हणतो, "मी प्रौढ झाल्यावर, मला दरवर्षी माझ्या वजनाच्या वह्या दान करायच्या आहेत." रॉक्सी म्हणते, मी मोठी झाल्यावर, मला दरवर्षी माझ्या वजनाच्या प्रमाणात अन्नदान (धान्य किंवा जेवण) करायचे आहे"

? एका वर्षात या दान दिलेल्यांचा किती लोकाना फायदा होऊ शकतो? पुन्हा एकदा शोधण्यापूर्वी तर्क (अंदाज) करा.

रॉक्सी आणि ईस्तू यांनी कोणीतरी असे बोलताना ऐकले - "आम्ही येथे पोहोचण्यासाठी सुमारे 400 कि.मी. ची पदयात्रा केली आहे! आम्ही येथे प्रातः काली पोहोचलो."

गणिती बोल

? त्यांनी आपल्या प्रवासाला कोणत्यावेळी सुरुवात केली असावी ?

(?) आवश्यक गृहीतक आणि अंदाज करून उत्तर शोधा. गणना करण्यापूर्वी तर्क करा आणि तुम्ही उत्तराच्या किती जवळ आलात ते तपासा.

शिक्षकांसाठी सुचना: कधी कधी गृहीतके खुप बदलू शकतात आणि याचा परिणाम म्हणजे हे वापरुन शोधलेली उत्तरे सुध्दा बदलू शकतात. हे अगदी बरोबर आहे. परिस्थितीचे योग्य नमुने महत्वाचे आहेत. ते कांही वेळेला वेगळ्या पध्दतीने सुध्दा केले जाऊ शकतात. गृहीत धरलेल्या संख्या किंवा राशींची अचूकता ही विस्तृततेने आणि सरावाने उत्तम बनविली जाऊ शकते.

'पदयात्रा' ही धार्मिक किंवा आध्यात्मिक कार्याचा भाग असून लांब अंतर चालण्याची एक पारंपारीक पध्दत आहे. आपल्या देशातील सर्व धर्माचे लोक तीर्थयात्रा किंवा आध्यात्मिक चालण्याचे सारखेच प्रकार पाळतात, जरी त्यांची नांवे किंवा तरीही उद्देश वेगवेगळे असू शकतात.

अजमेर, शरिफ दर्गा, झियारत, पंढरपूर वारी, कंवर यात्रा, शबरीमल यात्रा, सम्मेद शिखरजी यात्रा, लुंबिनी ते सारनाथ यात्रा ही कांही तीर्थक्षेत्रे आहेत.



आधुनिक वाहतुकीच्या उदयापूर्वी, लोक एका ठिकाणावरून दुसऱ्या ठिकाणी चालत जात होते. कांही वेळा व्यापारी, साधु आणि विद्वान हजारो किलोमीटर चालत जगाच्या वेगवेगळ्या भागात वाळवंट, पर्वत आणि नद्या ओलांडून जात असत.

? जर एखादी व्यक्ती न थांबता चालत असेल तर ती त्याच्या आयुष्यात किती वेळा पृथ्वीभोवती प्रदक्षिणा (फिरु) घालू शकेल ? पृथ्वी सभोवतालचे अंतर 40,000 कि. मी. आहे असे समजा.

रेषीय वाढ विरुद्ध घातांक वाढ

रॉक्सी ईस्तूला ती वाचत असलेल्या एका विज्ञान-कथा कादंबरीविषयी सांगते. जिथे ते चंद्रावर पोहोचण्यासाठी एक शिडी बांधतात."



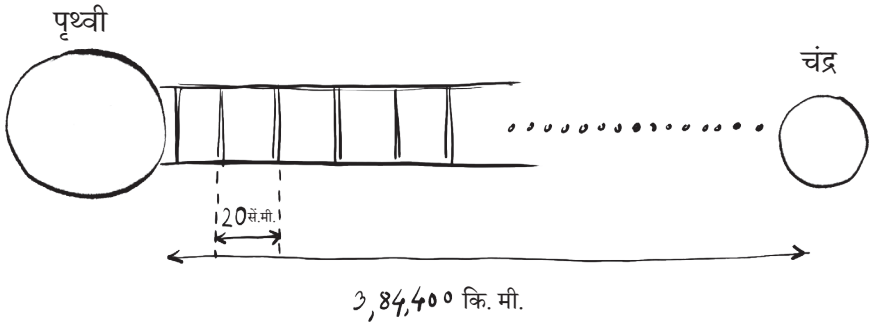
मला आश्चर्य वाटले की जर आपल्याजवळ अशी शिडी असती तर तिला किती पायऱ्या असत्या ?

? तुम्हाला काय वाटते ? प्रथम एक सहज अंदाज करा.

? त्या शिडीमधील पायऱ्या (पावलांची) संख्या हजारो,

लाखो, कोटी किंवा त्यापेक्षा ही जास्त असावी लागेल का ?

हे शोधण्यासाठी आपल्याला दोन लगतच्या (सलगच्या) पायऱ्यामधील अंतर माहित असणे गरजेचे आहे. 20 सें.मी. इतके अंतर अगदी योग्य आहे असे समजू दर्शविल्याप्रमाणे समस्येची पाहणी करु.



? आपल्याला किती 20 सें. मी. हे 3,84,400 कि. मी. होतात ते शोधायचे आहे.

जर आपण या किंमतीची गणना केली तर आम्हाला 1,92,20,00,000 पायऱ्या (पावले) मिळतात म्हणजेच 192 कोटी 20 लाख पायऱ्या किंवा 1 अब्ज 92.2 कोटी पावले, प्रत्येक पावलाने पृथ्वीपासूनच्या अंतरामध्ये होणारी निश्चित वाढ (प्रत्येक पावलानंतर 20 सें. मी. वाढ) याला **रेषीय वाढ** म्हणतात.

पृथ्वी आणि चंद्रामधील अंतर आक्रमिण्यासाठी रेषीय वाढीसह 1,92,20,00,000 पावले चालावी लागतील. तर घातांक वाढीसह कागदाच्या तुकड्याच्या फक्त 46 पट लागतात. रेषीय वाढ ही बेरीज रुपात तर घातांक वाढ ही गुणाकाराच्या रुपात आहे.

$\underbrace{20 + 20 + 20 + \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{1,92,20,00,000 वेळा}}$ $\underbrace{0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots\ldots}_{\text{46 वेळा}}$

या प्रकरणामध्ये आपण पूर्वी पाहिलेल्या घातांक वाढीची कांही उदाहरणे म्हणजे 'चमकणारे दगड' जादुई तलाव 'किती संयोग' अशा आणखी मनोरंजक उदाहरणांचा आपण पुढील प्रकरणात तसेच पुढील इयत्तेत शोध घेणार आहोत.

? रेषीय वाढ आणि घातांक वाढीची कांही उदाहरणे तुम्ही देऊ शकता का ?

मोठ्या संख्येची जाणीव करून घेणे

मागील वर्षी आपण लाख आणि कोटी तसेच अब्ज याविषयीचा अभ्यास केलेला आहे. लाख हे 10^5 (1,00,000) कोटी हे 10^7 (1,00,00,000) आणि । अब्ज हे 10^9 (1,00,00,00,000) तर 1 दशलक्ष 10^6 (1,000,000) आणि 1 अब्ज हे 10^9) ने दर्शवितात.

तुम्हाला जगातील मानवी लोकसंख्येचा आकार माहित असेल. तुम्ही कधी विचार केलात का जगातील मुंग्याची संख्या किती असेल किंवा मानवाची निर्मिती किती वर्षापूर्वी झाली आहे. या विभागात आपण अरब किंवा अब्जावधी लोकांपेक्षा लक्षणीयरित्या मोठ्या संख्येचा शोध घेऊ प्रत्येक घटनेत या संख्यांची तुलना करुन दर्शविण्यासाठी 10 च्या घातांकाचा वापरु करु.

10^0 - 2025 च्या मध्यावर जगामध्ये उत्तरेकडील पांढरे फक्त दोनच गेंडे शिल्लक राहिले. हे दोन्ही मादी आणि ते केनियामधील ओल पेजेंटा संरक्षण जंगलात आहेत. ($= 2 \times 10^{\circ}$)

10^1 - 2024 च्या सुरुवातीला हैनान गिब्बनची एकूण लोकसंख्या केवळ 42 ($\approx 4 \times 10^1$) होती.

10^2 - 2025 च्या मध्यापर्यंत फक्त 242 काकापो जिवंत आहेत ($\approx 2 \times 10^2$)

10^3 - जगामध्ये 3000 पेक्षा कमी कोमोडो ड्रॅगन आहेत. हे सर्व इंडोनेशियामध्ये आहेत ($\approx 3 \times 10^3$)

10^4 - 2005 मध्ये अंदाजानुसार मॅन्ड लांडग्याची संख्या 17000 पेक्षा जास्त आहे ते ब्राझिलमध्ये आहेत (1.7×10^4)



10^5 - 2018 पर्यंत सुमारे 4.15 लाख आफ्रिकन हत्ती आहेत. ($\approx 4 \times 10^5$)

10^6 - 2025 पर्यंत सुमारे 50 लाख / 5 दशलक्ष अमेरिकन मगर आहेत. (5×10^6)

10^7 - जागतिक उंटाची संख्या 3.5 कोटी/ 35 दशलक्ष (3.5×10^7) आहेत. भारतामध्ये त्यापैकी फक्त 2.5 लाख आहेत. जागतिक घोड्यांची संख्या सुमारे 5.8 कोटी / 58 दशलक्ष (5.8×10^7) त्यापैकी अर्धे अमेरिकेमध्ये आहेत.

10^8 - जगामध्ये 20 कोटी / 200 दहालक्ष (2×10^8) पेक्षा जास्त पाणम्हशी आहेत असा अंदाज आहे त्यापैकी जास्तीत जास्त आशियामध्ये आहेत.

10^9 - स्टारलिंग जागतिक लोकसंख्या अंदाजे 1.3 अरब / 1.3 अब्ज (1.9×10^9) जागतिक मानवांची लोकसंख्या 2025 पर्यंत 8.2 अरब /8.2 अब्ज (8.2×10^9) आहे.



यु. के. मधील एका शेतावर स्टारलिंग (काळसर पिसांचे पक्षी) कुरकुर करतानाचा फोटो स्टारलिंग कुरकुर हजारो स्टारलिंग पिल्लाना समक्रमित. फिरत्या नमुन्यामध्ये उडण्याचा एक मंत्रमुग्ध करणारे हवाई प्रदर्शन आहे. बहुतेक वेळा यांना 'नृत्यचित्रित नृत्य' असे वर्णन केले जाते.

? यूकेमधील एका शेतावर स्टारलिंग (काळसर पिसांचे पक्षी) कुरकुर करतानाचा फोटो स्टारलिंग कुरकुर हजारो स्टारलिंग पिलांना समक्रमित, फिरत्या नमुन्यामध्ये उडण्याचा एक मंत्रमुग्ध करणारे हवाई प्रदर्शन आहे. बहुतेक वेळा यांना 'नृत्यचित्रित नृत्य' असे वर्णन केले जाते.

? जागतिक मानवाची लोकसंख्या सुमारे 8×10^9 आणि आफ्रिकन हत्ती सुमारे (4×10^5) आहेत. आपण असे म्हणू शकतो की प्रत्येक एका आफ्रिकन हत्तीमागे जवळजवळ 20,000 लोक आहेत का ?

10^{10} - कोणत्याही वेळी जीवंत जागतिक कोंबडीच्या संख्येचा अंदाज ≈ 33 अब्ज (3.3×10^{10}) आहे.

10^{12} - 2023 मध्ये जागतिक स्तरावर झाडांची संख्या 30 खरब / 3 ट्रिलीयन (3×10^{12}) 1 खरब हे 100 अरब आणि 1 ट्रिलीयन हे 1000 अब्ज आहेत.

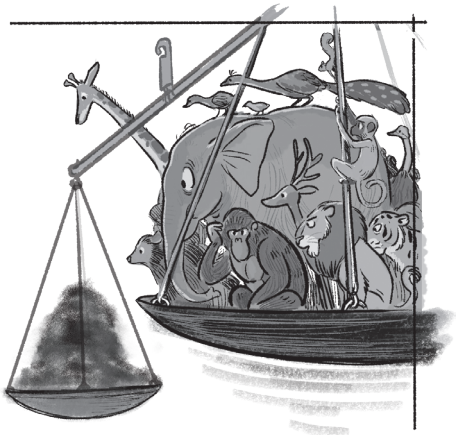
10^{14} - जगातील डासांची संख्या (2023) मध्ये 11 नील/110 ट्रिलीयन (_____) अंटार्टिक क्रिल च्या अंदाजे घेतलेल्या लोकसंख्या 50 नील / 500 ट्रिलीयन (5×10^{14}) आहे.



10^{15} - बिटल किड्यांची लोकसंख्या 1 पद्म / 1 क्वाड्रिलियन (1×10^{15}) आहे. गांडूळाची अंदाजे लोकसंख्या सुध्दा 1 पद्म /1 क्वाट्रिलीयन आहे.

10^{16} - जागतिक स्तरावर मुंग्याची अंदाजे संख्या 20 पद्म / 20 क्वाड्रिलियन (2×10^{16}) मुंग्याचे प्रमाण हे सर्व वन्य पक्षी आणि वन्य सस्तन प्राण्यापेक्षा जास्त आहे.

10^{21} - ही संख्या पृथ्वीवरील सर्व समुद्र किनाऱ्यावर आणि वाळवंटावर असलेल्या वाळूच्या कणांच्या संख्येइतकी मानली जाते. ही वाळू प्रत्येक मुंगीला राहण्यासाठी 10 लहान वाळूची वारुळे इतकी आहे.





10^{23} - विश्वातील अंदाजे निरीक्षणीय ताऱ्यांची संख्या (2×10^{23}) ही आहे.

10^{25} - पृथ्वीवर अंदाजे पाण्याचे थेंब (2×10^{25}) आहेत. (प्रती मि.ली. ला 16 थेंब गृहीत धरुन)

? वैज्ञानिक चिन्हे वापरून उत्तरे सोडवा आणि लिहा.

(i) जगामध्ये प्रत्येक मानवामागे किती मुंग्या आहेत.

(ii) जर स्टारलिंग पक्षांच्या एका कळपामध्ये 10,000 पक्षी आहेत तर या जगात किती कळप असू शकतील ?

(iii) जर प्रत्येक झाडाला 10^4 पाने आहेत. तर जगातील सर्व झाडावर असलेल्या एकूण पानांची संख्या किती ?

(iv) जर तुम्ही कागदाची पाने एकमेकावर ठेवली तर तुम्हाला चंद्रापर्यंत पोहोचण्यासाठी किती पाने लागतील ?

तुमचे वय सांगण्याची वेगळी पध्दत

"तुमचे वय किती आहे?" ईस्तूने विचारले

"कांही आठवड्यापूर्वी मी 13 वर्षे पूर्ण केली आहेत." रॉक्सी म्हणाली

"तुमचे वय किती आहे" ? ईस्तूने पुन्हा विचारले.

"आज मी 4840 दिवसांची आहे." रॉक्सी म्हणाली

"तुमचे वय किती आहे ?" पुन्हा ईस्तूने विचारले

"आता मी तासांची आहे" रॉक्सी म्हणाली.

ही संख्या शोधण्यापूर्वी तुम्ही अंदाजाने सांगा.



या संख्येचा अर्थ काय असू शकतो ?

" आज मी 4070 दिवसांची आहे. तर तुम्ही माझी जन्म तारीख सांगू शकाल का?" असे ईस्तूने विचारले.

? जर तुम्ही दहा लाख सेकंद जगला असाल तर तुमचे वय किती असेल ?

आपण कांही घटना आणि घटनांची अंदाजे वेळ आणि कालमर्यादा पाहू आणि 10 च्या घातांकरुपात दर्शवू आणि या राशींची तुलना करू.

वेळ सेकंदामध्ये		वास्तविक जगातील घटना / गुणधर्म
$10^0 = 1$ सेकंद	-	वर फेकलेला चेंडू परत जमिनीवर पडण्यासाठी लागणारा वेळा (सामान्यपणे कांही सेकंद)
$10^1 = 10$ सेकंद	-	आपल्या शरीरामध्ये रक्ताने एक संपूर्ण फेरी पूर्ण करण्यासाठी घेतलेला वेळ हा 10 - 20 सेकंद ($1 \times 10^1 - 2 \times 10^1$ सेकंद)
	-	ट्रॅफिक सिग्नलमध्ये वाट पाहण्याचा सामान्य वेळ.



जगातील मुंग्यांची संख्या किती किंवा रक्ताला आपल्या शरिरात एक फेरी पूर्ण करण्यासाठी लागणारा वेळ यासारख्या गोष्टींचा अंदाज कसा करु शकतो, हे आश्चर्यकारक आहे नाही का? जेव्हा आपणाला अशा गोष्टींचा सामना करावा लागतो तेव्हा तुमच्या मनामध्ये हे आश्चर्य असू शकते. अशा गोष्टींचा अभ्यास विषय जसे की विज्ञान आणि समाज विज्ञान यामध्ये येऊ शकतो. जेथे असे अंदाज आपल्याला करावे लागतात.

10^2 सेकंद $\approx$ 1.6 मिनिटे	-	एक कप चहा बनविण्यासाठी लागणारा वेळ 5 - 10 मिनिटे ($\approx 4 \times 10^2 - 8 \times 10^2$ सेकंद)
	-	पृथ्वीवर सूर्य प्रकाश पोहोचण्यासाठी लागणारा वेळ - सुमारे 8 मिनिटे ($\approx 5 \times 10^2$ सेकंद)



10^3 सेकंद ≈ 16.6 मिनिटे

- पृथ्वीच्या कमी कक्षेतील उपग्रह 90 मिनिटे (≈ 5.5×10^3 सेकंद) ते 2 तास इतका वेळ पृथ्वी सभोवताली एक प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यास घेतात.

10^4 सेकंद ≈ 2.7 तास

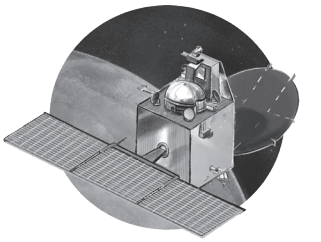
- जेवण पचविण्यासाठी लागणारा वेळ : पोटातून जाण्यासाठी लागणारा वेळ 2-4 तास आहे.
- एका प्रौढ माशीचा जीवनकाळ : साधारणपणे एक दिवस (≈ 9×10^4 सेकंद) आहे.



? 10 सेकंद ≈ 1:16 दिवस आणि 10^6 सेकंद ≈ 11.57 दिवस (i)10^5 सेकंद (ii) 10^6 सेकंद अशा घटना किंवा गुणधर्माच्या वेळेच्या क्रमाचा विचार करा. त्यांना वैज्ञानिक चिन्हामध्ये लिहा.

10^7 सेकंद ≈ 115.7 दिवस / ≈ 3.8 महिने

- एका वर्षात झोपण्यासाठी घालविलेला वेळ : सुमारे 4 महिने.
- मंगळयान मोहिमेला मंगळावर पोहोचण्यासाठी 298 दिवस (≈ 2.65×10^7 सेकंद)
- मंगळाला सूर्याभोवती एक फेरी पूर्ण करण्यासाठी लागणारा वेळ: सुमारे 687 पृथ्वीवरील दिवस / 1.88 पृथ्वीवरील वर्षे (≈ 6×10^7 सेकंद)



10^8 सेकंद ≈ 3.17 वर्षे

- जास्तीत जास्त कुत्र्यांचा जीवन कालावधी 3 ते 15 वर्षे असतो.
- नेपच्यूनला सूर्याभोवती एक पूर्ण प्रदक्षिणा घालण्याचा काळः 60 - 190 पृथ्वी / ~ 165 पृथ्वी-वर्षे किंवा 89,666 नेपच्यून-दिवस / एक नेपच्यून वर्ष (≈ 5.2×10^9 सेकंद) नेपच्यून वरील एक दिवस सुमारे 16.1 तासाचा असतो.

10^9 सेकंद ≈ 31.7 वर्षे

- हॅलेच्या धुमकेतूचा कक्षीय कालावधी 75 - 79 वर्षे आहे. पुढील अपेक्षित परत येण्याची वेळ 2061 व्या वर्षी आहे. (≈ 2.4 × 109 सेकंद)

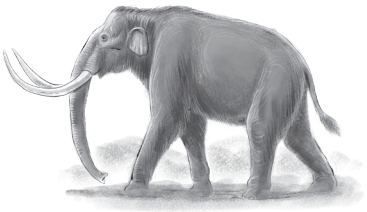
लक्षात घ्या की घातांक वाढ ही किती जलद आहे. 10^6 हे पंधरवड्यापेक्षा कमी आहे परंतु 10^9 म्हणजे तब्बल 31 वर्षे (जवळपास मानवाचे अर्धे आयुर्मान)

10^{10} सेकंद
≈ 317 वर्षे
- चोळ घराण्याने 900 वर्षापेक्षा जास्त राज्य केले.
- ($\approx 3\times 10^{10}$ सेकंद) त्यानी ख्रिस्तपूर्व तिसरे शतक आणि इ.स. 12 वे शतक पर्यंत राज्यभार सांभाळला.

10^{11} सेकंद
≈ 3,170 वर्षे
- सर्वात जुन्या झाडाचे वयः सुमारे 5000 वर्षे ($\approx 1.57 \times 10^{11}$ सेकंद)
- शेवटच्या हिमयुगांच्या शिखरापासूनचा काळ 19,000 - 26,000 वर्षापूर्वी ($\approx 6 \times 10^{11}$ सेकंद - 8.2×10^{11} सेकंद)

10^{12} सेकंद
≈ 31,700 वर्षे
- 2-3 लाख वर्षापूर्वी ($\approx 7 \times 10^{12} - 9 \times 10^{12}$ सेकंद). जूने होमो सॅपिअन्स आढळले. त्या काळातील संपूर्ण लोकसंख्या एका स्टेडियममध्ये बसू शकले.

10^{13} सेकंद
≈ 3.17 लाख वर्षे
- स्टेपी मेमॉथ हे सुमारे 8-18 लाख वर्षापूर्वी होते असा अंदाज आहे.



10^{14} सेकंद
≈ 3.17 दशलक्ष वर्षे
- केलेनकेन गिलर्मोईचे जीवाष्म एक प्रकारचा दशहतवादी पक्षी जो 15 दशलक्ष वर्षापूर्वी होता (≈_____ सेकंद).



10^{15} सेकंद
≈ 3.17 कोटी वर्षे
- हिमालयाचे वय : 5.5 कोटी वर्षे / 55 दशलक्ष वर्षे ($\approx 1.7 \times 10^{15}$ सेकंद) प्रत्येक वर्षाला त्याची कांही मि.मी. ने वाढ होते.
- डायनासोर्स हे 6.6 कोटी वर्षापूर्वी / 66 दशलक्ष वर्षापूर्वी ($\approx 2 \times 10^{15}$ सेंकद). लूप्त झाले (नाहीसे झाले)
- 20 कोटी / 200 दशलक्ष ($\approx 6 \times 10^{15}$ सेकंद) वर्षापूर्वी डायनोसोर्स प्रथमतः दिसून आले.
- सूर्याला दुग्धगंगा आकाशगंगेभोवती एक प्रदक्षिणा घालण्यासाठी सुमारे 23 कोटी वर्षे ($\approx 7 \times 10^{15}$ सेकंद) इतका वेळ लागतो.

10^{16} सेकंद
≈ 31.7 कोटी वर्षे
- जमिनीवर वनस्पतीची 4.7 कोटी / 470 दशलक्ष वर्षापूर्वी (≈_____ सेकंद) सुरुवात झाली असावी

10^{17} सेकंद ≈ 3.17 अब्ज वर्षे	सुमारे 3.7 अब्ज वर्षापूर्वी जीवाणू अस्तित्वात आले असणार याचे जुन्या जीवाष्मानी सुचविले आहेत.
	- आपली पृथ्वी ही 4.5 अब्ज वर्षे जुनी आहे.
	- दुग्धगंगा ही 13.6 अब्ज वर्षापूर्वी तयार झाली आणि विश्वाची निर्मिती 13.8 अब्ज वर्षापूर्वी झाली आहे.

लक्ष द्या की 10^9 सेकंद हा मानवाच्या आयुर्मानाचा क्रम आहे, तर आधुनिक भौतिक शास्त्रानुसार 10^{18} सेकंदापूर्वी विश्वाची निर्मिती झाली नसावी! घातांक चिन्ह हे संक्षिप्त रुपामध्ये मोठ्या प्रमाणातील राशीना हस्तगत करु शकते.

? वैज्ञानिक चिन्हे वापरुन प्रश्नांची उत्तरे सोडवा आणि लिहा.

(i) जर प्रत्येक सेकंदाला एक तारा मोजला तर विश्वातील तारे मोजण्यासाठी किती वेळ लागेल ? वैज्ञानिक चिन्हांचा वापर करुन सेकंद स्वरुपात उत्तर द्या.

(ii) जर एखादी व्यक्ती प्रत्येकी 10 सेकंदाला (200 मिली) चा पेला भरुन पाणी पिते, तर पृथ्वीवरील पाण्याचे संपूर्ण प्रमाण संपण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

प्रयत्न करा



खुप मोठ्या राशी बऱ्याचवेळा आपल्या अनुभवाच्या आणि आकलनाच्या पलीकडे असतात. आपण त्याना आपल्या परिचित असलेल्या राशींशी जोडू शकतो आणि त्याची तुलना करु शकतो यावरून संख्या किंवा मापे किती मोठी आहेत याचा सारांश मिळू शकतो !

2.5 थोडासा इतिहास

पहिल्या शतकातील बौद्ध ग्रंथ **'ललितविस्तारमध्ये'** आपल्याला 10 ते 10^{53} पर्यंतचा विषम घातांकाच्या संख्यांची नांवे आढळतात. गणिततज्ञ अर्जुन आणि राजकुमार गौतम बोधीसत्व यांच्यातील संवादाचा भाग म्हणून खालील गोष्टी आढळतात.

"शंभर कोटीला अयुटा (10^9) असे म्हणतात, 100 अयुटा म्हणजे नियुटा (10^{11}), शंभर नियुटा म्हणजे कनकरा (10^{13})....., शंभर सर्व बलास म्हणजे विसमज्ञगटी (10^{47}), शंभर विषमज्ञगटी म्हणजे सर्वज्ञ (10^{49}), शंभर सर्वज्ञ म्हणजे विभूतनगमा (10^{51}), शंभर विभूतनगमा म्हणजेच तलक्षना 10^{53} असे म्हणतात".

'महावीराचार्य' यांच्या गणित-सार-संग्रह या ग्रंथात 24 पदांची (म्हणजेच 10^{23} पर्यंत) यादी दिली आहे अमलासिध्दी या जैन ग्रंथामध्ये (10^{96}) [दशा-अनंत] पर्यंतच्या दहा घातांकासाठी एक नांव दिले आहे काकायानाच्या पाली व्याकरण ग्रंथात 10^{140} पर्यंतच्या संख्यांची नांवे आहेत. त्याला असंख्येय असे नांव आहे.

दहाचे उच्च घातांक व्यक्त करण्यासाठी जैन आणि बौध ग्रंथांमध्ये सहसा (हजार) आणि कोटी (दहा दशलक्ष) सारखे आधार वापरले जातात. उदाहरणार्थ, प्रयुत (10^6) म्हणजे दश सत सहस्सा) (दहा लाख) आहे.

आधुनिक नामकरण यासारखेच आहे, जेथे आपण म्हणतो,

शंभर हजार म्हणजे लाख	$100 \times 1000 = 1,00,000$	$10^2 \times 10^3 = 10^5$
शंभर लाख म्हणजे कोटी	$100 \times 1,00,000 = 1,00,00,000$	$10^2 \times 10^5 = 10^7$
शंभर कोटी म्हणजे अरब	$100 \times 1,00,00,000 = 1,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^7 = 10^9$
शंभर अरब म्हणजे एक खरब	$100 \times 1,00,00,00,000 = 1,00,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^9 = 10^{11}$

पुढे चालू ठेवून शंभर खरब म्हणजे नील (10^{13}) शंभर नील हे पद्म (10^{15}) आहे, शंभर पद्म हे शंख (10^{17}) आहे, शंभर शंख हे महाशंख (10^{19}) आहे.

अमेरिकन / आंतरराष्ट्रीय पध्दतीमध्ये आपण म्हणतो की,

हजार हजार हे दशलक्ष	$1000 \times 1000 = 1,000,000$	$10^3 \times 10^3 = 10^6$
हजार दशलक्ष हे अब्ज	$1000 \times 1,000,000 = 1,000,000,000$	$10^3 \times 10^6 = 10^9$
हजार अब्ज हे एक ट्रिलियन	$1000 \times 1,000,000,000 = 1000,000,000,000$	$10^3 \times 10^9 = 10^{12}$

हे पुढे चालू ठेवत हजार ट्रिलियन म्हणजे क्वॉड्रिलियन (10^{15}) हा नमुना पुढे चालू राहतो दशलक्ष (10^6), अब्ज (10^9), ट्रिलियन (10^{12}), क्वॉड्रिलियन (10^{15}), क्विंटिलियन (10^{18}), सेक्टिलियन (10^{21}), सेप्टिलियन (10^{24}), ऑक्टिलियन (10^{27}), नॉनिलियन (10^{30}), डेसिलियन (10^{33}) या नांवाचे निरीक्षण करा.

? प्रत्येक नावांचा पहिला भाग काय दर्शवितो ?

10^{100} या संख्येला गुगोल असेही म्हणतात. विश्वातील अणूंची अंदाजे संख्या 10^{78} ते 10^{82} आहे. दहा गूगोल या संख्येला गूगोल प्लेक्स असे म्हणतात. ही संख्या किती मोठी आहे याची कल्पना करणे कठीण आहे.

भारतामध्ये सर्वात जास्त किंमतीची (मूल्याची) नोट 2000 रुपये आहे. तर जगातील चलनी नोटेची सर्वात जास्त किंमत कोणती आहे याचा अंदाज लावा. आता पर्यंत छापलेली सर्वात जास्त किंमतीची संख्यात्मक बँक नोट ही। सेक्टिलियन पेंगो. (10^{21} किंवा 1 मिलीअर्ड बिलपेंगो) किंमतीची एक विशेष नोट असून ती 1946 मध्ये हंगेरी येथे छापली गेली होती. परंतु ती चलनात जारी करण्यात आली नाही. 2009 मध्ये झिंबाब्वेने 100 ट्रिलियन (10^{14}) झिंबाब्वे डॉलरची नोट छापली होती जीची छपाईच्या वेळी किंमत सुमारे $ 30 होती.





शोधा पाहू.

1. $(2^{224}) \div (4^{32})$ मधील एकक अंकाची किंमत (मूल्य) शोधा. [सूचना $4 = 2^2$]

2. एका डब्ब्यात 5 बाटल्या आहेत. प्रत्येक दिवशी एक नवीन डब्बा विकत आणला. तर 40 व्या दिवसानंतर तेथील बाटल्यांची संख्या किती असेल ?

3. दिलेल्या संख्या या दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त घातांकामध्ये तीन वेगवेगळ्या पध्दतीने लिहा. घातांक हा कोणताही पूर्णांक असू शकतो.

   (i) 64^3 (ii) 192^8 (iii) 32^{-5}

4. खालील प्रत्येक विधानाचे काळजीपूर्वक परिक्षण करा आणि ते 'नेहमी सत्य' 'कधीतरी सत्य' किंवा 'केंव्हाही सत्य नाही' आहेत का ते शोधा तुमच्या कारणाचे स्पष्टीकरण द्या.

   (i) घन संख्या या वर्ग संख्या सुध्दा असतात.

   (ii) चौथा घातांक असलेल्या संख्या सुध्दा वर्ग संख्या असतात.

   (iii) संख्येच्या पाचव्या घातांकाला त्याच संख्येच्या 3 घातांकाने (घनाने) भाग जातो.

   (iv) दोन घन संख्यांचा गुणाकार हा घन संख्या असते.

   (V) q^{46} ही दोन्ही 4 घातांक आणि 6 घातांक आहे. (q ही मुळ संख्या आहे)

5. खालील संख्याना सरळरूप देऊन घातांक रुपात लिहा.

   (i) $10^{-2} \times 10^{-5}$ (ii) $5^7 \div 5^4$

   (iii) $9^{-7} \div 9^4$ (iv) $(13^{-2})^{-3}$

   (v) $m^5n^{12}(mn)^9$

6. जर $12^2 = 144$ तर खालील किंमती लिहा.

   (i) $(1.2)^2$ (ii) $(0.12)^2$

   (iii) $(0.012)^2$ (iv) 120^2

7. खालीलपैकी समान असणाऱ्या संख्यांना गोल करा.

$2^4 \times 3^6$ $6^4 \times 3^2$ 6^{10} $18^2 \times 6^2$ 6^{24}

8. खालीलपैकी प्रत्येकातील मोठी संख्या ओळखा.

(i) 4^3 किंवा 3^4 (ii) 2^8 किंवा 8^2 (iii) 100^2 किंवा 2^{100}

9. एका दुधाच्या डेअरीमध्ये एका वर्षाला 8.5 अब्ज दुधाची पाकिटे तयार करण्याची योजना केली तर त्याना एक वेगळी संकेत संख्या (ओळख) प्रत्येक पाकिटासाठी करायची आहे. जर त्यानी 0-9 हे अंक वापरले तर त्यांच्या संकेतामध्ये किती अंक असू शकतील ?

10. 64 ही वर्ग संख्या (8^2) आणि घन संख्या (4^3) आहे. अशा इतर कांही संख्या आहेत का ज्या दोन्ही वर्ग आणि घन आहेत ? सामान्यपणे अशा संख्यांचे वर्णन करण्याची पध्दत आहे का ?



11. एका डिजीटल लॉकरमध्ये मुळाक्षरे आणि संख्यांचा (अंक आणि अक्षरे दोन्ही आहेत) पासवर्ड लांबी 5 आहे. कोडचे उदाहरण G89P0, 38098, BRJKW आणि 003AZ आहेत. असे किती कोड बनविणे शक्य आहे ?

12. 2024 मध्ये जगातील मेंढ्यांची संख्या सुमारे 10^9 आणि शेळींची संख्या सुद्धा सारखीच आहे. तर मेंढ्या आणि शेळी यांची एकूण लोकसंख्या किती ?

(i) 20^9 (ii) 10^{11} (iii) 10^{10}

(iv) 10^{18} (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. खालील उदाहरणांचे वैज्ञानिक चिन्हांने उत्तर सोडवा आणि लिहा.

(i) जर जगातील प्रत्येक व्यक्तीजवळ 30 कपड्याचे तुकडे असतील तर एकूण कपड्याच्या तुकड्यांची संख्या काढा.

(ii) जगामध्ये सुमारे 10 कोटी मधमाशांच्या वसाहती आहेत. जर प्रत्येक वसाहतीमध्ये 50,000 मधमाशा आहेत तर एकूण मधमाशांची संख्या काढा.

(iii) मानवी शरिरामध्ये सुमारे 38 ट्रिलियन जीवाणू पेशी आहेत तर जगातील सर्व मानवामध्ये वास्तव करत असलेल्या जीवाणूंची लोकसंख्या काढा.

(iv) संपूर्ण आयुष्यामध्ये जेवण करण्यासाठी घालविलेला एकूण वेळ काढा.

14. 1 अरब / 1 अब्ज सेकंदापूर्वीची तारीख कोणती ?



सारांश [Summery]

- आम्ही कांही परिस्थितींचे विश्लेषण केले. प्रश्न विचारले आणि प्रथम उत्तराचा अंदाज करायला लावून, नंतर विधानांचे नमुने बनविले, त्यानंतर गणना करण्यासाठी गृहीतके आणि अंदाजे निष्कर्ष काढून त्यांची उत्तरे शोधली.
- जलद घातांक वाढ तिला गुणाकारात्मक वाढ असेही म्हणतात. याची तुलना बेरजेच्या वाढीशी कशी करता येते हे अनुभवले आहे.
- n^a हे $n \times n \times n \times n \times \ldots\ldots \times n$ (n चा त्याच्याशीच a वेळा गुणाकार) आणि $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$.
- घातांकाच्या क्रिया.
  - $n^a \times n^b = n^{a+b}$
  - $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$
  - $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $(n \neq 0)$
  - $n^a \times m^a = (n \times m)^a$
  - $n^a \div m^a = (n \div m)^a$ $(m \neq 0)$
  - $n^0 = 1$ $(n \neq 0)$
- 308100000 या संख्येचे वैज्ञानिक चिन्ह हे 3.081×10^8 आहे. कोणत्याही संख्येचा **वैज्ञानिक चिन्हाचा प्रमाणित नमुना** $x \times 10^y$, जेथे $x \geq 1$ आणि $x < 10$ आणि y हा पूर्णांक आहे.
- एखादी संख्या किंवा राशी ही किती मोठी आहे हे समजून घेण्यासाठी मनोरंजक विचारांच्या प्रयोग वापरण्यात गुंतले जाऊ शकते.



ही कोड्याची वेळ

दहाचे लोकविलक्षण

हा खेळ खेळण्यासाठी जोडीदाराचा शोध घ्या. 10 सेकंदामध्ये जी व्यक्ती 0 - 9 अंक आणि अंकगणिती क्रिया वापरुन मोठ्यात मोठी संख्या किंवा पदावली लिहीते ती व्यक्ती जिंकते.

10000000000000 999999 × 999999

पहिल्या फेरीमध्ये रॉक्सीने: 10000000000000 लिहिले आणि ईस्तूने 999999 × 999999 लिहिले. या दोन्ही संख्येपैकी रॉक्सीची संख्या मोठी आहे. तुम्ही का हे सांगू शकाल का ? रॉक्सींची संख्या ही 10^{13} आहे. तर ईस्तूची संख्या ही $(10^6)^2$ पेक्षा लहान आहे.

दुसऱ्या फेरीमध्ये रॉक्सीने $10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ लिहिले आणि ईस्तूने $(10^{1000000}) \times 9000$ लिहिले. यापैकी कोणते मोठे ते तुम्ही सांगू शकाल का ?

$10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ $10^{1000000} \times 9000$

वेगवेगळ्या फेऱ्यांसाठी तुम्ही खालील अटी विचारात घेऊ शकता.

(i) घातांकाचा वापर करायचा नाही. फक्त बेरीज करायची

(ii) घातांकाचा वापर करायचा नाही. फक्त बेरीज आणि गुणाकार करायचा.

(iii) घातांक वापरणे. फक्त बेरीज करणे.

(iv) घातांक वापरणे. कोणत्याही अंकगणिती क्रिया वापरणे.

तुम्ही तुमच्या स्वतःच्या अटी तयार करु शकता आणि / किंवा जास्तीत जास्त लोकांचा खेळात एकत्रितपणे समावेश करु शकता.



3 संख्यांची कहाणी (A Story of Numbers)

K7J3U4

3.1 रीमाची उत्सुकता [Reema's Curiosity]

एका कंटाळवाण्या (आळशी) दुपारी, रीमा एका जुन्या पुस्तकाची पाने परतत होती. तेव्हा अचानक ! त्यावेळी कागदाचा एक तुकडा बाहेर पडला आणि जमिनीवर तरंगत होता. तिने तो उचलला आणि त्यावरील विचित्र चिन्हांकडे पाहत राहिली. "हे काय आहे" ? याचे तिला आश्चर्य वाटले.

"ती कागदाला जणू कांही गुप्त खजिना असल्यासारखे पकडून आपल्या वडिलांच्याकडे धावत गेली. त्यांनी त्याच्याकडे पाहिले आणि हसले. "सुमारे 4000 वर्षापूर्वी, आशिया खंडाच्या पश्चिम भागात मेसापोटेमिया नांवाची एक नागरी संस्कृती भरभराटीला आली होती, ज्यामध्ये सध्याच्या इराकचा कांही भाग आणि इतर शेजारील देश आहेत. त्यांनी संख्या लिहिण्याची एक पध्दत दिली आहे"



रीमाचे डोळे चमकले, "खरच ? ही विचित्र चिन्हे संख्यांची आहेत का ?" तिची उत्सुकता उत्तेजित झाली आणि तिच्या डोक्यात प्रश्न फिरु लागले.



तिची उत्सुकता ओळखून तिच्या वडिलानी सांगायला सुरुवात केली की, कालांतरानुसार संख्यांची कल्पना आणि संख्या दर्शविण्याच्या पध्दती भौगोलीक क्षेत्रामध्ये कशा विकसित झाल्या आणि आधुनिक कार्यक्षम स्वरुपामध्ये कशारितीने पोहोचल्या. त्यांच्या बरोबर भूतकाळामध्ये प्रवास करण्यास तयार राहा.



अगदी पाषाण युगाच्या सुरुवातीच्या काळातही मानवाला मोजण्याची गरज होती त्यांच्या जवळील आहाराचे प्रमाण, त्यांच्याकडील असलेल्या प्राण्यांची संख्या, वस्तूंच्या व्यापाराची माहिती, धार्मिक विधींच्यावेळी दिल्या जाणाऱ्या भेट वस्तू इत्यादी निश्चित करण्यासाठी मोजणे गरजेचे होते. त्यांना निघून गेलेल्या दिवसांची माहिती ठेवायची होती, उदाहरणार्थ अमावस्या, पौर्णिमा किंवा ऋतूंची सुरुवात केव्हा घडली हे जाणून घ्यायचे व भाकीत करायचे होते. तरीपण, जेव्हा ते अशा संख्याविषयी सांगत किंवा लिहित होते तेव्हा त्यांनी आज आपण वापरत असलेल्या संख्या वापरल्या नाहीत.

आज आपण वापरत असलेल्या आधुनिक मौखिक आणि लिखीत संख्यांची रचना हजारो वर्षापूर्वी भारतात उगम पावली आहे प्राचीन भारतीय ग्रंथ यजुर्वेद संहिता' मध्ये 10 च्या घातांकावरील संख्यांची नांवे नमूद केली आहेत. जसे, आज आपण मौखिकरित्या म्हणत आलो आहे. उदाहरणार्थ, त्यांनी एक (एका), दहा (दशा), शंभर (शत), हजार (सहस्त्र), दहा हजार (अयुता) इत्यादी नावांची सर्व यादी बनविली 10^{12} आणि त्यापुढील सुध्दा.



बखशाली हस्तलिखीतमधील शून्य

आज आपण ज्या पध्दतीने 0 ते 9 अंक वापरुन संख्या लिहितो, त्यांची उत्पत्ती आणि विकास 2000 वर्षापूर्वी भारतात झाला आहे. 0 या अंकासह दहा अंक वापरुन संख्या लिहिण्याच्या पध्दतीची (ज्याला बिंदू असे संबोधण्यात आले) पहिली घटना 'बखशाली' हस्तलिखीत (इ.स. 3 ऱ्या शतकात) घडून आली. आर्यभट्ट (सुमारे 499 इ.स.) मधील हे पहिले गणिततज्ञ होते ज्यांनी 10 चिन्हांच्या भारतीय पध्दतीची पूर्णपणे स्पष्टीकरण दिले आणि त्यांची विस्तृत वैज्ञानिक गणना केली.

इ.स. 800 च्या सुमाराला अरब जगात भारतीय संख्या पध्दती प्रसारीत झाली. महान प्रसिद्ध पर्शियन गणिततज्ञ अल-ख्वारिझ्मी (ज्यांच्या नावावरुन अल्गोरिथम हा शब्द ठेवण्यात आला) यांनी आपल्या ऑन द कॅलक्युलेशन विथ हिंदू न्यूमरल्स् (सुमारे 825) या पुस्तकाद्वारे आणि तत्वज्ञानी अल-किंदी यांच्या ऑन द यूज ऑफ द हिंदू न्यूमरल्स या (सुमारे 830) पुस्तकाव्दारे अरब जगात लोकप्रिय बनविली.

अरब जगापासून सुमारे 1100 इ.स. मध्ये हिंदू अंक युरोप आणि आफ्रिकेच्या कांही भागात पोहोचले जर अल-ख्वारिझ्मी यांचे हिंदू अंकासह गणना करण्याचे कार्य लॅटिनमध्ये अनुवादित झाले असले तरी, इटलीचे गणिततज्ञ फिबोनाची यांनी 1200 च्या सुमारास युरोपला भारतीय अंकाचा अवलंब करण्यास भाग पाडले, तरीसुद्धा, रोमन अंक त्यावेळी युरोप विचारसरणी आणि लेखनामध्ये इतके रुजले होते की भारतीय अंकाचा वापर अनेक शतकापर्यंत वाढू शकला नाही. परंतु शेवटी युरोप पुनर्जागरण काळात आणि 17 व्या शतकापर्यंत त्यांचा वापर न करणे अशक्य बनले नाहीतर वैज्ञानिक विकासाला अडथळा येईल.

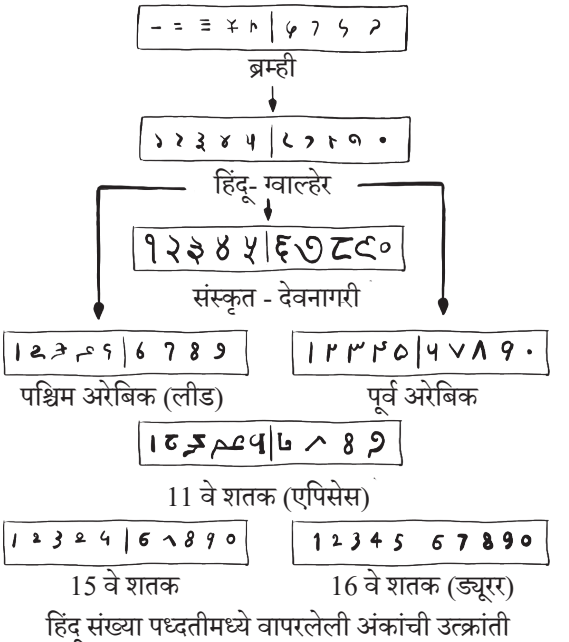
"दहा चिन्हांचा गट (प्रत्येक चिन्हाला स्थान मूल्य आणि निरपेक्ष मूल्य आहे) वापरुन प्रत्येक संभाव्य संख्या व्यक्त करण्याची कल्पक पध्दत भारतामध्ये उदयाला आली. आजकाल ही कल्पक पध्दत इतकी सोपी वाटली की तिचे महत्व आणि सखोल अभ्यास आता समजला जात नाही त्याचा साधेपणा हा गणना सुलभ करण्याच्या आणि उपयुक्त शोधामध्ये अंकगणिताला अग्रस्थानी ठेवण्याच्या पध्दतीमध्ये आहे!"

— पियरे सायमन लापलेस (1749 - 1827)

त्यांचा वापर त्यानंतर प्रत्येक खंडामध्ये पसरला आणि आत्ता त्याचा वापर जगाच्या प्रत्येक कोपऱ्यात होत आहे.

कारण युरोपमधील विद्वानांनी अरब जगापासून भारतीय अंक शिकले. युरोपचा दृष्टीकोन प्रतिबिंबीत करण्यासाठी त्यांना 'अरेबिक अंक' असे म्हटले आहे. दुसऱ्या बाजूने वर नमुद केल्याप्रमाणे अल-ख्वारिझमी आणि अल-किंदी या अरब विद्वानांनी त्यांना "हिंदू अंक "म्हटले आहे. युरोपच्या वसाहतवादाच्या वेळी युरोपियन शब्द अरेबिक मोठ्या प्रमाणात वापरला जाऊ लागला. तरीपण, अलिकडच्या काळामध्ये युरोपसह संपूर्ण जगामध्ये अनेक पाठ्यपुस्तके आणि कागदपत्रामध्ये ही चुक दुरुस्त केली जात आहे. आज आपण वापरत असलेल्या संख्यासाठी सर्वात जास्त वापरलेल्या संज्ञा 'हिंदु अंक', भारतीय संख्या' आणि संक्रमणकालीन 'हिंदू अरेबिक अंक' आहेत. हे लक्षात घेण्यासारखे आहे की येथे 'हिंदू' हा शब्द धर्माचा संदर्भ देत नाही. तर भौगोलीक / लोकांचा संदर्भ देतो जेथून या संख्या आल्या.

भारतीय संख्या पध्दतीमधील संख्या लिहिण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या 0, 1, 2,..... 9 या अंकाचा आकार कालांतराने विकसित झाला आहे तो खालीलप्रमाणे दर्शविला आहे.



हिंदू संख्या पध्दतीमध्ये वापरलेली अंकांची उत्क्रांती

भारतीय संख्या पध्दतीमध्ये वापरल्या जाणाऱ्या संख्यांची उत्क्रांती, भारतीय संख्या पध्दतीचा जागतिक स्तरावर उपयोग होण्यापूर्वी लोकांचे वेगवेगळे गट संख्या दर्शविण्याच्या वेगवेगळ्या पध्दतीचा वापर करत होते.

त्यापैकी कांहीची झलक पाहू. आपण वेगवेगळ्या पध्दती क्रमानुसार पाहणार नाही परंतु संख्या दर्शविण्याच्या कल्पनेच्या विकासातील मुख्य टप्पे दाखविणारा क्रम पाहणार आहोत.

परंतु प्रथम मोजण्यासाठी आवश्यक असलेल्या कांही मुलभूत कल्पनांचा शोध घेऊया आणि दिलेल्या संग्रहातील वस्तूंची संख्या निश्चित करुया.

मोजण्याचे कार्य तंत्र [The Mechanism of Counting]

सुमारे दहा हजार वर्षापूर्वीच्या पाषाण युगात जगत आहोत अशी कल्पना करा. समजा की आपल्याकडे गायींचा एक कळप आहे. आपण आपल्या कळपाविषयी कांही नैसर्गिक प्रश्न येथे विचारू शकतो जसे की,

? प्रश्न 1. सर्व गायी चरल्यानंतर सुरक्षितपणे परत आल्या आहेत याची खात्री आम्ही कशी करावी?

? प्रश्न 2. आपल्याजवळ शेजाऱ्यांपेक्षा कमी गायी आहेत का?

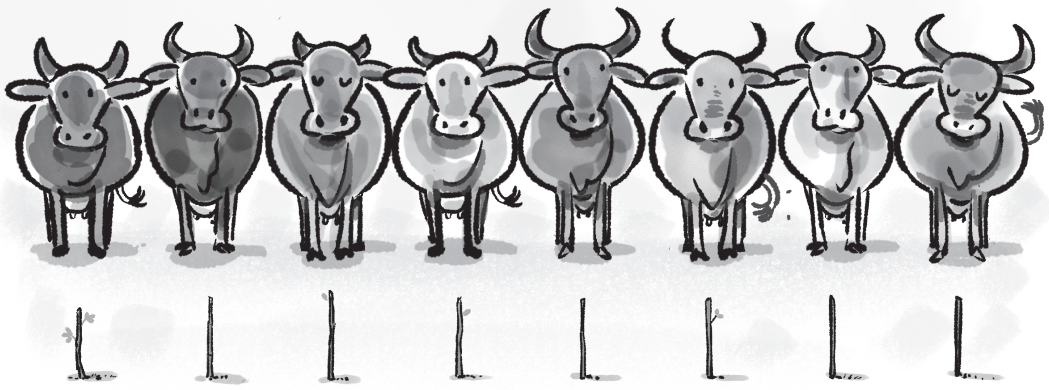
गणिती बोल

? प्रश्न 3. जरी कमी गायी असतील तर आपल्या शेजाऱ्या इतक्या गायी होण्यासाठी आम्हाला आणखी किती गायींची आवश्यकता असेल ?

हिंदू संख्या पद्धतीतील संख्यांची नांवे लिखीत संख्या उपयोग न करता आपल्याला या प्रश्नांची उत्तरे द्यावयाची आहेत. आम्ही ते कसे करू शकतो?

येथे कांही संभाव्य पध्दती आहेत

पध्दत 1: आपण खडे, काठ्या किंवा मुबलक प्रमाणात उपलब्ध असलेल्या कोणत्याही वस्तूंचा वापर करुन प्रश्न सोडवू शकतो चला तर निवडूया. कळपातील प्रत्येक गायीसाठी एक काठी ठेवू शकतो. काठ्यांच्या अंतिम संग्रहातून गायींची संख्या समजते. ज्याचा वापर करून कोणत्याही गायी हरवल्या आहेत का ते तपासता येते.



प्रत्येक गायीला एका काठीशी जोडण्याच्या या पध्दतीला, जेणेकरून एका काठीला दोन गायी जोडल्या जाणार नाहीत किंवा प्रतिचित्रण केल्या जाणार नाहीत त्याला एकानंतर एक प्रतिचित्रण असे म्हणतात.

या प्रतिचित्रणाचा उपयोग कोष्टकात दाखविल्याप्रमाणे संख्या दर्शविण्याची पध्दत शोधण्यासाठी केली जाऊ शकते.

संख्या	ते दर्शविण्याची पध्दत (काठ्या वापरुन)
1	
2	
3	
4	
5	
.	.
.	.
.	.

? इतर दोन प्रश्नांची उत्तरे (प्रश्न 2 आणि प्रश्न 3) देण्यासाठी तुम्ही अशा काठ्यांचा वापर कसा कराल ?

पध्दत 2. आम्ही वस्तूंऐवजी ध्वनी किंवा नांवाचा एक प्रमाणित क्रम वापरु शकतो. उदाहरणार्थ, आम्ही कोणत्याही भाषेतील मुळाक्षरांचे ध्वनी वापरु शकतो. गणना करताना आम्ही वस्तू आणि मुळाक्षरामध्ये एकानंतर एक प्रति चित्रण करू शकतो म्हणजेच मुळाक्षर क्रमानुसार मोजण्यासाठी प्रत्येक वस्तूला एक मुळाक्षर जोडा. या प्रतिचित्रणाचा वापर संख्या मौखिकपणे दर्शविण्यासाठी केला जाऊ शकतो. उदाहरणार्थ, जर आम्ही 'a' ते 'z' पर्यंतची इंग्रजी मुळाक्षरे वापरली तर संख्या दर्शविण्यासाठी आम्ही खालील कोष्टक वापरु.

संख्या	ते दर्शविण्याची पध्दत (ध्वनी किंवा नांवे वापरुन)
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
.	.
.	.
.	.
26	z

या स्वरुपात फक्त इंग्रजी वर्णमालेतील मुळाक्षरे वापरण्याची एक स्पष्ट मर्यादा म्हणजे 26 पेक्षा जास्त वस्तू असलेल्या संग्रहांची गणना करण्यासाठी याचा वापर करता येत नाही.

