



ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

# ಗಣಿತ



## ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ

### ಭಾಗ - ೨

ವಿಜ್ಞಾನ ಸಂಶೋಧನೆ



एन सी ई आर टी  
NCERT

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ  
ಶ್ರೀ ಅರಜಂದೋ ಮಾರ್ಗ ನವದೆಹಲಿ 110016

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ಲ)

6ನೇ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆ, ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂ

ಬೆಂಗಳೂರು-560 003.

ಪರಿವಿಡಿ



ಭಾಗ - ೨

| ಕ್ರ.ಸಂ | ಘಟಕದ ಹೆಸರು                        | ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ |
|--------|-----------------------------------|------------|
| 8      | ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ           | 1 - 21     |
| 9      | ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು       | 22 - 32    |
| 10     | ವೃತ್ತಗಳು                          | 33 - 43    |
| 11     | ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು | 44 - 50    |
| 12     | ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು | 51 - 62    |
| 13     | ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ                     | 63 - 94    |
| 14     | ಸಂಭವನೀಯತೆ                         | 95 - 113   |
| A2     | ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣ                   | 114 - 126  |
|        | ಉತ್ತರಗಳು                          | 127 - 134  |



# ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

8

There is perhaps nothing which so occupies  
the middle position of mathematics as trigonometry

- J.F. Herbart (1890)

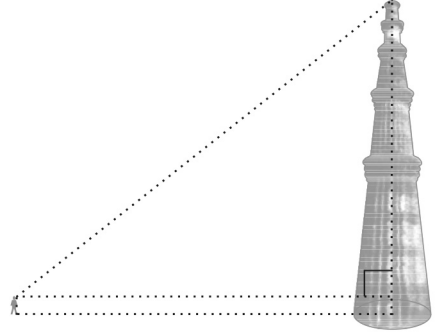
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಧ್ಯದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು  
ಆಕ್ರಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬಹುಶಃ ಬೇರಾವ ವಿಷಯವೂ ಇಲ್ಲ.

- ಜೆ.ಎಫ್. ಹರ್ಟ್ (1890)

## 8.1 ಪೀಠಿಕೆ

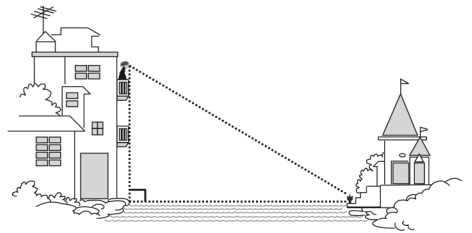
ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಈಗಾಗಲೇ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ನಮ್ಮ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

1. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕುತುಬ್ ಮಿನಾರ್ ಅನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಹೋಗಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೀಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮಿನಾರ್‌ನ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಚಿತ್ರ 8.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನೈಜವಾಗಿ ಮಿನಾರ್ ಅನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ, ಅದರ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?



ಚಿತ್ರ 8.1

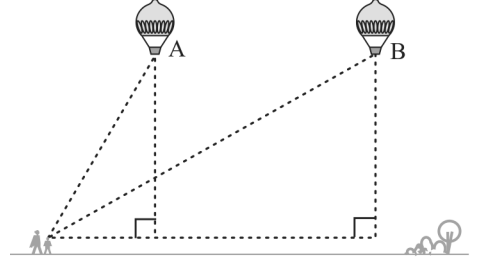
2. ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ನದಿಯ ದಂಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ತನ್ನ ಮನೆಯ ಉಪರಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾಳೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆಕೆ ನದಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ದಂಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ದೇವಸ್ಥಾನದ ಮೆಟ್ಟಲು ಮೇಲಿರುವ ಹೂ ಕುಂಡವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ಚಿತ್ರ 8.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು



ಚಿತ್ರ 8.2

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. ನಿಮಗೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತ್ತಿದ್ದಾರೆಂದು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

3. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಸಿಗಾಳಿಯ ಬಲೂನ್ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ತನ್ನ ತಾಯಿಗೆ ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಲು ಓಡಿ ಹೋಗುತ್ತಾಳೆ. ತಾಯಿಯು ಅದನ್ನು ನೋಡಲು ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಗೆ ಓಡಿ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಈ ಮುಂಚೆ ಆ ಬಲೂನ್ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಗುರುತಿಸಿರುತ್ತಾಳೆ. ಆದರೆ ಈಗ ಆಕೆ ಮತ್ತು ಅವಳ ತಾಯಿ ಹೊರ ಬಂದು ನೋಡುವಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ B ಬಿಂದುವಿಗೆ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ. ನೆಲದಿಂದ 'B' ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?



ಚಿತ್ರ 8.3

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಗಣಿತದ ಒಂದು ಶಾಖೆಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಗಣಿತದ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ದೂರ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು Trigonometry ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. Trigonometry ಎಂಬ ಪದವು ಗ್ರೀಕ್ ಪದಗಳಾದ 'Tri' (ಅಂದರೆ ಮೂರು), 'gon' (ಅಂದರೆ ಬಾಹುಗಳು) ಮತ್ತು 'metron' (ಅಂದರೆ ಅಳತೆ) ಪದಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಈಜಿಪ್ಟ್ ಮತ್ತು ಬ್ಯಾಬಿಲೋನ್‌ನಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಬಳಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಉಲ್ಲೇಖವಾಗಿದೆ. ಪುರಾತನ ಗ್ರೀಕ್ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರನ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಇಂದಿಗೂ ಸಹ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಉನ್ನತ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

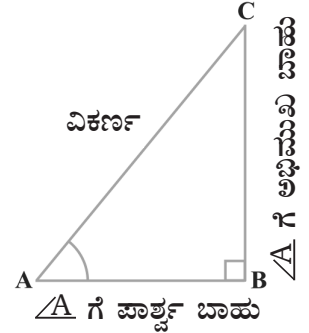
ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಘು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಾವು ನಮ್ಮ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಲಘುಕೋನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸೋಣ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಈ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಇನ್ನಿತರ ಕೋನಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.  $0^\circ$  ಮತ್ತು  $90^\circ$  ಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳಿಗೂ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಈ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ. ಇವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳೆನ್ನುವರು.

## 8.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ವಿಭಾಗ 8.1 ರಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಚಿತ್ರ 8.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ,  $\angle CAB$  (ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ  $\angle A$ ) ಯು ಲಘುಕೋನ. ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಬಾಹು BC ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಅದು  $\angle A$  ಎದುರಿಗಿದೆ. ಅದನ್ನು A ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಬಾಹು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. AC ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು AB ಯು  $\angle A$  ದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು  $\angle A$  ದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

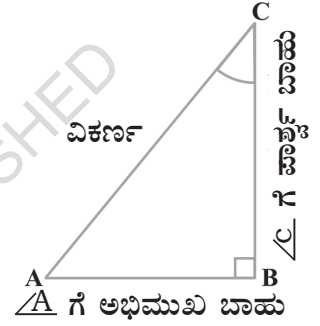


ಚಿತ್ರ 8.4

A ಬದಲಿಗೆ ಕೋನ C ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ಬಾಹುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 8.5 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC (ಚಿತ್ರ 8.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಲ್ಲಿ, ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.5

$$\angle A \text{ ದ ಜ್ಯಾ (sine of } \angle A) = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ ದ ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾ (cosine of } \angle A) = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ ದ ಸ್ಪರ್ಶಕ (tangent of } \angle A) = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ ದ ಕೋಟಿ ಛೇದಕ (cosecant of } \angle A) = \frac{1}{\text{sine of } \angle A} = \frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\angle A \text{ ನ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ ದ ಛೇದಕ (secant of } \angle A) = \frac{1}{\text{cosine of } \angle A} = \frac{\text{ವಿಕರ್ಣ}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ ದ ಕೋಟಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ (co tangent of } \angle A) = \frac{1}{\text{tangent of } \angle A} = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}} = \frac{AB}{BC}$$

ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$ ,  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\sec A$  ಮತ್ತು  $\cot A$  ಎಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\sec A$  ಮತ್ತು  $\cot A$  ಈ ಅನುಪಾತಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $\sin A$ ,  $\cos A$  ಮತ್ತು  $\tan A$  ಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$\text{ಹಾಗೆಯೇ } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ ಮತ್ತು } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಲಘುಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು ಕೋನ ಮತ್ತು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೋನ  $C$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ನೀವೇಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಾರದು? (ಚಿತ್ರ 8.5 ನ್ನು ನೋಡಿ)

‘ಜ್ಯಾ’ ಪದದ ಮೊದಲ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಆರ್ಯಭಟ (ಕ್ರಿ.ಪೂ 500) ರಚಿಸಿದ ‘ಆರ್ಯಭಟಿಯಮ್’ ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಆರ್ಯಭಟ ಬಳಸಿದ ಅರ್ಧ ಜ್ಯಾ (half - chord) ಪದವು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಂಡು “ಜ್ಯಾ” ಅಥವಾ “ಜೀವ” ಪದವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ನಂತರದ ಭಾಷಾಂತರದಲ್ಲಿ “sinus” ಆಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಕಂಡಿತು. “sinus” ಅಂದರೆ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ “ವಕ್ರರೇಖೆ” ಎಂದರ್ಥ. ನಂತರ “sinus” ಪದವು “sine” ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿತು. ಆಂಗ್ಲ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಎಡ್ಮಂಡ್ ಗುಂಟರ್ (1581 – 1626) ರವರು ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ “sine” ಪದವನ್ನು “sin” ಎಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬಳಸಿದರು. ಆನಂತರದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ cosine ಮತ್ತು tangent ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬಳಕೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. cosine ಅನುಪಾತವು “sine” ಅನುಪಾತದ ಪೂರಕ ಕೋನಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಅನುಪಾತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಯಿತು.

ಆರ್ಯಭಟ ಇದನ್ನು ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ “ಕೋಟಿ ಜ್ಯಾ” ಎಂದು ನಮೂದಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. cosine ಪದವನ್ನು ‘ಎಡ್ಮಂಡ್ ಗುಂಟರ್’ ರವರು ಬಳಕೆಗೆ ತಂದರು. 1674 ರಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ‘ಸರ್ ಜೇನ್ ಮೂರ್’ ರವರು ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ “cos” ಎಂದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬಳಕೆ ಮಾಡಿದರು.

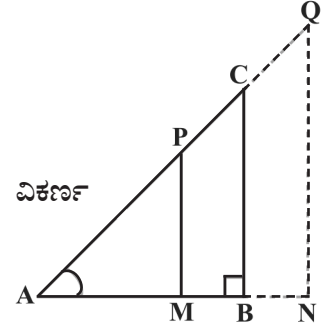


ಆರ್ಯಭಟ

ಕ್ರಿ.ಪೂ 476 – 550

**ಗಮನಿಸಿ :** ಸಂಕೇತ  $\sin A$  ಎಂಬುದು,  $A$  ಕೋನದ ಜ್ಯಾ (sine of angle of  $A$ ) ದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.  $\sin A$  ಎಂಬುದು  $\sin$  ಮತ್ತು  $A$  ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲ.  $A$  ಯಿಂದ ಬೇರ್ಪಟ್ಟ  $\sin$  ಗೆ ಯಾವುದೇ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ  $\cos A$  ಎಂಬುದು  $\cos$  ಮತ್ತು  $A$  ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲ. ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೂ ಈ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ನಾವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ದ ವಿಕರ್ಣ AC ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ AC ಯ ಮೇಲೆ Q ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.  $PM \perp AB$  ಮತ್ತು  $QN \perp AB$  ಅನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದು  $\Delta PAM$ ,  $\Delta CAB$ ,  $\Delta QAN$  ಗಳಲ್ಲಿ  $\angle A$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಹೇಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 8.6

ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಮೊದಲು ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೋಡಿ.

$\Delta PAM$  ಮತ್ತು  $\Delta CAB$  ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆಯೇ? 2ನೇ ಘಟಕದಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋನ - ಕೋನ

ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಬಳಸಿ  $\Delta PAM$  ಮತ್ತು  $\Delta CAB$  ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ, ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC} = \text{ಆಗಿರುತ್ತದೆ.}$$

$$\text{ಇದರಿಂದ, } \frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A \text{ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.}$$

$$\text{ಹಾಗೆಯೇ, } \frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A,$$

$$\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A, \text{ ಇತ್ಯಾದಿ}$$

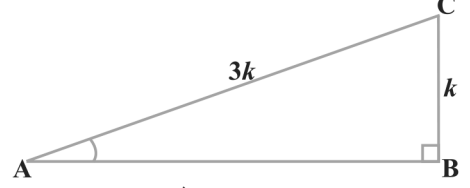
ಇದರಿಂದ  $\Delta PAM$  ಯಲ್ಲಿನ ಕೋನ A ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಹಾಗೂ  $\Delta CAB$  ಯಲ್ಲಿನ ಕೋನ A ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೂ ಯಾವುದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ನೀವು  $\Delta QAN$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ  $\sin A$  ದ ಬೆಲೆ (ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು) ಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ, ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

**ಗಮನಿಸಿ:** ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ,  $(\sin A)^2$ ,  $(\cos A)^2$  ಇತ್ಯಾದಿ ಇವುಗಳ ಬದಲಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ  $\sin^2 A$ ,  $\cos^2 A$  ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ  $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$  (ಇದನ್ನು  $\sin A$  ದ ವಿಲೋಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ)  $\sin^{-1} A$  ದ ಅರ್ಥವು ಬೇರೆಯಾಗಿದೆ, ಇದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೀರಿ. ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಕೋನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ  $\theta$  (ತೀಟಾ) ಬಳಕೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಲಘುಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ನಾವು ಆರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅನುಪಾತ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಉಳಿದ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೇ? ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ,  $\sin A = \frac{1}{3}$  ಆದರೆ, ಇದರ ಅರ್ಥ  $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$  ಅಂದರೆ,  $\triangle ABC$  ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ BC ಮತ್ತು AC ಗಳ ಅಳತೆಗಳು 1 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 8.7 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಆದ್ದರಿಂದ BC ಯು k ಗೆ ಸಮನಾದರೆ, AC ಯು 3k ಗೆ ಸಮ. ಇಲ್ಲಿ k ಯು ಯಾವುದೇ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೋನ A ದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು,  $\triangle ABC$  ಯ ಮೂರನೇ ಬಾಹು AB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಮಗೆ ಪೈಥಾಗೊರಾಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ನೆನಪಿದೆಯೇ? ಅದನ್ನು ಬಳಸಿ ಬೇಕಾಗಿರುವ AB ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - k^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}k)^2$$

$$\therefore AB = \pm 2\sqrt{2}k$$

$$AB = 2\sqrt{2}k \text{ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (AB ಯು } -2\sqrt{2} \text{ ಗೆ ಸಮವಲ್ಲ ಏಕೆ?)}$$

$$\text{ಈಗ, } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ಹಾಗೆಯೇ ಕೋನ A ದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

**ಗಮನಿಸಿ:** ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,  $\sin A$  ಮತ್ತು  $\cos A$  ಗಳ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ 1ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುತ್ತದೆ).

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:**  $\tan A = \frac{4}{3}$  ಆದರೆ ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಮೊದಲು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. (ಚಿತ್ರ 8.8 ನೋಡಿ)

$$\text{ಈಗ, } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} \text{ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.}$$

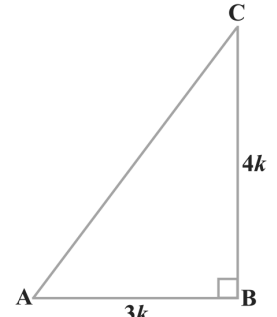
$$BC = 4k \text{ ಆದರೆ } AB = 3k \text{ ಮತ್ತು } k \text{ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ}$$

ಈಗ ಪೈಥಾಗೊರಾಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } AC = 5k$$

ಈಗ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದಿಂದ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 8.8

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

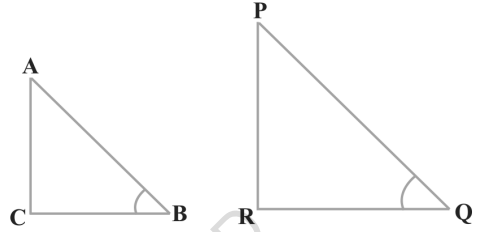
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}; \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4} \text{ ಮತ್ತು } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:**  $\angle B$  ಮತ್ತು  $\angle Q$

ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು  $\sin B = \sin Q$  ಆಗಿದೆ.  
ಹಾಗಾದರೆ  $\angle B = \angle Q$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $\triangle ABC$  ಮತ್ತು  $\triangle PQR$  ಗಳನ್ನು  
ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ  $\sin B = \sin Q$  ಆಗಿರಲಿ  
(ಚಿತ್ರ 8.9 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 8.9

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

ಮತ್ತು

$$\sin Q = \frac{PR}{PQ} \text{ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.}$$

ಆಗ

$$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

$\therefore$

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \text{ ಆಗಿರಲಿ} \quad (1)$$

ಈಗ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

ಮತ್ತು

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } \frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \dots\dots(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

ಆಗ, ಪ್ರಮೇಯ 6.4 ರಿಂದ  $\triangle ACB \sim \triangle PQR$  ಮತ್ತು  $\angle B = \angle Q$

**ಉದಾಹರಣೆ 3:**  $\triangle ACB$  ಯಲ್ಲಿ,  $AB = 29$  ಮಾನಗಳು,  $BC = 21$  ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು  $\angle ABC = \theta$  (ಚಿತ್ರ 8.10 ನೋಡಿ) ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i)  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

ii)  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

**ಪರಿಹಾರ:**  $\triangle ACB$  ಯಲ್ಲಿ,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29 - 21)(29 + 21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ ಮಾನಗಳು}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$ ,  $\cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

ಈಗ, i)  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400 + 441}{841} = \frac{841}{841} = 1$

ಮತ್ತು, ii)  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ  $ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $B$  ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.  $\tan A = 1$  ಆದರೆ,  $2\sin A \cos A = 1$  ಆಗಿದೆಯೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$  (ಚಿತ್ರ 8.11 ನೋಡಿ)

ಅಂದರೆ,  $BC = AB$

$AB = BC = k$  ಆದರೆ,  $k$  ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಈಗ,

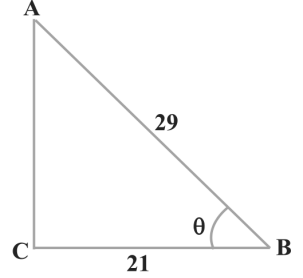
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

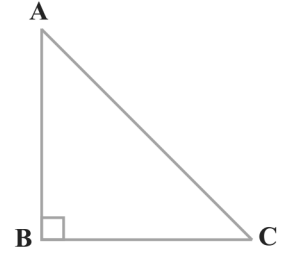
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ಮತ್ತು } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $2\sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ , ಬೇಕಾದ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ

**ಉದಾಹರಣೆ 5:**  $\triangle OPQ$  ಯಲ್ಲಿ,  $P$  ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.  $OP = 7\text{cm}$  ಮತ್ತು  $OQ - PQ = 1\text{cm}$  (ಚಿತ್ರ 8.12 ನೋಡಿ)  $\sin Q$  ಮತ್ತು  $\cos Q$  ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.10



ಚಿತ್ರ 8.11



ಚಿತ್ರ 8.12

ಪರಿಹಾರ:  $\Delta OPQ$  ನಲ್ಲಿ,

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

ಅಂದರೆ,  $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$  (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ,  $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

ಅಂದರೆ,  $1 + 2PQ = 7^2$  (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ,  $PQ = 24 \text{ cm}$  ಮತ್ತು  $OQ = 1 + PQ = 25 \text{ cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $\sin Q = \frac{7}{25}$  ಮತ್ತು  $\cos Q = \frac{24}{25}$

### ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1.  $\Delta ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $B$  ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.  $AB = 24 \text{ cm}$ ,  $BC = 7 \text{ cm}$  ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i)  $\sin A$ ,  $\cos A$

ii)  $\sin C$ ,  $\cos C$

2. ಚಿತ್ರ 8.13 ರಲ್ಲಿ  $\tan P - \cot R$  ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.  $\sin A = \frac{3}{4}$  ಆದರೆ,  $\cos A$  ಮತ್ತು  $\tan A$  ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ.

4.  $15 \cot A = 8$  ಆದರೆ,  $\sin A$  ಮತ್ತು  $\sec A$  ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.  $\sec \theta = \frac{13}{12}$  ಆದರೆ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.  $\angle A$  ಮತ್ತು  $\angle B$  ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದು  $\cos A = \cos B$  ಆಗಿದೆ.  $\angle A = \angle B$  ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7.  $\cot \theta = \frac{7}{8}$  ಆದರೆ, i)  $\frac{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}$  ii)  $\cot^2 \theta$  ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

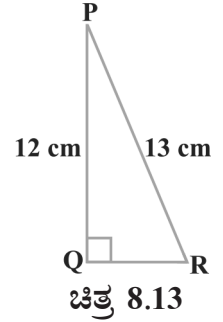
8.  $3 \cot A = 4$  ಆದರೆ,  $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$  ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

9.  $\Delta ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ಆದರೆ

i)  $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

ii)  $\cos A \cos C - \sin A \sin C$  ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.  $\Delta PQR$  ನಲ್ಲಿ  $\angle Q = 90^\circ$ ,  $PR + QR = 25 \text{ cm}$  ಮತ್ತು  $PQ = 5$  ಆಗಿದೆ  $\sin P$ ,  $\cos P$  ಮತ್ತು  $\tan P$  ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.13

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ತಪ್ಪೇ ತಿಳಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

- $\tan A$  ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಕೋನ  $A$  ದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ  $\sec A = \frac{12}{5}$  ಆಗಿದೆ
- ಕೋನ  $A$  ದ cosecant  $A$  ಅನ್ನು  $\cos A$  ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.
- $\cot A$  ಎಂಬುದು  $\cot$  ಮತ್ತು  $A$  ಗಳ ನಡುವಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ
- $\theta$  ದ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ  $\sin \theta = \frac{4}{3}$  ಆಗಿದೆ

### 8.3 ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ರೇಖಾಗಣಿತದಿಂದ, ನಿಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  ಮತ್ತು  $90^\circ$  ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನ ಪರಿಚಯವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು  $0^\circ$  ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

#### 45° ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

$\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $\angle B = 90^\circ$ , ಒಂದು ಕೋನವು  $45^\circ$  ಆದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನವು  $45^\circ$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ  $\angle A = \angle C = 45^\circ$  (ಚಿತ್ರ 8.14 ನೋಡಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ  $BC = AB$  (ಏಕೆ?)

ಈಗ,  $BC = AB = a$  ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಆಗ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

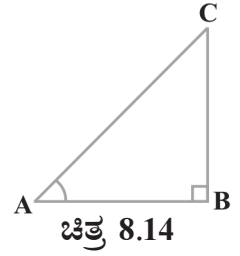
ಮತ್ತು, ಆದ್ದರಿಂದ  $AC = a\sqrt{2}$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$\sin 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{45^\circ \text{ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

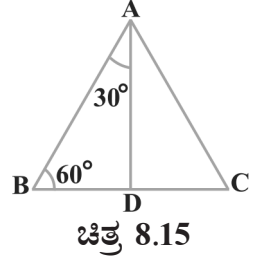


ಹಾಗೆಯೇ,

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}, \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

### 30° ಮತ್ತು 60°ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು

ಇದೀಗ ನಾವು 30° ಮತ್ತು 60° ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸೋಣ. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 60° ಆಗಿರುವುದರಿಂದ  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ . ಬಾಹು BC ಗೆ A ಯಿಂದ AD ಲಂಬ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 8.15 ನೋಡಿ)



ಈಗ,  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$  (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ,  $BD = DC$

ಮತ್ತು  $\angle BAD = \angle CAD$  (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಇದೀಗ ಗಮನಿಸಿ,  $\triangle ABD$  ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ,  $\angle D = 90^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle BAD = 30^\circ$  ಹಾಗೂ  $\angle ABD = 60^\circ$  ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.15 ನೋಡಿ)

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯು ತಿಳಿದಿರಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು  $AB = 2a$  ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಆಗ,  $BD = \frac{1}{2} BC = a$

ಮತ್ತು  $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$ ,

ಆದ್ದರಿಂದ,  $AD = a\sqrt{3}$

ಈಗ,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ಹಾಗೂ,

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2; \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

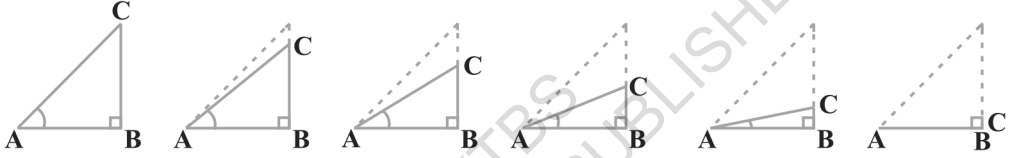
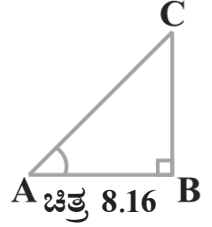
ಹಾಗೆಯೇ,

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \sec 60^\circ = 2 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**0° ಮತ್ತು 90° ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು**

$\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ ಕೋನ  $A$  ದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತಾ, ಮಾಡುತ್ತಾ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡೋಣ. (ಚಿತ್ರ 8.16 ನೋಡಿ) ಕೋನ  $A$  ಕಡಿಮೆ ಆದಂತೆಲ್ಲ ಬಾಹು  $BC$  ಯ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.  $C$  ಬಿಂದುವು  $B$  ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು  $\angle A = 0^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ  $AC$  ಯು ಸರಿಸುಮಾರು  $AB$  ಯಷ್ಟೇ ಆಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 8.17 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 8.17

$\angle A$  ಯು  $0^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ,  $BC$  ಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು  $\sin A = \frac{BC}{AC}$  ಯ ಬೆಲೆಯೂ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ  $\angle A$  ಯು  $0^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪವಾದಂತೆ  $AC$  ಯು ಸಹ  $AB$  ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ  $\cos A = \frac{AB}{AC}$  ಯ ಬೆಲೆಯೂ 1 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದು, ನಮಗೆ  $A = 0^\circ$  ಆದಾಗ  $\sin A$  ಮತ್ತು  $\cos A$  ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$\sin 0^\circ = 0$  ಮತ್ತು  $\cos 0^\circ = 1$  ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

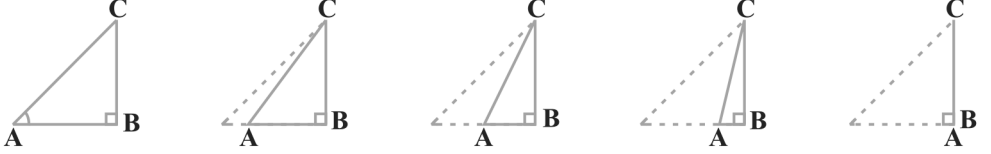
ಇವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ,

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0, \quad \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \text{ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?)}$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \text{ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?)}$$

$\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ  $\angle A$  ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಾಗ  $\angle A$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡೋಣ.  $\angle A$

ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೊಂದತೆಲ್ಲ  $\angle C$  ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕರಣದಂತೆ, ಬಾಹು AB ಯ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. A ಬಿಂದುವು B ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಗೆ  $\angle A$  ಯು  $90^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆ  $\angle C$  ಯು  $0^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬಾಹು AC ಯು ಬಾಹು BC ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 8.18 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 8.18

$\angle C$  ಯು  $0^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ,  $\angle A$  ಯು  $90^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಬಾಹು AC ಯ ಉದ್ದವು ಬಾಹು BC ಗೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು  $\sin A$  ಯು 1 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ  $\angle A$  ಯು  $90^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ,  $\angle C$  ಯು  $0^\circ$  ಗೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಬಾಹು AB ಯ ಅಳತೆ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  $\cos A$  ಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ  $\sin 90^\circ = 1$  ಮತ್ತು  $\cos 90^\circ = 0$  ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ನೀವೇಕೆ  $90^\circ$  ಯ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಾರದು?

ಪರಾಮರ್ಶೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ,  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  ಮತ್ತು  $90^\circ$  ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 8.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.1

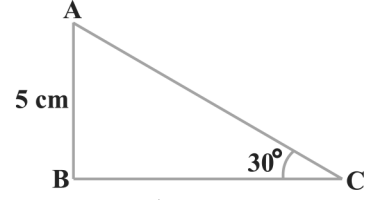
| $\angle A$               | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ |
|--------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| $\sin A$                 | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          |
| $\cos A$                 | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          |
| $\tan A$                 | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | N.D        |
| $\operatorname{cosec} A$ | N.D       | 2                    | $\sqrt{2}$           | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1          |
| $\sec A$                 | 1         | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$           | 2                    | N.D        |
| $\cot A$                 | N.D       | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0          |

\* N.D  $\rightarrow$  Not Defined (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ)

**ಗಮನಿಸಿ:** ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಠಕದಿಂದ,  $\angle A$  ಅಳತೆಯು  $0^\circ$  ಯಿಂದ  $90^\circ$  ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲ  $\sin A$  ಬೆಲೆಯು 0 ಯಿಂದ 1 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು  $\cos A$  ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ 0 ಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಠಕದಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 6:**  $\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ, B ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.  $AB = 5\text{cm}$  ಮತ್ತು  $\angle ACB = 30^\circ$  (ಚಿತ್ರ 8.19 ನೋಡಿ) BC ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.19

**ಪರಿಹಾರ:** BC ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು BC ಮತ್ತು ದತ್ತ AB ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.  $\angle C$  ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು BC ಮತ್ತು  $\angle C$  ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು AB ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

ಅಂದರೆ, 
$$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore BC = 5\sqrt{3}\text{cm}$

ಈಗ, AC ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \text{ (ಏಕೆ?)}$$

ಅಂದರೆ, 
$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

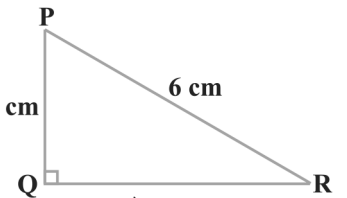
ಅಂದರೆ, 
$$AC = 10\text{cm}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}\text{cm} = 10\text{ cm}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 7:**  $\triangle PQR$  ನಲ್ಲಿ,  $\angle Q = 90^\circ$ , PQ (8.20 ಚಿತ್ರ) = 3cm, ಮತ್ತು PR = 6cm.  $\angle QPR$  ಮತ್ತು  $\angle PRQ$  ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.20

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತ: PQ = 3cm, ಮತ್ತು PR = 6cm

$$\therefore \frac{PQ}{PR} = \sin R$$

ಅಥವಾ  $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ  $\angle PRQ = 30^\circ$  ಮತ್ತು  $\angle QPR = 60^\circ$  (ಏಕೆ?)

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭಾಗ (ಲಘು ಕೋನ ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಾಹು) ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಉಳಿದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 8:**  $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ ,  $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$ ,  $A > B$  ಆಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$  ಆದ್ದರಿಂದ,  $A - B = 30^\circ$  (ಏಕೆ?) (1)

ಹಾಗೆಯೇ  $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$  ಆದ್ದರಿಂದ,  $A + B = 60^\circ$  (ಏಕೆ?) (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ,

$A = 45^\circ$  ಮತ್ತು  $B = 15^\circ$  ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

### ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i)  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

ii)  $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

iii)  $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$  iv)  $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

v)  $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i)  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} =$

A)  $\sin 60^\circ$  B)  $\cos 60^\circ$  C)  $\tan 60^\circ$  D)  $\sin 30^\circ$

ii)  $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} =$

A)  $\tan 90^\circ$  B) 1 C)  $\sin 45^\circ$  D) 0

iii)  $\sin 2A = 2 \sin A$  ಎಂಬುದು  $A$  ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

- A)  $0^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $45^\circ$       D)  $60^\circ$

iv)  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} =$

- A)  $\cos 60^\circ$       B)  $\sin 60^\circ$       C)  $\tan 60^\circ$       D)  $\sin 30^\circ$

3.  $\tan (A + B) = \sqrt{3}$  ಮತ್ತು  $\tan (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ  $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$  ;  $A > B$  ಆದರೆ,  $A$  ಮತ್ತು  $B$  ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ತಿಳಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i)  $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$

ii)  $\theta$  ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ  $\sin \theta$  ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

iii)  $\theta$  ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ  $\cos \theta$  ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

iv)  $\theta$  ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ  $\sin \theta = \cos \theta$  ಆಗಿದೆ

v)  $A = 0^\circ$  ಗೆ  $\cot A$  ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ.

#### 8.4 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯವಾದರೆ ಅದನ್ನು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಮುಂದಿನ ಇನ್ನುಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಳಸೋಣ.

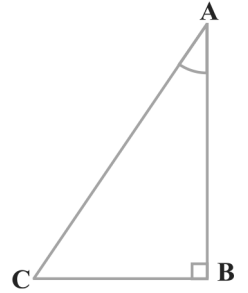
$\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $\angle B = 90^\circ$  (ಚಿತ್ರ 8.21 ನೋಡಿ)

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

(1)

(1) ರ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು  $AC^2$  ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$



ಚಿತ್ರ 8.21

$$\text{ಅಂದರೆ } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$\text{ಅಂದರೆ } (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1 \quad (2)$$

$$\text{ಅಂದರೆ, } \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

ಇದು  $0^\circ \leq A = 90^\circ$  ಆಗುವಂತೆ  $A$  ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ. ಈಗ ನಾವು (1) ನ್ನು  $AB^2$  ನಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\text{ಅಥವಾ } \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\text{ಅಂದರೆ } 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \quad (3)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು  $A = 0^\circ$  ಗೆ ನಿಜವೇ? ಹೌದು, ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ  $A = 90^\circ$  ಏನು? ಆಗಲಿ,  $\tan A$  ಮತ್ತು  $\sec A$ ,  $A = 90^\circ$  ಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ  $0^\circ \leq A = 90^\circ$  ಆಗುವಂತೆ  $A$  ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು (1) ನ್ನು  $BC^2$  ನಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\text{ಅಂದರೆ } \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\text{ಅಂದರೆ } \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \quad (4)$$

$A = 0^\circ$  ಗೆ  $\operatorname{cosec} A$  ಮತ್ತು  $\cot A$  ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ  $0^\circ < A \leq 90^\circ$  ಆಗುವಂತೆ ಕೋನ  $A$  ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ (4) ನಿಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅನುಪಾತ ತಿಳಿದಿದ್ದರೇ, ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವುದೆಂದು ನೋಡೋಣ.

$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ}$$

$$\text{ಆಗ } \cot A = \sqrt{3}$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A \text{ ಆದ್ದರಿಂದ,}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ಮತ್ತು } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ಮತ್ತು } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} A = 2$$

**ಉದಾಹರಣೆ 9**  $\cos A$ ,  $\tan A$  ಮತ್ತು  $\sec A$  ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು  $\sin A$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A \text{ ಅಂದರೆ, } \cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \text{ (ಏಕೆ?)}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

$$\text{ಮತ್ತು } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 10**  $\sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ:**

$$\begin{aligned} \text{ಎಡಭಾಗ} &= \sec A (1 - \sin A)(\sec A + \tan A) \\ &= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right) \\ &= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{ಬಲಭಾಗ} \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 11**  $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

$$\begin{aligned} \text{ಎಡಭಾಗ} &= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A} \\ &= \frac{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{ಬಲಭಾಗ} \end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 12**  $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$  ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಬಳಸಿ,

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

**ಪರಿಹಾರ:**  $\sec \theta$  ಮತ್ತು  $\tan \theta$  ಇರುವಂತಹ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ, ಎಡಭಾಗದ (ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ) ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನು  $\cos \theta$  ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು  $\sec \theta$  ಮತ್ತು  $\tan \theta$  ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ.

$$\begin{aligned} \text{ಎಡಭಾಗ} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - 1}{(\tan \theta - \sec \theta) + 1} = \frac{\{(\tan \theta + \sec \theta) - 1\}(\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\}(\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{(\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) - (\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\}(\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{-1 - \tan \theta + \sec \theta}{(\tan \theta - \sec \theta + 1)(\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{-1}{\tan \theta - \sec \theta} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} = \text{ಬಲಭಾಗ} \end{aligned}$$

### ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1.  $\sin A$ ,  $\sec A$  ಮತ್ತು  $\tan A$  ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು  $\cot A$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.
2.  $\angle A$  ದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು  $\sec A$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
3. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

i)  $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

- A) 1                      B) 9                      C) 8                      D) 0

ii)  $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta) =$

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) -1

iii)  $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

- A)  $\sec A$                       B)  $\sin A$                       C)  $\operatorname{cosec} A$                       D)  $\cos A$

$$\text{iv) } \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} =$$

$$\text{A) } \sec^2 A \quad \text{B) } -1 \quad \text{C) } \cot^2 A \quad \text{D) } \tan^2 A$$

4. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\text{i) } (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{ii) } \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$\text{iii) } \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

[ಸುಳುಹು:  $\sin \theta$  ಮತ್ತು  $\cos \theta$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

$$\text{iv) } \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} \quad [\text{ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ}]$$

$$\text{v) } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \text{ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ,}$$

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

$$\text{vi) } \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$\text{vii) } \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

$$\text{viii) } (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$\text{ix) } (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

[ಸುಳುಹು: ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ]

$$\text{x) } \left( \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left( \frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

### 8.5 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ  $\angle B = 90^\circ$

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}{\text{ವಿಕರ್ಣ}}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$$

$$2. \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} ; \sec A = \frac{1}{\cos A} ; \tan A = \frac{1}{\cot A} ; \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

3. ಲಘುಕೋನದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಆ ಕೋನದ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

4.  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ಮತ್ತು  $90^\circ$  ಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದ ಬೆಲೆಗಳು.

5.  $\sin A$  ಅಥವಾ  $\cos A$  ಬೆಲೆಯು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ,  $\sec A$  ಅಥವಾ  $\operatorname{cosec} A$  ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6.  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1, 0^\circ \leq A < 90^\circ$$

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, 0^\circ < A \leq 90^\circ$$





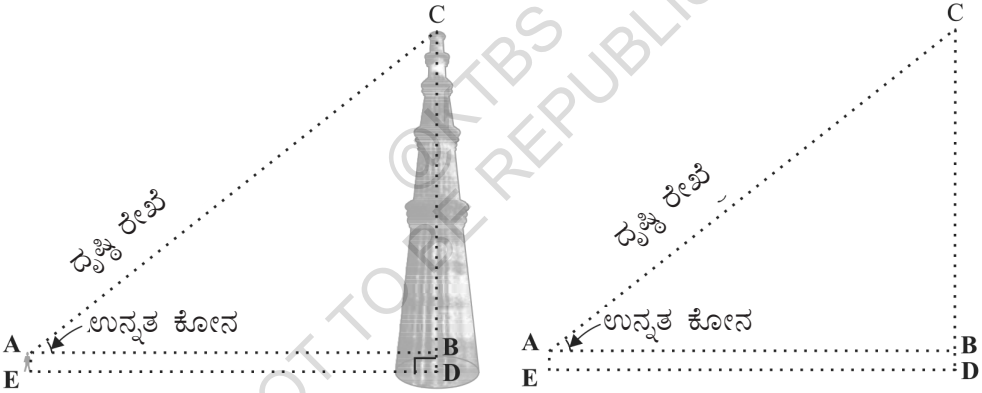
## ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳು

# 9

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರವನ್ನು ನೈಜವಾಗಿ ಅಳೆಯದೇ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ಹೇಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

### 9.1 ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ

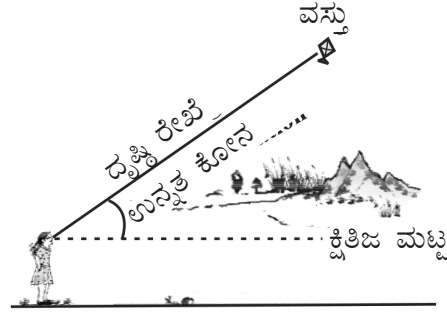
ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ ಚಿತ್ರ 8.1 ನ್ನು, ಇಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 9.1 ರಲ್ಲಿ ಪುನರ್ ಚಿತ್ರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.1

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಿನಾರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆ AC ಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮಿನಾರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನ BAC ಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಮಿನಾರ್‌ನ ತುದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

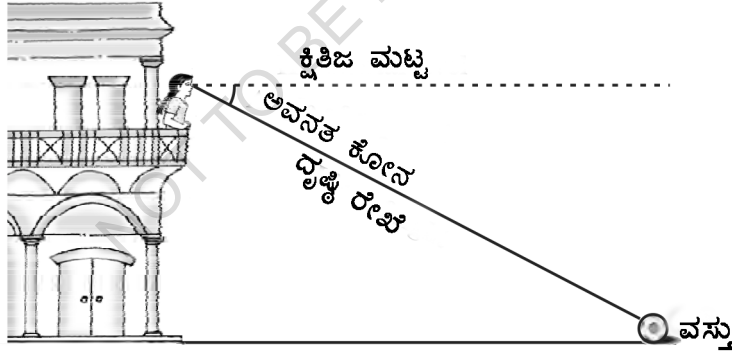
ಆದ್ದರಿಂದ, ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 9.1 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 9.2

ಈಗ, 9.2 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಉಪ್ಪರಿಗೆ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತಿರುವ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು, ಕೆಳಗೆ ನೋಡುತ್ತಾ ದೇವಾಲಯದ ಮೆಟ್ಟಿಲ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಹೂ ಕುಂಡವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆಯೊಡನೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆ ನಡುವೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 9.3 ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 9.3

ಈಗ, ನೀವು ಚಿತ್ರ 9.3 ರಲ್ಲಿನ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅವು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಅಥವಾ ಅವನತ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯೇ?

ಈಗ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಚಿತ್ರ 9.1 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ನೈಜವಾಗಿ ಅಳೆಯದೇ, ಮಿನಾರ್‌ನ ಎತ್ತರ CD ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಮಾಹಿತಿ ಏನು? ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಮಾಹಿತಿಗಳು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

- i) ಮಿನಾರ್‌ನ ಪಾದದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ನಿಂತಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ DE
- ii) ಮಿನಾರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ  $\angle BAC$
- iii) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರ AE

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ನಿಬಂಧನೆಗಳು ತಿಳಿದಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಮಿನಾರ್ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,  $CD = CB + BD$  ಇಲ್ಲಿ  $BD = AE$ , ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ. BC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,  $\angle BAC$  ಅಥವಾ  $\angle A$  ದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

$\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $\angle A$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, BC ಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಾಗಿದೆ. ಈಗ, ನಾವು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಮತ್ತು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ನಮ್ಮ ಹುಡುಕಾಟ ಕೊನೆಗೆ  $\tan A$  ಅಥವಾ  $\cot A$  ಗೆ ಬಂದು ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಅನುಪಾತಗಳು AB ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

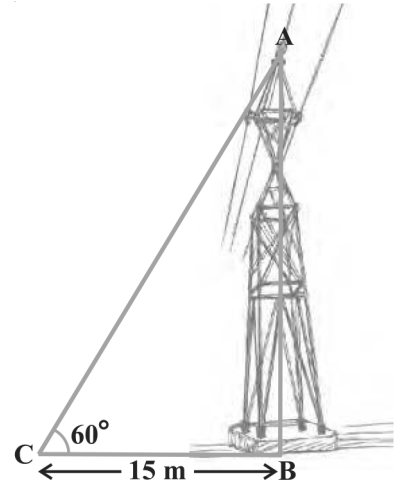
ಆದ್ದರಿಂದ,  $\tan A = \frac{BC}{AB}$  ಅಥವಾ  $\cot A = \frac{AB}{BC}$ . ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ BC ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

AE ಮತ್ತು BCಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ನಾವು ಮಿನಾರ್‌ನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 15m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ಸರಳ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 9.4 ನೋಡಿ). ಇಲ್ಲಿ AB ಯು ಗೋಪುರವನ್ನು, CB ಯು ಗೋಪುರದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ ಮತ್ತು  $\angle ACB$  ಯು ಉನ್ನತ ಕೋನ. ನಾವು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ, AB. ಹಾಗೂ  $\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ,  $\angle B = 90^\circ$ . ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ನಾವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತ  $\tan 60^\circ$  (ಅಥವಾ  $\cot 60^\circ$ ) ಅನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡೋಣ, ಏಕೆಂದರೆ ಇದು AB



ಚಿತ್ರ 9.4

ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಈಗ,  $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

ಅಂದರೆ,  $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

ಅಂದರೆ,  $AB = 15\sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು  $15\sqrt{3}$  m ಆಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೊಬ್ಬರು 5m ಎತ್ತರದ ಕಂಬದ ಮೇಲೆ ವಿದ್ಯುತ್ ದೋಷವನ್ನು ದುರಸ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಯಿಂದ 1.3m ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಿ, ಅವರು ದುರಸ್ತಿ ಕಾರ್ಯ ಮಾಡಬೇಕಿದೆ (ಚಿತ್ರ 9.5 ನೋಡಿ). ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ  $60^\circ$  ಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಓರೆಯಾಗಿ ಏಣಿಯನಿಟ್ಟು ಅವರು ತಲುಪಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಲು ಬೇಕಾದ ಏಣಿಯ ಉದ್ದವೇನು? ಹಾಗೆಯೇ ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಏಣಿಯ ಪಾದವಿರಬೇಕು? (ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ  $\sqrt{3} = 1.73$  ಎಂದು ಬಳಸಬಹುದು)

**ಪರಿಹಾರ :** ಚಿತ್ರ 9.5 ರಲ್ಲಿ, ಕಂಬ AD ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು B ಗೆ ವಿದ್ಯುಚ್ಛಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ತಲುಪಬೇಕಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,  $BD = AD - AB = (5 - 1.3) \text{ m} = 3.7 \text{ m}$

ಇಲ್ಲಿ, BC ಯು ಏಣಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಇದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ BDC ಯ ವರ್ಕಾ

ಈಗ ನಾವು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯೋಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಅದು  $\sin 60^\circ$  ಆಗಬೇಕಾಗಿದೆ.

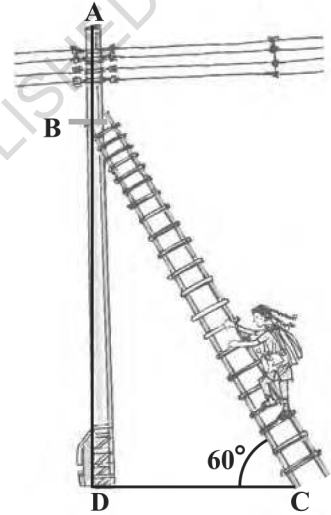
ಆದ್ದರಿಂದ,  $\frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ$  ಅಥವಾ  $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ m}$  (ಅಂದಾಜಿಸಿದೆ)

ಅಂದರೆ, ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು 4.28 m ಆಗಿರಬೇಕು

ಈಗ,  $\frac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ಅಂದರೆ,  $DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ m}$  (ಅಂದಾಜಿಸಿದೆ)



ಚಿತ್ರ 9.5

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಕೆಯ ಏಣಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ 2.14 m ದೂರದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** 1.5m ಎತ್ತರವಿರುವ ವೀಕ್ಷಕರೊಬ್ಬರು ಚಿಮಣಿಯಿಂದ 28.5m ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವರ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $45^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರವೇನು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ, AB ಯು ಚಿಮಣಿ, CD ವೀಕ್ಷಕ ಮತ್ತು  $\triangle ADE$  ಉನ್ನತ ಕೋನ (ಚಿತ್ರ 9.6 ನೋಡಿ) ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ADE ಯು ತ್ರಿಭುಜ,  $\angle E = 90^\circ$  ಮತ್ತು ನಾವೀಗ ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈಗ,  $AB = AE + BE = AE + 1.5$

ಮತ್ತು  $DE = CB = 28.5m$

AE ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, AE ಮತ್ತು DE ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಉನ್ನತ ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶಕ (tangent) ವನ್ನು ಆರಿಸೋಣ.

ಈಗ,  $\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$

ಅಂದರೆ,  $1 = \frac{AE}{28.5}$

$\therefore AE = 28.5$

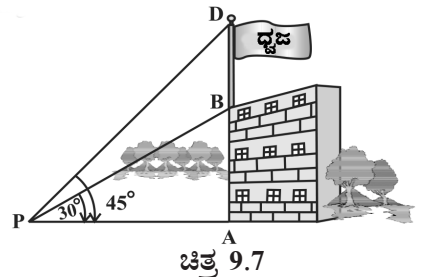
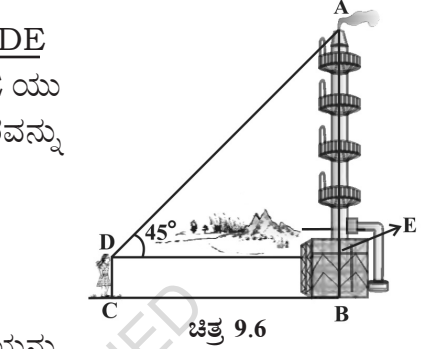
ಆದ್ದರಿಂದ ಚಿಮಣಿಯ ಎತ್ತರ (AB) =  $(28.5 + 1.5)m = 30m$

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಿಂದ 10m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $30^\circ$ . ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ಧ್ವಜವನ್ನು ಹಾರಿಸಿದೆ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಈ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $45^\circ$ . ಹಾಗಾದರೆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವನ್ನು ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\sqrt{3} = 1.732$  ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

**ಪರಿಹಾರ:** ಚಿತ್ರ 9.7 ರಲ್ಲಿ, AB ಯು ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು, BD ಯು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭ ಮತ್ತು P ದತ್ತ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ,  $\triangle PAB$  ಮತ್ತು  $\triangle PAD$ . ನಾವು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಂದರೆ DB ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಅಂದರೆ PA ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ನಮಗೆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ AB ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಮೊದಲು  $\triangle PAB$  ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಈಗ,  $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$



ಅಂದರೆ,  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

$\therefore AP = 10\sqrt{3}$

ಅಂದರೆ, ಬಿಂದು P ಯಿಂದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕಿರುವ ದೂರ  $10\sqrt{3} = 17.32$  ಮುಂದೆ, ನಾವು  $DB = x$  m ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಆಗ,  $AD = (10 + x)$  m

ಈಗ  $\triangle PAD$  ಯಲ್ಲಿ  $\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

$\therefore 1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

ಅಂದರೆ,  $x = 10 (\sqrt{3} - 1) = 7.32$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದವು 7.32m

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತ ಸ್ತಂಭವೊಂದರ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು, ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ,  $30^\circ$  ಇದ್ದಾಗ ಉಂಟಾದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 40m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಚಿತ್ರ 9.8ರಲ್ಲಿ, AB ಯು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ, BC ಯು ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಇದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ ಅಂದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ನೆರಳಿನ ತುದಿಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತಕೋನ  $60^\circ$  ಮತ್ತು DB ಯು ಸೂರ್ಯನೆಡೆಗಿನ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಇದ್ದಾಗ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ.

ಈಗ,  $AB = 'h'$  m ಮತ್ತು  $BC = 'x'$  m ಆಗಿರಲಿ

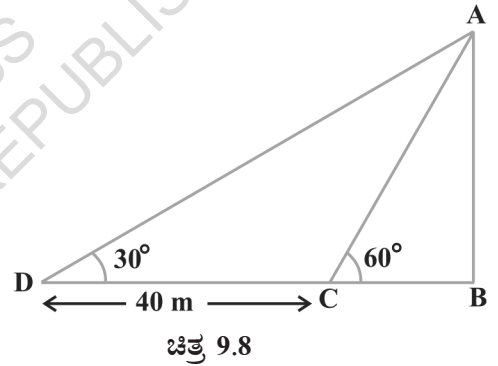
ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, DB ಯು BC ಗಿಂತ 40m ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,  $DB = (40 + x)m$

ಈಗ, ನಮ್ಮ ಬಳಿ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ,  $\triangle ABC$  ಮತ್ತು  $\triangle ABD$ .

$\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ  $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

ಅಥವಾ,  $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$  (1)



$\triangle ABD$  ಯಲ್ಲಿ

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 40} \quad (2)$$

(1) ರಿಂದ,

$$h = x\sqrt{3}$$

ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,  $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$

ಅಂದರೆ,

$$3x = x + 40$$

ಅಂದರೆ,

$$x = 20$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$h = 20\sqrt{3}$$

[(1) ರಿಂದ]

$\therefore$  ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವು  $20\sqrt{3}$  m ಆಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 6** ಒಂದು ಬಹುಮುಖದ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 8m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ಬದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $30^\circ$  ಮತ್ತು  $45^\circ$  ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬಹುಮುಖದ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡೂ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಚಿತ್ರ 9.9 ರಲ್ಲಿ PC ಯು ಬಹುಮುಖದ ಕಟ್ಟಡವನ್ನು, AB ಯು 8m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಬಹುಮುಖದ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಂದರೆ, PC ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಅಂದರೆ, AC ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಆಸಕ್ತಿ ಇದೆ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿ. PQ ಮತ್ತು BD ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ PB ಛೇದಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore$  ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾದ  $\angle QPB$  ಮತ್ತು  $\angle PBD$  ಸಮವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  $\angle PBD = 30^\circ$

ಹಾಗೆಯೇ,  $\angle PAC = 45^\circ$  ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PBD ಯಲ್ಲಿ,

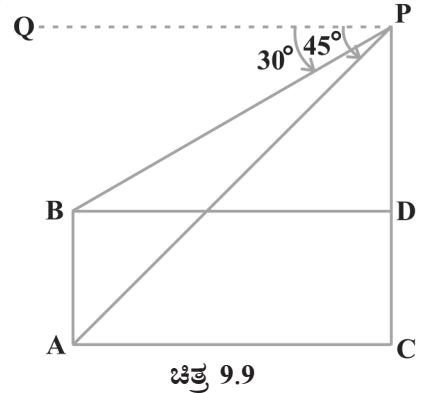
$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ಅಥವಾ } BD = PD\sqrt{3}$$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PAC ಯಲ್ಲಿ

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^\circ = 1$$

ಅಂದರೆ,

$$PC = AC$$



ಹಾಗೂ

$$PC = PD + DC, \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } PD + DC = AC$$

$$AC = BD \text{ ಮತ್ತು } DC = AB = 8\text{m ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, } PD + 8 = BD = PD\sqrt{3} \quad (\text{ಏಕೆ?})$$

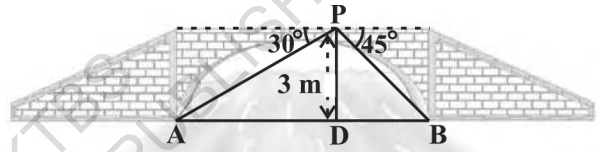
$$\text{ಇದರಿಂದ, } PD = \frac{8}{\sqrt{3} - 1} = \frac{8(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 4(\sqrt{3} + 1)\text{m}$$

$\therefore$  ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡ ಎತ್ತರವು  $\{4(\sqrt{3} + 1) + 8\}\text{m} = 4(3 + \sqrt{3})\text{m}$  ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವು  $4(3 + \sqrt{3})\text{m}$  ಆಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ನದಿಗೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ಸೇತುವೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ನದಿಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದಡಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $30^\circ$  ಮತ್ತು  $45^\circ$  ಆಗಿವೆ. ಸೇತುವೆಯು ದಡದ ಮೇಲಿನಿಂದ 3 m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಚಿತ್ರ 9.10 ರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B

ನದಿಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದಡಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AB ಯು ನದಿಯ ಅಗಲವಾಗಿದೆ. ನದಿಯ ಮೇಲಿನಿಂದ 3m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಸೇತುವೆ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು P ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ  $DP = 3\text{m}$  ನಾವು  $\triangle APB$  ಯ ಬಾಹು AB, ಅಂದರೆ ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.10

ಈಗ,

$$AB = AD + DB$$

$\triangle APD$ , ಯಲ್ಲಿ

$$\angle A = 30^\circ$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$$

ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ ಅಥವಾ } AD = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

ಹಾಗೂ  $\triangle PBD$  ಯಲ್ಲಿ,

$$\angle B = 45^\circ$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

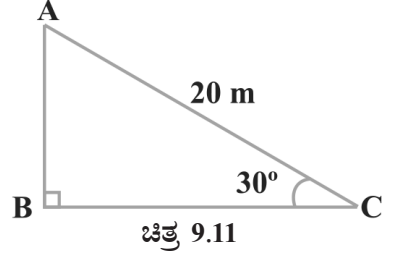
$$BD = PD = 3 \text{ m}$$

ಈಗ,

$$AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ m}$$

$\therefore$  ನದಿಯ ಅಗಲವು  $3(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$  ಆಗಿದೆ.

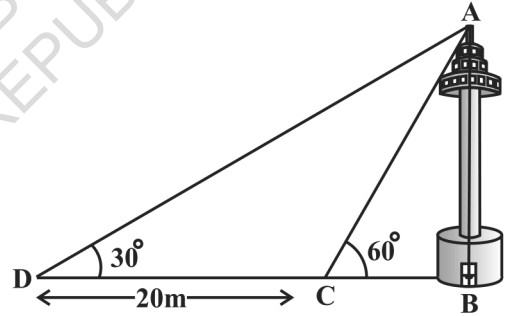
## ಅಭ್ಯಾಸ 9.1



1. ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸಿನ ಕಲಾವಿದನು, ನೇರ ಸ್ತಂಭದಿಂದ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ 20 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದ ಮೇಲೆ ಹತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹಗ್ಗವು ಉಂಟುಮಾಡಿದ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಆದರೆ, ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 9.11 ನೋಡಿ)
2. ಬಿರುಗಾಳಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿ ಒಂದು ಮರವು ಮುರಿದು, ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದಾಗ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ  $30^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 8 m ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ತಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುರಿದು ಬೀಳುವ ಮುನ್ನ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಿತ್ತೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಗುತ್ತಿಗೆದಾರರೊಬ್ಬರು ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಎರಡು ಜಾರುಬಂಡೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಯೋಚಿಸುತ್ತಾರೆ. 5 ವರ್ಷದ ಕೆಳಗಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಇಳಿಜಾರು ಸುಮಾರು 1.5m ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ನೆಲಕ್ಕೆ  $30^\circ$  ಓರೆ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಹಿರಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಜಾರುಬಂಡೆ ಸುಮಾರು 3m ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ನೆಲಕ್ಕೆ  $60^\circ$  ಓರೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಇಷ್ಟಪಡುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರುಬಂಡೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?
4. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ 30m ದೂರದ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಆದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಗಾಳಿಪಟವೊಂದು ನೆಲದ ಮೇಲಿನಿಂದ 60m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಲಾದ ದಾರವನ್ನು ತಾತ್ಕಾಲಿಕವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ  $60^\circ$  ಯ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ದಾರವು ಸಡಿಲವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 1.5m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗನೊಬ್ಬ 30m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ನೆಡೆದು ಹೋಗುವಾಗ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಯಿಂದ  $60^\circ$  ಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನೆಡೆದು ಬಂದಿದ್ದಾನೆ?
7. 20m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರವೊಂದರ (transmission tower) ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $60^\circ$  ಮತ್ತು  $45^\circ$  ಇದೆ. ಪ್ರಸರಣೆಯ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. 1.6m ಎತ್ತರದ ಪ್ರತಿಮೆಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಮೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $45^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಪೀಠದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಇದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 50m ಇದ್ದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. 80 ಅಡಿ ಅಗಲವುಳ್ಳ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ 2 ಕಂಬಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ ನಿಂತಿವೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಕಂಬದ ಮೇಲ್ತುದಿಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $60^\circ$  ಮತ್ತು  $30^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಂಬಗಳಿಂದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

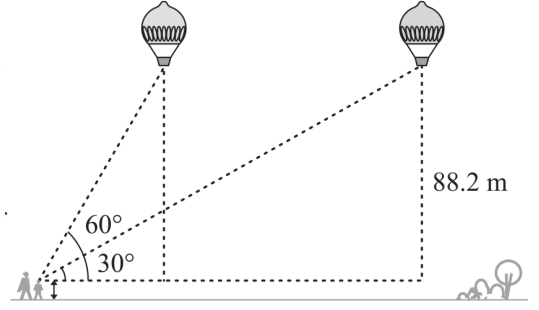
11. ಕಾಲುವೆಯ ಒಂದು ದಡದ ಮೇಲೆ ದೂರದರ್ಶನದ ಗೋಪುರವೊಂದು ನೇರವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ. ಗೋಪುರಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ದಡದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 20m ದೂರದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಆಗಿದೆ



ಚಿತ್ರ 9.12

- (ಚಿತ್ರ 9.12 ನೋಡಿ). ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಾಲುವೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 7m ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಗೆ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನವು  $45^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ 75m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ದೀಪಸ್ತಂಭವೊಂದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಅವನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $30^\circ$  ಮತ್ತು  $45^\circ$  ಆಗಿದೆ. ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಹಿಂದೆ ಮತ್ತೊಂದಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. 1.2m ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು 88.2m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಲೂನನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಆ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್‌ಗೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಆಗಿದೆ. ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9.13 ನೋಡಿ). ಈ ಸಮಯದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನ್ ಚಲಿಸಿದ ದೂರವೆಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 9.13

15. ನೇರ ಹೆದ್ದಾರಿಯೊಂದು ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ದಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರು ಏಕರೂಪ ಜವದಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ಕಡೆಗೆ ಬರುತ್ತಿರುವ ಕಾರೊಂದನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು  $30^\circ$  ಆಗಿದೆ. 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಕಾರಿನ ಅವನತ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಬರಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?