? तुमच्या भाषेतील मुळाक्षरांच्या ध्वनींचा वापर करून तुम्ही या पध्दतीने किती संख्या दर्शवू शकता ?



पध्दत 3: आम्ही खालील प्रमाणे लिखीत चिन्हांचा क्रम वापरु शकतो.

कोष्टक 1

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
चिन्हे वापरुन दर्शविणे	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
संख्या	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
चिन्हे वापरुन दर्शविणे	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

? मोठ्या संख्या दर्शविण्यासाठी सुध्दा ही पध्दत पुढे तुम्ही पाहू शकाल का ? कसे ?

वरील चर्चेमधून आम्हाला असे दिसून येते की, संग्रहाची गणना करण्यासाठी आणि आकार शोधण्यासाठी आम्हाला वस्तूंचा एक प्रमाणित क्रम, नांवे किंवा लिखीत चिन्हे एका ठराविक क्रमानुसार आवश्यक आहेत. या प्रमाणित क्रमाला **संख्या पद्धती** असे म्हणू शकतो. एकानंतर एक प्रतिचित्रणाची गणना वस्तूंच्या संग्रहातील आणि प्रमाणित क्रमाच्या क्रमाचा वापर करून केला जातो.

संख्यांना अंत नसल्यामुळे, अशा न संपणाऱ्या प्रमाणित क्रम किंवा संख्या पध्दतीचा शोध लावणे हे एक आव्हान असल्यामुळे गणना करणे सोपे जाईल. काठ्यांचा उपयोग केल्याने न संपणाऱ्या प्रमाणित क्रम किंवा संख्या पद्धती मिळते. तथापि मोठ्या संख्येची गणना करणे सोयीस्कर नाही कारण आम्ही मोजल्या जाणाऱ्या वस्तूंच्या संख्येइतक्याच काठ्या लागतील. पध्दत 2 प्रमाणे भाषेतील मुळाक्षरांच्या ध्वनीचा उपयोग या गणना पद्धतीसाठी सोयीस्कर आहे परंतू ती कधीही न संपणारा प्रमाणित क्रम किंवा संख्या पद्धत नाही. पध्दत 3 मध्ये दिलेला प्रमाणित क्रम किंवा संख्या पध्दत प्रत्यक्षात हिंदू संख्या पध्दतीने बदलण्यापूर्वी युरोपमध्ये वापरली जाणारी पध्दत होती तिला **रोमन संख्या पध्दत** म्हणतात. ती युरोपमध्ये अनेक शतकापर्यंत मोठ्या प्रमाणात वापरली जात होती आणि अनेक कारणासाठी सोयीस्कर होती. परंतु त्यामध्ये एक समानता अधिका अधिक चिन्हे सादर केल्याविना कोणीही अनियंत्रितपणे मोठ्या संख्या लिहू शकत नाहीत. संख्या लिहिण्याच्या या पध्दतीविषयी आम्ही नंतर अधिक माहिती मिळवू या.



तीन पद्धतीनी स्पष्ट केल्याप्रमाणे इतिहास आम्हाला भौतिक वस्तू (जशा की काठ्या, शरिराचे भाग इत्यादी प्रमाणे) नांवे आणि लिखीत चिन्हे वापरून तयार केलेल्या संख्या पद्धतीची उदाहरणे देतो. लोकांच्या कांही गटानी भौतिक वस्तू तसेच नांवे या दोन्हीव्दारे दर्शविलेली होती तर चिनी लोकांनी इतरांप्रमाणे दर्शविणारी तीन रूपे दाखविली आहेत. लिखीत संख्या पध्दतीमध्ये आढळणाऱ्या या चिन्हांना **संख्या वाचके** असे म्हणतात. उदाहरणार्थ 0,1, 5, 36, 193,..... इ. कांही संख्या हिंदू संख्या पद्धतीत आढळतात. लहान संख्या दर्शविणाऱ्या संख्यांना नेहमीच नांवे असत आणि म्हणूनच लिखीत चिन्हाने बनलेली संख्या पध्दती नावांने बनलेली संख्या पध्दतीशी आधुनिक काळातील हिंदू पध्दतीमध्ये जुळत असेल !

? शोधा पाहू. [Find it out]

1. तुम्ही पध्दत 1 प्रमाणे संख्या दर्शविण्यासाठी काठ्या वापरणारी संख्या पध्दत वापरत आहात असे समजा. हिंदू संख्या पध्दतीतील संख्यांची नांवे किंवा अंक न वापरता दोन संख्या किंवा काठ्यांच्या दोन संग्रहांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार करण्याची पध्दत लिहा.



2. पध्दत 2 मध्ये संख्या पध्दती वाढविण्याचा एक मार्ग म्हणजे एकापेक्षा जास्त मुळाक्षरे असलेल्या तारा वापरणे होय - उदाहरणार्थ, आम्ही 27 साठी 'aa' वापरू शकतो. सर्व संख्या दर्शविण्यासाठी तुम्ही ही पध्दत कशी वाढवू शकता ? हे करण्याचे अनेक मार्ग आहेत ?



3. तुमची स्वत:ची संख्या पध्दत बनविण्याचा प्रयत्न करा.



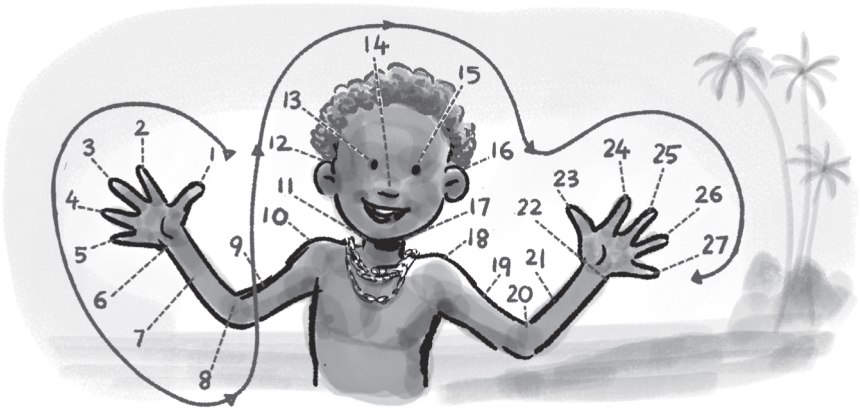
3.2 पूर्वीच्या कांही संख्या पध्दती [Some Early Number Systems]

(i) शरिराच्या भागांचा वापर

जगभरातील अनेक लोकांच्या गटानी गणनेसाठी त्यांचे हात आणि शरिराचे भाग वापरले आहेत. पापुआ न्यू ग्युनिया मधील लोकांचा गट त्यांच्या शरिराचे भाग हे प्रमाणित क्रम किंवा संख्या पद्धत म्हणून कसा वापर करत होते आणि अजूनही ते त्या पद्धतीचा वापर करत आहेत.

(ii) हाडे आणि इतर पृष्ठभागावरील ताळा खुण:

संख्या दर्शविण्याची सर्वात जुनी पध्दत म्हणजे खाच बनविणे: हाडे किंवा गुहेच्या भिंतीसारख्या पृष्ठभागावर कापलेल्या खुणा या खुणाना **ताळा खुणा** म्हणतात.



या पध्दतीमध्ये मोजले गेलेल्या प्रत्येक वस्तूसाठी एक खूण केली जाते. म्हणून गुणकांचा अंतिम संग्रह वस्तूंची एकूण संख्या दर्शवितो. ही पध्दत मोजण्यासाठी काठ्या वापरण्याच्या पध्दतीसारखीच आहे (पध्दत 1) फक्त काठी जोडण्या ऐवजी खुण केली जाते.

पुरातन वास्तुशास्त्रज्ञाना 20,000 वर्षा पूर्वीची अशी हाडे सापडली आहेत की त्याच्यावर ताळा खुणा आहेत असे दिसून येते. संख्या दर्शविणाऱ्या खुणा असलेली सर्वात जुनी माहितीची हाडे म्हणजे इशांगो हाड आणि लेम्बोंबो हाड, 20,000 ते 35,000 वर्षापूर्वीची इशांगो हाडे कांगोच्या लोकशाही प्रजासत्ताकात सापडली होती. त्याच स्तंभामध्ये मांडलेल्या खाचा आहेत. ज्या कदाचित दिनदर्शिका पध्दत दर्शवितात. दक्षिण आफ्रिकेमध्ये शोधलेले लेम्बोंबो हाड हे 29 खाचासह 44,000 वर्षा पूर्वीचे जुने असल्याचा अंदाज वर्तविण्यात आला आहे आणि हे सर्वात जुन्या गणितीय कलाकृतीपैकी एक मानले जाते. जे कदाचित चंद्र दिनदर्शिका किंवा ताळा काठी म्हणून काम करत असेल.



लेम्बोबो हाड



इशांगो हाड

(iii) दोनच्या पट्टीत मिळविलेल्या संख्याची नावे.

आस्ट्रेलियातील स्थानिक लोकांच्या एका गटाला गुमुलगल हे त्यांच्या संख्यांसाठी खालील शब्द वापरत होते.

गुमुलगल

(ऑस्ट्रेलिया)

1. युरापोन
2. उकासर
3. उकासर - युरापोन
4. उकासर - उकासर
5. उकासर - उकासर - युरापोन
6. उकासर - उकासर - उकासर

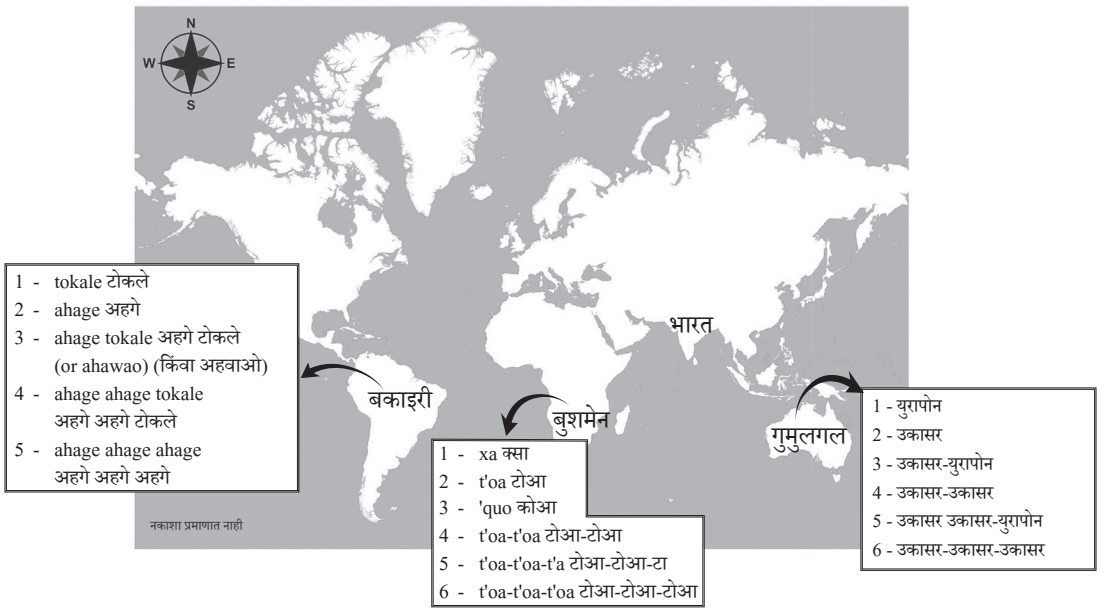
? त्यांच्या संख्यांची नांवे कशी तयार झाली हे तुम्ही पाहिलंत का ?

1 आणि 2 या संख्यांच्या नांवापासून 3 या संख्येचे नाव बनविलेले आहे. 4 या संख्येचे नांव 2 या संख्येच्या नांवाच्या दोन घटनांनी बनलेले आहे

? इतर संख्यांची नांवे कशी तयार होतात हे तुम्ही कसे पाहू शकता ? संख्या 2 मध्ये मोजल्या जातात, ज्यांचा वापर करुन संख्यांची नांवे तयार केली जातात. $3 = 2 + 1$, $4 = 2 + 2$, $5 = 2 + 2 + 1$, $6 = 2 + 2 + 2$

6 पेक्षा मोठ्या संख्येला गुमुलगल यांनी रास म्हटले आहे.

या संख्या पद्धतीनी संबंधित एक अतिशय मनोरंजक आणि गोंधळात टाकणारी ऐतिहासिक घटना आहे. दक्षिण अमेरिकेतील स्थानिक लोकांच्या गटाच्या आणि दक्षिण आफ्रिकेतील बुशमन लोकांच्या खालील संख्या पद्धती पहा.



भौगोलिकदृष्या इतके दूर अंतर असून देखील आणि त्यांच्यामध्ये थोडाही संबंध नाही, तरीही या तिन्ही गटांनी, सममूल्य संख्या पद्धती विकसित केली आहे. हे कसे घडले याबदल इतिहासकारांना आश्चर्य वाटले आहे! एक सिद्धांत असा आहे की, या तीन गटांच्या लोकांचे पूर्वज समान असावेत, ज्यांनी ही संख्या पध्दती वापरली, कालांतराने त्यांचे वंशज या ठिकाणी स्थलांतरीत झाले.

जरी गुमुलगल संख्या पध्दतीमध्ये फक्त 6 पर्यंत संख्यासाठी संख्यांची नांवे होती तरीही आपण तेथे एका कल्पनेचा उदय पाहू शकतो. उदाहरणार्थ, ताळा पद्धतीपेक्षा संख्या दर्शविण्याकरीता 2 च्या मध्ये मोजणे अधिक कार्यक्षम आहे. वेगवेगळ्या संख्या पध्दतीमध्ये या कल्पनेमध्ये घेतलेला एक सामान्य प्रकार खालीलप्रमाणे आहे. एका विशिष्ट संख्येच्या गटामध्ये गणना करा (जसे की गुमुलगल पध्दतीमध्ये 2 च्या बाबतीत) आणि मोठ्या संख्या दर्शविण्यासाठी या गट आकाराशी संबंधित शब्द किंवा चिन्ह वापरत होते. वेगवेगळ्या संख्या पध्दतीमध्ये सामान्यपणे वापरल्या जाणाऱ्या कांही गट आकार 2, 5, 10 आणि 20 आहेत. रोमन पध्दतीत (कोष्टक 1) तुम्हाला 5 च्या संख्यांची गणना करण्याची कल्पना सापडेल.

विशिष्ट गट आकारात गणना करणे आणि संख्या दर्शविण्यासाठी त्यांचा वापर करणे ही कल्पना संख्येच्या पध्दतीच्या उत्क्रांतीच्या इतिहासात एक महत्वाची गोष्ट आहे.

लोकांना या कल्पनेकडे घेऊन जाणारी एक घटना म्हणजे संग्रहाचा आकार एका दृष्टीक्षेपात त्वरीत जाणून घेण्याची मानवी मर्यादा होय खालील कृतीसाठी प्रयत्न करुया.

? खालील प्रत्येक रकाण्यातील वस्तूंची संख्या जलदपणे मोजा.



गणना न करता तुम्ही किती गट आकारापर्यंतच्या वस्तूंची संख्या पाहून लगेच सांगू शकता? बहुतेक मानवाला एकाच दृष्टीक्षेपात 5 किंवा 5 पेक्षा अधिक वस्तू असलेल्या गटांची गणना करणे कठीण जाते.

या आकलन मर्यादेमुळे गणती खुणा वापरणाऱ्या लोकांना 5 खुणांच्या प्रत्येक गटाच्या जागी एक नवीन चिन्ह वापरण्यास कोष्टक 1 मधील पध्दतीत प्रवृत्त केलेले दिसून येते.

गणिती बोल

? फक्त एका विशिष्ट आकारातील संख्या पद्धती वापरली असता कोणत्या अडचणी येऊ शकतात ? फक्त 5 ने मोजल्या जाणाऱ्या संख्या पध्दतीमध्ये तुम्ही 1345 सारख्या संख्या कशा दर्शवाल ?

जरी विशिष्ट आकाराच्या गटामध्ये मोजणी करून संख्या दर्शविणे ही ताळा पद्धतीपेक्षा अधिक सोयीस्कर आहे. तरी पण मोठ्या संख्यासाठी ही पद्धत त्रासदायक बनू शकते पुढील पध्दत ही या कल्पनेचे परिशीलन दर्शविते.

(iv) रोमन संख्या [The Roman Numerals]



रोमन संख्या पध्दतीमध्ये (कोष्टक 1) 20 पर्यंतच्या संख्या आपण यापूर्वी पाहिल्या आहेत. आपण पाहिले आहे की 1 साठी I, 5 साठी V आणि 10 साठी X वापरतात.

39 पर्यंतच्या कोणत्याही संख्येचा रोमन अंक मिळविण्यासाठी प्रथम तो शक्य असलेल्या 10 च्या गटामध्ये मांडला जातो आणि नंतर शक्य असलेल्या 5 च्या गटामध्ये आणि शेवटी 1 च्या गटामध्ये मांडणी केली जाते.

उदाहरणार्थ: चला तर आपण 27 ही संख्या घेऊया

$$27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1$$

म्हणून 27 ही रोमन संख्या पध्दतीमध्ये XXVII असे लिहितात.

50 ला XXXXX असे दर्शविण्याऐवजी त्याला एक नवीन चिन्ह दिले आहे ते म्हणजे L. हीच पध्दत वापरुन 4 ही संख्या 5 पेक्षा 1 ने कमी म्हणून दर्शविली जाते - म्हणजेच IV त्यामुळे 40 ही संख्या 50 पेक्षा 10 ने कमी अशी दर्शविली जाते. ते म्हणजे XL तरीपण ही पद्धत वापरण्यात लोक नेहमीच या पध्दतीशी सुसंगत नव्हते. कांही वेळेला 40 हे XXXX असे दर्शवित होते.

रोमन संख्या पध्दतीमध्ये कांही मोठ्या संख्या दर्शविण्यासाठी नवीन चिन्हांचा परिचय करून दिला जात होता. या नवीन मुलभूत चिन्हे असलेल्या संख्यांना **'मार्गदर्शक संख्या'** असे म्हणतात. रोमन संख्या पध्दतीमधील कांही मार्गदर्शक संख्या आणि त्यांच्याशी संबंधित संख्या येथे दिलेल्या आहेत.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1,000

ही चिन्हे इतर संख्या दर्शविण्यासाठी सुध्दा वापरली जातात. उदाहरणार्थ, 2367 या संख्येचा विचार करा ही संख्या 1000 पासून सुरु होणाऱ्या मार्गदर्शक संख्याची बेरीज समजून लिहिणे शक्य आहे ते म्हणजे 1000 ही शक्य तितक्या वेळा आणि 500 ही शक्य तितक्या वेळा घेणे आणि पुढे सुरु ठेवले तर आम्हाला मिळेल.

$$2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1$$

तर रोमन पध्दतीमध्ये ही संख्या MMCCCLXII ही आहे.

शोधा पाहू. [Find it out]

1. रोमन पध्दतीमध्ये खालील संख्या दर्शवा.

(i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715

आपण मागे पाहिलेल्या संख्या पध्दतीपेक्षा ही पद्धत किती सोयीस्कर आहे हे आपल्याला दिसून आले आहे. ही संख्या पध्दत रोममध्ये सुमारे 8 व्या शतकामध्ये ग्रीक संख्या पध्दतीतून विकसित झाली. रोमन साम्राज्याच्या विस्ताराबरोबर ती संपूर्ण युरोपमध्ये पसरली.

या पध्दतीची कार्यक्षमता ही दिलेल्या संख्येच्या केवळ एकाच गटाने नाही तर गटाच्या आकाराच्या क्रमामध्ये आहेत त्यांना आपण मार्गदर्शक संख्या म्हणतो आणि नंतर या मार्गदर्शक संख्या वापरुन दिलेल्या संख्या दर्शविता येतात. संख्या पध्दतीच्या उत्क्रांतीच्या इतिहासातील कल्पना ही एक महत्वाची प्रगती आहे.

जरी रोमन संख्या पध्दतीला सापेक्ष कार्यक्षमता आहे, तरीही ती अंकगणिती क्रिया विशेष करुन गुणाकार आणि भागाकर सहजपणे करण्यात सक्षम नाही.

उदाहरणार्थ: खालील संख्या हिंदू संख्या पध्दतीमध्ये बेरीज न करता रुपांतरीत करण्याचा प्रयत्न करा.

(a) CCXXXII + CCCCXIII



चला तर I च्या, X च्या आणि C च्या एकूण संख्या शोधूया आणि सर्वात मोठी मार्गदर्शक संख्या वापरुन त्यांचा गट करुया.

सहजपणे पाहिले तर सर्वात मोठी मार्गदर्शक संख्या C आहे असे दिसते. परंतु लक्षात घ्या की 5 C च्या (100 च्या) पासून एक D (500) बनतात त्यामुळे ती संख्या आहे.

D
C C X X X I I
C C C C X I I I

XL V
X X X I I
DC = DCXLV
X I I I

हे तुम्ही आता स्वतः करा.

(b) LXXXVII + LXXVIII

? रोमन संख्या पध्दतीमध्ये दिलेल्या दोन संख्यांचा गुणाकार तुम्ही हिंदु संख्या पध्दतीमध्ये न करता कसा कराल ? खालील मार्गदर्शक संख्यांच्या जोडीचा गुणाकार शोधण्याचा प्रयत्न करा V × L, L × D, V × D, VII × IX

प्रयत्न करा



लोक रोमन पध्दतीचा वापर करून त्यांच्या अंकगणिती क्रिया करण्यासाठी **'अॅबॅकस'** नांवाचे गणना साधन वापरुन करत असत. ते काय आहेत ते आपण नंतरच्या भागात पाहू. तरीपण केवळ विशेष प्रशिक्षित लोकच गणनेसाठी या साधनाचा वापर करत असत.

वरील प्रमाणे चर्चा केलेल्या संख्या पध्दतींचा अभ्यास करताना असे समजू नका की, ऐतिहासिकदृष्टया एक पध्दत ही मागील पद्धतीमध्ये सुधारणा म्हणून विकसित झाली. पुढीलप्रमाणे येणाऱ्या संख्या पध्दतींचा अभ्यास करताना हा मुद्दा लक्षात ठेवणे आवश्यक आहे. प्रत्येक संख्या पध्दती कशा विकसित झाल्या यांची खरी कहाणी खुपच गुंतागुंतीची आहे आणि बऱ्याच वेळा ती स्पष्टपणे आपल्याला ज्ञातही नाही. त्यामुळे आपण त्यांचा शोध घेण्याचा प्रयत्न या प्रकरणात करणार नाही.

? शोधा पाहू [Find it out]

1. पॅसिफिक बेटावरील स्थानिक लोकांचा एक गट वेगवेगळ्या वस्तू मोजण्यासाठी वेगवेगळ्या क्रमाच्या संख्याची नांवे वापरत असत. ते तसे का करत होते असे तुम्हाला वाटते ?

गणिती बोल

2. 2 ने मोजण्याच्या संख्या पध्दती सारखीच 6 च्या पुढील गुमुलगल संख्या पद्धतीचा संख्याचा विस्तार विचारात घ्या. हिंदु संख्या पद्धतीचा वापर न करता या पध्दतीमध्ये येणाऱ्या संख्यासाठी वेगवेगळ्या अंकगणिती क्रिया (+, -, ×, ÷) करण्याचा प्रकार शोधा. खालील संख्यांचे मूल्यमापन करण्यासाठी याचा वापर करा.

गणिती बोल

(i) (उकासर-उकासर-उकासर-युरापोन) + (उकासर-उकासर-उकासर-युरापोन)

(ii) (उकासर-उकासर-उकासर-उकासर-युरापोन) - (उकासर-उकासर-उकासर)

(iii) (उकासर-उकासर-उकासर-उकासर-युरापोन) × (उकासर-उकासर)

(iv) (उकासर-उकासर-उकासर-उकासर-उकासर-उकासर-उकासर-उकासर) ÷ (उकासर-उकासर)

3. रोमन संख्या पध्दतीची तुलना हिंदु संख्या पध्दतीशी केली असता कोणती वैशिष्ट्ये ही अधिक कार्यक्षम बनवितात ते ओळखा.

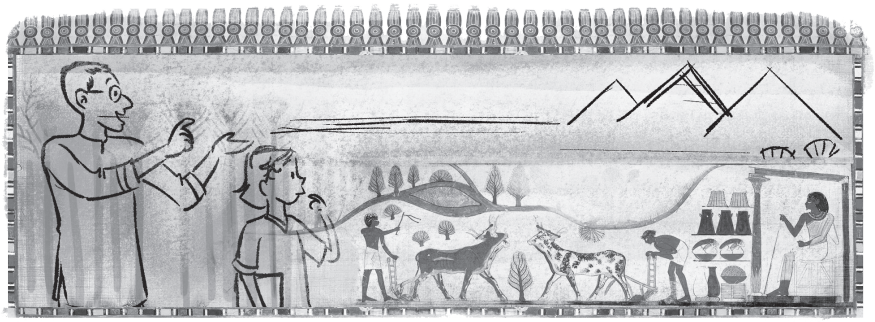


4. या प्रकरणात चर्चा केलेल्या कल्पना वापरुन संख्या सुधारीत करण्याचा प्रयत्न करा. ज्या तुम्ही या आधी बनविलेल्या आहेत त्या संख्या पध्दती वापरा.



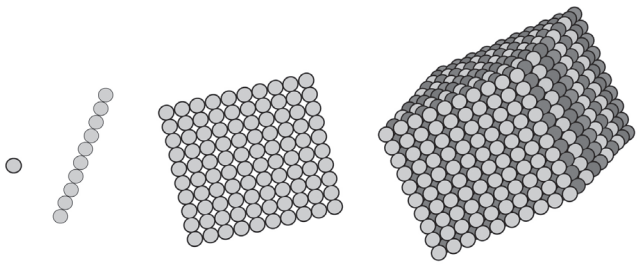
3.3 आधारांकांची कल्पना [The Idea of a Base]

I. इजिप्तमधील संख्या पध्दत



इ.स. पूर्व 3000 मध्ये इजिप्तमधील लोकांनी विकसित केलेली संख्या पध्दत आपण आता पाहणार आहोत. या पद्धतीमध्ये दिलेल्या संख्या दर्शविण्यासाठी मागदर्शक संख्या, गट करण्यासाठी वापरत असलेला पाहतो. तरी पण या पध्दतीला विशेष बनविणारी गोष्ट म्हणजे मार्गदर्शक संख्यांचा क्रम ही आहे.

कल्पना करा की तुम्ही खडे संग्रहीत करीत आहात. पहिली मार्गदर्शक संख्या 1 आहे. पूर्वीच्या मार्गदर्शक संख्या (1) चा 10 एकत्रित गट करा. तिचा आकार जी दुसरी मागदर्शक संख्या आहे ती 10 आहे. मागील मार्गदर्शक संख्या (10) चे एकत्रितपणे 10 संग्रहीत गट करा. त्याचा आकार हा तिसरी मार्गदर्शक संख्या आहे ती 10 x 10 = 100 होईल आणि पुढे चालू.



प्रत्येक मार्गदर्शक संख्या ही मागील संख्येच्या 10 पट आहे. ज्याअर्थी 1 ही पहिली मार्गदर्शक संख्या आहे, त्या सर्व 10 च्या घातांकात आहेत. या संख्यांना दिलेली चिन्हे खालील प्रमाणे आहेत.

1 10 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7



रोमन संख्याप्रमाणे दिलेल्या संख्येची गणना दिलेल्या संख्येपेक्षा लहान असलेल्या सर्वात मोठ्या मार्गदर्शक संख्येपासून सुरु होऊन मार्गदर्शक संख्येच्या गटापर्यंत केली जाते. यांचा नंतर संख्या ठरविण्यासाठी वापर केला जातो.

उदाहरणार्थ 324 जे 100+100+100+10+10+04 च्या बरोबरीचे आहे ते 𓏺𓏺𓏺 ∩∩ |||| असे लिहितात.

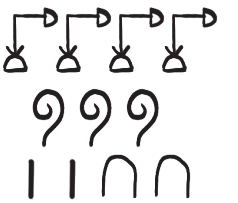
शोधा पाहू. [Find it out]

1. इजिप्शियन पद्धतीमध्ये खालील संख्या दर्शवा. 10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707,
2. हे अंक कोणत्या संख्या दर्शवितात

(i)



(ii)



II. इजिप्शियन पध्दत आणि आधारांकाच्या कल्पना यामधील विविधता

मागील मार्गदर्शक संख्येच्या आकाराचे 10 संग्रह एकत्रित करण्याऐवजी (इजिप्शियन पध्दतीमध्ये) मागील मार्गदर्शक संख्येच्या आकाराचे 5 संग्रह एकत्रित करून आपण संख्या पध्दत मिळवू शकतो का ? हे कोणत्याही धन पुर्णांकाने बदलता येतील का ?

चला तर ही शक्यता तपासून पाहूया. 1 ही पहिली मागदर्शक संख्या घेऊया.

मागील मार्गदर्शक संख्येच्या आकाराचे 5 चे संग्रह एकत्रित करू. त्याचा आकार हा दुसरी मार्गदर्शक संख्या आहे जी 5 आहे.

मागील मार्गदर्शक संख्येच्या आकाराचे 5 एकत्रित संग्रह संख्या (5) आहे. त्याचा आकार हा तिसरी मार्गदर्शक संख्या असून ती $5 \times 5 = 25$ होते.

मागील मार्गदर्शक संख्येच्या आकाराचे 5 एकत्रित संग्रह संख्या (5) आहे. त्याचा आकार हा चौथी मार्गदर्शक संख्या असून ती $5 \times 5 \times 5 = 125$ होते.



अशारितीने आपल्याकडे एक नवीन संख्या पध्दत आहे. जेथे प्रत्येक मार्गदर्शक संख्या ही मागील संख्येच्या 5 पट आहे. 1 ही पहिली मार्गदर्शक संख्या असल्यामुळे त्या सर्व 5 च्या घातांकात आहेत.

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$



या नवीन पध्दतीमध्ये 143 ही संख्या व्यक्त करा.

चला $5^3 = 125$ या आकाराने गट करण्यास सुरुवात करूया. कारण ही 143 पेक्षा लहान असलेली सर्वात मोठी मार्गदर्शक संख्या आहे. आपल्याला मिळेल

$$143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1.$$

तर नवीन पध्दतीमध्ये 143 ही संख्या ○□□□△△△ आहे.

मार्गदर्शक संख्या असलेली संख्या पध्दत ज्यामध्ये

(a) पहिली मार्गदर्शक संख्या 1 आहे आणि

(b) प्रत्येक पुढील मार्गदर्शक संख्या ही सध्याच्या मार्गदर्शक संख्येला कांही ठराविक संख्या n ने गुणाकार करून मिळविली जाते तर तिला **आधारांक n** संख्या पध्दत म्हटले जाते.

इजिप्शियन संख्या पद्धत ही आधारांक 10 ची पध्दत आहे आणि आम्ही तयार केलेली संख्या पध्दत ही आधारांक 5 पध्दत आहे. आधारांक 10 संख्या पध्दतील **'दशांश संख्या पध्दत'** असे म्हणतात.

शोधा पाहू. [Find it out]

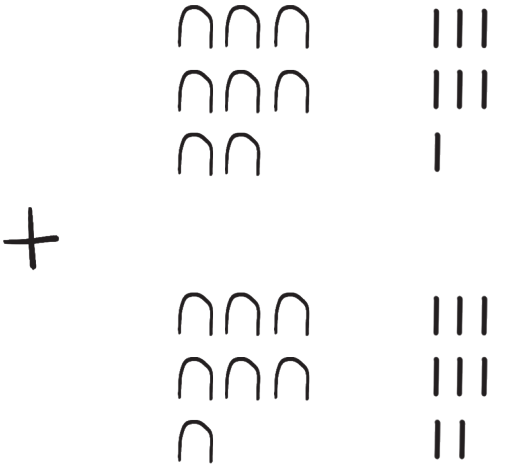
1. खालील संख्या वरील आधारांक 5 पध्दत वापरुन कोष्टकातील चिन्हे वापरुन लिहा 2, 15, 50, 137, 293, 651
2. वरील आपल्या आधारांक 5 पध्दतीमध्ये दर्शविल्या जाऊ न शकणाऱ्या संख्या आहेत का? का किंवा का नाही?
3. आधारांक 7 पध्दतीच्या मार्गदर्शक संख्या तयार करा. सामान्यपणे आधारांक 'n' पध्दतीमध्ये मार्गदर्शक संख्या कोणत्या ?

आधारांक - n पध्दतीमध्ये मार्गदर्शक संख्या या n च्या घातांकाच्या स्वरुपात असून $n^0 = 1, n, n^2, n^3$....., पासून सुरु होतात.

आधारांक -n पध्दतीचे फायदे

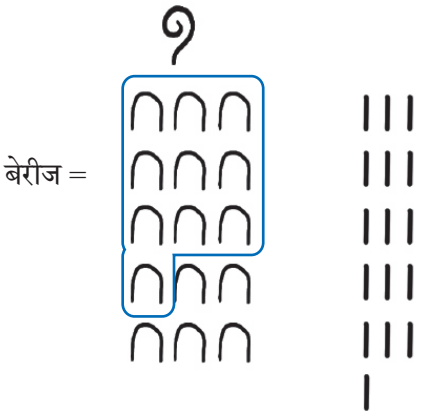
संख्यांचे सर्व घातांक हे मार्गदर्शक संख्या असतील तर त्याचे फायदे कोणते? याचे आकलन होण्यासाठी त्यांचा वापर करून कांही अंकगणिती क्रिया करूया चला.

? उदाहरणार्थ : खालील इजिप्शियन संख्यांची बेरीज करा.

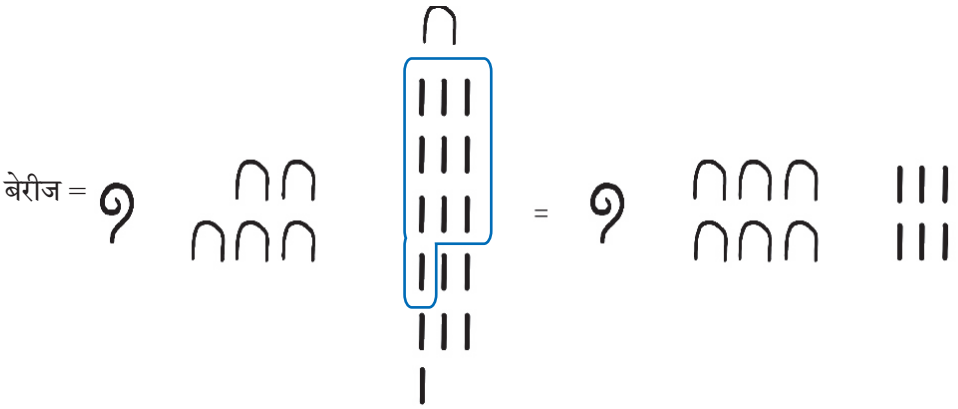


चला । आणि ∩ ची एकूण संख्या शोधूया आणि मोठ्यात मोठ्या मार्गदर्शक संख्येपासून सुरुवात करून गट करुया. त्यांची एकूण ही 15 ∩ आणि 15 ।

कारण 10 ∩ हे पुढील मार्गदर्शक संख्या ९ देते. याची बेरीज पुर्नगट केल्यास.



ज्याअर्थी 10 । हे ∩ देतात. आपल्याकडे आहेत,



शोधा पाहू. [Find it out]

1. खालील इजिप्शियन संख्याची बेरीज करा.

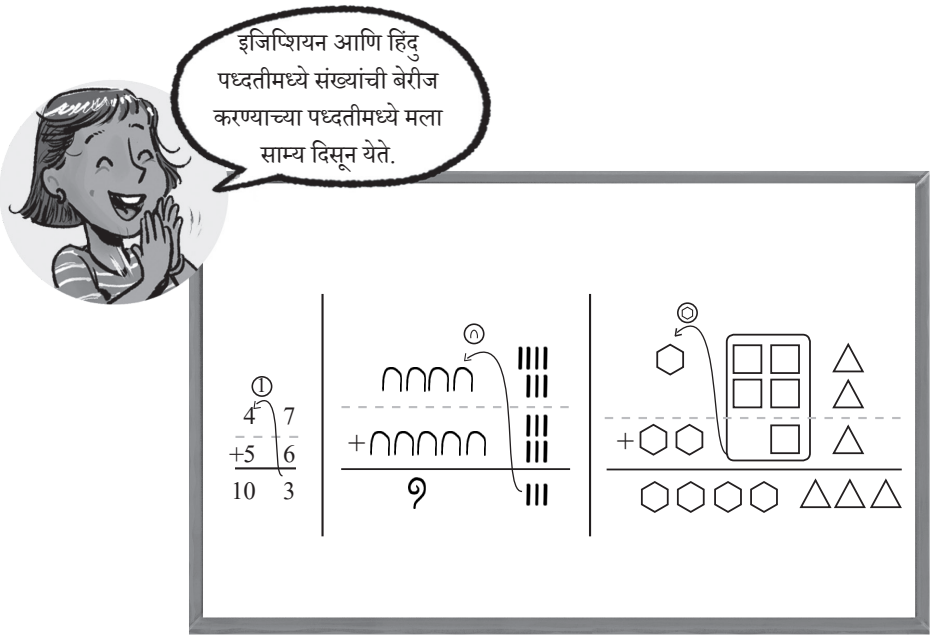
(i) 

(ii) 

2. आम्ही तयार केलेल्या आधारांक 5 पध्दतीमध्ये खालील संख्यांची बेरीज करा.



लक्षात ठेवा की या पध्दतीमध्ये, एका मार्गदर्शक संख्येच्या 5 पटीने पुढील संख्या मिळते.



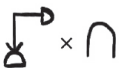
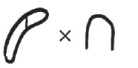
आधारांक n संख्या पध्दतीमध्ये केलेल्या बेरजेची रोमन पध्दतीतील बेरजेशी तुलना करा. रोमन पध्दतीमध्ये गटबध्द करणे आणि पुनर्रचना करणे काळजीपूर्वकपणे करावे लागते कारण प्रत्येक मार्गदर्शक संख्या नेहमीच समान आकाराने गट करून पुढील संख्या मिळवावी लागत नाही.

जेव्हा आम्ही गुणाकाराचा विचार करतो तेव्हा आधारांक असलेल्या संख्या पध्दतीचा फायदा अधिक स्पष्ट होतो.

? इजिप्शियन पध्दतीमध्ये दोन संख्यांचा गुणाकार कसा केला जातो ?

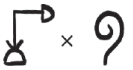
प्रथम आपण दोन मार्गदर्शक संख्यांच्या गुणाकाराचा विचार करुया.

? 1. कोणत्याही मार्गदर्शक संख्येचा गुणाकार ∩ शी (म्हणजेच 10) किती होतो? खालील गुणाकार करा.

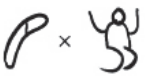
(i) ∩ × ∩ (ii) ९ × ∩ (iii)  × ∩ (iv)  × ∩

प्रत्येक मार्गदर्शक संख्या ही 10 चा घातांक असते त्यामुळे तिला 10 ने गुणले तर तिचा घातांक 1 ने वाढतो. जी पुढील मार्गदर्शक संख्या आहे.

? ९ (10^2) ने गुणलेली कोणतीही मार्गदर्शक संख्या काय आहे? खालील संख्यांचा गुणाकार करा.

(i) ∩ × ९ (ii) ९ × ९ (iii)  × ९ (iv)  × ९

? खालीन गुणाकार करा

(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

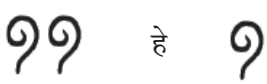
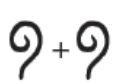
म्हणून कोणत्याही दोन मार्गदर्शक संख्यांचा गुणाकार ही दुसरी मार्गदर्शक संख्या असते!

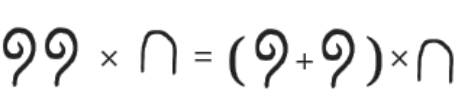
? आम्ही तयार केलेल्या आधारांक 5 पध्दतीला हा गुणधर्म लागू पडतो का ?

? इजिप्शियन पध्दतीमध्ये संख्या आणि ∩ (10) गुणाकाराविषयी आपण कोणता निष्कर्ष काढू शकतो ?

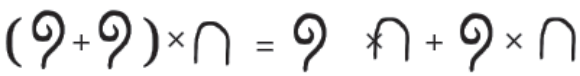
गणिती बोल

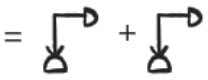
(i) 

 हे  शी समान असते.

म्हणून 

या संख्यासाठी वितरण नियम लागू होतो. म्हणून







(ii) ?∩∩| × ∩

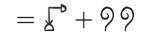
?∩∩| हे ? + ∩∩ + | शी समान आहे.

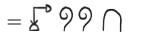
?∩∩| × ∩ = (? + ∩∩ + |) × ∩

येथे वितरण गुणधर्म लागू होतो का ? याच कारणामुळे (a+b) × n शी लागू होतो तो येथेही लागू होतो जेव्हा एखाद्या संख्येला 2 पेक्षा अधिक संख्या आहेत.

उदाहरणार्थ, (a + b + c) × n = an + bn + cn

म्हणून (? + ∩∩ + |) × ∩ = (? × ∩) + (∩∩ × ∩) + (| × ∩)





आता खालील गुणाकार करा.

(i)  (ii) 

संख्येचा गुणाकार ∩ शी करण्याचा साधा नियम कोणता ?

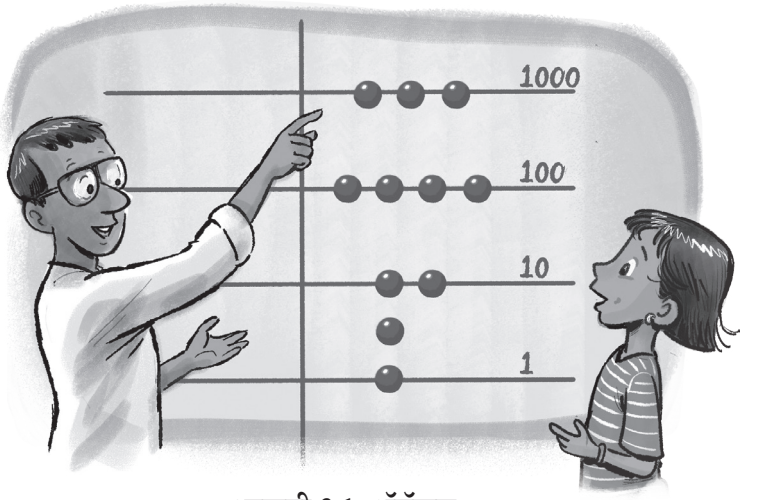
तुम्ही पाहिलात की, दोन संख्यांच्या गुणाकारामध्ये मार्गदर्शक संख्येच्या गुणाकाराचा समावेश असतो जेव्हा मार्गदर्शक संख्या या संख्येचा घातांक असतात तेव्हा त्यांचा गुणाकार हा दुसरी मार्गदर्शक संख्याच असते. हा मुद्दा गुणाकार प्रक्रियेचे सुलभीकरण करतो. परंतु रोमन संख्येविषयी असे घडत नाही, त्यामुळेच त्यांचा गुणाकार करणे कठीण जाते.

अशारितीने ज्या संख्या पध्दतीमध्ये मार्गदर्शक संख्या या संख्येचा घातांक असतात. म्हणजेच आधारांक असलेली संख्या पध्दत ही फक्त संख्या दर्शविण्यासाठीच नाही तर अंकगणिती क्रिया करण्यासाठी कार्यक्षम (उत्तम) आहे.

संख्या पध्दतीच्या उत्क्रांतीच्या इतिहासात आधारांक असलेल्या संख्या पध्दतीची कल्पना ही एक महत्वाचा टप्पा आहे. आपली आधुनिक हिंदु संख्या पध्दत याच रचनेवर आधारीत आहे.

दशांश पध्दतीचा वापर करणारा ॲबॅकस [Abacus that Makes Use of the Decimal System]

11 व्या शतकाच्या जवळपास रोमन संख्या वापरणाऱ्या लोकांनी सुध्दा दशांश पध्दतीचा वापर करून बनविलेली गणना उपकरणे - ॲबॅकस वापरण्यास सुरुवात केली आकृती 3.1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे रेषा असलेला फळा (बोर्ड) होता. 1 साठी असलेल्या रेषेपासून सुरुवात करून प्रत्येक क्रमगत रेषा ही क्रमगत 10 च्या घातांकाची होती.



आकृती 3.1: ॲबॅकस

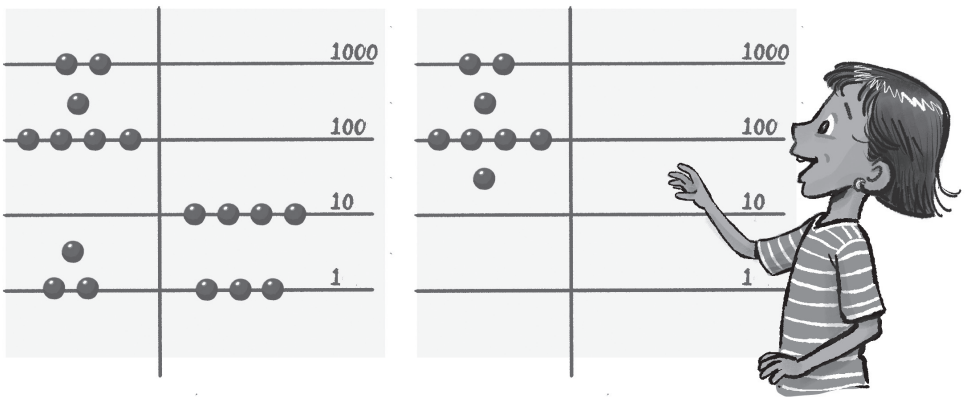
त्यामध्ये संख्या पुढील प्रमाणे दर्शविलेल्या आहेत. दिलेल्या संख्येचे प्रथम, मार्गदर्शक संख्यामध्ये (10 च्या घातांकामध्ये) गट केले गेले होते. अगदी त्याच प्रकारे ज्याप्रकारे आपण आतापर्यंत त्यांचे गट करत आहोत. 10 च्या प्रत्येक घातांकासाठी त्याच्या रेषेवर किती वेळा आले आहेत तितके विभाग ठेवले गेले आहेत तितके गट होतात. रेषेच्या वर विभागाच्या उपस्थितीमुळे 5 चे मूल्य तयार होते.

उदाहरणार्थ, 3426 ही संख्या घ्या. त्याचा गट असा करू.

3426 = 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

ही संख्या आकृती 3.1 मध्ये दर्शविलेली आहे. 6 एकक कशी दर्शविली आहेत त्याचे निरीक्षण करा.

गणनेसाठी ॲबॅकसचा वापर कसा केला गेला याची कल्पना येण्यासाठी, आपण एका साध्या बेरजेच्या उदाहरणाचा विचार करूया. 2907 + 43. उभ्या स्तंभाच्या विभाजनाच्या दोन्ही बाजूला दोन संख्या घेतल्या आहेत.



बेरीज शोधण्यासाठी तुम्ही याचा वापर कसा कराल.

प्रत्येक ओळीतील विभाग एकत्र केले जर एका ओळीतील एकूण संख्या 10 पेक्षा अधिक असेल तर काय करावे लागेल ?

सुचनाः या उदाहरणामध्ये 7 एकके आणि 3 एकके एकत्रित मिळविले तर 10 एकके होतात जे 10 दर्शविणाऱ्या रेषेला योगदान देतात.

III. इजिप्शियन पध्दतीमधील कमतरता

एक कोटी (10^7) पर्यंतच्या संख्यांसाठी तुलनेने संख्या दर्शविण्यासाठी सक्षम करणारी कार्यक्षमता असूनही आणि तुलनेने गणना करण्यास सोपी असूनही इजिप्शियन पध्दतीमध्ये एक कमतरता होती.

जर मोठ्यात मोठ्या संख्या दर्शवायच्या असतील तर 10 च्या उच्च आणि अति उच्च घातांकासाठी चिन्हांचा एक न संपणारा क्रम शोधण्याची गरज होती. येथे आपल्याला संख्या दर्शविण्याचे मुळ आव्हान वेगळ्या स्वरुपात पुन्हा समोर येत असल्याचे दिसते.

संख्या पद्धतीच्या उत्क्रांतीच्या इतिहासातील पुढील आणि शेवटची कल्पना ही केवळ समस्या सोडवित नाही तर संख्या दर्शविण्यास आणि त्यांची गणना करण्यास उत्तमपणे सुलभ करते.

? शोधा पाहू. [Figure it out]

1. अशी कोणतीही एक संख्या आहे का ज्याचे इजिप्शियन संख्येने दर्शविताना 10 किंवा अधिक वेळा चिन्ह येऊ शकते ? का नाही ?



2. स्वतःची आधारांक 4 ची संख्या पध्दत निर्माण करा आणि 1 ते 16 पर्यंत संख्या दर्शवा.

3. आधारांक 5 पध्दतीमध्ये दिलेल्या संख्येला 5 ने गुणण्यासाठी तुम्ही बनविलेला सोपा नियम लिहा.

3.4 स्थान मूल्य दर्शविणे. [Place Value Representation]

1. मेसापोटेमियन संख्या पध्दत [The Mesopotamian Number System]



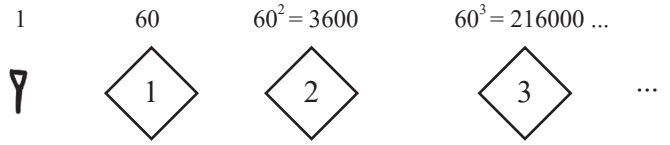
सुरुवातीला प्राचीन मेसापोटेमियामध्ये वापरल्या जाणाऱ्या संख्या पध्दतीमध्ये वेगवेगळ्या मार्गदर्शक संख्यासाठी वेगवेगळी चिन्हे होती. नंतरच्या काळामध्ये ती एक आधारांक 60 पध्दत झाली. तिला **सेक्साजेसिमल** (sexagesimal) **पध्दत** असेही म्हणतात. जी संख्या दर्शविण्यात उत्तम होती.

त्यांनी आधारांक 60 ची निवड का केली हे गोंधळात टाकणारे आहे. याचे स्पष्टीकरण देण्यासाठी वेगवेगळे सिद्धांत अस्तित्वात आहेत जसे की 60 आणि कांही महत्वाच्या घटनांच्या कालावधीमधील संबंध (असे की त्यांच्या चंद्र महिन्याची लांबी ज्यामध्ये 30 दिवस होते किंवा पृथ्वी स्थिर असताना सुर्याला पृथ्वीभोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी लागणारी वेळ) अपुर्णांक सोप्या पध्दतीने दर्शविणे. [येथे आपण त्याविषयी बोलणार नाही] त्यांच्या मार्गदर्शक संख्यांचा क्रम 1, 10, 60, 600, 3600, 36,000 ----- फक्त 60 च्या घातांकामध्ये कमी होत आहे आणि पुढे चालू आहे.

मेसापोटेमियन सेक्साजेसिमल पध्दतीचा प्रभाव ज्याला **बेबीलोनियन संख्या पद्धती** असेही म्हणतात. आज ही आपल्या वेळेच्या मोजमापामध्ये दिसून येते की 1 तास = 60 मिनिटे आणि 1 मिनिट = 60 सेकंद

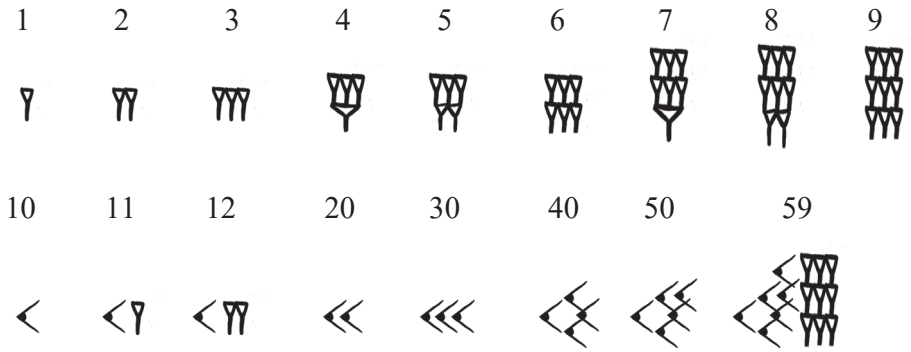
या पध्दतीमध्ये 1 साठी 𒁹 आणि 10 साठी 𒌋 ही चिन्हे वापरली जात होती. आता आपण त्याच्या संख्या पध्दतीच्या अभ्यासावर थोडक्यात थांबूया आणि आतापर्यंत पाहिलेल्या मेसापोटेमियन वैशिष्ट्यांचा वापर करून एक उत्तम संख्या पद्धती कशी तयार करता येईल याचा विचार करुया.

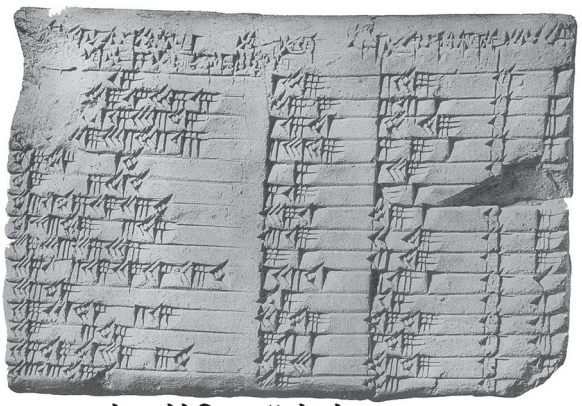
त्यांच्या मार्गदर्शक संख्यांना आपण आपली स्वतः ची चिन्हे देऊया.



लक्षात ठेवा की चिन्हे तयार करण्यासाठी आपण भारतीय संख्याचा वापर केला आहे. आम्ही आमची स्वतःची चिन्हे शोधू शकलो असतो परंतु सहज लक्षात ठेवण्यासाठी आणि वापरण्यासाठी आम्ही परिचित असलेल्या अंकांची मदत घेणे निवडलेले आहे, 1, 2, 3, ...

𒁹 आणि 𒌋 हे वापरुन 1 ते 59 पर्यंतच्या संख्या दर्शविता येतात.