## 9.2 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

- (i) ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ, ವೀಕ್ಷಕನು ಗಮನಿಸುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.
  - (ii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
  - (iii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಕೆಳಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿಳಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು, ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಉದ್ದ ಅಥವಾ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.





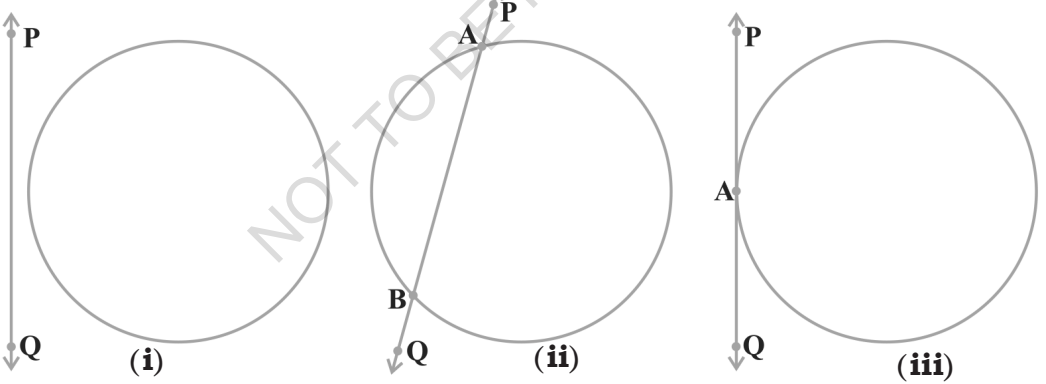
# ವೃತ್ತಗಳು

# 10

## 10.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವೃತ್ತ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು (ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ)ವಿನಿಂದ, ಸ್ಥಿರ ಅಂತರದಲ್ಲಿ (ತ್ರಿಜ್ಯ) ರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮೂಹ ಎಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪದಗಳಾದ ಜ್ಯಾ, ವೃತ್ತಖಂಡ, ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ, ಕಂಸ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಇದೀಗ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುವಾಗ ಉದ್ಭವಿಸುವ (ಉಂಟಾಗುವ) ವಿವಿಧ ಸನ್ನಿವೇಶ (ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು) ಪರಿಕ್ಷಿಸೋಣ.

ಈಗ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ರೇಖೆ PQ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರ 10.1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು.

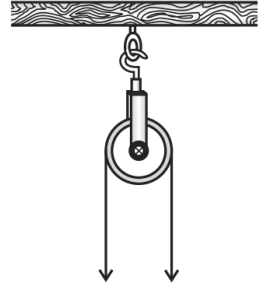


ಚಿತ್ರ 10.1

ಚಿತ್ರ 10.1 (i) ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿಲ್ಲ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ PQ ಅನ್ನು **ಛೇದಕವಲ್ಲದ ರೇಖೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 10.1 (ii) ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ರೇಖೆ PQ ಅನ್ನು **ವೃತ್ತ ಛೇದಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 10.1 (iii) ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ PQ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು A ಅನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ರೇಖೆ PQ ಅನ್ನು **ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಬಾವಿಯಿಂದ ನೀರನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲು, ಬಾವಿಯ ಮೇಲೆ ಅಳವಡಿಸಿರುವ ರಾಟೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 10.2ನ್ನು ನೋಡಿ. ಇಲ್ಲಿ ರಾಟೆಯ ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಕಿರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರಾಟೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲೆ ನೀಡಿರುವ ವಿಧಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಇಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

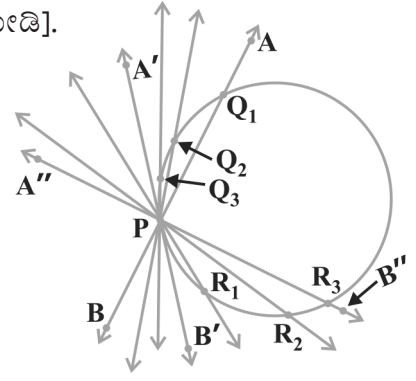


### 10.2 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕ\* ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ 1:** ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ನೇರ ತಂತಿ AB ಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ. ಇದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಭ್ರಮಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಈಗ ಇದನ್ನು ಮೇಜಿನ ಮೇಲಿಟ್ಟು P ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ AB ತಂತಿಯನ್ನು ನಯವಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಿ ನೇರ ತಂತಿಯ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 10.3(i) ನೋಡಿ].

ನೇರ ತಂತಿಯು, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯನ್ನು ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ P ಹಾಗೂ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು  $Q_1$  ಅಥವಾ  $Q_2$  ಅಥವಾ  $Q_3$  ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ತಂತಿಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (AB ಯ  $A'B'$  ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಇದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.3(i)

ಭ್ರಮಿಸುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದಾಗ, AB ಯ ಇತರೆ ಸ್ಥಾನಗಳು P ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು  $R_1$  ಅಥವಾ  $R_2$  ಅಥವಾ  $R_3$  ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

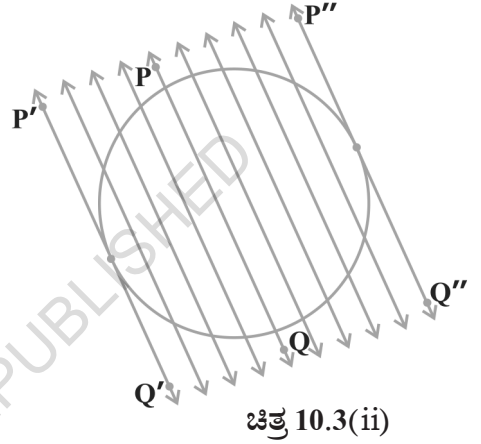
ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ, AB ಯ ಸ್ಥಾನವು  $A'B'$  ಕಡೆಗೆ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, AB ರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಅಂದರೆ  $Q_1$  ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ಕ್ರಮೇಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು P ಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ

\* ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಂದರೆ ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ 'Tangent'. ಈ ಪದವು ಲಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯ 'tangere' ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ 'ಸ್ಪರ್ಶಿಸು' ಎಂದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಡ್ಯಾನಿಷ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಥಾಮಸ್ ಫಿನೆಕೆ 1583 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಿದರು.

ಮತ್ತೂ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ  $A''B''$  ನ ಸ್ಥಾನವಾದ  $A'B'$  ನಲ್ಲಿ ಬಿಂದು  $P$  ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.  $AB$  ಯನ್ನು  $P$  ಯ ಮೇಲೆ ಬಲಕ್ಕೆ ಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು  $R_3$  ಕ್ರಮೇಣ ಬಿಂದು  $P$  ಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ ಮತ್ತೂ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ ಅಂತಿಮವಾಗಿ  $P$  ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬಹುದೇನೆಂದರೆ,

ಭೇದಕವೊಂದರ ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಭೇದಕದ ಏಕೀಕರಣವೇ ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ 2:** ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಭೇದಕ ರಚಿಸಿ. ಭೇದಕದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ, ಭೇದಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೆಲವು ಹಂತಗಳ ನಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಂದಾದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮೇಣವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಅಂದರೆ, ಭೇದನ ರೇಖೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ಹತ್ತಿರ ಮತ್ತು ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 10.3 (ii) ನೋಡಿ). ಒಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಭೇದಕದ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಭೇದಕದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಭೇದಕ  $P'Q'$  ಮತ್ತು  $P''Q''$  ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 10.3(ii)



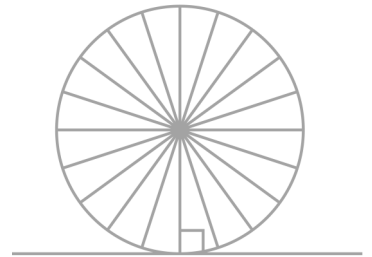
ಚಿತ್ರ 10.3(ii)

ನೋಡಿ). ಇವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಭೇದಕ  $PQ$  ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಇದು ಒಂದು ಭೇದಕಕ್ಕೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 ರಲ್ಲಿ, ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ ಅಂಶವು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಭೇದಕಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಭೇದಕವೇ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 10.1 (iii) ರಲ್ಲಿನ ಬಿಂದು  $A$ ) ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ನೋಡಿರಿ. ನೀವು ಬೈಸಿಕಲ್ ಅಥವಾ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಂಡಿಯನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಾ? ಅವುಗಳ ಚಕ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಚಕ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಕಡ್ಡಿಗಳು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ ನೇರದಲ್ಲಿದೆ. ಈಗ ಚಕ್ರದ ಚಲನೆಯನ್ನು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ. ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ನೀವು ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡೀರಾ? (ಚಿತ್ರ 10.4 ನೋಡಿ) ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಚಕ್ರವು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯ ನೇರವು, ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚಕ್ರದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೇ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ



ಚಿತ್ರ 10.4

ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 10.4 ನೋಡಿ). ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಈ ಗುಣವನ್ನು ನಾವೀಗ ಸಾಧಿಸೋಣ.

**ಪ್ರಮೇಯ 10.1** ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

**ಸಾಧನೆ:** ನಮಗೆ ನೀಡಿದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ XY ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. ನಾವು, OP ಯು XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

P ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, XY ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು Q ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು OQ ಸೇರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 10.5 ನೋಡಿ).

Q ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರಬೇಕು. (ಏಕೆ? Q ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, XY ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಛೇದಕವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೇ ಹೊರತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ). ಆದ್ದರಿಂದ, OQ ಇದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಗಿಂತ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ,

$$OQ > OP$$

P ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, XY ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ XY ನ ಮೇಲಿನ ಇತರೆ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಕ್ಕಿಂತ OP ಯು ಕನಿಷ್ಠ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ A1.7 ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವಂತೆ)

**ಗಮನಿಸಿ:**

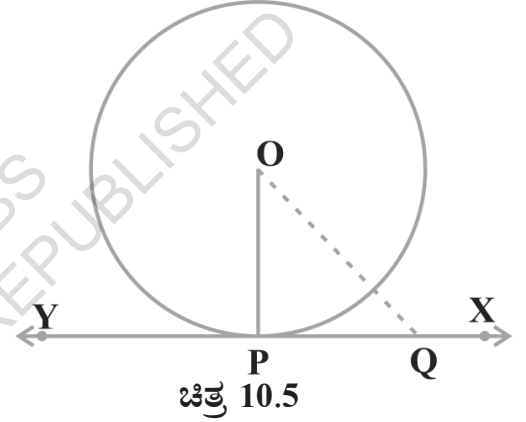
1. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.
2. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವೃತ್ತದ 'ಲಂಬಕ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

### ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

2. ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ:

i) ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕವೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ \_\_\_\_\_



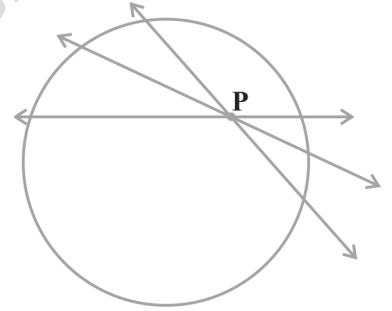
- ii) ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯೇ \_\_\_\_\_  
 iii) ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ \_\_\_\_\_  
 iv) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೇ \_\_\_\_\_

3. 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ PQ. ಇದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. OQ = 12 cm ಆದರೆ PQ ಉದ್ದವು  
 a) 12 cm    b) 13 cm    c) 8.5 cm    d)  $\sqrt{119}$  cm
4. ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಭೇದಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

### 10.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

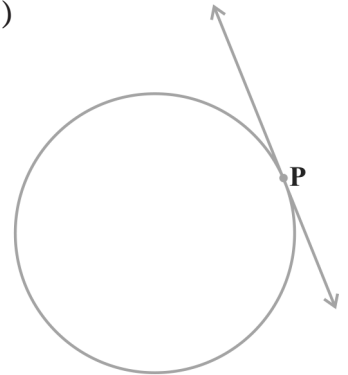
**ಚಟುವಟಿಕೆ 3:** ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ನೀವು ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರಚಿಸಬಹುದೇ? ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಚಿತ್ರ 10.6 (i) ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 10.6 (i)

ಈಗ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವಂತೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವಿಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 10.6 (ii) ನೋಡಿ)

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಗುರುತಿಸಿ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 11.6 (iii) ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 10.6 (ii)

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ.

**ಪ್ರಕರಣ 1:** ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

**ಪ್ರಕರಣ 2:** ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು.

**ಪ್ರಕರಣ 3** ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 10.6 (iii),  $PT_1$  ಮತ್ತು  $PT_2$  ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $T_1$  ಮತ್ತು  $T_2$  ಆಗಿವೆ.

ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು  $P$  ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು  $P$  ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಚಿತ್ರ 10.6 (iii) ದಲ್ಲಿ,  $PT_1$  ಮತ್ತು  $PT_2$  ಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ  $P$  ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.  $PT_1$  ಮತ್ತು  $PT_2$  ಗಳೆರಡೂ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆ ಗುಣವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?  $PT_1$  ಮತ್ತು  $PT_2$  ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅವುಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ? ನೈಜವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ನಾವು ಈ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನೀಡೋಣ.

**ಪ್ರಮೇಯ 10.2** ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

**ಸಾಧನೆ:** 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು 'P' ಯು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು.  $PQ$  ಮತ್ತು  $PR$  ಗಳು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು  $P$  ನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ನಾವು  $PQ = PR$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 10.7ನೋಡಿ)

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು  $OP$ ,  $OQ$  ಮತ್ತು  $OR$  ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆಗ,  $\angle OQP$  ಮತ್ತು  $\angle ORP$  ಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳು, ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಕೋನಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 10.1 ರಿಂದ ಅವುಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

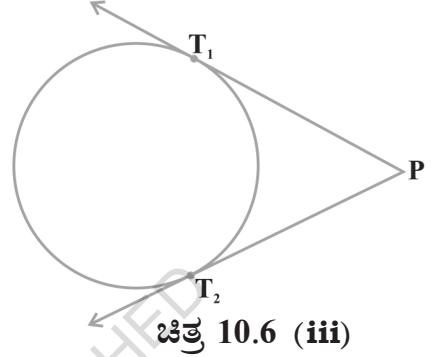
ಈಗ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ  $OQP$  ಮತ್ತು  $ORP$  ಗಳಲ್ಲಿ,

$$OQ = OR$$

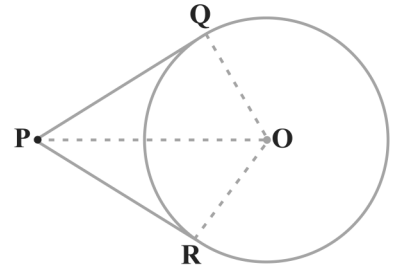
(ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

$$OP = OP$$

(ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)



ಚಿತ್ರ 10.6 (iii)



ಚಿತ್ರ 10.7

ಆದ್ದರಿಂದ,  $\Delta OQP \cong \Delta ORP$  (ಲಂ.ವಿ.ಬಾ)

ಇದರಿಂದ,  $PQ = PR$  (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.)

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2 (\because OQ = OR)$$

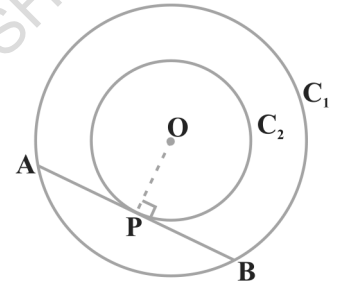
ಇದರಿಂದ,  $PQ = PR$

2.  $\angle OPQ = \angle OPR$  ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು  $\angle QPR$  ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1** ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ನಮಗೆ 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ  $C_1$  ಮತ್ತು  $C_2$  ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ  $C_1$  ದ ಜ್ಯಾ AB ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತ  $C_2$  ವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 10.8ನೋಡಿ) ನಾವು  $AP = BP$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.8

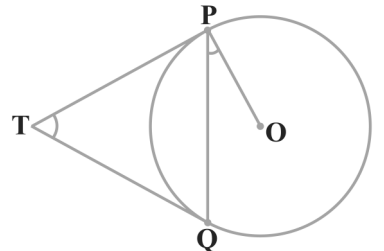
ಈಗ ನಾವು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ. ಆಗ AB ಯು  $C_2$  ಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು OP ಯು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 10.1 ರಿಂದ,

$$OP \perp AB$$

ಈಗ AB ಯು  $C_1$  ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು  $OP \perp AB$  ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾ ವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು ಜ್ಯಾ AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$$AP = BP$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು T ಯಿಂದ TP ಮತ್ತು TQ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.  $\angle PTQ = 2\angle OPQ$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.9

**ಪರಿಹಾರ:** 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತ, ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು T, ಮತ್ತು TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 10.9 ನೋಡಿ). ನಾವು  $\angle PTQ = 2\angle OPQ$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$\angle PTQ = \theta \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ 10.2 ರಿಂದ,  $TP = TQ$  ಆದ್ದರಿಂದ  $\triangle TPQ$  ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

$$\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2} (180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2} \theta$$

ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರಮೇಯ 10.1 ರಿಂದ,  $\angle OPT = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ } \angle OPQ &= \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \theta\right) \\ &= \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \angle PTQ \end{aligned}$$

ಇದರಿಂದ,  $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ PQ ಉದ್ದವು 8 cm ಆಗಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 10.10 ನೋಡಿ). TP ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** OT ಸೇರಿಸಿ. ಅದು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬಿಂದು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆಗ  $\triangle TPQ$  ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು TO ರೇಖೆಯು  $\angle PTQ$  ದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  $OT \perp PQ$  ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ OT ರೇಖೆಯು PQ ಅನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ,  $PR = RQ = 4$  cm.

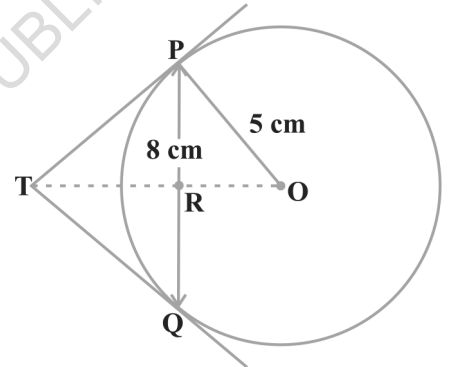
$$\text{ಹಾಗೆಯೇ, } OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{ಈಗ, } \angle TPR + \angle RPO = 90^\circ = \angle TPR + \angle PTR \text{ (ಏಕೆ?)}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } \angle RPO = \angle PTR$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ TRP ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PRO ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ. (ಕೋನ - ಕೋನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ).

$$\text{ಇದರಿಂದ, } \frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}, \text{ ಅಂದರೆ, } \frac{TP}{5} = \frac{4}{3} \text{ ಅಥವಾ } TP = \frac{20}{3} \text{ cm.}$$



ಚಿತ್ರ 10.10

ಗಮನಿಸಿ: TP ಯನ್ನು ಪೈಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$TP = x \text{ ಮತ್ತು } TR = y \text{ ಎಂದಿರಲಿ.}$$

$$\text{ಆಗ, } x^2 = y^2 + 16 \quad [\Delta PRT \text{ ದಿಂದ}] \quad (1)$$

$$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2 \quad [\Delta OPT \text{ ದಿಂದ}] \quad (2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಅನ್ನು (2) ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ,

$$25 = 6y - 7 \text{ ಅಥವಾ } y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9} (16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9} \quad [(1) \text{ ರಿಂದ}]$$

$$\text{ಅಥವಾ } x = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

### ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

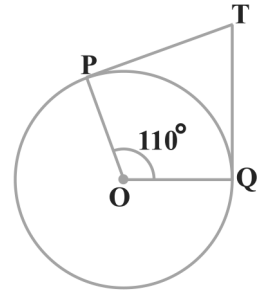
ಪ್ರಶ್ನೆ 1 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮತ್ತು ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

1. ಒಂದು ಬಿಂದು Q ದಿಂದ, ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 24 cm ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ Q ಬಿಂದು ನಡುವಿನ ದೂರ 25 cm ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

- A) 7 cm                      B) 12 cm  
C) 15 cm                      D) 24.5 cm

2. ಚಿತ್ರ 10.11 ರಲ್ಲಿ,  $\angle POQ = 110^\circ$  ಆಗಿರುವಂತೆ, O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ  $\angle PTQ$  ದ ಅಳತೆಯು

- A)  $60^\circ$                       B)  $70^\circ$   
C)  $80^\circ$                       D)  $90^\circ$



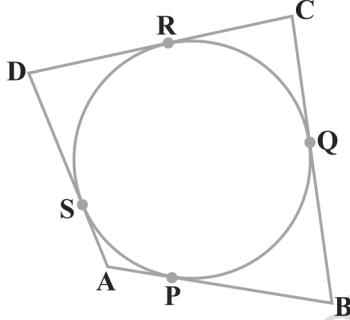
ಚಿತ್ರ 10.11

3. 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾದ PA ಮತ್ತು PB ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ  $80^\circ$  ಆದರೆ  $\angle POA$  ದ ಅಳತೆಯು

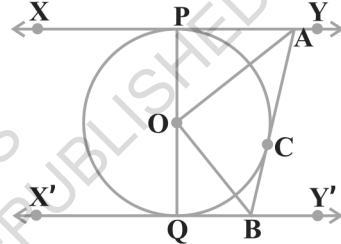
- A)  $50^\circ$                       B)  $60^\circ$   
C)  $70^\circ$                       D)  $80^\circ$

4. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
6. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 4 cm ಇದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 5 cm ಮತ್ತು 3 cm ಆಗಿವೆ. ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 10.12 ನೋಡಿ).  $AB + CD = AD + BC$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

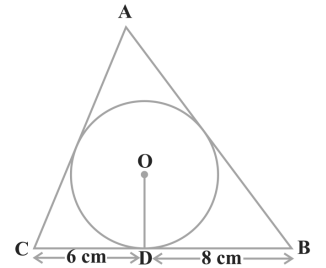


ಚಿತ್ರ 10.12



ಚಿತ್ರ 10.13

9. ಚಿತ್ರ 10.13 ರಲ್ಲಿ, 'O' ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ XY ಮತ್ತು X'Y' ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು C ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯು XY ಅನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು X'Y' ಅನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ  $\angle AOB = 90^\circ$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
10. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
11. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
12. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು D ಯು BC ಬಾಹುವನ್ನು BD ಮತ್ತು DC ಯ ಉದ್ದ ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 cm ಮತ್ತು 6 cm ಇರುವಂತೆ 4 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವು  $\triangle ABC$  ದಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಗೊಳಿಸಲು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. [ಚಿತ್ರ 10.14 ನೋಡಿ]. AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.14

13. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

#### 10.4 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಅರ್ಥ.
2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
3. ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

❀ ❀ ❀

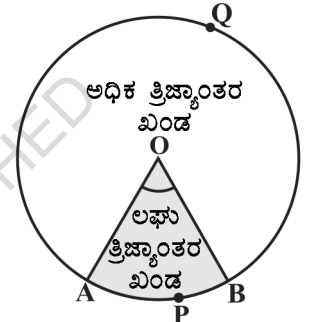
@KTBS  
NOT TO BE REPUBLISHED



# ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು 11

## 11.1 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು:

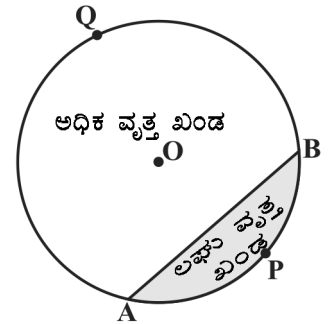
ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡ ಪದಗಳನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು 'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು 'ವೃತ್ತಖಂಡ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಚಿತ್ರ 11.1 ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ  $OAPB$  ವಲಯವು  $O$  ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ.  $\angle AOB$  ಯು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 11.1

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯ  $OAQB$  ಯು ಸಹ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಭಾಗಗಳು ಗೋಚರಿಸುವುದರಿಂದ ವಲಯ  $OAPB$  ಯನ್ನು ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವಲಯ  $OAQB$  ಯನ್ನು ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವು  $360^\circ - \angle AOB$  ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

ಈಗ ಚಿತ್ರ 11.2 ನ್ನು ನೋಡಿ 'O' ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ AB ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯ APB ಯು ವೃತ್ತಖಂಡವಾಗಿದೆ. ನೀವು AB ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಮತ್ತೊಂದು ವಲಯ AQB ಯು ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತಖಂಡ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಭಾಗಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಗೋಚರಿಸುವುದರಿಂದ APB ಯನ್ನು 'ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಮತ್ತು AQB ಯನ್ನು 'ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

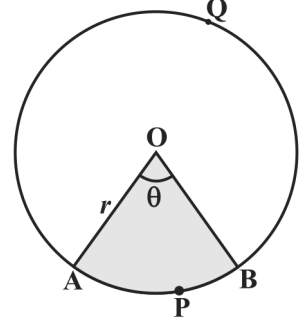


ಚಿತ್ರ 11.2

**ಗಮನಿಸಿ:** ನಾವು ಅನ್ಯಥಾ ಹೇಳದ ಹೊರತು 'ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಮತ್ತು 'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಅದು 'ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಮತ್ತು 'ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ನಾವು ಈ ಜ್ಞಾನದೊಂದಿಗೆ, ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧ (ಸೂತ್ರ) ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವು OAPB ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 11.3 ನೋಡಿ).  $\angle AOB$  ಯ ಅಳತೆಯು  $\theta$  ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 11.3

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಲಯ ಅಥವಾ ತಟ್ಟೆ)  $\pi r^2$  ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಲಯವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ 'O' ನಲ್ಲಿ  $360^\circ$  ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ.

ಏಕಾಂಶ ವಿಧಾನ ಅನ್ವಯಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ OAPB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು  $360^\circ$  ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2$ .

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು 1 ಡಿಗ್ರಿ ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{\pi r^2}{360}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು  $\theta$  ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ಹೀಗೆ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸಂಬಂಧ (ಸೂತ್ರ) ವನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\theta \text{ ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

ಇಲ್ಲಿ 'r' ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ' $\theta$ ' ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ (ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ) ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಎಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕಂಸ APB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಹೌದು ಮತ್ತು ಏಕಾಂಶ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವನ್ನು ( $360^\circ$  ಕೋನಕ್ಕೆ)  $2\pi r$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ನಾವು ಬೇಕಾದ ಕಂಸ APB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು  $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$  ಎಂದು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } \theta \text{ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ} = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

ಈಗ ನಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. (ಚಿತ್ರ 11.4 ನ್ನು ನೋಡಿ).

APB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAPB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ -  $\Delta OAB$  ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.}$$

ಗಮನಿಸಿ: ಚಿತ್ರ 11.3 ಮತ್ತು 11.4 ರಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದಾದ ಅಂಶಗಳೇಂದರೆ,

OAQB ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2 -$  OAPB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು AQB ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $\pi r^2 -$  APB ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1** ತ್ರಿಜ್ಯ 4 cm ಮತ್ತು ಕೋನವು  $30^\circ$  ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಅನುರೂಪವಾದ ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ಬಳಸಿ).

**ಪರಿಹಾರ:** OAPB ಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ.  
 (ಚಿತ್ರ 11.5 ನ್ನು ನೋಡಿ)

$$\text{ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

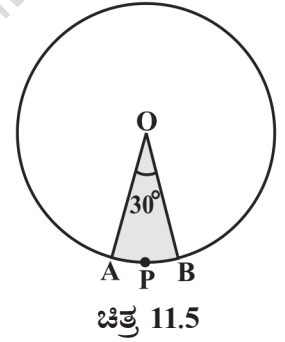
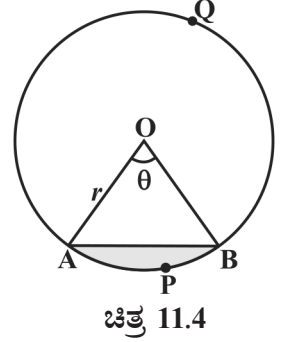
$$\text{cm}^2 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times 4 \times 4$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2 \text{ (ಸರಿಸುಮಾರು)}$$

$$\begin{aligned} \text{ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \pi r^2 - \text{APB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\ &= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2 \\ &= 46.05 \text{ cm}^2 \\ &= 46.1 \text{ cm}^2 \quad (\text{ಸರಿಸುಮಾರು}) \end{aligned}$$

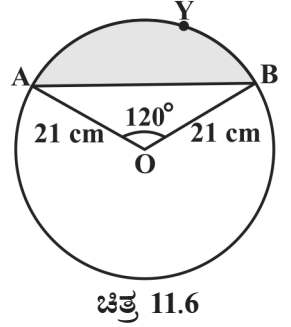
**ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:**

$$\begin{aligned} \text{ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \left( \frac{360^\circ - \theta}{360^\circ} \right) \times \pi r^2 \\ &= \left( \frac{360 - 30}{360} \right) \times 3.14 \times 16 \\ &= 46.05 \text{ cm}^2 \\ &= 46.1 \text{ cm}^2 \quad (\text{ಸರಿಸುಮಾರು}) \end{aligned}$$



ಉದಾಹರಣೆ 2 ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 21 cm ಮತ್ತು  $\angle AOB = 120^\circ$

ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 11.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ AYO ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ಬಳಸಿ)

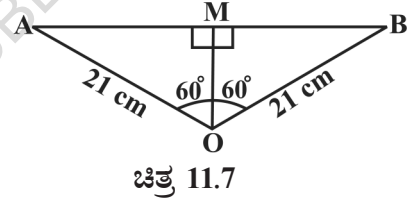


ಪರಿಹಾರ:

ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAYB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ -  $\Delta OAB$  ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (1)

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \\ &= 462 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$\Delta OAB$  ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚಿತ್ರ 11.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ  $OM \perp AB$  ಎಳೆಯಿರಿ.  $OA = OB$  ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂ.ವಿ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಪ್ರಕಾರ  $\Delta AMO \cong \Delta BMO$



ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮತ್ತು  $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$OM = x$  cm ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ,  $\Delta OMA$  ದಲ್ಲಿ,  $\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ$  ( $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ )

ಅಥವಾ,  $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$   $x = OM$

ಅಥವಾ,  $x = \frac{21}{2}$  cm

ಹಾಗೆಯೇ,  $\frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $AB = 2 \text{ AM} = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $\Delta OAB$  ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{441\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \quad (3)$$

ಆದ್ದರಿಂದ,  $AYB$  ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  $= \left(462 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{ cm}^2$  [(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ]

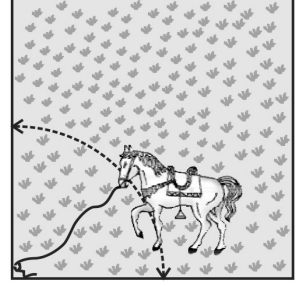
$$= \frac{21}{4} (88 - 21\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

### ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

[ $\pi$  ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ,  $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm, ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವು  $60^\circ$  ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಪರಿಧಿಯು 22 cm ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳಿನ ಉದ್ದವು 14 cm ಆಗಿದೆ. ಐದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಅದು ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ 1) ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡ 2) ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ಬಳಸಿ).
5. 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ  $60^\circ$  ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. 1) ಕಂಸದ ಉದ್ದ 2) ಕಂಸದಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ. 3) ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 15 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ  $60^\circ$  ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಹಾಗೂ  $\sqrt{3} = 1.73$  ಎಂದು ಬಳಸಿ).
7. 12 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ  $120^\circ$  ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಉಂಟಾದ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಹಾಗೂ  $\sqrt{3} = 1.73$  ಎಂದು ಬಳಸಿ).