मेसापोटेमियन टॅब्लेटचे उत्पादन

? उदाहरणः या पध्दतीमध्ये 640 ही संख्या दर्शवूया.

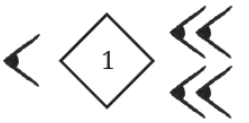
त्याला मार्गदर्शक संख्यामध्ये गट केल्यास, आपल्याला दिसते की

$$640 = (10) \times 60 + 40.$$

जर आपण इजिप्शियन कल्पना वापरली तर ही संख्या 10  ने दर्शविली जाईल आणि 40 ही संख्या 4  ने दर्शविली जाईल.

? आपण हे अधिक संक्षिप्तपणे मांडू शकतो का ?

आपण ती संख्या अशी दर्शवू शकतो की.



जे आपण समीकरणामध्ये लिहीले आहे त्याप्रमाणे दहा 60 ने आणि एक 40 ने असे वाचता येते.

? दुसऱ्या एका संख्येसाठी प्रयत्न करूया. 7530

$$7530 = (2) \times 3600 + (5) \times 60 + 30$$

त्याचे दर्शविणे असे असेल,



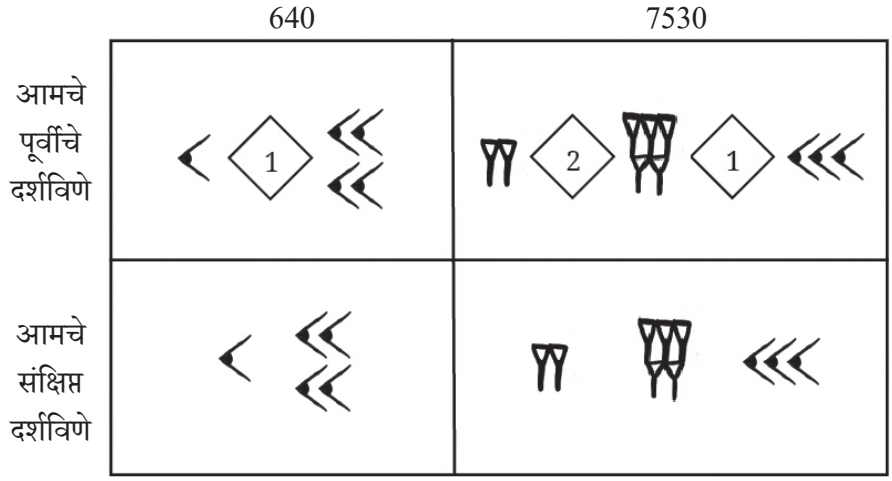
लक्षात घ्या की जेव्हा एखादी संख्या तिला दर्शविण्यासाठी 60 च्या घातांकामध्ये गटबध्द केले, तेव्हा 60 चा कोणताही घातांक 60 किंवा त्यापेक्षा जास्त वेळ येत नाही. जर असे घडून आले तर त्यापैकी 60 चे गट करून 60 चा पुढील घातांक तयार करता येतो.

उदाहरणार्थ, खालील राशीचा विचार करा.

$$(1) \times 3600 + (70) \times 60 + 2 = (1) \times 60^2 + (60 + 10) \times 60 + 2$$
$$= (1) \times 60^2 + 60^2 + (10) \times 60 + 2$$
$$= (2) \times 60^2 + (10) \times 60 + 2$$

म्हणून मार्गदर्शक संख्यासाठीच्या अंकाबरोबर 1 ते 59 पर्यंतच्या अंकांचा उपयोग करून कोणतीही संख्या दर्शविली जाऊ शकते.

आता जर आपण दर्शविण्यासाठी आणखी संक्षिप्त केले तर काय होईल 60 च्या वेगवेगळ्या घातांकासाठीची चिन्हे पुर्णपणे काढायची का ?



मेसापोटेमियन लोकांनी नेमके हेच केले होते! त्यांच्या संख्यामध्ये, सर्वात उजवीकडील चिन्हांच्या सटामध्ये 1 ची संख्या दर्शविली, डावीकडील चिन्हांच्या सटाने 60 ची संख्या दर्शविली. त्यानंतरच्या संख्यांच्या चिन्हांच्या सटाने 3600 ची संख्या दर्शविली आणि असे पुढे चालू ठेवले. जेव्हा जेव्हा 60 ची घातांकाची घटना घडत नव्हती तेव्हा त्या स्थितीत एक रिकामी जागा दिली जाते.

भारतीयाप्रमाणेच मेसापोटेमियन या कल्पनेवर येऊन पोहोचले असावेत असे वाटत नाही. कांही विद्वानांचे म्हणणे आहे की त्यांच्या पूर्वीच्या संख्या पध्दतीमध्ये 1 आणि 60 या मार्गदर्शक संख्यांना दिलेल्या चिन्हामध्ये समानता आणि त्यांचा अपघाती वापर यामुळे त्यांना ही कल्पना सुचली असावी.

शोधा पाहू. [Figure it out]

1. खालील संख्या मेसापोटेमियन पध्दतीमध्ये दर्शवा.

   (i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605

अशाप्रकारे मेसापोटेमियन पध्दत चिन्हाच्या ज्या स्थानावर लिहीले आहे त्या स्थानांचा वापर करुन मार्गदर्शक संख्यांसाठी शेवट नसलेल्या क्रमाची निर्मिती करण्याची आवश्यकता कशी दूर होते हे आपण पाहू शकतो, अशा संख्या पध्दती (ज्याना आधारांक आहे) जी प्रत्येक चिन्हांचा वापर करून ती ज्या मार्गदर्शक संख्याशी संबंधित आहे ती संख्या निश्चित करते त्याला **स्थानात्मक संख्या पध्दत** किंवा **स्थान मूल्य पध्दत** म्हणतात.

स्थान मूल्याची ही कल्पना संख्या पध्दतीच्या उत्क्रांतीच्या इतिहासातील सर्वोच्च बिंदू आहे आणि केवळ मर्यादित संख्येच्या वेगवेगळया चिन्हांचा वापर करून संख्यांचा अंतहीन क्रम दर्शविण्याच्या समस्येवर एक अतिशय सुंदर उपाय देते.

तरी सुध्दा मेसापोटेमियन पध्दतीला पूर्णपणे विकसित स्थान मूल्य पध्दत मानले जाऊ शकत नाही, त्यामध्ये कांही दोष आहेत ज्यामुळे संख्या वाचताना गोंधळ होतो.

? 60 चे दर्शविणे पहा. 3,600 चे दर्शविणे काय असेल ?

अंक लिहीताना चिन्हांमधील अंतर आपण येथे देत असलेल्या पध्दतीने दिलेले नव्हते. वेगवेगळ्या लोकांनी लिहिलेल्या वेगवेगळ्या हस्तलिखीतामध्ये रिकाम्या जागासाठी एकसमान अंतर ठेवणे देखील कठीण होते. त्यामुळे संदिग्धता निर्माण झाली उदाहरणार्थ खालील संख्या दर्शविण्याचा विचार करा.

संख्या	1	60	3600	12	602	36002
आपले दर्शविणे	𒁹	𒁹	𒁹	𒐜𒐗	𒐜𒐗	𒐜𒐗
मेसापोटेमियनचे दर्शविणे	𒁹	𒁹	𒁹	𒐜𒐗	𒐜𒐗	𒐜𒐗

60 च्या कोणत्या घातांकाशी कोणती चिन्हे जुळतात हे शोधण्यात आलेल्या अस्पष्टतेमुळे, समान संख्या वेगवेगळ्या प्रकारे वाचता येते. आपल्या दर्शविण्यामध्येही जे 60 च्या वेगवेगळ्या घातांकासाठी चिन्हांमधील एकसमान अंतर वापरते, 36002 च्या दर्शविण्यामध्ये चिन्हांच्या दोन सटामधील रिकाम्या जागांची संख्या जाणून घेणे कठीण आहे.

रिकाम्या जागामुळे निर्माण झालेल्या समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी, नंतरच्या मेसापोटेमियन लोकांनी रिकाम्या जागेचे दर्शन घडविण्यासाठी 'जागा निश्चिती' (𒐜) चिन्ह देण्याची एक कल्पना वापरली. हे आपण वापरत असलेल्या आपल्या 0 (शून्य) च्या पध्दतीसारखे आहे.

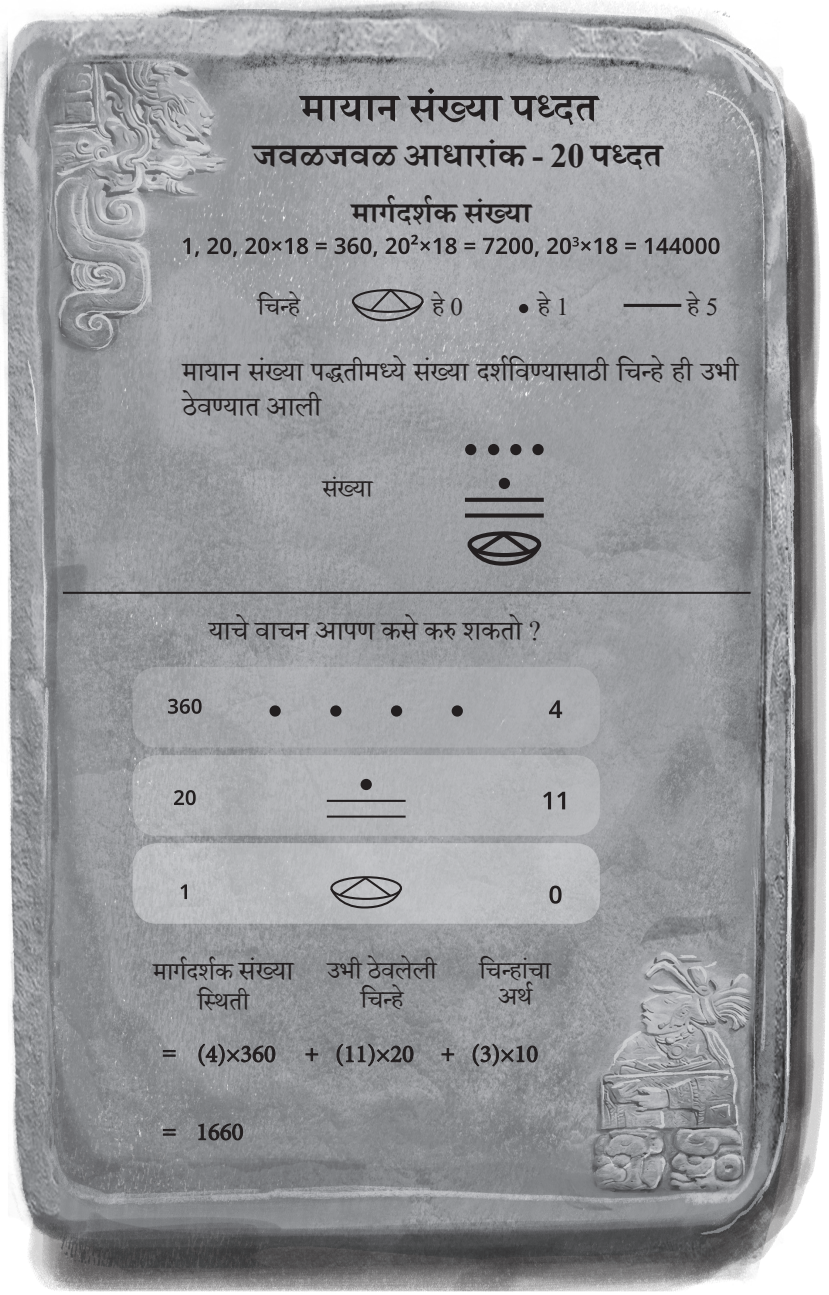
अशारितीने, शून्य - चिन्ह जे कांहीही दर्शवित नाही - जे स्थान मूल्य पध्दतीमध्ये जागा निश्चिती म्हणून अपरिहार्य आहे, ज्यामध्ये संख्या स्पष्ट पध्दतीने लिहिल्या जातात.

रिकाम्या जागामुळे निर्माण झालेली समस्या जरी सोडविली गेली असली तरीही इतर अस्पष्टता पध्दतीमध्ये उपलब्ध होत्या. उदाहरणार्थ जागा निश्चिती चिन्ह प्रामुख्याने संख्यांच्या मध्यभागी वापरले जात असे आणि शेवटी नाही म्हणून ते 3600 सारख्या संख्या दर्शविण्यासाठी ते वापरणार नव्हते (आपण) असे लिहू.

II. मायान संख्या पध्दत [The Mayan Number System]



मध्य अमेरिकेमध्ये मायान संस्कृती म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या संस्कृतीचा विकास झाला ज्यांनी इ.स.पू. तिसऱ्या ते 10 व्या शतकाच्यावेळी प्रसिध्द अशी बौध्दिक आणि सांस्कृतिक प्रगती केली. त्यांच्या बौध्दिक योगदानाकडे आशियातील संस्कृतीपासून स्वतंत्रपणे योजना केलेली त्यांची स्थान मूल्य पध्दतीचा समावेश होता. त्यांनी आधुनिक काळातील शून्यासाठी ('0') जागा निश्चिती 'चिन्हाचा वापर केला, जो शिंपल्या सारखा दिसत होता.



येथे आपल्याला एक कोड्यात टाकणारी घटना आढळते. त्यांची तिसरी मार्गदर्शक संख्या 400 ऐवजी 360 का होती ? कांही विद्वानांना असे वाटते की यांचा त्यांच्या दिनदर्शिकेशी कांहीतरी संबंध असू शकतो.

त्यांनी 1 या संख्येसाठी आणि 5 साठी — वापरले. हे 1 ते 19 पर्यंतच्या संख्या दर्शविण्यासाठी याचा उपयोग होतो.

वेगवेगळ्या मार्गदर्शक संख्यांशी संबंधित चिन्हे एका खाली एक याप्रमाणे चिन्हांच्या सर्वात खालच्या सटासह लिहिली गेली होती. जी 1 च्या संख्येशी संबंधित होती वरील सट 20 च्या संख्येशी संबंधित होता वरील सट 360 च्या संबंधित आहेत आणि असेच पुढे लिहीले गेले आहे.

? मायान पध्दत वापरून खालील संख्या दर्शवा.

(i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721

मायान पध्दत ही प्रत्यक्षपणे आधारांक 20 पध्दत नसल्यामुळे त्यामध्ये आधारांक असलेल्या पद्धतीच्या गणनेसाठी असलेले फायदे नाहीत, तरीपण त्यांचे स्थान मूल्य चिन्ह आणि शून्यासाठी जागा निश्चिती चिन्हाचा वापर ही संख्या पध्दतीच्या संख्या इतिहासात एक महत्वाची प्रगती मानली जाते.

एक उत्सुकतेची गोष्ट म्हणजे कांही युरोपियन भाषांच्या संख्या नावांमध्ये आपल्याला अजूनही आधारांक - 20 या पध्दतीचा वापर पाहायला मिळतो.

III. चिनी संख्या पध्दत [The Chinese Number System]



चिनी लोक दोन संख्यांची पध्दत वापरत असत - राशींची नोंद ठेवण्यासाठीची लेखी पध्दत आणि गणना करण्यासाठी सळीचा वापर करणारी पध्दत होती. सळी आधारीत संख्या पध्दतीला **सळी संख्या** असे म्हणतात. येथे आपण सळी पध्दतीची चर्चा करणार आहोत. जे चिनी लेखन पध्दतीपेक्षा संख्या लिहिण्यास आणि गणना करण्यास अधिक उत्तम होते.

चीनमध्ये सळी संख्यांचा विकास किमान इ.स. पूर्वच्या 3 ऱ्या शतकापर्यंत झाला आणि 17 व्या शतकापर्यंत त्याचा वापर केला जात होता. ही एक दशांश पध्दत होती (आधार-10). 1 ते 9 साठी चिन्हे खालील प्रमाणे होती.

चिनी संख्या पध्दती

आधारांक-10 किंवा दशांश

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
झाँग्स	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
हेंग्स	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

टीप: झाँग्स हे एकक, शतक, दशहजार इ. दर्शवितात आणि हेंग्स हे दशक, (सहस्त्र) शतहजार इ. दर्शवितात.

अंक 𝍫 𝍥 𝍭 𝍣

	2 हेंग्स	6 झाँग्स	3 हेंग्स	4 झाँग्स
हे कसे वाचतात	𝍫	𝍥	𝍭	𝍣
मार्गदर्शक संख्या स्थिती	10^3	10^2	10	1

$= (2) \times 10^3 + (6) \times 10^2 + (3) \times 10 + (4) \times 1$

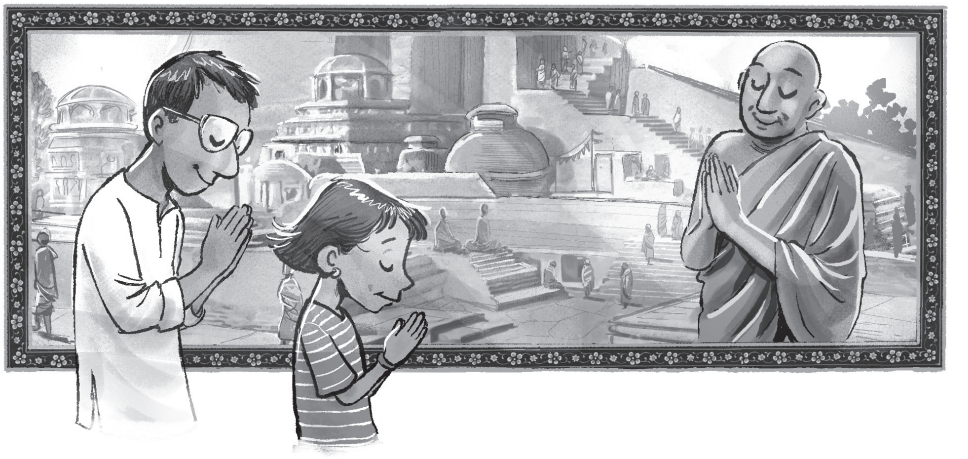
$= 2634$

数学

मेसापोटेमियन लोकांसारखेच सळी संख्यामध्ये वगळलेले स्थान मूल्य दर्शविण्यासाठी रिकाम्या जागेचा वापर केला जात असे. तरीपण 1 - 9 पर्यंतच्या चिन्हांच्या आकारात थोडी जास्त समानता असल्यामुळे मेसापोटेमियन पध्दतीपेक्षा रिकाम्या जागा शोधणे सोपे होते.

हिंदू पद्धतीमध्ये आणि सळी संख्यामध्ये किती साम्य आहे ते पहा. शून्याचे चिन्ह असलेली चिनी पध्दत ही पूर्णपणे विकसित स्थान मूल्य पध्दत आहे.

IV. हिंदु संख्या पध्दत [The Hindu Number System]



? संख्या दर्शविण्याच्या कल्पनांच्या उत्क्रांतीमध्ये हिंदू / भारतीय संख्या पध्दतीचे स्थान कुठे आहे? त्याच्या मार्गदर्शक संख्या कोणत्या आहेत? त्यामध्ये स्थान मूल्य पद्धतीचा वापर होतो का?

हिंदू संख्या पध्दत

आधारांक 10 किंवा दशांश

दहा चिन्हे 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

375 ही संख्या

ही कशी वाचतात	3	7	5
मार्गदर्शक संख्या स्थिती	10^2	10	1

$= (3) \times 10^2 + (7) \times 10 + (5) \times 1$

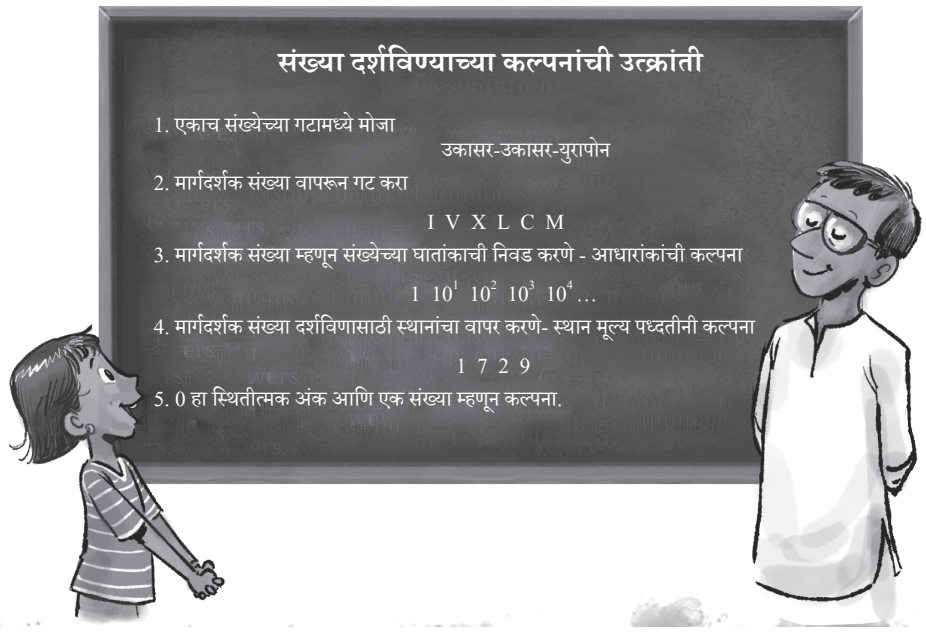
$= 375$

असे पाहिले आहे की हिंदु संख्या पध्दती ही स्थान मूल्य पध्दत आहे. हिंदू संख्या पध्दतीमध्ये किमान 200 इ.स. पूर्व पासून 0 चे चिन्ह होते आणि 0 चा वापर अंक म्हणून केला जात असल्याने आणि प्रत्येक स्थितीमध्ये एकच अंक वापरल्यामुळे या पध्दतीमध्ये कोणत्याही प्रकारची अस्पष्टता निर्माण होत नाही. जेव्हा आपण लिहितो किंवा वाचतो.

याच कारणामुळे हिंदू संख्या पध्दत ही संपूर्ण जगामध्ये वापरली जाते. 0 हा अंक म्हणून तसेच संख्या म्हणून वापर हा एक मोठा बदल आहे. ज्यामुळे गणित आणि विज्ञानाच्या जगात खऱ्या अर्थाने बदल घडवून आणले आहेत. भारतीय गणितामध्ये शून्याचा वापर केवळ जागा निश्चिती म्हणून स्थान मूल्य पध्दतीमध्ये केला जात नव्हता, तर इतर संख्यासारखाच त्याला स्वतःच्या अधिकारात एका संख्येचा दर्जा सुध्दा देण्यात आला होता. '0' या संख्येचा अंकगणिती गुणधर्म (उदा. 0 मध्ये कोणतीही संख्या मिळविली तर ती संख्या तीच राहते आणि गुणले असता 0 होते) आर्यभट्टनी 499 मध्ये आपल्या आर्यभट्टीयममध्ये हिंदू संख्येचा वापर करून गणना करण्यासाठी आणि विस्तारीत, वैज्ञानिक गणना करण्यासाठी स्पष्टपणे वापरली आहे. इतर कोणत्याही संख्येप्रमाणेच 0 चा वापर ज्यावर मुलभूत क्रिया केल्या जातात. बम्हगुप्तने 628 मध्ये आपल्या ब्रम्हस्फुतसिद्धांत या ग्रंथात सांकेतिक केला होता. असे आपण मागील इयत्तेत शिकलो आहे.

0 ची ओळख ऋणात्मक संख्या म्हणून करून देऊन बम्हगुप्ताने आधुनिक भाषेमध्ये त्याला **रिंग** म्हणतात हे तयार केले म्हणजेच संख्याचा सट ज्यामध्ये बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार या क्रिया संवृत्त आहेत (म्हणजेच सटामधील कोणत्याही दोन संख्यांची बेरीज, वजाबाकी किंवा गुणाकार ही त्याच सटातील संख्या देते) या नवीन कल्पनांनी आधुनिक गणिताचा विशेष करून बीजगणित आणि विश्लेषणाच्या क्षेत्रासाठी पाया घातला.

आशा आहे की, यामुळे तुम्हाला आजच्या पध्दतीप्रमाणे संख्या लिहिण्याच्या आणि गणनाच्या बाबतीत आलेल्या सर्व कल्पनांची जाणीव होईल. 0 चा शोध आणि त्यामुळे निर्माण झालेली भारतीय संख्या पध्दत ही खरोखरच सर्व काळातील सर्वात महान, सर्वात सर्जनशील आणि सर्वात प्रभावशाली शोधापैकी एक आहे. जी आपल्य दैनंदिन जीवनात सतत दिसून येत आहे आणि आधुनिक विज्ञान, तंत्रज्ञान, गणना, लेखा, सर्वेक्षण आणि इतर गोष्टींचा आधार बनत आहे. पुढच्या वेळी जेव्हा तुम्ही संख्या लिहाल तेव्हा त्यामागील अविश्वसनीय इतिहास आणि त्यांच्या शोधात गुंतलेल्या सर्व खोल कल्पनाविषयी विचार करा.



शोधा पाहू. [Figure it out]

1. चिनी लोकानी झाँग आणि हेंग चिन्हांना आलटून पालटुन वापरले असे तुम्हाला का वाटते? फक्त झोंग चिन्हे वापरुन 41 हे कसे दर्शविले जाते? जर दोन सलग चिन्हामध्ये लक्षणीय जागा नसेल तर या संख्याचा अर्थ इतर कोणताही लावला जाऊ शकतो का ?

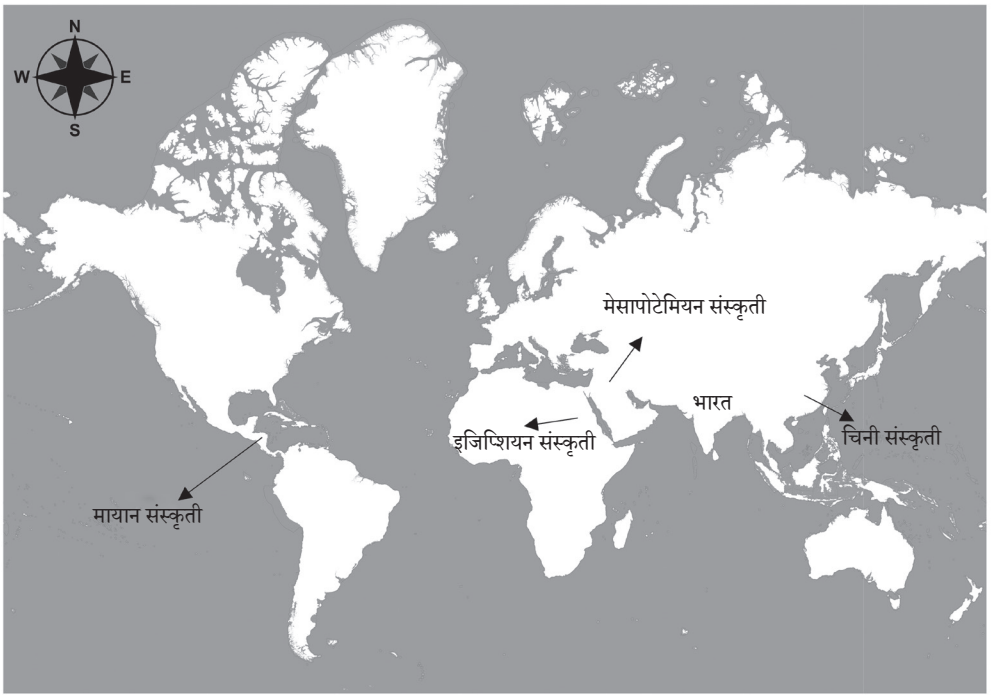
गणिती बोल

2. उकासर आणि युरोपान हे अंक वापरुन आधारांक 2 ची स्थान मूल्य पध्दत तयार करा. या पध्दतीची तुलना गुमुलगल पध्दतीशी करा.

3. तुमच्या दैनंदिन जीवनात आणि कोणत्याही व्यवसायात हिंदु संख्या आणि 0 कोणती महत्वाची भुमिका बजावितात ? जर आपली संख्या पध्दती आणि 0 चा शोध लागला नसता किंवा त्यांची कल्पना केली गेली नसती तर आपले जीवन वेगळे कसे झाले असते ?

4. प्राचीन भारतीयांनी हिंदु संख्या पध्दतीसाठी आधारांक 10 वापरला असावा कारण मानवाना 10 बोटे आहेत आणि ते आपल्या बोटानी मोजू शकत होते. पण जर आपल्याला 8 बोटे असती तर काय? तेव्हा आपण संख्या कशा लिहिलो असतो? जर आपण आधारांक 8 वापरत असतो तर संख्या कशा दिसल्या असत्या ? आधारांक 5? हिंदु संख्या 25 ही आधारांक 8 आणि आधारांक 5 मध्ये लिहीण्याचा अनुक्रमे प्रयत्न करा. तुम्ही हे आधारांक - 2 मध्ये लिहू शकता का ?

गणिती बोल



नकाशा वेगवेगळ्या संस्कृतीची ठिकाणे दर्शवितो ज्या वेगवेगळ्या काळात अस्तित्वात होत्या

सारांश [Summery]

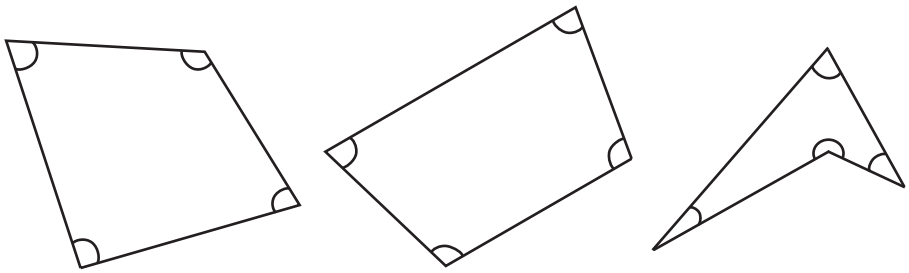
- संख्या दर्शविण्यासाठी, आपल्याला वस्तू, नांवे किंवा चिन्हांच्या एका निश्चित क्रमाची आवश्यकता असते. या निश्चित क्रमाला संख्या प्रणाली म्हणतात.
- लिखीत संख्या प्रणालीमध्ये संख्या दर्शविणाऱ्या चिन्हांना संख्यावाचके म्हणतात.
- संख्या प्रणालीमध्ये, मार्गदर्शक संख्या (landmark Numbers) अशा संख्या आहेत ज्या सहज ओळखता येतात आणि इतर संख्या समजून घेण्यासाठी आणि त्यांच्यासोबत काम करण्यासाठी संदर्भ बिंदू म्हणून वापरल्या जातात. त्या संख्या प्रणालीमध्ये अँकर म्हणून काम करतात, त्यामुळे लोकांना परिमाणांची विशेषत: मोठ्या प्रमाणावरील परिमाणाची जाणीव होण्यास मदत होते.
- ज्या संख्या प्रणालीच्या महत्वाच्या संख्या n संख्येच्या आत असतात तिला बेस-n संख्या प्रणाली म्हणतात.
- ज्या संख्या प्रणालीमध्ये, मुख्य संख्या निश्चित करण्यासाठी चिन्हाच्या स्थानाचा वापर केला जातो, त्यांना स्थानात्मक संख्या प्रणाली किंवा स्थान मूल्य प्रणाली म्हणतात.
- मेसापोटेमियन (बॅबिलोनियन), मायान, चिनी आणि भारतीय संस्कृतींमध्ये स्थान मूल्याचे प्रतिनिधीत्व वापरले जात असे.
- आज आपण जगभरात वापरत असलेली संख्या प्रणाली म्हणजे हिंदू संख्या प्रणाली (तिला कधी कधी भारतीय संख्या प्रणाली किंवा हिंदू-अरबी संख्या प्रणाली देखील म्हणतात). ही एक स्थान मूल्य प्रणाली आहे ज्यामध्ये (सामान्यतः) 10 अंक असतात. ज्यामध्ये 0 हा अंक देखील समाविष्ट असतो जो इतर अंकांच्या बरोबरीने मानला जातो. 0 चा संख्या म्हणून वापर केल्यामुळे, ही प्रणाली मर्यादित चिन्हे वापरून सर्व संख्या स्पष्टपणे लिहीण्यास सक्षम करते. ही प्रणाली सुमारे 2000 वर्षापूर्वी भारतात उगमली आणि नंतर जगभरात पसरली आणि मानवी इतिहासातील सर्वात महान शोधांपैकी एक मानली जाते.

4 चौकोन (Quadrilaterals)

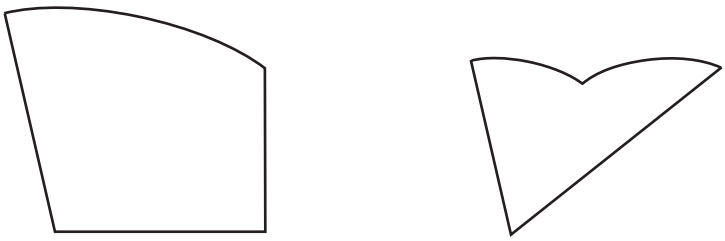
F4T5N4

या प्रकरणात आपण चार बाजूंनी बनलेल्या आकृत्यांचे कांही मनोरंजक प्रकार अभ्यासणार आहोत आणि त्यांच्यावर आधारित उदाहरणे सोडविणार आहोत. अशा आकृत्यांना सामान्यतः चौकोन म्हणून ओळखले जाते. "चौकोन" हा शब्द लॅटिन शब्दांपासून आला आहे. क्वॉड्री म्हणजे चार, आणि लैट्स म्हणजे बाजू.

? खालील आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



(i) (ii) (iii)



(iv) (v)

आकृती (i), (ii) आणि (iii) हे चौकोन आहेत आणि इतर नाहीत का ?

चौकोनाचे कोन म्हणजे यांच्या बाजूमधील कोन जसे आकृती (i), (ii) आणि (iii) मध्ये चिन्हांकीत केलेले आहेत.

आपण सर्वात परिचित चौकोनांपासून म्हणजेच - आयत आणि चौरस यांच्यापासून सुरुवात करूया.

4.1 आयत आणि चौरस [Rectangles and Squares]

आयत म्हणजे काय हे आपल्याला माहित आहे त्यांची व्याख्या करुया.

आयत : हा एक चौकोन असतो ज्यामध्ये,

(i) सर्व कोन काटकोन (90^0) असतात आणि

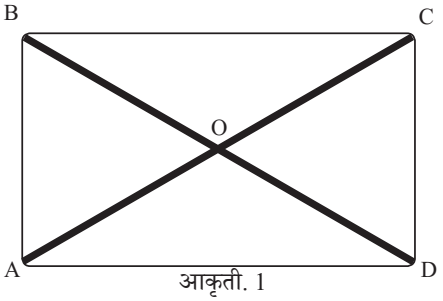
(ii) विरुद्ध बाजू समान लांबीच्या आहेत.

एखाद्या चौकोनाला आयत म्हणण्यासाठी ही व्याख्या काटेकोरपणे लागू होते.

? आयताची व्याख्या करण्याचे इतर मार्ग आहेत का ? चला, आयतांच्या रचनेशी संबंधित खालील उदाहरणावरुन विचार करूया.

एका सुताराचे उदाहरण [A Carpenter Problem]

? आकृती 1 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे सुताराला लाकडाच्या दोन पातळ पट्ट्या जोडून ठेवायच्या आहेत, जसे की त्यांच्या टोकांवरून एक दोरा ओढला असता एक आयत तयार होईल.



आकृती. 1

तिच्याकडे आधीच एक 8 सें. मी. लांबीची पट्टी आहे. दुसऱ्या पट्टीची लांबी किती असावी ? त्या दोन्ही कोठे जोडायच्या ?

सुताराने बनविलेल्या रचनेचे नमुने प्रथम आपण बनवूया. पट्ट्यांना रेषाखंड म्हणून नमुन्यात केले जाऊ शकते. ते त्यांच्या अंत्यबिंदूनी तयार झालेल्या चौकोनाचे कर्ण आहेत. चौकोन आयत होण्यासाठी आपल्याला खालील प्रश्नांची उत्तरे द्यावी लागतील.

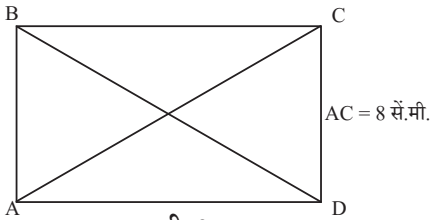
? 1. दुसऱ्या कर्णाची लांबी किती आहे ?

? 2. दोन कर्णाच्या छेदनबिंदूचे स्थान काय आहे ?

? 3. कर्णामधील कोन किती असेल ?

? चला, भौमितीक तर्क वापरून या प्रश्नांची उत्तरे देऊया. हे प्रश्न सोडविणे अवघड वाटत असल्यास कांही आयत तयार करण्याचा किंवा मोजण्याचा प्रयत्न करा.

या प्रश्नांची उत्तरे शोधण्यासाठी, समजा आपण कर्ण अशा प्रकारे ठेवले आहेत की त्यांचे शेवटचे बिंदू हे आयताचे शिरोबिंदू बनतात. जसे आकृती 2 मध्ये दर्शविले आहे.



आकृती. 2

अनुमान 1 - दुसऱ्या कर्णाची लांबी किती आहे ?

हे खालीलप्रमाणे सुसंगतता वापरून काढता येते.

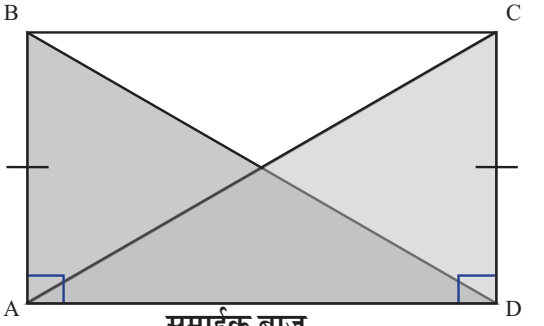
ABCD हा आयत असल्याने,

AB = CD

$\angle BAD = \angle CDA = 90°$

दोन्ही त्रिकोणांमध्ये AD ही समाईक बाजू आहे.

तर $\Delta ADC \cong \Delta DAB$ (SAS एकरूपतेवरुन)



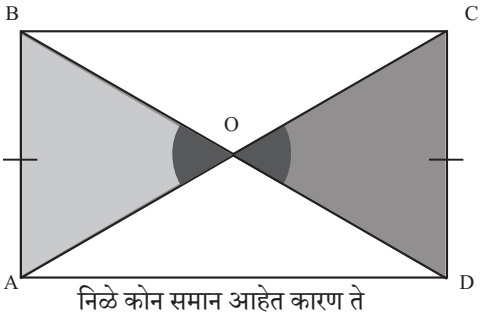
समाईक बाजू

म्हणून AC = BD कारण ते एकरूप त्रिकोणोचे संगत घटक आहेत. यावरून असे दिसून येते की आयताच्या कर्णाची लांबी नेहमीच समान असते.

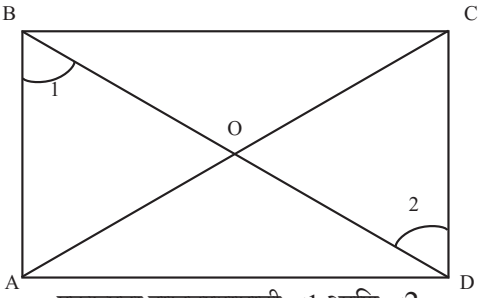
तर दुसरा कर्ण देखील 8 सें.मी. लांब असेल. तुम्ही कांही आयत काढून व मापून हा गुणधर्म सत्यापित करू शकता.

अनुमान 2 - दोन कर्णाच्या छेदनबिंदूचे स्थान काय आहे ?

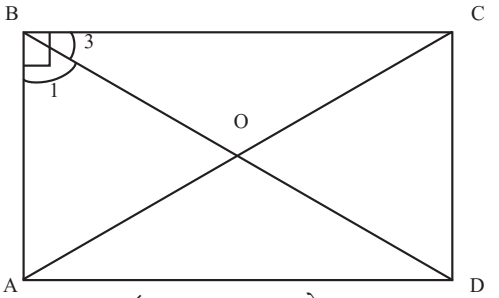
हे एकरूपता वापरून देखील शोधता येते. आपल्याला OA आणि OC तसेच OB आणि OD मधील संबंध जाणून घ्यायचा असल्याने आपण आयत ABCD चे कोणते दोन त्रिकोण विचारात घेतले पाहिजेत ?



निळे कोन समान आहेत कारण ते शिरोविरुद्ध कोन आहेत.

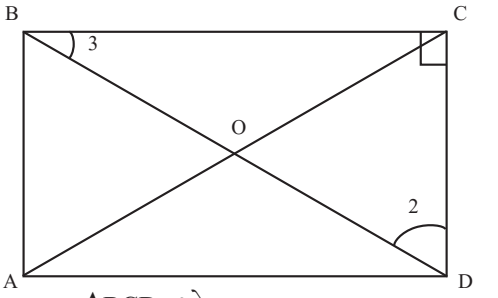


एकरूपता दाखवण्यासाठी $\angle 1$ आणि $\angle 2$ विचारात घ्या. ते समान आहेत का?



$\angle B = 90°$ असल्याने

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$



ΔBCD मध्ये

$\angle 3 + \angle 2 + 90 = 180$,

म्हणून $\angle 3 + \angle 2 = 90°$

तर $\angle 1 = \angle 2$ $(= 90° - \angle 3)$

अशाप्रकारे एकरूपतेसाठी AAS एकरूपतेनुसार $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

म्हणून OA = OC आणि OB = OD कारण ते एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक आहेत. म्हणून O हा AC आणि BD चा मध्यबिंदू आहे.

यावरून असे दिसून येते की आयताचे कर्ण नेहमी एकमेकांना मध्यबिंदुमध्ये छेदतात.

म्हणून आयत मिळविण्यासाठी कर्ण अशा प्रकारे काढले पाहिजेत की ते समान आहेत आणि ते मध्यबिंदूमध्ये छेदतात. जेव्हा कर्ण त्यांच्या मध्यबिंदूवर छेदतात, तेव्हा आपण म्हणतो की कर्ण एकमेकांना दुभागतात. **एका राशीचे दुभाजक करणे म्हणजे त्याचे दोन समान भाग करणे.**

कांही आयत काढून त्यांचे कर्ण आणि छेदनबिंदू मोजून हा गुणधर्म पडताळून पाहू.

(?) $\Delta AOD \cong \Delta COB$ हे एकरूप दाखविण्यासाठी खालील समानता वापरता येतील का ?

AO = CO (वर सिध्द झाले आहे)

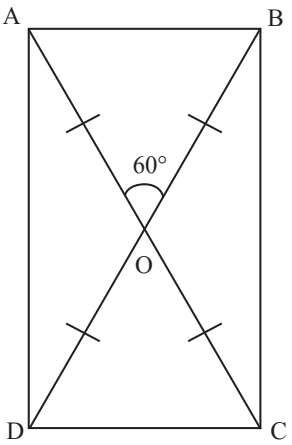
$\angle AOB = \angle COD$ (शिरोविरुद्ध कोन)

AD = CB

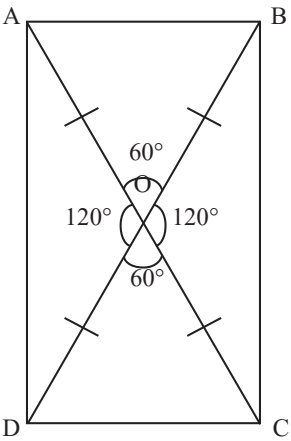


अनुमान 3 - कर्णामधील कोन किती असावा ?

उजवीकडील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे जर आपण दोन्ही कर्ण अशा प्रकारे काढले की त्यांची लांबी समान असेल, ते एकमेकांना दुभाजक असतील आणि त्यांच्यामध्ये एक अनियंत्रित कोन असेल. उदाहरणार्थ 60^0 तर आपल्याला कोणता चौकोन मिळेल ते पाहू.

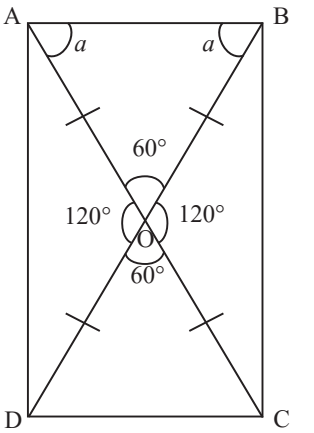


(?) तुम्हाला राहिलेले सर्व कोन मिळतील का ?



शिरोविरुद्ध कोन आणि रेषीय कोनांच्या जोड्या यांचा वापर करून आपण कर्णामधील राहिलेले कोन शोधू शकतो.

ΔAOB मध्ये AO = OB असल्याने त्यांचे विरुद्ध कोन समान आहेत. त्या कोनांना 'a' नांव द्या.



? तुम्हाला 'a' ची किंमत मिळेल का ?

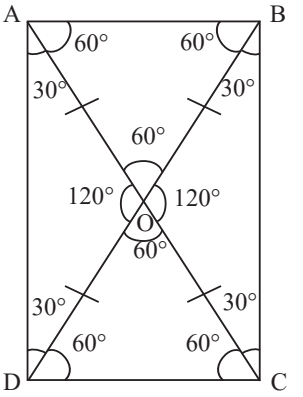
ΔAOB मध्ये

$a + a + 60 = 180$ (त्रिकोणाचे आंतर कोन)

$2a = 120$

$\therefore$ a = 60

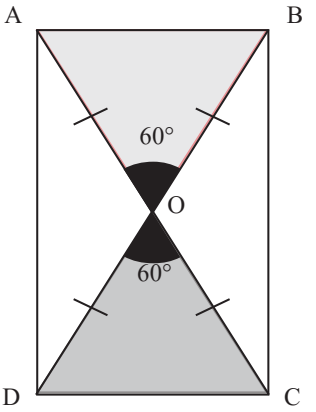
त्याचप्रमाणे, आपण इतर सर्व कोनांची मूल्ये शोधू शकतो.

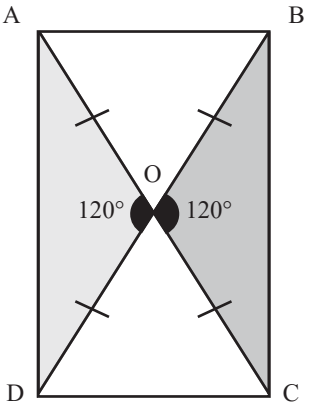


? आता आपण ओळखू शकतो का की ABCD हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे ?

लक्षात घ्या की त्याचे सर्व कोन 90° (30°+60°) पर्यंत बेरीज असते.

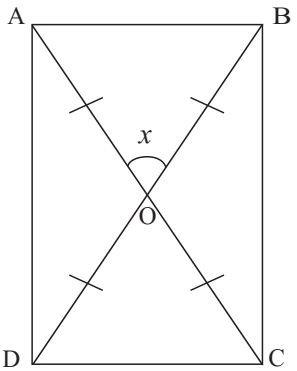
? त्यांच्या बाजूंबद्दल आपण काय म्हणू शकतो ?





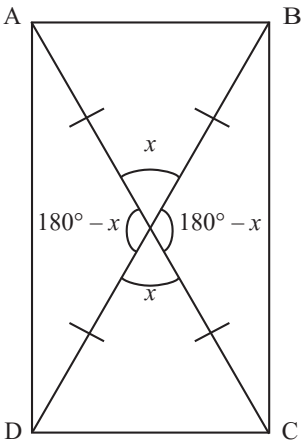
आपण पाहू शकतो की, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ आणि $\Delta AOD \cong \Delta COB$ म्हणून AB = CD आणि AD = CB कारण ते एकरूप त्रिकोणाचे संगत घटक आहेत.

म्हणून, ABCD हा एक आयत आहे कारण तो आयताची व्याख्या पूर्ण करतो.



(?) जर कर्णामधील कोन बदलले तर ABCD हा आयत राहील का ? आपण याचे सामान्यीकरण करू शकतो का ?

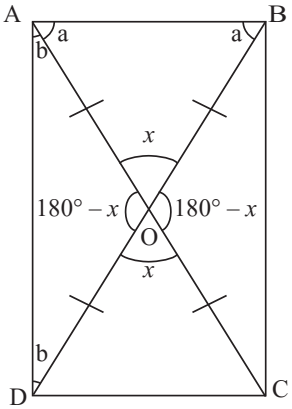
कर्णामधील एक कोन x आहे असे समजू.



आपण कर्णामधील चार कोन x, x, $180 - x$, आणि $180 - x$ असे मोजू शकतो.

(?) तुम्हाला इतर कोन मिळतील का ?

ΔAOB हा समद्विभुज त्रिकोण आहे हे आपल्याला माहित असल्याने आपण त्याच्या दोन्ही कोनांचे माप 'a' ने दर्शवू शकतो.



(?) x च्या संदर्भात a चे (अंशामध्ये) मुल्य किती आहे ?

$$a + a + x = 180$$

(त्रिकोणाच्या आंतर कोनांची बेरीज)

$$2a = 180 - x$$

$$a = \frac{(180 - x)}{2} = 90 - \frac{x}{2}$$

त्याचप्रमाणे ΔAOD समद्विभुज त्रिकोणामध्ये पायामधील कोन b घेऊ.

$$b + b + 180 - x = 180$$

$$2b = 180 - (180 - x)$$

$$2b = 180 - 180 + x$$

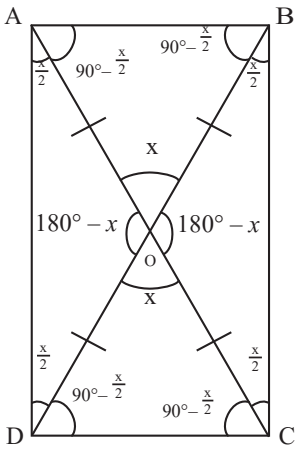
$$2b = x$$

$$b = \frac{x}{2}$$

चौकोनाचे सर्व कोन a + b आहेत,

$$90 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 90$$

अशाप्रकारे चौकोन ABCD चे चारही कोन 90^0 आहेत.

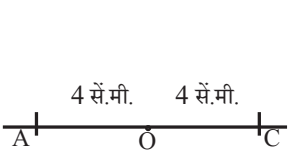


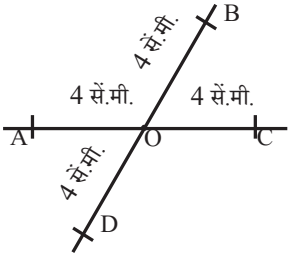
(?) AB आणि CD, AD आणि BC बद्दल आपण काय म्हणू शकतो? $\Delta AOB \cong \Delta COD$ आणि $\Delta AOD \cong \Delta COB$ आहे.

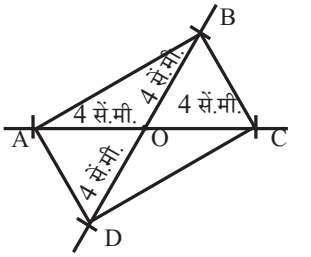
म्हणून AB = CD आणि AD = CB कारण ते एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक आहेत.

म्हणून कर्णामधील कोनांची मापे कांहीही असली तरी, जर कर्ण समान असतील आणि ते एकमेकांना दुभागत असतील तर तयार झालेल्या चौकोनाचे कोन प्रत्येकी 90^0 असतात आणि विरुद्ध बाजू समान असतात. अशाप्रकारे चौकोन हा एक आयत आहे.

आता आपल्याला माहित आहे की लाकडी पट्टया एकत्र करून आयताचे शिरोबिंदू कसे तयार करावे लागतात! ते समान असले पाहिजेत आणि त्यांच्या मध्यबिंदूवर जोडलेले असावेत.









प्रत्यक्षात आयताकृती बनविण्यासाठी ही पध्दत वापरली जाते. युरोपमधील सुतार आयताकृती चौकट तयार करण्यासाठी ही पध्दत वापरतात.

आफ्रिकेतील मोझांबिकमधील शेतकरी घर बांधताना आयताकृती आकारात घराचा पाया तयार करण्यासाठी ही पध्दत वापरतात हे देखील ज्ञात आहे.

गुणधर्म शोधण्याची प्रक्रिया [The process of finding properties]

आपण खालच्या श्रेणीमधून पाहत आलो आहोत की समांतर रेषा कोन आणि त्रिकोण यासारख्या भौमितीक वस्तूंचे गुणधर्म भौमितीक तर्काद्वारे काढता येतात. या प्रकरणात आपण विशेष प्रकारच्या चौकोनांचे गुणधर्म अभ्यासू.

एकदा तुम्ही चौकोनाचा गुणधर्म काढला की कागदावर काढलेला चौकोन किंवा चौकोनाच्या आकाराचा पृष्ठभाग वापरून वास्तविक जगाच्या चौकोनाने त्याची पडताळणी करणे चांगले होईल.

जर तुम्हाला अनुमानाचा वापर करून गुणधर्म काढता येत नसेल तर तुम्ही वास्तविक जगातील चौकोन घेवून आणि मापनाद्वारे गुणधर्माचे निरीक्षण करून प्रयोग करू शकता. लक्षात ठेवा की ही निरीक्षणे गुणधर्माबद्दल उपयुक्त अंतर्दृष्टी देतात. परंतु त्यांच्या बाबतीत आपण फक्त एक अनुमान तयार करू शकतो, तो म्हणजेच **एक विधान ज्याबद्दल आपल्याला खूप विश्वास आहे, परंतु ते नेहमीच खरे आहे की नाही याची अद्याप खात्री**

नाही. उदाहरणार्थ कांही आयत रचणे आणि त्यांचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात हे मोजमापद्वारे पाहणे याचा अर्थ असा नाही की हे नेहमीच असेल, आपण खात्री करू शकतो का की आपण रचलेल्या 1000 व्या आयतामध्ये देखील हा गुणधर्म असेल ? या गुणधर्माबद्दल खात्री करण्याचा एकमेव मार्ग म्हणजे विश्वाने याचे समर्थन करणे किंवा सिध्द करणे, जसे आपण अनुमान 2 मध्ये केले होते.

शिक्षकांना सूचना :- विद्यार्थ्यांना गुणधर्माचे अनुमान काढण्यासाठी किंवा त्यांचे समर्थन करण्यासाठी सौम्यपणे प्रोत्साहीत करा. जेव्हा जेव्हा विद्यार्थ्यांना ते करताना आव्हाने येतात तेव्हा त्यांना प्रयोग करण्यास आणि निरीक्षण करण्यास प्रोत्साहीत करा आणि त्यांच्या अंतर्ज्ञानाचा वापर करून गुणधर्म शोधून काढा.

सुतारांच्या उदाहरणावरून असे दिसून येते की आयताची व्याख्या खालीलप्रमाणे करता येते.

आयत: आयत हा एक चौकोन आहे ज्याचे कर्ण समान असतात आणि कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

ही व्याख्या आधीच्या व्याख्येपेक्षा किती तरी वेगळी आहे. तरीही या दोन्ही व्याख्या एकाच प्रकारच्या चौकोनांचे वर्णन करतात. शिवाय असे दिसून येते की पहिली व्याख्या आणखी सोपी करता येते.

? आधीच्या व्याख्येमध्ये आपण असे म्हटले होते की आयताच्या (a) समोरासमोरील बाजू समान लांबीच्या असतात आणि (b) सर्व कोन 90^0 असतात. जर आपण आयताची व्याख्या फक्त अशी केली की, आयतामध्ये सर्व कोन 90^0 असतात. तर ती व्याख्या चुकीची ठरेल का ?

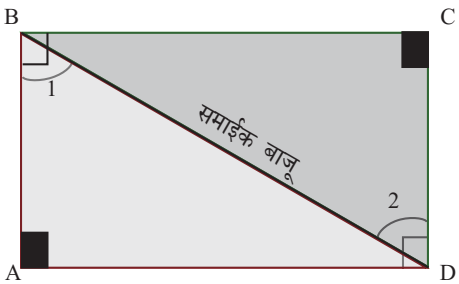
? जर तुम्हाला असे वाटत असेल की ही व्याख्या अपूर्ण आहे. तर असा एक चौकोन रचण्याचा प्रयत्न करा. ज्यामध्ये सर्व कोन 90^0 असतील पण समोरासमोरील बाजू समान नसतील.

तुम्ही असा चौकोन रचू शकता का ?

हे अशक्य का आहे ते सिध्द करुया.

अनुमान 4 - ज्या चौकोनाचे सर्व कोन 90^0 इतके असतात त्याचा आकार कसा असतो ?

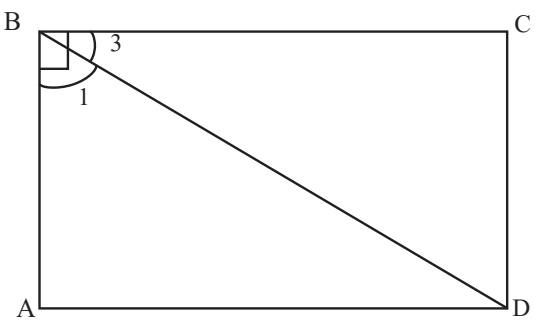
? एका चौकोनाचा विचार करा ज्याचे नांव ABCD आहे आणि त्याचे सर्व कोन 90^0 आहेत. अशा चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजूंबद्दल आपण काय म्हणू शकतो ?



BD ही रेषा जोडा. ΔBAD आणि ΔDCB हे एकरूप आहेत असे दिसते. आपण हा दावा सिद्ध करू शकतो का ?

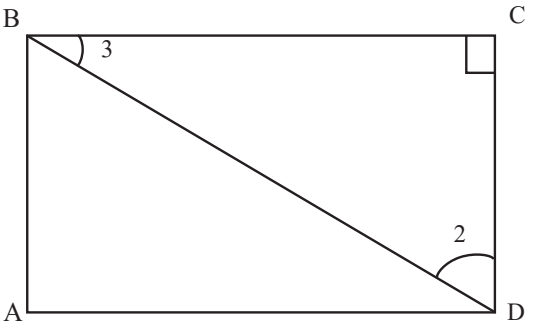
दोन समान गोष्टी थेट दिसतात. त्रिकोणांमधील $\angle 1$ आणि $\angle 2$ बद्दल आपण काय म्हणू शकतो ?

आपल्याला आठवेल की आपण असाच एक प्रश्न अनुमान - 2 मध्ये सोडविला होता. आपण तेच तर्कशास्त्र येथे वापरू शकतो.



$\angle B = 90°$,

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$



ΔBCD मध्ये

$\angle 3 + \angle 2 + 90° = 180°$

$\angle 3 + \angle 2 = 90°$

तर $\angle 1 = \angle 2$

अशाप्रकारे

$\Delta BAD \cong \Delta DCB$ (AAS एकरूपतेवरून)

म्हणून AD = CB आणि DC = BA कारण एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक आहेत.

(?) $\Delta BAD \cong \Delta CDB$ हे लिहीणे चुकीचे आहे का ?

अशाप्रकारे आपण हे सिद्ध केले आहे की जर चौकोनाचे सर्व कोन काटकोन असतील, तर विरुद्ध बाजूंची लांबी समान असते. म्हणून चौकोन हा आयत आहे. अशाप्रकारे आयताची व्याखा खालीलप्रमाणे करता येते.

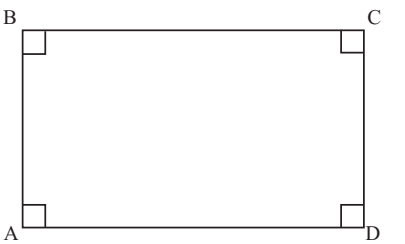
आयत: आयत म्हणजे एक चौकोन ज्यामध्ये सर्व कोन 90^0 असतात.

चला आयताचे गुणधर्म सूचीबद्ध करूया.

गुणधर्म 1: आयताचे सर्व कोन 90^0 आहेत.

गुणधर्म 2: आयताच्या विरुद्ध बाजू समान असतात.

(?) आयताच्या विरुध्द बाजू समांतर असतात का ? ते निश्चितच समांतर दिसतात. या वस्तुस्थितीचे समर्थन एका गुणधर्माचा वापर करून सिध्द केले जाऊ शकते.



लक्षात घ्या की AB ही AD आणि BC ची छेदिका आहे आणि $\angle A + \angle B = 90° + 90° = 180°$

जेव्हा छेदनबिंदूच्या एकाच बाजूला असलेल्या आंतर कोनांची बेरीज 180° असते तेव्हा रेषा समांतर असतात. या वस्तुस्थितीचा वापर करून आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की AD आणि BC या रेषा समांतर आहेत ज्या AD || BC म्हणून दर्शवितो.

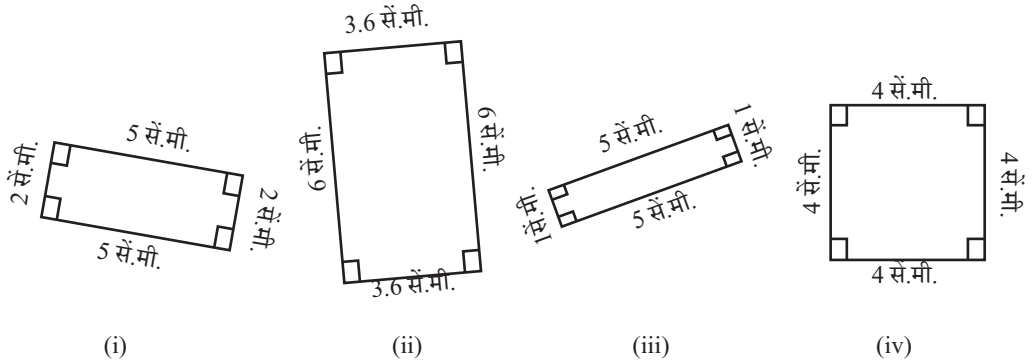
तुम्ही याचप्रकारे AB ही DC ला समांतर आहे हे दाखवू शकता का (AB || DC) ?

गुणधर्म 3: आयताच्या विरुद्ध बाजू एकमेकांना समांतर असतात.

गुणधर्म 4: आयताचे कर्ण समान लांबीचे असतात आणि ते एकमेकांना दुभागतात.

एक विशेष आयत [A Special Rectangle]

खालील चौकोनांमध्ये आयत नसलेले चौकोन आहेत का?



(i) (ii) (iii) (iv)

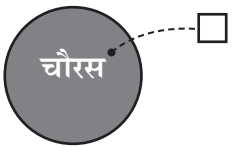
हे सर्व चौकोन आयताकृती आहेत, ज्यामध्ये (iv) चा समावेश आहे. चौकोन (iv) आयताकृती आहे कारण त्याचे सर्व कोन 90^0 आहेत. तथापि तो एका विशिष्ट प्रकारचा आयत आहे ज्याच्या सर्व बाजूंची लांबी समान आहे. आपल्याला माहित आहे की या चौकोनाला चौरस म्हणतात.

चौरस [Square]: चौरस हा असा चौकोन आहे ज्यामध्ये सर्व कोन 90^0 इतके असतात आणि सर्व बाजू समान लांबीच्या असतात. अशाप्रकारे प्रत्येक चौरस हा आयत असतो, परंतु प्रत्येक आयत स्पष्टपणे चौरस नसतो.



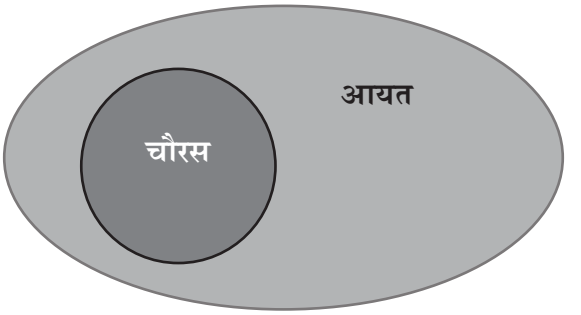
हे संबंध **वेन आकृती** वापरून चित्राकृतीने दर्शविले जाऊ शकतात. आपण यापूर्वी अशा आकृत्या पाहिल्या आहेत. वेन आकृतीमध्ये वस्तूंचा समूह एका बंद वक्राच्या आत असलेला बिंदू म्हणून दर्शविला जातो. सामान्यत: हे बंद वक्र अंडाकृती किंवा वर्तुळे असतात.

उदाहरणार्थ चौरसांचा समूह खालीलप्रमाणे दर्शविला जातो.

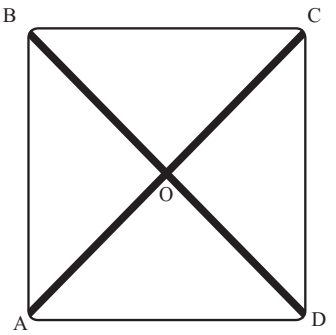


या क्षेत्रातील प्रत्येक बिंदू एका चौरसाचे प्रतिनिधित्व करतो, त्यामुळे सर्व संभाव्य चौरसाचा समावेश होतो.

प्रत्येक चौरस हा आयत असल्यामुळे या दोन समूहांचे वेन आकृतीमधील प्रतिनिधीत्व खालीलप्रमाणे असेल.



? सुताराच्या प्रश्नाचा पुन्हा विचार करुया. जर लाकडी पट्ट्या अशा प्रकारे ठेवायच्या की त्यांच्या टोकांमधून जाणाऱ्या दोऱ्यामुळे चौरस तयार करत असतील, तर काय करावे लागेल ?



मागील उदाहरणाप्रमाणे आपण 8 सें.मी. लांबीचा कर्ण असलेला चौरस रचण्याचा प्रयत्न करुया.

आयताचा प्रश्न सोडविताना आपण पाहिले की सर्व कोन 90^0 (आणि समान लांबीच्या विरुध्द बाजू) असलेला चौकोन मिळविण्यासाठी कर्ण खालील प्रमाणे काढले जातात.

i) ते समान लांबीचे असतात आणि

ii) ते एकमेकांना दुभागतात.

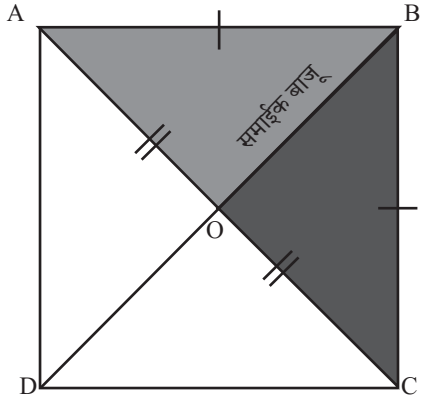
? बाजूंची लांबी समान ठेवण्यासाठी आणखी काय करावे लागेल ? कर्णामधील कोनांची योग्य निवड करून हे साध्य करता येईल का ? तुम्ही तर्क करू शकता का किंवा प्रयोग करून हे शोधू शकता का ते पहा !

अनुमान 5 - कर्णामधील कोन किती असावा ?

कर्णामधील कोन एकरूपतेच्या कल्पनेचा वापर करून शोधता येतो ! समजा आपण समान लोबीच्या बाजू जोडतो ज्यामुळे ते एकमेकांना दुभागतात आणि चौरस रचला जातो.

चौरसाला ABCD नांव देऊया.

कर्णामुळे तयार झालेला कोन शोधण्यासाठी, एकरूपतेसाठी आपण कोणते. दोन त्रिकोण विचारात घेतले पाहिजेत ?



$\Delta BOA \cong \Delta BOC$ (SSS एकरूपतेवरुन)

? कर्णामुळे तयार झालेले कोन $\angle BOA$ आणि $\angle BOC$ शोधण्यासाठी याचा उपयोग करता येईल का ?

हे कोन एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक असल्याने ते समान आहेत. शिवाय हे कोन एकत्रितपणे एक सरळ रेषा तयार करतात. म्हणून $\angle BOA + \angle BOC = 180°$ म्हणून हा प्रत्येक कोन 90^0 असला पाहिजेत.

यावरून असे दिसून येते की चौरसाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात. याचा अर्थ असा आहे की कर्ण समान लांबीचे असावेत आणि एकमेकांना काटकोनात दुभागले पाहिजेत. चौकोनाचे शिरोबिंदू निश्चित करणारे कर्णांचे अंतिम (शेवटचे) बिंदू असल्याने या पद्धतीने जोडल्यास आपल्याला एक चौरस मिळेल,

? या वस्तुस्थितीचा वापर करून 8 सें.मी. लांबीचा कर्ण असलेला एक चौरस रचा.

चौरसाचे गुणधर्म [Properties of a square]

चौरस हा एक विशेष प्रकारचा आयत असल्याने, आयताचे सर्व गुणधर्म चौरसासाठी लागू पडतात.

? अनुमान 1 आणि अनुमान 2 मधील भौमितीक तर्क वापरून हे खरे आहे का ते पडताळून पहा आणि ते चौकोनाला देखील लागू होतात का ते पहा.

गुणधर्म 1: चौरसाच्या सर्व बाजूंची लांबी समान असते.

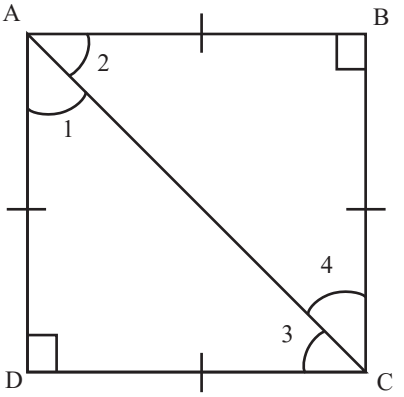
गुणधर्म 2: चौरसाच्या विरुद्ध बाजू एकमेकांना समांतर असतात.

गुणधर्म 3: चौरसाचे सर्व कोन 90^0 चे असतात.

गुणधर्म 4: चौरसाने कर्ण समान लांबीचे असतात आणि ते एकमेकांना 90^0 मध्ये दुभागतात.

चौरसाचा आणखी एक विशेष गुणधर्म आहे.

? $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ आणि $\angle 4$ चे माप किती आहे ? तुम्ही हे तर्क करू शकता का किंवा प्रयोग करू शकता का ते पहा !



ΔADC मध्ये,

$\angle 1 + \angle 3 + 90° = 180°$

$AD = DC$ म्हणून $\angle 1 = \angle 3$

म्हणून $\angle 1 = \angle 3 = 45°$

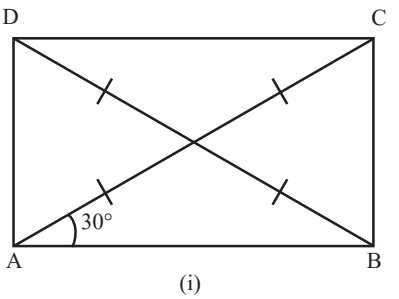
त्याचप्रमाणे $\angle 2$ आणि $\angle 4$ चे माप शोधा.

अशाप्रकारे आपल्याला चौरसाचा आणखी एक गुणधर्म मिळतो.

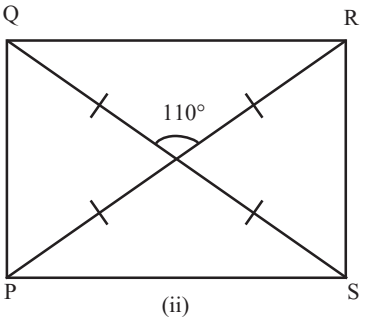
गुणधर्म 5: चौरसांचे कर्ण चौरसाच्या कोनांना समान भागांमध्ये विभागतात हे असे देखील व्यक्त करता येते चौरसाचे कर्ण चौरसाच्या कोनांना दुभागतात.

? **शोधा पाहू. [Figure it out]**

1. खालील आयतांमधील इतर सर्व कोन शोधा.



(i)



(ii)

2. एक चौकोन काढा ज्याच्या कर्णांची लांबी 8 सें.मी. असेल जे एकमेकांना दुभागतात आणि ज्यांच्या छेदन बिंदूत खालीलपैकी कोणत्या एका कोनात छेदतात.

   (i) 30° (ii) 40° (iii) 90° (iv) 140°

3. '0' केंद्र असलेले एक वर्तुळ विचारात घ्या. रेषाखंड PL आणि AM हे वर्तुळाचे दोन लंब असलेले व्यास आहेत. APML ही आकृती कोणती आहे ? हे समजून घेण्यासाठी तर्क लावा किंवा प्रयोग करा.

4. कागदाच्या घड्या घालून 90^0 चा कोन कसा तयार करायचा हे आपण पाहिले आहे. आता समजा आपल्याकडे कोणताही कागद नाही, पण समान लांबीच्या दोन काठ्या आणि एक धागा आहे. यांचा वापर करून आपण तंतोतंत 90° चा कोन कसा तयार करू शकतो ?



5. आपण पाहिले की आयताचा एक गुणधर्म म्हणजे त्याच्या विरुध्द बाजू समांतर असतात. आयताची ही व्याख्या म्हणून निवडता येईल का ? दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर, ज्या चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू समांतर आणि समान असतात तो आयत असतो का ?

प्रयत्न करा

4.2 चौकोनातील कोन [Angles in a Quadrilateral]

? तीन कोन 90^0 असलेले आणि चौथा कोन 90^0 नसलेला असा चौकोन रचणे शक्य आहे का ?

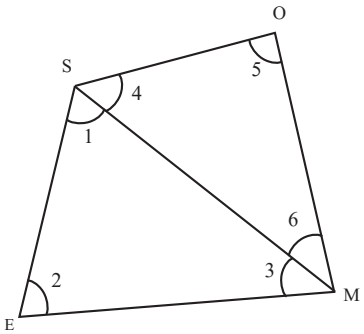
तुम्ही कदाचित रचनांमधून पाहिले असेल की हे शक्य नाही.

? पण का नाही?

हे चौकोनांच्या कोनाशी संबंधित सामान्य गुणधर्मामुळे आहे.

आपण पाहिले आहे की त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180° आहे. चौकोनाच्या कोनांच्या बेरजेमध्ये देखील अशीच एक नियमितता आहे.

एक चौकोन SOME चा विचार करा. एक कर्ण SM काढा. आपल्याला ΔSEM आणि ΔSOM हे दोन त्रिकोण मिळतात.



Δ SEM मध्ये

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

आणि Δ SOM मध्ये $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$

जेव्हा आपण सर्व सहा कोन जोडतो तेव्हा आपल्याला

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

आणि Δ SOM मध्ये

$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$

जेव्हा आपण सर्व सहा कोन मिळवितो तेव्हा आपल्याला,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180° + 180° = 360°$

किंवा $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 2 + \angle 5 = 360°$

म्हणून $(\angle 1 + \angle 4)$, $(\angle 3 + \angle 6)$ $(\angle 3 + \angle 6)$, $\angle 2$ आणि $\angle 5$ हे या चौकोनाचे कोन असल्याने आपल्याला खालील निष्कर्ष मिळतो.

कोणत्याही चौकोनातील सर्व कोनांची बेरीज 360° असते.

यावरून हे स्पष्ट होते की, एखाद्या चौकोनाला तीन काटकोन असणे शक्य आहे, परंतु चौथा कोन काटकोन नसणे शक्य नाही.

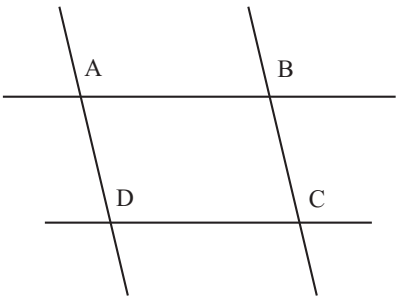
4.3 विरुद्ध बाजू समांतर असलेले चौकोन [More Quadrilaterals with parallel opposite sides]

आयतांना (चौरसांना देखील) विरुद्ध बाजू समांतर असतात.

? असे चौकोन आहेत का ज्यांच्या विरुद्ध बाजू समांतर आहेत परंतु ते आयत नाहीत ?

चला आपण एक रचना करण्याचा प्रयत्न करुया, समांतर रेषांच्या दोन जोड्या काढून हे सहज करता येते फक्त हे सुनिश्चित करा की हे काटकोनात मिळत नाहीत.

? समांतर रेषांची रचना कशी करायची यासाठी कंपास, मोजपट्टी किंवा त्रिकोणी गुण्या वापरण्याचे आठवून अशी आकृती काढा.



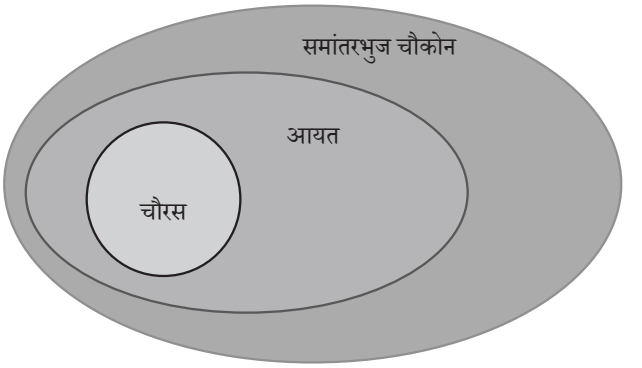
चौकोन ABCD पहा. त्यांच्या विरुध्द बाजू समांतर आहेत पण तो आयत नाही.

अशाप्रकारे, चौकोनांचा एक मोठा संच अस्तित्वात असतो ज्यामध्ये विरुद्ध बाजू समांतर असतात. अशा चौकोनांना समांतरभुज चौकोन म्हणतात.

? आयत समांतरभुज चौकोन आहे का ?

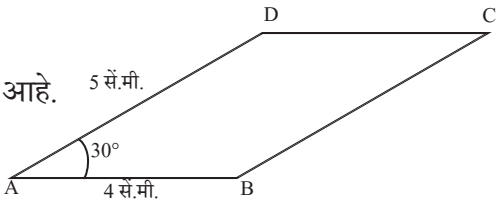
आयतामध्ये विरुद्ध बाजू समांतर असतात. म्हणून ते समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येनुसार असते. अधिक स्पष्टपणे सांगायचे तर आयत हा एक विशेष प्रकारचा समांतरभुज चौकोन आहे ज्याचे सर्व कोन 90^0 चे आहेत.

वेन आकृती वापरून हे संबंध दर्शवूया.

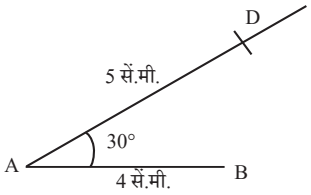


समांतरभुज चौकोनाच्या बाजू आणि कोनांमधील संबंध समजून घेण्यासाठी खालील आकृतीची रचना करूया.

? एक समांतरभुज चौकोन काढा ज्याच्या लगतच्या बाजूंची लांबी 4 आणि 5 सें. मी. आणि त्याच्यामधील कोन 30° आहे.

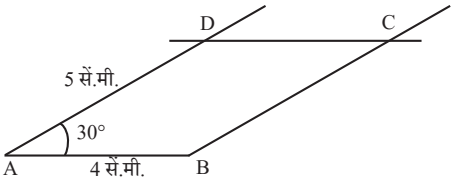


पायरी 1: रेषाखंड AB = 4 सें. मी. आणि AD=5 सें. मी. असा काढा की त्यांच्यामध्ये 30° चा कोन असेल.



पायरी 2: बिंदू D मधून AB ला समांतर रेषा आणि बिंदू B मधून AD ला समांतर रेषा काढा. या रेषा ज्या बिंदूत छेदतात त्याला C असे नांव द्या.

ABCD हा अपेक्षित समांतरभुज चौकोन आहे.



? समांतरभुज चौकोनाचे राहिलेले कोन कोणते आहेत ? राहिलेल्या बाजूची लांबी किती आहे ? हे शोधण्यासाठी तुम्ही तर्क लावू शकता किंवा प्रयोग करू शकता.

अनुमान 6 - समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांबद्दल आपण काय सांगू शकतो?

समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये AB || CD आणि AD ही त्यांची छेदिका आहे.

$\angle A + \angle D = 180°$ (छेदिकेच्या एकाच बाजूला असलेल्या आंतर कोनांची बेरीज)

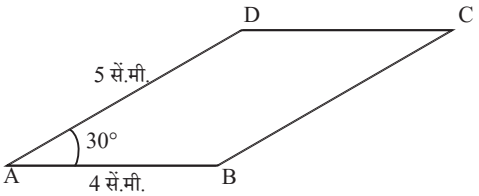
म्हणून $\angle D = 180 - \angle A = 180 - 30 = 150°$

त्याचप्रमाणे AB || CD आणि AB आणि CD

या त्यांच्या छेदिका आहेत.

तर $\angle A + \angle B = 180°$

$\angle C + \angle D = 180°$



या समीकरणांचा वापर करून आपल्याला $\angle B = 150°$ आणि $\angle C = 30°$ आपण पाहतो की या समांतरभुज चौकोनात लगतच्या कोनांच्या जोड्यांची बेरीज 180° असते.

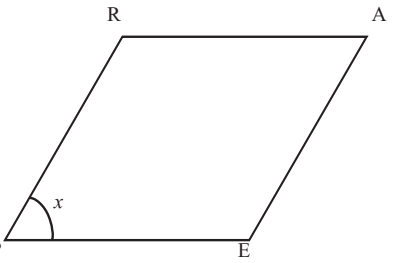
$\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ आणि $\angle B + \angle C = 180°$

आणि $\angle A = \angle C$ आणि $\angle B = \angle D$

छेदिकेच्या एकाच बाजूकडील लगतचे कोन समांतर रेषांच्या जोडीचे आंतर कोन असल्याने त्यांची बेरीज $180°$ असणे आवश्यक आहे.

(?) विरुध्द कोनांबद्दल काय ? ते सर्व समांतरभुज चौकोनांमध्ये समान असतील का ? होय असल्यास, आपण खात्री कशी करू शकतो ?

समजा आपण एका कोनाला x मानू इतर कोन कोणते आहेत ?



$\angle P + \angle R = 180°$

$\angle R = 180 - \angle P = 180 - x$

त्याचप्रमाणे $\angle A + \angle R = 180°$

$\angle A = 180 - \angle R = 180 - (180 - x) = 180 - 180 + x = x$

अशाप्रकारे $\angle P = \angle A = x$

त्याचप्रमाणे आपण सिध्द करू शकतो की.

$\angle R = \angle E = 180 - x$

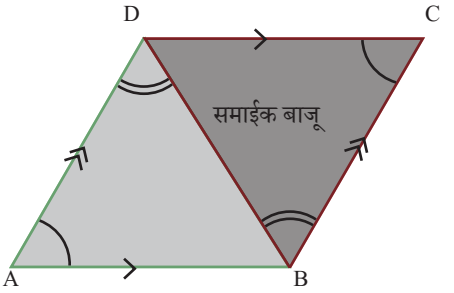
म्हणून हे दर्शविते की समांतरभुज चौकोनाचे विरुद्ध कोन नेहमी समान असतात.

अनुमान 7 - समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूबद्दल आपण काय सांगू शकतो ?

(?) समांतरभुज चौकोनाकडे पाहिल्यास, असे दिसून येते की यांच्या विरुद्ध बाजू समान आहेत.

हे सिद्ध करण्यासाठी आपण पुन्हा एकरूपतेचा वापर करू शकतो का ? यासाठी कोणते दोन त्रिकोण विचारात घेतले जाऊ शकतात ?

ΔABD व ΔCDB मध्ये एका कंसाने चिन्हांकीत केलेले कोन समान असतात कारण समांतरभुज चौकोनाचे विरुद्ध कोन समान असतात.



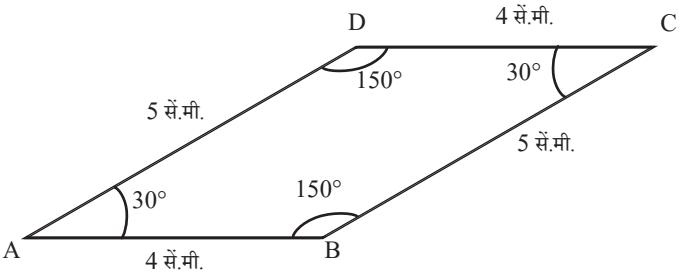
AD || BC असल्याने BD ही छेदिका आहे. दुहेरी कंसाने चिन्हांकीत केलेले कोन समान आहेत कारण ते व्युत्क्रम कोन आहेत.

म्हणून $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (AAS एकरूप अटीनुसार)

म्हणून AD = CB आणि AB = CD

अशाप्रकारे **समांतरभुज चौकोनाच्या विरुध्द बाजू समान असतात.**

(?) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ असे लिहीणे चुकीचे आहे का ? का ? या अनुमानावरून आपण समांतरभुज चौकोनाच्या राहिलेल्या बाजू आणि कोन शोधू शकतो.



समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म सूचीबद्ध करूया.

गुणधर्म 1: समांतरभुज चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू समान असतात.

गुणधर्म 2: समांतरभुज चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू समांतर असतात.

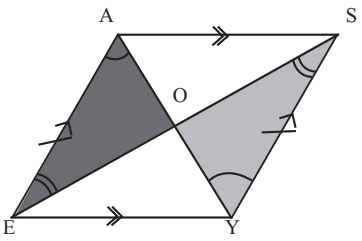
गुणधर्म 3: समांतरभुज चौकोनामध्ये विरुद्ध कोन समान असतात आणि लगतच्या कोनांची बेरीज 180° असते.

? समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण नेहमी समान असतात का ? तुम्ही तयार केलेल्या समांतरभुज चौकोनासह तपासा. आपण पाहतो की समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण समान असणे आवश्यक नाही.

? ते एकमेकांना दुभागतात का ? (ते त्याच्या मध्यबिंदूवर छेदतात का) हे शोधण्यासाठी तर्क लावा किंवा प्रयोग करा.

अनुमान 8: समांतरभुज चौकोनातील दोन कर्णाच्या छेदन बिंदूला काय म्हणतात ?

आयताच्या उदाहरणाप्रमाणे आपण ΔAOE आणि ΔYOS ची एकरूपता दाखवून समांतरभुज चौकोन EASY मध्ये कर्ण एकमेकांना दुभागतात की नाही हे शोधू शकतो.



AE = YS (∵ समांतरभुज चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू आहेत)

एकाच कंसाने चिन्हांकीत केलेले कोन समान असतात आणि दुहेरी कंसाने चिन्हांकीत केलेले कोन देखील समान असतात, कारण त्या समांतर रेषांच्या एकांतर कोन आहेत.

अशाप्रकारे ΔAOE ≅ ΔYOS (ASA एकरूपते नुसार)

म्हणून OA = OY आणि OE = OS कारण एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक आहेत.

अशाप्रकारे O हा दोन्ही कर्णाचा मध्यबिंदू आहे.

? ΔAOE ≅ ΔSOY हे लिहीणे चुकीचे आहे काय ? का ?

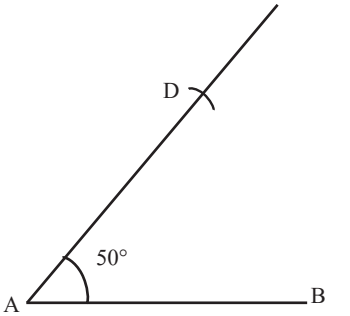
गुणधर्म 4: समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

? समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना एका विशिष्ट कोनावर छेदतात का ?

4.4 समान बाजूची लांबी असलेले चौकोन [Quadrilaterals with equal side lengths]

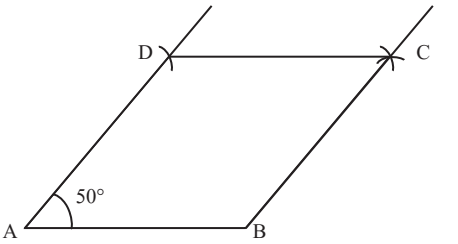
चौरस हे एकमेव चौकोन आहेत का ज्यांच्या बाजूची लांबी समान आहे? आपण रचनेद्वारे हे शोधूया.

दोन समान बाजू AD आणि AB काढा ज्या एकमेकांना लंब नाहीत.



? आपण हा चौकोन अशा प्रकारे पूर्ण करू शकतो का की त्याच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या असतील ? C हा बिंदू B आणि D पासून समान अंतरावर चिन्हांकीत करा. हे करण्यासाठी कंपासचा वापर करून AB चे माप घ्या. याच त्रिज्येने B आणि D वरून कंस काढा.

आता आपल्याकडे समान बाजूंची लांबी असलेला आणि त्याचा एक कोन 50° असलेला चौकोन आहे. लक्षात घ्या की आपण 180° पेक्षा कमी (50° च्या जागी) कोणताही कोन घेऊन असा चौकोन तयार करू शकलो असतो.

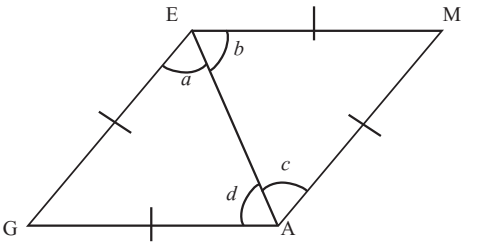


ज्या चौकोनाचे सर्व बाजूंची लांबी समान असते त्याला समभूज चौकोन म्हणतात.

? आपण रचलेला समभुज चौकोन ABCD चे इतर कोन कोणते आहेत ? हे शोधण्यासाठी तर्क लावा किंवा प्रयोग करा.

अनुमान 9 - समभुज चौकोनातील कोनांबद्दल आपण काय म्हणू शकतो ?

एका समभुज चौकोनाच्या GAME बद्दल विचार करा.



ΔGAE मध्ये, GE = GA, a = d

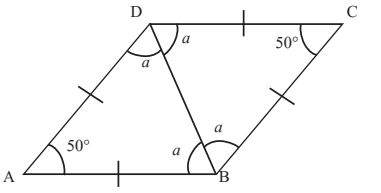
त्याचप्रमाणे ΔMAE, ME = MA, b = c,

? $\Delta GAE \cong \Delta MAE$ हे त्रिकोण एकरूप कसे आहेत ?

तर a = b, c = d आणि $\angle G = \angle M$ (कारण एकरूप त्रिकोणाचे संगत घटक आहे)

अशाप्रकारे a = b = c = d

हे सत्य कोणत्याही समभुज चौकोनासाठी लागू होते. आपण ते समभुज चौकोन ABCD ला लागू करू जो आपण तयार केला आहे. त्यामध्ये कर्ण a आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे चार समान कोन तयार करतात.

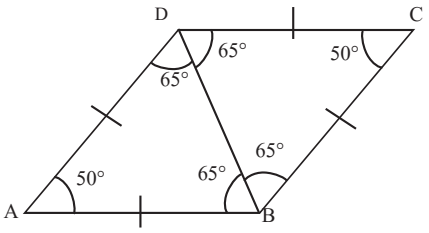


ΔADB मध्ये

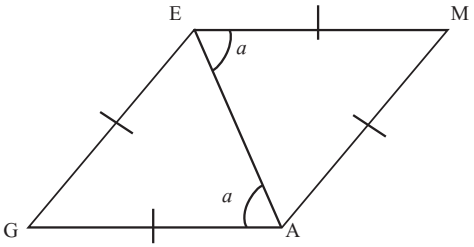
$a + a + 50° = 180°$

$a = 65°$ तर समभुज चौकोन ABCD चे कोन 50°, 130°, 50° आणि 130° आहेत.

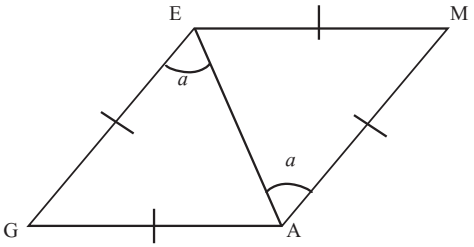
समभुज चौकोनामध्ये विरुद्ध कोन समान असतात.



विशेष म्हणजे इतर कोन शोधण्यासाठी आणखीन एक मार्ग आहे, जो आपण तयार, केलेल्या समभुज चौकोन ABCD च्या बाबतीत वापरू शकतो. आपण हे दाखविले आहे की सामान्यपणे समभुज चौकोन GAME मध्ये कर्णाने तयार केलेले चार कोन एकमेकांना समान असतात.

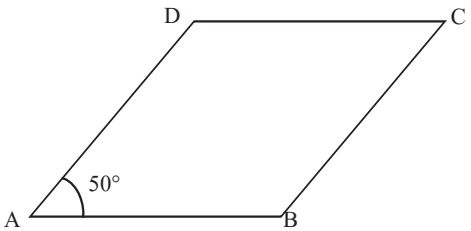


रेखाखंड EM आणि GA यांची छेदिका AE यांचा विचार करा. व्युत्क्रम कोन समान असल्याने EM || GA



त्याचप्रमाणे रेषाखंड GE आणि AM. यांची छेदिका AE यांचा विचार करा. व्युत्क्रम कोन समान असल्याने GE||AM

विरुध्द बाजू समांतर असल्याने GAME देखील समांतरभुज चौकोन आहे. अशाप्रकारे प्रत्येक समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असतो आणि समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म समभुज चौकोनांसाठीही लागू होतात. तसेच समभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांची बेरीज 180^0 असते आणि विरुद्ध कोन समान असतात. (अनुमान 6 मधील तर्क समभुज चौकोनालाही लागू होतो का, ते तपासा !)



म्हणून ABCD या समभुज चौकोनात

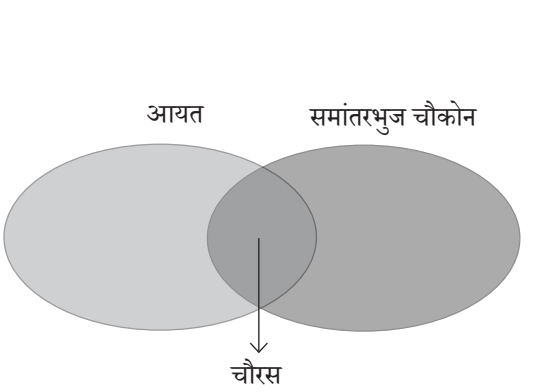
$$\angle A = \angle C = 50° \text{ आणि}$$

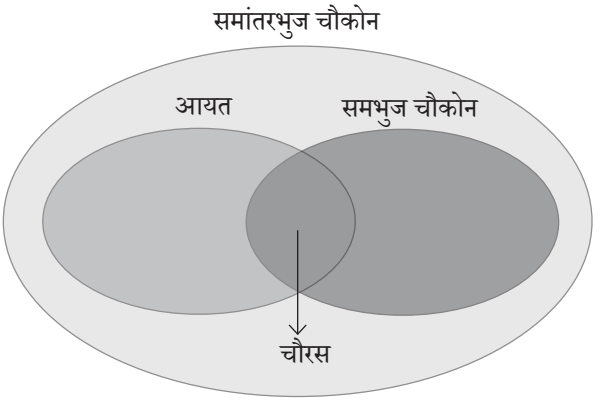
$$\angle D = \angle B = 180 - 50 = 130°$$

? समभुज चौकोन एक समांतरभुज चौकोन आहे आणि आयत देखील एक समांतरभुज चौकोन आहे. हे वेन आकृती वापरून कसे दर्शविता येईल ?

? या आकृतीमध्ये चौरसांचे संच कुठे असेल ?

आपल्याला माहित आहे की चौरस हा आयत असतो. चौरसाच्या विरुद्ध बाजू समांतर असल्याने चौरस देखील समांतरभुज चौकोन आहे. शिवाय चौरसाच्या सर्व बाजूंची लांबी समान असल्याने चौरस देखील समभुज चौकोन आहे. म्हणून वेन आकृती खालीलप्रमाणे असेल !





चला समभुज चौकोनाचे गुणधर्म सूचीबध्द करूया.

गुणधर्म 1: समभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या असतात.

गुणधर्म 2: समभुज चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू एकमेकांना समांतर असतात.

गुणधर्म 3: समभुज चौकोनात लगतच्या कोनांची बेरीज 180^0 असते आणि विरुध्द कोन समान असतात.

? समभुज चौकोनाचे कर्ण समान असतात का ?

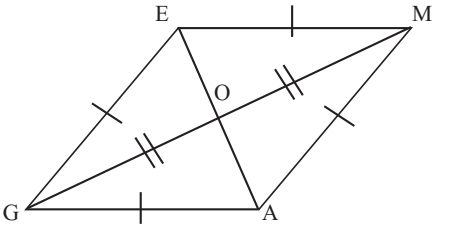
गुणधर्म 4: समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

गुणधर्म 5: समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना काटकोनात दुभागतात.

? समभूज चौकोनाचे कर्ण कोणत्याही विशिष्ट कोनात छेदतात का ? हे शोधण्यासाठी तर्क लावा किंवा प्रयोग करा!

अनुमान 10: समभुज चौकोनाच्या कर्णांनी त्यांच्या छेदनबिंदूवर तयार केलेल्या कोनांबद्दल आपण काय म्हणू शकतो ?

? समभुज चौकोन GAME मध्ये



$\Delta GEO \cong \Delta MEO$ आहे का ?

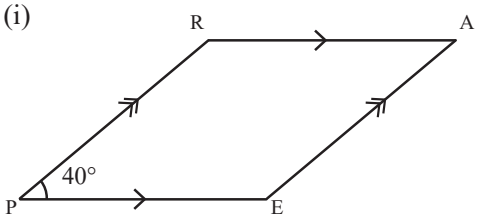
$\therefore \angle GOE = \angle MOE$ कारण ते एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन आहेत. त्यांची बेरीज 180^0 असल्याने, प्रत्येक कोन 90^0 असावेत.

गुणधर्म 6: समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना 90^0 च्या कोनात छेदतात.

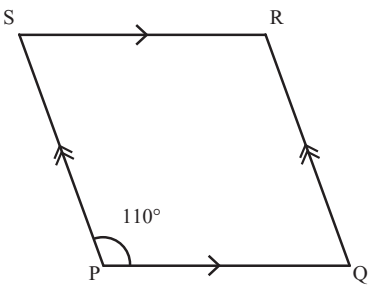
शोधा पाहू. [Figure it out]

1. खालील चौकोनांमधील राहिलेले कोन शोधा.

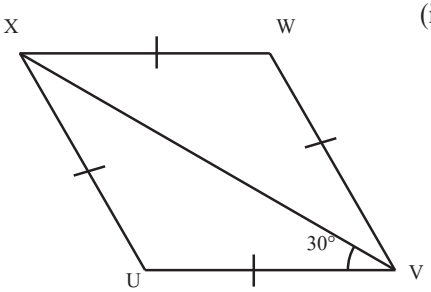
(i)



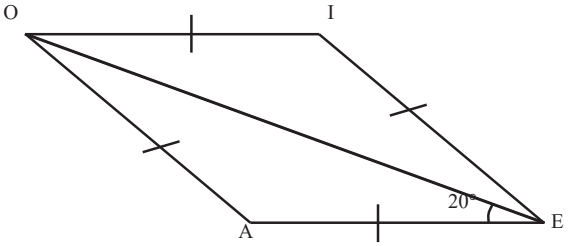
(ii)



(iii)



(iv)



2. कर्णाच्या गुणधर्माचा वापर करून असा समांतरभुज चौकोन तयार करा ज्याचे कर्ण 7 सें. मी. आणि ते 5 सें. मी. लांबीचे आहेत, 140^0 कोनात छेदतात.

3. कर्णाच्या गुणधर्माचा वापर करून असा समभुज चौकोन रचा की ज्याचे कर्ण 4 सें. मी. आणि 5 सें. मी. लांबीचे असतील.

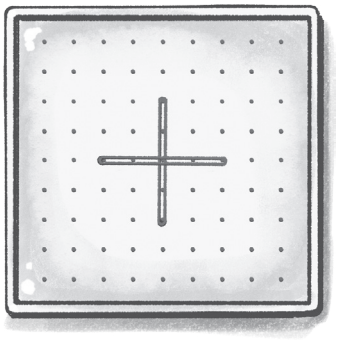
4.5 चौकोनांसोबत खेळूया [Playing with Quadrilaterals]

जिओबोर्ड उपक्रम

एक जिओबोर्ड आणि कांही रबर बँडस घ्या. जर तुमच्याकडे हे नसतील तर तुम्ही या उपक्रमासाठी पुस्तकाच्या शेवटी दिलेल्या ठिपक्यांच्या कागदाचा वापर करू शकता.

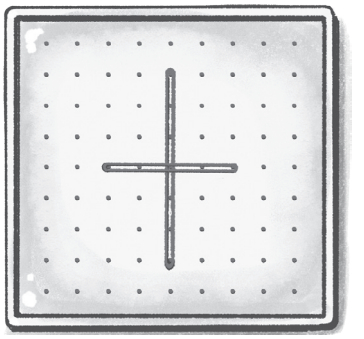


दोन रबर बँडस एकमेकांना काटकोनात ठेवा, ज्यामुळे समान लांबीचे कर्ण तयार होतील, त्यांचे टोक जोडा.



? तुम्हाला कोणता चौकोन मिळाला ? तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण द्या.

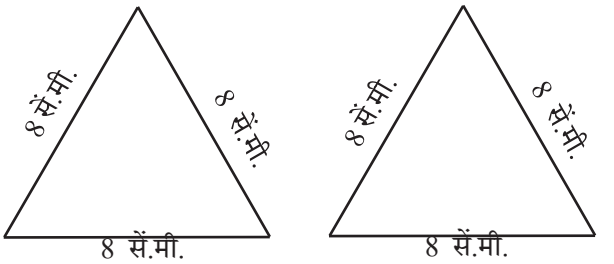
एका कर्णाला दोन्ही बाजूंनी 2 सें. मी. ने वाढवा.



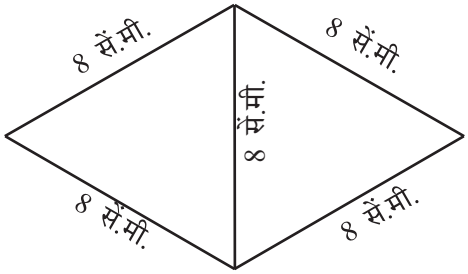
? आता तुम्हाला कोणता चौकोन मिळेल ? तुमच्या उत्तराने स्पष्टीकरण द्या.

त्रिकोण जोडणे. [Joining triangles]

1. 8 सें. मी. बाजू असलेला समभुज त्रिकोणाचे दोन पुठ्ठ्याचे तुकडे घ्या.

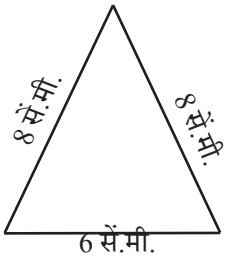


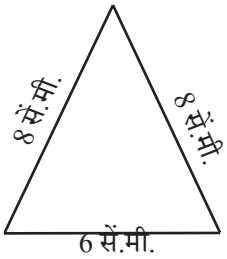
? तुम्ही ते जोडून एक चौकोन तयार करू शकता का ?



? हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे ? तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण द्या.

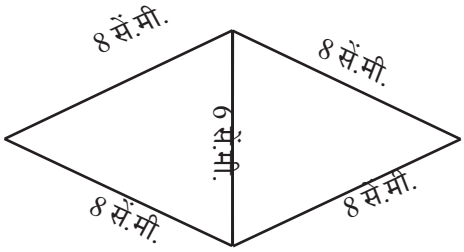
2. 8 सें. मी., 8 सें. मी. आणि 6 सें. मी. बाजू असलेल्या समद्विभुज त्रिकोणाचे दोन पुठ्ठ्याचे तुकडे घ्या.



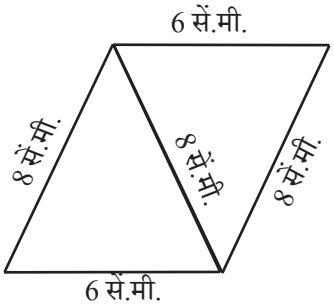


? चौकोन मिळविण्यासाठी त्यांना जोडण्याचे कोणते वेगवेगळे मार्ग आहेत ?

या पध्दतीने जोडल्यावर तुम्हाला काय मिळेल.

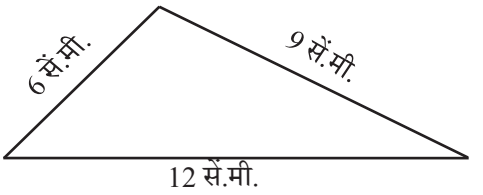


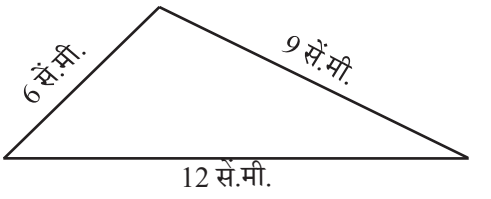
या पध्दतीने जोडल्यावर तुम्हाला काय मिळेल.



? हे कोणते चौकोन आहेत ? तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण द्या.

3. 6 सें. मी., 9 सें. मी. आणि 12 सें. मी. बाजू असलेल्या विषमभुज त्रिकोणाचे दोन पुठ्ठ्याचे तुकडे घ्या.





? चौकोन मिळविण्यासाठी त्यांना जोडण्याचे कोणते वेगवेगळे मार्ग आहेत ?

? त्रिकोण जोडून मिळणारे वेगवेगळे चौकोन तुम्ही ओळखू शकता का ? चौकोन ओळखताना तुमचे उत्तर योग्य आहे की नाही हे सांगा.

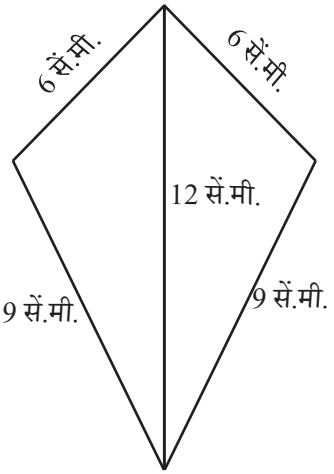


4.6 पतंग आणि समलंब चौकोन [Kite and trapezium]

पतंग

6 सें. मी., 9 सें. मी. आणि 12 सें. मी. बाजू असलेले दोन त्रिकोण खालीलप्रमाणे एकत्र जोडले जाऊ शकतात.



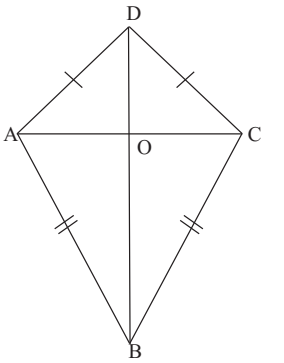




हा चौकोन पतंगासारखा दिसतो. लक्षात घ्या लगतच्या बाजू समान लांबीच्या आहेत.

पतंग : पतंग हा एक चौकोन आहे. त्याला ABCD असे नाव देण्यात आले आहे.

AB = BC आणि CD = DA



गुणधर्म 1: पतंगामध्ये दाखवा की,

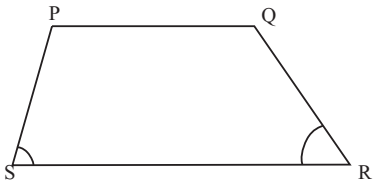
i) कर्ण BD हा ∠ABC आणि ∠ADC यांना दुभागतो.

ii) कर्ण AC ला कर्ण BD दुभागतो आणि तो त्याला लंब असतो,

म्हणजेच AO = OC

सूचना: $\Delta AOB \cong \Delta COB$ दाखवा ?

समलंब चौकोन [Trapezium]



समांतरभुज चौकोन म्हणजे त्याच्या विरुद्ध बाजू समांतर असतात. जर आपण ही अट शिथील केली, तर आपल्याला समलंब चौकोन हा एक नवीन प्रकारचा चौकोन मिळतो.

समलंब चौकोन : हा असा चौकोन आहे ज्याच्या विरुद्ध बाजूंची किमान एक जोडी समांतर असते.

? समलंब चौकोन काढा. त्याने पाया लगतचे कोन मोजा. (आकृतीत खुणा केलेले)

? न मोजता, तुम्ही राहिलेल्या कोनांचे माप शोधू शकता ? आपल्याकडे PQ || SR

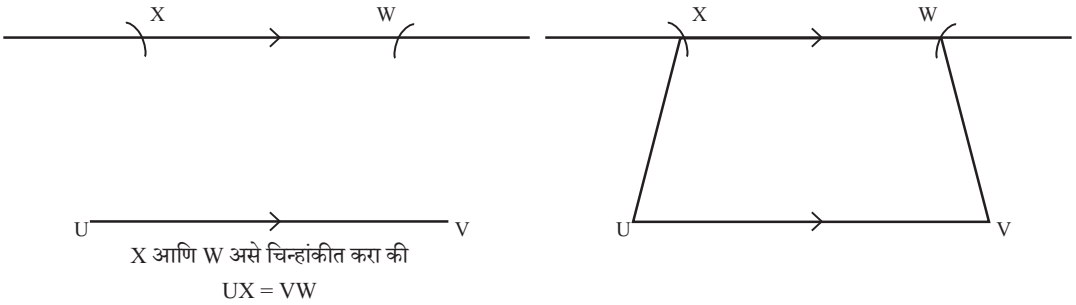
गुणधर्म 1: $\angle S + \angle P = 180°$ आणि $\angle R + \angle Q = 180°$

या नियमांचा वापर करून, तुम्ही राहिलेल्या कोनांचे माप सहज शोधू शकता. तुमच्या उत्तराची पडताळणी करा.

जेव्हा समांतर नसलेल्या बाजूंची लांबी समान असते, तेव्हा त्या समलंब चौकोनाला **समद्विभूज समलंब चौकोन** म्हणतात.

? आपण समद्विभुज समलंब चौकोन कसा काढू शकतो ?

? एक समद्विभुज समलंब चौकोन UVWX काढा, ज्यामध्ये UV || XW आहे. $\angle U$ मोजा.

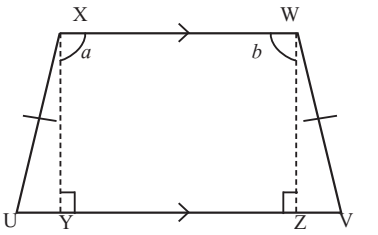


तुम्ही कोनांचे माप न घेता राहिलेल्या कोनांचे माप शोधू शकतो का?

असे दिसते की समांतर नसलेल्या बाजू समोरील कोन $\angle U$ आणि $\angle V$ समान आहेत का ? आपण येथे एकरूप त्रिकोण विचारात घेऊ शकतो का ?

रेखाखंड XY आणि WZ विचारात घ्या जे UV ला लंब आहेत.

? XWZY हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे ?



XW || UV असल्याने,

$a = 180° - \angle XYZ = 90^0$ आणि

$b = 180° - \angle WZY = 90^0$ (कारण एकाच बाजूच्या छेदिकेच्या आंतरकोनांची बेरीज 180° असते)

म्हणून XWZY हा एक आयत आहे.

? $\Delta UXY \cong \Delta VWZ$ हे सिध्द केले जाऊ शकते ? (कसे?)

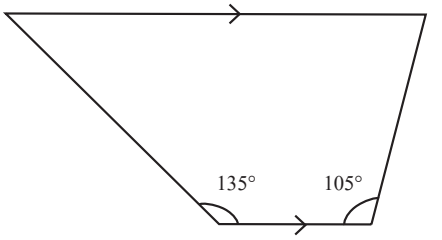
म्हणून $\angle U = \angle V$

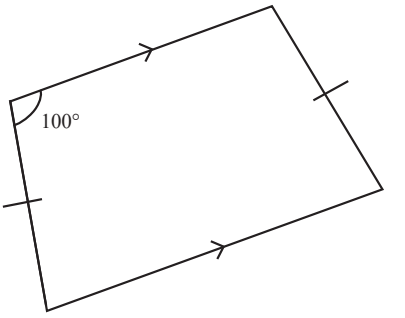
या वस्तूस्थितीचा वापर करून समद्विभुज समलंब चौकोनाचे राहिलेले कोन निश्चित केले जाऊ शकतात. मोजमाप करून कोनांची पडताळणी करा.

गुणधर्म 2: समद्विभुज समलंब चौकोनामध्ये समान बाजूंच्या विरुद्ध कोन समान असतात.

? शोधा पाहू. [Figure it Out]

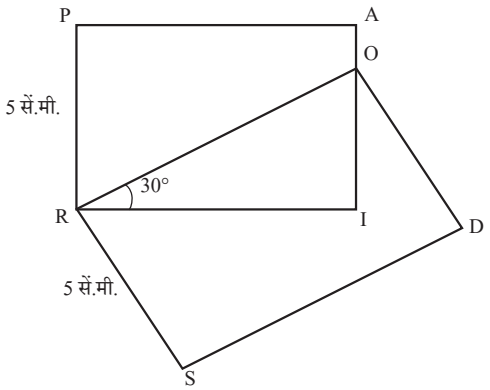
1. 4 सें. मी. बाजू असलेल्या दोन समभुज त्रिकोणांना जोडून तयार झालेल्या चौकोनाच्या सर्व बाजू व कोन शोधा.
2. 6 सें. मी. आणि 8 सें. मी. लांबीचे कर्ण असलेला पतंग तयार करत.
3. खालील समलंब चौकोनांमधील राहिलेले कोन शोधा.





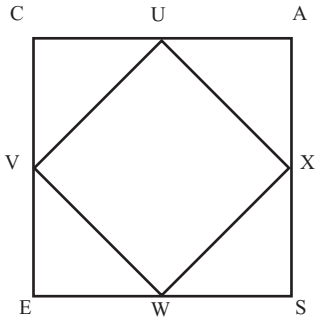
4. समांतरभुज चौकोन, पतंग, समभुज चौकोन, आयत आणि चौरस यांचा संच दर्शविणारी वेन आकृती काढा. त्यानंतर खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.
   i) पतंग आणि समांतरभुज चौकोन असलेला असा कोणता चौकोन आहे ?
   ii) असा एखादा चौकोन असू शकतो का जो पतंग आणि आयत दोन्ही असेल ?
   iii) प्रत्येक पतंग हा समभुज चौकोन असतो का ? जर नसेल तर या दोन प्रकारच्या चौकोनांमधील योग्य संबंध काय आहे ?

5. जर PAIR आणि RODS हे दोन आयत असतील तर ∠IOD शोधा.

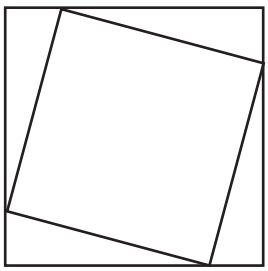


6. कंपास आणि पट्टीचा वापर करून 6 सें. मी. लांबीचा कर्ण असलेला चौरस काढा. परंतु कोन मापक वापरू नका.

7. CASE हा एक चौरस आहे. U, V, W, आणि X हे बिंदू चौरसाच्या बाजूचे मध्यबिंदू आहेत. UVWX हा कोणत्या प्रकारचा चौकोन आहे ? भौमितीक तर्क वापरून तसेच रचना व मोजून याचे उत्तर शोधा. आकृती (b) मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, आतील चौकोनाचे शिरोबिंदू बाह्य चौकोनांच्या बाजूंना छेदत असतील अशाप्रकारे चौरसाच्या आत चौरसाची रचना करण्याचे इतर मार्ग शोधा.



(a)



(b)

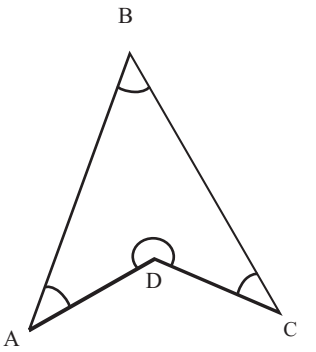
8. जर एका चौकोनाला चार समान बाजू आणि एक कोन 90^0 असेल, तर तो चौरस असेल का ? भौमितीक तर्क वापरून आकृती काढून व मोजून याचे उत्तर शोधा.

9. ज्या चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू समान असतात तो चौकोन कोणत्या प्रकारचा असतो ? तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण द्या.

सूचना - एक कर्ण काढा आणि एकरूप त्रिकोण तपासा.

10. खालील चौकोनातील कोनांची बेरीज 360° असेल का ? भौमितीक तर्कशास्त्र आणि आकृती काढून व मोजून याचे उत्तर शोधा.

प्रयत्न करा



11. खालीलपैकी विधाने सत्य की असत्य सांगा. तुमच्या उत्तराला कारण द्या.

i) ज्या चौकोनाचे कर्ण समान आहेत आणि एकमेकांना दुभागत असतील तर तो एक चौरस असतो.

ii) ज्या चौकोनाला तीन काटकोन असतात तो आयत असतो.

iii) ज्या चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात तो समांतरभुज चौकोन असतो.

iv) ज्या चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना लंब असतात तो समभुज चौकोन असतो.

v) ज्या चौकोनाचे विरुद्ध कोन समान असतात तो समांतरभुज चौकोन असतो.

vi) ज्या चौकोनाचे सर्व कोन समान असतात तो आयत असतो.

vii) समद्विभुज समलंब चौकोन हे समांतरभुज चौकोन असतात.

सारांश [Summery]

- **आयत** एक असा चौकोन आहे त्याचे सर्व कोन 90^0 चे असतात.

आयताचे गुणधर्म -

- आयताच्या विरुध्द बाजू समान असतात.
- आयताच्या विरुद्ध बाजू एकमेकांना समांतर असतात.
- आयताचे कर्ण समान लांबीचे असतात आणि ते एकमेकांना दुभागतात.

- **चौरस** असा चौकोन आहे की ज्यामध्ये सर्व कोन 90^0 चे आणि सर्व बाजू समान लांबीच्या असतात.

चौरसाचे गुणधर्म -

- चौरसाच्या समोरील बाजू एकमेकांना समांतर असतात.
- चौरसाचे कर्ण समान लांबीचे असतात आणि ते एकमेकांना 90^0 मध्ये दुभागतात.
- चौरसाचे कर्ण चौरसाच्या कोनांना दुभागतात.

■ **समांतरभुज चौकोन** एक असा चौकोन आहे ज्यामध्ये विरुद्ध बाजू समांतर असतात.

समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म

- समांतरभुज चौकोनाच्या विरुद्ध बाजू समान असतात.
- समांतरभुज चौकोनात लगतच्या कोनांची बेरीज 180° असते आणि विरुद्ध कोन समान असतात.
- समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

■ **समभुज चौकोन** एक असा चौकोन आहे ज्यांच्या सर्व बाजूची लांबी समान असते.

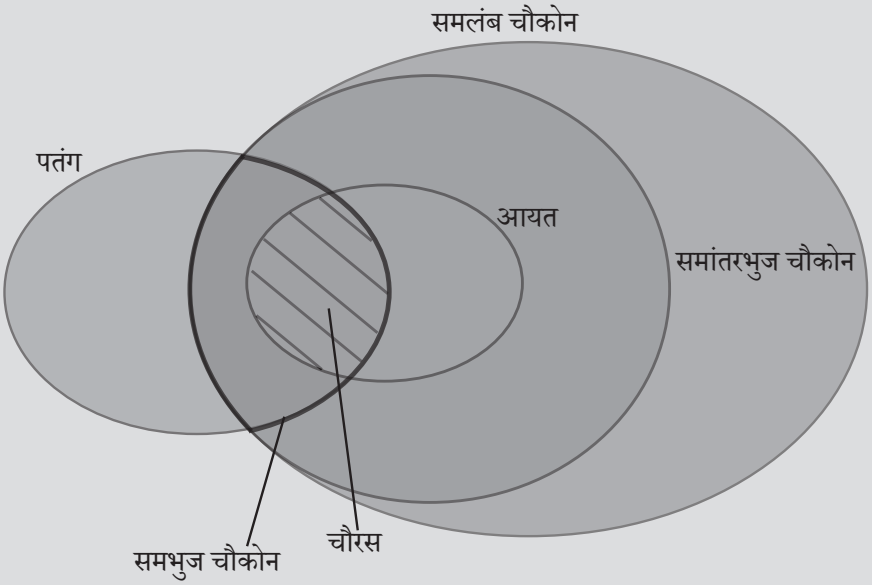
समभुज चौकोनाचे गुणधर्म

- समभुज चौकोनाच्या विरुध्द बाजू एकमेकांना समांतर असतात.
- समभुज चौकोनामध्ये, लगतच्या कोनांची बेरीज 180° असते आणि विरुध्द कोन समान असतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना काटकोनात दुभागतात.
- समभुज चौकोनाचे कर्ण त्याच्या कोनांना दुभागतात.

■ **पतंग** हा एक असा चौकोन आहे ज्याच्या दोन लगतच्या बाजूंच्या जोड्या समान लांबीच्या असतात.

■ **समलंब चौकोन** हा एक असा चौकोन आहे, ज्यामध्ये विरुद्ध बाजूंची किमान एक जोडी समांतर असते.

■ **कोणत्याही** चौकोनातील कोनांच्या मापांची बेरीज 360^0 असेत.



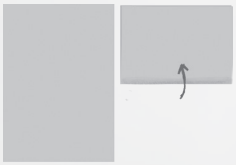


ही कोड्याची वेळ

कोणता चौक / चौरस

खेळ खेळणे :

1) एका कागदाच्या तुकड्याची अर्ध्यामधून घडी घाला.

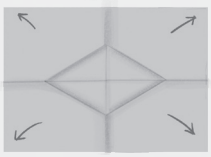




2) आता त्याची पुन्हा एकदा एक चतुर्थांश भागातून घडी घाला.

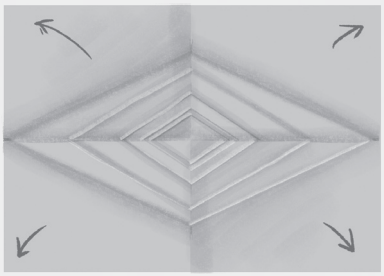
3) कागदाच्या मध्यभागातून त्याच्या कोपऱ्यामधून एक त्रिकोणाकार दुमडा.





4) कागदाची घडी उघडा दुमडल्यामुळे तयार झालेला आकार कोणता आहे ?

5) खालील प्रतिमेत दर्शविल्याप्रमाणे दुमडलेल्या घडीचे प्रकार मिळविण्यासाठी तुम्ही चतुर्थांश कागदाची घडी कशी कराल ?



6) एक चौरस तयार होण्यासाठी चतुर्थांश कागदाची घडी कशी कराल ?



5 संख्यांचा खेळ (Number Play)

I2E2J7

5.1 हे पटीत आहेत का ? [Is This a Multiple Of?]

क्रमगत संख्यांची बेरीज : [Sum of Consecutive Numbers]

अंशु हा क्रमगत संख्यांच्या बेरजेचा शोध घेत आहे. तो खालीलप्रमाणे लिहीतो.

$$7 = 3 + 4$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$12 = 3 + 4 + 5$$
$$15 = 7 + 8$$
$$= 4 + 5 + 6$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

आता तो विचार करीत आहे.

- "मी प्रत्येक नैसर्गिक संख्या ही क्रमगत संख्यांची बेरीज म्हणून लिहू शकतो का ?"
- "एकापेक्षा जास्त प्रकारे मी कोणत्या संख्या या क्रमगत संख्यांची बेरीज म्हणून लिहू शकतो ?"
- "अरेरे मला माहित आहे की सर्व विषम संख्या या दोन क्रमगत संख्यांची बेरीज म्हणून लिहु शकतो. सर्व सम संख्या या क्रमगत संख्यांची बेरीज म्हणून आम्ही लिहु शकतो का ?"
- "मी क्रमगत संख्यांची बेरीज म्हणून 0 लिहु शकतो का? कादाचित मी ऋण संख्या वापरु शकतो."

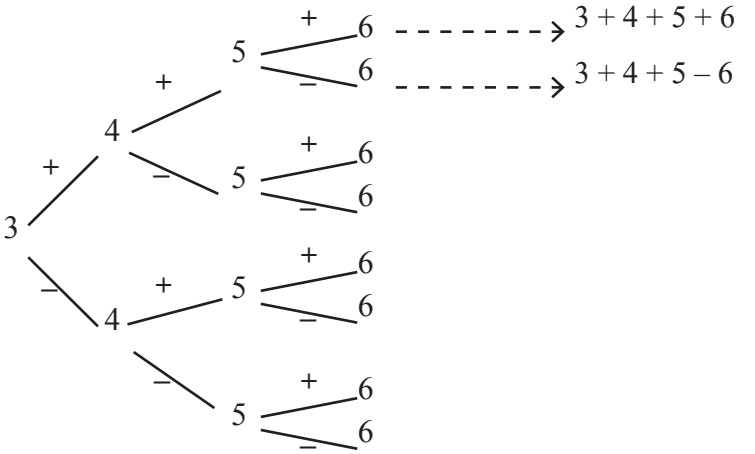
? या प्रश्नांचा आणि इतर उदभवणाऱ्या प्रश्नांचा शोध तुम्ही घ्या. वर्गात त्याची चर्चा करा.

गणिती बोल

? कोणत्याही 4 क्रमगत संख्या घ्या. उदाहरणार्थ 3, 4, 5 आणि 6. या संख्यामध्ये '+' आणि '-' ही चिन्हे ठेवा. किती वेगवेगळ्या शक्यता अस्तित्वात आहेत ? त्या सर्व लिहा.

$$3 + 4 - 5 + 6$$
$$3 - 4 - 5 - 6$$

अशा आठ पदावली शक्य आहेत. खालील आकृतीचा उपयोग करून तुम्ही सर्व शक्यतांची पध्दतशीरपणे यादी करु शकता.



? प्रत्येक पदावलीचे मूल्यांकन करा आणि त्याचा निकाल पुढे लिहा तुम्हाला कांही मनोरंजक आढळले का ?

? आता आणखी चार क्रमगत संख्या घ्या. अगोदर तुम्ही केल्याप्रमाणे '+' आणि '-' चिन्हे ठेवा. तुम्ही निरीक्षण केलेल्या प्रत्येक पदावलीचा निकाल काढा.

गणिती बोल

? क्रमवार 4 संख्यांच्या आणखी एका सटासाठी याची पुनरावृत्ती करा. तुमच्या निष्कर्षाची देवाणघेवाण करा.

3 + 4 – 5 + 6 = 8	5 + 6 – 7 + 8 = 12	__ + __ – __ + __ = __
3 – 4 – 5 – 6 = – 12	5 – 6 – 7 – 8 = – 16	__ – __ – __ – __ = __
.	.	.
.	.	.
.	.	.

क्रमवार 4 निवडलेल्या संख्या कोणत्याही असल्या तरी त्यांची नेहमीच बेरीज होते. ते मनोरंजक नाही का ?

? क्रमवार 4 संख्या निवडल्या तरी हे नमुने घडतात का? तर्काद्वारे शोधण्याचा कांही मार्ग आहे का ?

सूचना : बीजगणिताचा वापर करा आणि 8 पदावलींचे सामान्य स्वरुपात वर्णन करा.

तुमच्या कदाचित लक्षात आले असेलच की सर्व पदावलींचे निकाल हे नेहमी सम संख्या असतात. सम संख्यांचा 2 हा एक अवयव असतो. ऋण संख्यांचा अवयव 2 असणाऱ्या संख्या देखील सम संख्या असतात. उदाहरणार्थ -2, -4, -6, आणि इत्यादी.

जर तुमच्या वर्गात कोणाला विषम संख्या मिळाली आहे ते तपासा.

जेव्हा 4 क्रमवार संख्या निवडल्या जातात तेव्हा त्यांच्यामध्ये '+' आणि '-' चिन्हे कशीही मांडली तरी परिणामी पदावलीमध्ये नेहमीच सम समानता असते.

आता कोणत्याही 4 संख्या घ्या, '+' आणि '-' चिन्हे घेऊन आठ वेगवेगळ्या प्रकारे मांडली आणि परिणामी पदावलीचे मूल्यांकन करा. त्याच्या समानतेबद्दल तुमचे निरीक्षण काय आहे?

4 संख्यांच्या इतर सटासाठी याची पुनरावृत्ती करा.

(?) हे का घडते हे स्पष्ट करण्यांचे कांही मार्ग आहेत का ?



सूचना: दोन संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकीच्या समानतेसाठी नियमांचा विचार करा.

स्पष्टीकरण 1: a, b, c आणि d या चार संख्यांनी तयार झालेल्या 8 पदावलीपैकी कोणत्याही एकाचा विचार करूया जेव्हा त्यातील एक चिन्ह बदलले जाते तेव्हा त्यांचे मूल्य नेहमीच सम संख्येने वाढते किंवा कमी होते! का ते पाहुया.

a + b - c - d या एका पदावलीचा विचार करा.

+ b ऐवजी - b ने बदलल्यास आम्हाला मिळते

$$a - b - c - d$$

(a + b - c - d) - (a - b - c - d) असा बदल केल्यास संख्या कितीने बदलते ?

$$= a + b - c - d - a + b + c + d$$

(दुसऱ्या कंसाचा सट आम्ही सोडवितो तेव्हा चिन्हे कशी बदलतात ते पहा.)

$$= 2b \text{ (ही सम संख्या आहे)}$$

जर दोन संख्यामधील फरक सम असेल तर त्यांच्यामध्ये वेगवेगळी समानता असू शकते का ? नाही! म्हणजे दोन्ही सम आहेत किंवा दोन्ही विषम आहेत.

आता जेव्हा ऋण चिन्ह हे धन चिन्हात बदलले जाते तेव्हा काय होते ते पाहुया.

(?) a + b - c - d या पदावलीतील कोणतेही ऋण चिन्ह हे धन चिन्हात बदला आणि दोन्ही संख्यामधील फरक काढा.

(?) या निरीक्षणावरुन तुम्ही कोणता निष्कर्ष काढाल ?

कोणत्याही पदावलीपासून सुरुवात करून एक किंवा अधिक '+' आणि '-' चिन्हे बदलून आम्हाला 7 पदावली मिळू शकतात. अशाप्रकारे सर्व पदावलींची समानता सारखीच (समान) असते!

स्पष्टीकरण 2: आम्हाला माहित आहे की

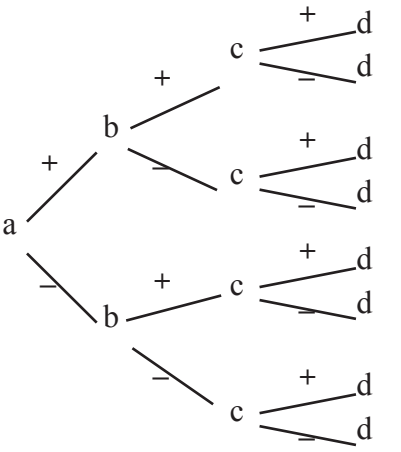
विषम $\pm$ विषम = सम

सम $\pm$ सम = सम

विषम $\pm$ सम = विषम

आपण पाहिले आहे की a आणि b च्या समानतेकडे दुर्लक्ष करून $a + b$ आणि $a - b$ ची समानता समान आहे. थोडक्यात $a \pm b$ ची समानता समान आहे.

त्याच युक्तीवादाने $a \pm b + c$ आणि $a \pm b - c$ ची समानता समान आहे हे पुढे वाढविल्यास (चालू ठेवल्यास) आम्ही असे म्हणू शकतो की $a \pm b \pm c \pm d$ या सर्व पदावलींची समानता समान आहे.



स्पष्टीकरण 3: पूर्णांकांच्या प्रकरणात तुम्ही अभ्यासलेल्या धन आणि ऋण बिल्ल्याच्या नमुन्याचा वापर करून देखील हे स्पष्ट केले जाऊ शकते. ते कसे यांचे विचार करण्याचा प्रयत्न करा.

'+' आणि '-' या चिन्हांचा वापर करून a, b, c, d या 4 संख्या निवडण्याच्या आणि त्यांना एकत्र करण्याच्या प्रकारांची संख्या अनंत आहे. गणितीय तर्क आपल्याला हे सिद्ध करण्यास अनुमती देतो की $a \pm b \pm c \pm d$ या सर्व संवेशामध्ये एकानंतर एक असे न जाता नेहमीच सारखीच समानता असते.



गणितातील अनेक समस्यांवर वेगवेगळ्या प्रकारे विचार करता येतो आणि वेगवेगळ्या प्रकारे सोडविता येतात. जेव्हा तुम्ही शोधलेली पध्दत तुम्हाला प्रिय असली तरी, इतरांनी त्याबद्दल काय विचार केला आहे हे जाणून घेणे मनोरंजक आणि समृद्ध करणारे असू शकते. दोन मुद्यांची देवाणघेवाण करा आणि ऐका.

? सर्व पदावलीमध्ये समान समानता असण्याची घटना केवळ 4 संख्या घेण्यापुरती मर्यादित आहे का ? तुम्ही काय विचार कराल ?



जर काय होईल.....? हे नेहमीच घडेल का ? प्रश्न विचारणे आणि अनुमाने काढणे हे जितक्या समस्या सोडविणे तेवढाच एक गणिताचा भाग आहे.

सम संख्यांचे विभाजन : [Breaking Even]

सम संख्या कशा ओळखणे हे आम्हाला माहित आहे. त्यांची गणना न करता खालीलपैकी कोणत्या अंकगणितीय पदावली सम आहेत ते काढा.

$43 + 37$	$672 - 348$	$4 \times 347 \times 3$	$708 - 477$
$809 + 214$	119×303	$543 - 479$	513^3

? वेगवेगळ्या क्रियांमध्ये समानतेचे वर्तन कसे असते याबद्दलच्या आपल्या आकलनाचा वापर करून खालीलपैकी कोणत्या बैजिक पदावल्या मूळाक्षर-संख्येच्या कोणत्याही पूर्णांकी किंमतीसाठी सम संख्या देतात हे ओळखा.

$2a + 2b$	$3g + 5h$	$4m + 2n$	$2u - 4v$	
$13k - 5k$	$6m - 3n$	$x^2 + 2$	$b^2 + 1$	$4k \times 3j$

m आणि q च्या कोणत्याही पूर्णांकी किंमतीसाठी $4m + 2q$ ही पदावली नेहमीच सम संख्येत मोजली जाईल. आपण हे दोन वेगवेगळ्या प्रकारे सिद्ध करू शकतो.

- m आणि q या कोणत्याही पूर्णांकांसाठी 4m आणि 2q हे सम आहेत हे आम्हाला माहित आहे. म्हणून त्यांची बेरीज देखील सम असते.
- $4m + 2q$ ही पदावली $2 (2m + q)$ या पदावलीशी समान आहे. येथे $2 (2m + q)$ ही पदावली म्हणजे $(2m + q)$ ची दुप्पट होय. दुसऱ्या शब्दात 2 हा या राशीचा एक अवयव आहे. म्हणून ही राशी m आणि q च्या कोणत्याही पूर्णांकांसाठी नेहमीच सम संख्या देईल.

उदाहरणार्थ जर $m = 4$ आणि $q = -9$ तर $4m + 2q$ ही पदावली $4 \times 4 + 2 \times (-9) = -2$ होईल जी एक सम संख्या आहे.

$x^2 + 2$ या पदावलीमध्ये जर x सम असल्यास x^2 हे सम आहे आणि जर x विषम असल्यास x^2 हे विषम आहे. म्हणून $x^2 + 2$ ही पदावली नेहमी सम संख्या देणार नाही.

जेव्हा पदावली सम संख्येपर्यंत मूल्यांकन करते तेव्हा एक उदाहरण आणि नसलेले एक उदाहरण

(i) जर $\times = 6$ असेल तर $x^2 + 2 = 38$ आणि

(ii) जर $\times = 3$ असेल तर $x^2 + 2 = 11$

? त्याचप्रमाणे इतर कोणत्या पदावल्या नेहमी सम संख्या देतात ते ठरवा आणि स्पष्ट करा. प्रत्येक पदावली योग्य असल्यास कांही उदाहरणांची जोडी आणि नसलेली उदाहरणे लिहा.

? नेहमी सम संख्या देणाऱ्या कांही बैजिक पदावल्या लिहा.

चारच्या पटीत बनविण्यासाठी जोड्या : [Pairs to Make Fours]

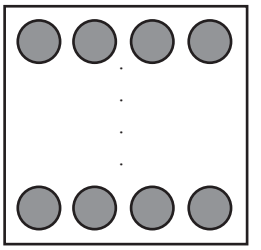
? सम संख्यांची एक जोडी घ्या. त्यांची बेरीज करा. बेरजेला 4 ने भाग जातो का ?

वेगवेगळ्या सम संख्यांच्या जोड्यांसाठी याचा प्रयत्न करा.

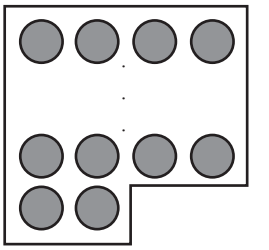
केंव्हा बेरीज ही 4 च्या पटीत असते आणि कधी नसते ?

तेथे एक सामान्य नियम किंवा नमुना आहे का ?

सम संख्यांना 4 ने भागल्यास शिल्लक राहिलेल्या बाकीच्या आधारावर ते दोन प्रकारचे असू शकतात.



जेव्हा 4 च्या पटीत असलेल्या सम संख्यांना 4 ने भागल्यास बाकी 0 राहते.

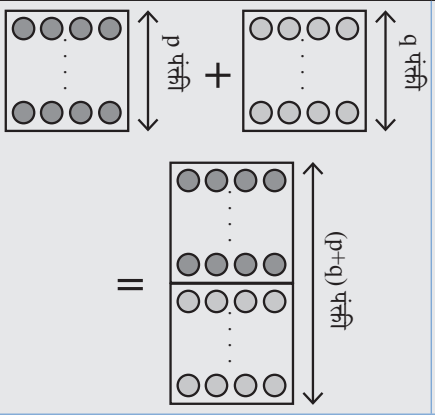
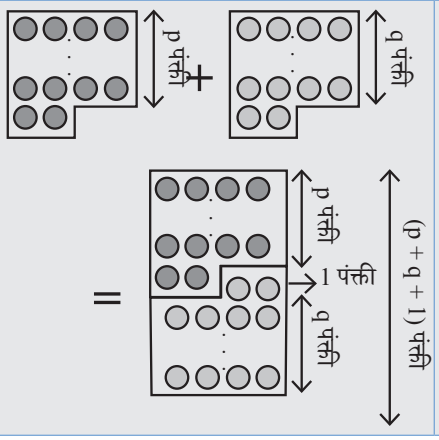


जेव्हा 4 च्या पटीत नसलेल्या सम संख्याना 4 ने भागल्यास बाकी 2 राहते.

? दोन सम संख्यांची बेरीज 4 च्या पटीत केंव्हा होईल ?

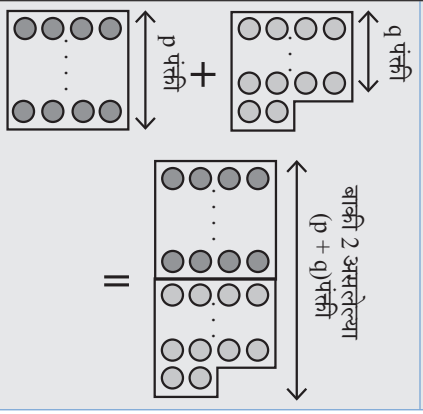
हा प्रश्न दोन संख्यांची बेरीज केली असता सम संख्या येते. हे ओळखण्याच्या प्रश्नासारखेच आहे. तुम्ही हे पाहु शकता ?

परीक्षणासाठी तीन घटना आहेत.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
4 च्या पटीत असलेल्या दोन (सम) संख्यांची बेरीज केली असता नेहमीच 4 च्या पटीत येईल.	4P आणि 4q 4P + 4q = 4 (p+q)		4, 12, 16, 24, 36 12 + 16 = 4 (3 + 4) = 28 16 + 28 = 4 (4 + 7) = 44
4 च्या पटीत नसलेल्या दोन सम संख्यांची बेरीज केल्यास नेहमीच 4 च्या पटीत येईल कारण त्यांच्या 2 बाकींची बेरीज 4 होते.	(4P+2) आणि (4q+2) (4p + 2) + (4q + 2) = 4p + 4q + 4 = 4 (p + q + 1)		2, 6, 10, 18, 22, 42 2 + 6 = 8 6 + 10 = 16 22 + 6 = 28

जेव्हा आपण 4 च्या पटीत नसलेल्या सम संख्येत 4 च्या पटीतील संख्या मिळवितो तेव्हा काय होते ? हे सम आणि विषम संख्येच्या बेरजेच्या समानतेच्या बाबतीत हे समरूप आहे काय ?

(?) खालील पदावल्या आणि दृश्यीकरणाकडे पहा. संगत स्पष्टीकरण आणि उदाहरणे लिहा.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
	4p आणि (4q + 2) = 4p + (4q + 2) = 4p + 4q + 2 = 4 (p + q) + 2		

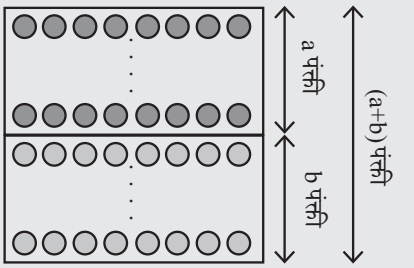
बीजगणित आणि दृश्यीकरण वापरून सुध्दा आपण अंकगणिताच्या गुणधर्मांचे कसे सामान्यीकरण करु शकतो आणि सिध्द करू शकतो ते पहा.

नेहमी, कांही वेळेला किंवा कधीही नाही.

? आम्ही अवयवाविषयी आणि च्या पटीत असणाऱ्या वेगवेगळ्या विधानांचे परीक्षण करतो आणि एखादे विधान हे नेहमी सत्य, कांहीवेळेला सत्य किंवा कधीही सत्य नाही हे निर्धारीत करतो.

आपल्याला माहित आहे की 2 च्या पटीतील कोणत्याही दोन संख्यांची बेरीज सुध्दा 2 च्या पटीत असते.

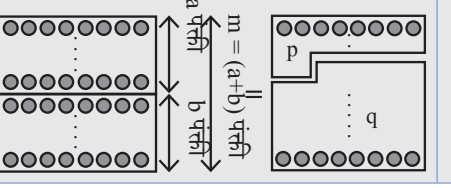
? 1. जर 8 ने वेगवेगळ्या दोन संख्यांना अचूकपणे भाग जात असेल तर त्यांच्या बेरजेला देखील अचूकपणे भाग जातो.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
दोन संख्यांचा 8 हा एक अवयव आहे. दुसऱ्या शब्दात दोन संख्या 8 च्या पटीत आहेत.	8a आणि 8b		8 आणि 16 16 आणि 56 80 आणि 120
8 च्या पटीत मिळणाऱ्या पुनरावृत्तीत संख्याची बेरीज 8 मिळते तर 8 च्या पटीतील दोन संख्यांची बेरीज सुध्दा 8 च्या पटीत असते.	8a + 8b = 8 (a + b)		8 + 16 = 8(1 + 2) = 24 16 + 56 = 72 80 + 120 = 200

विधान 1 हे नेहमीच सत्य आहे. जर ते सत्य असेल तर वजाबाकीसाठी निश्चित करा.

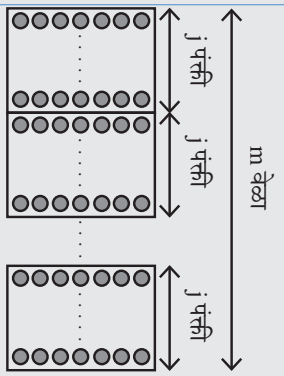
सर्व साधारणपणे जर a ने M ला भाग जातो आणि a ने N ला भाग जातो तर a ने M + N ला भाग जातो आणि a ने M - N ला भाग जातो. दुसऱ्या शब्दात जर M आणि N हे a च्या पटीत असतील. तर M + N आणि M - N हे देखील a च्या पटीत असतील.

? 2. जर एका संख्येला 8 ने भाग जातो तर 8 ने कोणत्याही दोन संख्यांना स्वतंत्रपणे व त्यांच्या बेरजेला सुध्दा भाग जातो.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
8 ने भाग जाणारी संख्या ही 8 च्या पटीत असते.	8m		8, 16, 56, 72
8 ने भाग जाणारी एक संख्या 8 च्या पटीतील 2 संख्यांची बेरीज किंवा 8 च्या पटीत नसलेल्या 2 संख्यांच्या बेरजेत दर्शविता येते.	8m = 8a + 8b 8m = p + q (p, q हे 8 च्या पटीत नाहीत)		72 = 48 + 24 8×9 = (8×6 + 8×3) 72 = 50 + 22

म्हणून विधान 2 हे काही वेळेला सत्य आहे.

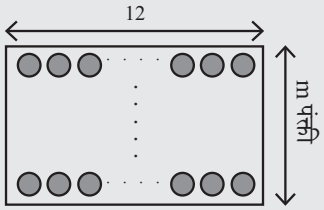
(?) 3. जर एका संख्येला 7 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येच्या सर्व पटीतील संख्याना 7 ने भाग जातो.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
7 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांना 7 हा एक अवयव असतो.	7j		14 = 7 × 2 (j = 2) 42 = 7 × 6 (j = 6) 98 = 7 × 14 (j = 14)
यामध्ये एकूण mj पंक्ती असतात. म्हणून हे सुध्दा 7 च्या पटीत आहे.	(7j) × m		14 च्या पटीतील कांही संख्या 28 = (7 × 2) × 2 70 = (7 × 2) × 5 154 = (7 × 2) × 11

7jm किंवा (7 × j × m) या संख्येचा 7 हा एक अवयव आहे. आम्हाला असे दिसून येते की विधान 3 हे नेहमी सत्य आहे.

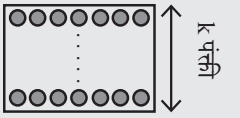
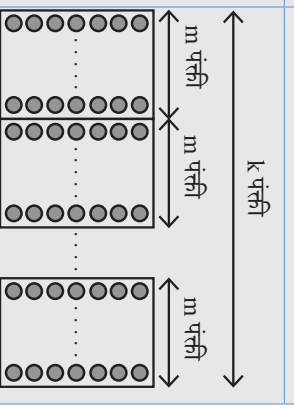
सर्व सामान्यपणे जर A ला K ने भाग जातो तर A च्या पटीतील सर्व गुणकाना K ने भाग जातो.

(?) 4. जर एका संख्येला 12 ने भाग जात असेल तर 12 च्या सर्व अवयवांनी सुध्दा त्या संख्येला भाग जातो.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
12 ने भाग जाणारी 1 संख्या ही 12 च्या पटीत असते.	12m		12, 24, 36, 48, 108, 132
12 च्या पटीतील गुणकामध्ये 12 चे अवयव समाविष्ट असतील.	12m = 2 × 6 × m = 3 × 4 × m	 12 च्या अवयवानी एक पंक्ती व्यापलेली आहे. म्हणून 12 च्या पटीतील सर्व गुणक ते व्यापते.	24 चे अवयव : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

सर्वसामान्यपणे जर A ला K ने भाग जातो तर A ला K च्या सर्व अवयवानी भाग जातो. म्हणून विधान 4 हे नेहमी सत्य आहे.

? 5. जर एका संख्येला 7 ने भाग जात असेल तर 7 च्या कोणत्याही गुणकांनी सुद्धा त्याला भाग जातो.

बीजगणित आणि दृश्यीकरणासह स्पष्टीकरण			उदाहरणे
7 ने भाग जाणाऱ्या संख्या 7 च्या पटीत असतात.	7k		
7 च्या पटीतील गुणक. जर m हा k चा एक अवयव असेल तरच 7k ला 7m ने भाग जाईल.	7m जर k = 7m तर 7k ÷ 7m = 7ym ÷ 7m = y		42 (7×6) ला 7 ने भाग जातो परंतु 28 (7×4) ला भाग जात नाही. 42 (7×6) ला 7 ने भाग जातो आणि त्याला 14 (7×2) ने भाग जातो.

आम्हाला असे दिसून येते की हे विधान फक्त कांही वेळेला सत्य आहे.

? खालील प्रत्येक विधानांचे निरीक्षण करा आणि ते 'नेहमी सत्य' 'कांही वेळेला सत्य', 'कधीही सत्य नाही' हे ठरवा.



? **6.** जर एका संख्येला 9 आणि 4 या दोन्ही संख्यांनी भाग जात असेल तर तिला 36 ने भाग जात असला पाहिजे.

? **7.** जर एका संख्येला 6 आणि 4 या दोन्ही संख्यांनी भाग जात असेल तर तिला 24 ने भाग जात असला पाहिजे.

सर्व सामान्यपणे जर A ला K ने भाग जात असेल तर आणि A ला M ने सुध्दा भाग जात असेल तर A ला K आणि M च्या ल.सा.वि. ने भाग जातो. यांचे कारण A हा K चा गुणक आहे आणि M चा देखील गुणक आहे. म्हणून A च्या अविभाज्य अवयवीकरणामध्ये (k, m) च्या ल.सा.वि. चे अविभाज्य अवयवीकरण असले पाहिजे.

? **8.** जेव्हा तुम्ही विषम संख्येमध्ये सम संख्या मिळविता तेव्हा आम्हाला 6 चे गुणक मिळतात.

आम्हाला माहित आहे की 6 चे गुणक सर्व सम संख्या असतात. विषम संख्येची आणि सम संख्येची बेरीज ही विषम संख्या असते. म्हणून हे विधान कधीही सत्य नाही. यांचे बैजिकरित्या सुद्धा आपण वर्णन करु शकतो.

समजा $(2n) + (2m+1) = 6j$



जेथे 2n ही सम संख्या आहे, 2m+1 ही विषम संख्या आहे आणि 6j हा 6 चा एक गुणक आहे. तर

$$2n + 2m = 6j - 1$$

$$2(n + m) = 6j - 1$$

2 (n+m) चा अर्थ ही एक सम संख्या आहे जी 6j - 1 शी समान असावी जी एक विषम संख्या आहे हे कधीही सत्य नाही.

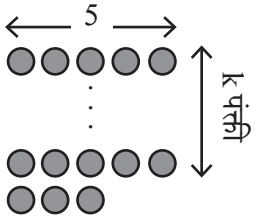
काय शिल्लक राहिले ?

? जेव्हा 5 ने भागल्यास बाकी 3 राहणारी एक संख्या काढा. अशा आणखी संख्या लिहा.

? कोणत्या बैजिक पदावलीने सर्व अशा संख्या मिळविता येतात ?

(i) $3k + 5$ (ii) $3k - 5$ (iii) $\frac{3k}{5}$ (iv) $5k + 3$ (v) $5k - 2$ (vi) $5k - 3$

जेव्हा 5 ने भागल्यास बाकी 0 राहणाऱ्या संख्या या 5 च्या पटीत असतात. परंतु आपणास 5 ने भागल्यास बाकी 3 राहणाऱ्या संख्या हव्या आहेत. या संख्या 5 च्या पटीपेक्षा 3 ने अधिक आहेत. 5 च्या पटीतील संख्या या 5k या स्वरुपात असतात. म्हणून 5 ने भागल्यास बाकी 3 असणाऱ्या संख्या 5k+3 या स्वरुपात असतात.



k =	0	1	2	3	4
5k + 3 =	3	8	13	18	23

? 5k - 2 या दुसऱ्या पदावलीचा विचार करुया आणि K च्या वेगवेगळ्या किंमतीसाठी याच्या किंमती पाहु.

k =	1	2	3	4	5
5k – 2 =	3	8	13	18	23

जेव्हा 5 ने भागल्यास बाकी 3 राहणाऱ्या संख्या या 5 च्या पटीपेक्षा 2 ने कमी असे सुध्दा पाहिले जाऊ शकते.

5k - 2 जेथे $k \geq 1$ आहे.

? 5 च्या पटीपेक्षा 3 ने जास्त संख्या निर्माण करणाऱ्या इतर कांही पदावल्या आहेत का ?

? शोधा पाहू. [Figure it Out]

1) चार क्रमवार संख्यांची बेरीज 34 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या ?

2) समजा P ही क्रमवार पाच संख्यापैकी मोठी संख्या आहे. तर P च्या स्वरुपातील इतर चार संख्यांचे वर्णन करा.

3. खालील प्रत्येक विधानासाठी ते नेहमीच सत्य आहे का, कांही वेळेला सत्य किंवा कधीही सत्य नाही यांचे निर्धारन करा. योग्य असलेली आणि योग्य नसलेली उदाहरणे सांगा. बीजगणिताचा उपयोग करून तुमच्या दाव्यांचे समर्थन करा.

   (i) दोन सम संख्यांची बेरीज ही 3 च्या पटीत असते.

   (ii) जर एका संख्येला 18 ने भाग जात नसेल तर त्या संख्येला 9 ने सुध्दा भाग जात नाही.

   (iii) जर दोन संख्यांना 6 ने भाग जात नसेल तर त्यांच्या बेरजेला 6 ने भाग जात नाही.

   (iv) 6 आणि 9 च्या पटीतील बेरीज ही 3 च्या पटीत असते.

   (v) 6 आणि 3 च्या पटीतील बेरीज ही 9 च्या पटीत असते.

4. जेव्हा 3 ने भागल्यास 2 बाकी शिल्लक राहणाऱ्या कांही संख्या आणि 4 ने भागल्यास 2 बाकी शिल्लक राहणाऱ्या कांही संख्या काढा. अशा संख्यांचे वर्णन करणारी बैजिक पदावली लिहा.

5. "माझ्यात कांही खडे मावतात, फार जास्त नाही. जेव्हा मी 3 चा गट करतो तेव्हा माझ्याकडे एक शिल्लक राहतो. जोडी करण्याचा प्रयत्न करा. साधेपणाने ते चालणार नाही. माझ्यामते एक हट्टी विचित्र खडा अजूनही आहे. जेव्हा 5 चा गट केल्यास तरीही एक अजूनही माझ्याकडे आहे. परंतु सात चे गट केल्यास परिपूर्णता तेथे आढळते. शंभरपेक्षा जास्त खूप धाडसी ठरेल. तर माझ्यात किती खडे मावू शकतात त्याची संख्या तुम्ही सांगू शकाल ?"



6. 6 ने भागल्यास बाकी 2 राहणाऱ्या अशा अनेक संख्या तथागतांनी लिहीलेल्या आहेत. "जर तुम्ही अशा कोणत्याही तीन संख्यांची बेरीज केली तर बेरीज नेहमीच 6 च्या पटीत असेल." तथागतांचा दावा खरा आहे का?

7. जेव्हा 661 या संख्येला 7 ने भागल्यास बाकी 3 आणि 4779 या संख्येला 7 ने भागल्यास बाकी 5 राहते. हिशेब न करता जेव्हा 7 ने भागले असता खालील पदावल्या कोणती बाकी शिल्लक ठेवतात हे तुम्ही सांगू शकाल का ?

   बैजिकरित्या आणि दृश्यीयरित्या अशा दोन्ही उकली दर्शवा.

   (i) $4779 + 661$ (ii) $4779 - 661$

8. जेव्हा 3 ने भागल्यास बाकी 2 राहणारी, जेव्हा 4 ने भागल्यास बाकी 3 राहणारी आणि 5 ने भागल्यास बाकी 4 राहणारी एक संख्या काढा. लहानात लहान अशी संख्या कोणती ? ती लहानात लहान संख्या का आहे यांचे साधे स्पष्टीकरण तुम्ही देऊ शकाल का ?

5.2 विभाज्यता जलद तपासणे : [Checking Divisibility Quickly]

भारतीय संख्या पध्दतीमध्ये लिहीलेल्या दिलेल्या एखाद्या संख्येला 2, 4, 5, 8 आणि 10 ने भाग जातो किंवा नाही हे तपासण्यासाठी तुम्ही यापूर्वी जवळचा मार्ग तुम्ही अभ्यासला आहात. त्याला आता पुनर्भेट देऊया.

10, 5 आणि 2 ची विभाज्यता: जर एका संख्येचा एकम स्थानातील अंक 0 असेल तर त्या संख्येला 10 ने भाग जातो. हे बीजगणिताद्वारे का कार्य करते ते आपण समजून घेऊया.

भारतीय पध्दतीमध्ये आपण मूळाक्षर - संख्यांच्या सटाचा उपयोग करून एका संख्येचे आम्ही सामान्य रुप लिहु शकतो. उदाहरणार्थ एक e, d, c, b, a ही पाच अंकी संख्या $e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a \times 1$ अशी दर्शविता येते. e, d, c, b, आणि a ह्या मूळाक्षर - संख्या 5 अंकी संख्येची प्रत्येक संख्या दर्शविते.

कोणतीही संख्या सर्वसाधारणपणे..... dcba अशी लिहीता येते. जेथे, a, b, c आणि d मूळाक्षर - संख्या अनुक्रमे एकम, दशम, शतम आणि सहस्त्र अंक दर्शवितात आणि इत्यादी.

स्थान मूल्यांची बेरीज म्हणून $1000d + 100c + 10b + a$ ही संख्या आहे.

(उदाहरणार्थ 4075 या संख्येमध्ये d=4, c=0, b=7 आणि a=5)

आपल्याला माहित आहे की प्रत्येक स्थानमूल्य एकक स्थान वगळता 10 च्या पटीत आहे. म्हणून 10b, 100c,----- हे सर्व 10 च्या पटीत असतील. म्हणून जर एकक अंक 0 असेल तरच त्या संख्येला 10 ने भाग जातो.

? त्याचप्रमाणे 5, 2, 4 आणि 8 साठी जवळच्या मार्गाची विभाज्यता का आहे हे बीजगणिताचा उपयोग करून यांचे वर्णन करा.

आता आपण इतर कांही संख्यांची विभाज्यता तपासण्यासाठी जवळचा मार्ग पाहु आणि ते का कार्य करतात ते स्पष्ट करुया.

9 च्या विभाज्यतेची लघुत्तम पध्दत : [A Shortcut for Divisibility by 9]

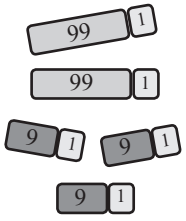
? प्रत्यक्ष हिशेब न करता 9, 999, 909, 900, 90, 990 यापैकी कोणत्या संख्यांना 9 ने भाग जातो हे तुम्ही सांगू शकाल ? ते सर्व.

फक्त 0 आणि 9 या अंकानी बनलेल्या कोणत्याही क्रमातील कोणत्याही संख्येला नेहमीच 9 ने भाग जातो असे आम्ही सांगू शकतो का ?

होय, जर प्रत्येक अंक हा 0 किंवा 9 असेल तर प्रत्येक पद हे त्यांच्या विस्तारीत स्वरुपात $9 \times \square$ किंवा $0 \times \square$ असेल. ('$\square$' हे स्थान मूल्य दर्शविते.) याचा अर्थ असा की प्रत्येक पद हे 9 च्या पटीत आहे. उदाहरणार्थ

$$99009 = 9 \times 10000 + 9 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1.$$

परंतु या केवळ जवळच्या मार्गाने 9 चे सर्व गुणक ओळखता येत नाहीत. 2, 5 आणि 10 या संख्याप्रमाणे आपण फक्त एकक अंक पाहुन 9 चे गुणक ओळखू शकत नाही. 99 आणि 109 या दोन संख्या आहेत ज्यांचे एकक अंक 9 आहे परंतु 99 ला 9 ने भाग जातो परंतु 109 ला 9 ने भाग जात नाही.



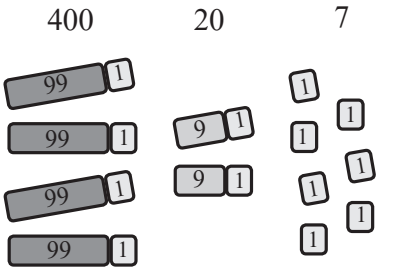
(?) 10 ला 9 ने भाग जातो का ? जर नाही तर बाकी किती ? 10 च्या (10, 20, 30, ...) इतर गुणकांची विभाज्यता 9 ने तपासा.

तुमच्या असे लक्षात येईल की 10 च्या पटीतील कोणत्याही गुणकासाठी संख्या 10 प्रमाणे बाकी समान आहे.

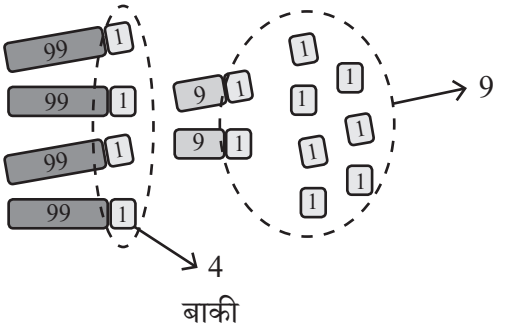
(?) त्याचप्रमाणे जेव्हा 100 च्या पटीतील (100, 200, 300, ...) संख्यांना 9 ने भागले असता मिळणाऱ्या बाकी कडे पहा. तुमच्या काय लक्षात येते ?

100 च्या पटीतील कोणत्याही संख्येची बाकी ही शतक संख्येइतकीच समान असते.

(?) या निरीक्षणाचा उपयोग करून जेव्हा 427 ला 9 ने भागल्यास मिळणारी बाकी काढा.

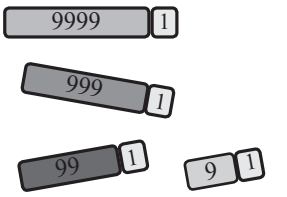


आपण पाहतो की 427 मध्ये 4 शतके आहेत, त्याची संगत बाकी (9 ने भागले तर) 4 असू शकेल, 427 मध्ये 2 दशके आहेत आणि त्याची संगत बाकी 2 असू शकेल. आपल्याकडे 7 एकके सुध्दा शिल्लक आहेत. सर्व बाकी मिळविल्यास 4+2+7 = 13 आम्हाला मिळते. आम्ही 13 सह 9 चा आणखी एक गट बनवू शकतो ज्याची बाकी 4 आहे. म्हणून 427÷9 ची बाकी 9 मिळते.



(?) मोठ्या संख्येसाठी हे कार्य चालू शकेल का ?

कोणत्याही स्थान मूल्यासाठी हे सत्य आहे हे तुम्ही पाहु शकता



1 = 0 + 1

10 = 9 + 1

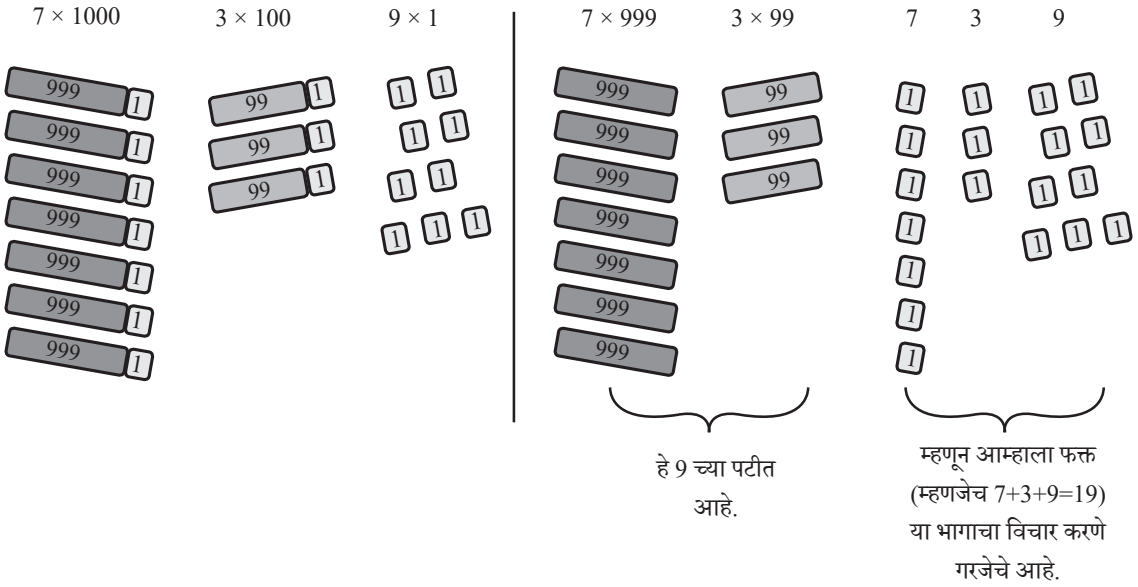
100 = 99 + 1

1000 = 999 + 1

10000 = 9999 + 1 आणि इत्यादी, असेच पुढे.

अशाप्रकारे जेव्हा संगत स्थान मूल्याला 9 ने भागले असता प्रत्येक अंक बाकी दर्शवितो.

उदाहरणार्थ 7309 ला जेव्हा 9 ने भागतो तेव्हा बाकी काढण्यासाठी आम्ही 7+3+0+9 यांची केवळ बेरीज करून 19 मिळवितो. हे खालीलप्रमाणे पाहता येईल.



$7 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$

$= 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 0 \times (9 + 1) + 9 \times (0+1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 9 \times 1)$

$= (\underline{7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0}) + (\underline{7 + 3 + 0 + 9})$

हे 9 च्या पटीत आहे.

म्हणून आम्हाला फक्त या भागाचा विचार करणे गरजेचे आहे.

याचा अर्थ असा की 7309 ही संख्या 9 च्या पटीतील कांही गुणकापेक्षा 19 ने अधिक आहे 1 आणि 9 या अंकांना पुढे मिळविल्यास 1 + 9 = 10 मिळते. आता आम्ही असे सांगू शकतो की 7309 हे 9 च्या पटीतील गुणकापेक्षा 10 ने अधिक आहे. आणि 10 या संख्येसाठी ही पायरी पुन्हा केल्यास आपल्याला बाकी 1+0 = 1 मिळते. म्हणजेच 7309 हे 9 च्या पटीपेक्षा 1 ने अधिक आहे. म्हणून 7309 ÷ 9 ची बाकी 1 मिळते.

जर एखाद्या संख्येला त्यांच्या अंकाच्या बेरजेला 9 ने भाग जात असेल तरच त्या संख्येला 9 ने भाग जातो, आपण एका संख्येंच्या अंकांची वारंवार बेरीज एक अंक मिळेपर्यंत सुध्दा बेरीज करू शकतो. जेव्हा एका संख्येला 9 ने भागले जाते तेव्हा मिळणारा एक अंक ही बाकी आहे.

? खालील प्रत्येक विधानाकडे पहा. कोणती बरोबर आहेत आणि का ?

(i) जर एखाद्या संख्येला 9 ने भाग जात असेल तर त्यांच्या अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग जातो.

(ii) जर एखाद्या संख्येच्या अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येला 9 ने भाग जातो.

(ii) जर एखाद्या संख्येला 9 ने भाग जात नसेल तर त्या संख्येच्या अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग जात नाही.

(iv) जर एखाद्या संख्येच्या अंकांच्या बेरजेला 9 ने भाग जात नसेल तर त्या संख्येला 9 ने भाग जात नाही.



गणिताचे अध्ययन हे फक्त कांही जवळचा मार्ग जाणून घेणे आणि प्रक्रियांचे पालन करणे एवढेच नाही परंतु आकलनाविषयी 'का' कांहीतरी कार्य करणे हे आहे.

शोधा पाहू. [Figure it Out]

1. प्रत्यक्ष भागाकार न करता खालील संख्या 9 ने विभाज्य आहेत का ते काढा.

   (i) 123 (ii) 405 (iii) 8888 (iv) 93547 (v) 358095

2) विषम अंक नसलेला 9 चा सर्वात लहान गुणक काढा.

3) 6000 या संख्येच्या सर्वात जवळचा 9 चा गुणक काढा.

4) 4300 आणि 4400 या संख्यांच्यामध्ये 9 च्या पटीतील किती गुणक आहेत ?

3 च्या विभाज्यतेची लघुत्तम पध्दत : [A Shortcut for Divisibility by 3]

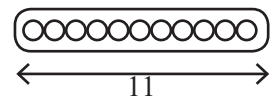
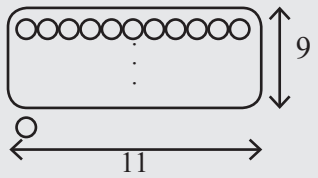
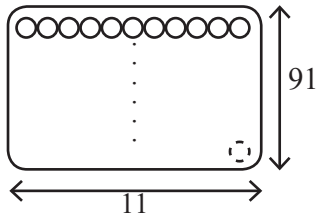
आपल्याला माहित आहे की 9 च्या पटीतील सर्व गुणक हे 3 च्या पटीतील गुणक सुध्दा असतात. म्हणजेच जर एखाद्या संख्येला 9 ने भाग जात असल्यास त्या संख्येला 3 ने सुध्दा भाग जातो. तथापि 9 चे गुणक नसलेले तेथे 3 चे इतर गुणक आहेत. उदाहरणार्थ 15, 33 आणि 87.

3 ची विभाज्यता काढण्याचा जवळचा मार्ग हा 9 च्या पध्दतीशी समरूप आहे. जर त्यांच्या अंकांच्या बेरजेला 3 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येला 3 ने भाग जातो.

जेव्हा 10 च्या घातांकाना 3 ने भागल्यास मिळणाऱ्या बाकीचा शोध घ्या. ही पध्दत का कार्य करते त्यांचे वर्णन करा.

11 च्या विभाज्यतेची लघुत्तम पध्दत [A Shortcut for Divisibility by 11]

मनोरंजक गोष्ट म्हणजे 11 साठीचा जवळचा मार्ग स्थान मूल्यासह बाकी तपासण्याच्या आधारीत आहे. कसे ते पाहुया.

एकम स्थान (1)	$11 \times 0 = 0$ $1 = 11 \times 0 + \mathbf{1}$	1 हे 11 च्या पटीपेक्षा 1 ने अधिक आहे.	
दशम स्थान (10)	$11 \times 1 = 11$ $10 = 11 \times 1 - \mathbf{1}$	10 हे 11 च्या पटीपेक्षा 1 ने कमी आहे.	
शतम स्थान (100)	$11 \times 9 = 99$ $100 = 11 \times 9 + \mathbf{1}$	100 हे 11 च्या पटीपेक्षा 1 ने अधिक आहे.	
सहस्त्र स्थान (1000)	$11 \times 91 = 1001$ $1000 = 11 \times 91 - \mathbf{1}$	1000 हे 11 च्या पटीपेक्षा 1 ने कमी आहे.	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

11 पेक्षा एक ने अधिक आणि 11 पेक्षा एक ने कमी असणारा पर्यायी नमुना हा उच्च स्थान मूल्यांसाठी सुरु राहतो.

400 मध्ये 4 शतके असल्याने 400 हे 11 च्या पटीपेक्षा 4 ने अधिक आहे (396 + 4). 60 मध्ये 6 दशके असल्याने 60 हे 11 च्या पटीपेक्षा 6 ने कमी आहे (66 - 6). 2 मध्ये 2 एकके असल्याने 2 हे 11 च्या पटीपेक्षा 2 ने अधिक आहे म्हणजेच 2 = (0 + 2)

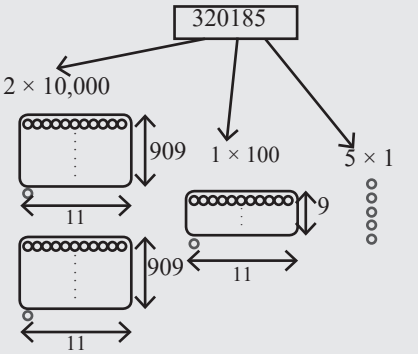
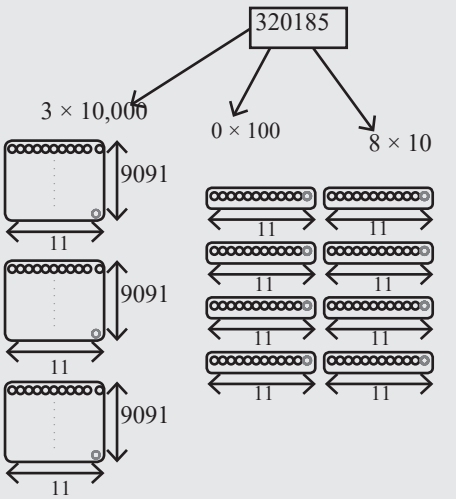
? या निरीक्षणांचा उपयोग करून 462 ला 11 ने भाग जातो का हे तुम्ही सांगू शकाल का ?



? 11 ची विभाज्यता तपासण्याची सामान्य पध्दत किंवा जवळचा मार्ग कोणता असू शकेल ?



11 च्या पटीत 1 ने अधिक आणि 1 ने कमी असणारी पर्यायी स्थान मूल्ये आम्ही पाहिली आहेत. या निरीक्षणांचा वापर करून.

पायऱ्या	हेतू	320185 संख्येचे उदाहरण
1) 1 पेक्षा जास्त असलेल्या स्थान मूल्यांच्या अंकांची बेरीज करा (11 च्या पटीपेक्षा जास्त) म्हणजेच 1, 100, 10000 आणि इत्यादींशी संगत स्थान मूल्ये.	आपण या स्थान मूल्यांच्या किंमतीसाठी 11 च्या पटीतील संबंधित जादा कितीने आहोत हे जाणून घेणे हा आहे.	 एकूण जादा, 2 + 1 + 5 = 8.
2) 1 पेक्षा कमी असलेल्या स्थान मूल्यांच्या अंकांची बेरीज करा (11 च्या पटीपेक्षा जास्त) म्हणजेच 1,100, 10000 आणि इत्यादींशी संगत स्थान मूल्ये.	आपण या स्थान मूल्यांच्या किंमतीसाठी 11 च्या पटीतील संबंधित किती लहान आहोत हे जाणून घेणे हा आहे.	 एकूण कमी, 3 + 0 + 8 = 11.
3) या दोन बेरजेमधील फरक काढा म्हणजे (जादा संख्या) - (कमी संख्या)	जेव्हा 11 ने भागले जाते तेव्हा मिळणारी बाकी जाणून घेणे हा आहे.	 8 – 11 = – 3. (11 च्या पटीपेक्षा 3 ने कमी)

या दोन बेरजेमधील फरक 8 - 11 = -3 असून 328105 ही संख्या 11 च्या पटीपेक्षा 8 ने अधिक किंवा 3 ने कमी आहे हे दर्शविते.

(?) जर हा फरक 11 असेल किंवा 11 च्या पटीत असेल तर त्या संख्येला जेव्हा 11 ने भागल्यास मिळणाऱ्या बाकी विषयी काय सांगाल ?

या जवळच्या मार्गाचा उपयोग करून खालील संख्यांना 11 ने भाग जातो का ते काढा. जर संख्येला 11 ने भाग जात नसेल तर बाकी काढा.

(i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076

खालील प्रक्रियेकडे पहा.

वापरलेल्या पायऱ्या	328105 संख्येचे उदाहरण
1. एकक अंकापासून सुरुवात करून प्रत्येक अंकापूर्वी '+' किंवा '-' ही चिन्हे आळीपाळीने ठेवा.	$-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5$
2. पदावलीचे मूल्यांकन करा.	$-3 + 2 - 8 + 1 - 0 + 5 = -3$
3. जर संख्येला 11 ने भागले तर मिळणारी बाकी निकाल दर्शविते.	1328105 ही संख्या 11 च्या पटीपेक्षा 8 ने अधिक किंवा 3 ने कमी / लहान आहे.

ही पध्दत आम्ही आधी पाहिलेल्या पध्दतीसारखीच आहे की वेगळी आहे ?



खालील कोष्टक भरा. हे करण्याचा एक जलद मार्ग काढा ?

संख्या	ने विभाज्यता								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
128	होय	नाही	नाही	नाही	नाही	होय	नाही	नाही	नाही
990									
1586									
275									
6686									
639210									
429714									
2856									
3060									
406839									

विभाज्यतेच्या लघुत्तम पध्दतीविषयी अधिक : [More on Divisibility Shortcuts]

इतर संख्यांसाठी विभाज्यतेचे जवळचे मार्ग

? एखाद्या संख्येला 6 ने भाग जातो हे आम्ही कसे काढू शकतो ?

? त्याची विभाज्यता त्याच्या 2 आणि 3 या घटकासाठी तपासणीचे कार्य करेल का ? या संख्यावर 2 आणि 3 साठी जवळच्या मार्गाचा उपयोग करा आणि 38, 225, 185, 64 या प्रत्येक संख्येला 6 ने भागून पडताळा करा.

? 24 ची विभाज्यता कशी तपासाल ? त्याच्या 4 आणि 6 या अवयवाने विभाज्यता तपासणीचे कार्य होईल का ? का किंवा का नाही ?

? 24 ची विभाज्यता निर्धारीत करुन 4 ने आणि 6 ने विभाज्यता तपासणीचे कार्य होत नाही. उदाहरणार्थ 12 या संख्येला 4 आणि 6 या दोन्हीनी भाग जातो परंतु 24 ने भाग जात नाही.

24 ची विभाज्यता तपासण्यासाठी आम्ही 3 ने आणि 8 ने विभाज्यता तपासू शकतो. 24 ची विभाज्यता तपासणीसाठी 3 ने आणि 8 ने विभाज्यतेची तपासणी का कार्य करते हे मूळ अवयवीकरणाचा उपयोग करून यांचे वर्णन करा. परंतु 24 ने विभाज्यता तपासणीसाठी 4 ने आणि 6 ने विभाज्यतेची तपासणी करणे पुरेशी नाही.

100 पर्यंत प्रत्येक संख्येने विभाज्यता तपासण्यासाठी आणि 100 पेक्षा जास्त कांही संख्यांसाठी असे जवळचे मार्ग आहेत. उच्च वर्गात कांही संकल्पना शिकल्यानंतर तुम्ही हे कसे कार्य करते हे समजून घेण्याचा प्रयत्न करु शकता.

संख्यात्मक मूळ: [Digital Roots]

एक संख्या घ्या. एक अंकी संख्या तुम्हाला मिळेपर्यंत त्यांच्या अंकांची वारंवार बेरीज करा. या एक अंकी संख्येला संख्येचे संख्यात्मक मूळ असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ 489710 या संख्येचे संख्यात्मक मूळ

2 (4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29, 2 + 9 = 11, 1 + 1 = 2) असेल.

? या संख्यात्मक मूळामध्ये कोणता गुणधर्म असेल असे तुम्हाला वाटते ? जवळच्या मार्गाने 9 ची विभाज्यता आम्ही काय केले आहे यांचे स्मरण करा.

? 600 आणि 700 या संख्यामधील कोणत्या संख्यांचे संख्यात्मक मूळ (i) 5 (ii) 7 (iii) 3 आहे ?

? कोणत्याही 12 क्रमवार संख्यांचे संख्यात्मक मूळ लिहा. तुमचे निरीक्षण काय आहे ?



आम्हाला असे दिसून येईल की 9 च्या पटीतील संख्यांचे संख्यात्मक मूळ हे नेहमीच 9 असते.

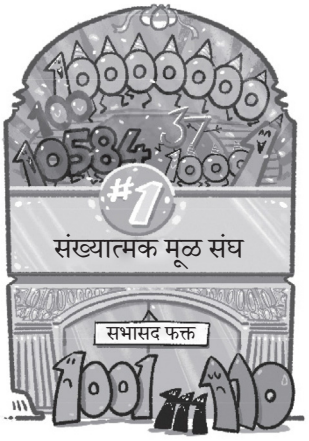
? आता (i) 3 (ii) 4 आणि (iii) 6 च्या पटीतील कांही क्रमवार संख्यांचे संख्यात्मक मूळ काढा.

? 6 च्या पटीतील संख्यापेक्षा 1 ने अधिक असलेल्या संख्यांची संख्यात्मक मूळे कोणती आहेत ? तुमच्या काय लक्षात येते ?

लक्षात आलेल्या नमुन्यांचे वर्णन करण्याचा प्रयत्न करा.

? मी अंकानी बनलेला आहे. प्रत्येक लहान आणि विषम, मूळ क्रमांक 1 सोबत कोणतेही देवाणघेवाण नाही, किती विचित्र! माझे अंक मोजतात, त्यांची बेरीज होते, माझे मूळ आहे. सर्व, बिंदू एकाच ठळक संख्येच्या शोधाकडे निर्देश करतात.

मी अभिमानाने दावा करतो की सर्वात मोठा विषम एकक अंक मी आहे. माझी संख्या काय आहे? माझे नांव काय आहे?



आर्यभट्ट II (सुमारे 950 CE) यांच्या महासिध्दांत या ग्रंथात एक अंकी संख्या मिळेपर्यंत अंकांची वारंवार बेरीज करून त्या संख्येचे संख्यात्मक मूळ मोजण्याची पध्दत नमूद केली आहे. ही पध्दत अंकगणितीय क्रियांच्या गणनेची तपासणी करण्यासाठी वापरली जात असल्यांचे ज्ञात आहे.

? शोधा पाहू. [Figure it Out]

1. 8 - अंकी संख्येचे संख्यात्मक मूळ 5 आहे. त्या संख्येपेक्षा 10 ने अधिक असणाऱ्या संख्येचे संख्यात्मक मूळ कोणते असेल ?
2. कोणतीही संख्या लिहा वारंवार 11 मिळवून संख्यांचा एक क्रम तयार करा. या संख्यांच्या क्रमाची संख्यात्मक मूळे काय असतील ? तुमच्या निरीक्षणांची देवाणघेवाण करा.
3. $9a + 36b + 13$ या संख्येचे संख्यात्मक मूळ किती असेल ?
4. (i) संख्येची समानता आणि त्यांचे संख्यात्मक मूळ

   (ii) संख्येचे संख्यात्मक मूळ आणि जेव्हा संख्येला 3 किंवा 9 ने भागले मिळणारी बाकी यांच्यामध्ये कोणतेही नमुने किंवा संबंध आहेत का ते तपासून अनुमान काढा.



5.3 लपलेले अंक : [Digits in Disguise]

गेल्या वर्षी आपण क्रिप्टॅरिथमची कोडी पाहिली आहेत जेथे प्रत्येक मूळाक्षर हे एका अंकाचे प्रतिनिधीत्व करते, प्रत्येक अंक जास्तीत जास्त एका मूळाक्षराने दर्शविला जातो आणि संख्येचा पहिला अंक कधीही 0 नसतो.

? खाली दिलेले क्रिप्टॅरिथम सोडवा.

(i) $\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} ON \\ ON \\ +\ ON \\ \hline PO \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} QR \\ QR \\ +\ QR \\ \hline PRR \end{array}$

आता गुणाकाराचा समावेश असलेल्या कांही क्रिप्टॅरिथम सोडविण्याचा प्रयत्न करा.

? (v) $PQ \times 8 = RS$



गुणा म्हणते "अरे याचा अर्थ असा आहे की 2 - अंकी संख्येला 8 ने गुणल्यास आणखी 2 - अंकी संख्या मिळेल. मला माहित आहे की $10 \times 8 = 80$. परंतु 10 आणि 8 यांचे एकक अंक समान / सारखेच आहेत, जे आपल्याला नको आहेत. याच कारणासाठी PQ हे 11 असू शकत नाही कारण P आणि Q हे वेगवेगळ्या अंकांशी संगत आहेत. $12 \times 8 = 96$ हे सर्व अटीसाठी योग्य आहे." PQ हे 13 असू शकते का? विचार करा.

हे शक्य नाही कारण $13 \times 8 = 104$

12 पेक्षा मोठ्या असणाऱ्या सर्व 2 - अंकी संख्यांसाठी 8 सह असलेला गुणाकार 3 - अंकी संख्या आहे.

? (vi) $GH \times H = 9K$ आता यासाठी प्रयत्न करा.

याचा अर्थ असा की एका 2 - अंकी संख्येला एका 1 - अंकी संख्येने गुणल्यास दुसरी 2 - अंकी संख्या 90 मध्ये मिळते. या क्रिप्टॅरिथममधील एकक अंकांची संगत मूळाक्षरांचे निरीक्षण करा. खाली दिलेल्या पर्यायामधून या प्रश्नाचे उत्तर निवडा.

$11 \times 9 = 99$, $12 \times 8 = 96$, $46 \times 2 = 92$, $24 \times 4 = 96$, $47 \times 2 = 94$, $31 \times 3 = 93$, $16 \times 6 = 96$.

? (vii) येथे आणखी एक उदाहरण आहे. $BYE \times 6 = RAY$



अंशु म्हणते "गुणाकार हा 3 - अंकी संख्या असल्याने B हा 2 किंवा त्याहून अधिक असू शकत नाही. जर $B = 2$ म्हणजेच 2 शतके तर गुणाकार हा 1200 पेक्षा जास्त असू शकेल. म्हणून $B = 1$"

? "Y बद्दल तुम्ही काय म्हणू शकता ? कोणते अंक शक्य आहेत / शक्य नाहीत ?

Y हा 7 किंवा त्याहून अधिक असू शकत नाही कारण जर $Y = 7$ तर $170 \times 6 = 1020$ परंतु आम्हाला 3 - अंकी गुणाकार हवा आहे. Y हा सम सुध्दा असू शकेल." अंशु स्पष्ट करते.

आपण नमुने, गुणधर्म आणि तर्क यांचा वापर करून संख्या आणि क्रियेशी संबंधित क्रिप्टॅरिथम सोडवू शकतो.

(?) खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) UT × 3 = PUT (ii) AB × 5 = BC (iii) L2N × 2 = 2NP

(iv) XY × 4 = ZX (v) PP × QQ = PRP (vi) JK × 6 = KKK

(?) शोधा पाहू. [Figure it Out]

1. जर 31z5 ही 9 च्या पटीतील एक संख्या आहे. जेथे z हा एक अंक आहे. z ची किंमत किती आहे ? या प्रश्नासाठी दोन उत्तरे तेथे का आहेत यांचे वर्णन करा.

2. " जर 12 ने भाग दिला असता बाकी 8 मिळणारी एक संख्या मी घेतलेली आहे. तर 12 च्या पटीपेक्षा 4 ने कमी असणारी दुसरी एक संख्या मी घेतलेली आहे. त्यांची बेरीज ही नेहमीच 8 च्या पटीत असेल." असे स्नेहल म्हणते. त्यांच्या दाव्यांचे परीक्षण करा आणि तुमच्या निष्कर्षाचे समर्थन करा.

3. 3 च्या पटीतील, 6 च्या पटीतील दोन गुणकांची बेरीज केंव्हा असते आणि नसते ? वेगवेगळ्या शक्य घटनांचे वर्णन करा आणि नमुन्यांचे सामान्यीकरण करा.

4. श्रीलता म्हणते " माझ्याकडे 9 ने भाग जाणारी एक संख्या आहे. जर मी त्यांच्या अंकांची अदलाबदल केली तरीही त्या संख्येला 9 ने भाग जातो."

   (i) 9 च्या पटीतील कोणत्याही संख्येसाठी तिचे अनुमान सत्य आहे का याचे परीक्षण करा.

   (ii) इतर कोणतेही अंक बदलणे शक्य आहे का जेणेकरून तयार झालेली संख्या अजूनही 9 च्या पटीत राहील ?

5. जर 48a23b ही 18 च्या पटीत असेल तर a आणि b च्या सर्व संभाव्य जोडीच्या किंमतींची यादी करा.

6. जर 3p7q8 ला 44 ने भाग जातो. तर p आणि q च्या सर्व संभाव्य जोडीच्या किंमतींची यादी करा.

7. तीन क्रमवार संख्या अशा काढा की पहिली संख्या ही 2 च्या पटीत, दुसरी संख्या ही 3 च्या पटीत आणि तिसरी संख्या ही 4 च्या पटीत असेल. अशा आणखी संख्या आहेत का ? त्यांची पुनरावृत्ती किती वेळा होते ?



8. 45000 आणि 47000 मधील 36 च्या पटीतील 5 गुणक लिहा. तुमच्या पध्दतीची वर्गासोबत चर्चा करा.



9. 5 क्रमवार सम संख्यांच्या क्रमातील मधली संख्या 5p आहे. क्रमातील इतर चार संख्या p च्या स्वरुपात व्यक्त करा.

10. 15 ने भाग जाणारी 6 - अंकी एक संख्या अशी लिहा की जर अंकांची अदलाबदल केली तर 6 ने भाग जाईल.

11. दिपकचा दावा असा आहे की " 11 च्या पटीतील कांही गुणक असे आहेत की ज्यांची दुप्पट केल्यानंतरही 11 च्या पटीतील गुणक राहतात. परंतु 11 च्या पटीतील इतर गुणकांची दुप्पट केल्यास 11 च्या पटीतील गुणक राहत नाहीत." जर त्यांचे अनुमान सत्य असेल तर त्यांचे परीक्षण करा, तुमच्या निष्कर्षाचे स्पष्टीकरण करा.

12. खालील विधाने 'नेहमीच सत्य', कांही वेळेला सत्य' किंवा 'कधीही सत्य नाही' यांचे निर्धारन करा. तुमच्या तर्काचे वर्णन करा.

    (i) 6 च्या पटीतील आणि 3 च्या पटीतील गुणकांचा गुणाकार हा 9 च्या पटीत असतो.

    (ii) तीन क्रमवार सम संख्यांच्या बेरजेला 6 ने भाग जातो.

    (iii) जर abcdef हे 6 च्या पटीत असेल तर badcef हे 6 च्या पटीत असेल.

    (iv) 8 (7b - 3) - 4 (11b + 1) हे 12 च्या पटीत आहे.

13. कोणत्याही तीन संख्या निवडा. जेव्हा त्यांच्या बेरजेला 3 ने भाग जातो, तेव्हा सर्व शक्य घटनांचा शोध घ्या आणि सामान्यीकरण करा.

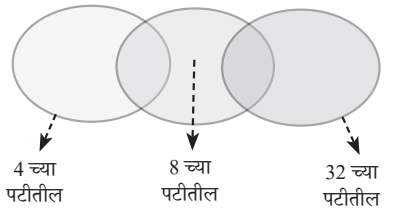
14. दोन क्रमवार पूर्णांकांचा गुणाकार हा नेहमी 2 च्या पटीत असतो का ? का ? या क्रमवार पूर्णांकांच्या गुणाकाराविषयी काय आहे ? तो नेहमीच 6 च्या पटीत असतो का ? का किंवा का नाही ? 4 क्रमवार पूर्णांकांच्या गुणाकारा विषयी तुम्ही काय सांगू शकाल ? पाच क्रमवार पूर्णांकांच्या गुणाकाराविषयी काय सांगू शकाल ?

15. क्रिप्टॅरिथम सोडवा.

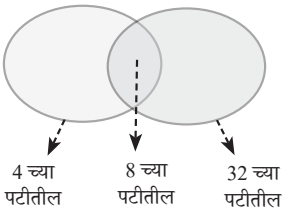
    (i) EF × E = GGG (ii) WOW × 5 = MEOW

16. खालीलपैकी कोणत्या वेन आकृत्या 4, 8 आणि 32 च्या पटीमधील संबंध दर्शविते ?

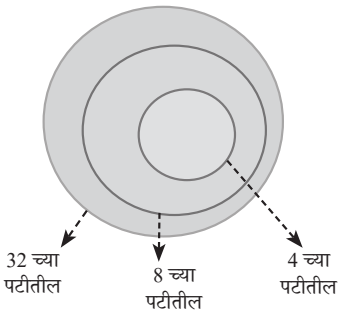
(i)



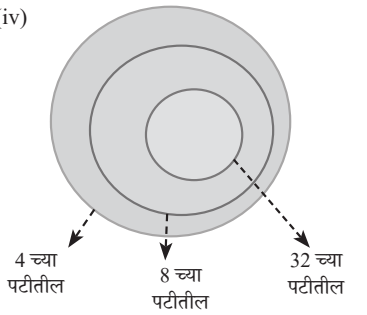
(ii)



(iii)



(iv)



सारांश [Summery]

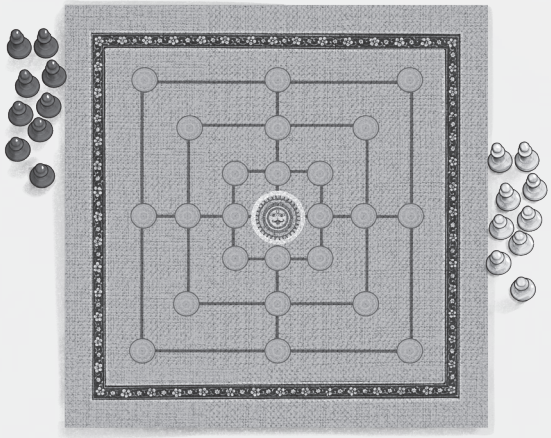
- आम्ही विभाज्यतेंचे विविध गुणधर्म शोधले आणि शिकलो -
  - जर a ला b ने भाग जातो तर a च्या सर्व गुणकांना b ने भाग जातो.
  - जर a ला b ने भाग जातो तर a ला b च्या सर्व अवयवांनी भाग जातो.
  - जर a ने m ला भागले आणि a ने n ला भागले तर a ने m+n आणि m-n ला भाग जातो.
  - जर a ला b ने भाग जातो आणि a ला c ने देखील भाग जातो तर a ला b आणि c च्या ल.सा.वि.ने भाग जातो.
- 3, 9 आणि 11 ची विभाज्यता तपासण्याचा जवळचा मार्ग आम्ही शिकलो आहे आणि ते का कार्य करतात याबद्दल आम्ही पाहिले आहे.
- या सर्व गोष्टीमधून आम्हाला गणितीय विचार आणि तर्काने दृश्यीकरण, उदाहरणे आणि प्रति उदाहरणे बीजगणिताने अनुभवायला मिळाली.



ही कोड्याची वेळ

नवंकंकारी

नवकंकारी ज्याला सालू मने आटा, चार-पार किंवा नवकाक्री असेही म्हणतात. हा एक पारंपारीक भारतीय बोर्ड खेळ आहे. जो 'नऊ माणसे मॉरीस' किंवा 'पश्चिमेतील गिरणी' सारखाच आहे. हा दोन खेळाडूंसाठी एक रणनिती खेळ आहे जिथे प्रतिस्पर्ध्याच्या प्याद्यांना संपविण्यासाठी किंवा त्याच्या हालचाली रोखण्यासाठी तीन प्याद्यांच्या ओळी तयार करणे हे ध्येय असते.



खेळ खेळणे:

1. प्रत्येक खेळाडू 9 प्याद्यांपासून सुरुवात करतो. खेळाडू त्यांचे प्यादे चौकावर ठेवण्यासाठी आळीपाळीने घेतात. एका चौकात जास्तीत जास्त एक प्यादे असू शकते.
2. सर्व प्यादे ठेवल्यानंतर खेळाडू त्यांच्या एका प्याद्याला तीनच्या ओळी तयार करण्यासाठी शेजारील रिकाम्या चौकात हलविण्यासाठी वळण घेतात. रेषा ही आडवी किंवा उभी असू शकते.
3. एकदा खेळाडूने जर प्याद्यासह एक रेषा आखली की तो प्रतिस्पर्ध्याच्या कोणत्याही एका प्याद्याला काढून टाकू शकतो. जर तो त्या ओळीचा भाग असेल तर. जर प्रतिस्पर्ध्याकडे 3 पेक्षा कमी प्यादे असतील किंवा तो हालचाल करु शकत नसेल तर तो खेळाडू जिंकतो.



6 आम्ही विभागतो, तरीही त्यांचा गुणाकार करतो (We Distribute, yet things Multiply)

आपण पाहिले आहे की बीजगणित हे मुळाक्षर चिन्हांचा वापर नमुने आणि संबंधाबद्दल सामान्य विधाने संक्षिप्त पध्दतीने लिहिलेले दावे आणि अनुमानांना समर्थन देण्यासाठी किंवा सिद्ध करण्यासाठी (मागील प्रकरणात तुम्ही पाहिलेल्या अनेक गुणधर्माप्रमाणे) आणि विविध प्रकारच्या समस्या सोडविण्यासाठी देखील बीजगणिताचा वापर केला जाऊ शकतो.

वितरण हा एक गुणधर्म गुणाकार आणि बेरीज यांच्याशी संबंधित असून जो बीजगणित वापरून संक्षिप्तपणे घेतला जातो. या प्रकरणात आम्ही विविध प्रकारच्या गुणाकाराचे नमुने शोधून काढतो आणि वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून बीजगणिताच्या भाषेत त्याचे वर्णन कसे करता येईल हे दाखवू शकतो.

6.1 गुणाकाराचे कांही गुणधर्म [Some properties of Multiplication]

गुणाकारामध्ये वाढ [Increments in products]

23×27 या दोन संख्यांचा गुणाकार विचारात घ्या.

? 1. जर पहिली संख्या (23) ही 1 ने वाढविली तर गुणाकार कितीने वाढतो ?

? 2. जर दुसरी संख्या (27) ही 1 ने वाढविली तर काय होईल ?

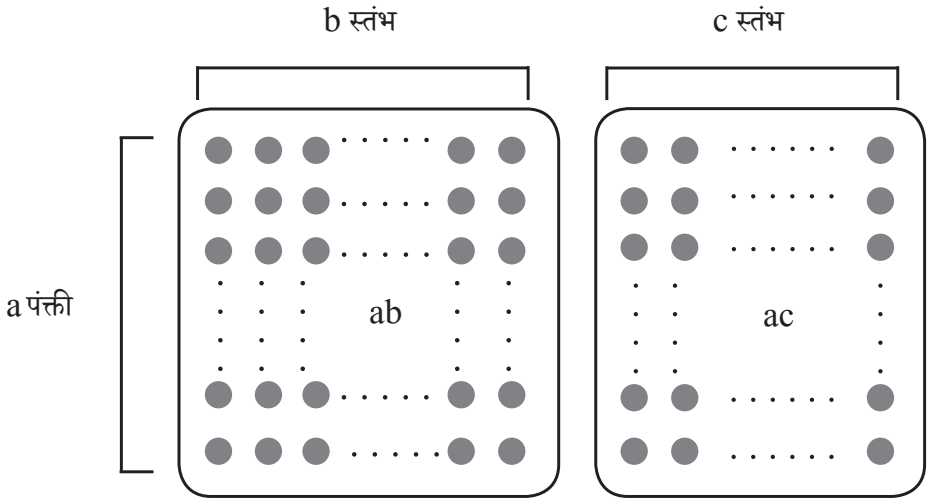
? 3. जर दोन्ही संख्या 1 ने वाढविल्या तर काय होईल ?

? कोणत्याही दोन संख्यांच्या गुणाकारासाठी आपल्या निरीक्षणांचे सामान्यीकरण करण्यास मदत करणारा नमुना तुम्हाला दिसतो का ?

प्रथमतः आपण एक सोपी समस्या विचारात घेऊ. जेव्हा 27 ला 1 ने वाढविले जाते तेव्हा गुणाकारात होणारी वाढ काढा. गुणाकाराच्या व्याख्येनुसार (आणि क्रमनिरपेक्ष गुणधर्म) हे स्पष्ट होते की गुणाकार हा 23 ने वाढतो. हे गुणाकाराच्या वितरण गुणधर्मावरुन देखील दिसून येते. जर a, b आणि c या तीन संख्या असतील तर

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

या गुणधर्माचे आकृती वापरून चांगले दृश्यमान केले जाऊ शकते.



a (b + c)

याला बेरजेवरील **गुणाकाराचा वितरण गुणधर्म** असे म्हणतात. समीकरणाचा उपयोग करून a(b+c) = ab+ac जेथे a = 23, b = 27 आणि c = 1 तर आपल्याला मिळते

$$23\,(27 + 1) = 23 \times 27 + \underset{\text{वाढ}}{\boxed{23}}$$

लक्षात ठेवा की येथे a (b+c) आणि 23 (27+1) म्हणजे अनुक्रमे a × (b+c) आणि 23 × (27+1) आहे. आपण सहसा कंसाच्या अगोदर किंवा नंतर '×' हे चिन्ह वगळतो. 5a, xy, इत्यादी सारख्या पदावलीच्या घटनेत दिसून येते.

आम्ही त्याचप्रमाणे (a+b) c चा विस्तार हा वितरण गुणधर्माचा उपयोग करुन सुध्दा खालील प्रमाणे करु शकतो.

$$(a + b)\,c = c\,(a + b) \text{ [गुणाकाराचा क्रमनिरपेक्ष]}$$

$$= ca + cb \text{ [वितरण गुणधर्म]}$$

$$= ac + bc \text{ [गुणाकाराचा क्रमनिरपेक्ष]}$$

सामान्यपणे जर गुणाकारातील एक किंवा दोन्ही संख्या 1 ने वाढविल्या तर गुणाकार कितीने वाढतो हे शोधण्यासाठी आम्ही वितरण गुणधर्माचा वापर करु शकतो. समजा सुरुवातीच्या दोन संख्या a आणि b आहेत. जर त्यापैकी समजा एक b ही संख्या 1 ने वाढविली तर आपल्याकडे मिळते.

$$a(b+1) = ab + \boxed{a}$$
वाढ

आता आपण पाहूया की जर गुणाकारातील दोन्ही संख्या 1 ने वाढविल्या तर काय होते. जर गुणाकार ab मध्ये दोन्ही a आणि b हे 1 ने वाढविले तर आपल्याला (a+1) (b+1) मिळते.

? हा विस्तार आम्ही कसा करू शकतो ?

(a+1) हे एकच पद आहे असे विचारात घेऊया. नंतर वितरण गुणधर्माने आपल्याला मिळते.

$(a+1)(b+1) = (a+1)b + (a+1)1$

पुन्हा वितरण गुणधर्म लागू केल्याने आम्हाला मिळते.

$(a+1)(b+1) = (a+1)b + (a+1)1$

$= ab + \boxed{(b+a+1)}$
वाढ

जर a = 23 आणि b = 27 तर आम्हाला मिळते.

$(23+1)(27+1) = (23+1)27 + (23+1)1$

$= 23 \times 27 + \boxed{(27+23+1)}$
वाढ

अशाप्रकारे जेव्हा a आणि b हे 1 ने वाढविले जाते तेव्हा ab या गुणाकारात a + b + 1 ने वाढ होते.

? जर आपण (b + 1) हे एकच पद प्रथमत: घेऊन (a + 1)(b + 1) चा विस्तार केल्यास आम्हाला काय मिळते ? याचा प्रयत्न करा.

? जेव्हा गुणांकारातील एक संख्या 1 ने वाढविली आणि दुसरी संख्या 1 ने कमी केली तर काय घडेल ? गुणाकारामध्ये कोणताही बदल तेथे होईल का ?

आता a आणि b या दोन संख्यांचा गुणाकार ab हा पुन्हा घेऊ. जर a हे 1 ने वाढविले आणि b हे 1 ने कमी केले तर त्यांचा गुणाकार (a + 1)(b - 1) असा होईल. याचा विस्तार केल्यास आम्हाला मिळते.

$(a+1)(b-1) = (a+1)b - (a+1)1$

$= ab + b - (a+1)$

$= ab + \boxed{b-a-1}$
वाढ

जर a = 23 आणि b = 27 तर आम्हाला मिळते.

$(23+1)(27-1) = (23+1)27 - (23+1)1$

$= 23 \times 27 + 27 - (23+1)$

$= 23 \times 27 + \boxed{27-23-1}$
वाढ

(?) गुणाकार नेहमीच वाढतो का ? गुणाकार कमी होणारी अशी 3 उदाहरणे काढा.

(?) जेव्हा a आणि b हे ऋण पूर्णांक असतील तेव्हा काय घडेल ?

वरील प्रत्येक घटनेमध्ये a आणि b च्या वेगवेगळ्या किंमती मांडून गुणधर्म तपासा. उदाहरणार्थ a = 5, b = 8; a = –4, b = –5 इत्यादी.

पूर्णांक सुध्दा वितरण गुणधर्माची पूर्तता करतात असे आम्हाला दिसून येते. म्हणजेच जर x, y आणि z हे कोणतेही तीन पूर्णांक असतील तर $x(y+z) = xy+xz$

अशाप्रकारे जेव्हा मूळाक्षर - संख्या ऋण पूर्णांक म्हणून घेतले जातात तेव्हा गुणाकारांच्या वाढीसाठी आपल्याकडे असलेल्या पदावल्या टिकून राहतात.

जर त्यांच्या मूळाक्षर संख्या या संख्यांनी बदलल्या तर समान किंमती घेणाऱ्या दोन बैजिक राशी समान असतात हे लक्षात ठेवा. या संख्या कोणतेही पूर्णांक असू शकतात. दोन बैजिक पदावलींची समानता दर्शविणारी गणितीय विधाने अशी आहेत.

$$a (b + 8) = ab + 8a$$

$$(a + 1) (b – 1) = ab + b – a – 1$$ इत्यादी.

यांना **नित्य समीकरणे** असे म्हणतात.

(?) जर एक संख्या m ने वाढविली आणि दुसरी संख्या n ने वाढविली तर दोन संख्यांच्या गुणाकारात किती बदल होईल ? जर गुणाकारासाठीच्या a आणि b या सुरुवातीच्या संख्या असतील तर (a + m) आणि (b + n) होईल.

$$(a + m) (b + n) = (a + m)b + (a + m)n$$

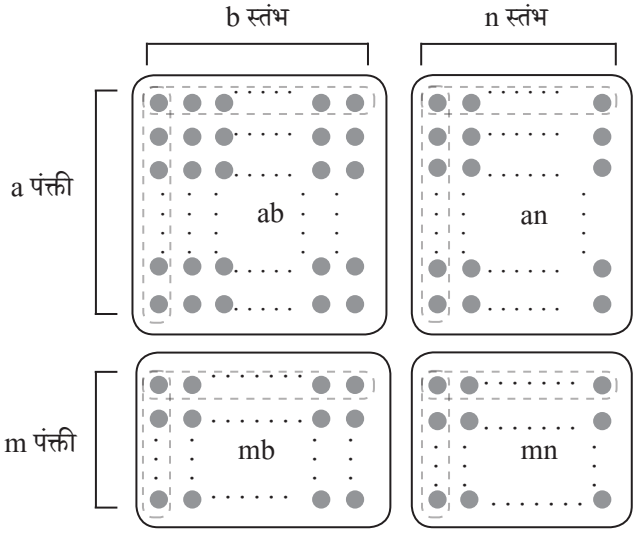
$$= ab + mb + an + mn$$

वाढ ही an + bm + mn ही आहे.

आम्हाला असे दिसून येते की गुणाकार हा प्रत्येक पदाच्या (a + m) चा प्रत्येक पद (b + n) शी असलेली बेरीज आहे.

नित्य समीकरण 1 $(a + m) (b + n) = ab + mb + an + mn$

हे समीकरण खालीलप्रमाणे दृश्यमान होईल.



(a + m) (b + n)

? गुणाकार केल्या जाणाऱ्या संख्या कोणत्याही प्रमाणात वाढविल्या किंवा कमी केल्यावर गुणाकारामध्ये कसा बदल होतो हे काढण्यासाठी हे समीकरण वापरले जाऊ शकते. जेव्हा एक किंवा दोन्ही संख्या कमी केल्यावर हे समीकरण कसे वापरले जाऊ शकते हे तुम्ही पाहु शकता का ?

उदाहरणार्थ जेव्हा एका संख्येत 1 ने वाढ होते आणि दुसऱ्या संख्येत 1 ने घट होते तेव्हा आपण पुन्हा घटना विचारात घेऊया. आपण (a + 1) (b - 1) हा गुणाकार (a + 1) (b + (-1)) असा लिहू. नित्य समीकरण 1 मध्ये m = 1 आणि n = (-1) घेतल्यास आम्हाला मिळते.

$$ab + (1) \times b + a \times (-1) + (1) \times (-1) = ab + b - a - 1$$

जे आम्हाला अगोदर मिळालेल्या पदावली सारखेच आहे.

? गुणाकारांत होणारा बदल कसा आहे काढण्यासाठी नित्य समीकरण 1 चा वापर करा. जर

(i) एक संख्या 2 ने कमी केली आणि दुसरी संख्या 3 ने वाढविली तर,

(ii) एक संख्या 3 ने आणि दुसरी संख्या 4 ने अशा दोन्ही संख्या कमी केल्या तर

? वजाबाकीचे बेरजेमध्ये रुपांतर न करता गुणाकार मिळवून उत्तरांचा पडताळा करा.

याचे सामान्यीकरण करताना आम्ही (a + u) (b - v) चा गुणाकार खालीलप्रमाणे करु शकतो.

$$\begin{aligned}(a + u)(b - v) &= (a + u)\, b - (a + u)\, v \\ &= ab + ub - (av + uv) \\ &= ab + ub - av - uv.\end{aligned}$$

नित्य समीकरण 1 मध्ये m = u आणि n = -v घेऊन तपासल्यास ते सारखेच दिसून येते.

नित्य समीकरण 1 मधील गुणाकार (a + u) (b - v) हा प्रत्येक पदाच्या a + u (a आणि u) चा प्रत्येक पद b - v (b) आणि (-v) यांच्यासह गुणाकाराची बेरीज आहे. लक्षात घ्या की गुणाकारामधील पदांची चिन्हे पूर्णांक गुणाकाराच्या नेहमीच्या नियमांचा वापर करुन निर्धारीत केली जाऊ शकतात.



एकच नित्य समीकरणाचा वापर करून अनेक घटनेमध्ये पूर्णांक गुणाकाराचे नियम कसे हाताळावेत याची परवानगी देताना हे पाहिले आहे.

? (i) $(a - u)(b + v)$, (ii) $(a - u)(b - v)$ चा विस्तार केल्यास आम्हाला मिळते.

$(a - u)(b + v) = ab - ub + av - uv$ आणि

$(a - u)(b - v) = ab - ub - av + uv$

वितरण गुणधर्म हा कंसातील दोन पदांच्या पुरताच मर्यादित नाही.

? **उदाहरण 1:** विस्तार करा. $\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5})$

$$\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5}) = (\frac{3a}{2} \times a) - (\frac{3a}{2} \times b) + (\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5})$$

पदांचे सुलभीकरण खालीलप्रमाणे करता येते.

$$\frac{3a}{2} \times a = \frac{3}{2} \times (a \times a)$$

घातांकाच्या संकेताचा उपयोग करून आम्ही असे लिहु शकतो $\frac{3}{2} \times (a \times a) = \frac{3}{2} a^2$

$$\frac{3a}{2} \times b = \frac{3}{2} \times (a \times b) = \frac{3}{2} ab$$

$$\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5} = (\frac{3}{2} \times \frac{1}{5})\, a = \frac{3}{10} a$$

म्हणून आम्हाला मिळते.

$$\frac{3a}{2}(a - b + \frac{1}{5}) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2} ab + \frac{3}{10} a$$

? एकच पद मिळविण्यासाठी कोणतीही दोन पदे मिळविता येतात का ?

उदाहरणार्थ एक पद मिळविण्यासाठी $\frac{3}{2} a^2$ आणि $\frac{3}{10} a$ ही पदे मिळविता येतात का ?

आम्हाला असे दिसून येते की दोन पदांच्या अचूकपणे मूळाक्षर संख्या सारख्याच नाहीत त्यामुळे त्यांचे एकच पदात सुलभीकरण करता येत नाही. म्हणून पदावलीचे पुढील सुलभीकरण शक्य नाही.

सारखीच मूळाक्षर - संख्या असलेल्या पदांना **सजातीय पदे** असे म्हणतो याचे आम्ही स्मरण करू.

उदाहरण 2: विस्तार कराः $(a + b)(a + b)$

आपल्याला मिळते. $(a + b)(a + b) = (a+b)a + (a + b)b = a \times a + b \times a + ab + b \times b$

$= a^2 + ba + ba + b^2$

परंतु $ba = ab$ आपल्याकडे सारखीच मूळाक्षर - संख्या ab असलेली दोन पदे आहेत (किंवा ती सजातीय पदे आहेत) आणि म्हणून त्यांची बेरीज करता येते.

$$ba + ab = ab + ab = 2ab$$

म्हणून आम्हाला मिळते

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

उदाहरण 3: विस्तार करा $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$$(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)a^2 + (a + b) \times 2ab + (a + b)b^2$$
$$= (a \times a^2) + ba^2 + (a \times 2ab) + (b \times 2ab) + ab^2 + (b \times b^2)$$

पदांचे सुलभीकरण खालीलप्रमाणे करता येईल.

$$a \times a^2 = a^3 \text{ (का?)}$$

$$ba^2 = a^2b$$

$$a \times 2ab = 2 \times a \times a \times b = 2a^2b$$

$$b \times 2ab = 2 \times a \times b \times b = 2ab^2$$

$$b \times b^2 = b^3$$

म्हणून, $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

आम्हाला असे दिसून येते की a^2b आणि $2a^2b$ या पदांना सारख्याच मूळाक्षर संख्या आहेत (किंवा सजातीय पदे आहेत) आणि म्हणून त्यांची बेरीज करता येते.

$$a^2b + 2a^2b = (1 + 2)\, a^2 b = 3a^2 b$$

त्याचप्रमाणे ab^2 आणि $2ab^2$ हो सजातीय पदे आहेत आणि म्हणून त्यांची बेरीज करता येते.

$$ab^2 + 2ab^2 = (1 + 2)ab^2 = 3ab^2$$

अशाप्रकारे आम्हांला मिळते

$$(a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

थोडासा इतिहास [A Pinch of History]

मेसापोटेमिया अनेक प्राचीन संस्कृतीमध्ये विशेषतः प्राचीन इजिप्त मेसापोटेमिया ग्रीस, चीन आणि भारतातील गणितज्ञांच्या गणनेत बेरजेवरील गुणाकाराचा वितरण गुणधर्म अंमलात होता. उदाहरणार्थ गणितज्ञ युक्लीड (भूमितीय स्वरुपात) आणि आर्यभट्ट (बीजगणितीय स्वरुपात) यांनी त्यांच्या गणितीय आणि वैज्ञानिक कार्यामध्ये वितरण नियमाचा व्यापकपणे अंतर्निहीत पध्दतीने वापर केला. वितरण गुणधर्माचे पहिले स्पष्ट विधान ब्रम्हगुप्त यांनी त्यांच्या ब्रम्हस्फुतसिध्दांत (श्लोक 12.55) मध्ये दिले होते, ज्यांनी गुणाकारासाठी गुणधर्माच्या वापराचा उल्लेख 'खंड - गुणनम' (भागासह गुणाकार) असा केला होता. त्यांच्या श्लोकात असे म्हटले आहे की "गुणक हा दोन किंवा अधिक भागांमध्ये विभागला जातो ज्यांची बेरीज गुणकाशी समान असते. नंतर या प्रत्येकाशी गुण्यांचा गुणाकार केला जातो आणि बेरीज करून निकाल मिळविला जातो." म्हणजेच जर दोन भाग असतील तर मूळाक्षर संकेतांचा उपयोग करून हे नित्य समीकरण (a+b)c = ac + bc शी सममुल्य करता येते. पुढील श्लोकात (श्लोक 12.56) वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून जलद गुणाकार करण्याच्या पध्दतीचे ब्रम्हगुप्त यांनी वर्णन केले आहे. ज्यांचा आपण पुढील भागात अधिक शोध घेऊ.

शोधा पाहू. [Figure it out]

1. खालील गुणाकाराच्या चौकटीचे निरीक्षण करा. चौकटीतील प्रत्येक संख्या ही दोन संख्यांच्या गुणाकाराने तयार झालेली आहे. जर 3×3 चौकटी मधील संख्या ही pq या पदावलीने आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे दिलेली आहे. तर चौकटीतील इतर संख्यांसाठी पदावली लिहा.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3 × 5	3 × 6	3 × 7
4 × 5	4 × 6	4 × 7
5 × 5	5 × 6	5 × 7

	pq	

2. खालील गुणाकारांचा विस्तार करा.

(i) $(3 + u)(v - 3)$ (ii) $\frac{2}{3}(15 + 6a)$

(iii) $(10a + b)(10c + d)$ (iv) $(3 - x)(x - 6)$

(v) $(-5a + b)(c + d)$ (vi) $(5 + z)(y + 9)$

3. जेव्हा एका संख्येला 2 ने वाढविले आणि दुसऱ्या संख्येला 4 ने कमी केले तर दोन संख्यांचा गुणाकार बदलत नाही अशी 3 उदाहरणे काढा.



4. विस्तार करा. (i) $(a + ab - 3b^2)(4 + b)$ आणि (ii) $(4y + 7)(y + 11z - 3)$

5. विस्तार करा. (i) $(a - b)(a + b)$, (ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ आणि
(iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ तुम्हाला एक नमुना दिसतो का ? तुम्ही पाहिलेल्या नमुन्यातील पुढील नित्य समीकरण कोणते असू शकेल ? त्याचा विस्तार करून तुम्ही ते तपासू शकाल का ?

वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून जलद गुणाकार: [Fast Multiplications using the Distributive property]

जेव्हा कांही प्रकारच्या संख्यांचा गुणाकार करताना गुणाकाराच्या जलद पध्दतीत वितरण गुणधर्माचा उपयोग केला जातो.

जेव्हा 11, 101, 1001, ... यापैकी एक संख्या असते.

? खालील गुणाकारांचा वापर करून 11 असलेल्या संख्येंचा गुणाकार एकच पायरीत काढा.

(a) 3874×11 (b) 5678×11

प्रथमतः गुणाकार घेऊया.

$$3874 \times 11 = 3874\,(10 + 1) = 38740 + 3874$$

$$\begin{array}{r} 38740 \\ +\ \ 3874 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

अंक कसे मिळविले जातात ते पहा.

dcba ही एक 4 - अंकी संख्या आहे. म्हणजेच संख्येत हजाराच्या स्थानी d, शंभराच्या स्थानी c, दहाच्या स्थानी b आणि एकम स्थानी a आहे.

$$dcba \times (10 + 1) = dcba \times 10 + dcba$$

हे असे बनते

	d	c	b	a	o
+		d	c	b	a
	d	(c + d)	(b + c)	(a + b)	a

एका रेषेत गुणाकार मिळविण्यासाठी याचा उपयोग केला जातो.

पायरी 1

$$\begin{array}{r} 3874 \times 11 \\ \hline 4 \end{array}$$

पायरी 2

$$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{1}}{\frown}+ \\ 3874 \times 11 \\ \hline 14 \end{array}$$

पायरी 3

$$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{1}\textcircled{1}}{\frown}+ \\ 3874 \times 11 \\ \hline 614 \end{array}$$

पायरी 4

$$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}}{\frown}+ \\ 3874 \times 11 \\ \hline 2614 \end{array}$$

पायरी 5

$$\begin{array}{r} \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} \\ \textcircled{3}874 \times 11 \\ \hline 42614 \end{array}$$

? एका संख्येला (कोणत्याही अंकाच्या संख्येला) 11 ने गुणण्याच्या एका सामान्य नियमाचे वर्णना करा आणि गुणाकार हा एका रेषेत लिहा.

सोडवा.



(i) 94×11 (ii) 495×11 (iii) 3279×11 (iv) 4791256×11

? एका संख्येला 101 ने गुणण्यासाठी एक सारखाच नियम आम्ही शोधू शकतो का ?

? 3874 ला 101 ने गुणा.

एक 4 - अंकी संख्या dcba घेऊ.

$$dcba \times 101 = dcba \times (100 + 1) = dcba \times 100 + dcba$$

हे असे बनते.

	d	c	b	a	o	o
+			d	c	b	a
	d	c	(b + d)	(a + c)	b	a

? एका रेषेत 3874×101 ला गुणण्यासाठी याचा उपयोग करा.

? एका संख्येला 101 ने गुणण्याचा एक सामान्य नियम कोणता असू शकेल आणि एका रेषेत गुणाकार लिहा. 1001, 10001 ..... ने गुणाकार करण्यासाठी हा नियमाचा विस्तार (पुढे चालू) करा.

? याचा वापर करून काढा.



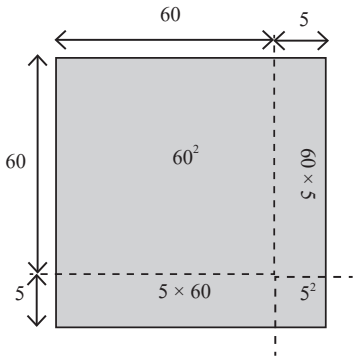
(i) 89×101 (ii) 949×101 (iii) 265831×1001 (iv) 1111×1001 (v) 9734×99 आणि (vi) 23478×999. ब्रम्हगुप्त (इ.स. 628), श्रीधराचार्य (इ.स. 750) आणि भास्कराचार्य (लीलावती इ.स. 1150) यांच्या प्राचीन गणितीय कार्यामध्ये दोन संख्यांचा जलद गुणाकार करण्यासाठी वितरण गुणधर्म वापरण्याच्या अशा पध्दतींची विस्तृत चर्चा झाली आहे. ब्रम्हस्फुत सिध्दांत (श्लोक 12.56) या त्यांच्या कार्यात ब्रम्हगुप्त हे वितरण गुणधर्म वापरून जलद गुणाकार करण्याच्या अशा पध्दतींचा उल्लेख **इष्ट-गुणन** असा आहे.

6.2 वितरण गुणधर्माच्या विशेष घटना [Special cases of the Distributive property]

दोन संख्यांच्या बेरीज /वजाबाकीचा वर्ग :

? बाजूची लांबी 60 एकके असलेल्या एका चौरसाचे क्षेत्रफळ 3600 चौ. एकके आहे (60^2) आणि बाजूची लांबी 5 एकके असलेल्या एका चौरसाचे क्षेत्रफळ 25 चौ. एकके आहे (5^2). याचा उपयोग करून आम्ही बाजूची लांबी 65 एकके असलेल्या एका चौरसाचे क्षेत्रफळ काढू शकतो का ?

आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे बाजूची लांबी 65 असलेल्या एका चौरसाच्या बाजूची लांबी 60 असलेला एक चौरस, बाजूची लांबी 5 असलेला एक चौरस आणि बाजूंची लांबी 60 व 5 असलेले दोन आयत अशा 4 भागात विभागणी केलेली आहे. बाजूची लांबी 65 असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे त्यांच्या सर्व घटक भागांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज होय. वरील आकृतीतील चार भागांचे क्षेत्रफळ तुम्ही काढू शकाल का ?



आम्हाला मिळते.

$65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 5^2 + 2 \times (60 \times 5)$.

$= 3600 + 25 + 600$

$= 4225$ चौ. एकके

आता $(60 + 5) \times (60 + 5)$ चा वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून गुणाकार करा.

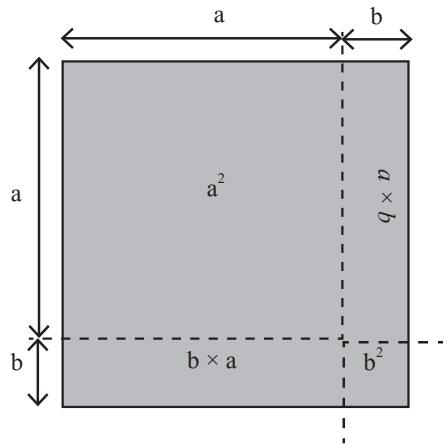
$(60 + 5) \times (60 + 5) = 60 \times 60 + 5 \times 60 + 60 \times 5 + 5 \times 5$

$= 60^2 + 2 \times (60 \times 5) + 5^2$

? जर आम्ही 65^2 ला $(30 + 35)^2$ किंवा $(52 + 13)^2$ असे लिहीले तर काय होईल ?

आकृत्या काढा आणि तुम्हाला मिळालेले क्षेत्रफळ तपासा.

आता दोन संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गासाठी $(a + b)^2$ सामान्य पदावली पाहुया.



वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून $(a+b)^2$ चा विस्तार असा करता येईल.

$(a+b) \times (a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$

$= a^2 + 2ab + b^2$

उदाहरण 2 मध्ये यापूर्वी आम्ही पाहिले आहे.

नित्य समीकरण 1A $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

गणिती बोल

? जर a आणि b हे कोणतेही दोन पूर्णांक असतील तर $(a+b)^2$ हे नेहमी $a^2 + b^2$ पेक्षा मोठे आहे का ? जर नसेल तर ते केंव्हा मोठे असते ?

? 104^2, 37^2 च्या किंमती काढण्यासाठी नित्य समीकरण 1A चा उपयोग करा. [सूचना: वर्ग काढणे सोपे जाईल अशारितीने 104 आणि 37 या संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकीच्या स्वरुपात मांडणी करा.]

? खालील पदावली लिहीण्यासाठी नित्य समीकरण 1A चा उपयोग करा.

(i) $(m + 3)^2$ (ii) $(6 + p)^2$

? विस्तार करा. $(6x + 5)^2$

वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून	नित्य समीकरणाचा उपयोग करून
$(6x + 5)^2 = (6x + 5)(6x + 5)$ $= (6x \times 6x) + (5 \times 6x) + (6x \times 5) + (5 \times 5)$ $= (6x)^2 + 2(6x \times 5) + 5^2$ $= 36x^2 + 60x + 25$	$(6x + 5)^2 = (6x)^2 + 5^2 + 2 \times (6x \times 5)$ $= 36x^2 + 25 + 60x$



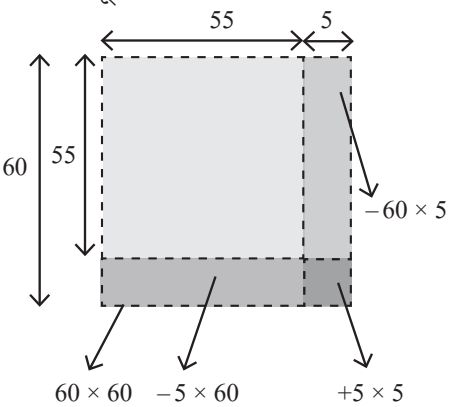
जर तुम्हाला सामान्य नियम लक्षात ठेवण्यात किंवा वापरण्यात अडचण येत असेल तर तुम्ही गुणाकार करण्यासाठी वितरण गुणधर्म लागू करु शकता आणि इच्छित निकाल मिळवू शकता.

? समीकरण आणि वितरण गुणधर्म या दोन्हींचा उपयोग करून $(3j + 2k)^2$ चा विस्तार करा.

? $(60 - 5)^2$ किंवा 55^2 ची किंमत काढण्यासाठी आम्ही 60^2 (= 3600) आणि 5^2 (=25) चा वापर करु शकतो का ?

बाजूची लांबी 60 असलेल्या एका चौरसाच्या आतील बाजूची लांबी 55 असलेला एक चौरस बसवून भूमितीद्वारे ही पध्दत आकृती काढून समजून घेऊया.

बाजूची लांबी 55 असलेल्या एका चौरसाचे क्षेत्रफळ $(60-5)^2 = 55^2$ आहे.



आम्ही बाजूची लांबी 55 असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे बाजूची लांबी 60 असलेल्या एका चौरसाचे क्षेत्रफळ घेऊन आणि बाजूंची लांबी 60 आणि 5 असलेल्या दोन आयतांचे क्षेत्रफळ काढून टाकून मिळवू शकतो, म्हणजेच 60^2 - (60 x 5) - (5 × 60). हे करताना आम्ही बाजूची लांबी 5 असलेल्या लहान चौरसाचे क्षेत्रफळ दोनदा काढून टाकतो. वास्तविक क्षेत्रफळ मिळविण्यासाठी आम्ही या पदावलीचे काय करू शकतो ?

बाजूची लांबी 5 असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ या पदावलीमध्ये पुन्हा आम्ही मिळवू शकतो. या मार्गाने आम्ही हे क्षेत्रफळ एकदा फक्त वजाबाकी करु शकतो.

म्हणून, $(60 - 5)^2 = 60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60) + 5^2$

$= 3600 - 300 - 300 + 25$

$= 3025$

बाजूची लांबी 55 असणाऱ्या चौरसाचे क्षेत्रफळ 3025 चौ. एकके आहे.

जेव्हा $(a + b)^2$ चा विस्तार केल्यास काय मिळते हे आम्ही पाहिले आहे. $(a - b)^2$ चा विस्तार काय आहे ? वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून आम्हाला मिळते.

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$

$= (a)^2 - ba - ab + (b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

? $(a + b)^2$ च्या विस्ताराचा उपयोग करुन सुध्दा आम्ही $(a + b)^2$ चा विस्तार काढू शकतो. कसे याचा विचार करा.

सूचना: $(a - b)^2 = [a + (- b)]^2$

आता आम्ही प्रत्यक्षपणे $(a + b)^2$ च्या विस्ताराचा उपयोग करू

$[(a + (-b)]^2 = (a)^2 + (-b)^2 + 2 \times (a) \times (-b)$

नित्य समीकरण 1B $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

? 55^2 साठी आम्ही केलेल्या भूमितीचा उपयोग करून $(a - b)^2$ चा सामान्य विस्तार काढा.

? (a) 99^2 आणि (b) 58^2 च्या किंमती काढण्यासाठी $(a - b)^2$ चा समीकरणाचा उपयोग करा.

? नित्य समीकरण 1 B आणि वितरण गुणधर्म या दोन्हींचा उपयोग करून खालील पदावलींचा विस्तार करा.

(i) $(b - 6)^2$ (ii) $(-2a + 3)^2$ (iii) $(7y - \frac{3}{4z})^2$

तपासणीचे नमुने : [Investigating Patterns]

नमुना 1

खालील नमुन्याकडे पहा.

$2(2^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2$

$2(3^2 + 1^2) = 4^2 + 2^2$

$2(6^2 + 5^2) = 11^2 + 1^2$

$2(5^2 + 3^2) = 8^2 + 2^2.$

? नैसर्गिक संख्यांची एक जोडी घ्या. त्यांच्या वर्गांची बेरीज करा. तुम्ही या बेरजेच्या दुप्पट म्हणजे दोन वर्गांची बेरीज असे लिहु शकाल का ?

इतर संख्यांच्या जोडीसह याचा प्रयत्न करा. तुम्ही एखादा नमुना शोधला आहे का ?

लक्षात घ्या की $2(5^2 + 6^2) = (6 + 5)^2 + (6 - 5)^2$

? निरीक्षण केलेल्या नमुन्याचे वर्णन करण्यास खालील नित्य समीकरणे मदत करतात का ?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

सजातीय पदांची बेरीज केल्यास $a^2 + a^2 = 2a^2$, $b^2 + b^2 = 2b^2$ आणि $2ab - 2ab = 0$ आम्हाला मिळते.

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

नमुना 2

? येथे एक संबंधित नमुना आहे. तो नमुना नेहमीच लागू होतो किंवा नाही हे ठरविण्यासाठी बीजगणित वापरून नमुन्याचे वर्णन करण्याचा प्रयत्न करा.

$$9 \times 9 - 1 \times 1 = 10 \times 8$$

$$8 \times 8 - 6 \times 6 = 14 \times 2$$

$$7 \times 7 - 2 \times 2 = 9 \times 5$$

$$10 \times 10 - 4 \times 4 = 14 \times 6$$

येथे नमूना $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$ असा दिसतो.

हे एक सत्य नित्य समीकरण आहे ? वितरण गुणधर्माचा उपयोग केल्यास आम्हाला मिळते.

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

सजातीय पदांची बेरीज केल्यास $ab + (-ab) = 0$ आपल्याला खरोखरच दिसून येते.

नित्य समीकरण 1C $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$

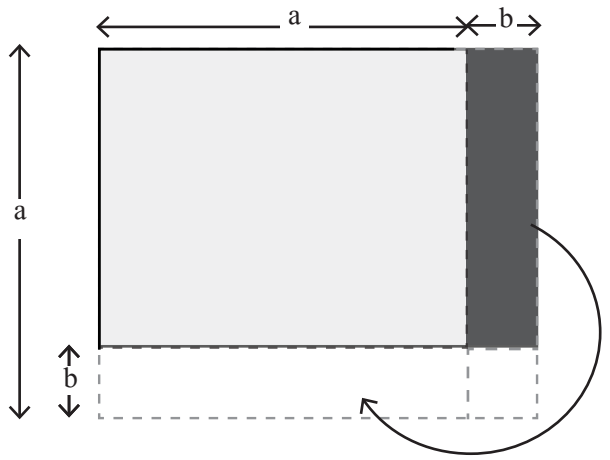
तुम्ही हे नित्य समीकरण शोधा पाहु 5 (i) मध्ये यापूर्वी पाहिलेले आहे.

? 98×102 आणि 45×55 सोडविण्यासाठी नित्य समीकरण 1C चा उपयोग करा.

? $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ हे भौमितीकरित्या दर्शवा.

प्रयत्न करा

सूचना:



जेव्हा हा तुकडा काढून टाकला तर आम्हाला काय मिळते?

श्रीधराचार्य (इ.स. 750) यांनी नित्य समीकरण 1C चा वापर करुन संख्यांचे वर्ग जलद काढण्याची एक मनोरंजक पध्दत दिली होती. या नित्य समीकरणाचे खालील सुधारीत स्वरुप म्हणून विचारात घ्या.

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

? हे नित्य समीकरण सत्य का आहे?

आता, उदाहरणार्थ a = 31 आणि b = 1 घेऊन 31^2 काढू शकतो.

$$31^2 = (31 + 1)(31 - 1) + 1^2$$
$$= 32 \times 30 + 1$$
$$= 961$$

a = 197 आणि b = 3 घेऊन 197^2 काढू शकतो.

$$197^2 = (197 + 3)(197 - 3) + 3^2$$
$$= 200 \times 194 + 9$$
$$= 38809$$

? शोधा पाहू. [Figure it out]

1. $(a-b)^2$ किंवा $(b - a)^2$ कोणते मोठे आहे ? तुमच्या उत्तरांचे समर्थन करा.
2. 100 हे दोन वर्गांच्या वजाबाकीच्या स्वरुपात दर्शवा. (व्यक्त करा.)
3. तुम्ही अभ्यासलेल्या नित्य समीकरणांचा उपयोग करून 406^2, 72^2, 145^2, 1097^2 आणि 124^2 काढा.
4. 1 आणि 2 हे नमुने फक्त मोजसंख्यांसाठीच लागू आहेत का ? ते ऋण पूर्णांकासाठी देखील लागु पडतात का ? अपूर्णांकांबद्दल काय आहे ? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.



6.3 चूक लक्षात घ्या, चूक सुधारा. [Mind the mistake, Mend the mistake]

आम्ही खाली कांही बैजिक पदावल्या त्यांच्या सर्वात सोप्या स्वरुपात विस्तार आणि सुलभीकरणाने दिल्या आहेत.

(i) प्रत्येक सुलभीकरण तपासा आणि जर तेथे चूक आहे का ते पहा.

(ii) जर चूक असेल तर काय चूक झाली आहे त्याचे वर्णन करण्याचा प्रयत्न करा.

(iii) नंतर बरोबर पदावली लिहा.

1
$$-3p(-5p+2q)$$
$$=-3p+5p-2q$$
$$=p-2q$$

2
$$2(x-1)+3(x+4)$$
$$=2x-1+3x+4$$
$$=5x+3$$

3
$$y+2(y+2)$$
$$=(y+2)^2$$
$$=y^2+4y+4$$

4
$$(5m+6n)^2$$
$$=25m^2+36n^2$$

5
$$(-q+2)^2$$
$$=q^2-4q+4$$

6
$$3a(2b\times 3c)$$
$$=6ab\times 9ac$$
$$=54a2bc$$

7
$$\frac{1}{2}(10s-6)+3$$
$$=5s-3+3$$
$$=5s$$

8
$$5w^2+6w$$
$$=11w^2$$

9
$$2a^3+3a^3+6a^2b+6ab^2$$
$$=5a^3+12a^2b^2$$

10
$$(x+2)(x+5)$$
$$=(x+2)x+(x+2)5$$
$$=x^2+2x+5x+10$$
$$=x^2+7x+10$$

11
$$(a+2)(b+4)$$
$$=ab+8$$

12
$$ab^2+a^2b+a^2b^2$$
$$=ab(a+b+ab)$$

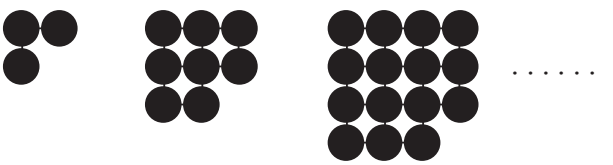
6.4 हा मार्ग किंवा तो मार्ग, सर्व मार्ग उपसागराकडे जातात

[This way or that Way, All ways lead to the Bay]

खालील आकृतीतील नमुन्याचे निरीक्षण करा. क्रमातील पुढील आकृती काढा. त्यात किती वर्तुळे आहेत ? पायरी 10 मध्ये एकुण किती वर्तुळे आहेत ? पायरी K मधील वर्तुळांच्या संख्येसाठी पदावली लिहा.

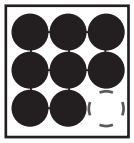
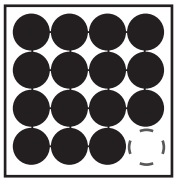
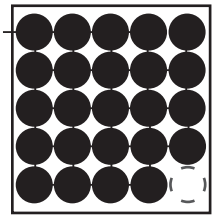
गणिती बोल

1 2 3

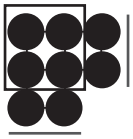
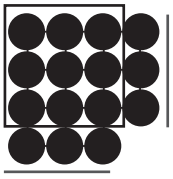
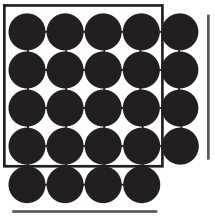


या नमुन्याचा अर्थ लावण्याचे तेथे अनेक प्रकार आहेत. येथे कांही शक्यता आहेत.

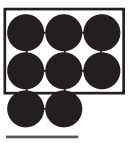
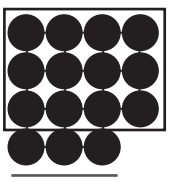
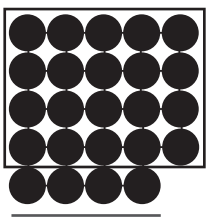
पध्दत 1

पायरी 1	पायरी 2	पायरी 3	पायरी 4	...	पायरी k
				...	
$2^2 - 1$	$3^2 - 1$	$4^2 - 1$	$5^2 - 1$	...	$(k + 1)^2 - 1$
$= (1 + 1)^2 - 1$	$= (2 + 1)^2 - 1$	$= (3 + 1)^2 - 1$	$= (4 + 1)^2 - 1$		

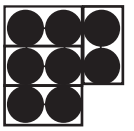
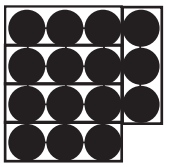
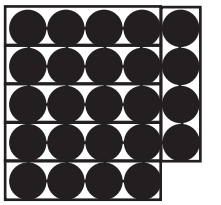
पध्दत 2

पायरी 1	पायरी 2	पायरी 3	पायरी 4	...	पायरी k
				...	
$1 + 2 \times 1$	$2^2 + 2 \times 2$	$3^2 + 2 \times 3$	$4^2 + 2 \times 4$	...	$k^2 + 2 \times k$
$= 1^2 + 2 \times 1$	$= 2^2 + 2 \times 2$	$= 3^2 + 2 \times 3$	$= 4^2 + 2 \times 4$		

पध्दत 3

पायरी 1	पायरी 2	पायरी 3	पायरी 4	...	पायरी k
				...	
$1 \times 2 + 1$	$2 \times 3 + 2$	$3 \times 4 + 3$	$4 \times 5 + 4$	...	$k \times (k + 1) + k$
$= 1 \times (1 + 1) + 1$	$= 2 \times (2 + 1) + 2$	$= 3 \times (3 + 1) + 3$	$= 4 \times (4 + 1) + 4$		

पध्दत 4

पायरी 1	पायरी 2	पायरी 3	पायरी 4	...	पायरी k
				...	
1×3 $= 1 \times (1 + 2)$	2×4 $= 2 \times (2 + 2)$	3×5 $= 3 \times (3 + 2)$	4×6 $= 4 \times (4 + 2)$	...	$k \times (k+2)$

तुमची पध्दत यापैकी कोणत्या पायरीशी जुळते का किंवा ती वेगळी आहे ? आपण ओळखलेली प्रत्येक पदावली वेगळी दिसते, परंतु खरोखरच ती वेगळी आहे ? ती एकाच नमुन्याचे वर्णन करीत असल्याने ती सर्व सारखीच असली पाहिजेत. प्रत्येक पदावलीचे सुलभीकरण करा आणि शोधा.

$(k + 1)^2 - 1$	$k^2 + 2 \times k$	$k \times (k + 1) + k$	$k \times (k + 2)$
$= k^2 + 1 + 2k - 1$	$= k^2 + 2k$	$= k^2 + k + k$	$= k^2 + 2k$
$= k^2 + 2k$		$= k^2 + 2k$	

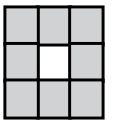
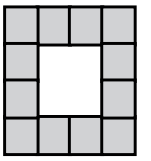
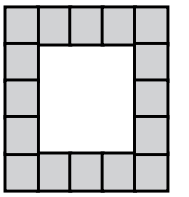
जर आपण योग्यप्रकारे केल्यावर सर्व पध्दती समान उत्तर $K^2 + 2k$ हे देतात. या नमुन्याच्या पायरी k मधील वर्तुळांची संख्या $k^2 + 2k$ ही पदावली देते.



गणितामध्ये एका नमुन्याकडे पाहण्याचे अनेक मार्ग असतात आणि त्याच समस्येकडे जाण्याचे आणि सोडविण्याचे वेगवेगळे मार्ग असतात. असे मार्ग शोधण्यासाठी अनेकदा मोठ्या प्रमाणात सर्जनशीलता आणि कल्पनाशक्तीची आवश्यकता असते ! जरी एक किंवा दोन मार्ग तुमचे आवडते असू शकतात, तरी इतर मार्गांचा शोध घेणे देखील मनोरंजक आणि समृध्द करणारे असू शकते.

? पायरी 15 मधील वर्तुळांची संख्या काढण्यासाठी या सूत्राचा उपयोग करा.

? खालील चित्रातील चौरस फरशीपासून बनविलेला नमूना विचारात घ्या.

1	2	3	
			.....

? प्रत्येक आकृतीमध्ये किती चौरसाकृती फरशा आहेत ?

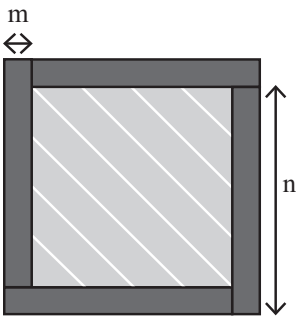
? क्रमाच्या पायरी 4 मध्ये किती चौरसाकृती फरशा आहेत ? पायरी 10 बद्दल काय आहे ?

? पायरी n मधील फरशांच्या संख्येसाठी बैजिक पदावली लिहा. तुमच्या पध्दतीची वर्गात चर्चा करा. उत्तर मिळविण्यासाठी एका पेक्षा अधिक पध्दत तुम्ही काढू शकता का ?

गणिती बोल

? खालील आकृतीमधील छायांकीत केलेल्या (आतील) भागाचे क्षेत्रफळ काढा. सर्व चार आयतांची मापे सारखीच आहेत.

ताडंगची पध्दत: [Tadang's method]



बाजू (m + n) असलेल्या एका चौरसाच्या एकूण भागाचे क्षेत्रफळ हे $(m+n)^2$ आहे.

एकूण क्षेत्रफळामधून आयताच्या चार क्षेत्रफळांची वजाबाकी केल्यास आतील छायांकीत भागाचे क्षेत्रफळ मिळेल.

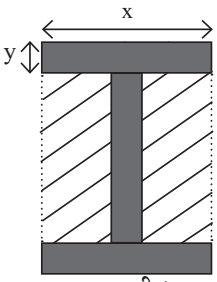
म्हणजेच $(m+n)^2 - 4mn$

युसुफची पद्धत :

छायांकीत भाग असलेल्या एका चौरसाच्या बाजूची लांबी (n - m) आहे म्हणून त्याचे क्षेत्रफळ $(n - m)^2$ आहे.

? दोन्ही पदावलींचा विस्तार केल्यास $(m + n)^2 - 4mn = (n - m)^2$ असे तपासा.

? आकृतीमधील तिरकस रेषासह असलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा. सर्व तीन आयतांची मापे समान आहेत. (आकृती 1)



आकृती 1

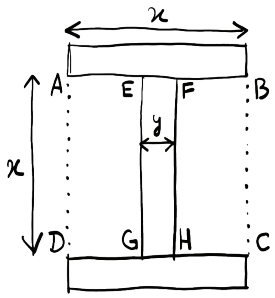
अनुशाची पध्दत :

आवश्यक क्षेत्रफळ = (ABCD) चे क्षेत्रफळ - (EFGH) चे क्षेत्रफळ

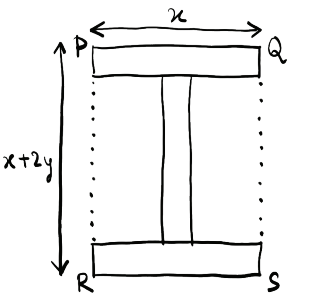
ABCD चे क्षेत्रफळ = x^2

EFGH चे क्षेत्रफळ = xy

आवश्यक क्षेत्रफळ = $x^2 - xy$



वैष्णवीची पध्दत :



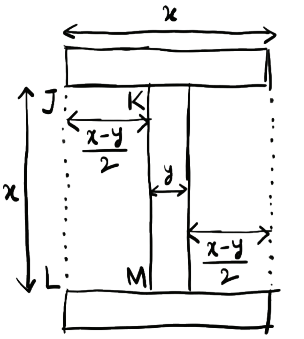
$$QS = y + x + y$$
$$= x + 2y$$

PQSR चे क्षेत्रफळ = $x(x + 2y)$

आवश्यक क्षेत्रफळ = PQSR चे क्षेत्रफळ - (तीन आयतांचे क्षेत्रफळ)

$$= x(x + 2y) - 3xy$$

आदित्यची पध्दत :



आवश्यक क्षेत्रफळ हे JKLM च्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट आहे.

$$JK = \frac{x - y}{2},\ KM = x$$

(JKML) चे क्षेत्रफळ = $x\left(\frac{x - y}{2}\right)$

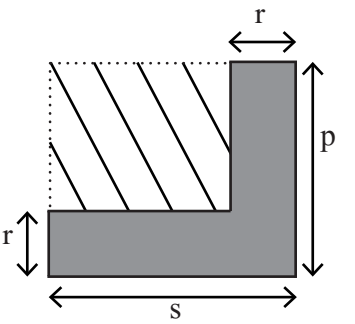
आवश्यक क्षेत्रफळ = 2 × JKML चे क्षेत्रफळ

$$= 2x\left(\frac{x - y}{2}\right)$$
$$= x\,(x - y)$$

(?) पदावलींचा विस्तार करून सर्व तीन पदावल्या सममुल्य आहेत याचा पडताळा करा. जर x = 8 आणि Y = 3 तर छायांकीत भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

? खालील आकृतीमधील तुटक भागाच्या क्षेत्रफळासाठी एक पदावली लिहा. उत्तर मिळविण्यासाठी एका पेक्षा अधिक पध्दतींचा वापर करा. p = 6, r = 3.5 आणि s = 9 या किंमती घ्या आणि क्षेत्रफळ काढा.

गणिती बोल



शोधा पाहू. [Figure it out]

1. सुचविलेल्या नित्य समीकरणांचा उपयोग करुन यांचा गुणाकार करा.

   (i) 46^2 च्या साठी नित्य समीकरण 1A $(a+b)^2$ चा उपयोग करून.

   (ii) 397×403 साठी नित्य समीकरण 1C $(a+b)(a-b)$ चा उपयोग करून.

   (iii) 91^2 च्या साठी नित्य समीकरण 1B $(a-b)^2$ चा उपयोग करून.

   (iv) 43×45 साठी नित्य समीकरण 1C $(a+b)(a-b)$ चा उपयोग करुन.

2. खालील प्रत्येक गुणाकार काढण्यासाठी योग्य नित्य समीकरण किंवा वितरण गुणधर्म वापरा.

   (i) $(p - 1)(p + 11)$

   (ii) $(3a - 9b)(3a + 9b)$

   (iii) $-(2y + 5)(3y + 4)$

   (iv) $(6x + 5y)^2$

   (v) $(2x - \frac{1}{2})^2$

   (vi) $(7p) \times (3r) \times (p + 2)$

3. प्रत्येक विधानासाठी योग्य बैजिक पदावल्या ओळखा.

   (i) एका संख्येच्या वर्गापेक्षा दोन ने अधिक

   $2 + s$ $(s + 2)^2$ $s^2 + 2$ $s^2 + 4$ $2s^2$ 2^2s

   (ii) दोन क्रमवार संख्यांच्या वर्गांची बेरीज

   $m^2 + n^2$ $(m + n)^2$ $m^2 + 1$ $m^2 + (m + 1)^2$

   $m^2 + (m - 1)^2$ $(m + (m + 1))^2$ $(2m)^2 + (2m + 1)^2$

4. एका दिनदर्शिकामध्ये आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे कोणत्याही 2×2 च्या वर्ग संख्या विचारात घ्या.

फेब्रुवारी						
रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

प्रत्येक कर्णावर असलेल्या संख्यांचा गुणाकार काढा. 4×12=48, 5×11=55. इतर 2×2 चौरसासाठी हे करा.

कर्णाच्या गुणाकाराविषयी तुमचे निरीक्षण काय आहे ? हे का घडते याचे वर्णन करा.

गणिती बोल

सूचना : प्रत्येक 2×2 चौरसातील संख्या अशा लिहा.

a	(a + 1)
a + 7	(a + 8)

5. खालील कोणती विधाने सत्य आहेत यांचा पडताळा करा.

   (i) $(k + 1)(k + 2) - (k + 3)$ हे नेहमी 2 असते.

   (ii) $(2q + 1)(2q - 3)$ हे 4 च्या पटीत आहे.

   (iii) सम संख्यांचे वर्ग हे 4 च्या पटीत आहेत आणि विषम संख्यांचे वर्ग हे 8 च्या पटीपेक्षा 1 ने अधिक आहेत.

   (iv) $(6n+2)^2 - (4n+3)^2$ हे वर्ग संख्येपेक्षा 5 ने कमी आहे.

6. जेव्हा एका संख्येला 7 ने भागल्यास बाकी 3 राहते आणि दुसऱ्या संख्येला जेव्हा 7 ने भागल्यास बाकी 5 राहते. जेव्हा त्यांची बेरीज, वजाबाकी आणि गुणाकाराला 7 ने भागले असता मिळणारी बाकी काढा.

7. तीन क्रमवार संख्या निवडा, मधल्या संख्येचा वर्ग करा आणि इतर दोन संख्यांचा गुणाकार वजा करा. इतर संख्यांच्या सटासह सारखीच पुनरावृत्ती करा.

   तुम्हाला कोणता नमुना दिसून येतो ? बैजिक समीकरण म्हणून ते आम्ही कसे लिहायचे ? सत्य नित्य समीकरणाची तपासणी करण्यासाठी समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंचा विस्तार करा.

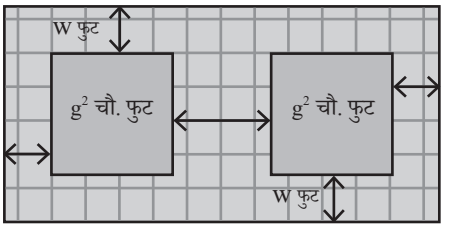
8. खालील पायऱ्यांचे वर्णन करणारी बैजिक पदावली कोणती आहे ? कोणत्याही दोन संख्यांची बेरीज करा. दोन संख्यांच्या बेरजेच्या निम्म्याने याला गुणा. हा निकाल दोन संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गाच्या अर्धा असेल हे सिध्द करा.

9. कोणते मोठे आहे ? पूर्ण गणना न करता गुणाकार काढा.

   (i) 14 × 26 किंवा 16 × 24

   (ii) 25 × 75 किंवा 26 × 74

10. धौलीमध्ये एक छोटेसे उद्यान बांधले आहे. आकृतीमध्ये आराखडा दर्शविलेला आहे. प्रत्येकी क्षेत्रफळ g^2 चौ. फुट असलेल्या दोन चौरस भूखंडावर हिरवे आवरण असेल. शिल्लक राहिलेले सर्व क्षेत्र हे w फूट चालण्याचा मार्ग असून त्याला फरशी बसविणे गरजेचे आहे. फरशी बसविणे आवश्यक असलेल्या क्षेत्रफळासाठी पदावली लिहा.

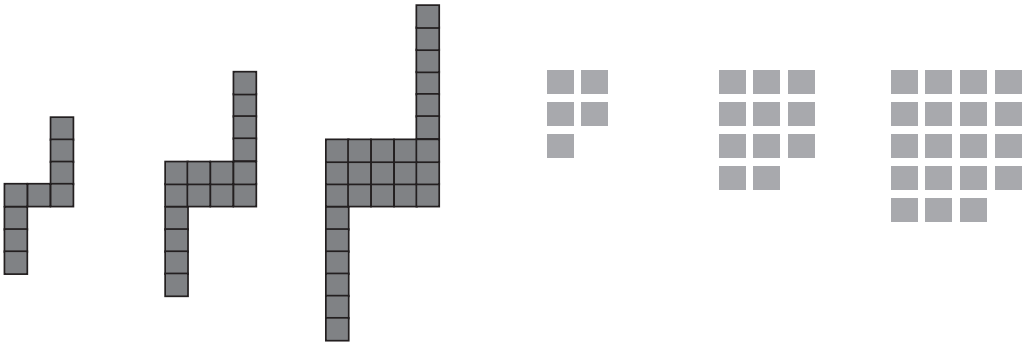


11. खाली दर्शविलेल्या प्रत्येक नमुन्यासाठी

(i) क्रमातील पुढील आकृती काढा.

(ii) पायरी 10 मध्ये किती मुलभूत एकके आहेत?

(iii) पायरी y मधील मुलभूत एककांच्या संख्येचे वर्णन करण्यासाठी पदावली लिहा.



पायरी 1 पायरी 2 पायरी 3 पायरी 1 पायरी 2 पायरी 3

सारांश [Summery]

- प्रत्येकी दोन पदे असलेल्या दोन पदावलींच्या गुणाकारासाठी आम्ही वितरण गुणधर्म वाढविला आहे. त्याचे सामान्य रुप $(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$ आहे.
- या नित्य समीकरणाच्या कांही विशेष घटना आम्ही पाहिल्या आहेत.
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
  - $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$.
- आम्ही वेगवेगळ्या नमुन्यांचा विचार केला आणि बीजगणिताचा उपयोग करून त्याचे आकलन कसे करावे याचा शोध घेतला. आम्ही असे पाहिलेले आहे की अनेकदा समस्या सोडविण्याचे आणि एकाच योग्य उत्तराकडे पोहोचण्याचे अनेक मार्ग आहेत. सारख्याच समस्येकडे जाण्यासाठी आणि समस्या सोडविण्यासाठी वेगवेगळ्या पध्दती काढणे ही एक सर्जनशील प्रक्रिया आहे.



ही कोड्याची वेळ

नाणे जोडणे

डावीकडे खालील आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे 10 नाण्यांची त्रिकोणात रचना करा. एकाच वेळी एक नाणे हलवून त्रिकोण उलटा करणे हे कार्य आहे. किती हालचाली आवश्यक आहेत ? कमीत कमी हालचालींची संख्या किती आहे ?

3 नाण्यांचा एक त्रिकोण एकाच हालचालीने उलटा (वरून खाली वळविला) करता येतो आणि 2 नाणी हलवून 6 नाण्यांचा एक त्रिकोण उलटा करता येतो.





10 नाण्यांचा त्रिकोण फक्त 3 हालचालीनी उलटवता येतो. तुम्हाला ते कसे करायचे हे समजले का ? 15 नाणी असलेल्या पुढील मोठ्या त्रिकोणाला उलटविण्यासाठी आवश्यक असलेल्या किमान शक्य हालचालीची संख्या काढा. मोठ्या त्रिकोणी संख्यांसाठीही याचा प्रयत्न करा.

अशा कोणत्याही त्रिकोणी मांडणीसाठी नाण्यांच्या हालचालीची किमान संख्या मोजण्याचा एक सोपा प्रकार आवश्यक आहे का ?



7 प्रमाणित तर्क-1
(Proportional Reasoning-1)

U6B5L9

7.1 बदलातील समरूपतेचे निरीक्षण [Observing similarity in change]

आम्ही सर्वजण संख्यात्मक प्रतिमांशी परिचित आहोत. आपण अनेकदा आपल्या गरजेनुसार या प्रतिमांचा आकार आणि दिशा बदलतो. खालील प्रतिमांचा सट पाहा.



प्रतिमा A



प्रतिमा B



प्रतिमा C



प्रतिमा D



प्रतिमा E

आम्हाला असे दिसून येते की सर्व प्रतिमा वेगवेगळ्या आकाराच्या आहेत.

? कोणत्या प्रतिमा सारख्याच दिसतात आणि कोणत्या वेगवेगळ्या दिसतात ?

प्रतिमा (A, C आणि D) सारख्याच दिसतात तरी सुद्धा त्यांचे आकार वेगवेगळे आहेत.

(?) B आणि E या प्रतिमा इतर तीन प्रतिमांसारख्या दिसतात का ? नाही, त्या किंचीत वेगळ्या आहेत. प्रतिमा B मध्ये वाघ लांबट दिसतो आणि E मध्ये दाबलेला आणि जाड दिसतो.

(?) का?

तुमच्या कदाचित लक्षात आले असेलच की A, C आणि D या प्रतिमा आयताकृती आहेत परंतु E प्रतिमा चौरसाकृती आहे. त्यामुळेच कदाचित E वेगळी दिसते. परंतु B सुध्दा एक आयत आहे! हे इतर आयताकृती प्रतिमापेक्षा वेगळे का दिसते?

या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी कोणत्याही नमुन्याचे तुम्ही निरीक्षण करु शकता ? कदाचित आयताचे मोजमाप घेऊन ?



प्रतिमा	जाडी (मि.मी. मध्ये)	उंची (मि.मी. मध्ये)
प्रतिमा A	60	40
प्रतिमा B	40	20
प्रतिमा C	30	20
प्रतिमा D	90	60
प्रतिमा E	60	60

(?) काय केल्यामुळे A, C आणि D या प्रतिमा सारख्याच आणि B आणि E या वेगळ्या प्रतिमा दिसतील?

जेव्हा आम्ही प्रतिमा A ची प्रतिमा C शी तुलना करतो तेव्हा आम्हाला असे दिसून येते की C ची जाडी ही A च्या निम्मी आहे. उंची ही सुध्दा A च्या निम्मी आहे. या घटनेमध्ये जाडी आणि उंची ही दोन्ही **सारख्याच अवयवाने** (गुणाकाराद्वारे) $\frac{1}{2}$ अशी बदलली आहे. जाडी आणि उंची ही सारख्याच अवयवाने बदलल्याने **प्रतिमा सारख्याच दिसतात.**

जेव्हा आपण प्रतिमा A ची प्रतिमा B शी तुलना करतो तेव्हा आम्हाला असे दिसून येते की, B ची जाडी ही A च्या जाडीपेक्षा 20 मिली मीटरने (मि. मी.) ने कमी आहे. उंची सुद्धा A च्या उंचीपेक्षा 20 मि.मी. ने कमी आहे. जरी फरक (वजाबाकीद्वारे) समान असला तरी प्रतिमा वेगळ्या दिसतात. रुंदी (जाडी) आणि उंची एकाच अवयवाने बदलली आहे का ? B ची उंची ही A च्या उंचीपेक्षा निम्मी आहे. परंतु B ची जाडी ही A च्या जाडीपेक्षा निम्मी नाही. म्हणून जाडी आणि उंची ही एकाच अवयवाने बदललेली नसल्यामुळे प्रतिमा वेगवेगळ्या दिसतात.

(?) प्रतिमा A च्या तुलनेत प्रतिमा D ची जाडी आणि उंची कोणत्या अवयवानी बदलते ते तुम्ही तपासू शकता का ? त्यांचे घटक समान आहेत का ?

प्रतिमा A, C आणि D सारख्याच दिसतात कारण त्यांची जाडी आणि उंची ही एकाच अवयवाने बदलली आहे. आम्ही असे सांगतो की त्यांचे रुंदी आणि उंचीमधील बदल **प्रमाणात** आहेत.

7.2 गुणोत्तरे : [Ratios]

गणितामध्ये अशा प्रमाणबध्द / प्रमाणातील संबंधाचे प्रतिनिधीत्व करण्यासाठी आपण **गुणोत्तराची** संकल्पना वापरतो.

आम्ही असे म्हणू शकतो की प्रतिमा A च्या जाडीचे उंचीशी असणारे गुणोत्तर 60 : 40 आहे.

60 आणि 40 या **संख्यांना** गुणोत्तराची **पदे** असे म्हणतात.

प्रतिमा C च्या जाडीचे उंचीशी असणारे गुणोत्तर 30 : 20 आणि प्रतिमा D चे गुणोत्तर 90 : 60 आहे.

a : b या स्वरुपातील गुणोत्तरामध्ये आपण असे म्हणु शकतो की पहिल्या राशीच्या प्रत्येक 'a' एककासाठी दुसऱ्या राशीची 'b' एकके तेथे असतात.

म्हणून प्रतिमा A मध्ये आम्ही असे म्हणू शकतो की प्रत्येक 60 मि. मी. च्या रुंदीसाठी (जाडीसाठी) तेथे 40 मि.मी. ची उंची आहे.

आम्ही असे सांगू शकतो की प्रतिमा A, C आणि D च्या जाडीची उंचीशी असणारी गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत कारण या गुणोत्तराची पदे सारख्याच अवयवाने बदललेली आहेत. कसे ते आता पाहुया.

प्रतिमा A — 60 : 40

दोन्ही पदांना $\frac{1}{2}$ ने गुणल्यास आम्हाला मिळते,

$$60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$$

जे 30 : 20 असून प्रतिमा C च्या जाडीचे उंचीशी असणारे गुणोत्तर होय.

? 90 : 60 (प्रतिमा D) मिळविण्यासाठी 60 : 40 (प्रतिमा A) च्या गुणोत्तराला कोणत्या अवयवाने आम्ही गुणले पाहिजे ?

गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत की नाहीत याची तुलना करण्याचा एक अधिक पद्धतशीर मार्ग म्हणजे **त्यांना** त्यांच्या सर्वात **साध्या रुपात** आणणे आणि ही सर्वात सोपी रुपे समान आहेत का ते पाहणे हे होय.

7.3 साध्या रुपातील गुणोत्तरे [Ratios in their simplest form]

पदांना त्यांच्या म. सा. वि. ने भागून आपण गुणोत्तरांना त्यांच्या सर्वात साध्या रुपात लिहु शकतो.

प्रतिमा A मधील पदे 60 आणि 40 आहेत. 60 आणि 40 चा म. सा. वि. किती आहे ? तो 20 आहे. पदांना 20 ने भागल्यास आम्हाला प्रतिमा A चे सर्वात साधे रुप 3 : 2 हे मिळते.

प्रतिमा D चे गुणोत्तर 90 : 60 आहे. दोन्ही पदांना 30 ने भागल्यास (90 आणि 60 चा म.सा.वि.)

आम्हाला 3 : 2 हे सर्वात साधे रूप मिळते म्हणून प्रतिमा A आणि D ची गुणोत्तरे देखील प्रमाणात आहेत.

प्रतिमा B आणि E च्या गुणोत्तरांचे सर्वात साधे रूप कोणते आहे ?

प्रतिमा B चे गुणोत्तर 40 : 20 आहे, त्याच्या साध्या रुपात ते 2 : 1 आहे. प्रतिमा E चे गुणोत्तर 60 : 60 आहे, त्याच्या साध्या रुपात ते 1 : 1 आहे.

ही गुणोत्तरे 3 : 2 सारखी समान नाहीत. म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की प्रतिमा B आणि E च्या जाडीचे उंचीशी गुणोत्तर हे प्रतिमा A, C आणि D च्या गुणोत्तराच्या प्रमाणात नाहीत.

जेव्हा दोन गुणोत्तरे त्यांच्या साध्या रुपात समान असतात तेव्हा आपण असे म्हणतो की गुणोत्तरे **प्रमाणात** आहेत किंवा गुणोत्तरे **प्रमाणबध्द** आहेत. प्रमाणात आहेत हे दर्शविण्यासाठी आम्ही '::' हे संकेत वापरतो. म्हणून a:b :: c:d हे असे दर्शविते की गुणोत्तरे a:b आणि c:d ही प्रमाणात आहेत.

अशाप्रकारे 60 : 40 :: 30 : 20 आणि 60 : 40 :: 90 : 60

7.4 प्रमाणबद्ध तर्कासह समस्या सोडविणे [Problem solving with proportional reasoning]

उदाहरण 1: 3 : 4 आणि 72 : 96 ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का ? 3 : 4 हे यापूर्वीच त्याच्या साध्या रूपात आहेत.

72 : 96 चे साधे रूप काढण्यासाठी आम्ही दोन्ही पदांना त्याच्या म. सा. वि. ने भागणे गरजेचे आहे.

72 आणि 96 चा म. सा. वि. किती ?

72 आणि 96 चा म. सा. वि. 24 आहे. दोन्ही पदांना 24 ने भागल्यास आम्हाला 3:4 हे मिळते. म्हणून त्यांच्या साध्या रुपातील दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत म्हणून ती प्रमाणात आहेत.

उदाहरण 2: केसंगला एका उत्सवासाठी लिंबू पाणी बनवायचे आहे. तिने एका भांड्यात 6 पेले लिंबू पाणी बनविले आणि त्या पेयामध्ये 10 चमचे साखर घातली. तिच्या वडीलांना या उत्सवात जास्त लोक सामील होतील अशी अपेक्षा आहे. म्हणून त्यांनी तिला आणखी 18 पेले लिंबू पाणी बनविण्यास सांगितले.

लिंबू पाणी सारख्याच गोडव्याचे बनविण्यासाठी तिने किती चमचे साखर घातली पाहिजे ?



तोच गोडवा टिकवून ठेवण्यासाठी लिंबु पाण्यांच्या पेल्यांच्या संख्येचे साखरेच्या चमच्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर हे प्रमाणात असले पाहिजे. 6 पेले लिंबू पाण्यासाठी तिने 10 चमचे साखर घातली आहे.

लिंबू पाण्याच्या पेल्यांचे साखरेच्या चमच्यांशी असलेले गुणोत्तर 6:10 आहे. जर तिला 18 पेले लिंबु पाणी अधिक बनविण्याचे असेल तर तिने किती चमचे साखर वापरावी ? आम्ही ही समस्या या नमुन्यात लिहु शकतो.

6 : 10 : : 18 : ?

आपल्याला माहित आहे की गुणोत्तरे प्रमाणात होण्यासाठी गुणोत्तरातील प्रत्येक पदाला सारख्याच अवयवात बदलले पाहिजे.

(?) गुणोत्तरातील बदलाचा अवयव आम्ही कसा काढू शकतो ?

पहिल्या पदाची संख्या 6 वरून 18 झाली आहे. बदलाचा अवयव काढण्यासाठी आम्ही 18 ला 6 ने भाग देऊन 3 मिळवू शकतो.

दुसरे पद सुध्दा सारख्याच अवयवाने बदलले पाहिजे. जेव्हा 10 हे 3 च्या अवयवाने वाढविल्यास ते 30 होते.

अशाप्रकारे 6:10 :: 18:30

म्हणून पूर्वीप्रमाणेच सारख्याच गोडव्याचे 18 पेले लिंबु पाणी बनविण्यासाठी तिने 30 चमचे साखर वापरली पाहिजे.

(?) **उदाहरण 3:** नितीन आणि हरी हे त्यांच्या घराभोवती एक संरक्षक भिंत बांधत होते. नितीन 60 फुट लांबीची लांब बाजू बांधत होता आणि हरी 40 फूट लांबीची लहान बाजू बांधत होता. नितीनने सिमेंटच्या 3 पिशव्या वापरल्या परंतु हरीने फक्त सिमेंटच्या 2 पिशव्या वापरल्या आहेत. नितीनला काळजी वाटत होती की हरीने बांधलेली भिंत त्याने बांधलेल्या भिंती इतकी मजबूत होणार नाही कारण त्याने कमी सिमेंट वापरले आहे.

(?) नितीन त्याच्या विचाराने बरोबर आहे का ?

नितीन आणि हरी यांच्या बाबतीत आम्ही भिंतीच्या लांबीचे गुणोत्तर हे त्यांच्यापैकी प्रत्येकाने वापरलेल्या सिमेंटच्या पिशव्यांशी तुलना करून ते प्रमाणात आहेत का ते पाहिले पाहिजे.

नितीनच्या बाबतीतील गुणोत्तर हे 60:3 म्हणजेच 20:1 (त्याच्या साध्या रुपात)

हरीच्या बाबतीतील गुणोत्तर हे 40:2 म्हणजेच 20:1 (त्याच्या साध्या रुपात)

म्हणून दोन्ही गुणोत्तरे प्रमाणात असल्याने भिंती सारख्याच मजबूत आहेत. नितीनने काळजी करू नये.

(?) **उदाहरण 4:** माझ्या शाळेमध्ये 5 शिक्षक आणि 170 विद्यार्थी आहेत. माझ्या शाळेतील शिक्षकांचे विद्यार्थ्यांशी असलेले गुणोत्तर 5:170 आहे. तुमच्या शाळेतील शिक्षकांची आणि विद्यार्थ्यांची संख्या मोजा. तुमच्या शाळेतील शिक्षकांचे विद्यार्थ्यांशी असलेले गुणोत्तर किती आहे ? ते खाली लिहा.

_____ : _____

(?) तुमच्या शाळेतील शिक्षक विद्यार्थी गुणोत्तर हे माझ्या शाळेतील गुणोत्तराच्या प्रमाणात आहे का ?

(?) **उदाहरण 5:** तुमच्या वर्ग खोलीतील काळ्या फलकाची जाडी आणि उंची (नजिकच्या सें. मी. मध्ये) मोजा. काळ्या फलकाच्या जाडीचे उंचीशी असणारे गुणोत्तर किती आहे ?

_____ : _____

(?) काळ्या फलकाची जाडी आणि उंचीच्या गुणोत्तराशी प्रमाणात असणारा एक आयत तुमच्या वहीत तुम्ही काढू शकता का ?

(?) तुम्ही काढलेल्या आयताची तुमच्या वर्ग मित्रांनी काढलेल्या आयताशी तुलना करा. ते सर्व सारखे दिसतात का ?

गणिती बोल

शिक्षकांना सूचना : विद्यार्थ्यांना संबंधित अशी अधिक उदाहरणे द्या आणि त्यांना ते बरोबर का वाटतात याची कारणे विचारा. या समस्यांशी गुंतवून निगडीत राहणे आणि प्रमाणबद्ध तर्क प्रक्रियेद्वारे उपाय शोधणे हे शिकणाच्या प्रक्रिया आणि समस्या सोडविण्याच्या पध्दतीसोबत असले पाहिजे.

? **उदाहरण 6:** जेव्हा निलीमा 3 वर्षाची होती तेव्हा तिच्या आईचे वय तिच्या वयाच्या 10 पट होते. निलीमाच्या वयाचे तिच्या आईच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर किती आहे ? जेव्हा निलीमाचे वय 12 वर्षे असताना त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर किती असेल ? ते सारखेच राहील का ? जेव्हा निलीमाचे वय 3 वर्षे असताना निलीमाच्या वयाचे तिच्या आईच्या वयाशी असणारे गुणोत्तर 3:30 आहे. (तिच्या आईचे वय हे निलीमाच्या वयाच्या 10 पट आहे.) साध्या रुपात ते 1:10 आहे.

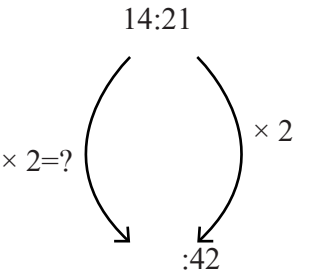
जेव्हा निलीमाचे वय 12 वर्षे असताना (म्हणजेच 9 वर्षानंतर) त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 12:39 होईल. (9 वर्षानंतर तिच्या आईचे वय 39 वर्षे होईल) साध्या रुपात ते 4:13 आहे.

जेव्हा आम्ही गुणोत्तराच्या पदामध्ये तीच संख्या मिळवितो (किंवा वजा करतो) तेव्हा गुणोत्तर बदलते आणि ते मूळ गुणोत्तराच्या प्रमाणात नसते.

? **उदाहरण 7:** खालील गुणोत्तराच्या 14:21 ला प्रमाणात असणाऱ्या गाळलेल्या संख्या भरा.

_____ : 42 6 : _____ 2 : _____

पहिल्या गुणोत्तरात आम्हाला पहिले पद माहित नाही. परंतु दुसरे पद 42 आहे. ते 14:21 या गुणोत्तराच्या दुसऱ्या पदाच्या 2 पट आहे. म्हणून पहिले पद हे सुद्धा 14 (पहिल्या पदाच्या) च्या 2 पट आहे. म्हणून प्रमाणातील गुणोत्तर हे 28:42 आहे.



दुसऱ्या गुणोत्तरासाठी पहिले पद 6 आहे.

(?) 6 मिळविण्यासाठी 14 ला कोणत्या अवयवाने आम्ही गुणले पाहिजे ? ते पूर्णांक असू शकते का ? किंवा ते अपूर्णांक असू शकतात का ?

आम्ही हे $14y = 6$ असे नमुन्यात लिहु शकतो. म्हणून $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ म्हणून आम्ही 21 ला सुध्दा (14:21 चे दुसरे पद) सारख्याच $\frac{3}{7}$ या अवयवाने गुणणे गरजेचे आहे. $21 \times \frac{3}{7}$ हे 9 आहे. म्हणून गुणोत्तर हे 6:9 आहे.

तिसऱ्या गुणोत्तरातील पहिले पद 2 आहे.

आम्हाला असे दिसून येते की जेव्हा आम्ही 14 ला (14:21 चे पहिले पद) 7 ने भागल्यास (14 आणि 21चा म. सा. वि.) आम्हाला 2 मिळते.

जर आम्ही 21 ला सुध्दा 7 ने भागल्यास आम्हाला 3 मिळते म्हणून गुणोत्तर हे 2:3 आहे.

गाळलेली कॉफी! [Filter Coffee!]



गाळलेली कॉफी ही दुधात कॉफीचा काढा मिसळून बनविलेले पेय आहे. मंजूनाथ त्याच्या कॉफी दुकानमध्ये साधारणपणे 15 मि.ली. कॉफीचा काढा 35 मि.ली. दुधात मिसळून एक कप गाळलेली कॉफी बनवितो.

या घटनेमध्ये आम्ही असे म्हणू शकतो की कॉफीच्या काढ्याचे दुधाशी असलेले गुणोत्तर 15:35 आहे. जर ग्राहकांना 'अधिक मजबूत' गाळलेली कॉफी हवी असेल तर मंजुनाथ 20 मि.ली. काढा हा 30 मि.ली. दुधात मिसळतो. येथे गुणोत्तर 20:30 आहे.

(?) ही कॉफी अधिक 'तीव्र' का आहे?

आणि जेव्हा त्यांना 'सौम्य' गाळलेली कॉफी हवी असते तेव्हा तो 10 मि. ली. कॉफी आणि 40 मि. ली. दूध मिसळतो त्यामुळे गुणोत्तर 10:40 होते.

गणिती बोल

(?) ही कॉफी सौम्य' का आहे?

गणिती बोल



खालील कोष्टक हे मंजुनाथ कॉफीचा काढा दुधाशी कसा मिसळतो हे वेगवेगळ्या गुणोत्तराने दर्शविले आहे. नेहमीच्या कॉफीपेक्षा जर कॉफी तीव्र किंवा सौम्य असेल तर शेवटचा स्तंभ लिहा.

कॉफीचा काढा (मि. ली. मध्ये)	दूध (मि. ली. मध्ये)	नेहमी प्रमाणे /तीव्र / सौम्य
300	600	
150	500	
200	400	
24	56	
100	300	

शोधा पाहू. [Figure it out]

1. सत्य असलेली खालील विधाने वर्तुळांकीत करा.

(i)	4 : 7 :: 12 : 21	(ii)	8 : 3 :: 24 : 6
(iii)	7 : 12 :: 12 : 7	(iv)	21 : 6 :: 35 : 10
(v)	12 : 18 :: 28 : 12	(vi)	24 : 8 :: 9 : 3

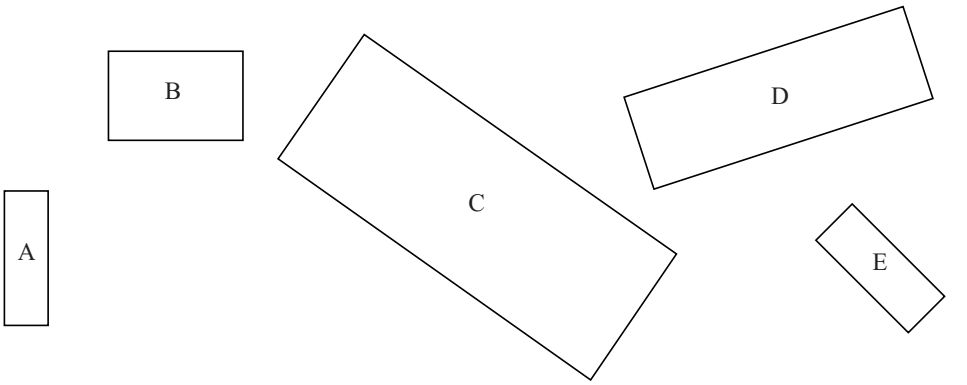
2. 4:9 शी प्रमाणात असणारी 3 गुणोत्तरे लिहा.

_____ : _____ _____ : _____ _____ : _____

3. 18:24 शी प्रमाणात असणाऱ्या या गुणोत्तरांच्या गाळलेल्या संख्या भरा.

3 : _____ 12 : _____ 20 : _____ 27 : _____

4. खालील आयतांकडे पहा. कोणते आयत एकमेकांशी समरूप आहेत ? तुम्ही मोजपट्टी वापरून रुंदी आणि उंची मोजून त्याचा पडताळा करु शकता आणि त्यांच्या गुणोत्तरांची तुलना करु शकता.



5. खालील आयताकडे पहा. तुमच्या वहीमध्ये रुंदीच्या उंचीशी असलेल्या समान गुणोत्तरासह एक लहान आयत आणि एक मोठा आयत काढू शकाल का ? तुमच्या वर्गमित्रांच्या काढलेल्या रेखाचित्रांशी तुम्ही काढलेल्या आयताची तुलना करा.

ते सर्व सारखेच आहेत का ? जर ते तुम्ही काढलेल्या आयतापेक्षा वेगळे असतील तर का याचा तुम्ही विचार कराल का ? ते चुकीचे आहेत का ?

गणिती बोल

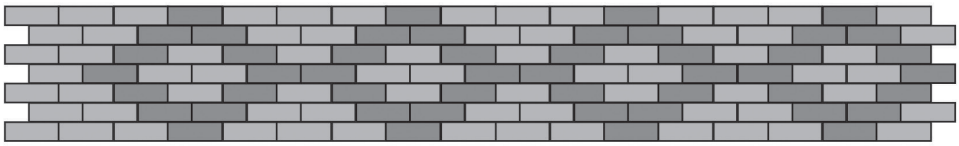


6. खालील आकृतीमध्ये रंगीत विटांनी बनविलेल्या नमुन्यासह एका लांब विटांच्या भिंतीचा एक छोटासा भाग दर्शविलेला आहे. प्रत्येक भिंतीवर संपूर्ण भिंतीवरती हाच नमुना चालू राहतो. करड्या (राखाडी) विटांची रंगीत विटांशी असलेले गुणोत्तर किती आहे? गुणोत्तरांना त्यांच्या साध्या रुपात लिहीण्याचा / देण्याचा प्रयत्न करा.

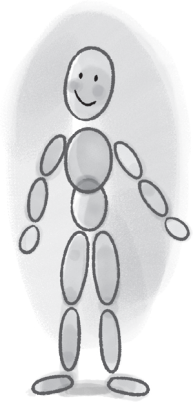
(a)



(b)



7. आम्ही कांही मानवी आकृत्या काढूया. तुमच्या मित्राचे शरिर मोजा त्याच्या डोक्याची, धडाची, हातांची आणि पायांची लांबी मोजा. खाली सांगितलेल्या गुणोत्तरानुसार लिहा.



डोळे : धड

_____ : _____

धड : हात

_____ : _____

धड : पाय

_____ : _____





आता वरीलप्रमाणे सममूल्य गुणोत्तरे असलेल्या डोके, धड, हात आणि पाय यांची आकृती काढा.

? जर गुणोत्तरे प्रमाणबध्द असतील तर रेखाचित्र अधिक वास्तववादी दिसते का ? का ? का नाही ?

गणिती बोल

शिक्षकांना सूचना : या सर्व कृतीमध्ये विद्यार्थ्यांना त्यांची रेखाचित्रे प्रमाणात का आहेत याचे कारण सांगण्यास प्रोत्साहीत करा.

त्रैरासिका - तीनचा नियम: [Trairasika—The rule of three]

? **उदाहरण 8:** 120 विद्यार्थी असलेल्या एका शाळेमध्ये मध्यान्ह भोजनासाठी स्वयंपाकी सहसा 15 कि.ग्रॅ. तांदूळ वापरतात. (बनवितात.) पावसाळ्याच्या एका दिवशी फक्त 80 विद्यार्थी शाळेला आले आहेत. अन्न वाया जाऊ नये म्हणून स्वयंपाक्याने किती किलो तांदूळ बनविला पाहिजे ?

विद्यार्थ्यांच्या संख्येचे तांदळाच्या प्रमाणाशी असलेले गुणोत्तर प्रमाणात असणे गरजेचे आहे.

म्हणून 120 : 15 :: 80 : ?

(?) पहिल्या पदातील बदलाचा अवयव किती आहे ?

पदांना भागून आम्ही ते काढू शकतो. $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ विद्यार्थ्यांची संख्या $\frac{2}{3}$ या एका अवयवाने संक्षिप्त रुपात होते.

त्याच अवयवाने तांदळाच्या वजनाला गुणल्यास आम्हाला $15 \times \frac{2}{3} = 10$ मिळते.

म्हणून स्वयंपाक्याने त्या दिवशी 10 कि. ग्रॅ. तांदूळ बनविला पाहिजे.

वरील परिस्थिती ही अशा समस्येचे एक सामान्य उदाहरण आहे जिथे आम्हाला उकल काढण्यासाठी प्रमाणित तर्क वापरण्याची आवश्यकता आहे. चार राशी प्रमाणात जोडलेल्या असून त्यापैकी तीन राशी ज्ञात आहेत आणि आम्हाला चौथी अज्ञात राशी काढावयाची आहे.

अशा समस्या सोडविण्यासाठी आम्ही बैजिक संकेतांचा उपयोग करून दोन प्रमाणातील गुणोत्तरांची रचना करु शकतो.

$$a : b :: c : d.$$

ही दोन्ही गुणोत्तरे प्रमाणात असण्यासाठी आम्हाला माहित आहे की पद c हे पद a च्या एका म्हणजेच f या अवयवाने गुणावे आणि पद d हे पद b च्या एका त्याच f या अवयवाने गुणने.

$$c = fa \quad ...(1)$$

$$d = fb \quad ...(2)$$

(1) आणि (2) वरून आम्ही असे सांगू शकतो की

$$f = \frac{c}{a} \text{ आणि } f = \frac{d}{b}$$

$$\text{म्हणून } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

दोन्ही बाजूंना ab ने गुणल्यास आम्हाला मिळते,

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$bc = ad \text{ किंवा } ad = bc$$

अशाप्रकारे जेव्हा a : b :: c : d, तेव्हा ad = bc याला पदांचा तिरकस गुणाकार असे म्हणतात.

म्हणून ad=bc आम्ही असे दर्शवितो की,

$$d = \frac{bc}{a}$$

जेव्हा तिरकस गुणाकार केला असता जर त्यांची पदे समान असतील तर दोन गुणोत्तरे प्रमाणात असतात. अशा तिरकस गुणाकाराद्वारे चौथी अज्ञात राशी काढता येऊ शकते.

प्राचीन भारतात आर्यभट्ट (इ. स. 199) आणि इतरांनी अशा प्रकारच्या प्रमाणाच्या समस्यांना तीन समस्यांचा नियम असे म्हटले होते. तेथे 3 संख्या प्रमाण (आमच्या बाबतीत माप 'a'). फल (आमच्या बाबतीत फल 'b' आणि इच्छा (आमच्या बाबतीत मागणी 'c') दिलेल्या आहेत. इच्छा फल काढण्यासाठी (आमच्या बाबतीत उत्पन्न 'd') आर्यभट्ट म्हणतात की,

"फलाला इच्छाने गुणा आणि परिणामी गुणाकाराला प्रमाणाने भागा."

दुसऱ्या शब्दात आर्यभट्ट म्हणतात की

"प्रमाण : फल : : इच्छा : इच्छा फल" म्हणून

प्रमाण × इच्छा फल = फल × इच्छा

अशाप्रकारे

$$\text{इच्छा फल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा}}{\text{प्रमाण}}$$

आर्यभट्ट यांनी प्रस्तापित केलेल्या तिरकस गुणाकार पध्दतीचा प्राचीन भारतीयांनी प्रमाणातील समाविष्ट गुंतागुंतीच्या समस्या सोडविल्या.

उदाहरण 9: एक कार 90 कि. मी. अंतर 150 मिनिटात प्रवास करते. जर ती त्याच / सारख्याच वेगाने प्रवास करीत राहिली तर 4 तासात ती किती अंतर आक्रमिते ?

जर ती कार सारख्याच वेगाने प्रवास करीत राहिली तर लागणाऱ्या वेळेचे गुणोत्तर हे कापलेल्या अंतराच्या गुणोत्तराशी प्रमाणात असले पाहिजे.

150 : 90 :: 4 : ?

प्रश्न तयार करण्याचा हा योग्य / बरोबर मार्ग आहे का ?

नाही, कारण 150 हे मिनिटात आहे परंतु 4 हे तासामध्ये आहे. दुसऱ्या गुणोत्तरात वेळेसाठी पहिल्या गुणोत्तरा प्रमाणेच एकके वापरली पाहिजेत. 4 तास म्हणजे 240 मिनिट असल्याने बरोबर रुप हे आहे.

150 : 90 :: 240 : ?

240 मिनिटामध्ये आक्रमिलेले अंतर तुम्ही कसे काढू शकाल ?

तुमच्या वर्गमित्रांशी चर्चा करा आणि वेगवेगळ्या पद्धती वापरून उत्तर काढा.

शिक्षकांना सूचना : अंतराची समस्या सोडविण्यासाठी एकच 'पध्दत' देण्याऐवजी विद्यार्थ्यांना वेगवेगळ्या पद्धतीद्वारे उत्तर काढण्यासाठी प्रोत्साहीत करा.

ते उत्तर काढण्यासाठी सममूल्य अपूर्णांक आणि सममूल्य गुणोत्तराबद्दलच्या त्यांच्या आकलनाचा उपयोग करू शकतात.

आम्ही हे प्रमाणात असे लिहु शकतो.

$$150 : 90 :: 240 : x$$

तिरकस गुणाकाराने आम्हाला मिळते,

$$150 \times x = 240 \times 90$$

म्हणून, $$x = \frac{240 \times 90}{150}.$$

$$= \frac{\overset{48}{\cancel{240}} \times \overset{3}{\cancel{90}}}{\underset{5}{\cancel{150}}} = 144$$
$$1$$

कारने 4 तासात आक्रमिलेले अंतर 144 कि. मी. आहे.

उदाहरण 10: हिमाचल प्रदेशातील एक लहान शेतकरी 200 ग्रॅम चहा पावडरचे पाकिट ₹200 ला प्रत्येकी विकतो. मेघालयातील एक मोठी कंपनी प्रत्येकी 1 कि. ग्रॅ. चहाचे पाकिट ₹800 ला विकते. दोन्ही ठिकाणच्या वजनाची किंमतीशी असणारी गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का ? कोणती चहा पावडर जास्त महाग आहे ?

हिमाचल प्रदेशातील वजनांचे किंमतीशी असलेले गुणोत्तर 200 : 200 आहे.

मेघालयातील वजनाचे किंमतीशी असलेले गुणोत्तर किती आहे ? ते 1 : 800 आहे का ? हे योग्य ठरणार नाही कारण आम्ही हिमाचलाच्या बाबतीत वजन हे ग्रॅममध्ये विचारात घेतले. म्हणून आम्ही मेघालयात नंतर वजन हे ग्रॅममध्ये रुपांतरीत केल्यावर वजनाचे किंमतीशी असलेले गुणोत्तर 1000 : 800 आहे.

जर गुणोत्तरे ही प्रमाणात आहेत हे तपासण्यासाठी आम्हाला जर दोन्ही गुणोत्तरे त्यांच्या साध्या रुपात सारखीच आहेत हे पाहणे गरजेचे आहे.

हिमाचल्याच्या चहाचे त्याच्या साध्या रुपातील गुणोत्तर 1:1 आहे.

मेघालयाच्या चहाचे त्याच्या साध्या रुपातील गुणोत्तर 5:4 आहे.

म्हणून गुणोत्तरे ही प्रमाणात नाहीत.

(?) कोणता चहा अधिक महाग आहे ? का ?

शिक्षकांना सूचना : अधिक महाग चहावरील चर्चेसाठी, ते त्यांच्या निष्कर्षावर कसे पोहोचले आणि चहा महाग असण्याची कारणे काय असू शकतात यावर चर्चा करण्यास प्रोत्साहीत करा.

कोणता चहा जास्त महाग आहे या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी आपण दोन्ही ठिकाणच्या समान वजनाच्या किंमतीची तुलना करु.

मेघालयातील 1 कि.ग्रॅ. चहाची किंमत किती आहे ? ती ₹800 आहे.

जर हिमाचलमध्ये 200 ग्रॅम चहाची किंमत ₹200 असेल तर 1 कि. ग्रॅ. चहाची किंमत किती आहे ?

1 कि. ग्रॅ. चहाची किंमत 'x' रुपये आहे असे सांगू. 200 ग्रॅम हे 1 कि. ग्रॅमचे $\frac{1}{5}$ आहे.

म्हणून, $\frac{1}{5} \times x = 200$

दोन्ही बाजूला 5 ने गुणल्यास आम्हाला मिळते

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000$$

म्हणून 1 कि. ग्रॅ. चहाची मेघालयातील किंमत ₹800 आणि हिमाचल प्रदेशातील किंमत ₹1000 आहे.

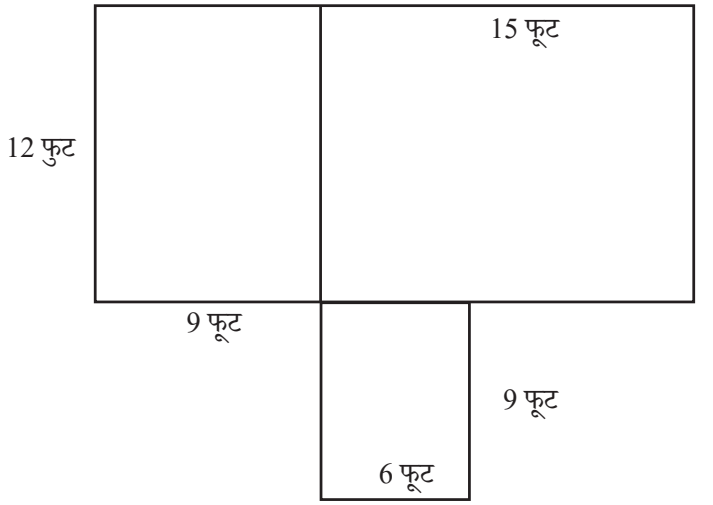
म्हणून हिमाचल प्रदेशातील चहा हा अधिक महाग आहे.

कृती 1: तुमचा आवडता पदार्थ घ्या. तुमच्या कुटुंबासाठी हा पदार्थ बनविण्यासाठी आवश्यक असलेले सर्व साहित्य आणि त्याचे प्रमाण काढा. समजा तुम्ही एक सण साजरा करीत आहात आणि तुम्हाला 15 पाहुण्यांना आमंत्रित करावयाचे आहे. त्यांच्यासाठी सारखाच पदार्थ बनविण्यासाठी आवश्यक असलेल्या घटकांचे प्रमाण काढा.

शोधा पाहू. [Figure it out]

1. पृथ्वी एका वर्षात सूर्याभोवती सुमारे 940 दश लक्ष किलो मीटर प्रवास करते. तर एका आठवड्यात ती किती किलो मीटर प्रवास करेल ?

2. एक गवंडी आकृतीत दर्शविलेल्या आकाराचे एक घर बांधत आहे. त्याला दोन खोलीना वेगळ्या करणाऱ्या बाहेरील भिंती आणि आतील भिंती बांधणे गरजेचे आहे. एक 10 फुटाची भिंत बांधण्यासाठी त्याला अंदाजे 1450 विटा आवश्यक आहेत. त्याला घर बांधण्यासाठी किती विटांची आवश्यकता आहे ? सर्व भिंती समान उंचीच्या आणि जाडीच्या आहेत असे समजा.



? पुनीतचे वडील 50 कि. मी. / तास या वेगाने मोटार सायकल चालवून लखनौहुन कानपूरला 2 तासांत गेले आहेत. जर तो 75 कि. मी. / तास या वेगाने गाडी चालवित असेल तर त्याला कानपूरला पोहोचण्यासाठी किती वेळ लागेल ? ही समस्या आम्ही प्रमाणानुसार बनवू शकतो का ?



$$50 : 2 :: 75 : \_\_$$

पुनीतच्या वडीलांना कानपूरला पोहोचण्यासाठी जास्त वेळ किंवा कमी वेळ लागेल ? त्याविषयी विचार करा.



जरी ही समस्या मागील उदाहरणासारखीच दिसत असली तरी ही समस्या तीनचा नियम वापरून सोडविता येणार नाही !

जेव्हा वेग वाढतो तेव्हा प्रत्यक्षात प्रवासासाठी लागणारा वेळ कमी होतो. म्हणून ही समस्या $50 : 2 :: 75 : \_\_$ यासारखी लिहीता येणार नाही.

? **कृती 2:** बाजारात जा आणि एकाच शांपूच्या वेगवेगळ्या आकाराच्या शांपूच्या भांड्याच्या किंमती गोळा करा आणि खाली दिलेल्या सारणीप्रमाणे एक कोष्टक तयार करा. शांपूचे आकारमान (घनफळ) हे किंमतीच्या प्रमाणात आहे का ते पहा.

भांडे	घनफळ	किंमत
बंद पाकिट	6 मि.ली.	₹2
लहान बाटली	180 मि.ली.	₹154
मध्यम बाटली	340 मि.ली.	₹276
मोठी बाटली	1000 मि.ली.	₹540

वरील कोष्टकातील नमुन्याच्या गुणोत्तराची तुलना करूया. एका बंद पाकिटाच्या घनफळाचे एका छोट्या बाटलीच्या घनफळाशी असणारे गुणोत्तर 6:180 आहे. त्यांच्या किंमतीचे गुणोत्तर 2:154 आहे. ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का ?

(?) किंमतीचे गुणोत्तर हे घनफळाच्या गुणोत्तराशी प्रमाणात नाही असे तुम्हाला का वाटते ?

कंपनी आणि ग्राहकांसाठी वेगवेगळ्या आकारांच्या बाटल्यांचे फायदे आणि तोटे यावर चर्चा करा. पर्यावरणीय प्रभाव कमी करण्यासाठी तुम्ही कंपनी आणि ग्राहकांना काय शिफारस कराल, इतर उत्पादनांच्या बाबतीतही असेच घडते का ?

गणिती बोल

बाजारातील इतर उत्पादनांसाठीही असेच कोष्टक बनवा, ज्यामध्ये एकाच उत्पादनांच्या वेगवेगळ्या मापांसाठी वेगवेगळ्या किंमती काढा. उदाहरणार्थ तांदूळ किंवा पीठ.

उत्पादनांच्या किंमती या वेगवेगळ्या मापांच्या प्रमाणात आहेत याचे निरीक्षण करा.

वर्गामध्ये एकाच / सारख्याच उत्पादनांच्या किंमतींच्या मापांशी असलेल्या प्रमाणाची चर्चा करा.

शिक्षकांना सूचना : विद्यार्थ्यांना एक प्रकल्प द्या. वर्गाचे गटामध्ये विभाजन करून सुरुवात करा. प्रत्येक गटाने एका दुकानात जावे आणि एकाच / सारख्याच उत्पादनाच्या वेगवेगळ्या मापांच्या किंमती गोळा कराव्यात. उदाहरणार्थ त्यांनी 500 ग्रॅम तांदूळ, 1 किलो तांदूळ आणि 10 किलो तांदळाच्या किंमती लिहुन ठेवाव्यात. त्यांनी मापाचे आकार आणि किंमती असलेले कोष्टक बनवावेत आणि ते उर्वरीत वर्गासमोर सादर करावेत. त्यांनी किंमती प्रमाणात आहेत की नाही आणि का यावर चर्चा करावी.

7.5 देवाणघेवाण, परंतु समान नाही ! [Sharing, but not Equally!]

(?) **कृती 3:** एक जोडी तयार करा. मोजता येण्याजोग्या 12 वस्तू किंवा कागद गोळा करा. (ते नाणी, बीया किंवा खडे असू शकतात.) आता त्या तुमच्या दोघांमध्ये वेगवेगळ्या प्रकारे वाटून घ्या.





(?) जर तुम्ही त्यांना समान प्रमाणात विभागले तर तुमच्या प्रत्येकाच्या कागदांच्या संख्येचे गुणोत्तर किती असेल ? तुम्हाला प्रत्येकी 6 कागद मिळतील तर गुणोत्तर 6:6 किंवा सर्वात साध्या रुपात 1:1 आहे.

आता समान वाटणी करू नका.

(?) जर तुमच्या जोडीदाराला 5 कागद मिळाले तर तुम्हाला किती वस्तु मिळतील ? कागदांचे गुणोत्तर किती आहे ?

तुमच्या जोडीदाराच्या कागदांचे तुमच्या कागदांशी असलेले गुणोत्तर 5:7 आहे.

(?) आता, जर तुम्हाला दोघामध्ये 3:1 या प्रमाणात कागद वाढून घ्यायचे असतील तर तुमच्या प्रत्येकाला किती कागद मिळतील ?

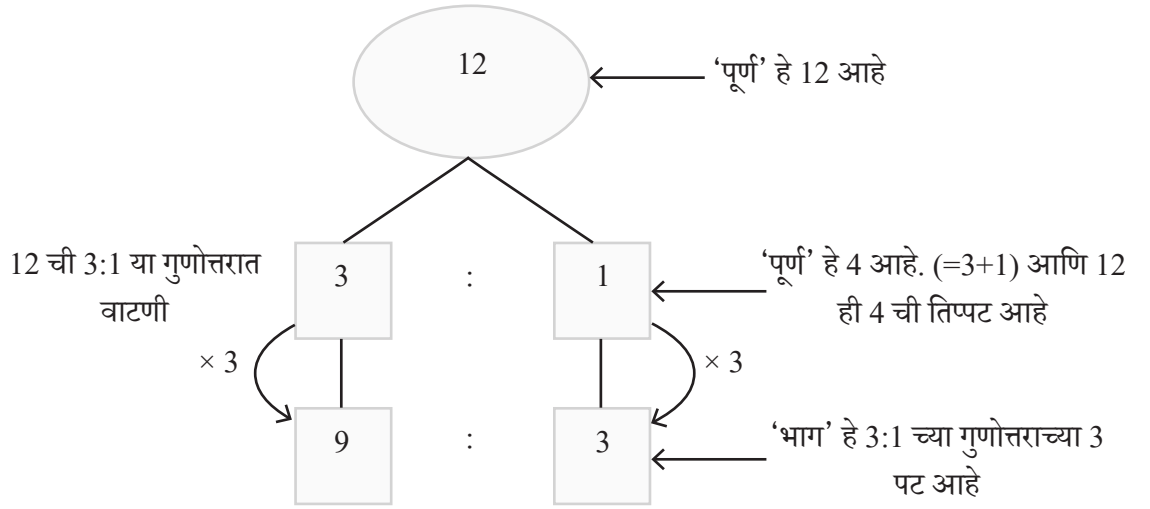
कागदांची वेगवेगळ्या प्रकारे वाटणी करा आणि कोणते संयोजन 3:1 च्या गुणोत्तरात आहे हे पहा.

कागद हे 3:1 या गुणोत्तरात वाटण्याचा एक प्रकार खालीलप्रमाणे आहे.

1. तुमचा जोडीदार 3 कागद घेतो आणि तुम्ही 1 कागद घ्या. आता 8 कागद शिल्लक आहेत.
2. तुमचा जोडीदार 3 अधिक कागद घेतो आणि तुम्ही 1 अधिक कागद घ्या. आता 4 कागद शिल्लक आहेत.
3. तुमचा जोडीदार 3 अधिक कागद घेतो आणि तुम्ही 1 अधिक कागद घ्या. आता आणखी कागद शिल्लक राहात नाही.

म्हणून तुमच्या जोडीदाराला एकुण 9 कागद आणि तुम्हाला 3 कागद मिळतात.

जेव्हा आम्ही दोन व्यक्तीमध्ये 12 कागद 3:1 या गुणोत्तरात विभागतो एका व्यक्तीला 9 कागद आणि दुसऱ्या व्यक्तीला 3 कागद मिळतात.



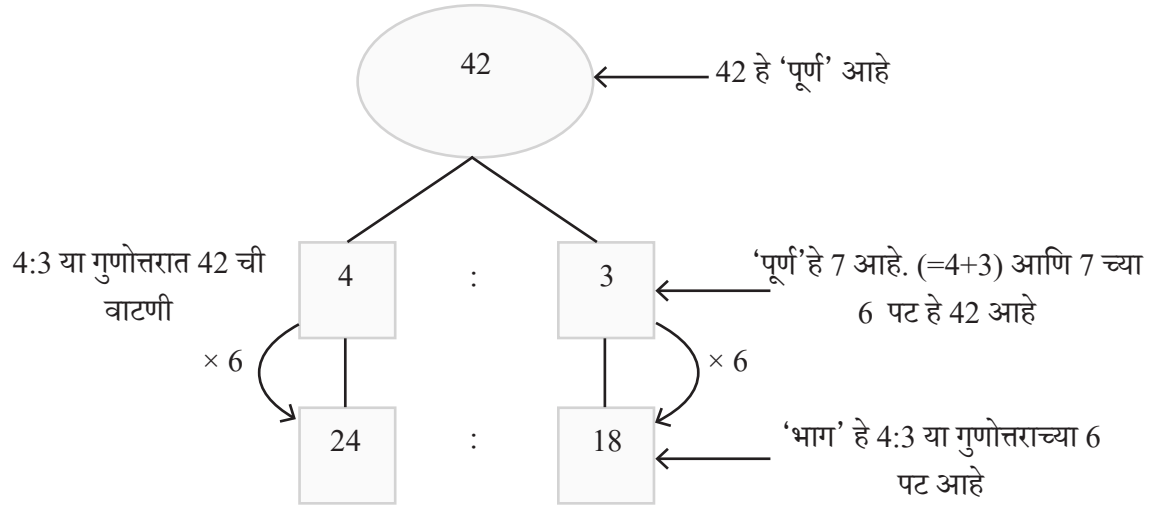
(?) आता जर तुम्हाला तुमच्या दोघांमध्ये 4:3 या गुणोत्तरात 42 कागद वाटायचे असतील तर ते तुम्ही कसे कराल ?

समान प्रक्रिया वापरण्यास बराच वेळ लागेल ! विशिष्ट प्रमाणात भागांसह संपूर्ण भाग वाटप करण्याचा एक सोपा मार्ग आहे.

तुम्हाला 42 हे गटांमध्ये विभागणे गरजेचे अशाप्रकारे आहे की तुमच्या जोडीदाराला 4 गट मिळतील आणि तुम्हाला 3 गट मिळतील.

(?) प्रत्येक गटाचा आकार किती ? जर तुमच्या जोडीदाराला 4 गट मिळाले आणि तुम्हाला 3 गट मिळाले तर एकूण गटांची संख्या 7 आहे म्हणून प्रत्येक गटाचा आकार $42 \div 7 = 6$ आहे.

जेव्हा तुम्ही 42 कागदांची 4:3 या गुणोत्तरात वाटणी करता, तेव्हा प्रत्येक गटाच्या आकाराने गटांच्या संख्येला गुणल्यास तुमच्या जोडीदाराला 24 कागद आणि तुम्हाला 18 कागद मिळतात.



सर्व सामान्यपणे जेव्हा आम्हाला x ही राशी m:n या गुणोत्तरात विभागायची असते तेव्हा आम्ही खालीलप्रमाणे कृती करतो.

1. आम्हाला दोन गटामध्ये 'x' ही विभागणी अशी गटामध्ये करावी लगेल की पहिल्या भागात m गट आणि दुसऱ्या भागात n गट असतील.
2. परंतु प्रत्येक गटाचा आकार किती आहे ? x ला गटांच्या संख्येने भागून हे काढता येऊ शकते. गटांची संख्या $m + n$ ही आहे. म्हणून प्रत्येक गटाचा आकार $\frac{x}{m+n}$ हा आहे.
3. म्हणून पहिल्या भागात $m \times \frac{x}{m+n}$ वस्तू आहेत आणि दुसऱ्या भागात $n \times \frac{x}{m+n}$ वस्तू आहेत.

   अशाप्रकारे जर आम्हाला x या राशीला m:n या गुणोत्तरात विभागायचे आहे तेव्हा भाग हे

   $m \times \frac{x}{m+n}$ आणि $n \times \frac{x}{m+n}$ होतील. आम्हाला असे दिसून येते की

$$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n.$$

उदाहरण 11: प्रशांती आणि भुवन यांनी त्यांच्या शाळेजवळ एक खाद्य पदार्थाचा व्यवसाय सुरु केला आहे. प्रशांतीने ₹ 75000 आणि भुवनने ₹ 25000 ची गुंतवणूक केली आहे. पहिल्या महिन्याच्या शेवटी त्याना ₹ 4000 नफा मिळतो. त्यांच्या गुंतवणूकीच्या सारख्याच गुणोत्तरात नफा वाटून घेण्याचे त्यानी ठरविले आहे. प्रत्येक व्यक्तीला मिळणारा नफा किती ?

त्यांच्या गुंतवणूकीचे गुणोत्तर 75000: 25000 आहे.

हे गुणोत्तर त्यांच्या साध्या रुपात आम्हाला 3:1 असे मिळते.

3+1 हे 4 आहे आणि 4000 ला 4 ने भागल्यास नफा आम्हाला 1000 मिळतो.

म्हणून प्रशांतीचा नफा 3×1000 आणि भुवनचा नफा (वाटा) 1×1000 आहे.

म्हणून प्रशांतीला ₹ 3000 आणि भुवनला ₹ 1000 नफा मिळतो.

उदाहरण 12: 40 किलोच्या एका मिश्रणात वाळू आणि सिमेंट यांचे गुणोत्तर 3:1 आहे. वाळूचे सिमेंटशी गुणोत्तर 5:2 होण्यासाठी किती सिमेंट मिश्रणामध्ये मिळवावे लागेल ?

आता मूळ मिश्रणातील वाळू आणि सिमेंटच्या राशी (मात्रा) काढा.

गुणोत्तर 3:1 आहे आणि एकूण वजन 40 कि. ग्रॅ. आहे.

म्हणून वाळूचे वजन $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ कि.ग्रॅ. आहे.

सिमेंटचे वजन $\frac{1}{(3+1)} \times 40 = 10$ कि.ग्रॅ. आहे.

नवीन मिश्रणातील वाळूचे वजन सारखेच आहे. ते 30 इतके राहते. परंतु वाळूचे सिमेंटशी असलेले नवीन गुणोत्तर 5:2 आहे म्हणून प्रश्न 5:2 :: 30:? असा आहे.

जर गुणोत्तर 5:2 आहे तर दुसरे पद हे पहिल्या पदाच्या $\frac{2}{5}$ पट आहेत. म्हणून नवीन गुणोत्तर हे 5:2 शी सममूल्य आहे, दुसरे पद हे नवीन गुणोत्तरामध्ये सुध्दा 30 च्या $\frac{2}{5}$ पट आहे.

$\frac{2}{5} \times 30 = 12$

जर वाळूचे सिमेंटशी असलेले गुणोत्तर 5:2 आहे तर नवीन मिश्रणामध्ये 12 कि. ग्रॅ. सिमेंट असले पाहिजेत. या अगोदरच 10 कि. ग्रॅ. सिमेंट तेथे आहे म्हणून आम्हाला मूळ मिश्रणात 2 कि. ग्रॅ. सिमेंट मिळविणे गरजेचे आहे.

शोधा पाहू. [Figure it out]

1. ₹ 4500 हे दोन भागामध्ये 2:3 या गुणोत्तरात विभागा.
2. विज्ञान प्रयोगशाळेमध्ये द्रावण बनविण्यासाठी आम्ल आणि पाणी हे 1:5 या गुणोत्तरामध्ये मिसळले आहेत. जर एका बाटलीमध्ये 240 मि. ली. द्रावण असेल तर त्या द्रावणामध्ये आम्ल आणि पाणी किती असेल ?
3. हिरवा रंग बनविण्यासाठी निळा आणि पिवळा रंग 3:5 या गुणोत्तरात मिसळलेला आहे. 40 मि. ली. इतका हिरवा रंग तयार करण्यासाठी हे दोन रंग किती मात्रेत आवश्यक आहेत ? हलक्या झळाळीचा हिरवा रंग बनविण्यासाठी मिश्रणामध्ये 20 मि.ली. पिवळा रंग मिसळला आहे. तर निळ्या आणि पिवळ्या रंगातील नवीन गुणोत्तर किती आहे ?
4. मऊ इडली बनविण्यासाठी तुम्हाला तांदूळ आणि उडीद डाळ हे 2:1 गुणोत्तरात मिसळणे आवश्यक आहे. जर तुम्हाला उद्या सकाळी इडली बनविण्यासाठी 6 कप मिश्रण आवश्यक असेल तर किती कप तांदूळ आणि उडीद डाळ तुम्हाला आवश्यक आहे ?
5. लाल आणि पिवळा रंग 3:5 या गुणोत्तरात मिसळून मी एक बादली नारंगी रंग बनविलेला आहे. मी या मिश्रणामध्ये आणखी एक पिवळ्या रंगाची बादली मिसळली आहे. तर नवीन मिश्रणातील लाल रंगाचे पिवळ्या रंगाशी असलेले गुणोत्तर किती आहे ?

7.6 एककांचे रुपांतर : [Unit Conversions]

आपण आधी पाहिले आहे की प्रमाणातील समस्या सोडविण्यासाठी आपल्याला अनेकदा एका पध्दतीपासून दुसऱ्या पध्दतीतील एकके रुपांतरीत करावी लागतात. तुमच्या संदर्भासाठी येथे कांही महत्वाची एकक रुपांतरे आहेत.

लांबी

1 मीटर	=	3.281 फूट

क्षेत्रफळ

1 चौरस मीटर	=	10.764 चौरस फुट
1 एकर	=	43,560 चौरस फुट
1 हेक्टर	=	10,000 चौरस मीटर
1 हेक्टर	=	2.471 एकर

घनफळ

1 मिली लीटर (मि.ली.)	=	1 घन सेंटी मीटर (घ.सें.मी.)
1 लिटर	=	1000 मि.ली. किंवा 1000 घ.सें.मी.)

तापमान

फॅरेनहीट आणि सेल्सिअसमधील तापमानाचे रुपांतर हे थोडे क्लिष्ट आहे.

0° C = 32°F आणि

$$\text{फॅरेनहीट} = \frac{9}{5} \times \text{सेल्सिअस} + 32$$

आणि

$$\text{सेल्सिअस} = \frac{5}{9} \times (\text{फॅरेनहीट} - 32)$$

उदाहरणार्थ 25°C हे 77°F आहे.

शोधा पाहू. [Figure it out]

1. अनघ हा 600 मि.ली संत्र्याचा रस 900 मि.ली सफरचंदाच्या रसात मिसळून एक फळाचे पेय बनवितो. संत्र्याच्या रसाचे सफरचंदाच्या रसाशी असलेले गुणोत्तर त्याच्या साध्या रुपात लिहा.
2. गेल्या वर्षी आम्ही शाळेच्या सहलीसाठी 3 बस गाड्या भाड्याने घेतलेल्या आहेत. आमच्याकडे एकूण त्या सहलीला गेलेले 162 विद्यार्थी आणि शिक्षक होते आणि सर्व बस गाड्या भरलेल्या आहेत. या वर्षी आमच्याकडे 204 विद्यार्थी आहेत. आम्हाला किती बस गाड्या लागतील ? सर्व बस गाड्या भरलेल्या असतील का ?

3. दिल्लीचे क्षेत्रफळ 1484 चौ. कि. मी. आणि मुंबईचे क्षेत्रफळ 550 चौ. कि. मी. आहे. दिल्लीची लोकसंख्या ही अंदाजे 30 दशलक्ष आणि मुंबईची लोकसंख्या 20 दशलक्ष आहे. कोणते शहर जास्त गर्दीचे आहे ? तुम्ही असे का म्हणता ?

4. 155 सें. मी. उंचीच्या बगळ्याला त्याची मान आणि त्याच्या शरिराचा उर्वरीत भाग 4:6 या गुणोत्तरात आहेत. तुमच्या उंचीसाठी जर तुमच्या मानेचा आणि शरिराच्या उर्वरीत भागाचेही गुणोत्तर हे असेल तर तुमची मान किती उंच असेल ?



5. लीलावतीमधील एका प्राचीन समस्येचा विचार करूया. त्यावेळी वजनेही पलस नावाच्या एककात मोजली जात असेत आणि निस्कस हे पैशाचे एकक होते. "जर $2\frac{1}{2}$ पलस केशरची किंमत $\frac{3}{7}$ निस्कस आहे, असे तज्ञ व्यापारी ! 9 निस्कस किती केशर मिळू शकेल? ते जलदपणे सांगा."

6. हरमेन ही '1' वर्षाची एक मुलगी आहे. तिचा मोठा भाऊ '5' वर्षाचा आहे. जेव्हा तिच्या वयाचे तिच्या भावाच्या वयाशी असणाऱ्या वयांचे गुणोत्तर 1:2 असेल तर हरमेनचे वय किती असेल ?

7. समान घनफळाच्या सोने आणि पाणी यांच्या वस्तुमानाचे असणारे गुणोत्तर 37:2 आहे. जर 1 लिटर पाण्याचे वस्तुमान 1 कि. ग्रॅ. असेल तर 1 लिटर सोन्याचे वस्तुमान किती असेल ?

8. 1 एकर शेत जमिनीसाठी गाईचे 10 टन शेणखत घालणे ही चांगली पध्दत आहे. एक शेतकरी 200 फूट × 500 फूट, आकाराच्या भूखंडामध्ये टोमॅटोची लागवड करण्याची योजना आखत आहे. त्याने किती खत खरेदी करावे ? (कृपया या प्रकरणातील अगोदरच्या एकक रुपांतराच्या भागाचा संदर्भ घ्या.)

9. एका नळाला एक पिण्याच्या पाण्याचे भांडे भरण्यासाठी 15 सेकंद लागतात. पिण्याच्या पाण्याच्या भांड्याचे घनफळ 500 मि. ली. आहे. जर बादली 10 लिटर क्षमतेची असेल तर त्याच नळाने बादलीभर पाणी भरण्यासाठी किती वेळ लागतो ?

10. एक एकर जमिनीची किंमत ₹15,00,000 आहे. त्याच जमिनीच्या 2400 चौ. फूट जमिनीची किंमत किती आहे ?

11. एक ट्रॅक्टर एकाच शेतातील समान क्षेत्र हे बैलाच्या जोडीपेक्षा 4 पट वेगाने नांगरु शकतो. एका शेतकऱ्याला त्यांचे 20 एकरचे शेत नांगरायचे आहे. बैलाच्या जोडीला एक एकर जमीन नांगरण्यासाठी 6 तास लागतात. जर शेतकऱ्याने शेत नांगरण्यासाठी बैलाच्या जोडीचा वापर केला तर त्याला किती वेळ लागेल ? जर त्याने ट्रॅक्टर वापरण्याचा निर्णय घेतला तर त्याला किती वेळ लागेल ?

12. ₹10 नाणे हे तांबे आणि निकेल यांचा मिश्रधातू असून त्याला "क्युप्रो निकेल" असे म्हणतात. हा मिश्रधातू मिळविण्यासाठी तांबे आणि निकेल हे 3:1 या गुणोत्तरात मिसळले पाहिजेत. नाण्याचे वस्तुमान 7.74 ग्रॅम आहे. जर प्रति किलो ग्रॅम तांब्याची किंमत ₹ 906 आणि प्रति किलो निकेलची किंमत ₹ 1341 आहे, तर 10 रुपयाच्या एका नाण्यातील या धातूंची किंमत किती आहे ?



सारांश [Summery]

- a:b या स्वरुपात असलेले गुणोत्तर असे दर्शविते की पहिल्या राशीच्या 'a' एककासाठी, दुसऱ्या राशीची 'b' एकके आहेत. 'a' आणि 'b' ही गुणोत्तराची पदे आहेत.
- जर त्यांची पदे एकाच / सारख्याच अवयवानी बदलली तर म्हणजेच जर $ad = bc$ तर दोन गुणोत्तरे a:b आणि c:d ही प्रमाणात असतात. (a:b :: c:d असे लिहीतात.)
- जर x ला m:n या गुणोत्तरातील दोन भागात विभागले तर पहिल्या भागाची राशी $m \times \frac{x}{m+n}$ आणि दुसऱ्या भागाची राशी $n \times \frac{x}{m+n}$ ही असते.

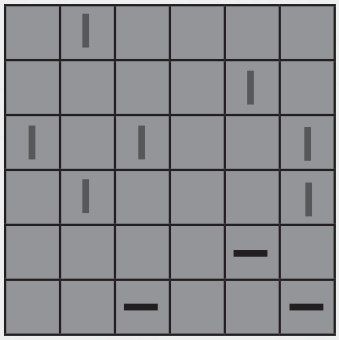


ती कोड्याची वेळ

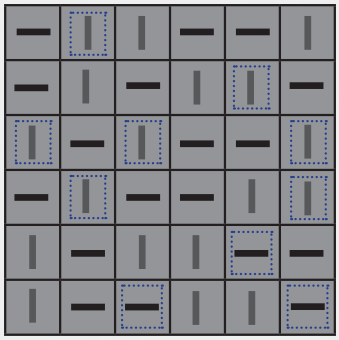
बिनायरो [Binairo]

बिनायरी याला ताकुसू असे सुध्दा म्हणतात, हे एक साध्या नियमांचे तार्किक कोडे आहे. बिनायरो हे सामान्यतः कोणत्याही विशिष्ट आकाराशिवाय एका चौरसाकृती जाळीवर खेळले जाते. कांही पेशी दोन चिन्हांनी भरलेल्या असतात, येथे क्षितीज आणि उभ्या रेषा असतात. उर्वरीत पेशी रिक्त आहेत. अशाप्रकारे पेशी भरण्याचे कार्य आहे की,

1. प्रत्येक पंक्ती आणि प्रत्येक स्तंभामध्ये आडव्या आणि उभ्या रेषांची संख्या समान असते.
2. दोनापेक्षा अधिक आडव्या किंवा उभ्या रेषा एकमेकांना संलग्न नाहीत.
3. प्रत्येक पंक्ती अद्वितीय आहे. प्रत्येक स्तंभ अद्वितीय आहे.

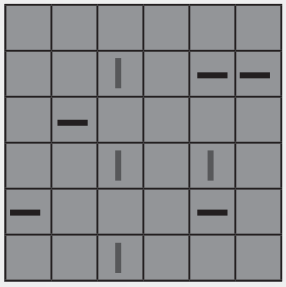


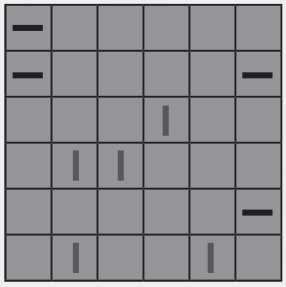
कोडे

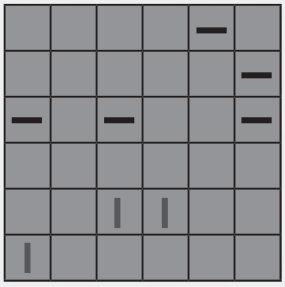


उकल

खालील बिनायरो कोडी सोडवा.









Sexual Abuse of Children and Punishments under the Protection of Children from Sexual Offences Act, 2012

As per Section 2(d) of the POCSO Act, 2012,
A "Child" means any person below the age of 18 years.

Sexual Offence	Punishment
Penetrative Assault – Any person who commits penetrative sexual assault on a child. (Section 3)	Rigorous imprisonment not less than 10 years, which may extent to life imprisonment, and fine. (Section 4)
Aggravated Penetrative Sexual Assault – Penetrative sexual assault committed under aggravated circumstances. (Section 5)	Rigorous imprisonment not less than 20 years, which may extend to life imprisonment or death, and fine. (Section 6)
Sexual Assault – Touching the private parts of a child or making the child touch any person for sexual intent. (Section 7)	Imprisonment not less than 3 years, which many extents to 5 years, and fine. (Section 8)
Aggravated Sexual Assault – Sexual assault committed under aggravated circumstances. (Section 9)	Imprisonment not less than 5 years, which may extend to 7 years, and fine. (Section 10)
Sexual Harassment of a Child (Section 11)	Imprisonment which may extend to 3 years, and fine. (Section 12)
Use of a Child for Pornographic Purposes (Section 13)	Imprisonment up to 5 years and fine; higher punishment for subsequent offences. (Section 14)
Storage or Possession of Pornographic Material Involving a Child (Section 15)	Imprisonment and fine as prescribed, which may extend to 3 years.
Abetment of an Offence under POCSO (Section 16)	Punishment prescribed for the offence abetted. (Section 17)

Necessary Steps to Be Taken in Case of Sexual Abuse of a Child

- Any person having knowledge of a sexual offence must report the matter immediately to the Special Juvenile Police Unit (SJPU) or the Local Police Station. (Section 19)
- The Child shall be produced before the Child Welfare Committee (CWC) or the Special Court within 24 hours for care and protection.
- The child shall be provided medical examination and treatment immediately, free of cost., at the nearest hospital.
- In case of a girl child, medical examination shall be conducted by a female doctor, as far as possible, in the presence of parents or a trusted person. (Section 27)
- The identity of the child shall not be disclosed through any media, including name, address, photograph, or any identifying details. (Section 23)
- As per Rule 7 of the Protection of Children from Sexual Offences Rules, 2020, where an interim compensation to meet the immediate needs of the child.
- As per Section 44 of the Protection of Children from Sexual Offences Act, 2012, the Karnataka State commission for Protection of Child Rights (KSCPCR) shall monitor the effective implementation of the provisions of the Act.

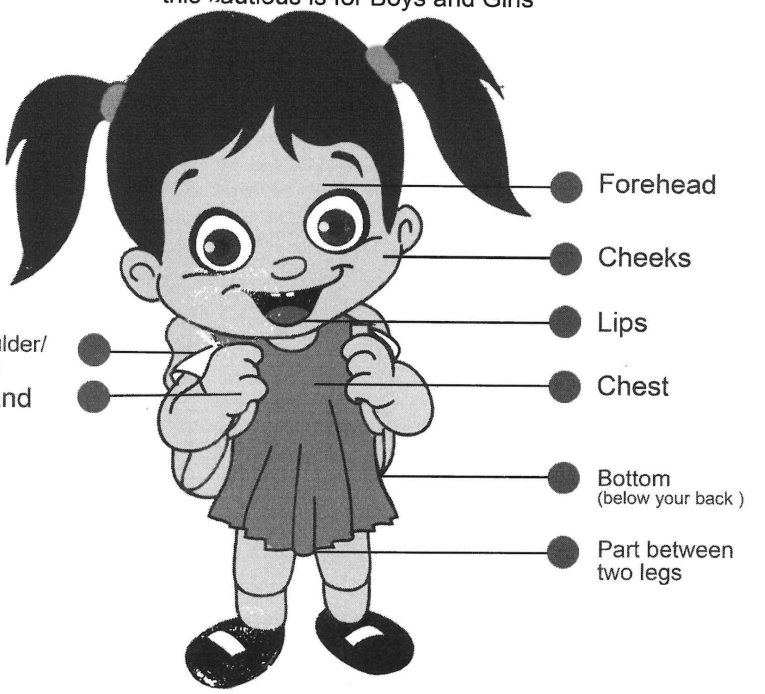
Our Commitment
Towards a Violence-Free and Child-Sate Society

Children be cautious !!! Be alert

Your body belongs only to you, You have all the rights to keep safe and protect it always.
Safe and Unsafe touches on your body

See the picture and understand

this cautious is for Boys and Girls



Unsafe Touch (BAD TOUCH) - **parts of your body where nobody should touch (except parents and in their presence only doctors can touch)**

Safe touch (GOOD TOUCH) **-can touch only when required**

When you feel Unsafe Touch or any other mischief, please Say loudly NO.. Don't.. Stop it..and Scream, push the person aside and move to a safer place, be brave and inform about it, to your parents & Trusted adult and register a complaint

Published by :Distict Administration -08532-229011, Zilla Panchyat-228448
Department of Police -235635/ 235001 / 235100 / 100 /1091 District Child Protection Unit-280670,
Department of Women and Child Develpoment-226292, Unicef Child Protection Project -230610. Raichur

Be Smart, Be Safe, Be Happy

Picture courtesy : Prajavani, Bhoomika 26-07-2014

unicef