8. 15 m ಬಾಹುವಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರದ ಒಂದು ಹುಲ್ಲಿನ ಮೈದಾನದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕುದುರೆಯೊಂದನ್ನು 5 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಿಂದ ಕಟ್ಟಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 11.8 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 11.8

- ಕುದುರೆಯು ಹುಲ್ಲನ್ನು ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,
- 5 m ಹಗ್ಗದ ಬದಲಾಗಿ 10 m ಹಗ್ಗ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

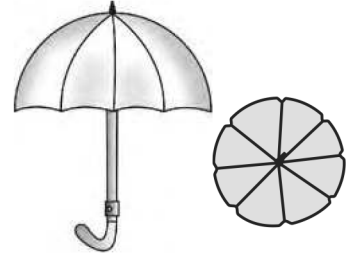
9. 35 mm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪದಕವನ್ನು ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿದೆ. ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ 5 ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಮನಾದ 10 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ಚಿತ್ರ 11.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 11.9

- ಬೇಕಾಗುವ ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ,
- ಪದಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

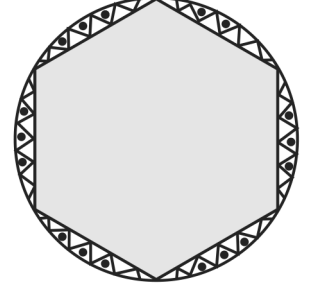
10. ಒಂದು ಕೊಡೆಯು ಸಮ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 8 ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 11.10 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಕೊಡೆಯು 45 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಪ್ಪಟೆಯಾದ ವೃತ್ತ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಕಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 11.10

11. ಒಂದು ಕಾರಿಗೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಅತಿಕ್ರಮಿಸದಂತಿರುವ ಎರಡು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣವು 25 cm ಉದ್ದದ ಬ್ಲೇಡನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇದು  $115^\circ$  ಕೋನದಲ್ಲಿ ಒರೆಸುತ್ತದೆ. ಬ್ಲೇಡ್‌ಗಳು ಒಂದು ಬಾರಿ ಜಾರಿದಾಗ ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ನೀರಿನ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಂಡೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಎಚ್ಚರಿಸಲು ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭವು  $80^\circ$  ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದಲ್ಲಿ 16.5 km ದೂರಕ್ಕೆ ಕೆಂಪು ಬೆಳಕನ್ನು ಹರಡುತ್ತದೆ. ಹಡಗುಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಸುವ ಈ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಚಿತ್ರ 11.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಹೊದಿಕೆಯು ಆರು ಸಮವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಹೊದಿಕೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 28 cm ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 0.35 ರ ದರದಂತೆ ವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚೆಷ್ಟು? ( $\sqrt{3} = 1.7$  ಎಂದು ಬಳಸಿ).



ಚಿತ್ರ 11.11

14. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ:

R ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ p (ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ) ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

- A)  $\frac{p}{180} \times 2\pi R$     B)  $\frac{p}{180} \times 2\pi R^2$     C)  $\frac{p}{360} \times 2\pi R$     D)  $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

### 11.2 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ  $\theta$  ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು  $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$
2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು  $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ .
3. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  
= ಅನುರೂಪ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಅನುರೂಪ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.



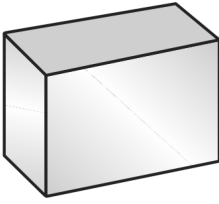


## ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

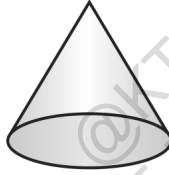
12

### 12.1 ಪೀಠಿಕೆ

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಬಗ್ಗೆ ಚಿರಪರಿಚಿತರಾಗಿದ್ದೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.1 ನೋಡಿ)



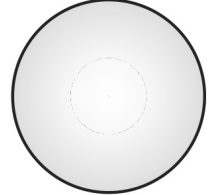
(i)



(ii)



(iii)



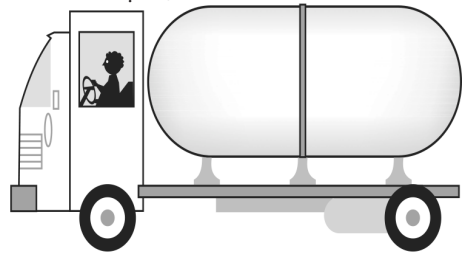
(iv)

ಚಿತ್ರ 12.1

ನಾವು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಡಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ.

ನೀರು ಅಥವಾ ತೈಲವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗುವ ಲಾರಿಯ ಹಿಂಬದಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಗ್ರಹಕವನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.2 ನೋಡಿ).

ಇದು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ? ಅದು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್, ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರವನ್ನು ಅದರ ಎರಡು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದು.



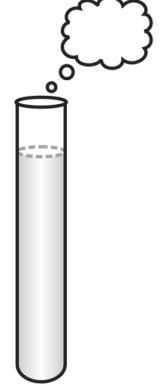
ಚಿತ್ರ 12.2

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಚಿತ್ರ 12.3 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ವಸ್ತುವನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಅದನ್ನು ಹೆಸರಿಸುವಿರಾ?

ಅದು ಒಂದು ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ. ಹೌದು! ನೀವು ಇದನ್ನು ನಿಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಯೋಗಾಲಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯು ಸಹ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಮಾಡಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, ನೀವು ಪ್ರವಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ದೊಡ್ಡದಾದ ಮತ್ತು ಸುಂದರ ಕಟ್ಟಡಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸ್ಮಾರಕಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೀರಿ.

ಕೆಲವು ಕಾರಣಗಳಿಂದಾಗಿ ನೀವು ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಅಥವಾ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಇದನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ? ಇವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

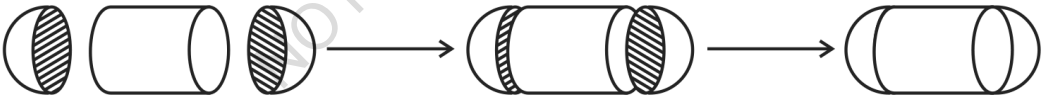
ಈ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಇಂತಹ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ 12.3

## 12.2 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಚಿತ್ರ 12.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಗ್ರಹಕವನ್ನು ನಾವು ಪುನಃ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಂತಹ ಘನವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು? ಒಂದು ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಯಾವಾಗಲಾದರೂ ನಮಗೆ ಎದುರಾದಾಗ ಅದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಬಿಡಿಸಿದ ಚಿಕ್ಕ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ ನಂತರ ಚಿತ್ರ 12.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.4

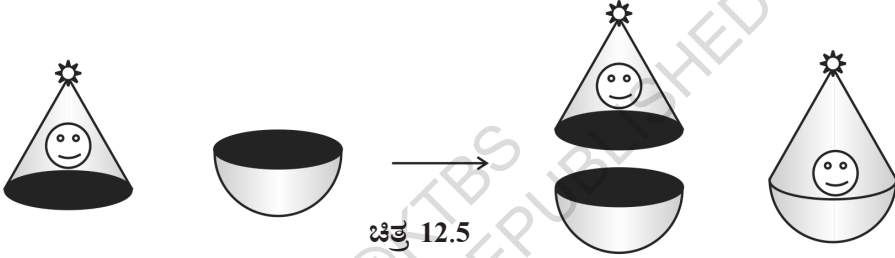
ಹೊಸದಾಗಿ ರೂಪಗೊಂಡ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಾಣಬಹುದು.

ಹೀಗಾಗಿ ಹೊಸದಾದ ಉಂಟಾದ ಘನವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪ್ರತಿ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ವಕ್ರಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\left( \begin{array}{c} \text{ಹೊಸ ಘನದ} \\ \text{ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ} \\ \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{ಮೊದಲ} \\ \text{ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ} \\ \text{ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ} \\ \text{ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{ಎರಡನೆಯ} \\ \text{ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ} \\ \text{ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \end{array} \right)$$

ಈಗ ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ನಾವು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳ ಮತ್ತು ಶಂಕುವನ್ನು ಒಂದುಗೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲು ಇರುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಮತಟ್ಟಾದ ಮುಖಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿಸೋಣ. ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ, ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ ಆಟಿಕೆಯು ನಯವಾದ, ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು. ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರ 12.5 ರಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12.5

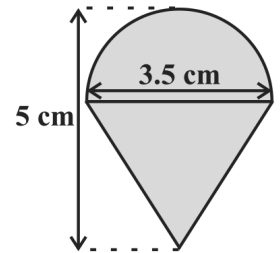
ಈ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ನಯವಾದ ಗೋಲಾಕಾರದ ತಳವುಳ್ಳ ಆಟಿಕೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು ಈ ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಬಣ್ಣ ಬೇಕಾಗಬಹುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಈಗ ನಾವು ಯಾವ ಅಂಶವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು? ಈಗ ನಾವು ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಈ ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ಏನನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು ಎಂದರೆ,

$$\text{ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \text{ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} + \text{ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}$$

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ರಶೀದನು ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದ ಉಡುಗೊರೆಯಾಗಿ ಒಂದು ಬುಗುರಿಯನ್ನು ಪಡೆದನು. ಬುಗುರಿಯ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಇರಲಿಲ್ಲ. ಅವನ ಬಳಿ ಇರುವ ಬಣ್ಣದ ಕಡ್ಡಿ (crayons) ಗಳಿಂದ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಬಯಸಿದ್ದಾನೆ. ಬುಗುರಿಯು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.6 ನೋಡಿ). ಬುಗುರಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 5 cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 3.5 cm ಇದ್ದರೆ, ಅವನು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು



ಚಿತ್ರ 12.6

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

**ಪರಿಹಾರ:** ಚಿತ್ರ 12.5 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಈ ಬುಗುರಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ಅಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಪರಿಶೋಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಬಳಸೋಣ.

ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \frac{1}{2} (4\pi r^2) = 2\pi r^2 \\ &= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಹಾಗೆಯೇ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ} &= \text{ಬುಗುರಿಯ ಎತ್ತರ} - \text{ಅರ್ಧಗೋಳದ ಎತ್ತರ (ತ್ರಿಜ್ಯ)} \\ &= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) = 3.25 \text{ cm} \end{aligned}$$

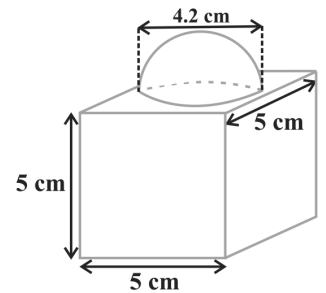
$$\begin{aligned} \text{ಹೀಗೆ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ (l)} &= \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7 \text{ cm} \\ &= 3.7 \text{ cm (ಸರಿಸುಮಾರು)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ cm}^2 \\ \text{ಇದರಿಂದ ಪಡೆಯುವುದೇನೆಂದರೆ,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ಬುಗುರಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = \frac{11}{7} (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 \\ &= 39.6 \text{ cm}^2 \text{ (ಸರಿಸುಮಾರು)} \end{aligned}$$

ಬುಗುರಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಚಿತ್ರ 12.7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಅಲಂಕಾರಿಕ ವಸ್ತುವು ಒಂದು ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವು 5 cm ಬಾಹುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ 4.2 cm ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



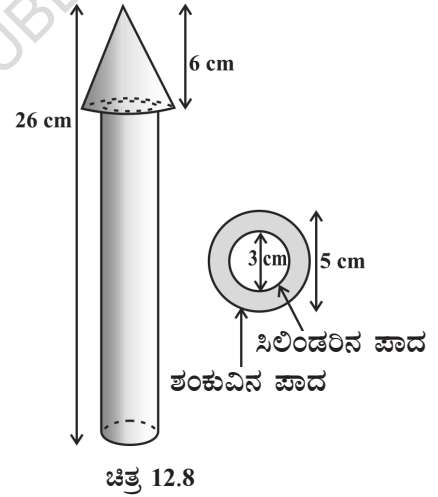
ಚಿತ್ರ 12.7

**ಪರಿಹಾರ:** ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $6 \times (\text{ಬಾಹು})^2$   
 $= 6 \times 5 \times 5 = 150 \text{ cm}^2$

ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಬಾರದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಹೀಗಾಗಿ, ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ -  
 ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ  
 ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ  
 $= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2$   
 $= (150 + \pi r^2) \text{ cm}^2$   
 $= 150 \text{ cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right) \text{ cm}^2$   
 $= (150 + 13.86) \text{ cm}^2 = 163.86 \text{ cm}^2$

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** . ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಇರಿಸಿ, ಒಂದು ಮರದ ಆಟಿಕೆಯ ರಾಕೆಟ್‌ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡಿದೆ. ರಾಕೆಟ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 26 cm ಹಾಗೆಯೇ, ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 6 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 5 cm. ಹಾಗೆಯೇ, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ರಾಕೆಟ್‌ನ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ಬಳಸಿ).



**ಪರಿಹಾರ:** ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು  $r$  ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ  $l$  ಎಂದು, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ  $h$  ಎಂದು, ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ  $r'$  ಮತ್ತು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ  $h'$  ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಆಗ  $r = 2.5 \text{ cm}$ ,  $h = 6 \text{ cm}$ ,  $r' = 1.5 \text{ cm}$ ,  $h' = 26 - 6 = 20 \text{ cm}$  ಮತ್ತು

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5 \text{ cm}$$

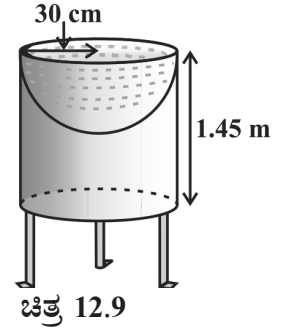
ಇಲ್ಲಿ, ಶಂಕುವಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ (ಉಂಗುರ) ಮಾತ್ರ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕು.

$$\begin{aligned}
\text{ಇಲ್ಲಿ, ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚ ಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} &= \text{ಶಂಕುವಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} + \text{ಶಂಕುವಿನ} \\
&\quad \text{ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} - \text{ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\
&= \pi r l + \pi r^2 - \pi (r')^2 \\
&= \pi [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2 \\
&= \pi [20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2 \\
&= 63.585 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

ಈಗ, ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$$\begin{aligned}
&= 2\pi r' h' + \pi (r')^2 \\
&= \pi r' (2h' + r') \\
&= (3.14 \times 1.5) (2 \times 20 + 1.5) \text{ cm}^2 \\
&= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2 = 195.465 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಮಯಾಂಕನು ಅವನ ಕೈ ತೋಟದಲ್ಲಿ ಪಕ್ಷಿಗಳು ಸ್ನಾನ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ, ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದ ಚಿತ್ರ 12.9ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿರ್ಮಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 1.45 m ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 30 cm ಇದೆ. ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



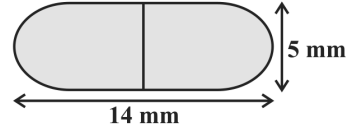
**ಪರಿಹಾರ:** ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 'h' ಮತ್ತು 'r' ಎಂಬುದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ, ಅದು 'r' ಎಂದಿರಲಿ. ನಂತರ, ಈ ಸಾಧನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned}
&= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r) \\
&= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 (145 + 30) \text{ cm}^2 \\
&= 33000 \text{ cm}^2 = 3.3 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

### ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

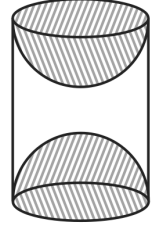
( $\pi$  ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ  $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1.  $64 \text{ cm}^3$  ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 2 ವರ್ಗ ಘನಗಳ ಮುಖಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಆಕಾರವು ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ಇರಿಸಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು  $14 \text{ cm}$  ಮತ್ತು ಪಾತ್ರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು  $13 \text{ cm}$  ಇದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು  $3.5 \text{ cm}$  ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಅಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು  $15.5 \text{ cm}$  ಆದರೆ ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ  $7 \text{ cm}$  ಇರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇರಿಸಿದೆ. ಈ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಪೂರ್ಣ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ವರ್ಗ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮರದ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಮುಖದ ಒಳಭಾಗವು ತಗ್ಗಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ವರ್ಗ ಘನದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ  $l$  ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ನೂತನವಾಗಿ ಉಂಟಾದ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಔಷದದ ಕ್ಯಾಪ್ಸೂಲ್‌ನ ಆಕಾರವು ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಪ್ರತಿ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳನ್ನು ಅಂಟಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.10 ನೋಡಿ). ಕ್ಯಾಪ್ಸೂಲ್‌ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವು  $14 \text{ mm}$  ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸವು  $5 \text{ mm}$  ಇದೆ. ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದವನ್ನು ಶಂಕುವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಡೇರೆಯು ಇದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು  $2.1 \text{ m}$  ಮತ್ತು  $4 \text{ m}$  ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ  $2.8 \text{ m}$  ಆದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಳಸಿದ ತಾಡಪತ್ರಿ (canvas) ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ, ತಾಡಪತ್ರಿಯ ದರವು ₹ 500 ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಆದರೆ, ತಾಡಪತ್ರಿಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು? (ಡೇರೆಯ ಪಾದವನ್ನು ತಾಡಪತ್ರಿಯಿಂದ ಹಾಸಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).
8. ಒಂದು ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ  $2.4 \text{ m}$  ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ  $1.4 \text{ m}$  ಇದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಕೊರೆದು ಟೊಳ್ಳುಗಿಸಿದೆ. ನೂತನ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಗೆ  $\text{cm}^2$  ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.10

9. ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತಕಾರದ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಚಿತ್ರ 12.11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೊರೆದು ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ 10 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 cm ಆದರೆ, ವಸ್ತುವಿನ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

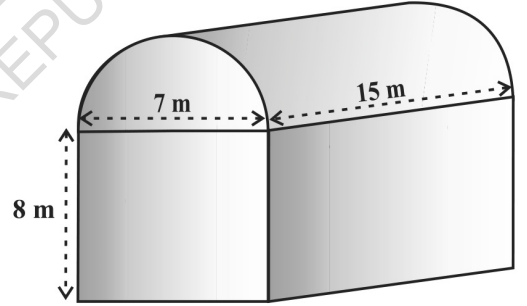


ಚಿತ್ರ 12.11

### 12.3 ಜೋಡಿಸಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲ

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಜೋಡಿಸಿದ ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ, ನಾವು ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದೆನೆಂದರೆ, ನಾವು ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಲಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಾದ ಕೆಲವು ಭಾಗಗಳು ಕಾಣದಾದವು. ಆದಾಗ್ಯೂ ನಾವು ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಾಗ ಹೀಗೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಎರಡು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಉಂಟಾದ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಆ ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ಶಾಂತ ಅವರು ಜೋಪಡಿ (shed)ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನೆಡಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಜೋಪಡಿಯ ಆಕಾರವು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.12 ನೋಡಿ). ಜೋಪಡಿಯ ಪಾದದ ಅಳತೆಯು 7 m × 15 m ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ 8 m ಆದರೆ ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮುಂದುವರೆದು, ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಯಂತ್ರಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವು 300 m<sup>3</sup> ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ 20 ಕೆಲಸಗಾರರು, ಪ್ರತಿ ಕೆಲಸಗಾರರು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 0.08 m<sup>3</sup> ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ನಂತರ ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಗಾಳಿ ಎಷ್ಟು? ( $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 12.12

**ಪರಿಹಾರ:** ಜೋಪಡಿನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವು (ಜೋಪಡಿಯಲ್ಲಿನ ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇರದೇ ಇದ್ದಾಗ) ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಳಭಾಗದ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 15 m, 7 m ಮತ್ತು 8 m ಆಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಅರ್ಧ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ವ್ಯಾಸವು 7 m ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ 15 m ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\begin{aligned}\text{ಆಪೇಕ್ಷಿತ ಘನಫಲ} &= \text{ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ} + \frac{1}{2} \times \text{ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ} \\ &= \left[ 15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15 \right] \text{ m}^3 = 1128.75 \text{ m}^3\end{aligned}$$

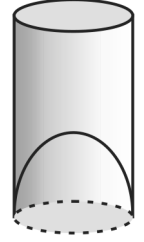
ನಂತರ, ಯಂತ್ರಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ =  $300 \text{ m}^3$

ಕೆಲಸಗಾರರಿಂದ ಆವರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಅವಕಾಶ =  $20 \times 0.08 \text{ m}^3 = 1.6 \text{ m}^3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಂತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲಸಗಾರರು ಇದ್ದಾಗ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ

$$= 1128.86 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ m}^3$$

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಹಣ್ಣಿನ ರಸದ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಚಿತ್ರ 12.13 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಆಕಾರದಲ್ಲಿನ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಹಣ್ಣಿನ ರಸವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸವು 5 cm ಇದೆ. ಆದರೆ ಲೋಟದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದಷ್ಟು ಎತ್ತರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಇದ್ದು, ಇದು ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಎತ್ತರವು 10 cm ಆದರೆ, ಲೋಟದ ಗೋಚರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಮತ್ತು ನೈಜ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 12.13

**ಪರಿಹಾರ :** ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಒಳ ವ್ಯಾಸ = 5 cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ = 10 cm

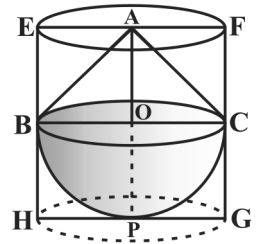
$$\begin{aligned}\text{ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ} &= \pi r^2 h \\ &= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ cm}^3 \\ &= 196.25 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಲೋಟದ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned}\text{ಅಂದರೆ, ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಗಾತ್ರ} &= \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \\ &= 32.71 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ಆದ್ದರಿಂದ, ಗಾಜಿನ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ} &= \text{ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣುವ ಲೋಟದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ} - \text{ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ} \\ &= (196.25 - 32.71) \text{ cm}^3 = 163.54 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಒಂದು ಘನ ಆಟಿಕೆಯು ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನೇರ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಇರಿಸಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 2 cm ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 4 cm ಇದೆ. ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಆವೃತಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಸಿಲಿಂಡರ್ ಮತ್ತು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಘನಫಲದ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).



ಚಿತ್ರ 12.14

**ಪರಿಹಾರ :** BPC ಯು ಅರ್ಧಗೋಳ ಮತ್ತು ABC ಶಂಕು ಆಗಿರಲಿ. ಶಂಕುವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.14 ನೋಡಿ). ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು BO ಆಗಿದ್ದು (ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ)  $= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ} &= \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \left[ \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 2 \right] \text{ cm}^3 \\ &= 25.12 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

EFGH ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಗಿದ್ದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ಆವೃತವಾಗಿದೆ. ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ = HP = BO = 2 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರವು

$$EH = AO + OP = (2 + 2) \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

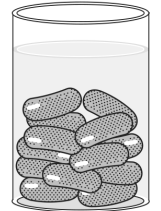
$$\begin{aligned} \text{ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಘನಫಲ} &= \text{ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಘನಫಲ} - \text{ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ} \\ &= (3.14 \times 2^2 \times 4) - 25.12 \text{ cm}^3 \\ &= 25.12 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಘನಫಲದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 25.12 cm<sup>3</sup>

### ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

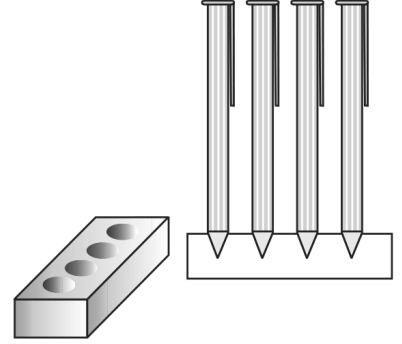
( $\pi$  ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ  $\pi = \frac{22}{7}$  ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)

1. ಒಂದು ಘನದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಆವರಿಸುವಂತೆ ಶಂಕುವು ನಿಂತಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 1 cm ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು  $\pi$  ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.
2. ರಾಚೆಲ್ ಒಬ್ಬಳು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ. ಅವಳು ತೆಳುವಾದ ಅಲ್ಯುಮಿನಿಯಂ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾದರಿಯ ವ್ಯಾಸವು 3 cm ಮತ್ತು ಅದರ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದವು 12 cm ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು 2 cm ಆದರೆ ರೆಚೇಲ್ ಮಾಡಿದ ಈ ಮಾದರಿಯೊಳಗಿನ ಗಾಳಿಯು ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಮಾದರಿಯ ಹೊರ ಹಾಗೂ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)
3. ಒಂದು ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನ್‌ನಲ್ಲಿ ಅದರ ಘನಫಲದ ಶೇ 30 ರಷ್ಟು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪಾಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, ಅದರ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಿವೆ. ಗುಲಾಬ್ ಜಾಮುನಿನ ಒಟ್ಟಾರೆ ಉದ್ದ 5 cm ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 2.8 cm ಆದರೆ, 45 ಗುಲಾಬ್ ಜ್ಯಾಮುನ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಕ್ಕರೆ ಪಾಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.15 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 12.15

4. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಮರದ ಲೇಖನಿಧಾರಕ (Pen stand)ದಲ್ಲಿ ಲೇಖನಿಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ನಾಲ್ಕು ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಕೊರೆದಿದೆ. ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಅಳತೆಯು  $15 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 3.5 \text{ cm}$  ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು  $0.5 \text{ cm}$  ಮತ್ತು ಆಳವು  $1.4 \text{ cm}$  ಇದೆ. ಲೇಖನಿಧಾರಕದಲ್ಲಿನ ಮರದ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 12.16 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 12.16

5. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ತಲೆಕೆಳಗಾದ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ  $8 \text{ cm}$  ಮತ್ತು ತೆರೆದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು  $5 \text{ cm}$  ಇದೆ. ಅದರ ಅಂಚಿನವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಈ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ  $0.5 \text{ cm}$  ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗೋಳಾಕಾರದ ಸೀಸದ ಗುಂಡುಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರು ಹೊರ ಚಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಸೀಸದ ಗೋಳಗಳೆಷ್ಟು?
6.  $220 \text{ cm}$  ಎತ್ತರ ಮತ್ತು  $24 \text{ cm}$  ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರಿನಾಕಾರದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಂಬದ ಮೇಲೆ  $60 \text{ cm}$  ಎತ್ತರ ಮತ್ತು  $8 \text{ cm}$  ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದೆ.  $1 \text{ cm}^3$  ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಸುಮಾರು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು  $8 \text{ g}$  ಆದರೆ ಕಂಬದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).
7.  $60 \text{ cm}$  ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪಾದದ ಮೇಲೆ  $120 \text{ cm}$  ಎತ್ತರ ಮತ್ತು  $60 \text{ cm}$  ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತ ಪಾದ ಶಂಕುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ನೇರ ವೃತ್ತಪಾದ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ತಳವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ನೇರವಾಗಿ ಈ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು  $60 \text{ cm}$  ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು  $180 \text{ cm}$  ಆದರೆ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8.  $8.5 \text{ cm}$  ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಗಾಜಿನ ಪಾತ್ರೆಯು  $8 \text{ cm}$  ಉದ್ದ ಮತ್ತು  $2 \text{ cm}$  ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಆಕಾರದ ಕೊರಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಒಂದು ಮಗುವು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದರ ಘನಫಲವು  $345 \text{ cm}^3$  ಇದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾಳೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳು ಅದರ ಒಳಭಾಗದ ಅಳತೆಗಳು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅವಳ ಉತ್ತರವು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ( $\pi = 3.14$  ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

#### 12.4 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಮೂಲ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರೂಪಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು.
2. ಆಯತ ಘನ, ಶಂಕು, ಸಿಲಿಂಡರ್, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಈ ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರೂಪಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.



@KTBS  
NOT TO BE REPUBLISHED



# ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ 13

## 13.1 ಪೀಠಿಕೆ:

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುತ್ತೀರಿ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ, ಹಿಸ್ಟೋಗ್ರಾಂ (ವಿಭಿನ್ನ ಅಗಲವುಳ್ಳದ್ದು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ) ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳೇ ಮುಂತಾದ ವಿವಿಧ ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನೂ ಕಲಿತಿರುತ್ತೀರಿ. ಇದಲ್ಲದೇ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ, ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳಾದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಇವೇ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬೇಕಿದೆ.

## 13.2 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿ

ನಾವು ತಿಳಿದಂತೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುತ್ತದೆ.  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ ಅಂದರೆ,  $x_1$  ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು  $f_1$  ಸಲ,  $x_2$  ವು  $f_2$  ಸಲ ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಆವರ್ತವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ, ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ =  $f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n$  ಮತ್ತು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ =  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ .

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಸರಾಸರಿಯು,

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \text{ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.}$$

ಇದನ್ನು ನಾವು ಮೊತ್ತ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ  $\Sigma$  (ಸಿಗ್ಮಾ) ದಿಂದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂದರೆ,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

ಇನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$  ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ  $i$  ಎಂಬುದು 1 ರಿಂದ  $n$  ವರೆಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳ ಗಣಿತ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು<br>( $x_i$ )         | 10 | 20 | 36 | 40 | 50 | 56 | 60 | 70 | 72 | 80 | 88 | 92 | 95 |
|----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ<br>( $f_i$ ) | 1  | 1  | 3  | 4  | 3  | 2  | 4  | 4  | 1  | 1  | 2  | 3  | 1  |

**ಪರಿಹಾರ :** ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರತಿ  $x_i$  ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_i$  ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 13.1**

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ( $x_i$ ) | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $f_i$ ) | $f_i x_i$             |
|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| 10                    | 1                             | 10                    |
| 20                    | 1                             | 20                    |
| 36                    | 3                             | 108                   |
| 40                    | 4                             | 160                   |
| 50                    | 3                             | 150                   |
| 56                    | 2                             | 112                   |
| 60                    | 4                             | 240                   |
| 70                    | 4                             | 280                   |
| 72                    | 1                             | 72                    |
| 80                    | 1                             | 80                    |
| 88                    | 2                             | 176                   |
| 92                    | 3                             | 276                   |
| 95                    | 1                             | 95                    |
| <b>ಒಟ್ಟು</b>          | $\sum f_i = 30$               | $\sum f_i x_i = 1779$ |

ಈಗ, 
$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು = 59.3

ನಮ್ಮ ಅನೇಕ ನೈಜ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಹಳ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಕಲಿಕೆಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀಡಿದ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬದಲಿಸುವ ಅಗತ್ಯವು ನಮಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಲವು ವಿಧಾನವನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಪ್ತಿ 15 ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬದಲಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಹಂಚುವಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳು ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 40 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ 4 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು 40 - 55 ರಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕೇ ವಿನಹ ವರ್ಗಾಂತರ 25 - 40 ರಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲ. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟು ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ (ಕೋಷ್ಟಕ 13.2 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಕೋಷ್ಟಕ 13.2

| ವರ್ಗಾಂತರ            | 10 - 25 | 25 - 40 | 40 - 55 | 55 - 70 | 70 - 85 | 85 - 100 |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 2       | 3       | 7       | 6       | 6       | 6        |

ಈಗ, ಇಡೀ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಗತ್ಯ ನಮಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅಂದರೆ,

$$\text{ಮಧ್ಯಬಿಂದು} = \frac{\text{ಮೇಲ್ಮಿತಿ} + \text{ಕೆಳಮಿತಿ}}{2}$$

ಕೋಷ್ಟಕ 13.2 ರಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ವರ್ಗಾಂತರ 10 - 25 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು  $\frac{10 + 25}{2}$ , ಅಂದರೆ,

17.5. ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು  $x_i$ ಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಈಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ  $i$ ನೇ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು  $f_i$  ಆಗಿದ್ದು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು  $x_i$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಂತೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ನಾವು ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.3

| ವರ್ಗಾಂತರ | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $f_i$ ) | ಮಧ್ಯಬಿಂದು ( $x_i$ ) | $f_i x_i$               |
|----------|-------------------------------|---------------------|-------------------------|
| 10 – 25  | 2                             | 17.5                | 35.0                    |
| 25 – 40  | 3                             | 32.5                | 97.5                    |
| 40 – 55  | 7                             | 47.5                | 332.5                   |
| 55 – 70  | 6                             | 62.5                | 375.0                   |
| 70 – 85  | 6                             | 77.5                | 465.0                   |
| 85 – 100 | 6                             | 92.5                | 555.0                   |
| ಒಟ್ಟು    | $\sum f_i = 30$               |                     | $\sum f_i x_i = 1860.0$ |

ಕೊನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತವು ನಮಗೆ  $\sum f_i x_i$  ನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯು,

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಹೊಸ ವಿಧಾನವನ್ನು “ನೇರ ವಿಧಾನ” ಎನ್ನುವರು.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.1 ಮತ್ತು 13.3 ರಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡರೂ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಏಕೆ ಹೀಗಾಗಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಯೋಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ! ಮತ್ತು ಯಾವುದು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿದೆ? ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವೆಂದು ಊಹಿಸಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.  $\therefore$  59.3 ಎಂಬುದು ನಿಖರ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, 62 ಎಂಬುದು ಸಮೀಪದ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ  $x_i$  ಮತ್ತು  $f_i$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಿದ್ದಾಗ  $x_i$  ಮತ್ತು  $f_i$  ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯವು ಬೇಕಾಗಿದ್ದು ಇದು ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳನ್ನು ಕೆಲವೇ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನದ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸೋಣ.

ನಾವು  $f_i$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ನಾವು ಪ್ರತಿ  $x_i$  ನ್ನು ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡರೆ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು? ಪ್ರತಿ  $x_i$  ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಮೊದಲ ಹಂತದಲ್ಲಿ  $x_i$  ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಿ, ಇದನ್ನು ‘a’ ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭಗೊಳಿಸಲು  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ  $x_i$  ನ್ನು ‘a’ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು  $a = 47.5$  ಅಥವಾ  $a = 62.5$  ನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು. ನಾವು  $a = 47.5$  ನ್ನು ಆರಿಸೋಣ.

ಮಂದಿನ ಹಂತವು  $a$  ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು  $x_i$  ಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ  $d_i$  ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ  $x_i$  ಗಳಿಂದ  $a$  ಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಅಂದರೆ, 
$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

ಮೂರನೇ ಹಂತವು  $d_i$  ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ  $f_i$  ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ  $f_i d_i$  ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಾಗಿದೆ. ಲೆಕ್ಕಚಾರಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.4

| ವರ್ಗಾಂತರ | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ<br>( $f_i$ ) | ಮಧ್ಯಬಿಂದು<br>( $x_i$ ) | $d_i = x_i - 47.5$ | $f_i d_i$            |
|----------|----------------------------------|------------------------|--------------------|----------------------|
| 10 - 25  | 2                                | 17.5                   | -30                | -60                  |
| 25 - 40  | 3                                | 32.5                   | -15                | -45                  |
| 40 - 55  | 7                                | 47.5                   | 0                  | 0                    |
| 55 - 70  | 6                                | 62.5                   | 15                 | 90                   |
| 70 - 85  | 6                                | 77.5                   | 30                 | 182                  |
| 85 - 100 | 6                                | 92.5                   | 45                 | 270                  |
| ಒಟ್ಟು    | $\sum f_i = 30$                  |                        |                    | $\sum f_i d_i = 435$ |

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ರಿಂದ, ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು,  $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಈಗ,  $\bar{d}$  ಮತ್ತು  $\bar{x}$  ಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.  $d_i$  ನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಪ್ರತಿ  $x_i$  ಗಳಿಂದ  $a$  ನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೆವು, ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ  $\bar{x}$  ನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು  $\bar{d}$  ಗೆ ' $a$ ' ನ್ನು ಕೂಡುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಈ ರೀತಿ ವಿವರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

$$\begin{aligned} \text{ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯು, } \bar{d} &= \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \\ \therefore \bar{d} &= \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i} \\ &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i} \\ &= \bar{x} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \\ &= \bar{x} - a \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{x} = a + \bar{d}$$

$$\text{ಅಂದರೆ, } \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ರಿಂದ  $a$ ,  $\sum f_i d_i$  ಮತ್ತು  $\sum f_i$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 47.5 + \frac{435}{30} \\ &= 47.5 + 14.5 = 62\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 62 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು 'ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ 1:** ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಿಂದ ಪ್ರತಿ  $x_i$  (ಅಂದರೆ, 17.5, 32.5, ..... ಇತ್ಯಾದಿ)ನ್ನು  $a$  ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಪ್ರತಿ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದೇ ಅಂದರೆ, 62 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ (ಏಕೆ?). ನಾವು ವರ್ಗಾಂತರದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ' $a$ ' ಯ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಸರಾಸರಿಯ ಬೆಲೆಯು ' $a$ ' ಯ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.4 ನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ 4ನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳು 15 ರ ಅಪವರ್ತಕವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಕಂಬಸಾಲು - 4 ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 15 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,  $f_i$  ನೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಲು ನಾವು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ (ಇಲ್ಲಿ 15 ಎಂಬುದು ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವಾಗಿದೆ.)

$\therefore u_i = \frac{x_i - a}{h}$  ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ,  $a$  ಯು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು  $h$  ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ  $u_i$  ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಮೇಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರೆಯುವುದು (ಅಂದರೆ,  $f_i u_i$  ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ  $\sum f_i u_i$  ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು)  $h = 15$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೋಷ್ಟಕ 13.5 ನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.5

| ವರ್ಗಾಂತರ | $f_i$           | $x_i$ | $d_i = x_i - a$ | $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ | $f_i u_i$           |
|----------|-----------------|-------|-----------------|---------------------------|---------------------|
| 10 - 25  | 2               | 17.5  | -30             | -2                        | -4                  |
| 25 - 40  | 3               | 32.5  | -15             | -1                        | -3                  |
| 40 - 55  | 7               | 47.5  | 0               | 0                         | 0                   |
| 55 - 70  | 6               | 62.5  | 15              | 1                         | 6                   |
| 70 - 85  | 6               | 77.5  | 30              | 2                         | 12                  |
| 85 - 100 | 6               | 92.5  | 45              | 3                         | 18                  |
| ಒಟ್ಟು    | $\sum f_i = 30$ |       |                 |                           | $\sum f_i u_i = 29$ |

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \text{ ಆಗಿರಲಿ}$$

ಇಲ್ಲಿ, ಪುನಃ  $\bar{u}$  ಮತ್ತು  $\bar{x}$  ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \text{ ಆಗಿದೆ.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{u} &= \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h} \left[ \frac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} [\bar{x} - a] \end{aligned}$$

$$\therefore h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\text{ಅಂದರೆ, } \bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$\therefore \bar{x} = a + h \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)$$

ಈಗ ಕೋಷ್ಟಕ 13.5 ರಿಂದ  $a$ ,  $h$ ,  $\sum f_i u_i$  ಮತ್ತು  $\sum f_i$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 47.5 + 15 \times \left( \frac{29}{30} \right) \\ &= 47.5 + 14.5 = 62 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು 62 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು 'ಹಂತ ವಿಚಲನಾ' ವಿಧಾನ ಎನ್ನುವರು.

ನಾವು ಗಮನಿಸಿರುವುದೇನೆಂದರೆ:

- ಎಲ್ಲಾ  $d_i$  ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.
- ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನಗಳು ನೇರ ವಿಧಾನದ ಸರಳೀಕೃತ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.
- $a$  ಮತ್ತು  $h$  ಗಳು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಇರದೇ  $u_i = \frac{x_i - a}{h}$  ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ ಸಹ  $\bar{x} = a + h\bar{u}$  ಸೂತ್ರವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು, ಭಾರತದ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಗ್ರಾಮೀಣ ಭಾಗದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು                    | 15 – 25 | 25 – 35 | 35 – 45 | 45 – 55 | 55 – 65 | 65 – 75 | 75 – 85 |
|----------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ರಾಜ್ಯಗಳು / ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 6       | 11      | 7       | 4       | 4       | 2       | 1       |

**ಮೂಲ:** ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ನಡೆಸಿದ ಏಳನೆಯ ಸಮಗ್ರ ಭಾರತ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಮೀಕ್ಷೆ

**ಪರಿಹಾರ:** ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು  $x_i$  ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ (ಕೋಷ್ಟಕ 13.6 ನ್ನು ನೋಡಿ)

**ಕೋಷ್ಟಕ 13.6**

| ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಶೇಕಡಾವಾರು | ರಾಜ್ಯಗಳು/ಕೇಂ.ಪ್ರ. ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $f_i$ ) | $x_i$ |
|---------------------|---------------------------------------|-------|
| 15 – 25             | 6                                     | 20    |
| 25 – 35             | 11                                    | 30    |
| 35 – 45             | 7                                     | 40    |
| 45 – 55             | 4                                     | 50    |
| 55 – 65             | 4                                     | 60    |
| 65 – 75             | 2                                     | 70    |
| 75 – 85             | 1                                     | 80    |

ಇಲ್ಲಿ  $a = 50$ ,  $h = 10$  ಆಗಿರಲಿ

ಈಗ  $d_i = x_i - 50$  ಮತ್ತು  $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

$d_i$  ಮತ್ತು  $u_i$  ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೋಷ್ಟಕ 13.7 ರಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.7

| ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ<br>ಶೇಕಡವಾರು | ರಾಜ್ಯಗಳು/<br>ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ<br>ಸಂಖ್ಯೆ ( $f_i$ ) | $x_i$ | $d_i = x_i - 50$ | $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ | $f_i x_i$ | $f_i d_i$ | $f_i u_i$ |
|-----------------------|---------------------------------------------|-------|------------------|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| 15 - 25               | 6                                           | 20    | -30              | -3                          | 120       | -180      | -18       |
| 25 - 35               | 11                                          | 30    | -20              | -2                          | 330       | -220      | -22       |
| 35 - 45               | 7                                           | 40    | -10              | -1                          | 280       | -70       | -7        |
| 45 - 55               | 4                                           | 50    | 0                | 0                           | 200       | 0         | 0         |
| 55 - 65               | 4                                           | 60    | 10               | 1                           | 240       | 40        | 4         |
| 65 - 75               | 2                                           | 70    | 20               | 2                           | 140       | 40        | 4         |
| 75 - 85               | 1                                           | 80    | 30               | 3                           | 80        | 30        | 3         |
| ಒಟ್ಟು                 | $\sum f_i = 35$                             |       |                  |                             | 1390      | -360      | -36       |

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ  $\sum f_i = 35$ ,  $\sum f_i x_i = 1390$

$\sum f_i d_i = -360$ ,  $\sum f_i u_i = -36$  ಎಂದು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ.

ನೇರ ವಿಧಾನದಿಂದ,  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಿಂದ,  $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \left( \frac{-360}{35} \right) = 39.71$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನದಿಂದ,  $\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$   
 $= 50 + \left( \frac{-360}{35} \right) \times 10 = 39.71$

ಆದ್ದರಿಂದ ಗ್ರಾಮೀಣ ಭಾಗದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾ 39.71 ಆಗಿದೆ.

**ಗಮನಿಸಿ:** ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಧಾನದ ಆಯ್ಕೆಯು  $x_i$  ಮತ್ತು  $f_i$  ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ.  $x_i$  ಮತ್ತು  $f_i$  ಗಳು ಸಾಕಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದರೆ ನೇರ ವಿಧಾನವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.  $x_i$  ಮತ್ತು  $f_i$  ಗಳು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ನಾವು ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಅಥವಾ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು  $x_i$  ಗಳು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ನಾವು  $d_i$  ಎಲ್ಲ ಗಳ ಸೂಕ್ತ ಭಾಜಕ  $h$  ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಏನನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ?

| ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 20 – 60 | 60 – 100 | 100 – 150 | 150 – 250 | 250 – 350 | 350 – 450 |
|------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  | 7       | 5        | 16        | 12        | 2         | 3         |

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು  $x_i$  ನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ. ಆದರೂ ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.  $a = 200$  ಮತ್ತು  $h = 20$  ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಕೋಷ್ಟಕ 13.8 ರಂತೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 13.8**

| ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ( $f_i$ ) | $x_i$ | $d_i = x_i - 200$ | $u_i = \frac{d_i}{20}$ | $u_i f_i$             |
|-----------------------|---------------------------|-------|-------------------|------------------------|-----------------------|
| 20 – 60               | 7                         | 40    | -160              | -8                     | -56                   |
| 60 – 100              | 5                         | 80    | -120              | -6                     | -30                   |
| 100 – 150             | 16                        | 125   | -75               | -3.75                  | -60                   |
| 150 – 250             | 12                        | 200   | 0                 | 0                      | 0                     |
| 250 – 350             | 2                         | 300   | 100               | 5                      | 10                    |
| 350 – 450             | 3                         | 400   | 200               | 10                     | 30                    |
| ಒಟ್ಟು                 | $\sum f_i = 45$           |       |                   |                        | $\sum f_i u_i = -106$ |

ಈಗ  $\bar{u} = \frac{-106}{45} \therefore \bar{x} = 200 + 20 \left( \frac{-106}{45} \right) = 200 - 47.11 = 152.89$

ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ 45 ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 152.89 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತೀರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ 2:** ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಮಾಡಲು ತಿಳಿಸಿ.

1. ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ನಡೆಸಿದ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.
2. ನಿಮ್ಮ ನಗರದಲ್ಲಿ 30 ದಿನಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಪ್ರತಿದಿನದ ಗರಿಷ್ಠ ತಾಪಮಾನವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.
3. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ.

ಎಲ್ಲ ಗುಂಪಿನವರು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ ಅವರಿಗೆ ಸೂಕ್ತವೆನಿಸಿದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

### ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ತಮ್ಮ 'ಪರಿಸರ ಅರಿವು ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ'ದ ಭಾಗವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 0 - 2 | 2 - 4 | 4 - 6 | 6 - 8 | 8 - 10 | 10 - 12 | 12 - 14 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|---------|
| ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 1     | 2     | 1     | 5     | 6      | 2       | 3       |

ನೀವು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಏಕೆ?

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ 50 ನೌಕರರ ದಿನಗೂಲಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

| ದಿನಗೂಲಿ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | 500 - 520 | 520 - 540 | 540 - 560 | 560 - 580 | 580 - 600 |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ       | 12        | 14        | 8         | 6         | 10        |

ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ನೌಕರರ ಸರಾಸರಿ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಮಕ್ಕಳ ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು (Pocket allowance) ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣವು ₹ 18 ಆದರೆ ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಆವೃತ್ತಿ  $f$  ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ದಿನನಿತ್ಯದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ                      | 7     | 6     | 9     | 13    | $f$   | 5     | 4     |

4. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವೈದ್ಯರ ಬಳಿ 30 ಮಹಿಳೆಯರು ತಪಾಸಣೆಗೊಳಗಾದರು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಅವರ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲಾಯಿತು. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಈ ಮಹಿಳೆಯರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷದ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಹೃದಯ ಬಡಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 65-68 | 68-71 | 71-74 | 74-77 | 77-80 | 80-83 | 83-86 |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ಮಹಿಳೆಯರ ಸಂಖ್ಯೆ                     | 2     | 4     | 3     | 8     | 7     | 4     | 2     |

5. ಒಂದು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

| ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 50 - 52 | 53 - 55 | 56 - 58 | 59 - 61 | 62 - 64 |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ    | 15      | 110     | 135     | 115     | 25      |

ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ?

6. ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 25 ಕುಟುಂಬಗಳ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

| ದಿನ ನಿತ್ಯದ ವೆಚ್ಚ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | 100 - 150 | 150 - 200 | 200 - 250 | 250 - 300 | 300 - 350 |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ             | 4         | 5         | 12        | 2         | 2         |

ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯದ ಆಹಾರದ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ  $SO_2$  ನ ಸಾರತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು (ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ppm ಗಳಲ್ಲಿ) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಗರದ 30 ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದೆ.

| SO <sub>2</sub> ನ ಸಾರತೆ | ಆವೃತ್ತಿ |
|-------------------------|---------|
| 0.00 – 0.04             | 4       |
| 0.04 – 0.08             | 9       |
| 0.08 – 0.12             | 9       |
| 0.12 – 0.16             | 2       |
| 0.16 – 0.20             | 4       |
| 0.20 – 0.24             | 2       |

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ SO<sub>2</sub> ನ ಸಾರತೆಯ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಬ್ಬ ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಾಖಲೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗೈರು ಹಾಜರಾತಿಯ ದಿನಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ        | 0-6 | 6-10 | 10-14 | 14-20 | 20-28 | 28-38 | 38-40 |
|---------------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 11  | 10   | 7     | 4     | 4     | 3     | 1     |

9. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 35 ನಗರಗಳ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು (ಶೇಕಡಾದಲ್ಲಿ) ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಸಾಕ್ಷರತಾ ಪ್ರಮಾಣ (%) | 45 – 55 | 55 – 65 | 65 – 75 | 75 – 85 | 85 – 95 |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ನಗರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ        | 3       | 10      | 11      | 8       | 3       |

### 13.3 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ (ರೂಢಿಬೆಲೆ)

ಬಹುಲಕ ಅಥವಾ ರೂಢಿಬೆಲೆಯು ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಇರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಅಂದರೆ, ಬಹುಲಕವು ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ನಾವು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೆವು. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಒಂದೇ ಸಮನಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಹು ಬಹುಲಕವುಳ್ಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಬಹು ಬಹುಲಕವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದ್ದರೂ ನಾವು ಏಕ ಬಹುಲಕದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಮೊದಲು ಅವಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** 10 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬೌಲರನು ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

2      6      4      5      0      2      1      3      2      3

ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

**ಪರಿಹಾರ:** ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

| ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| ಪಂದ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ   | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬೌಲರನು ಗರಿಷ್ಠ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ 3) ಪಡೆದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 2

ವಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಬಹುಲಕವು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[ \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ  $l$  = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

$h$  = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ (ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು)

$f_1$  = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

$f_0$  = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

$f_2$  = ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ಒಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡವು ಒಂದು ಜನವಸತಿ ಪ್ರದೇಶದ 20 ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಮೀಕ್ಷೆ ನಡೆಸಿತು. ಇದರಂತೆ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

| ಕುಟುಂಬದ ಗಾತ್ರ  | 1 - 3 | 3 - 5 | 5 - 7 | 7 - 9 | 9 - 11 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| ಕುಟುಂಬದ ಸಂಖ್ಯೆ | 7     | 8     | 2     | 2     | 1      |

ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿದ್ದು ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 - 5 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವು 3 - 5 ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ = 3 - 5,

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ  $l = 3$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ  $h = 2$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_1 = 8$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_0 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_2 = 2$

ಈಗ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ:

$$\begin{aligned}
 \text{ಬಹುಲಕ} &= l + \left[ \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h \\
 &= 3 + \left[ \frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \right] \times 2 \\
 &= 3 + \frac{2}{7} \\
 &= 3.286
 \end{aligned}$$

∴ ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವು 3.286 ಆಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ರಲ್ಲಿ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕ ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದಲ್ಲದೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ:** ಉದಾಹರಣೆ 1 ರ ಕೋಷ್ಟಕ 13.3 ನ್ನು ನೋಡಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯು (ಅಂದರೆ, 7) ವರ್ಗಾಂತರ 40 - 45 ರಲ್ಲಿದ್ದು, ಇದು ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

∴ ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ,  $l = 40$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ,  $h = 15$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_1 = 7$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_0 = 3$

ಬಹುಲಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ  $f_2 = 6$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$\begin{aligned} \text{ಬಹುಲಕ} &= l + \left[ \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h \\ &= 40 + \left[ \frac{7 - 3}{14 - 3 - 6} \right] \times 15 = 52 \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.} \end{aligned}$$

∴ ಅಂಕಗಳ ಬಹುಲಕವು 52

ಈಗ ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಿಂದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 62 ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ.

∴ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು 52 ಆಗಿದ್ದು ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು 62 ಆಗಿದೆ.

**ಸೂಚನೆಗಳು:**

1. ಉದಾಹರಣೆ 6 ರಲ್ಲಿ ಬಹುಲಕವು ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ ಆದರೆ ಇತರ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇದು ಸರಾಸರಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಹ ಆಗಿರಬಹುದು.
2. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ನಮ್ಮ ಅವಶ್ಯಕತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮೊದಲ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಬಹುಲಕವು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ 3:** ಚಟುವಟಿಕೆ 2 ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ತಂಡಗಳನ್ನೇ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಅಲ್ಲಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ತಂಡಗಳಿಗೆ ವಹಿಸುವುದು ಪ್ರತಿ ತಂಡಕ್ಕೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತಿಳಿಸಿ ಅವರು ಇದನ್ನು ಸರಾಸರಿಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಎರಡರ ಅರ್ಥವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಿ.

**ಸೂಚನೆ:** ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗಲೂ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

### ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

| ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) | 5 - 15 | 15 - 25 | 25 - 35 | 35 - 45 | 45 - 55 | 55 - 65 |
|---------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ       | 6      | 11      | 21      | 23      | 14      | 5       |

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಈ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

| ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) | 0 - 20 | 20 - 40 | 40 - 60 | 60 - 80 | 80-100 | 100-120 |
|---------------------|--------|---------|---------|---------|--------|---------|
| ಆವೃತ್ತಿ             | 10     | 35      | 52      | 61      | 38     | 29      |

ಉಪಕರಣಗಳ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳ ಬಾಳಿಕೆಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶವು ಒಂದು ಗ್ರಾಮದ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ಒಟ್ಟು ಮಾಸಿಕ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ವೆಚ್ಚದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಮಾಸಿಕ ವೆಚ್ಚದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ವೆಚ್ಚ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|------------------|-----------------|
| 1000 - 1500      | 24              |
| 1500 - 2000      | 40              |
| 2000 - 2500      | 33              |
| 2500 - 3000      | 28              |
| 3000 - 3500      | 30              |
| 3500 - 4000      | 22              |
| 4000 - 4500      | 16              |
| 4500 - 5000      | 7               |

4. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ಭಾರತದ ರಾಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ - ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

| ಪ್ರತಿ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | ರಾಜ್ಯಗಳು/ಕೇಂ.ಪ್ರ.ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|-----------------------------------------|----------------------------|
| 15 – 20                                 | 3                          |
| 20 – 25                                 | 8                          |
| 25 – 30                                 | 9                          |
| 30 – 35                                 | 10                         |
| 35 – 40                                 | 3                          |
| 40 – 45                                 | 0                          |
| 45 – 50                                 | 0                          |
| 50 – 55                                 | 2                          |

5. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯು ಏಕದಿನ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವದ ಕೆಲವು ಉತ್ತಮ ಬ್ಯಾಟ್ಸಮನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

| ಗಳಿಸಿದ ರನ್‌ಗಳು | ಬ್ಯಾಟ್ಸಮನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|----------------|----------------------|
| 3000 – 4000    | 4                    |
| 4000 – 5000    | 18                   |
| 5000 – 6000    | 9                    |
| 6000 – 7000    | 7                    |
| 7000 – 8000    | 6                    |
| 8000 – 9000    | 3                    |
| 9000 – 10000   | 1                    |
| 10000 – 11,000 | 1                    |

ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ನಿಮಿಷದ 100 ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋದ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
|---------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ಆವೃತ್ತಿ       | 7    | 14    | 13    | 12    | 20    | 11    | 15    | 8     |

### 13.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ (ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ)

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಂತೆ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿದ್ದು, ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲಾಗಿ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ 'n' ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 'n' ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ, ಮಧ್ಯಾಂಕವು  $\left(\frac{n}{2}\right)$  ನೇ ಮತ್ತು  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು, ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು         | 20 | 29 | 28 | 33 | 42 | 38 | 43 | 25 |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 6  | 28 | 24 | 15 | 2  | 4  | 1  | 20 |

ಮೊದಲಾಗಿ, ಅಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಒಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.9

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ) |
|-------------|-------------------------------|
| 20          | 6                             |
| 25          | 20                            |
| 28          | 24                            |
| 29          | 28                            |
| 33          | 15                            |
| 38          | 4                             |
| 42          | 2                             |
| 43          | 1                             |
| ಒಟ್ಟು       | 100                           |

ಇಲ್ಲಿ  $n = 100$ , ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಮಧ್ಯಾಂಕವು  $\left(\frac{n}{2}\right)$  ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಮತ್ತು  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, 50ನೇ ಮತ್ತು 51 ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.10

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|-------------|---------------------|
| 20          | 6                   |
| 25 ರ ವರೆಗೆ  | $6 + 20 = 26$       |
| 28 ರ ವರೆಗೆ  | $26 + 24 = 50$      |
| 29 ರ ವರೆಗೆ  | $50 + 28 = 78$      |
| 33 ರ ವರೆಗೆ  | $78 + 15 = 93$      |
| 38 ರ ವರೆಗೆ  | $93 + 4 = 97$       |
| 42 ರ ವರೆಗೆ  | $97 + 2 = 99$       |
| 43 ರ ವರೆಗೆ  | $99 + 1 = 100$      |

ಈಗ ನಾವು ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂಬಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು 'ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಕಂಬಸಾಲು' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.11

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|-------------|---------------------|---------------|
| 20          | 6                   | 6             |
| 25          | 20                  | 26            |
| 28          | 24                  | 50            |
| 29          | 28                  | 78            |
| 33          | 15                  | 93            |
| 38          | 4                   | 97            |
| 42          | 2                   | 99            |
| 43          | 1                   | 100           |

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ,

50ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 28 (ಏಕೆ?)

51ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 29

$$\therefore \text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = \frac{28 + 29}{2} = 28.5$$

**ಸೂಚನೆ:** ಕಂಬಸಾಲು 1 ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲು 3 ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋಷ್ಟಕ 13.11 ರ ಭಾಗವನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕ ಎನ್ನುವರು. 50% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 28.5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು 50% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 28.5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಈ ಅಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ 28.5 ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಮೂಲಕ ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 53 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 100 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 13.12**

| ಅಂಕಗಳು   | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|----------|---------------------|
| 0 – 10   | 5                   |
| 10 – 20  | 3                   |
| 20 – 30  | 4                   |
| 30 – 40  | 3                   |
| 40 – 50  | 3                   |
| 50 – 60  | 4                   |
| 60 – 70  | 7                   |
| 70 – 80  | 9                   |
| 80 – 90  | 7                   |
| 90 – 100 | 8                   |

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ?

ಉತ್ತರವು 5 ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ?

20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅಂದರೆ, 0 – 10 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೊಂದಿಗೆ, 10 – 20 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು  $5 + 3$ , ಅಂದರೆ, 8 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ 10 – 20 ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯು 8 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು, ಅಂದರೆ, 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ....., 100 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.13 ರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ್ದೇವೆ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.13

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು      | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) |
|------------------|-------------------------------------|
| 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 5                                   |
| 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $5 + 3 = 8$                         |
| 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $8 + 4 = 12$                        |
| 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $12 + 3 = 15$                       |
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $15 + 3 = 18$                       |
| 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $18 + 4 = 22$                       |
| 70 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $22 + 7 = 29$                       |
| 80 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $29 + 9 = 38$                       |
| 90 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | $38 + 7 = 45$                       |
| 100 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | $45 + 8 = 53$                       |

ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು “ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ” ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ 10, 20, 30 .....100 ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಗಲಾಗಿವೆ.

ನಾವು ಇದೇ ರೀತಿ, 0 ಅಥವಾ ‘0’ ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ, 10 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ, 20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಇತ್ಯಾದಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 13.12 ರಿಂದ ಎಲ್ಲ 53 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 0 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 0 – 10 ರ ನಡುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಅಂದರೆ,  $53 - 5 = 48$  ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 1 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸಿ, 20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $48 - 3 = 45$ , 30 ಅಥವಾ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಂಕ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ  $45 - 4 = 41$ , ಇತ್ಯಾದಿ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 13.14 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.14

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು            | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) |
|------------------------|-------------------------------------|
| 0 ಅಥವಾ 0 ಗಿಂತ ಅಧಿಕ     | 53                                  |
| 10 ಅಥವಾ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $53 - 5 = 48$                       |
| 20 ಅಥವಾ 20 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $48 - 3 = 45$                       |
| 30 ಅಥವಾ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $45 - 4 = 41$                       |
| 40 ಅಥವಾ 40 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $41 - 3 = 38$                       |
| 50 ಅಥವಾ 50 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $38 - 3 = 35$                       |
| 60 ಅಥವಾ 60 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $35 - 4 = 31$                       |
| 70 ಅಥವಾ 70 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $31 - 7 = 24$                       |
| 80 ಅಥವಾ 80 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $24 - 9 = 15$                       |
| 90 ಅಥವಾ 90 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ | $15 - 7 = 8$                        |

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು 'ಅಧಿಕ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ 0, 10, 20 .....90. ಇವು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 13.12 ಮತ್ತು 13.13 ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಪಡೆದ ಕೋಷ್ಟಕ 13.15ನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.15

| ಅಂಕಗಳು   | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f) | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ (c f) |
|----------|-------------------------|---------------------|
| 0 - 10   | 5                       | 5                   |
| 10 - 20  | 3                       | 8                   |
| 20 - 30  | 4                       | 12                  |
| 30 - 40  | 3                       | 15                  |
| 40 - 50  | 3                       | 18                  |
| 50 - 60  | 4                       | 22                  |
| 60 - 70  | 7                       | 29                  |
| 70 - 80  | 9                       | 38                  |
| 80 - 90  | 7                       | 45                  |
| 90 - 100 | 8                       | 53                  |

ಈಗ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಮೌಲ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಒಂದು ಇಡೀ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ?

ಈ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು  $\frac{n}{2}$  ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ನಾವು  $\frac{n}{2}$  ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ (ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾದ) ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು “ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ” ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ,  $n = 53$ , ಆದ್ದರಿಂದ  $\frac{n}{2} = 26.5$ . ಈಗ  $60 - 70$  ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯು 29, ಇದು  $\frac{n}{2}$ , ಅಂದರೆ 26.5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ (ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ) ಆದ್ದರಿಂದ  $60 - 70$  ಎಂಬುದು ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿದೆ.

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ, ನಾವು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[ \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ,  $l$  = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ.

$n$  = ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$cf$  = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಹಿಂದಿನ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ.

$f$  = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ.

$h$  = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರವು ಸಮವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು)

$\frac{n}{2} = 26.5$ ,  $l = 60$ ,  $cf = 22$ ,  $f = 7$ ,  $h = 10$  ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಾಂಕ

$$\begin{aligned} &= 60 + \left[ \frac{26.5 - 22}{7} \right] \times 10 \\ &= 60 + \frac{45}{7} \\ &= 66.4 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 66.4 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 66.4 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10ನೇ ತರಗತಿಯ 51 ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳಿಗೆ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಯಿತು.

| ಎತ್ತರ (cm ಗಳಲ್ಲಿ) | ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|-------------------|----------------|
| 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 4              |
| 145 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 11             |
| 150 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 29             |
| 155 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 40             |
| 160 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 46             |
| 165 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ  | 51             |

ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿತರಣೆಯು ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ವಿಧಾನದ ವಿತರಣೆಯಾಗಿದ್ದು, 140, 145, 150, ....., 165. ಇವು ಅನುರೂಪ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲ್ಮಿತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, 140 - 145, 145 - 150, ....., 160 - 165 ಇವು ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ದತ್ತ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ 4 ಬಾಲಕಿಯರು 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಂದರೆ, 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು 4 ಆಗಿದೆ. ಈಗ 145 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ 11 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ 4 ಬಾಲಕಿಯರು ಇದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 140 - 145, ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು  $11 - 4 = 7$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, 145 - 150 ರ ಈ ಆವೃತ್ತಿಯು  $29 - 11 = 18$ , 150 - 155 ರ ಆವೃತ್ತಿಯು  $49 - 29 = 11$  ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ನಮ್ಮ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಈ ರೀತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

## ಕೋಷ್ಟಕ 13.16

| ವರ್ಗಾಂತರಗಳು      | ಆವೃತ್ತಿ | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|------------------|---------|---------------|
| 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 4       | 4             |
| 140 – 145        | 7       | 11            |
| 145 – 150        | 18      | 29            |
| 150 – 155        | 11      | 40            |
| 155 – 160        | 6       | 46            |
| 160 – 165        | 5       | 51            |

ಈಗ  $n = 51$ ,  $\therefore \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$  ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು 145 – 150 ಈ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ,  $l$  (ಕೆಳಮಿತಿ) = 145 .

$c f$  (145 – 150ರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) = 11

$f$  (ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 145 – 150 ರ ಆವೃತ್ತಿ) = 18

$h$  (ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ) = 5

$$\begin{aligned}
 \text{ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕ} &= l + \left[ \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h \\
 &= 145 + \left[ \frac{25.5 - 11}{18} \right] \times 5 \\
 &= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03
 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 149.03 ಆಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ 50% ದಷ್ಟು ಬಾಲಕಿಯರು ಈ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 50% ರಷ್ಟು ಬಾಲಕಿಯರು ಈ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525. ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತಿಯು 100 ಆಗಿದ್ದರೆ  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ವರ್ಗಾಂತರ   | ಆವೃತ್ತಿ |
|------------|---------|
| 0 - 100    | 2       |
| 100 - 200  | 5       |
| 200 - 300  | $x$     |
| 300 - 400  | 12      |
| 400 - 500  | 17      |
| 500 - 600  | 20      |
| 600 - 700  | $y$     |
| 700 - 800  | 9       |
| 800 - 900  | 7       |
| 900 - 1000 | 4       |

ಪರಿಹಾರ :

| ವರ್ಗಾಂತರಗಳು | ಆವೃತ್ತಿ | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|-------------|---------|---------------|
| 0 - 100     | 2       | 2             |
| 100 - 200   | 5       | 7             |
| 200 - 300   | $x$     | $7 + x$       |
| 300 - 400   | 12      | $19 + x$      |
| 400 - 500   | 17      | $36 + x$      |
| 500 - 600   | 20      | $56 + x$      |
| 600 - 700   | $y$     | $56 + x + y$  |
| 700 - 800   | 9       | $65 + x + y$  |
| 800 - 900   | 7       | $72 + x + y$  |
| 900 - 1000  | 4       | $76 + x + y$  |

ಇಲ್ಲಿ,  $n = 100$

$$\therefore 76 + x + y = 100 \text{ ಅಂದರೆ, } x + y = 24 \dots\dots\dots (1)$$

ಮಧ್ಯಾಂಕವು 525, ಇದು 500 - 600 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ

$$\therefore l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$$

$$\begin{aligned}
\text{ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಮಧ್ಯಾಂಕ} &= l + \left[ \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h \\
525 &= 500 + \left[ \frac{50 - 36 - x}{20} \right] \times 100 \\
525 - 500 &= (14 - x) \times 5 \\
25 &= 70 - 5x \\
5x &= 70 - 25 \\
5x &= 45 \\
\therefore x &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ } 9 + y &= 24 \\
y &= 15
\end{aligned}$$

ಈಗ ನೀವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಮೂರೂ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದಿರಿ. ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಯಾವ ಅಳತೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತ ಎಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಸರಾಸರಿಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ, ಇದು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಅಂತ್ಯಗಳ, ಅಂದರೆ ದೊಡ್ಡ ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಇದು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಅನುವು ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಶಾಲೆಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಯಾವ ಶಾಲೆಯು ಉತ್ತಮ ನಿರ್ವಹಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

ಆದಾಗ್ಯೂ ದತ್ತಾಂಶದ ಅಂತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ ಎನಿಸುತ್ತದೆ ಆದರೆ, ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ ಆವೃತ್ತಿಯು ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2 ಆಗಿದ್ದು ಉಳಿದ ಇದು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 20, 25, 20, 21, 18 ಈ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾಗ, ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವರ್ತನೆಯನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ ಆಗಲಾರದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಎಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಅದನ್ನು 'ವಿಶಿಷ್ಟ' ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇಚ್ಛಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಾಂಕವು ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಲಸಗಾರರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಉತ್ಪಾದನಾ ದರ, ಒಂದು ದೇಶದ ಸರಾಸರಿ ವೇತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದರೂ, ಸರಾಸರಿಯ ಬದಲಾಗಿ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಉತ್ತಮ ಅಳತೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಅವರ್ತವಾಗುವ ಮೌಲ್ಯ ಅಥವಾ ಅತಿ ಜನಪ್ರಿಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಲಕವು ಉತ್ತಮ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಕ್ಷಿಸುವ ಅತಿ ಜನಪ್ರಿಯ ಟಿ.ವಿ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ, ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೇಡಿಕೆಯ ಗ್ರಾಹಕ ವಸ್ತು, ಹೆಚ್ಚು ಜನರು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಾಹನದ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

**ಗಮನಿಸಿ:**

1. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳ ನಡುವೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಬಂಧವಿದೆ

$$3 \text{ ಮಧ್ಯಾಂಕ} = \text{ಬಹುಲಕ} + 2 \text{ ಸರಾಸರಿ}$$

2. ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳು ಅಸಮವಿದ್ದಾಗ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಆದಾಗ್ಯೂ ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಇದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

### ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 68 ಗ್ರಾಹಕರ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ.

| ಮಾಸಿಕ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) | ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|----------------------------|----------------|
| 65 – 85                    | 4              |
| 85 – 105                   | 5              |
| 105 – 125                  | 13             |
| 125 – 145                  | 20             |
| 145 – 165                  | 14             |
| 165 – 185                  | 8              |
| 185 – 205                  | 4              |

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವು 28.5 ಆಗಿದ್ದರೆ  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ವರ್ಗಾಂತರ | ಆವೃತ್ತಿ |
|----------|---------|
| 0 – 10   | 5       |
| 10 – 20  | $x$     |
| 20 – 30  | 20      |
| 30 – 40  | 15      |
| 40 – 50  | $y$     |
| 50 – 60  | 5       |
| ಒಟ್ಟು    | 60      |

3. ಒಬ್ಬ ಜೀವ ವಿಮಾ ಏಜೆಂಟನು ಪಡೆದ 100 ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಪಾಲಿಸಿಗಳನ್ನು 18 ವರ್ಷ ದಾಟಿದ ಮತ್ತು 60 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವಯಸ್ಸಿರುವ ಜನರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನೀಡಿದ್ದರೆ, ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

| ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) | ಪಾಲಿಸಿದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---------------------|-------------------|
| 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 2                 |
| 25 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 6                 |
| 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 24                |
| 35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 45                |
| 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 78                |
| 45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 89                |
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 92                |
| 55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 98                |
| 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ     | 100               |

4. ಒಂದು ಗಿಡದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಮೀಪದ ಮಿಲಿಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದೆ ಮತ್ತು ಪಡೆದ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದೆ.

| ಉದ್ದ (mm ಗಳಲ್ಲಿ) | ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|------------------|--------------|
| 118 – 126        | 3            |
| 127 – 135        | 5            |
| 136 – 144        | 9            |
| 145 – 153        | 12           |
| 154 – 162        | 5            |
| 163 – 171        | 4            |
| 172 – 180        | 2            |

ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸುಳುಹು: ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಸೂತ್ರವು ನಿರಂತರ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ

ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, ....., 171.5 - 180.5 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ.]

5. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಬಾಳಿಕೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ.

| ಬಾಳಿಕೆ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) | ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---------------------|-----------------|
| 1500 - 2000         | 14              |
| 2000 - 2500         | 56              |
| 2500 - 3000         | 60              |
| 3000 - 3500         | 86              |
| 3500 - 4000         | 74              |
| 4000 - 4500         | 62              |
| 4500 - 5000         | 48              |

ಬಲ್ಬ್‌ನ ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಸ್ಥಳೀಯ ದೂರವಾಣಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಿ (Telephone directory) ಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಉಪನಾಮಗಳನ್ನು (surname) ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

| ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 1 - 4 | 4 - 7 | 7 - 10 | 10 - 13 | 13 - 16 | 16 - 19 |
|----------------|-------|-------|--------|---------|---------|---------|
| ಉಪನಾಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 6     | 30    | 40     | 16      | 4       | 4       |

ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ. ಉಪನಾಮಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಉಪನಾಮಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ತರಗತಿಯ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ತೂಕ (kg ಗಳಲ್ಲಿ)     | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 | 60-65 | 65-70 | 70-75 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 2     | 3     | 8     | 6     | 6     | 3     | 2     |

### 13.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ನೇರ ವಿಧಾನ: 
$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

ಅಂದಾಜು ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ: 
$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ: 
$$\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿಯು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\text{ಬಹುಲಕ} = l + \left[ \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

3. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
4. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \left[ \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತಗಳು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

#### ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಬಹುಲಕ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವ ಮೊದಲು ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಖಚಿತ ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.





## ಸಂಭವನೀಯತೆ

# 14

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and great practical importance.

- R.S. Woodward.

ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ದೋಷಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತವು ಒಟ್ಟಾಗಿ ವಿಶೇಷ ಗಣಿತೀಯ ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ವಿಶೇಷ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವ್ಯಾಪಿಸಿದೆ.

ಆರ್. ಎಸ್. ವುಡ್‌ವರ್ಡ್.

### 14.1 ಸಂಭವನೀಯತೆ : ಒಂದು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿಧಾನ

ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಚಿಮ್ಮಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ನಾವು ನಾಣ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ಹೇಳುವಾಗ ಇದು ಕುಂದಿಲ್ಲದ (fair) ನಾಣ್ಯವೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿಸಿ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬಂದಾಗ ಒಂದೇ ಬದಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬೀಳಲು ಯಾವುದೇ ಕಾರಣ ಇರದಂತೆ ಅದು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ನಾಣ್ಯದ ಈ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತ (unbiased) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆ' ಈ ಪದವನ್ನು, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಪಕ್ಷಪಾತ (bias) ಅಥವಾ ಹಸ್ತಕ್ಷೇಪ (interference) ಇಲ್ಲದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬೀಳಲು ಬಿಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ನಾವು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ನಾಣ್ಯವು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಚ ಮಾತ್ರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. (ನಾಣ್ಯವು ಅದರ ಅಂಚಿನ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ನಾವು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಇದು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇದು ಮರಳಿನ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದಾಗ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತದಲ್ಲಿ ಶಿರವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಲ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆಯೋ, ಅಷ್ಟೇ ಸಲ ಪುಚ್ಚವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಸಕಾರಣವಾಗಿ ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಗಳಾದ,

ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಚಗಳು 'ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆ'ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುವಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ನಮಗೆ ಒಂದು ದಾಳ ಎಂದರೆ ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಕುಂದಿಲ್ಲದ ದಾಳ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು ? ಅವು 1,2,3,4,5,6 ಆಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು 1,2,3,4,5 ಮತ್ತು 6 ಆಗಿವೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೇ ? ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 4 ಕೆಂಪು ಮತ್ತು 1 ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ ಹಾಗೂ ಚೀಲದ ಒಳಗಡೆ ನೋಡದೆಯೇ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ನೀವು ಹೊರ ತೆಗೆದಿರುವುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ. ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳು ಯಾವುವು?

ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಬರುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೇ? ಅಲ್ಲಿ 4 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ, ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಒಪ್ಪಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಫಲಿತಗಳು (ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು) ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಯಾವುದೇ ಬಣ್ಣದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುವುದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಆದಾಗ್ಯೂ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಯೋಗಗಳು, "ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳನ್ನು" ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ  $P(E)$  ಯನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೆವು.

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಯತ್ನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಅನೇಕ ಸಲ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಬಹುದಾದ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಅಗತ್ಯತೆಯು ಕೆಲವು ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ, ಅವೆಂದರೆ ಇದು ಅತಿ ದುಬಾರಿಯಾಗಿರುವುದು ಅಥವಾ ಕ್ಯಾರಗತಗೊಳಿಸಲಾಗದ ಅನೇಕ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇದು, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚೆಮ್ಮಿಸುವುದು ಅಥವಾ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆಯುವುದು ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ. ಉಪಗ್ರಹ ಉಡಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ವೈಫಲ್ಯದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಉಡಾವಣೆಯ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಭೂಕಂಪದಲ್ಲಿ ಬಹುಮಹಡಿ ಕಟ್ಟಡಗಳು ಹಾನಿಯಾದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಭೂಕಂಪದ ವಿದ್ಯಮಾನವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಇಂತಹ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ, ಊಹೆಗಳು ನಿಖರ (ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಯೋಗದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯನ್ನು ತಪ್ಪಿಸಲು ನಾವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಿದ್ಧರಾದೆವು. ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳ ಊಹೆಯು (ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆ ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ) ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತಹ ಒಂದು ಊಹೆಯಾಗಿದ್ದು, ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡಲು ಕಾರಣವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ),  $E$  ಯನ್ನು  $P(E)$  ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

$$P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ 'E' ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದ್ದಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದು ಉಲ್ಲೇಖಿಸೋಣ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು 1795 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರೆರೀ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ (Pierre simon Laplace) ರವರು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೂಲವು 16 ನೇ ಶತಮಾನವಾಗಿದೆ. ಇಟಲಿಯ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಜೆ. ಕಾರ್ಡನ್ (J.Cardan) ರವರ 'The book on Games of Chance' ಎಂಬುದು ಈ ವಿಷಯದ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಸಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಇದರ ನಂತರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಧ್ಯಯನವು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಗಮನವನ್ನು ಆಕರ್ಷಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಗಮನಾರ್ಹ ಕೊಡುಗೆ ಕೊಟ್ಟವರಲ್ಲಿ ಜೇಮ್ಸ್ ಬರ್ನೌಲಿ (James Bernoulli, 1654 - 1705), ಎ.ಡಿ ಮೊವ್ರೆ (A.de. Moivre, 1667 - 1754) ಮತ್ತು ಪ್ರೆರೀ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ (Pierre simon laplace) ಪ್ರಮುಖರಾಗಿದ್ದಾರೆ. 1812 ರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ ರವರ "Theorie Analytique des Probabilités" ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯುಳ್ಳ ಪುಸ್ತಕವು



ಪ್ರೆರೀ ಸೈಮನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್  
(Pierre simon Laplace)  
(1749 - 1827)

ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯೊಬ್ಬರಿಂದ ದೊರೆಯಬಹುದಾದ ಮಹಾನ್ ಕೊಡುಗೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇತ್ತೀಚಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ತಳಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರ ಇತ್ಯಾದಿ ಹಲವು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಊಹೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ಪುಚ್ಚವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ, ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು - ಶಿರ (H) ಮತ್ತು ಪುಚ್ಚ (T). 'ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ' E ಆಗಿರಲಿ. 'E' ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು) 1 ಆಗಿದೆ.

$$P(E) = P(\text{ಶಿರ}) = \frac{E \text{ ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{1}{2}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಪುಚ್ಚವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ 'F' ಆದಾಗ

$$P(F) = P(\text{ಪುಚ್ಚ}) = \frac{1}{2} \text{ (ಏಕೆ?)}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಒಂದು ಹಳದಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಕೃತ್ರಿಕವಾಗಿ ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆಯೇ, ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಒಂದು (i) ಹಳದಿ ಚೆಂಡು (ii) ಕೆಂಪುಚೆಂಡು (iii) ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಕೃತ್ರಿಕವಾಗಿ ಚೀಲವನ್ನು ನೋಡದೆಯೇ ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ ಅವಳು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದೆ.

ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಹಳದಿಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯು Y ಆಗಿರಲಿ, ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಚೆಂಡು ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಘಟನೆಯು R ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3

(i) ಘಟನೆ y ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1

$$\therefore P(y) = \frac{1}{3}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, (ii)  $P(R) = \frac{1}{3}$  ಮತ್ತು (iii)  $P(B) = \frac{1}{3}$

**ಗಮನಿಸಿ:**

1. ಪ್ರಯೋಗದ ಒಂದು ಫಲಿತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಲ್ಲಿ, E ಮತ್ತು F ಘಟನೆಗಳೆರಡೂ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ ಇದೇ ರೀತಿ, ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ Y, B ಮತ್ತು R ಎಂಬ ಮೂರೂ ಘಟನೆಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

2. ಉದಾಹರಣೆ 1 ರಲ್ಲಿ  $P(E) + P(F) = 1$  ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆ 2 ರಲ್ಲಿ  $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$  ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಹೀಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 3:** ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. (i) 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** (i) ಇಲ್ಲಿ, 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು E ಆಗಿರಲಿ. ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 : 1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6, ಮತ್ತು E ಘಟನೆಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ 5 ಮತ್ತು 6 ಆದ್ದರಿಂದ, E ಘಟನೆಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2. ಹೀಗೆ,

$$P(E) = P(4 \text{ ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು F ಆಗಿರಲಿ.

$$\text{ಸಾಧ್ಯಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 6$$

$$F \text{ ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು} = 1, 2, 3, 4$$

ಆದ್ದರಿಂದ, F ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4

$$\text{ಹೀಗೆ, } P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ E ಮತ್ತು F ಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳೇ? ಅಲ್ಲ ಘಟನೆ E ಗೆ 2 ಫಲಿತಗಳು ಮತ್ತು ಘಟನೆ F ಗೆ 4 ಫಲಿತಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ಇವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲ.

**ಗಮನಿಸಿ:** ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1 ರಿಂದ ನಾವು ಗಮನಿಸುವುದೇನೆಂದರೆ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

ಇಲ್ಲಿ 'E' ಯು 'ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಮತ್ತು ಒಂದು 'F', ಒಂದು ಪುಚ್ಚವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

ಇಲ್ಲಿ 'E' ಯು 4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು F, 4ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

4 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಎಂಬುದು 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಅದೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ 'F' ಎಂಬುದು 'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆಯೇ? ಹೌದು ಸಮನಾಗಿದೆ. ನಾವು 'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಘಟನೆಯನ್ನು  $\bar{E}$  ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore P(E) + P(E \text{ ಅಲ್ಲದ್ದು}) = 1$$

$$\text{ಅಂದರೆ, } P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಘಟನೆ E ಗೆ,

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \text{ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.}$$

'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಘಟನೆ  $\bar{E}$  ನ್ನು 'E' ಘಟನೆಯ ಪೂರಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಾವು E ಮತ್ತು  $\bar{E}$  ಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದುವರಿಯುವ ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

- (i) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
- (ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**(i) ನ್ನು ಉತ್ತರಿಸೋಣ:**

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ 6 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಫಲಿತಗಳೆಂದರೆ, 1, 2, 3, 4, 5 ಮತ್ತು 6. ದಾಳದ ಯಾವುದೇ ಮುಖವು 8 ರಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ, ಆದುದರಿಂದ 8ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಇಂತಹ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ 8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಅಸಂಭವವಾಗಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದು.

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ, } P(8 \text{ ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು}) = \frac{0}{6} = 0$$

ಅಂದರೆ, ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯು ಸಂಭವನೀಯತೆಯು '0'. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು **ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

**(ii) ನ್ನು ಉತ್ತರಿಸೋಣ:**

ಒಂದು ದಾಳದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮುಖವು 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ ಖಚಿತವಾಗಿ ನಾವು 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟೇ ಆಗಿದ್ದು, ಅದು 6 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಹೀಗಾಗಿ, } P(E) = P(7 \text{ ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು}) = \frac{6}{6} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಖಚಿತವಾಗಿ (ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ) ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು **ಖಚಿತ ಘಟನೆ** ಅಥವಾ **ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

**ಸೂಚನೆ:** ಸಂಭವನೀಯತೆ,  $P(E)$  ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, ಅಂಶವು (ಘಟನೆ  $E$  ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು) ಯಾವಾಗಲೂ ಭೇದ (ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

ಈಗ, ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಟದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟನ್ನು (deck/pack) ನೋಡಿದ್ದೀರಾ? ಇದು 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ 13 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಂತೆ 4 ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ (suits) ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಸ್ಪೇಡ್ (♠), ಹಾರ್ಟ್ (♥), ಡೈಮಂಡ್ (♦) ಮತ್ತು ಕ್ಲಬ್ (♣). ಕ್ಲಬ್ ಮತ್ತು ಸ್ಪೇಡ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾರ್ಟ್ ಮತ್ತು ಡೈಮಂಡ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆಂದರೆ, ಎಸ್, ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜ್ಯಾಕ್, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ಮತ್ತು 2. ರಾಜ, ರಾಣಿ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು (ಗೌರವಾನ್ವಿತ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ 4:** ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕಾರ್ಡ್

(i) ಒಂದು ಎಸ್ ಆಗಿರುವ,

(ii) ಒಂದು ಎಸ್ ಆಗಿಲ್ಲದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ ಅಂದರೆ, ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಫಲಿತಗಳು ಎಂದು ಖಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

(i) ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 4 ಎಸ್‌ಗಳಿರುತ್ತವೆ. “ತೆಗೆಯುವ ಕಾರ್ಡ್ ಒಂದು ಎಸ್” ಆಗಿರುವ ಘಟನೆ ‘E’ ಆಗಿರಲಿ.

$$E \text{ ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 4$$

$$\text{ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = 52 \text{ (ಎಕೆ?)}$$

$$\therefore P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) ಒಂದು ಎಸ್ ಅಲ್ಲದ ಕಾರ್ಡ್ ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆ ‘F’ ಆಗಿರಲಿ ಘಟನೆ F ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 52 - 4 = 48 (ಎಕೆ?)

$$\text{ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ} = 52$$

$$\therefore P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

**ಗಮನಿಸಿ:** ಇಲ್ಲಿ F ಅಂದರೆ  $\bar{E}$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು  $P(F)$  ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು.

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 5:** ಸಂಗೀತಾ ಮತ್ತು ರೇಶ್ಮಾ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಆಟಗಾರ್ತಿಯರು ಒಂದು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.62 ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಸಂಗೀತಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಮತ್ತು ರೇಶ್ಮಾಳು ಪಂದ್ಯವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ S ಮತ್ತು R ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಸಂಗೀತಾಳು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ  $= P(S) = 0.62$  (ದತ್ತ)

ರೇಶ್ಮಾಳು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ  $= P(R) = 1 - P(S)$  ( $\because$  R ಮತ್ತು S ಗಳು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ)  
 $= 1 - 0.62 = 0.38$

**ಉದಾಹರಣೆ 6:** ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಗೆಳತಿಯರು ಇವರಿಬ್ಬರ ಜನ್ಮದಿನವು (i) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ದಿನಗಳಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? (ಅಧಿಕ ವರ್ಷವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ)

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಬ್ಬರು ಗೆಳತಿಯರಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸವಿತಾಳ ಜನ್ಮದಿನವು ವರ್ಷದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದಿನವಾಗಿರಬಹುದು. ಈಗ, ಹಮೀದಾಳ ಜನ್ಮದಿನವೂ ಸಹ ವರ್ಷದ 365 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ದಿನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ 365 ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

(i) ಹಮೀದಾಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಸವಿತಾಳ ಜನ್ಮದಿನಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವಳ ಜನ್ಮದಿನವನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು  $365 - 1 = 364$

$\therefore P(\text{ಹಮೀದಾಳ ಜನ್ಮದಿನವು, ಸವಿತಾಳ ಜನ್ಮದಿನಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿರುವುದು}) = \frac{364}{365}$

(ii)  $P(\text{ಸವಿತಾ ಮತ್ತು ಹಮೀದಾ ಇಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ಜನ್ಮದಿನ ಹೊಂದಿರುವುದು})$

$= 1 - P(\text{ಇಬ್ಬರು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಜನ್ಮದಿನ ಹೊಂದಿರುವುದು})$

$= 1 - \frac{364}{365} [\because P(\bar{E}) = 1 - P(E)]$

$= \frac{1}{365}$

**ಉದಾಹರಣೆ 7:** ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 10 ನೇ ತರಗತಿಯ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 25 ಬಾಲಕಿಯರು ಮತ್ತು 15 ಬಾಲಕರಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹೆಸರನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕಲಕುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಅವರು ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಚೀಲದಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಹೆಸರು (i) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ (ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನದ್ದಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

(i) ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 40

ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 25 (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ,  $P(\text{ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್}) = P(\text{ಬಾಲಕಿ}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 15 (ಏಕೆ?)

ಆದುದರಿಂದ,  $P(\text{ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್}) = P(\text{ಬಾಲಕ}) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

**ಸೂಚನೆ:**  $P(\text{ಬಾಲಕ})$ , ಇದನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$P(\text{ಬಾಲಕ}) = 1 - (\text{ಬಾಲಕಿ ನಲ್ಲದ})$$

$$= 1 - P(\text{ಬಾಲಕಿ})$$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 8:** ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 3 ನೀಲಿ, 2 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು

(i) ಬಿಳಿ (ii) ನೀಲಿ (iii) ಕೆಂಪು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ ಎಂದರ್ಥ.

$\therefore$  ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $3+2+4 = 9$  (ಏಕೆ?)

‘ಗೋಲಿಯು ಬಿಳಿಯಾಗಿರುವುದು’ ಈ ಘಟನೆಯನ್ನು W ನಿಂದ, ಗೋಲಿಯು ನೀಲಿಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯನ್ನು B ನಿಂದ ಮತ್ತು ಗೋಲಿಯು ಕೆಂಪಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯನ್ನು R ನಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ.

(i) ಘಟನೆ W ನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2

$$\therefore P(W) = \frac{2}{9}$$

ಇದೇ ರೀತಿ,  $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$  ಮತ್ತು  $P(R) = \frac{4}{9}$

$$P(W) + P(B) + P(R) = 1 \text{ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ.}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 9:** ಹರ್ಪೀತಳು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸುತ್ತಾಳೆ. (₹ 1 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ₹ 2 ರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ) ಅವಳು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ನಾವು ಶಿರಕ್ಕೆ 'H' ಎಂದು ಮತ್ತು ಪುಚ್ಚಕ್ಕೆ 'T' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು, (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) ಆಗಿದ್ದು ಇವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ (H, H) ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 'ಶಿರ' ವು ಮೇಲಕ್ಕೆ (₹ 1 ರ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 'ಶಿರ' ವು ಮೇಲಕ್ಕೆ (₹ 2 ರ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ) ಬಂದಿದೆ ಎಂದರ್ಥ. ಇದೇ ರೀತಿ (H, T) ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ 'ಪುಚ್ಚ' ಮೇಲೆ ಬಂದಿದೆ ಎಂದರ್ಥ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

'ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರ' ಅಂದರೆ ಘಟನೆ 'E' ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು (H, H), (H, T) ಮತ್ತು (T, H) (ಏಕೆ?)

ಹೀಗೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3

$$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$$

ಅಂದರೆ, ಹರ್ಪೀತಳು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು  $\frac{3}{4}$  ಆಗಿದೆ.

**ಸೂಚನೆ:** ನೀವು P(E) ಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

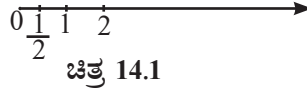
$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ [ಏಕೆಂದರೆ } P(\bar{E}) = P(\text{ಶಿರವಲ್ಲ}) = \frac{1}{4}]$$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಅಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತವು, ದತ್ತ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಫಲಿತವು, ಒಂದು ವೃತ್ತ ಅಥವಾ ಆಯತ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಒಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ನೀವು ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಣಿಸಬಹುದೇ? ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅಥವಾ ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಬಿಂದುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಭವನೀಯತೆ (ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ) ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು, ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಕಲಿತಂತೆ, ಪ್ರಸ್ತುತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಇದಕ್ಕಿರುವ ದಾರಿ ಯಾವುದು? ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 10\*:** ಒಂದು 'ಸಂಗೀತ ಕುರ್ಚಿ' ಆಟದಲ್ಲಿ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಹಾಕುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ, ಸಂಗೀತ ಆರಂಭವಾದ 2 ನಿಮಿಷಗಳ ಒಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುವ ಸಲಹೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ಸಂಗೀತ ಆರಂಭವಾದ ನಂತರ ಮೊದಲ ಅರ್ಧ ನಿಮಿಷದ ಯಾವುದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಗೀತ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು 0 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇದು 0 ಯಿಂದ 2 ರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 14.1 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 14.1

ಮೊದಲ ಅರ್ಧ ನಿಮಿಷದ ಒಳಗಡೆ ಸಂಗೀತ ನಿಲ್ಲುವ ಘಟನೆಯು E ಆಗಿರಲಿ

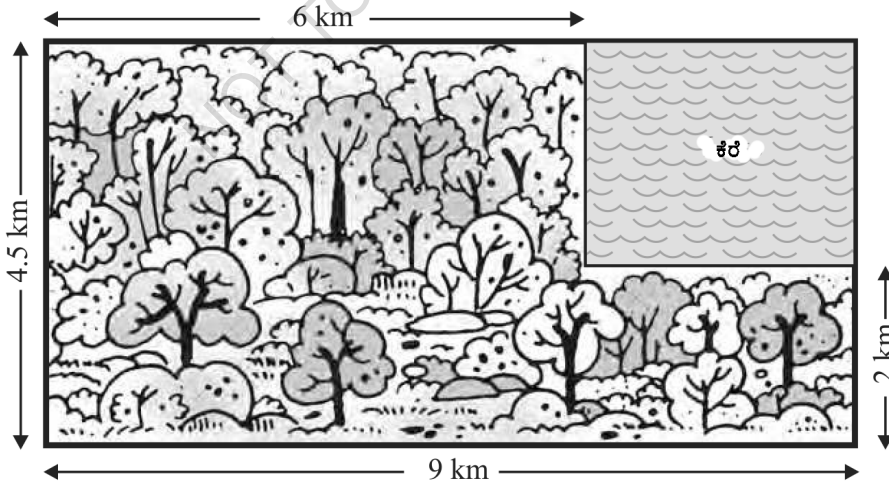
E ಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ  $\frac{1}{2}$  ದ ವರೆಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. '0' ಯಿಂದ 2 ರವರೆಗಿನ ಅಂತರವು 2, ಹಾಗೆಯೇ 0 ಯಿಂದ  $\frac{1}{2}$  ದ ವರೆಗಿನ ಅಂತರವು  $\frac{1}{2}$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಎಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಒಟ್ಟು ದೂರ 2 ರಲ್ಲಿ ಘಟನೆ E ಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಅಂತರವು  $\frac{1}{2}$  ಆಗಿದೆ.

$$\therefore P(E) = \frac{\text{ಘಟನೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಅಂತರ}}{\text{ಫಲಿತವು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಟ್ಟು ಅಂತರ}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ಈಗ ನಾವು ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10 ರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು, ಅನುಕೂಲಿಸುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅನುಪಾತದಂತೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

**ಉದಾಹರಣೆ 11\*:** ಒಂದು ಕಾಣೆಯಾದ ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಚಿತ್ರ 14.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಒಂದು ಕಡೆ ಅಪ್ಪಳಿಸಿದೆ ಎಂದು ವರದಿಯಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದು ಕೆರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ಅಪ್ಪಳಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 14.2

**ಪರಿಹಾರ:** ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಈ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಒಂದು ಕಡೆ ಅಪ್ಪಳಿಸುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.

ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಅಪ್ಪಳಿಸುವ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಪ್ರದೇಶದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= (4.5 \times 9) \text{ km}^2 = 40.5 \text{ km}^2$$

$$\text{ಕೆರೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = (2.5 \times 3) \text{ km}^2 = 7.5 \text{ km}^2$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ } P(\text{ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ ಕೆರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ಅಪ್ಪಳಿಸುವುದು}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$$

**ಉದಾಹರಣೆ 12:** ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. 8 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಅಲ್ಪದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ ಮತ್ತು 4 ಶರ್ಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಜಿಮ್ಮಿ ಎಂಬ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ ಸುಜಾತ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಹೆಚ್ಚು ದೋಷವಿರುವ ಶರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿರಸ್ಕರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ

(i) ಇದನ್ನು ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ

(ii) ಇದನ್ನು ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ರಟ್ಟಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 100 ಶರ್ಟ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಶರ್ಟ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ 100 ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ.

(i) ಜಿಮ್ಮಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ (ಆತ ಸ್ವೀಕರಿಸುವ) ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88 (ಏಕೆ?)

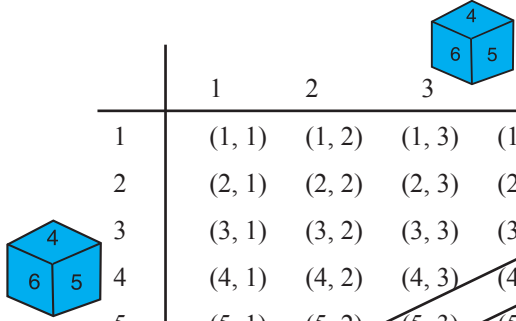
$$\therefore P(\text{ಜಿಮ್ಮಿಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಶರ್ಟ್}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

(ii) ಸುಜಾತಳಿಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 88 + 8 = 96 (ಏಕೆ?)

$$\therefore P(\text{ಸುಜಾತಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಶರ್ಟ್}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

**ಉದಾಹರಣೆ 13:** ಒಂದು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬೂದು ಬಣ್ಣದ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಿದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ದಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (i) 8 (ii) 13 (iii) 12 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ:** ನೀಲಿ ದಾಳವು 1 ನ್ನು ತೋರಿಸಿದಾಗ, ಬೂದು ದಾಳವು 1, 2, 3, 4 ಮತ್ತು 5 ಮತ್ತು 6 ಈ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ನೀಲಿ ದಾಳವು 2, 3, 4, 5 ಅಥವಾ 6 ನ್ನು ತೋರಿಸಿದಾಗಲೂ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಯೋಗದ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ಮೊದಲ ಅಂಕಿಯು ನೀಲಿ ದಾಳದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಂಕಿಯು ಬೂದು ದಾಳದಲ್ಲಿ ಬರುವುದಾಗಿದೆ.



|   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

ಚಿತ್ರ 14.3

(1, 4) ಎಂಬುದು (4, 1) ಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಏಕೆ?) ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =  $6 \times 6 = 36$

(i) 'ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8' ಈ ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳನ್ನು E ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದು ಅವು (2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2) ಆಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 14.3 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅಂದರೆ E ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

$$\therefore P(E) = \frac{5}{36}$$

(ii) ಚಿತ್ರ 14.3 ನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 13 ಆಗುವಂತಹ F ಘಟನೆಯನ್ನು ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳಿಲ್ಲ.

$$\therefore P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) ಚಿತ್ರ 14.3 ನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, ಮೊತ್ತ  $\leq 12$  ಆಗಿರುವ 'G' ಘಟನೆಗೆ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಗಳು ಅನುಕೂಲಿಸುತ್ತವೆ.

$$\therefore P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

### ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.

(i) ಒಂದು ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + 'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ = \_\_\_\_\_

(ii) ಸಂಭವಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು \_\_\_\_\_ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು \_\_\_\_\_ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು \_\_\_\_\_ ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು \_\_\_\_\_ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು

(v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು \_\_\_\_\_ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮ ಮತ್ತು \_\_\_\_\_ ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ? ವಿವರಿಸಿ.

(i) ಒಬ್ಬ ಚಾಲಕನು ಕಾರನ್ನು ಸ್ಪಾರ್ಟ್ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಾರು ಸ್ಪಾರ್ಟ್ ಆಗುವುದು ಅಥವಾ ಸ್ಪಾರ್ಟ್ ಆಗದಿರುವುದು.

(ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್‌ನ್ನು ಗುರಿಯತ್ತ ಎಸೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾನೆ ಅವನ/ಅವಳ ಗುರಿ ಮುಟ್ಟುವುದು ಅಥವಾ ಗುರಿಮುಟ್ಟದೇ ಇರುವುದು.

(iii) ಸರಿ - ತಪ್ಪು ಉತ್ತರವಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲಾಗಿದೆ ಉತ್ತರವು ಸರಿ ಅಥವಾ ತಪ್ಪು ಆಗಿರುವುದು.

(iv) ಒಂದು ಮಗುವು ಜನಿಸಿದೆ ಇದು ಒಂದು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಒಂದು ಹೆಣ್ಣು ಆಗಿರುವುದು.

3. ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಯಾವ ತಂಡವು ಮೊದಲು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ಒಂದು ಉತ್ತಮ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಏಕೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ?

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

A)  $\frac{2}{3}$       B) -1.5      C) 15%      D) 0.7

5.  $P(E) = 0.05$  ಆದರೆ, 'E ಅಲ್ಲದ' ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

6. ಒಂದು ಚೀಲವು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ಚೀಲದೊಳಗೆ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಕ್ಯಾಂಡಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ಕ್ಯಾಂಡಿಯು

(i) ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

(ii) ಒಂದು ನಿಂಬೆ ಪರಿಮಳದ ಕ್ಯಾಂಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

7. 3 ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.992 ಎಂದು ನೀಡಿದೆ. 2 ಮಕ್ಕಳ ಜನ್ಮದಿನವು ಒಂದೇ ದಿನ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

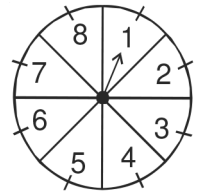
8. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಕೆಂಪು ಅಲ್ಲದ ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

9. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳು, 8 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು 4 ಹಸಿರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಗೋಲಿಯು (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳಿ (iii) ಹಸಿರಲ್ಲದ ಗೋಲಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
10. ಒಂದು ಗೋಲಕವು (ಹಣದ ಹುಂಡಿ) 50 ಪೈಸೆಯ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ₹ 1 ರ 50 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, ₹ 2 ಯು 20 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ₹ 5 ರ 10 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅದನ್ನು ಬೋರಲು ಹಾಕಿದಾಗ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಹೊರ ಬೀಳುವ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಆ ನಾಣ್ಯವು (i) ಒಂದು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಒಂದು ₹ 5 ರ ನಾಣ್ಯ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
11. ಗೋಪಿಯು ತನ್ನ ಅಕ್ಷೇರಿಯಂ ಗೆ ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ 5 ಗಂಡು ಮೀನುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿಂದ (ಚಿತ್ರ 14.4 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತಾನೆ. ಹೊರ ತೆಗೆಯುವ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 14.4

12. ಒಂದು ಅವಕಾಶದ ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಚಕವು (ಬಾಣವು) ಚಕ್ರಾಕಾರವಾಗಿ ತಿರುಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಈ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ನಿಶ್ಚಲವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ (ಚಿತ್ರ 14.5 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಸೂಚಕವು (i) 8 (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ (iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 14.5

13. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.
- (i) ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ  
(iii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
14. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.
- (i) ಒಂದು ಕೆಂಪು ರಾಜ (ii) ಒಂದು ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್  
(iii) ಒಂದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಮುಖ (ಗೌರವಾನ್ವಿತ) ಕಾರ್ಡ್ (iv) ಹಾರ್ಟ್‌ನ ಜ್ಯಾಕ್  
(v) ಒಂದು ಸ್ವೇಡ್ (vi) ಡೈಮಂಡ್‌ನ ರಾಣಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಡೈಮಂಡ್ ಚಿಹ್ನೆ ಇರುವ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಾದ, 10, ಜ್ಯಾಕ್, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಮುಖ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇರುವಂತೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲಾಗಿದೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು  
a) ಒಂದು ಏಸ್ b) ಒಂದು ರಾಣಿ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

16. 12 ದೋಷಪೂರಿತ ಪೆನ್‌ಗಳು ಆಕಸ್ಮಿಕವಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಪೆನ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಕೊಂಡಿವೆ. ಒಂದು ಪೆನ್‌ನ್ನು ನೋಡಿದ ಕೂಡಲೇ ಅದು ದೋಷಪೂರಿತವೇ? ಅಲ್ಲವೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್‌ನ್ನು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಹೊರ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊರತೆಗೆದ ಪೆನ್ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. (i) 20 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ. ಗುಂಪಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(ii) (i) ರಲ್ಲಿ ಹೊರ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ಬಲ್ಬ್ ಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದೆ. ಈಗ ಉಳಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲ್ಬ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ ಈ ಬಲ್ಬ್ ದೋಷಪೂರಿತ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

18. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮೂದಾಗಿರುವ 90 ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದರೆ ಅದು

(i) 2 ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

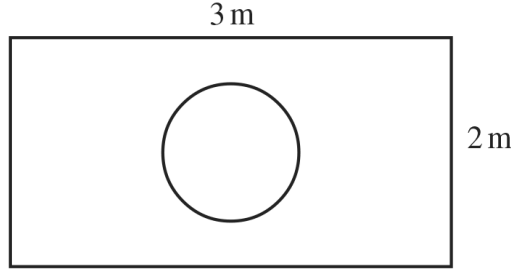
19. ಒಂದು ಮಗುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾಳವಿದೆ. ಅದರ ಮುಖಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿವೆ.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | A |
|---|---|---|---|---|---|

ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಿದೆ. i) A ii) D ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

20\*. ಚಿತ್ರ 14.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ

ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು 1 m ವ್ಯಾಸದ ವೃತ್ತಾಕಾರದೊಳಗೆ ನಿಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 14.6

21. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 144 ಬಾಲ್‌ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 20 ಪೆನ್ನುಗಳು ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ನೂರಿಯು ಪೆನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುತ್ತಾನೆ, ಆದರೆ ದೋಷಪೂರಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಖರೀದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂಗಡಿಯವನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೆಗೆ ನೀಡುತ್ತಾನೆ.

(i) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವ (ii) ಅವಳು ಇದನ್ನು ಖರೀದಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

22. ಉದಾಹರಣೆ 13 (i) ರಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

| ಘಟನೆ 2 ದಾಳಗಳಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ | 2              | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8              | 9 | 10 | 11 | 12             |
|-------------------------|----------------|---|---|---|---|---|----------------|---|----|----|----------------|
| ಸಂಭವನೀಯತೆ               | $\frac{1}{36}$ |   |   |   |   |   | $\frac{5}{36}$ |   |    |    | $\frac{1}{36}$ |

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಇಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎಂಬ 11 ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು  $\frac{1}{11}$  ಎಂದು ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಈ ವಾದವನ್ನು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

23. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಯ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸಲದ ಫಲಿತವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹನೀಫನು, ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ಒಂದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಅಂದರೆ, 3 ಶಿರಗಳು ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಚಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಟದಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸೋಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫನು ಆಟದಲ್ಲಿ ಸೋಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.

24. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 2 ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.

(i) ಎರಡೂ ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರದಿರುವ (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸಲ 5 ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಎಷ್ಟು?

[ಸುಳುಹು: ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯುವುದು, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು]

25. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾದಗಳು ಸರಿಯಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ತಪ್ಪಾಗಿವೆ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.

(i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ. ಮೂರು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಇರುತ್ತವೆ - ಎರಡು ಶಿರಗಳು, ಎರಡು ಪುಚ್ಚಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು  $\frac{1}{3}$

(ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಎರಡು ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ - ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು  $\frac{1}{2}$ .

#### 14.2 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ (ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$P(E) = \frac{E \text{ ಗೆ ಅನುಕೂಲಿಸುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಗಳ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

2. ಖಚಿತ ಘಟನೆ (ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ) ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿದೆ.

3. ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಆಗಿದೆ.

4. ಒಂದು ಘಟನೆ 'E' ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ  $P(E)$  ಯು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು  $0 \leq P(E) \leq 1$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5. ಒಂದು ಘಟನೆಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಫಲಿತವಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ಯಾವುದೇ ಘಟನೆ 'E' ಗೆ  $P(E) + P(\bar{E}) = 1$  ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ  $\bar{E}$  ಅಂದರೆ 'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. E ಮತ್ತು  $\bar{E}$  ಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಥವಾ ಅನುಭವ ವೇದ್ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಏನು ಸಂಭವಿಸಿದೆಯೋ, ಅದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು, ಕೆಲವು ಕಲ್ಪನೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಏನು ಸಂಭವಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಮತ್ತು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಸರಿ ಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಎಂದು ನಾವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.



@KTBS  
NOT TO BE REPUBLISHED

# ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣ **A2**

## A2.1 ಪೀಠಿಕೆ

- ಒಬ್ಬ ವಯಸ್ಕ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಶರೀರವು ಸುಮಾರು 1,50,000 km ನಷ್ಟು ರಕ್ತವಾಹಕ ಅಪಧಮನಿಗಳು ಮತ್ತು ರಕ್ತನಾಳಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
- ಮಾನವ ಹೃದಯವು ಪ್ರತಿ 60 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಿಗೆ 5 ರಿಂದ 6 ಲೀಟರ್‌ಗಳಷ್ಟು ರಕ್ತವನ್ನು ದೇಹದಲ್ಲಿ ಪಂಪ್ ಮಾಡುತ್ತದೆ.
- ಸೂರ್ಯನ ಮೇಲ್ಮೈ ತಾಪವು ಸುಮಾರು 6000°C ಗಳಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ನಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಮತ್ತು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು ಎಂದು ನೀವು ಎಂದಾದರೂ ಆಶ್ಚರ್ಯಪಟ್ಟಿದ್ದೀರಾ? ಅವರು ವಯಸ್ಕ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಮೃತ ಶರೀರಗಳಿಂದ ರಕ್ತನಾಳಗಳು ಮತ್ತು ಅಭಿಧಮನಿಗಳನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆದು ಅಳಿದರೆ? ಈ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಲು ಅವರು ರಕ್ತವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹರಿದು ಹೋಗುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ? ಸೂರ್ಯನ ತಾಪವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅವರು ಒಂದು ತಾಪಮಾಪಕದೊಂದಿಗೆ ಸೂರ್ಯನ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸಿದರೆ? ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಇಲ್ಲ ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವರು ಹೇಗೆ ಪಡೆದರು?

ನಾವು ನಮಗೆ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಿದ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಉತ್ತರ ಅಡಗಿದೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣ ಎಂದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿವರಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣವೆಂದರೆ, ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದಲ್ಲಿ, ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಸಮಾನವಾದ ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಅದನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆ ಬಳಿಕ ನಾವು ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, ಅದರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಬಳಿಕ, ಸಿಂಧುಗೊಳಿಸುವ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ದೊರೆತಂತಹ ಪರಿಹಾರವು ಅರ್ಥಗರ್ಭಿತವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡುವುದು ಕೂಡಾ ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣವು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

- i) ತಲುಪಲಸಾಧ್ಯವಾದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನದಿಯ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಆಳಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ii) ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಇತರ ಗ್ರಹಗಳ ರಾಶಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- iii) ಭೂಮಿಯಿಂದ ಇತರ ಗ್ರಹಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- iv) ಒಂದು ದೇಶದಲ್ಲಿ ಮುಂಗಾರಿನ ಆಗಮನವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.
- v) ಷೇರು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯ ಗತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.
- vi) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ದೇಹದೊಳಗಿನ ರಕ್ತದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- vii) ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ 10 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆಗಬಹುದಾದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.
- viii) ಒಂದು ಮರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- ix) ಒಂದು ನಗರದ ವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿರುವ ವಿವಿಧ ಮಾಲಿನ್ಯಕಾರಿಗಳ ppm ನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- x) ಪರಿಸರದ ಮೇಲೆ ಮಾಲಿನ್ಯಕಾರಿಗಳ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.
- xi) ಸೂರ್ಯನ ಮೇಲ್ಮೈಯ ತಾಪವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸಂದರ್ಶಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲಿನ ಜಗತ್ತಿನಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ನಿದರ್ಶನಾತ್ಮಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡೋಣ. ವಿಭಾಗ A2.2ರಲ್ಲಿ ಮಾದರಿ ನಿರ್ಮಾಣದ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಭಾಗ A2.3ರಲ್ಲಿ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಭಾಗ A2.4ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ವಿಶೇಷತೆಗಳಿಗೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸಂಗತಿ ಎಂದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಗಣಿತವು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖವಾದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಜಾಗೃತಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವುದು ನಮ್ಮ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ನೀವು ನಿಜವಾಗಿ ಪ್ರಶಂಸಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಉನ್ನತ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕಂಪನ್ನು ಸೂಸುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.

### **A2.2 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ಹಂತಗಳು:**

ಮಾದರಿಕರಣದ ಉಪಯೋಗದ ಬಗ್ಗೆ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೆವು. ಅವುಗಳಿಂದ, ಮಾದರಿಕರಣ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೇನಾದರೂ ಒಳನೋಟ ದೊರೆಯಿತೆ? ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ಪ್ರಮುಖ ಹಂತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ತ್ವರಿತವಾಗಿ ಒಮ್ಮೆ ಪುನರ್ ಸಂದರ್ಶಿಸೋಣ.

**ಹಂತ 1: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು):** ನೈಜ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. ಒಂದು ತಂಡದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುವುದಾದರೆ, ನೀವು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಬಯಸುವ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ. ಕೆಲವು ಊಹೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು ಎಂದಾದರೆ, ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಡೆಗಣಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಒಂದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದು ಎಂದಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೀನನ್ನೂ ಹಿಡಿದು, ಎಣಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು ಕೆಲವು ಮೀನುಗಳನ್ನು ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಈ ಮೂಲಕ ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ, ಅದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು.

**ಹಂತ 2 : (ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ರೂಪಿಸುವುದು):** ಗಣಿತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ವಿವಿಧ ಅಂಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವ ಕೆಲವು ಮಾರ್ಗಗಳೆಂದರೆ,

- ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.
- ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅಸಮತೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.
- ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.
- ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ.

**ಉದಾಹರಣೆಗೆ,** ಹಂತ 1ರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದರೆ, ಇದರಿಂದ ಪೂರ್ತಿ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಅಂದಾಜಿಸುವುದು? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು, ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮೀನುಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಉಳಿದ ಮೀನುಗಳೊಂದಿಗೆ ಬೆರೆಯಲು ಬಿಟ್ಟು, ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಕೆರೆಯಿಂದ ಮೀನುಗಳ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಹೊಸ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಬಾರಿ ಗುರುತು ಹಾಕಿದ ಎಷ್ಟು ಮೀನುಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು. ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಸಮಾನುಪಾತವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಒಟ್ಟು ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಒಂದು ಅಂದಾಜಿಗೆ ಬರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆರೆಯಿಂದ 20 ಮೀನುಗಳ ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡೋಣ. ನಂತರ ಅವುಗಳನ್ನು ಇತರ ಮೀನುಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಬೆರೆಯಲು ಅದೇ ಕೆರೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡೋಣ. ಬಳಿಕ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು (50 ಎಂದಿರಲಿ) ಮಿಶ್ರಿತ ಸಮುದಾಯದಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಗುರುತು ಮಾಡಿದವುಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು. ನಾವು ಹೀಗೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಬೇಕು.

ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಊಹೆ ಎಂದರೆ, ಗುರುತು ಮಾಡಿದಂತಹ ಮೀನುಗಳು ಉಳಿದ ಮೀನುಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಬೆರೆತುಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಂತಹ ಮಾದರಿಯು ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 3 : (ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು) :** ಹಂತ 2ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು, ಬಳಿಕ ಗಣಿತದ ವಿವಿಧ ತಂತ್ರಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಹಂತ 2ರಲ್ಲಿ, ಎರಡನೇ ಸಲ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ 5 ಮೀನುಗಳು ಗುರುತು ಮಾಡಿದವುಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ, ಆಗ, ಒಟ್ಟು ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿ  $\frac{5}{50}$  ಅಂದರೆ  $\frac{1}{10}$  ಕ್ಕೆ ಗುರುತು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದು ವಿಶಿಷ್ಟವಾಗಿ ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ,

$$\text{ಸಮುದಾಯದ } \frac{1}{10} \text{ ಭಾಗ} = 20.$$

$$\text{ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯ} = 20 \times 10 = 200$$

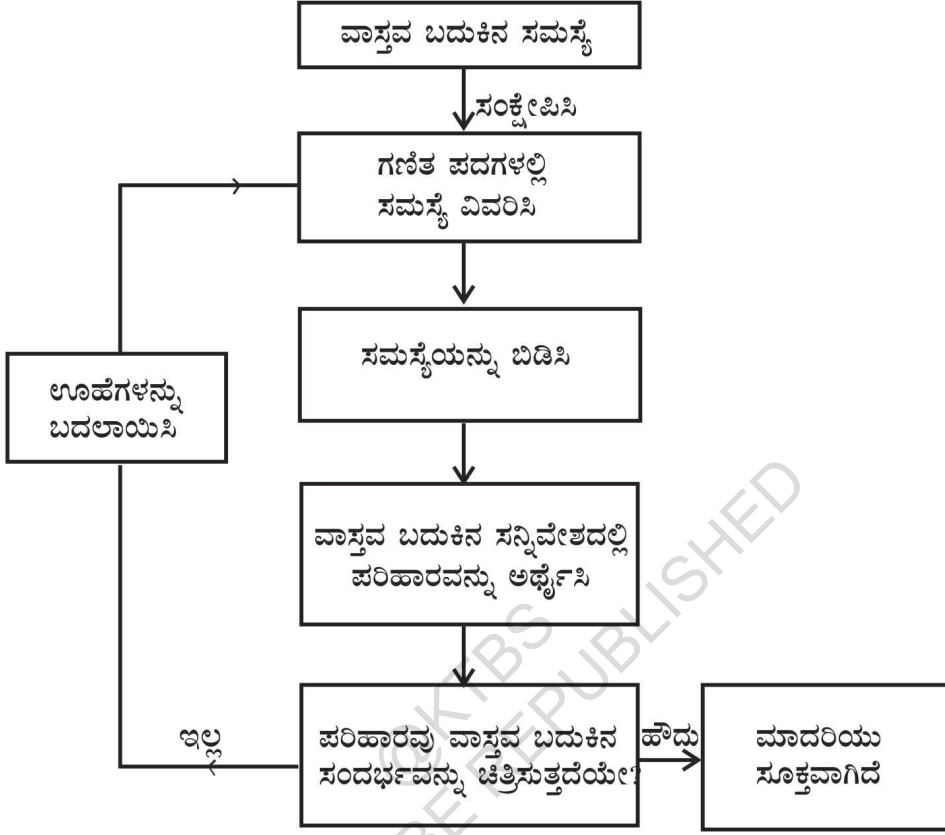
**ಹಂತ 4: (ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು) :** ಈ ಹಿಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪಡೆದಂತಹ ಪರಿಹಾರವನ್ನು, ಹಂತ 1 ರ ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಈಗ ನೋಡಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಹಂತ 3 ರಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಪರಿಹಾರವು ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 200 ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 5: (ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಿಂಧುಗೊಳಿಸುವುದು) :** ನಾವು ಮೊದಲನೆ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಹಿಂತಿರುಗೋಣ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಕಾರ್ಯದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಹೊಸ ಮಾಹಿತಿಗಳು ದೊರೆಯುವ ತನಕ ಅಥವಾ ಊಹೆಗಳು ಬದಲಾಗುವ ತನಕ ನಾವು ಈ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ, ನಾವು ಊಹೆಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದರಿಂದ ನೈಜ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅವಶ್ಯಕ ಅಂಶವನ್ನೇ ಮರೆತು, ನಾವದಕ್ಕೆ ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ಪರಿಹಾರವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸತ್ಯದೂರವಾಗಿದ್ದು, ನೈಜ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಥಹೀನವೆನಿಸಬಹುದು. ಹೀಗಾದಾಗ ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಮಾಡಿದ ಊಹೆಯನ್ನು ಮರುಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಹಿಂದೆ ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಅದು ನೈಜ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಪರಿಷ್ಕರಣೆ ಮಾಡಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆಗೆ,** ಹಂತ 3 ರಲ್ಲಿ, ಮೀನುಗಳ ಪೂರ್ಣ ಸಮುದಾಯದ ಒಂದು ಅಂದಾಜು ಸಿಕ್ಕಿತ್ತು. ಅದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರದೇ ಇರಬಹುದು. ಇದು ಸಮುದಾಯದ ಸರಿಯಾದ ಅಂದಾಜು ಹೌದೇ ಎಂದು ನೋಡಲು 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಹಂತಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ, ದೊರೆತಂತಹ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಮೀನಿನ ಸಮುದಾಯದ ನಿಕಟ ಅಂದಾಜನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. **ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣವನ್ನು** ದೃಶ್ಯೀಕರಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಚಿತ್ರ A2.1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ಮಾದರಿಕಾರರು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವಿಕೆ ಮತ್ತು ನಿಖರತೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಮತೋಲನವನ್ನು ಕಾಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ (ಸುಲಭ ಪರಿಹಾರಕ್ಕಾಗಿ). ಅವರು ವಾಸ್ತವಕ್ಕೆ ತುಂಬಾ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ ಪ್ರಗತಿ ಸಾಧಿಸುವ ಭರವಸೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತಾರೆ. ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಫಲಿತಾಂಶವೆಂದರೆ ಮುಂದೆ ಏನಾಗಬಹುದೆಂದು ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು ಅಥವಾ ಸಮಂಜಸವಾದ ನಿಖರತೆಯೊಂದಿಗೆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುವುದು. ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ನಾವು ಮಾಡುವ ವಿಭಿನ್ನ ಊಹೆಗಳು, ವಿಭಿನ್ನ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಮಾದರಿಗಳೆಂದಿಲ್ಲ. ಉತ್ತಮವಾದವುಗಳು, ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮವಾದವುಗಳಿವೆ.

### ಅಭ್ಯಾಸ A2.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. 13 ನೇ ಶತಮಾನದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾದ ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆ, ಲೆನಾರ್ಡ್ ಫಿಬೊನಾಚಿ ಕೇಳುತ್ತಾರೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಎರಡು ಮೊಲಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ವಂಶೋತ್ಪತ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಎಷ್ಟು ಮೊಲಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ? ಒಂದು ಜೋಡಿ ಮೊಲಗಳು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಒಂದು ಜೋಡಿ ಸಂತತಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಮೊಲಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯೂ 2ನೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪ್ರಥಮ ಸಂತತಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ

ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. 0 ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ತಿಂಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಆ ಬಳಿಕ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಮೊಲಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಮೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

| ತಿಂಗಳು | ಮೊಲಗಳ ಜೋಡಿಗಳು |
|--------|---------------|
| 0      | 1             |
| 1      | 1             |
| 2      | 2             |
| 3      | 3             |
| 4      | 5             |
| 5      | 8             |
| 6      | 13            |
| 7      | 21            |
| 8      | 34            |
| 9      | 55            |
| 10     | 89            |
| 11     | 144           |
| 12     | 233           |
| 13     | 377           |
| 14     | 610           |
| 15     | 987           |
| 16     | 1597          |

ಕೇವಲ 16 ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ, ಸುಮಾರು 1600 ಜೋಡಿ ಮೊಲಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ! ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

### A2.3 ಕೆಲವು ನಿದರ್ಶನಗಳು

ನಾವೀಗ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 1:** (ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು) : ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕಿಯು ಮುಂದೆ ಹೇಳುವ, ಊಹಿಸುವ ಆಟದ ಸವಾಲನ್ನು ನಿಮಗೆ ನೀಡುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಅವರು ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು, ದಾಳಗಳ ಮೇಲ್ಮುಖದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿಯುತ್ಪರಕ್ಕೂ ನಿಮಗೆ ಎರಡು ಅಂಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪು ಊಹೆಗೂ ನೀವು ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉತ್ತಮ ಊಹೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು?

**ಪರಿಹಾರ:**

**ಹಂತ 1: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು) :** ಮೇಲ್ಮಖದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

**ಹಂತ 2: (ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ):** ಗಣಿತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ದಾಳದ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಮೊತ್ತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ದಾಳಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉರುಳುವಿಕೆಯೂ ಕೆಳಗಿನ 36 ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಾವು ಸರಳವಾಗಿ ಮಾಡರೀಕರಿಸಬಹುದು.

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲನೇ ದಾಳದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೇ ದಾಳದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 3: (ಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು):** ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವುದೆಂದರೆ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಮೊತ್ತಗಳು 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯ ಸಂಭವಿಸುವಿಕೆಯು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾವು ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಾವಿದನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

| ಮೊತ್ತ     | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| ಸಂಭವನೀಯತೆ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

ಮೊತ್ತವು 7 ದೊರೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು  $\frac{1}{6}$  ಮತ್ತು ಇದು ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಪಡೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಿಂತ ಅಧಿಕ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

**ಹಂತ 4: (ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು) :** ಮೊತ್ತವು 7 ದೊರೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಏಳು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಬರುವುದೆಂದು ನೀವು ಊಹಿಸಬಹುದು.

**ಹಂತ 5: (ಮಾದರಿಯ ಸಿಂಧುತ್ವ) :** ಒಂದು ಜೊತೆ ದಾಳಗಳನ್ನು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿ, ಒಂದು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಅನುರೂಪ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳೊಂದಿಗೆ

ಹೋಲಿಸಿ. ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದ್ದರೆ, ದಾಳಗಳು ವಿರೂಪಗೊಂಡಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ನಾವು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದು, ದಾಳವು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಡೆಗೆ ಒಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಬೇಕು.

ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹೋಗುವ ಮೊದಲು ನಿಮಗೆ ಕೆಲವು ಹಿಮ್ಮಾಹಿತಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಣದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದ್ದಾಗ ಬೇಕಾಗುವಷ್ಟು ಹಣ ಇರದೇ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಭವ ಹೆಚ್ಚಿನವರಿಗೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾದ ಹಣವಾಗಿರಬಹುದು ಆಥವಾ ಅನುಕೂಲಕರ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕಾಗಿರಬಹುದು, ಹಣವು ನಮಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಸೀಮಿತ ಹಣದಲ್ಲಿ ಸ್ಕೂಟರ್ ಫ್ರಿಜ್, ಟಿ.ವಿ, ಕಾರು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಂತಹ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಹಕರು ಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡಲು ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು 'ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆ' ಎಂಬ ಒಂದು ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ತಂತ್ರವಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಿ, ಗ್ರಾಹಕರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಂತೆ ಪ್ರೇರೇಪಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಹಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಂದಾಯ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಗ್ರಾಹಕರು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಪಾವತಿಸಿ, ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು, ಮಾಸಿಕ, ತ್ರೈಮಾಸಿಕ, ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕ ಅಥವಾ ವಾರ್ಷಿಕ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸಬಹುದು.

ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಖರೀದಿಸುವವನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ದಿನಗಳ ಬಳಿಕ ಹಣ ಸಂದಾಯ ಮಾಡುವುದರಿಂದಾಗಿ, ಮಾರಾಟಗಾರನು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತಾನೆ. (ಮುಂದೂಡಿದ ಪಾವತಿ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ)

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ನಗದು ಬೆಲೆ ಎಂದರೆ, ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಗ್ರಾಹಕರು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸಂದಾಯ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಹಣ. ನೇರ ನಗದು ಪಾವತಿ ಎಂದರೆ, ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಪಾವತಿಸುವ ಅದರ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ಭಾಗ.

**ಗಮನಿಸಿ:** ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದ ಒಂದು ವರ್ಷದೊಳಗೆ ಬಾಕಿ ಹಣವನ್ನು ಪಾವತಿಸುವುದಾದರೆ, ಮುಂದೂಡಿದ ಪಾವತಿಯ ಮೇಲೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ, ಬೇರೊಬ್ಬರಿಗೆ ಸಾಲವಾಗಿ ನೀಡಿದ ಹಣದ ಮೇಲೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸುವುದು ಪಾಪವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು. ಬಹಳ ಹಿಂದೆ ಇದು ನಿಷೇಧಕ್ಕೂ ಒಳಗಾಗಿತ್ತು. ಬಡ್ಡಿ ಪಡೆಯಬಾರದೆಂಬ ಕಟ್ಟಳೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಜನರು ಕಂಡುಕೊಂಡ ಹೊಸ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, ಸಾಲವಾಗಿ ಪಡೆದ ಹಣಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಆ ಬೆಲೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಡುವುದು. ಈ ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯು ಮರೆಮಾಚಲ್ಪಡುತ್ತಿತ್ತು.

ನಾವೀಗ ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣದ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಮರಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ 2:** ಜೂಹಿ ಒಂದು ಬೈಸಿಕಲ್ ಖರೀದಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ಹೋದಾಗ, ಅವಳು ಇಷ್ಟಪಡುವ ಬೈಸಿಕಲ್ ₹ 1800 ಕ್ಕೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಜೂಹಿಯ ಬಳಿ ₹ 600 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವಳು ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನಲ್ಲಿ ತನಗೆ ಅದನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾಳೆ. ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಬಳಿಕ, ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನು ಅವಳ ಮುಂದೆ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಪ್ರಸ್ತಾವನೆಯನ್ನಿಡುತ್ತಾನೆ. ಅವನು ಜೂಹಿಗೆ ಹೀಗೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಅವಳು ₹ 600 ನೇರ ನಗದು ಪಾವತಿ ಮಾಡಿ ಸೈಕಲನ್ನು ಕೊಂಡೊಯ್ಯಬಹುದು. ಬಾಕಿ ಹಣವನ್ನು ತಲಾ ₹ 610 ರ ಎರಡು ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ತೀರಿಸಬೇಕು. ಜೂಹಿಯ ಮುಂದೆ ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ಅಥವಾ ವಾರ್ಷಿಕ 10% ರ ದರದ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಸಾಲವನ್ನು ಪಡೆದು ನಗದು ಪಾವತಿ ಮಾಡುವುದು. ಅವಳಿಗೆ ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕ?

**ಪರಿಹಾರ:**

**ಹಂತ 1: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು):** ಜೂಹಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದುದು ಏನೆಂದರೆ, ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನು ಮಾಡಿದಂತಹ ಪ್ರಸ್ತಾವನೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೇ ಬೇಡವೇ ಎಂಬುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವಳು ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳ ಬಡ್ಡಿ ದರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು - ಒಂದು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಧಿಸಲಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಬ್ಯಾಂಕ್ ವಿಧಿಸಿರುವುದು (ಅಂದರೆ 10%).

**ಹಂತ 2: (ಗಣಿತೀಯ ವಿವರಣೆ):** ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲು ಅಥವಾ ತಿರಸ್ಕರಿಸಲು ಅಂಗಡಿ ಮಾಲೀಕನು ವಿಧಿಸುವ ಬಡ್ಡಿ ದರವನ್ನು ಅವಳು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಪೂರ್ಣ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷದೊಳಗೆ ಸಂದಾಯ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಬೈಸಿಕಲ್‌ನ ನಗದು ಬೆಲೆ = ₹ 1800

ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನೇರ ನಗದು ನೀಡಿಕೆ = ₹ 600

ಆದ್ದರಿಂದ ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ

ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಉಳಿಕೆ ಹಣ =  $(1800 - 600) = ₹ 1200$

ಅಂಗಡಿಯವನು ವಿಧಿಸುವ ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರ  $r\%$  ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಂತಿನ ಹಣ = ₹ 610

ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾವತಿಸಿದ ಹಣ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ ಬಡ್ಡಿ = ₹ 1220 - ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

ಜೂಹಿಯು ₹ 1200 ನ್ನು ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಇರಿಸಿರುವುದರಿಂದ,

ಮೊದಲ ತಿಂಗಳ ಅಸಲು = ₹ 1200

ಎರಡನೇ ತಿಂಗಳ ಅಸಲು = ₹  $(1200 - 610) = ₹ 590$

ಎರಡನೇ ಅಸಲಿನ ಬಾಕಿ ₹ 590 + ವಿಧಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿ (₹ 20)

= ಮಾಸಿಕ ಕಂತು = (₹ 610) = 2ನೇ ಕಂತು

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಅಸಲು = ₹ 1200 + ₹ 590

= ₹ 1790

ಈಗ,

$$\text{ಬಡ್ಡಿ} = ₹ \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \quad (2)$$

**ಹಂತ 3: (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು):** (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

ಅಥವಾ

$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (ಅಂದಾಜು)}$$

**ಹಂತ 4: (ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು):** ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಧಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ = 13.14%

ಬ್ಯಾಂಕು ವಿಧಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ = 10%

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೈಸಿಕಲ್‌ನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಹಣ ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಅವಳು ಆದ್ಯತೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕ.

**ಹಂತ 5: (ಮಾದರಿಯ ಸಿಂಧುತ್ವ):** ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ಈ ಹಂತವು ಅಷ್ಟೊಂದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಸಾಲ ಪಡೆಯಲು ಛಾಪಾ ಕಾಗದ ಖರೀದಿ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಧಿವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ ಅವಳು ತನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲೂಬಹುದು.

**ಗಮನಿಸಿ:** ಬಡ್ಡಿಯ ದರದ ಮಾದರೀಕರಣವು ಅದರ ಆರಂಭಿಕ ಹಂತದಲ್ಲೇ ಇದೆ ಮತ್ತು ಸಿಂಧುತ್ವವು ಇನ್ನೂ ಕೂಡಾ ಆರ್ಥಿಕ ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಕಂತನ್ನು ನಿಗದಿಪಡಿಸುವಾಗ, ವಿಭಿನ್ನ ಬಡ್ಡಿಯ ದರಗಳನ್ನು ಕಾನೂನುಬದ್ಧಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಸಿಂಧುತ್ವವು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ A2.2

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಒಬ್ಬ ಪಕ್ಷಿಪಕ್ಷಿಯು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಗಿಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವನ್ನು ಹಿಡಿಯಲು ಅವರು ಒಂದು ಬಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ 32 ಗಿಳಿಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು ಅವುಗಳಿಗೆ ಬಲೆಯನ್ನು ತೊಡಿಸಿ, ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುತ್ತಾರೆ. ಮುಂದಿನ ವಾರ ಇದೇ ರೀತಿ ಅವರು

40 ಗಿಳಿಗಳನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 8 ಗಿಳಿಗಳು ಬಳೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

- i) ಅವರು ಎರಡನೇ ಸಲ ಹಿಡಿದ ಗಿಳಿಗಳ ಎಷ್ಟನೇ ಒಂದು ಅಂಶವು ಬಳೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿತ್ತು?
- ii) ಆ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿದ್ದ ಒಟ್ಟು ಗಿಳಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ.

2. ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತಿರುವುದು ಕಾಡಿನ ಒಂದು ವಿಹಂಗಮ ಛಾಯಚಿತ್ರ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚುಕ್ಕೆಯೂ ಒಂದು ಮರವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಪರಿಸರದ ಗಣತಿಯ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿ, ನೀವು ಮಾಡಬೇಕಾದುದೆಂದರೆ ಈ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.



3. ಒಂದು ಟಿ.ವಿಯನ್ನು ₹ 24000 ನಗದು ಬೆಲೆಗೆ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ₹ 8000 ನೇರ ನಗದು ಪಾವತಿ ಮಾಡಿ ತಲಾ ₹ 2800 ರ ಆರು ಮಾಸಿಕ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಲಿಯವರು ₹ 8000 ದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಟಿ.ವಿ ಯನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ತೆರಳಿದರು. ಅವರಿಗೆ ಈಗ ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳಿವೆ. ಒಂದನೆಯದು ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಡಿಯಲ್ಲಿ ಟಿ.ವಿ ಯನ್ನು ಖರೀದಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಆರ್ಥಿಕ ಸಹಕಾರ ಸಂಘದಿಂದ ಸಾಲ ಪಡೆದು ನಗದು ಪಾವತಿಯನ್ನು ಮಾಡುವುದು. ಸಹಕಾರ ಸಂಘವು ವಾರ್ಷಿಕ 18% ರ ದರದಲ್ಲಿ ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆಲಿಯವರಿಗೆ ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯು ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ?

#### A2.4 ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣವು ಏಕೆ ಪ್ರಮುಖವಾಗಿದೆ?

ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿರುವಂತೆ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಕರಣವು ಒಂದು ಅಂತರ್ಜ್ಞಾನ ಶಿಸ್ತೀಯ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮತ್ತು ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಪರಿಣಿತರು, ಪ್ರಸ್ತುತ ಇರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಮಟ್ಟ ಹೆಚ್ಚಿಸಲು, ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮವಾದವುಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಅಥವಾ ಕೆಲವೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಊಹಿಸಲು ತಮ್ಮ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ನೈಪುಣ್ಯವನ್ನು ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ.

ಮಾದರಿಕರಣದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನೇಕ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾರಣಗಳಿರುವುದು ನಿಜವಾದರೂ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನವುಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕಾರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿವೆ.

- ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು: ವಾಸ್ತವ ಜಗತ್ತಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅವಶ್ಯಕ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುವ ಒಂದು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯು ನಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಮಾದರಿಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಮೂಲಕ ನಾವು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದಲ್ಲದೆ, ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಘಟಕಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಪಡೆದಿವೆ ಹಾಗೂ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ವಿಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

- ಊಹಿಸಲು, ಅಥವಾ ಮುನ್ಸೂಚಿಸಲು ಅಥವಾ ಅನುಕರಿಸಲು: ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಲು, ಎಷ್ಟೋ ಸಲ ನಾವು ಬಯಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅದು ದುಬಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ, ವ್ಯಾವಹಾರಿಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಂದಿಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ, ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆ, ಮಾನವನಲ್ಲಿ ಔಷಧದ ಪರಿಣಾಮಗಳ ಅಧ್ಯಯನ, ಪರಮಾಣು ಕ್ರಿಯಾಕಾರಿಯ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

ವಿವಿಧ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ, ತೀರ್ಮಾನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನವು, ಭವಿಷ್ಯದ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

ಮಾರುಕಟ್ಟೆ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬೇಡಿಕೆಯ ಕುರಿತಾದ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯು ಮಾರಾಟ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಯೋಜಿಸಲು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ

ಒಂದು ಶಾಲಾ ಮಂಡಳಿಗೆ ಎಲ್ಲಿ, ಯಾವಾಗ ಹೊಸ ಶಾಲೆಗಳನ್ನು ಆರಂಭಿಸಬೇಕೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ವಿವಿಧ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಿಗೆ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಏರಿಕೆಯನ್ನು ಮುನ್ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರಬೇಕು.

ಮುನ್ಸೂಚಕರು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, ಹಿಂದಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ಊಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಬಲ್ಲ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರು ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತಾರೆ. ಬಳಿಕ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ಊಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅನೇಕ ಮುನ್ಸೂಚನಾ ತಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಮೂಲಭೂತ ಉಪಾಯವು ಬಳಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಮತ್ತು ಹಿಂದೆ ಗುರುತಿಸಿದಂತಹ ವಿನ್ಯಾಸವು ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲೂ ಮುಂದುವರೆಯಬಹುದು ಎಂಬ ಊಹೆಯ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತವಾಗಿದೆ.

- ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು: ಬಹಳಷ್ಟು ಬಾರಿ ನಾವು ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳು, ಕೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೀನುಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಎಂದರೆ, ಚುನಾವಣಾ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ, ಸ್ಪರ್ಧಿಸುವಂತಹ ಪಕ್ಷಗಳು, ತಮ್ಮ ಪಕ್ಷವು ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅವರ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಅವರ ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮತ ಹಾಕಬಹುದೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ. ಅವರ ಊಹೆಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಾರದ ತಂತ್ರಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲೂ ಅವರು ಬಯಸಬಹುದು. ಒಂದು ಪಕ್ಷವು ಚುನಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲು, ಚುನಾವಣಾ ಪೂರ್ವ ಸಮೀಕ್ಷೆಗಳು ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ.

### ಅಭ್ಯಾಸ A2.3

1. ಕಳೆದ ಐದು ವರ್ಷಗಳ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯು ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ 10ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಬ್ಲಿಕ್ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಮುನ್ಸೂಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

### A2.5 ಸಾರಾಂಶ:

ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿ ಎಂದರೆ ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಗಣಿತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣವೆಂದರೆ, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇದರ ಮೂಲಕ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನ.
2. ಮಾದರೀಕರಣವು ಒಳಗೊಳ್ಳುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳೆಂದರೆ – ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು, ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು, ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು, ನೈಜ ಬದುಕಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲದಕ್ಕಿಂತ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸಿಂಧುಗೊಳಿಸುವುದು.
3. ಕೆಲವು ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದೆವು.
4. ಗಣಿತೀಯ ಮಾದರೀಕರಣದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ.



## ಉತ್ತರಗಳು

### ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. i)  $\sin A = \frac{7}{25}$ ,  $\cos A = \frac{24}{25}$   
ii)  $\sin C = \frac{24}{25}$ ,  $\cos C = \frac{7}{25}$
2. 0
3.  $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$
4.  $\sin A = \frac{15}{17}$ ,  $\sec A = \frac{17}{8}$
5.  $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ,  $\cos \theta = \frac{12}{13}$ ,  $\tan \theta = \frac{5}{12}$ ,  $\cot \theta = \frac{12}{5}$ ,  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$
7. i)  $\frac{49}{64}$  ii)  $\frac{49}{64}$
8. ಹೌದು
9. i) 1 ii) 0
10.  $\sin P = \frac{12}{13}$ ,  $\cos P = \frac{5}{13}$ ,  $\tan P = \frac{12}{5}$
11. i) ತಪ್ಪು ii) ಸರಿ iii) ತಪ್ಪು iv) ತಪ್ಪು v) ತಪ್ಪು

### ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. i) 1 ii) 2 iii)  $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$  iv)  $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{8}$  v)  $\frac{67}{12}$
2. i) A ii) D iii) A iv) C
3.  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 15^\circ$
4. i) ತಪ್ಪು ii) ಸರಿ iii) ತಪ್ಪು iv) ತಪ್ಪು v) ಸರಿ

### ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

$$1. \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \sec A = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$$

$$2. \quad \sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$$3. \quad \text{i) B} \quad \text{ii) C} \quad \text{iii) D} \quad \text{iv) D}$$

### ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

$$1. \quad 10 \text{ m}$$

$$2. \quad 8\sqrt{3} \text{ m}$$

$$3. \quad 3\text{m}, 2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$4. \quad 10\sqrt{3} \text{ m}$$

$$5. \quad 40\sqrt{3} \text{ m}$$

$$6. \quad 19 \sqrt{3} \text{ m}$$

$$7. \quad 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

$$8. \quad 0.8(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

$$9. \quad 16\frac{2}{3} \text{ m}$$

10.  $20\sqrt{3}$  m, 20 m, 60 m
11.  $10\sqrt{3}$  m, 10 m
12.  $7(\sqrt{3} + 1)m$
13.  $75(\sqrt{3} - 1)m$
14.  $58\sqrt{3}$  m
15. 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು.

### ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ಅಪರಿಮಿತ
2. i) ಒಂದು  
ii) ಛೇದಕ  
iii) ಎರಡು  
iv) ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು
3. D

### ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. A
2. B
3. A
6. 3 cm
7. 8 cm
12. AB = 15 cm, AC = 13 cm,

## ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1.  $\frac{132}{7} \text{ cm}^2$

2.  $\frac{77}{8} \text{ cm}^2$

3.  $\frac{154}{3} \text{ cm}^2$

4. i)  $28.5 \text{ cm}^2$

ii)  $235.5 \text{ cm}^2$

5. i)  $22 \text{ cm}$

ii)  $231 \text{ cm}^2$

iii)  $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{ cm}^2$

6.  $20.4375 \text{ cm}^2$  ;  $686.0625 \text{ cm}^2$

7.  $88.44 \text{ cm}^2$

8. i)  $19.625 \text{ cm}^2$  ii)  $58.875 \text{ cm}^2$

9. i)  $285 \text{ mm}$  ii)  $\frac{385}{4} \text{ mm}^2$

10. i)  $\frac{22275}{28} \text{ cm}^2$

11.  $\frac{158125}{126} \text{ cm}^2$

12.  $189.97 \text{ km}^2$

13. ₹ 162.68

14. D

### ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1.  $160 \text{ cm}^2$
2.  $572 \text{ cm}^2$
3.  $214.5 \text{ cm}^2$
4. ಗರಿಷ್ಠ ವ್ಯಾಸ = 7cm, ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =  $332.5 \text{ cm}^2$
5.  $\frac{1}{4} l^2 (\pi + 24)$
6.  $220 \text{ m}^2$
7.  $44 \text{ m}^2$ , ₹ 22,000
8.  $18\text{cm}^2$
9.  $374 \text{ cm}^2$

### ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1.  $\pi \text{ cm}^3$
2.  $66\text{cm}^3$ , ಮಾದರಿ ಒಳಗಡೆ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ = (ಶಂಕು + ಸಿಲಿಂಡರ + ಶಂಕು)  
ಇವುಗಳ ಒಳಗಿನ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ =  $[\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_1]$   
ಇಲ್ಲಿ  $r$  = ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು  $h_1$  = ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು  
 $h_2$  = ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರ  
ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘನಫಲ =  $\frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$
3.  $338 \text{ cm}^3$
4.  $523.53 \text{ cm}^3$
5. 100
6.  $892.26 \text{ kg}$
7.  $1.131 \text{ m}^3$  (ಸರಿಸುಮಾರು)
8. ಸರಿ ಅಲ್ಲ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವು  $346.51 \text{ cm}^3$

### ಅಭ್ಯಾಸ 13.1

1. 8.1 ಗಿಡಗಳು, ನಾವು ನೇರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ ಏಕೆಂದರೆ  $x_1$  ಮತ್ತು  $f_1$  ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿವೆ.
2. ₹ 540.20
3.  $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. ₹ 211
7. 0.099ppm
8. 12.48 ದಿನಗಳು
9. 69.43%

### ಅಭ್ಯಾಸ 13.2

1. ಬಹುಲಕ = 36.8 ವರ್ಷಗಳು, ಸರಾಸರಿ = 35.37 ವರ್ಷಗಳು. 36.8 ವರ್ಷ (ಸರಿಸುಮಾರು) ವಯಸ್ಸಿನ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೋಗಿಗಳು ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾಗಿದ್ದರು. ಹಾಗೆಯೇ ಆಸ್ಪತ್ರೆಗೆ ದಾಖಲಾದ ರೋಗಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವಯಸ್ಸು 35.37 ವರ್ಷಗಳು.
2. 65.625 ಗಂಟೆಗಳು
3. ಮಾಸಿಕ ಖರ್ಚಿನ ಬಹುಲಕ = ₹ 1847.83. ಮಾಸಿಕ ಖರ್ಚಿನ ಸರಾಸರಿ = ₹ 2662.5
4. ಬಹುಲಕ = 30.6, ಸರಾಸರಿ = 29.2 ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರಾಜ್ಯಗಳು / ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳು 30.6 ರಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಶಿಕ್ಷಕ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಈ ಅನುಪಾತದ ಸರಾಸರಿಯು 29.2 ಆಗಿದೆ.
5. ಬಹುಲಕ = 4608.7 ರನ್‌ಗಳು
6. ಬಹುಲಕ = 44.7 ಕಾರುಗಳು

### ಅಭ್ಯಾಸ 13.3

1. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 137 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಸರಾಸರಿ = 137.05 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಬಹುಲಕ = 135.76 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.
2.  $x = 8$ ,  $y = 7$
3. ವರ್ಷದ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 35.76 ವರ್ಷಗಳು
4. ಉದ್ದದ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 146.75mm
5. ಬಾಳಿಕೆಯ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 3406.98 ಗಂಟೆಗಳು

6. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 8.05, ಸರಾಸರಿ = 8.32, ಬಹುಲಕ = 7.88

7. ತೂಕದ ಮಧ್ಯಾಂಕ = 56.67 kg

### ಅಭ್ಯಾಸ 14.1

1. i) 1 ii) 0, ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ (ಅಸಾಧ್ಯ ಘಟನೆ)

iii) 1, ಖಚಿತ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ iv) 1 v) 0, 1

2. (iii) ಮತ್ತು (iv) ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

3. ನಾವು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಶಿರವನ್ನು ಮತ್ತು ಪುಚ್ಚವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ನಾಣ್ಯದ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯ ಫಲಿತಾಂಶವು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಊಹಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದುದಾಗಿದೆ.

4. B 5. 0.95

6. i) 0 ii) 1 7. 0.008

8. i)  $\frac{3}{8}$  ii)  $\frac{5}{8}$

9. i)  $\frac{5}{17}$  ii)  $\frac{8}{17}$  iii)  $\frac{13}{17}$

10. i)  $\frac{5}{9}$  ii)  $\frac{17}{18}$

11.  $\frac{5}{13}$

12. i)  $\frac{1}{8}$  ii)  $\frac{1}{2}$  iii)  $\frac{3}{4}$  iv) 1

13. i)  $\frac{1}{2}$  ii)  $\frac{1}{2}$  iii)  $\frac{1}{2}$

14. i)  $\frac{1}{26}$  ii)  $\frac{3}{13}$  iii)  $\frac{3}{26}$  iv)  $\frac{1}{52}$  v)  $\frac{1}{4}$  vi)  $\frac{1}{52}$

15. i)  $\frac{1}{5}$  ii) a)  $\frac{1}{4}$  b) 0

16.  $\frac{11}{12}$  17. i)  $\frac{1}{5}$  ii)  $\frac{15}{19}$

18. i)  $\frac{9}{10}$  ii)  $\frac{1}{10}$  iii)  $\frac{1}{5}$

19. i)  $\frac{1}{3}$  ii)  $\frac{1}{6}$

20.  $\frac{\pi}{24}$

21. i)  $\frac{31}{36}$  ii)  $\frac{5}{36}$

22. i)

| 2 ದಾಳಗಳಲ್ಲಿನ<br>ಮೊತ್ತ | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| ಸಂಭವನೀಯತೆ             | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

ii) ಇಲ್ಲ. 11 ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯವುಗಳಲ್ಲ.

23.  $\frac{3}{4}$ ; ಸಾಧ್ಯ ಫಲಿತಗಳು: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT THH THT, TTH ಇಲ್ಲಿ, THH ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪುಚ್ಚ, 2ನೇ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು 3 ನೇ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

24. i)  $\frac{25}{36}$  ii)  $\frac{11}{36}$

25. i) ತಪ್ಪಾಗಿದೆ. ನಾವು ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ ಆದರೆ ಅವು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಗಳಲ್ಲ. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎಂಬುದು 2 ರೀತಿಯ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೀಡಬಹುದು - ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮತ್ತು 2ನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಪುಚ್ಚ ಅಥವಾ ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಪುಚ್ಚ ಮತ್ತು 2ನೇ ನಾಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಶಿರಗಳು (ಅಥವಾ ಎರಡು ಪುಚ್ಚಗಳು) ಎಂದು ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

ii) ಸರಿಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದ ಎರಡು ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯದಾಗಿವೆ.

### ಅಭ್ಯಾಸ A2.2

1. (i)  $\frac{1}{5}$  (ii) 160

2.  $1\text{cm}^2$  ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿರಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ( $\text{cm}^2$ ಗಳಲ್ಲಿ) ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ಮರಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಕಂತಿನ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು 17.74%, ಇದು 18% ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ.

### ಅಭ್ಯಾಸ A2.3

1. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮದೇ ಆದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ.