कर्नाटक सरकार

# गणित प्रकाश

7

## इयत्ता सातवी

## मराठी माध्यम

## भाग – 2

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRANING

**Karnataka Textbook Society (R.)**
**6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003.**

# अनुक्रमणिका

## भाग – 2

R1V8H9


| प्रकरण | घटक | पृष्ठ क्रमांक |
|---|---|---|
| 1 | भौमितिक जुळे (एकरुपता)<br>**Geometric Twins** | **1-25** |
| 2 | पूर्णांकांवरील क्रिया<br>**Operations with Integers** | **26-50** |
| 3 | सामायिक आधार शोधणे<br>**Finding Common Ground** | **51-72** |
| 4 | बिंदूच्या पलीकडे आणखी एक नजर<br>**Another Peek Beyond the Point** | **73-105** |
| 5 | बिंदूची जोडणी<br>**Connecting the Dots** | **106-148** |
| 6 | रचना आणि फरशी जोडणी<br>**Construction and Tilings** | **149-177** |
| 7 | अज्ञाताचा शोध<br>**Finding the Unknown** | **178-204** |
| | अध्ययन साहित्य पत्रके<br>**Learning Material Sheets** | **205-214** |

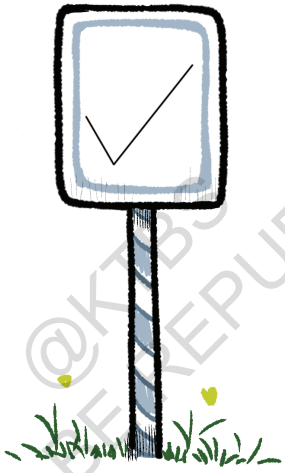

© KBS NOT TO BE REPUBLISHED

# 1 भौमितिक जुळे (एकरुपता)
# (GEOMETRIC TWINS)

M5U4W4

## 1.1 भौमितिक जुळे

या सूचना फलकावरील (Signboard) चिन्ह दुसऱ्या फलकावर पुन्हा तयार करायचे आहे.



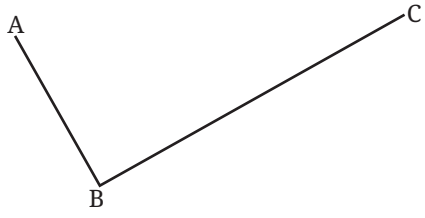
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

### ? आपण ते कसे करू शकतो?

एक मार्ग आहे तो म्हणजे हे चिन्ह एका अनुरेखन कागदावर गिरवून ती आकृती पुन्हा रचणे परंतु मोठ्या चिन्हांसाठी हे कठिण काम आहे. यासाठी आपण दुसरे काय करु शकतो?

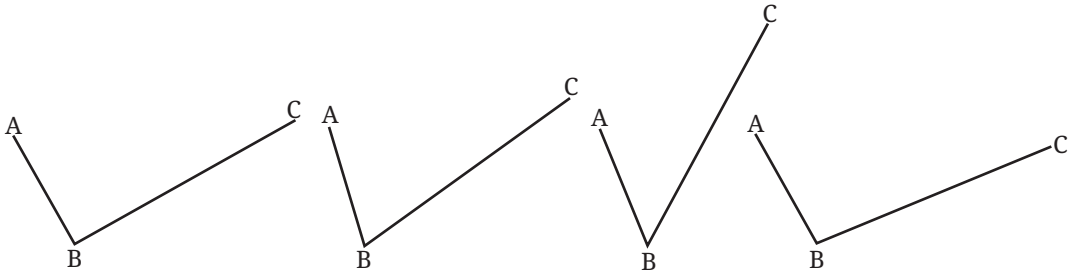
? आपण अशी कांही मोजमापे घेऊ शकतो का, की ज्यामुळे आपणास ही आकृती तंतोतंत आहे तशीच पुन्हा तयार करता येईल? असे करायचे असल्यास आपण कोणती मोजमापे घेऊ शकतो?

चला, तर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे या चिन्हाच्या कोपऱ्यातील बिंदूना A, B, C ही नांवे देऊया.



? ही आकृती तंतोतंतपणे पुन्हा काढण्यासाठी AB आणि BC या बाजूंची लांबी पुरेशी आहे का?

समजा की ही लांबी AB = 4 सें.मी., BC = 8 सें.मी. आहे आपण निरीक्षण केले असेलच की, या सारख्याच लांबीची अशी अनेक चिन्हांची रचना केली जाऊ शकते.

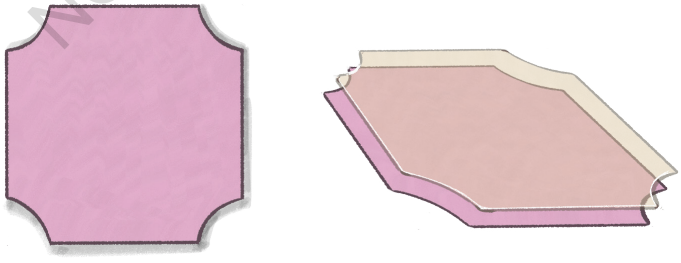



? अशा तंतोतंत प्रतिकृतीची रचना करण्यासाठी, इतर कोणतीही मोजमापे घेतल्याने कांही मदत होऊ शकेल का?

या आकृतीचा आकार आणि स्वरुप निश्चित करण्यासाठी ∠ABC आणि आणि बाजूंची लांबी AB आणि BC यांची मापे आवश्यक आहेत.

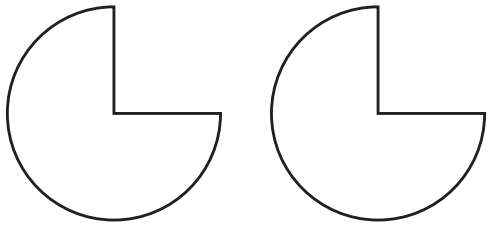
? जर AB = 4 सें.मी., BC = 8 सें.मी, आणि ∠ABC = 80° हे माहित असेल तर आपण ते चिन्ह रचू शकतो का?

ही तीन मोजमापे आपल्याला सुचना फलकावरील चिन्हाची तंतोतंत प्रतिकृती तयार करण्यास मदत करु शकतात. ज्या आकृत्या एकमेकाशी तंतोतंत जुळतात किंवा त्याचा आकार आणि स्वरुप (आकारमान) सारखेच असते त्यांना **एकरुप** (congruent) आकृत्या असे म्हणतात. एकरुप आकृत्या एकमेकावर तंतोतंत जुळतात (superimposed)

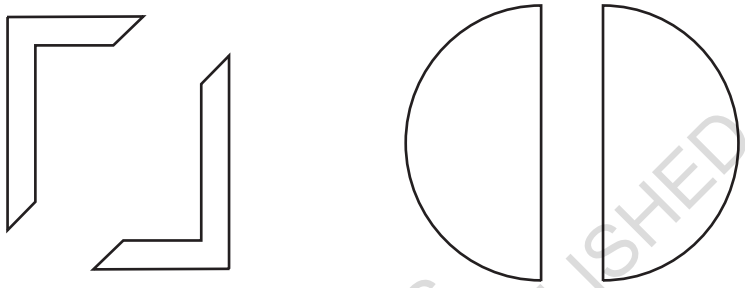


दोन एकरुप आकृत्या खालीलप्रमाणे दाखविलेल्या आहेत. तुम्ही अनुरेखन कागदाचा वापर करुन पहिली आकृती गिरवून काढू शकता आणि ती दुसऱ्या आकृतीवर ठेवू शकता तुम्हाला असे दिसून येईल की त्या दोन आकृत्या एकमेकाला तंतोतंत जुळतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



लक्षात घ्या की एकरुपता तपासत असताना, एका आकृतीला दुसऱ्या आकृतीवर ठेवण्यापूर्वी ती फिरवीली किंवा उलट केली जाऊ शकते. त्यामुळे खालील आकृत्यांच्या जोड्या सुध्दा एकमेकाशी एकरुप आहेत.



चला, तर आपण यापूर्वी पाहिलेल्या सूचना फलकावरील चिन्हाकडे जाऊया. समजा की तेथे अशी दोन चिन्हे आहेत जी सारखीच दिसतात आणि ती एकरूप आहेत की नाहीत हे आपल्याला तपासायचे आहे. त्यांची मापे वापरुन आपण ते पडताळून पाहू शकतो का?

©KRPS NOT TO BE REPUBLISHED

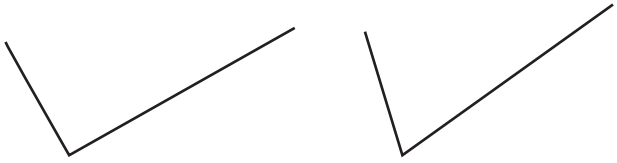
? जर दोन्ही चिन्हांच्या बाजूंची लांबी सारखीच असेल तर ती दोन्ही चिन्हे एकरुप आहेत असा निष्कर्ष आपल्याला काढता येईल का?

आपण पाहिले आहे की दिलेल्या बाजूच्या लांबीसाठी त्यामधील कोन भिन्न असेल तर त्या आकृत्या एकरुप नसतात कोन निश्चित केल्याने आकृतीचा आकार आणि स्वरूप (आकारमान) निश्चित होते.

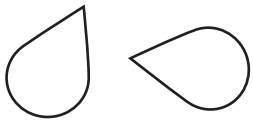
म्हणून जर दोन्ही चिन्हामधील बाजूंची लांबी समान आणि कोन ही समान असेल तर त्या आकृत्या एकरूप आहेत याची आपण खात्री देऊ शकतो.

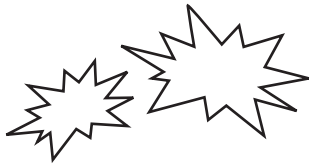
## ? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. या दोन आकृत्या एकरूप आहेत का ते तपासा.



2. एकरुप दिसणाऱ्या जोडयांभोवती वर्तुळ काढा.






3. दिलेल्या आकृतीशी एकरूप आकृती तयार करण्यासाठी तुम्ही कोणती मोजमापे घ्याल.

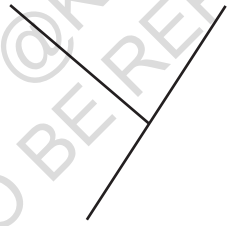
(a) वर्तुळ (b) आयत

यांचा वापर करुना तुम्ही दोन—

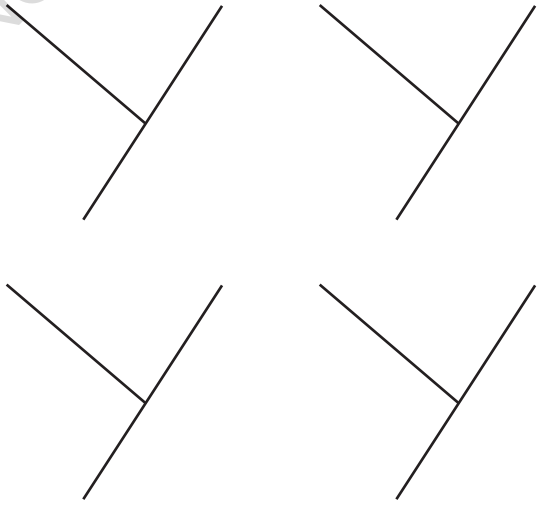
(a) वर्तुळे एकरूप आहेत का?

(b) आयत एकरूप आहेत का? हे कसे तपासून पहाल.

4. खालील आकृत्यांसारख्या दोन आकृत्या एकरुप आहेत का ते आम्ही कसे तपासून पाहू शकतो?



खालील प्रत्येक जोड्या एकरुप आहेत की नाहीत ते ओळखण्यासाठी याचा उपयोग कसा कराल.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 1.2 त्रिकोणांची एकरुपता (Congruence of Triangles)

मीरा आणि राबीया यांना शाळेत असलेल्या त्रिकोणी रचनेसारखीच कार्डबोर्डची रचना करण्यास सांगितली आहे. त्यांना असे दिसून आले की ही रचना फारच मोठी असल्याने कागदावर ट्रेस करता येत नाही.



? ते काय करु शकतील असे तुम्हाला वाटते?

### बाजूंची लांबी मोजणे (Measuring the Side lengths)

याकरिता आपण त्रिकोणाची कांही मापे वापरु शकतो का? मोजण्याच्या टेपचा वापर करुन मुली त्रिकोणाची मापे 40 सें.मी, 60 सें.मी. आणि 80 सें.मी. आहेत असे मोजतात.

त्यानंतर राबिया ही ते कोन मोजण्यासाठी कोनमापक घेते पण मीरा ही तिला थांबविते.

**मीरा**: येथे त्रिकोणाचे कोन आवश्यक नाहीत! आपण मोजलेल्या बाजूंची लांबी वापरुन, आपण याच्याशी एकरुप त्रिकोण तयार करू शकतो.

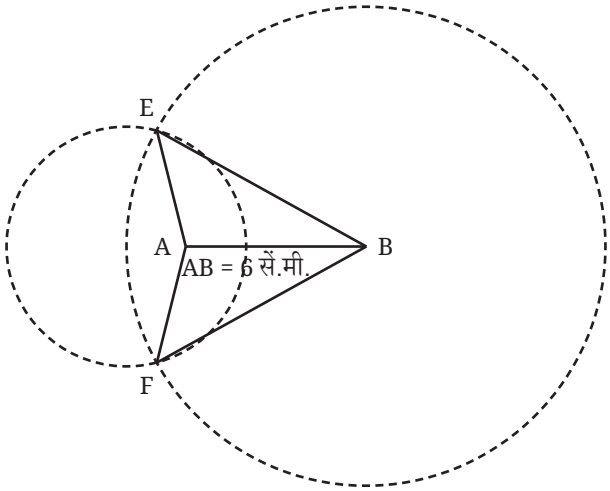
? तुम्ही मीराशी सहमत आहात का?

? त्याच्या बाजू 40 सें.मी., 60 सें.मी. आणि 80 सें.मी. ऐवजी समजा की त्या बाजूंची लांबी 4 सें.मी., 6 सें.मी. आणि 8 सें.मी. आहे (हा त्रिकोण तुमच्या पानावर बसू शकेल का?)

? ही माहिती सारख्याच आकाराचा आणि स्वरुपाचा त्रिकोण रचण्यासाठी पुरेशी आहे का? जर होय असेल तर तुम्ही तो रचू शकाल का?

**राबिया**: जर मी हा त्रिकोण रचला तर मी दिलेल्या बाजूपैकी एका बाजूची लांबी 6 सें. मी घेऊन एक रेषाखंड काढेन आणि नंतर त्याच्या प्रत्येकी शेवटच्या बिंदुतून 4 सें. मी. आणि 8 सें.मी. त्रिज्येची वर्तुळे काढेन. परंतु ही वर्तुळे दोन बिंदुत छेदतील. त्यामुळे $\Delta$ ABE आणि $\Delta$ABF हे दोन त्रिकोण तयार होतात.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




**राबिया:** या दोन्ही त्रिकोणांचा आकार आणि आकारमान सारखेच असेल का? जर नसेल, तर आपण ज्यामुळे त्रिकोणाची रचना करण्याचा प्रयत्न करत आहोत त्याच्याशी यापैकी कोणता त्रिकोण अगदी एकरुप असेल याची आम्हाला खात्री असणार नाही.

? $\Delta$ ABE आणि $\Delta$ ABF हे एकरुप आहेत का याचे परीक्षण करा.

याकरिता तुम्ही खालीलपैकी एक पद्धत वापरु शकता - अनुरेखन आणि तुलना करुन, तो कापून घेऊन आणि एकमेकावर ठेवून, तंतोतंत जुळवा किंवा AB ला सममिती अक्ष समजून त्यावर दुमडून त्रिकोणांची इतर दोन टोकं तंतोतंत जुळतात का याचे निरीक्षण करावे.

आपल्याला $\Delta$ABE आणि $\Delta$ABF हे एकरुप असल्याचे दिसून येतात या सर्वसामान्य रचनेवरुन समान बाजूंची लांबी असणारे त्रिकोण एकरुप असल्याचे दिसून येते. म्हणून मीरा म्हणाली की एकरूप त्रिकोण तयार करण्यासाठी बाजूंची लांबी पुरेशी आहे ते बरोबर आहे.

त्यामुळे आपल्याला खालील निष्कर्ष मिळतो,

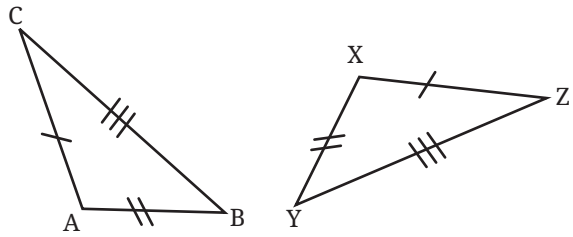
जर दोन त्रिकोणांच्या संगत बाजूंची लांबी समान असेल तर ते त्रिकोण एकरुप असतात यालाच एकरुपतेची बा.बा.बा. (बाजू-बाजू-बाजू) (SSS) कसोटी म्हणतात.

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## एकरुपता व्यक्त करण्याच्या पध्दती (Conventions to Express Congruence)

खालीलप्रमाणे दिलेले दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. हे दोन त्रिकोण आपण एकमेकावर (अध्यारोपण) कसे ठेऊ शकतो. $\Delta$ABC आणि $\Delta$XYZ चे कोणते शिरोबिंदू आपण एकमेकावर ठेऊ शकतो?

? हे आपण संगत बाजू एकमेकांवर तंतोतंत येतील असे ठेऊ शकतो, कसे ते शोधा.




शिरोबिंदू X वर शिरोबिंदू A ठेवा, शिरोबिंदू Y वर शिरोबिंदु B आणि शिरोबिंदू Z वर शिरोबिंदू C जुळवा, सर्व बाजू समान असून ततोतंत जुळतात याची खात्री करा. त्रिकोण एकमेकावर तंतोतंत जुळतील.

? त्रिकोण एकमेकाशी तंतोतंत जुळतील असे शिरोबिंदू ठेवण्याची आणखी एखादी पध्दत आहे का?

प्रत्यक्षात त्रिकोण एकरुप आहेत यावरुन संबंधीत कोन समान असल्याचे दिसून येते.

$$\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y \text{ आणि } \angle C = \angle Z$$

म्हणून, जर दोन त्रिकोण एकरुप असतील तर त्याचे संगत शिरोबिंदू, बाजू आणि कोन बरोबर एकमेकांवर येतात जेव्हा त्यांचे कोन एकमेकाला तंतोतंत जुळतात. या घटनेमध्ये, ते

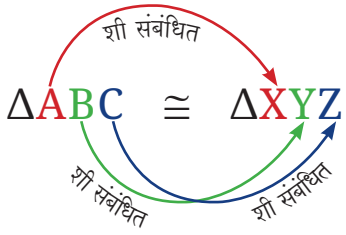
(a) संगत शिरोबिंदू : A आणि X, B आणि Y, C आणि Z

(b) संगत बाजू : AB आणि XY, BC आणि YZ, AC आणि XZ

(c) संगत कोन: $\angle A$ आणि $\angle X$, $\angle B$ आणि $\angle Y$, $\angle C$ आणि $\angle Z$

दोन त्रिकोण एकरूप असतात हा मिळालेला संबंध समजून घेण्यासाठी, त्यांची समरूपता खालीलप्रमाणे दर्शवितात.

$$\Delta ABC \cong \Delta XYZ$$




असे लिहून, आपण त्याचा अर्थ असा करु की,

- $\Delta$ ABC मधील पहिल्या शिरोबिंदूचे नाव हे $\Delta$XYZ मधील पहिल्या शिरोबिंदूच्या नावाशी संगत आहे.
- $\Delta$ ABC मधील दुसऱ्या शिरोबिंदूचे नाव हे $\Delta$XYZ मधील दुसऱ्या शिरोबिंदूच्या नावाशी संगत आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

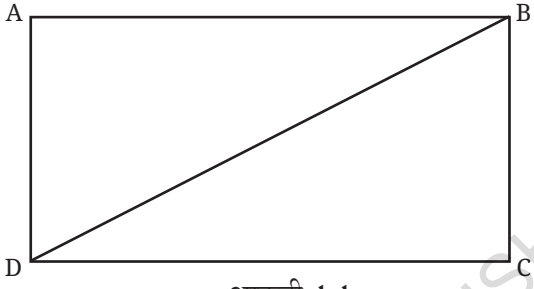
- याचप्रकारे Δ ABC आणि Δ XYZ च्या तिसऱ्या शिरोबिंदूच्या नावाशी संगत आहेत या नियमानुसार, दोन त्रिकोणासाठी पुढीले प्रमाणे लिहीणे चुकीचे आहे.

$$\Delta ACB \cong \Delta XYZ.$$

तरीपण, आणखी एक अचूकपणे लिहीण्याची पध्दत आहे.

$$\Delta ACB \cong \Delta XZY.$$

? खालीलप्रमाणे दिलेल्या आकृतीमधील एकरुप त्रिकोणांची जोडी ओळखू शकाल का? ते का एकरूप आहेत याचे स्पष्टीकरण करा.




आकृती 1.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ΔABD आणि ΔCDB चा विचार करा जर, ज्याअर्थी ABCD हा आयत असेल तर, आपल्याकडे आहेत,

$$AB = CD$$
$$AD = CB$$

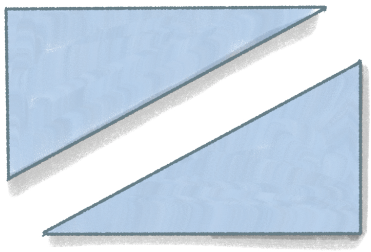
जर Δ ABD आणि ΔCDB च्या राहिलेल्या बाजूंची लांबी सारखीच असेल तर येथे SSS (बा.बा.बा) कसोटीची पूर्तता होते. जी दोन त्रिकोणाच्या एकरुपतेची पुष्टी करते. हे खरे आहे का?

राहिलेल्या बाजूमध्ये BD ही समायिक बाजू आहे. त्यामुळे बा.बा.बा. (SSS) कसोटी लागू होते, म्हणून ते त्रिकोण एकरुप आहेत.

आपल्याला दोन त्रिकोणाच्या संगत बाजू माहित आहेत. आपल्याला संगत शिरोबिंदू ओळखायचे आहेत. ते खालीलप्रमाणे असू शकतात का?

| ΔABD | ΔCDB |
|---|---|
| A | C |
| B | B |
| D | D |

? आयत ABCD पासून कापून घेतलेले त्रिकोण (आकृती 1.1) एकमेकांवर ठेवून ते जुळतात का ते तपासा.

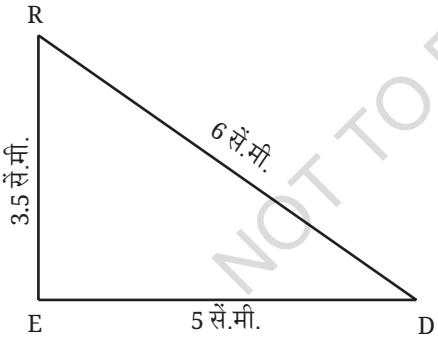


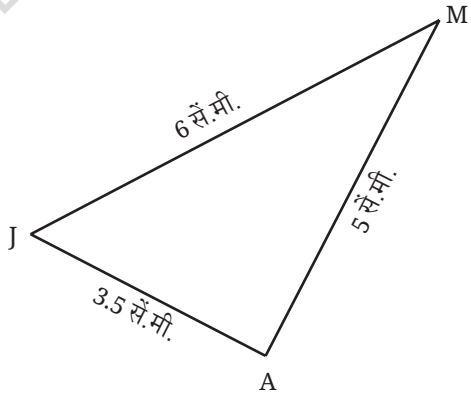
आपण असे सांगू शकतो की, ΔABD ची बाजू AB ही Δ CDB ची बाजू BC शी संगत आहे. परंतु या बाजू समान असण्याची गरज नाही आणि म्हणून हे एकमेकांवर ठेवले तर एकरुपता स्थापित करत नाही.

? बरोबर संगत शिरोबिंदू ओळखा आणि दोन त्रिकोणामधील एकरुपता व्यक्त करा.

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. ΔHEN हा ΔBIG शी एकरुप आहेत असे समजा. एकरुपता व्यक्त करण्याच्या सर्व इतर पद्धती लिहा.
2. त्रिकोण एकरुप आहेत का ते शोधा. जर होय असेल तर एकरुपता व्यक्त करा.



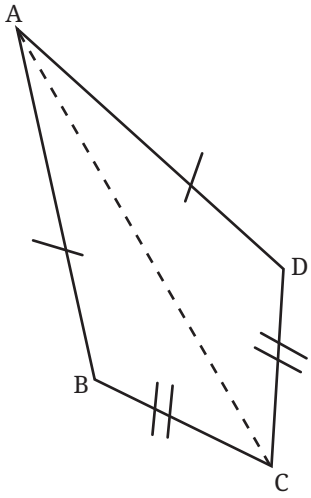




3. खालील आकृतीमध्ये AB=AD, CB=CD

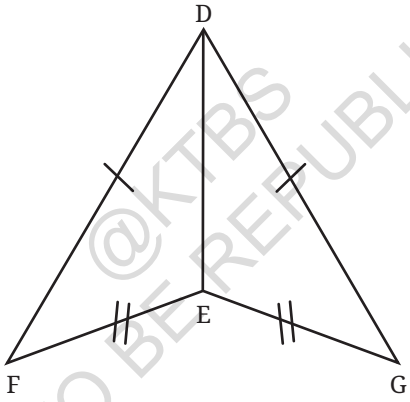
एकरुप त्रिकोणाची कोणतीही जोडी तुम्ही ओळखू शकाल का? जर होय असेल तर ते का एकरुप आहेत याचे स्पष्टीकरण करा.

AC या रेषाखंडामुळे ∠BAD आणि ∠BCD हे कोन समान दोन भागात विभागले जातात का? कारण लिहा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




4. खालील आकृतीमध्ये DF = DG आणि FE=GE हे दिलेले आहे. तर ΔDFE आणि ΔGED हे एकरुप आहेत का?



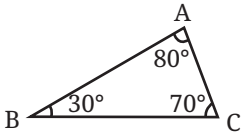

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

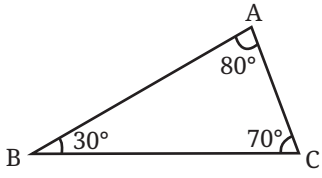
## कोन मोजणे (Measuring the Angles)

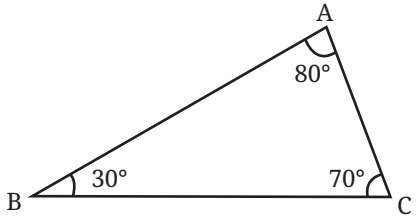
त्रिकोणाकृती रचनेच्या तीन बाजू मोजण्या ऐवजी, जर मीरा आणि राबिया यांनी तीन कोन मोजले तर त्या अगदी बरोबर त्रिकोणाची रचना करु शकतील का?

? ते कोन $30^0$, $70^0$ आणि $80^0$ घेवून आम्ही त्यांची प्रतिकृती असलेली रचना करु शकतो का?

तुम्ही पाहू शकाल की या मापांच्या अनेक त्रिकोणांची रचना करु शकाल जे एकरुप नाहीत.



या त्रिकोणांचे स्वरुप समान आहे परंतु त्यांचे आकार समान नाही म्हणून दोन त्रिकोणांच्या कोनांच्या सटाची मापे समान असतील तर ते एकरुप असतीलच असे नाही.

## दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन मोजणे (Measuring Two Sides and the Included Angle)

? $\Delta ABC$ आणि $\Delta XYZ$ हे दोन त्रिकोण असे आहेत की,

$AB = XY = 6$ सें. मी., $AC = XZ = 5$ सें मी. आणि $\angle A = \angle X = 30^0$ तर ते एकरुप आहेत का ?

हे तपासून पाहण्यासाठी आपल्याला दिलेल्या मापांचा एकरूप नसलेला त्रिकोण अस्तित्वात आहे का ते पहावे लागेल?

ही मापे दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन या घटनेशी संबंधित आहेत. या दिलेल्या मापाच्या त्रिकोणांची रचना कशी केली जाते हे आपण पाहिलेले आहे.

? वरील मापे असलेल्या त्रिकोणाची रचना करा.

तुमच्या वर्गमित्रांनी रचलेल्या त्रिकोणाच्या रचनेशी तुलना करा ते सर्व त्रिकोण एकरुप आहेत का? या मापाचे सर्व त्रिकोण एकरुप का आहेत याचे स्पष्टीकरण करा

म्हणून, जेव्हा दोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

याला एकरुपतेची बा.को.बा. (SAS) (बाजू-कोन-बाजू) (Side-Angle-side). कसोटी असे म्हणतात.

## दोन बाजू आणि समाविष्ट नसलेला कोन मोजणे (Measuring Two Sides and a Non-included Angle)

जर दोन बाजू आणि समाविष्ट नसलेला कोन समान असलील तर काय?

? $\Delta ABC$ आणि $\Delta XYZ$ हे दोन त्रिकोण असे आहेत की,

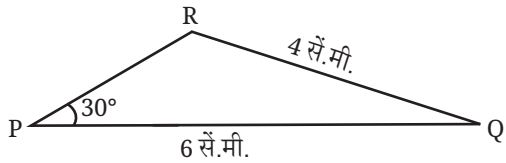
$AB = XY = 6$ सें.मी. $AC = XZ = 4$ सें.मी. आणि $\angle B = \angle Y = 30°$

असेल तर ते त्रिकोण एकरुप आहेत का?

? ही मापे असलेले एकरुप नसलेले त्रिकोण अस्तित्वात आहेत का? रचना करा आणि शोध घ्या.

कच्च्या आकृतीकडे पाहून रचनेची योजना करण्यास मदत होते.

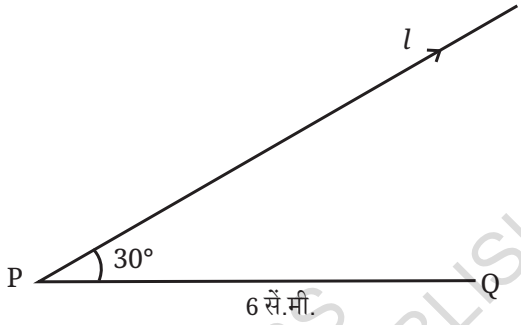
© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED



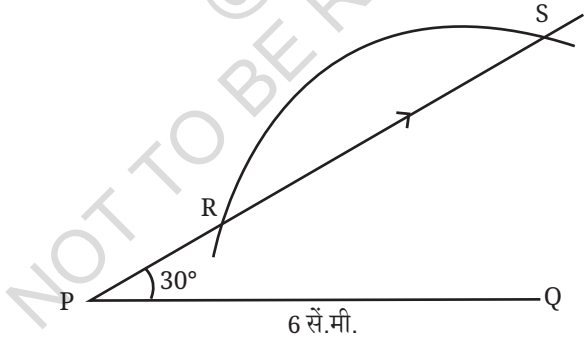

एखाद्याला ही मापे वापरुन कशी रचना करता येते का?

**पायरी 1**:- PQ हा 6 सें. मी. लांबीचा पाया काढा.

**पायरी 2**: PQशी $30^0$ चा कोन करणारी P बिंदूतून $l$ ही रेषा काढा.




**पायरी 3**: Q या बिंदूतून 4 सें. मी. त्रिज्येचा $l$ रेषेला छेदणारा कंस काढा.

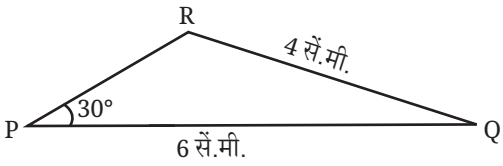


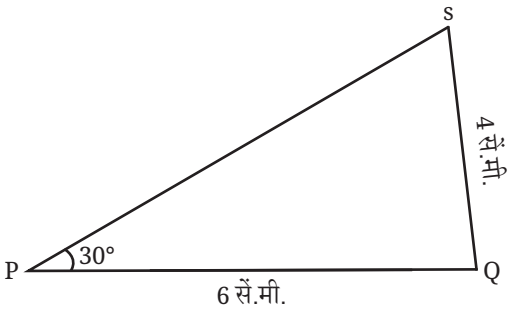

@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आपल्याला हवा असलेला त्रिकोण या आकृतीमधून कसा शोधता येईल ?.

$l$ रेषेवरील कंसाने छेदलेला बिंदू हा त्रिकोणाचा आवश्यक असलेला तिसरा बिंदू आहे परंतु आपण पाहू शकतो की कंस हा $l$ या रेषेला R आणि S या दोन वेगवेगळ्या बिंदूत छेदतो.

$\Delta PQR$ आणि $\Delta PQS$ हे दोन्ही त्रिकोण दिलेल्या मापांची पूर्तता करतात.




त्यामुळे आपण दिलेल्या मापांच्या दोन एकरुप त्रिकोणांची रचना करु शकतो.

ही बा.बा.को. (SSA) बाजू-बाजू-कोन (Side-Side-Angle) कसोटी म्हणतात. आपण पाहिले आहे की, बा.बा.को. (SSA) कसोटी ही एकरुपतेची खात्री देत नाही. आपण एकरुपता शोधत असताना दोन बाजू आणि एक कोन या घटनेचे परीक्षण केलेले आहे. आपण दोन कोन आणि एक बाजू वापरु शकतो का?.

प्रथम आपण दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू ही घटना घेऊया.

## दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू (Two Angles and the Included Side)

? $\Delta ABC$ आणि $\Delta XYZ$ हे दोन त्रिकोण असे आहेत की,

$$BC = YZ = 5 \text{ सें.मी.}, \angle B = \angle Y = 50° \text{ आणि } \angle C = \angle Z = 30°$$

असेल तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत का?

? ही मापे असलेले एकरूप नसलेले त्रिकोण अस्तित्वात आहेत का? रचना करा आणि शोधा पाहू.

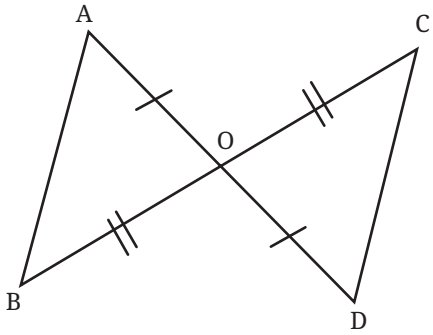
जेव्हा आपल्याला दोन कोन आणि एक बाजू दिली असता त्या त्रिकोणाची रचना कशी केली जाते ते आपण पाहिले आहे.

ही रचना हे स्पष्ट करते की, ही मापे असलेले सर्व त्रिकोण एकमेकाला एकरुप असतात. म्हणून $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

या अटीला एकरूपतेची को.बा.को. (ASA) कसोटी असे म्हणतात.

? आकृतीमध्ये, बिंदू O हा AD आणि BC चा मध्यबिंदू आहे. तर AB आणि CD च्या लांबीविषयी आपण काय सांगू शकतो?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




आपल्याकडे आहेत,

AO = OD (O हा AD चा मध्यबिंदू आहे)

BO = OC (O हा BC चा मध्यबिंदू आहे.)

? तेथे आणखी काही बाजू किंवा कोन समान आहेत का?

आपल्याकडे हे सुध्दा आहे की,

∠AOB = ∠DOC हे शिरोविरुध्द कोन आहेत.

आपण पाहू शकतो की, बा.को.बा. (दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन) (SAS) या कसोटीचे समाधान होते आणि त्यामुळे आपण असा निष्कर्ष काढतो की, हे त्रिकोण एकरूप आहेत.

@KBS NOT TO BE REPUBLISHED

## संगत शिरोबिंदूविषयी काय? (What are the Corresponding Vertices?)

आपल्याला AO आणि OD हे एकमेकावर आणि BO आणि CD हे एकमेकावर जुळलेले असणे गरजेचे आहे म्हणजे ते त्रिकोण अगदी एकमेकावर जुळतात. ΔAOB आणि ΔDOC चे संगत शिरोबिंदू A आणि D, O आणि O (शिरोबिंदू दोन्ही त्रिकोणाला समाईक) आणि B व C म्हणून

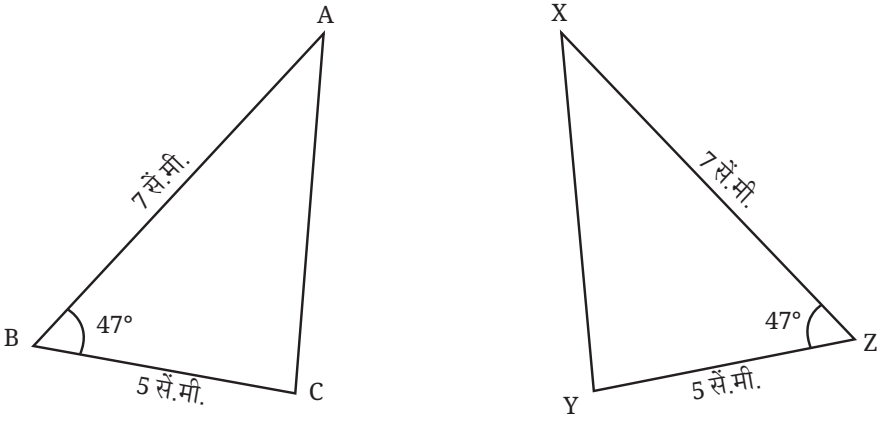
$$\Delta AOB \cong \Delta DOC$$

AB आणि CD या संगत बाजू आहेत कारण जेव्हा त्रिकोण एकमेकावर ठेवले असता तंतोतंत जुळतात. म्हणजेच त्या बाजू लांबीने समान आहेत.

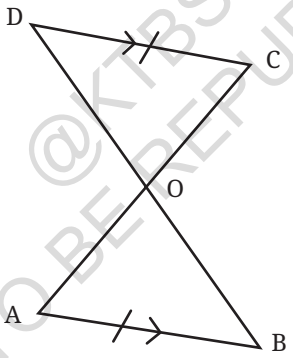
## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील त्रिकोण एकरुप आहेत का ते ओळखा. ते एकरूप होण्यासाठी कोणत्या कसोट्या

वापरून एकरुपता सिद्ध करता येते? एकरुपता स्पष्ट करा.

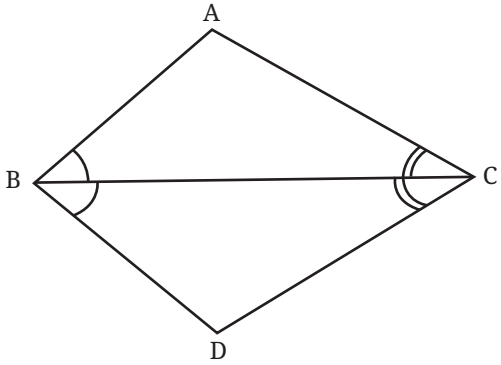



2. CD आणि AB हे समांतर आहेत आणि AB=CD तर आकृतीमधील इतर कोणते भाग एकमेकांशी समान आहेत. (सुचना: जेव्हा रेषा समांतर असतात तेव्हा व्युत्क्रम कोन समान असतात. तेव्हा तयार होणारे त्रिकोण एकरूप असतात का? जर असतील तर त्यांची एकरुपता स्पष्ट करा.)

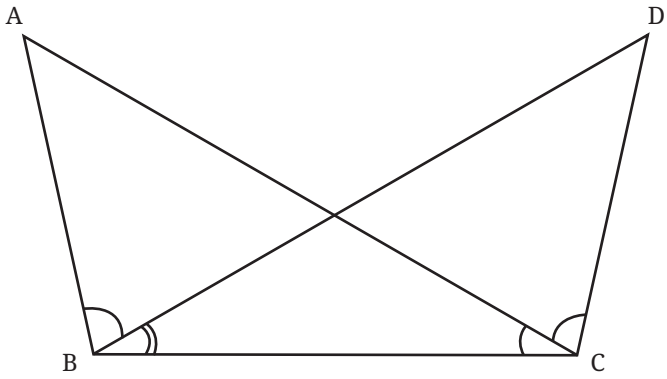



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. जर ∠ABC = ∠DBC आणि ∠ACB = ∠DCB हे दिलेले आहेत तर ∠BAC = ∠BDC आहेत हे दाखवा ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत का?



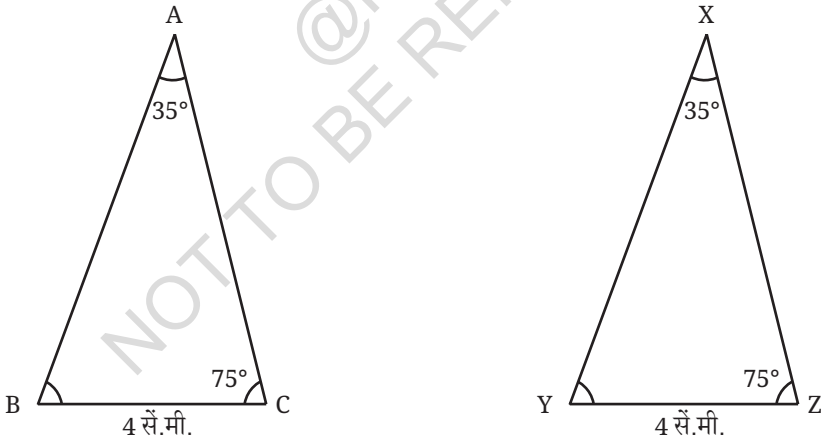
4. खालील आकृतीमधील समान भाग ओळखा. हे दिलेले आहेत की $\angle ABD = \angle DCA$ आणि $\angle ACB = \angle DBC$




## दोन कोन आणि समाविष्ट नसलेली बाजू मोजणे. (Measuring Two Angles and a Non-Included Side)

? खालील प्रमाणे दिलेले $\Delta ABC$ आणि $\Delta XYZ$ यामध्ये, $\angle A = \angle X = 35^0$, $\angle C = \angle Z = 75^0$ आणि $BC=YZ = 4$ सें.मी. आहेत. ते त्रिकोण एकरूप आहेत का? कारण लिहा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




आकृती 1.2

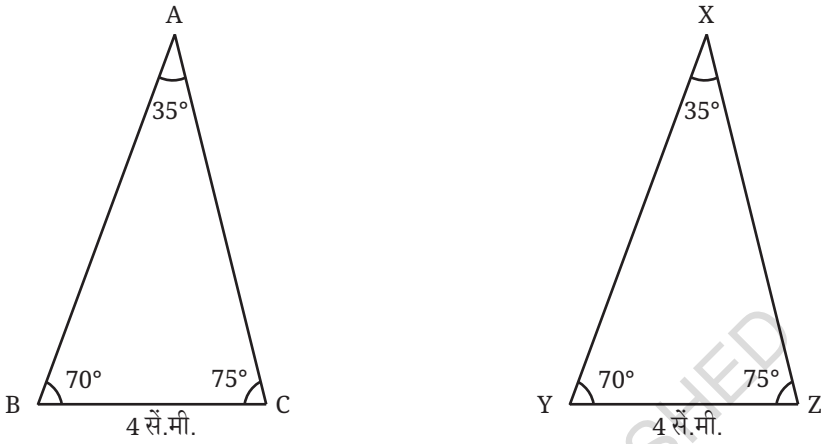
तुम्ही ही समस्या सोडविण्याची सुरुवात कशी कराल? त्यासाठी ही एक पध्दत आहे.

? $\angle B$ आणि $\angle Y$ ची मापे कोणती आहेत?

आपल्याला माहित आहे की, त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज $180^0$ असते.
म्हणून $\angle B + 35° + 75° = 180°$
किंवा $\angle B + 110° = 180°$

म्हणून $\angle B = 70°$
याचप्रमाणे $\angle Y$ हा सुध्दा $70°$ आहे.
म्हणून $\angle B = \angle Y$ मिळतो.

? $\Delta ABC$ आणि $\Delta XYZ$ हे एकरुप आहेत हे दाखविण्यास हे मदत करते का ?




हे दोन त्रिकोण ASA (को.बा.को.) कसोटी पूर्ण करतात.

$$\angle B = \angle Y$$
$$BC = YZ$$
$$\angle C = \angle Z$$
म्हणून, $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

आकृती 1.2 मध्ये, दोन कोन आणि समाविष्ट नसलेली बाजू या दोन त्रिकोणाच्या समानता आहेत. या अटीला को.को.बा. (AAS) (कोन कोन बाजू) कसोटी असे म्हटले जाते.

आपण पाहिले आहे की, को.को.बा. (AAS) ही एकरूपतेची खात्री देते.

आपण हे ही पाहिले आहे की, बा.बा.को. (SSA) ही नेहमी एकरूपतेची खात्री देत नाही. तरीसुध्दा काही विशेष घटनेमध्ये, बा.बा.को. (SSA) ही कसोटी एकरूपतेची खात्री देते. येथे अशीच एक महत्वाची घटना आहे.

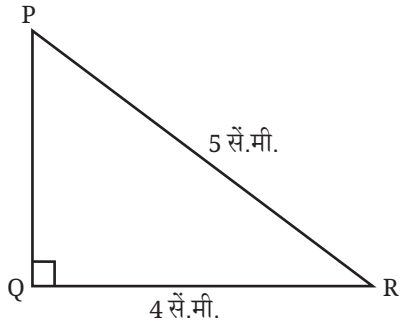
© KSTB NOT TO BE REPUBLISHED

## काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू मोजणे (Measuring Two Sides in a Right Triangle)

? $\Delta ABC$ आणि $\Delta XYZ$ हे काटकोन त्रिकोण असे आहेत. त्यामध्ये $BC=YZ = 4$ सें.मी, $\angle B=\angle Y = 90^0$ आणि $AC=XZ = 5$ सें.मी.आहेत. तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत का?

? ही मापे असलेला एकरुप नसलेला त्रिकोण अस्तित्वात आहे का? रचना करा आणि शोधा पाहू.

कच्च्या आकृतीकडे पाहून या रचनेची योजना करण्यास मदत होते.

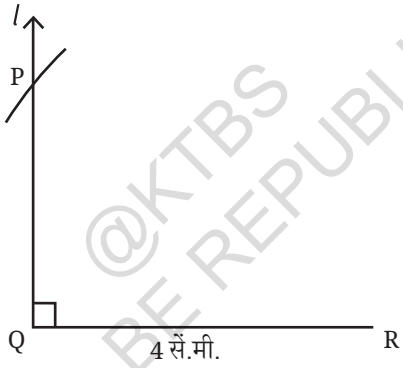



**पायरी 1**: QR हा 4 सें. मी. लांबीचा पाया काढा.

**पायरी 2**: QR ला Q मधून $l$ ही लंब रेषा काढा.

**पायरी 3**: R बिंदूतून 5 सें.मी. त्रिज्येने $l$ या रेषेला छेदणारा कंस काढा.

**पायरी 4**: $l$ या रेषेवर P बिंदूत कंस छेदतो असे मानू. PR जोडा.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\Delta PQR$ हा अपेक्षित असलेला त्रिकोण आहे.

? $l$ ही रेषा QR च्या खाली पुढे वाढविली आहे असे समजा. मग R बिंदूतून काढलेला कंस या रेषेला छेदतो का? (बाजुंची लांबी दिली असता त्रिकोण रचना करतो त्याप्रमाणे) असे असेल तर यापासून $\Delta PQR$ पेक्षा वेगळा आकार आणि आकारमानाचा त्रिकोण मिळेल तरी सुध्दा त्याची मापे दिलेलीच असतील?

तुम्ही पाहू शकाल की पुढील प्रमाणे मिळालेला आणखी एक त्रिकोण सुध्दा $\Delta PQR$ शी एकरूप आहे का? म्हणून ही सर्व मापे असलेले त्रिकोण एकमेकाला एकरुप असतात.

म्हणून आम्ही असा निष्कर्ष काढू की $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

वरील घटनेमध्ये त्रिकोणाचे भाग जे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत भागाशी समान आहेत. ते

(a) काटकोन.

(b) दोन इतर बाजू, त्यापैकी एक काटकोनाच्या विरुध्द असते. तिला कर्ण बाजू म्हणतात.

याला का.क.भू. (RHS) (काटकोन कर्ण भूजा) कसोटी म्हणतात आणि ही एकरूपतेची आणखी एक कसोटी आहे.

**एकरूपतेच्या या कसोट्या खात्री देण्यासाठी पुरेशा आहेत.**

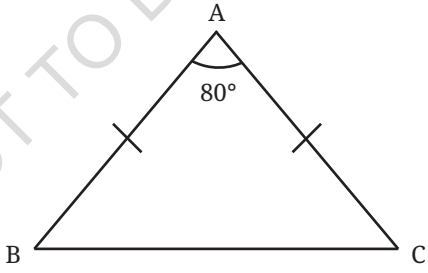
आतापर्यंत केलेल्या चर्चेवरुन आपण पाहू शकतो की दोन त्रिकोण जर खालीलपैकी कोणत्याही एका कसोटीची पूर्तता करत असतील तर ते दोन्ही त्रिकोण एकरुप असतात.

(a) बा. बा. बा. (SSS) कसोटी
(b) को. को. बा. (SAS) कसोटी
(c) बा. को. बा.(ASA) कसोटी
(d) का. क. भू. (AAS) कसोटी
(e) को. बा. को. (RHS) कसोटी

## 1.3 समद्विभूज आणि समभूज त्रिकोणाचे कोन (Angles of Isosceles and Equilateral Triangles)

भौमितिक आकृत्यांच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करण्यासाठी एकरुपता हे अत्यंत प्रभावशाली साधन आहे. समद्विभूज त्रिकोणाच्या महत्वाच्या गुणधर्माचा शोध घेण्यासाठी त्यांचा वापर करुया चला.

? $\Delta ABC$ हा समद्विभूज त्रिकोण आहे. ज्यामध्ये $AB=AC$ आणि $\angle A=80^0$ आहे तर आपण $\angle B$ आणि $\angle C$ बद्दल काय सांगू शकतो.




A पासून BC वर शिरोलंब काढा.

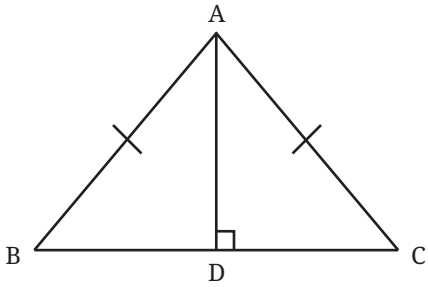
$\Delta ABD$ आणि $\Delta ADC$ मध्ये

$$AB = AC \text{ (दिलेले)}$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90° \text{ (रचनेवरून)}$$

$\Delta ADB$ आणि $\Delta ADC$ या दोन त्रिकोणांची AD ही सामायिक बाजू आहे

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




या दोन त्रिकोणामध्ये का.क.भू. (RHS) कसोटीची पूर्तता होते.

त्यामुळे $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ हे $\angle B = \angle C$ असे दर्शवितात, कारण ते एकरुप त्रिकोणांचे संगत कोन आहेत.

**म्हणून समान बाजू समोरील कोन समान असतात.**

? हा मुद्दा आपण $\angle B$ आणि $\angle C$ साठी वापरु शकतो का?

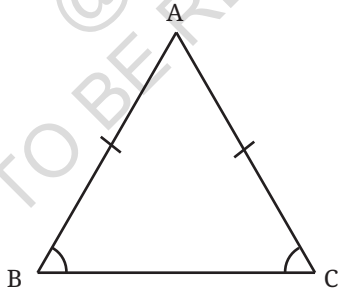
## समभुज त्रिकोणाचे कोन (Angles in an Equilateral Triangle)

"सर्व बाजूंची लांबी समान असेल तर तो त्रिकोण समभूज त्रिकोण असतो."

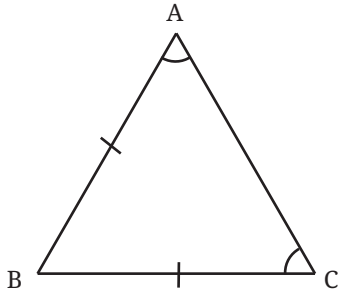
? आम्ही त्यांच्या कोनाविषयी काय सांगू शकतो ?

आम्ही अलीकडेच शोधलेला मुद्दा समान बाजू समोरील कोन समान असतात याचा वापर करु शकतो. का?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




बाजू AB आणि AC या समान आहेत, त्यामुळे $\angle B = \angle C$




त्याचप्रमाणे, बाजू AB आणि BC या समान आहेत, त्यामुळे $\angle A = \angle C$

ज्याप्रमाणे बाजू समान त्याप्रमाणे समभूज त्रिकोणाचे सर्व कोन ही समान आहेत.

? त्यांची मापे कोणती आहेत ?

त्रिकोणाच्या सर्व तीन कोनांची बेरीज $180^0$ असते हे आपल्याकडे आहे,
समभूज त्रिकोणाचे कोन = $180^0$
म्हणून समभूज त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन $60^0$ आहे.

? रचना करून हे पडताळून पहा.

म्हणून एकरुप त्रिकोणाची कल्पना वापरून, आपण असा तर्क काढू शकतो की समभूज त्रिकोणाचे सर्व कोन प्रत्येकी $60^0$ चे असतात.

**दैनंदिन जीवनामधील एकरूप त्रिकोण** : प्राचीन ते आधुनिक काळापर्यंत विविध बांधकामामध्ये आणि डिझाईनमध्ये एकरूप त्रिकोण पाहिले जाऊ शकतात. येथे कांही उदाहरणे आहेत.



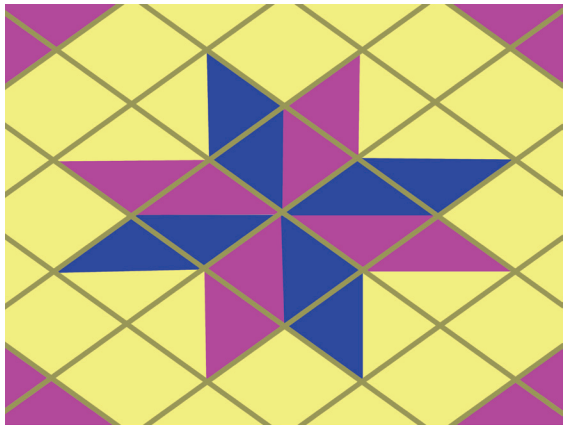
पॅरिसमधील जग प्रसिध्द लौव्हरे संग्रहालय



गिझ येथील जगप्रसिध्द इजिप्शीयन पिरॅमिड



घुमटाची रचना



रांगोळीची रचना

© @KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



रविंद्र सेतु किंवा हावडा सेतु

प्रत्येक चित्रामध्ये तुम्ही पाहिलेल्या एकरुप त्रिकोणांचे वर्णन करा

## शोधा पाहू (Figure it Out)

1. $\Delta AIR \cong \Delta FLY$ यामधील संगत बाजू, संगत शिरोबिंदू आणि संगत कोन ओळखा.
2. खालील प्रत्येक घटनेमध्ये दोन त्रिकोणापासून काही मापे घेतलेली आहेत. एकमेकांशी एकरूप असणाऱ्या त्रिकोणांच्या जोड्या ओळखा, त्याचे कारण लिहा. जेव्हा जेव्हा एकरूप होतात त्या एकरुपतेची कसोटी व्यक्त करा.

(a) $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = DF$

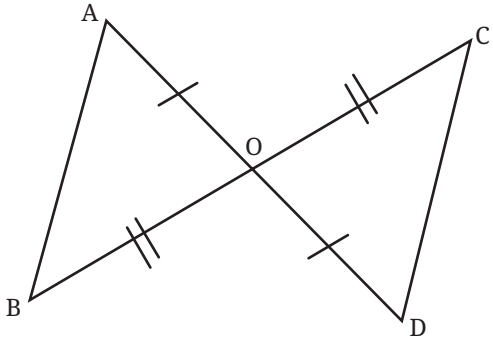
(b) $AB = EF$, $\angle A = \angle E$, $AC = ED$

(c) $AB = DF$, $\angle B = \angle D = 90°$, $AC = FE$

(d) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $AC = DF$

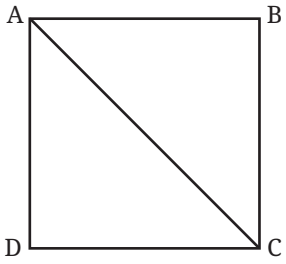
(e) $AB = DF$, $\angle B = \angle F$, $AC = DE$

3. $OB = OC$ आणि $OA = OD$ हे दिलेले आहे. तर AD हे CD ला समांतर आहे हे दाखवा. (सुचना:AD ही त्या दोन रेषांना छेदिका आहे. तेथे कोणतेही समान व्युत्क्रम कोन समान आहेत का?



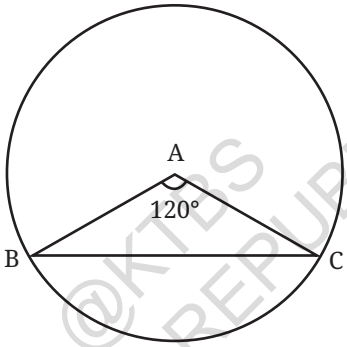

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. ABCD हा चौरस आहे. तर $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ हे दाखवा. $\Delta ABC$ आणि $\Delta CDA$ हे एकरूप आहेत का?



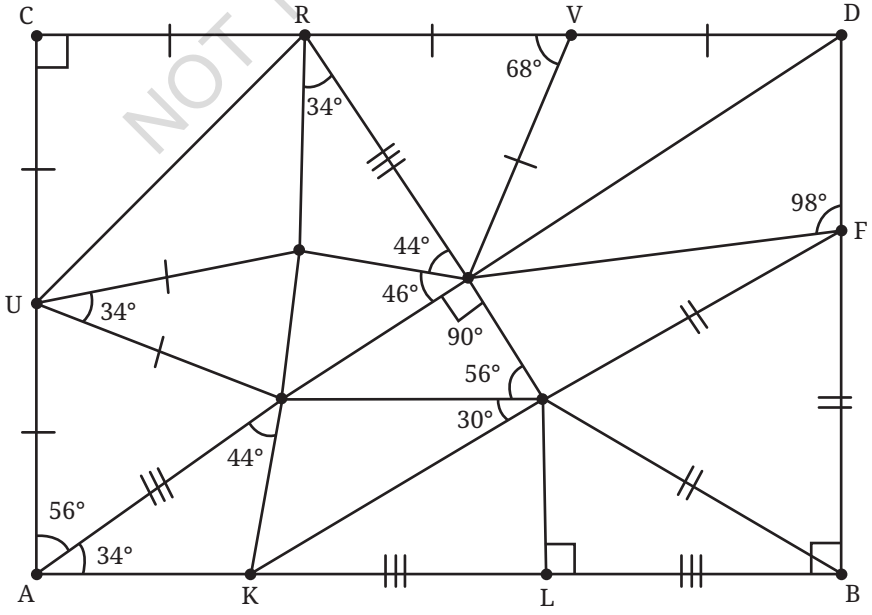

वरील घटनेमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, दोन त्रिकोणांची आणखी कांही उदाहरणे द्या. ज्यामध्ये एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणाशी दोन वेगवेगळ्या प्रकारे एकरूप आहेत. तुम्ही दोन एकरुप त्रिकोणांची अशीही उदाहरणे देऊ शकता ज्यामध्ये एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणाशी सहा वेगवेगळ्या प्रकारे एकरुप आहेत?

5. जर A हा वर्तुळाचा मध्य आहे तर $\angle B$ आणि $\angle C$ शोधा.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. गाळलेले कोन शोधा, आपण ज्या संकेताचे अनुकरण करत आलेलो आहोत. त्यानुसार, एका '|' ने चिन्हांकीत केलेले रेषाखंड एकमेकांशी समान आहेत आणि दुहेरी '||' ने चिन्हांकीत केलेले रेषाखंड एकमेकांना समान आहेत इ.



# सारांश (SUMMARY)

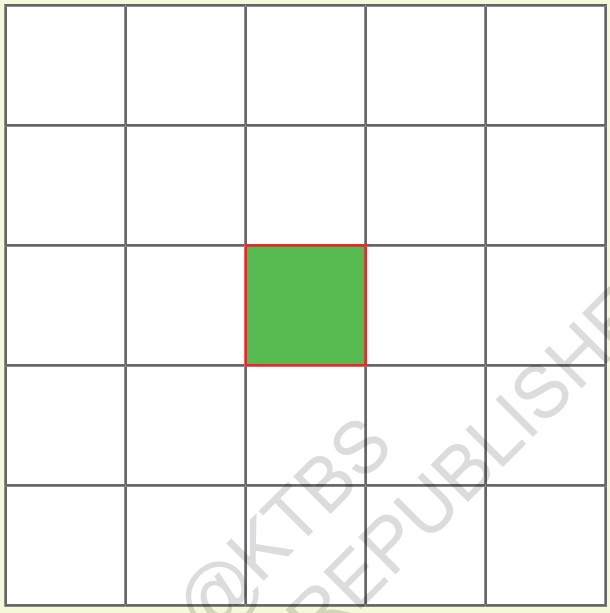
- ज्या आकृत्यांचा आकार आणि आकारमान समान असतात त्यांना **एकरूप** म्हटले जाते. या आकृत्या एकमेकावर ठेवल्या असता त्या एकमेकाशी तंतोतंत जुळतात.
- एकरुपता तपासत असताना, एक आकृती दुसऱ्या आकृतीशी तंतोतंत जुळण्यासाठी तिला फिरविले किंवा उलट केले जाऊ शकते.
- जेव्हा दोन त्रिकोणांच्या बाजूंची लांबी समान असते, तेव्हा आपण म्हणतो की **SSS (बाजू-बाजू-बाजू)** ही कसोटी पूर्ण झाली आहे. ही SSS एकरूपतेची खात्री देते.
- जेव्हा एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि एक समाविष्ट कोन हा दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि एका समाविष्ट कोनाशी समान आहेत, तेव्हा आपण म्हणतो की **SAS (बाजू-कोन-बाजू)** कसोटी पूर्ण झाली आहे. ही SAS एकरुपतेची खात्री देते
- जेव्हा एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि एक समाविष्ट बाजू ही दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन आणि एका समविष्ट बाजूशी समान आहेत, तेव्हा आपण म्हणतो की **AAS (कोन-बाजू-कोन)** कसोटी पूर्ण झाली आहे. ही **ASA** एकरुपतेची खात्री देते. जरी बाजू ही दोन कोनामध्ये समाविष्ट नसेल तरी तेथे **AAS (कोन-कोन-बाजू)** ही त्याला म्हणजेच ASA ला **AAS** एकरुपता कसोटी पूर्ण होते.
- काटकोन त्रिकोणामध्ये, काटकोन कोनासमोरील बाजूला **कर्ण** असे म्हणतात
- जेव्हा काटकोन त्रिकोणाची बाजू आणि कर्ण भुजा दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाची बाजू आणि कर्णाशी समान असतो तेव्हा आपण **RHS (काटकोन-कर्ण-बाजू)** कसोटी पूर्ण झाली असे म्हणतो. **RHS** कसोटी सुध्दा एकरुपतेची खात्री देते.
- जर दोन बाजू आणि एक असमाविष्ट (समाविष्ट नसलेला) कोन समान असतील तर ते त्रिकोण एकरुप असतीलच असे नाही.
- समद्विभूज त्रिकोणामध्ये समान बाजू समोरील कोन समान असतात.
- समभूज त्रिकोणामध्ये सर्व कोन प्रत्येकी $60^0$ चे असतात.

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

कोड्याची वेळ !

# अभिव्यक्ती अभियंता

रेषा काढून पांढऱ्या चौरसांचा समावेश असलेल्या क्षेत्राचे 6 लहान एकरुप क्षेत्रांमध्ये विभाजन करा.



@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED



# 2 पूर्णांकांवरील क्रिया
# (OPERATIONS WITH INTEGERS)

J5W9K7

## 2.1 पूर्णांकांची जलद उजळणी (A Quick Recap of Integers)

राकेशचे कोडे: संख्यांचा खेळ

? राकेश तुम्हाला एक आव्हान देतो,
तो म्हणतो, ''मी दोन संख्यांचा विचार केला आहे.''
''त्यांची **बेरीज 25** आणि त्यामधील **फरक 11** आहे.''

? तुम्ही त्या दोन संख्या मला सांगू शकाल का?

तुम्हाला कोणतीही सूत्रे वापरण्याची गरज नाही. फक्त वेगवेगळ्या संख्यांच्या जोड्या घेऊन प्रयत्न करा आणि तपासा.

1. त्या दोन संख्यांची बेरीज 25 येते का?
2. त्यांच्यामधील फरक 11 आहे का?

(लक्षात ठेवा : फरक म्हणजे पहिली संख्या - दुसरी संख्या)
तुमचे अंदाज असे लिहा :

| पहिली संख्या | दुसरी संख्या | बेरीज | फरक |
|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 25 | –5 |
| 20 | 5 | 25 | 15 |
| 19 | 6 | 25 | 13 |
| 18 | 7 | **25** | **11** |

? तुम्हाला योग्य जोडी मिळाली का?

? आता तुम्हाला योग्य जोडी सापडली आहे, राकेश तुम्हाला दुसरे आव्हान देतो :

''दोन संख्यांचा विचार करा ज्यांची **बेरीज 25** आहे. परंतु त्यामधील **फरक -11** आहे.''

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तीच पध्दत वापरा. वेगवेगळ्या संख्यांच्या जोडया घेऊन प्रयत्न करा आणि कोष्टक पुन्हा भरा. तुमच्या लक्षात येईल की, जर तुम्ही पहिल्या कोड्यातील संख्यांची अदलाबदल केली तर तुम्हाला राकेशच्या दुसऱ्या कोड्याचे उत्तर मिळते. म्हणजेच पहिली संख्या 7 आणि दुसरी संख्या 18 आहे.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

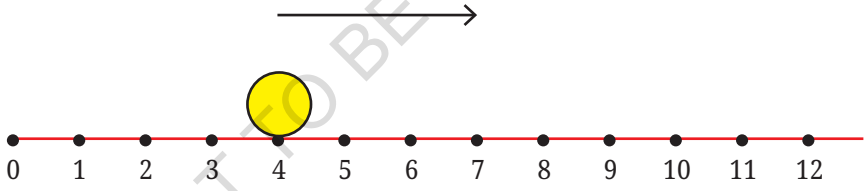
चला तर आपण संख्यांची बेरीज आणि फरक शोधून आणखी काही संख्यांच्या जोडया मिळविण्याचा प्रयत्न करुया.

(a) बेरीज = 27, फरक = 9
(b) बेरीज = 4, फरक = 12
(c) बेरीज = 0, फरक = 10
(d) बेरीज = 0, फरक = -10
(e) बेरीज = -7, फरक = -1
(f) बेरीज = -7, फरक = -13

हा खेळ दोघांमध्ये खेळायचा आहे. खेळाला सुरुवात करा. प्रत्येक वेळी तुमच्यापैकी एकट्याने दोन पूर्णांकाचा विचार करावा आणि त्यांची बेरीज व फरक सांगावा. दुसऱ्याने त्या पूर्णांकांचा शोध घ्यावा. थोडा सराव केल्यानंतर, तुम्ही हा जादुचा खेळ तुमच्या कुटुंबातील सदस्यांबरोबर खेळून त्यांना आश्चर्यचकित करु शकता!

## कॅरमच्या सोंगट्यांचे पूर्णांक (Carrom Coin Integers)

कॅरमच्या सोंगटीला मारून तिची उजवीकडे हालचाल करता येते. प्रत्येकवेळी मारल्यावर, मारलेल्या जोरानुसार सोंगटी ठराविक एकक अंतराने उजवीकडे पुढे सरकते.



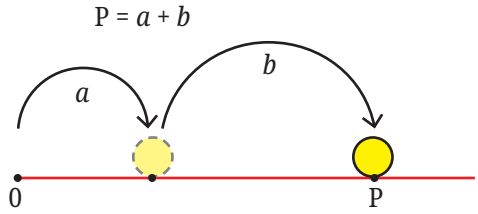

सुरुवात करत असताना सोंगटी 0 या बिंदूवर आहे. जर त्या सोंगटीला दोनवेळा मारले तर पहिल्यावेळी 4 एकके पुढे सरकते आणि दुसऱ्या मारामध्ये ती 3 एकके सरकते तर त्या सोंगटीची शेवटची स्थिती काय असेल?

हे स्पष्ट आहे की, आता सोंगटी 0 पासून 4+3 = 7 एकके अंतरावर आहे.

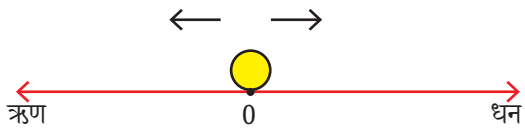
जर सोंगटीला दोन वेळा मारले आणि जर दोन्ही हालचाली माहित असतील तर सोंगटीची शेवटची स्थिती मिळविण्यासाठी सूत्र बनवू शकाल का?

© KBS NOT TO BE REPUBLISHED

जर पहिल्या मारामध्ये सोंगटी उजव्या बाजूला 'a' एकके सरकते आणि दुसऱ्या मारामध्ये उजव्या बाजूला 'b' एकके सरकते, तर तिची शेवटची स्थिती P = a + b आहे. येथे P हे सोंगटीचे सुरुवातीचे '0' पासूनचे अंतर आहे.




आता समजा की सोंगटीला दोन्ही दिशांनी मारून हालविता येते उजवीकडे किंवा डावीकडे.

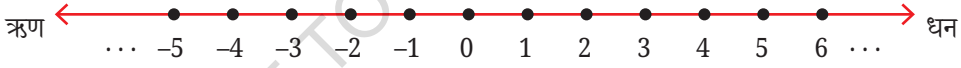



? सोंगटी '0' येथे आहे. जर तिला दोनवेळा मारले (दोन्हीवेळा मारण्याची दिशा समान किंवा भिन्न असू शकते) तर तुम्ही सोंगटीच्या अंतिम स्थितीसाठी सूत्र देऊ शकता का?

असे करण्याची एक पध्दत म्हणजे सोंगटीला मारण्याच्या दिशांचे वेगवेगळे प्रकार विचारात घेणे होय.

- दोन्ही उजवीकडे
- दोन्ही डावीकडे
- पहिली उजवीकडे आणि दुसरी डावीकडे
- पहिली डावीकडे आणि दुसरी उजवीकडे

या स्थितीचा एक प्रभावी नमुना बनविण्यासाठी धन आणि ऋण पूर्णांकांचा वापर करावा. प्रथम आपण ज्या रेषेवर सोंगटीची हालचाल होते तिचा संख्यारेषे / प्रमाणे नमुना बनवूया.




आपण उजवीकडील हालचाल ही धनात्मक आणि डावीकडील हालचाल ऋणात्मक आहे असा विचार करुया.

समजा की, पहिल्या मारामध्ये सोंगटी 0 पासून 5 एकके उजवीकडे सरकते आणि दुसऱ्या मारामध्ये 7 एकके डावीकडे सरकते. तर आपण घेऊ की,

पहिली हालचाल = 5 एकके
दुसरी हालचाल = -7 एकके

? सोंगटीची अंतिम स्थिती कोणती आहे?

हे फक्त दोन्ही हालचालींची साधी बेरीज करुन मिळविता येऊ शकते. $5+(-7)=-2$

म्हणून ती सोंगटी-2 वर किंवा 0 च्या डाव्या बाजूला 2 एकके येथे आहे.

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

सामान्यपणे, जर प्रथम मारल्याने सोंगटीने केलेली हालचाल 'a' एकके (जर उजव्या बाजूला मारले तर धनात्मक आणि डाव्या बाजूला मारले तर ऋणात्मक आहे) आणि दुसऱ्या वेळी मारल्याने झालेली हालचाल 'b' एकके आहे. (जर उजव्या बाजुला मारले तर धनात्मक आणि डाव्या बाजुला मारले तर ऋणात्मक आहे.) तर दोनवेळा मारल्यानंतर सोंगटीची अंतिम स्थिती 'P', ती पुन्हा P = a+b आहे.

? या नवीन नमुन्याच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

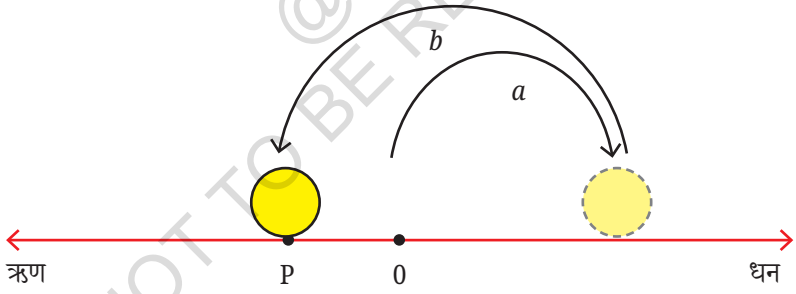
1. जर पहिली हालचाल -4 आणि शेवटची स्थिती 5 असेल तर दुसरी हालचाल कोणती?
2. जर तेथे अनेकवेळा मारल्याने 1-2, 3-4,.....-10 या क्रमाने हालचाली होत असतील तर सोंगटीची अंतिम स्थिती कोणती असेल?

हालचालीचे धन आणि ऋण दोन्ही संख्या समजून नमुना बनवून आपण दोन प्रकारची माहिती मिळवू शकतो. अंतर (परिमाण) आणि दिशा (उजवीकडे किंवा डावीकडे) उदाहरणार्थ, जेव्हा आपण म्हणतो की हालचाल -4 आहे. तेव्हा **परिमाण** 4 असते आणि दिशा डावीकडे असते.

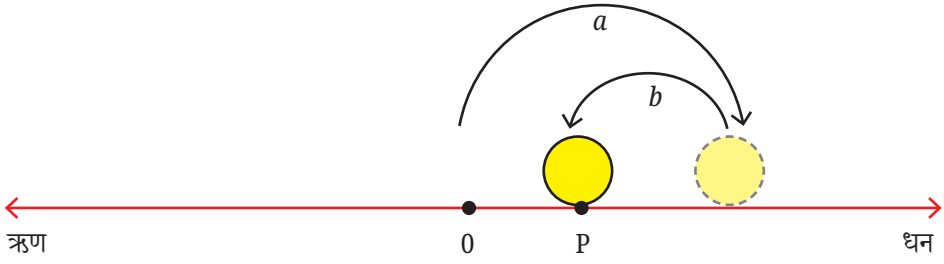
? खालील आकृत्यावरून, तुम्ही 'a' आणि 'b' च्या परिमाणांची तुलना एकमेकांशी करून कोणता निष्कर्ष काढू शकाल? त्यांच्या दिशा कोणत्या? लक्षात ठेवा की, सुरवात 0 पासून करायची आहे.

प्रयत्न करा

1.

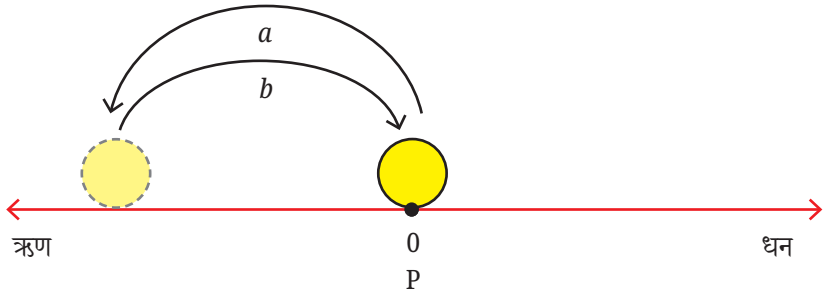



2.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.




संख्यारेषेशिवाय पूर्णांक समजून घेण्यासाठी आपण प्रतिकात्मक मुद्रा वापरल्या आहेत. आपण इ. 6 वी मध्ये बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी या मुद्रा वापरल्या होत्या. चला तर त्याचे लगेच स्मरण करुया. आपण धन 1 दर्शविण्यासाठी हिरव्या मुद्रा (⊕) वापरल्या आणि ऋण 1 म्हणजे (-1) दर्शविण्यासाठी लाल मुद्रा वापरल्या होत्या (⊖). एकत्रितपणे त्या शून्य बनवितात, कारण त्या एकमेकांना रद्द करतात.

? (+7) – (+18) सोडवा.

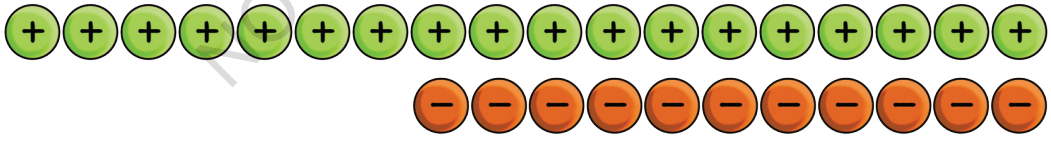
7 मधून 18 वजा करण्यासाठी, म्हणजेच (+7) - (+18), आपल्याला धन 7 मधून. धन 18 काढले पाहिजे?



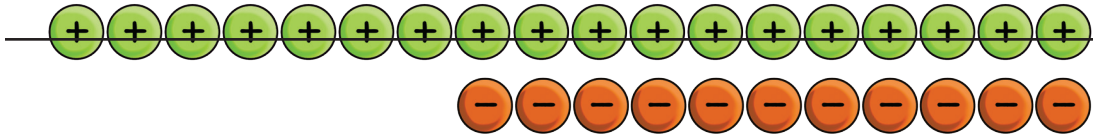
परंतु येथे धन 18 काढण्यासाठी पुरेशा मुद्रा नाहीत!
यासाठी आपण पुरेशा शून्य जोड्या घेऊ, त्यामुळे आपल्याला धन 18 काढता येतील.

? किती?

आपल्याकडे 7 धन मुद्रा आहेत आणि आपल्याला आणखी 11 मुद्रांची गरज आहे. म्हणून आपल्याला 11 शून्य जोड्या घ्याव्या लागतील.



आता आपण धन 18 काढू शकतो.



किती शिल्लक राहिले? तेथे ऋण 11 म्हणजेच -11 शिल्लक राहतात.

BALBHARATI BOOKS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून 7-18=-11

आपण हे सुध्दा पाहिले आहे की, संख्या वजा करणे हे संख्येमध्ये बेरीज व्यस्त मिळविण्या सारखेच आहे.

? प्रतिकात्मक मुद्रा वापरुन खालील विधानांची चर्चा करा.

गणिती बोल

(a) $7 - 18 = 7 + (-18)$ (18 चा बेरीज व्यस्त -18 आहे.)

(b) $4 - (-12) = 4 + 12$ (-12 चा बेरीज व्यस्त 12 आहे.)

**शिक्षकांसाठी सूचना** : दृष्टीहीन विद्यार्थ्यांसाठी धन आणि ऋण संख्यासाठी वेगवेगळ्या आकाराच्या मुद्रा वापरल्या जाऊ शकतात.

'a' या पूर्णांकाचा बेरीज व्यस्त $-a$ असा दर्शवितात. म्हणून 18 चा बेरीज व्यस्त हा -18 असा दर्शवितात = -18 आणि -18 चा बेरीज व्यस्त हा -(-18) = 18 असा दर्शवितात = 18.

## 2.2 पूर्णांकांचा गुणाकार (Multiplication of Integers)

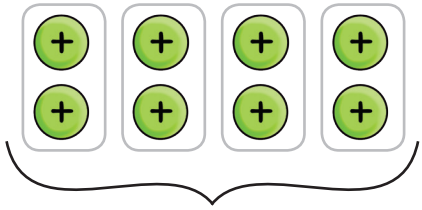
आपण पूर्णांकाची बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी प्रतिकात्मक मुद्रा वापरल्या आहेत. आता आपण पूर्णांकांचा गुणाकार प्रतिकात्मक मुद्रा वापरुन कसा करायचा याचा शोध घेऊया.

आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे आपण काही धन मुद्रा एका पिशवीमध्ये ठेवल्या आहेत असे समजू.

? पिशवीमध्ये किती धन मुद्रा आहेत?

पिशवीमध्ये 8 धन मुद्रा आहेत. आपण हे पिशवीमध्ये 2 धन मुद्रा 4 वेळा मिळविल्या आहेत असे म्हणू शकतो. त्यामुळे ती क्रिया $4 \times 2 = 8$ होते.

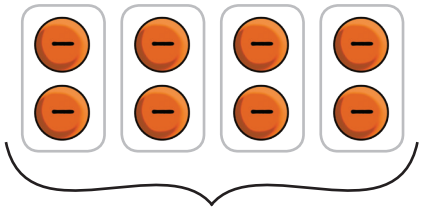
आपण या प्रकारचा धन पूर्णांकांचा गुणाकार यापूर्वी पाहिला आहे. $4 \times (-2)$ या गुणाकाराचा अर्थ सांगण्यासाठी आपण मुद्रा वापरु शकतो का?
चला, कसे ते आपण पाहूया.



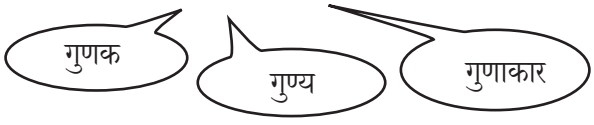
चार वेळा दोन हिरव्या मुद्रा = 8
$4 \times 2 = 8$

आपण प्रत्येक नवीन क्रिया एका रिकाम्या पिशवीपासून सुरुवात करुया.

$4 \times (-2)$ याचा अर्थ रिकाम्या पिशवीमध्ये 2 ऋण मुद्रा 4 वेळा ठेवणे असा होतो. आपण ऋणसाठी लाल मुद्रा वापरल्या, त्यामुळे ऋण 2 हे 4 वेळा



चार वेळा दोन हिरव्या मुद्रा = 8
$4 \times (-2) = -8$




© KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

रिकाम्या पिशवीमध्ये ठेवले.

आता पिशवीमध्ये 8 लाल मुद्रा किंवा ऋण 8 आहेत. त्याचा अर्थ -8 होतो.

$4 \times (-2) = (-8)$.

? याचप्रकारे $4 \times (-6)$ आणि $9 \times (-7)$ च्या किंमती काढा. आपण $(-4) \times 2$ चा कसा अर्थ लावू शकतो?

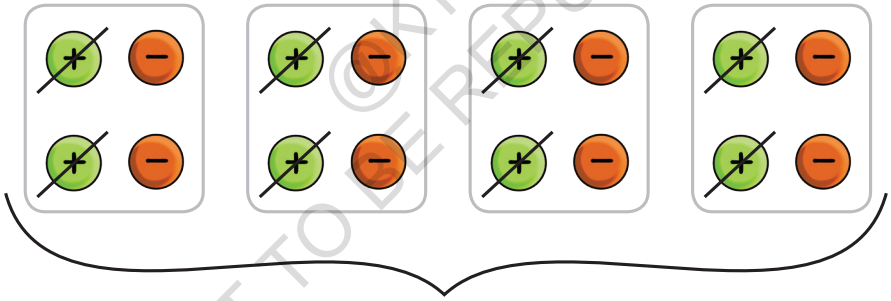
जेव्हा गुणक धन असतो तेव्हा आपण मुद्रा पिशवीमध्ये **ठेवतो**. जेव्हा गुणक ऋण असतो तेव्हा आपण मुद्रा पिशवीमधून **काढतो**.

त्यामुळे $(-4) \times 2$ साठी, पिशवीमधून 4 वेळा दोन धन किंवा 2 हिरव्या मुद्रा काढणे आवश्यक आहे.

गणिती बोल

? आपण लाल मुद्रा न काढता हिरव्या मुद्रा काढण्याचा प्रयत्न का केला आहे?

परंतु पिशवीमध्ये कोणत्याही मुद्रा नाहीत. कारण आपण रिकाम्या पिशवीपासून सुरुवात केली आहे. वजाबाकीच्या घटनेप्रमाणेच रिकाम्या पिशवीमधून दोन धन मुद्रा काढताना आपल्याला दोन शून्य जोडया पिशवीत ठेवणे गरजेचे आहे, आणि त्यानंतर त्यामधून 2 धन काढू. हे आपल्याला 4 वेळा करणे आवश्यक आहे.



शून्य जोडयांमधून 2 हिरव्या मुद्रा 4 वेळा काढणे.

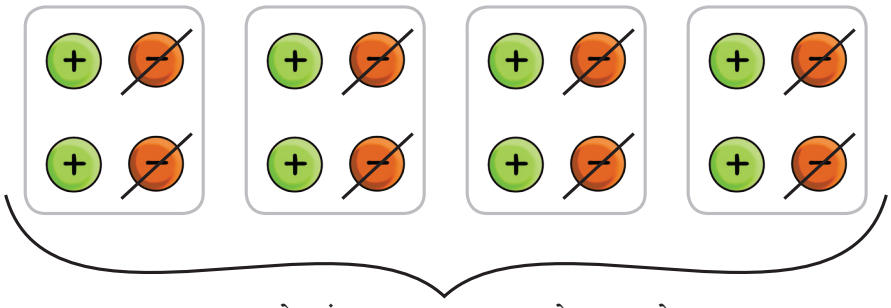
$(-4) \times 2 = -8$

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

धन काढल्यानंतर 8 ऋण पिशवीमध्ये राहतात. ते -8 आहेत. हे $(-4) \times 2 = -8$ असे दर्शविले जाते.

? जर गुणाकारातील दोन्ही पूर्णांक ऋण असतील तर काय घडते? $(-4) \times (-2)$ चा नमुना मुद्रांचा वापर करुन आपण कसा बनवू शकतो?

$(-4) \times (-2)$ साठी, आम्हाला पिशवीमधून 2 ऋण 4 वेळा काढणे आवश्यक आहे. ज्याअर्थी पिशवीमध्ये ऋण मुद्रा नाहीत, त्याअर्थी आपल्याला 2 शून्य जोडया ठेवून 2 ऋण काढणे आवश्यक आहे. हे असे आपणास 4 वेळा करावे लागेल.



शून्य जोडयांमधून 2 लाल मुद्रा 4 वेळा काढणे.

$(-4) \times (-2) = 8$

पिशवीमध्ये 8 धन शिल्लक राहतात. हे +8 आहेत.

म्हणून,

$$-4 \times -2 = +8.$$

आतापर्यंत आपण मुद्रा वापरुन खालील निकाल स्थापित केले आहेत,

$4 \times 2 = 8,$

$4 \times (-2) = -8,$

$(-4) \times 2 = -8,$ आणि

$(-4) \times (-2) = 8.$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. प्रतिकात्मक मुद्रा वापरुन अर्थ लावण्याच्या पद्धतीने खालील किंमती शोधा.
   (a) $3 \times (-2)$ (b) $(-5) \times (-2)$
   (c) $(-4) \times (-1)$ (d) $(-7) \times 3$

2. जर $123 \times 456 = 56088$ असेल तर गणना न करता किंमती शोधा.
   (a) $(-123) \times 456$ (b) $(-123) \times (-456)$
   (c) $(123) \times (-456)$

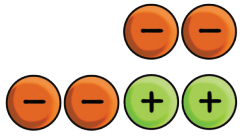
3. दोन पूर्णांकांच्या गुणाकारासाठी साध्या नियमाची रचना करण्याचा प्रयत्न करा.

गणिती बोल

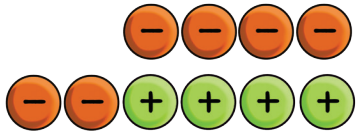
खालील मुद्रांनी दर्शविलेल्या संख्या विचारात घ्या.

(a) 

(b)



(c)



आपण पाहू शकतो की, वरील सर्व संयोजने (-2) ही संख्या दर्शवितात. आता हा प्रत्येक मुद्रांचा संच 4 वेळा घ्या. म्हणजेच प्रत्येक संच रिकाम्या पिशवीमध्ये 4 वेळा ठेवा.

? प्रत्येक घटनेमध्ये आम्हाला कोणता पूर्णांक अंतिम उत्तर मिळेल? ते प्रत्येक संच वेगवेगळे दिसतात, त्यामुळे आम्हाला वेगवेगळे उत्तर मिळते का? की ते सर्व -2 दर्शवितात म्हणून सारखेच उत्तर मिळते?

गणिती बोल

? 4 शी संबंधीत मुद्रांचे वेगवेगळे संच घेऊन वरीलप्रमाणे 5 × 4 हे तपासून पहा.

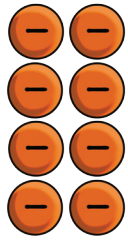
आपण पाहिले आहे की, - 4 × 2 ही संख्या रिकाम्या पिशवीमधून 2 धन मुद्रा काढल्या असता मिळते.

आपल्याला माहित आहे की संख्यांची वजाबाकी (काढणे) ही त्यांचा बेरीज व्यस्त घेऊन मिळविण्याशी समान आहे.

हा नियम वापरून -4×2 याची मुद्रा काढण्याऐवजी मुद्रांच्या बेरीज पध्दतीने व्याख्या करता येऊ शकते का?

गणिती बोल

ज्या अर्थी 2 धन मुद्रा काढणे हे 2 ऋण मुद्रा मिळविण्याशी सारखेच आहे. त्याअर्थी -4×2 हे 2 ऋण मुद्रा रिकाम्या पिशवीमध्ये 4 वेळा ठेवल्यानेही मिळू शकते.



(– 4) × 2

## पूर्णांकाच्या गुणाकारातील नमुने (Patterns in Integer Multiplication)

आपण पूर्णांकांचा गुणाकार अशा घटनांमध्ये शोधला आहे की, जेव्हा गुणक धन असतो किंवा ऋण असतो. तसेच जेव्हा गुण्य धन असतो किंवा ऋण असतो. या समजुतीचा उपयोग करून आता आपण गुणाकाराच्या क्रमाची रचना करूया आणि त्यामधील नमुन्यांचे निरीक्षण करुया.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या नमुन्यामध्ये तुमच्या काय लक्षात आले? तुम्ही याचे स्पष्टीकरण करु शकाल का?

आपण पाहू शकतो की, जेव्हा गुण्य हा धन असतो, तेव्हा गुणक प्रत्येक वेळी 1 ने **कमी** झाला तर गुणाकाराचे उत्तर गुण्याइतके **कमी** होते.

$4 \times 3 = 12$ (–3)
$3 \times 3 = 9$ (–3)
$2 \times 3 = 6$ (–3)
$1 \times 3 = 3$ (–3)
$0 \times 3 = 0$

जेव्हा गुणक हा शून्यपेक्षा कमी होऊन ऋण संख्या होतो तेव्हाही हा नमुना पुढे चालू राहतो का?

होय नक्कीच! जेव्हा गुणक ऋण संख्या होतो तेव्हाही सारखाच नमुना पुढे चालू राहतो.

$4 \times 3 = 12$ (–3)
$3 \times 3 = 9$ (–3)
$2 \times 3 = 6$ (–3)
$1 \times 3 = 3$ (–3)
$0 \times 3 = 0$ (–3)
$-1 \times 3 = -3$ (–3)
$-2 \times 3 = -6$ (–3)
$-3 \times 3 = -9$

जेव्हा गुण्य हा ऋण पूर्णांक असतो तेव्हा कोणता नमुना मिळतो?

$4 \times (-3) = -12$ (+3)
$3 \times (-3) = -9$ (+3)
$2 \times (-3) = -6$ (+3)
$1 \times (-3) = -3$ (+3)
$0 \times (-3) = 0$

हे आधीच्या नमुन्याच्या व्यस्त रुपात आहे. जेव्हा गुण्य ऋण असतो तेव्हा गुणक प्रत्येक वेळी 1 ने **कमी** झाला तर गुणाकार गुण्याइतका **वाढतो**.

जेव्हा गुणक शून्यपेक्षा कमी होऊन ऋण पूर्णांक बनतो तेव्हाही नमुना पुढे सुरु राहील का?

होय!

जरी गुणक ऋण असला तरी सारखाच नमुना आढळून येतो. जेव्हा गुण्य ऋण असतो, तेव्हा गुणकामधील प्रत्येक एकक घटीसाठी गुणाकार गुण्या इतका वाढतो.

या नमुन्यावरुन आपल्याला असे दिसून येते की, धन पूर्णांकांसाठी गुणाकाराबाबत जे सत्य आहे, तेच ऋण पूर्णांकांसाठीही सत्य आहे.

$4 \times (-3) = -12$ (+3)
$3 \times (-3) = -9$ (+3)
$2 \times (-3) = -6$ (+3)
$1 \times (-3) = -3$ (+3)
$0 \times (-3) = 0$ (+3)
$(-1) \times (-3) = 3$ (+3)
$(-2) \times (-3) = 6$ (+3)
$(-3) \times (-3) = 9$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पुर्णांकांच्या गुणाकाराच्या या आकलनाच्या आधारे जेव्हा गुणक आणि गुण्य धन असतात आणि जेव्हा ते ऋण असतात, तेव्हा आपण 3 चा पाढा पाहूया.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 × 3 = 3 | –1 × 3 = –3 | 1 × –3 = –3 | –1 × –3 = 3 |
| 2 × 3 = 6 | – 2 × 3 = –6 | 2 × –3 = –6 | –2 × –3 = 6 |
| 3 × 3 = 9 | –3 × 3 = –9 | 3 × –3 = –9 | –3 × –3 = 9 |
| 4 × 3 = 12 | –4 × 3 = –12 | 4 × –3 = –12 | –4 × –3 = 12 |
| 5 × 3 = 15 | –5 × 3 = –15 | 5 × –3 = –15 | –5 × –3 = 15 |
| 6 × 3 = 18 | –6 × 3 = –18 | 6 × –3 = –18 | –6 × –3 = 18 |
| 7 × 3 = 21 | –7 × 3 = –21 | 7 × –3 = –21 | –7 × –3 = 21 |
| 8 × 3 = 24 | –8 × 3 = –24 | 8 × –3 = –24 | –8 × –3 = 24 |
| 9 × 3 = 27 | –9 × 3 = –27 | 9 × –3 = –27 | –9 × –3 = 27 |
| 10 × 3 = 30 | –10 × 3 = –30 | 10 × –3 = –30 | –10 × –3 = 30 |

निरीक्षणाने आपल्याला खालील गोष्टी आढळून येतात.

- गुणक आणि गुण्याचे चिन्ह बदलल्याने गुणाकाराचे परिमाण बदलत नाहीत.
- जेव्हा गुणक आणि गुण्य दोन्ही **धन** असतात, तेव्हा गुणाकार **धन** असतो.
- जेव्हा गुणक आणि गुण्य दोन्ही **ऋण** असतात तेव्हा गुणाकार **धन** असतो.
- जेव्हा गुणक आणि गुण्य यापैकी एक **धन** आणि दुसरे **ऋण** असते, तेव्हा त्यांचा गुणाकार **ऋण** असतो.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

खालील गुणाकार शोधा.

(a) $4 \times (-3)$ (b) $(-6) \times (-3)$

(c) $(-5) \times (-1)$ (d) $(-8) \times 4$

(e) $(-9) \times 10$ (f) $10 \times (-17)$

$1 \times a$ ही पदावली विचारात घ्या. सर्व धन पूर्णांकासाठी या पदावलीची किंमत 'a' आहे हे आपल्याला माहित आहे.

सर्व ऋण पूर्णांकांसाठी सुध्दा हे सत्य आहे का?

प्रतिकात्मक मुद्रा वापरुन, आपण फक्त एकदाच 'a' ऋण पिशवीमध्ये ठेवले. यानंतर पिशवीमध्ये 'a' ऋण आहेत. उदाहरणार्थ, जर 'a' हे -5 (5 ऋण) आहेत, तर त्या पिशवीमध्ये 5 ऋण आहेत, म्हणजेच -5, त्यामुळे

$1 \times a = a$ (सर्व धन आणि ऋण या दोन्ही पूर्णांक 'a' साठी)

$-1 \times a$ या पदावलीची किंमत किती?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जेव्हा a धन असतो, तेव्हा पूर्णांकांच्या गुणाकारावरील आपल्या निरीक्षणावरून, गुणाकाराचे परिमाण 'a' इतकेच असते परंतु ते ऋण असते.

जेव्हा a ऋण असतो, तेव्हा गुणाकाराचे परिमाण 'a' इतकेच असते पण धन असते.

प्रत्येक घटनेमध्ये आपल्या लक्षात येते की, गुणाकार हा गुण्य 'a' चा बेरीज व्यस्त आहे. म्हणून,

$$-1 \times a = -a \text{ (सर्व '}a\text{' या पूर्णांकांसाठी)}$$

? पूर्णांकाच्या बाबतीत, जर गुणक आणि गुण्य यांची आदलाबदल केली तर गुणाकार सारखाच असतो का? कांही संख्यांसाठी हा प्रयत्न करा.

खालील गुणाकारांच्या जोड्यांचे निरीक्षण करा (आवश्यक तेथे रिकाम्या जागा भरा) :

| | |
|---|---|
| $3 \times -4 = -12$ | $-4 \times 3 = -12$ |
| $-30 \times 12 =$ _____ | $12 \times -30 =$ _____ |
| $-15 \times -8 = 120$ | $-8 \times -15 = 120$ |
| $14 \times -5 = -70$ | $-5 \times$ ____ $= -70$ |

? गुणाकाराच्या विधानांच्या या जोड्यांमध्ये तुमच्या लक्षात काय आले?

जर आपण गुणक आणि गुण्य यांची **अदलाबदल** केली तर गुणाकार सारखाच असतो. याआधी बेरजेविषयी सारखाच गुणधर्म आपण पाहिला आहे.

? हे नेहमी घडून येते का?

जर गुणक आणि गुण्य यांची अदलाबदल केली असता गुणाकाराचे परिमाण बदलत नाही. याचे कारण हे आहे की गुणाकाराचे परिमाण हे फक्त गुणक आणि गुण्य यांच्या परिमाणावर अवलंबून असते. आणि आम्हाला हे ही माहित आहेत की, जेव्हा गुणाकार करावयाच्या संख्यांची अदलाबदल केली तर दोन धन पूर्णांकाच्या गुणाकारात बदल होत नाही.

? जर गुणक आणि गुण्य यांची अदलाबदल केली तर गुणाकाराचे चिन्ह बदलते का?

जर दोन्ही धन किंवा दोन्ही ऋण असतील तर त्यांचा गुणाकार अदलाबदल कराण्यापूर्वी आणि नंतरही धन असतो. त्यामुळे या घटनेमध्ये चिन्ह बदलत नाही.

जर एक धन आणि दुसरी ऋण असेल तर गुणाकार हा अदलाबदल करण्यापूर्वी आणि नंतरही ऋण असतो, त्यामुळेच या घटनेमध्ये सुध्दा चिन्ह बदलत नाही.

त्यामुळे, गुणक आणि गुण्य यांची अदलाबदल केली असता त्यांची चिन्हे कोणतीही असली तरी त्यांचा गुणाकार बदलत नाही.

म्हणून गुणाकार हा पूर्णांकासाठी **क्रमनिरपेक्ष** असतो.

सामान्यापणे 'a' आणि 'b' या कोणत्याही दोन पूर्णांकांसाठी आपण म्हणू शकतो की

$$a \times b = b \times a.$$

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

## धन आणि ऋण संख्यांच्या गुणाकार आणि भागाकारासाठी ब्रम्हगुप्ताचे नियम. (Brahmagupta's Rules for Integer Operations)

पूर्णांकांच्या बेरीज आणि वजाबाकीप्रमाणेच ब्रम्हगुप्तांनी त्यांच्या ब्रम्हस्फुटसिध्दांतामध्ये (इ.स. 628) पूर्णांकांच्या गुणाकार आणि भागाकारासाठीसुध्दा स्पष्ट नियम मांडले आहेत. त्यांनी धन किंमतीसाठी धन (fortune) आणि ऋण किंमतीसाठी ऋण (debt) या संकल्पना वापरल्या. त्यांच्या ब्रम्हस्फुटसिध्दांतामध्ये (18.30-32) ब्रम्हगुप्तानी लिहिले आहे की,

"दोन धनांचा (Fortune) गुणाकार किंवा भागाकार हा धन असतो.

दोन ऋणांचा (dept) गुणाकार किंवा भागाकार हा धन असतो.

ऋण आणि धन यांचा गुणाकार आणि भागाकार ऋण असतो.

धन आणि ऋण यांचा गुणाकार आणि भागाकार ऋण असतो."

धन आणि ऋण संख्यांच्या गुणाकार आणि भागाकाराचे नियम मांडण्याची ही पहिलीच वेळ होती; आणि अंकगणित व बीजगणिताच्या विकासामधील एक महत्वाची पायरी होती.

**उदाहरण 1**: एका परीक्षेमध्ये 50 बहुपर्यायी प्रश्न आहेत. प्रत्येक बरोबर उत्तरासाठी 5 गुण दिले जातात आणि प्रत्येक चुकीच्या उत्तरासाठी 2 गुण कमी केले जातात. जर मालाने 30 बरोबर उत्तरे आणि 20 चुकीची उत्तरे लिहिलेली असतील तर तिचे एकूण गुण किती?

**उकल** : आपण धन आणि ऋण पुर्णांक वापरु. प्रत्येक बरोबर उत्तरासाठी 5 धन पूर्णांक आणि प्रत्येक चुकीच्या उत्तरासाठी -2 ऋण पूर्णांक गुण आहेत.

30 बरोबर उत्तरासाठीचे गुण = $30 \times 5$

20 चुकीच्या उत्तरासाठीचे गुण = $20 \times (-2)$

म्हणून, 30 बरोबर उत्तरे आणि 20 चुकीच्या उत्तरासाठी अंकगणितीय राशी पुढीलप्रमाणे आहे.

$$30 \times 5 + 20 \times (-2)$$
$$= 150 + (-40)$$
$$= 110$$

मालाला परीक्षेमध्ये 110 गुण मिळालेले आहेत.

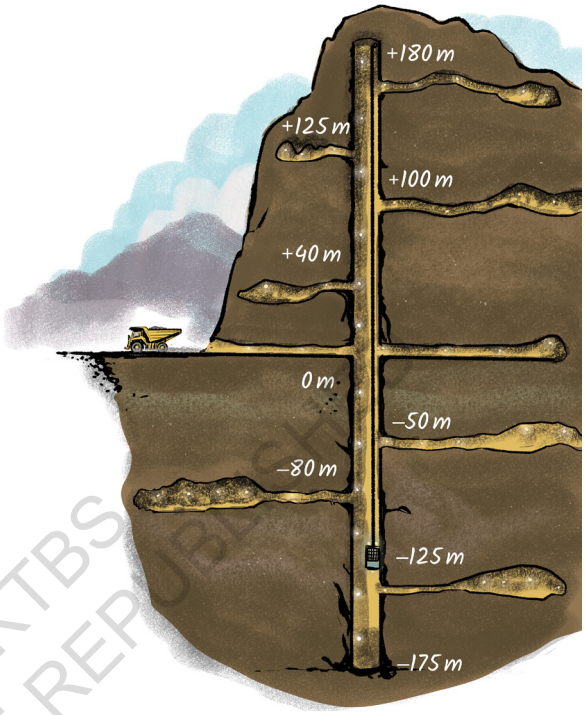
© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? परीक्षेमध्ये जास्तीत जास्त किती गुण मिळू शकतात? कमीत कमी किती गुण मिळू शकतात?

? **उदाहरण 2 :** एका खाणीच्या कुपामध्ये एक उद्वाहक (लिफ्ट) आहे जी जमिनीच्या वर आणि खाली जाते. उद्वाहकाची जमिनीच्या वरची स्थिती धन पूर्णांकाने आणि जमिनीच्या खालची स्थिती ऋण पूर्णांकाने दर्शविली जाते.

(a) उद्वाहक दर मिनिटाला 3 मीटर वेगाने हालचाल करते. जर ती जमिनीच्या पातळीवरुन (0) खाली उतरत असेल तर एका तासानंतर तिची स्थिती काय असेल?

(b) जर ती जमिनीपासून 15 मीटर वरुन खाली उतरायला सुरवात करत असेल तर 45 मिनीटानंतर तिची स्थिती काय असेल?




**उकल:**

प्रश्नातील भाग (a) ची उकल

**पध्दत 1:**

वजाबाकी वापरुन आपण हा नमुना बनवू शकतो.

उद्वाहक प्रत्येक मिनिटाला 3 मीटर हालचाल करते. तर एका तासामध्ये ते $(60\times3)=180$ मी. हालचाल करते. जर ती जमिनीच्या पातळीवरून (0 मीटर) सूरु झाली आणि खाली उतरु लागली, तर आपण 0 मधून 180 वजा केले पाहिजे,

$$0 - 180 = (-180)$$

म्हणून ती (-180) मीटर या स्थितीवर पोहोचेल. जी जमिनीखाली 180 मीटर वर आहे.

**पध्दत 2 :**

समजा की, उद्वाहकाचा वेग आणि दिशा एका पूर्णांकाने (मीटर दर मिनिटाने) दर्शविली आहे. जेव्हा ती वर जाते तेव्हा +3 आणि जेव्हा खाली जाते तेव्हा (-3) आहे.

उद्वाहक खाली जात असल्यामुळे तिचा वेग (-3) मीटर दर मिनिट आहे. ती 60 मिनिटे हालचाल करते म्हणजेच,

$$60 \times (-3) = (-180)$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

60 मिनिटानंतर उद्वाहकाची स्थिती जमिनीखाली 180 मीटरवर असेल.

? पध्दत 1 मध्ये वरीलप्रमाणे वर्णन केल्यानुसार (b) भागाची उकल शोधा.

पध्दत 2 वापरुन भाग (b) ची उकल :

सुरवातीची स्थिती = 15

आक्रमिलेले अंतर = उद्वाहक 45 मिनिटांसाठी 3 मीटर दर मिनिट वेगाने खाली जाते. म्हणजेच $(45\times(-3))$. म्हणून,

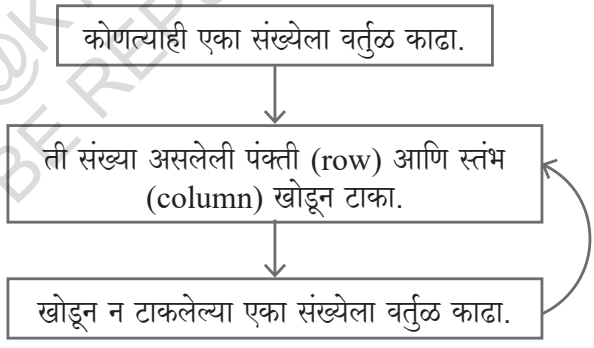
अंतिम स्थिती $= 15 + (45 \times (-3))$
$= 15 + (-(45\times3))$
$= 15 + (-135)$
$= (-120)$.

उद्वाहक जमिनीखाली 120 मीटर अंतरावर असेल.

## पूर्णांकांची जादुई चौकट (A Magic Grid of Integers)

? खाली कांही संख्या असलेली चौकट दिलेली आहे. कोणतीही संख्या शिल्लक राहणार नाही तोपर्यंत दाखविल्याप्रमाणे पायऱ्यांचा वापर करा.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | –4 | 12 | –6 |
| –28 | 14 | –42 | 21 |
| 12 | –6 | 18 | –9 |
| 20 | –10 | 30 | –15 |




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जेव्हा न खोडलेली एकही संख्या शिल्लक राहत नाही, तेव्हा थांबा. वर्तुळ काढलेल्या संख्यांचा गुणाकार करा.

खाली एक उदाहरण दाखविलेले आहे.

फेरी - 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | –4 | 12 | –6 |
| –28 | 14 | –42 | 21 |
| 12 | –6 | 18 | –9 |
| 20 | –10 | 30 | –15 |

फेरी - 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | –4 | 12 | –6 |
| –28 | 14 | –42 | 21 |
| 12 | –6 | 18 | –9 |
| 20 | –10 | 30 | –15 |

फेरी - 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | –4 | 12 | –6 |
| –28 | 14 | –42 | 21 |
| 12 | –6 | 18 | –9 |
| 20 | –10 | 30 | –15 |

फेरी - 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | –4 | 12 | –6 |
| –28 | 14 | –42 | 21 |
| 12 | –6 | 18 | –9 |
| 20 | –10 | 30 | –15 |

पुन्हा प्रयत्न करा, यावेळी वेगळ्या संख्या निवडा. तुम्हाला कोणता गुणाकार मिळाला? हा पहिल्या वेळेपेक्षा वेगळा आहे का? वेगवेगळ्या संख्या घेऊन पुन्हा काही वेळा प्रयत्न करा. खाली दिलेल्या चौकटीसाठी सुध्दा हाच खेळ खेळा. तुम्हाला कोणते उत्तर मिळेल?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | –4 | 12 | –6 |
| –28 | 14 | –42 | 21 |
| 12 | –6 | 18 | –9 |
| 20 | –10 | 30 | –15 |

या चौकटीमध्ये असे काय विशेष आहे?
ही जादू संख्यांमध्ये आहे का, की त्या मांडणीच्या पद्धतीत आहे, की दोन्हीमध्ये? तुम्ही अशा आणखी चोकटी तयार करु शकता का?

प्रयत्न करा

## पूर्णांकांचा भागाकार (Division of Integers)

भागाकाराचे रूपांतर गुणाकारामध्ये कसे केले जाऊ शकते हे तुम्ही यापूर्वी पाहिले आहे. उदाहरणार्थ, $(-100) \div 25)$ हे पुन्हा असे लिहिले जाऊ शकते, '25 ला कितीने गुणले असता $(-100)$ मिळतील?' म्हणजेच,

$$25 \times ? = (-100)$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$25 \times (-4) = (-100)$$

म्हणून

$$(-100) \div 25 = (-4)$$

याचप्रकारे $(-100) \div -4$ ची पुनर्मांडणी, $(-4)$ ला कितीने गुणले असता $(-100)$ मिळतील?

$$(-4) \times ? = (-100)$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$(-4) \times 25 = (-100)$$

म्हणून,

$$(-100) \div (-4) = 25$$

त्याप्रमाणे आपल्याला माहित आहे की,

$$(-25) \times (-2) = 50$$

म्हणून,

$$50 \div (-25) = (-2)$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील नमुने पाहून तुम्ही पुर्णांकांच्या भागाकाराचे नियम सारांशीत करु शकाल का?

सामान्यपणे, a आणि b या कोणत्याही दोन पूर्णांकांसाठी, जेथे $b \neq 0$ आपण म्हणू शकतो की,

$$a \div -b = -(a \div b),$$

$$-a \div b = -(a \div b), \text{ आणि}$$

$$-a \div -b = a \div b$$

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. किंमती काढा.

   (a) $14 \times (-15)$ (b) $-16 \times (-5)$

   (c) $36 \div (-18)$ (d) $(-46) \div (-23)$

2. एका गोठविण्याच्या प्रक्रियेसाठी खोलीचे तापमान $32^0$C पासून प्रत्येक तासाला $5^0$C दराने कमी करणे आवश्यक आहे. तर ही प्रक्रिया सुरु केल्यानंतर 10 तासांनी खोलीचे तापमान किती असेल?

3. एका सिमेंट कंपनीला पांढऱ्या सिमेंटची एक पिशवी विकल्यानंतर ₹ 8 चा नफा होतो आणि राखाडी सिमेंटची एक पिशवी विकल्याने ₹ 5 इतका तोटा होतो (नफा / तोटा पूर्णांकात दर्शवा.)

   (a) ती कंपनी एका महिन्यामध्ये 3000 पांढऱ्या सिमेंटच्या पिशव्या आणि 5000 राखाडी सिमेंटच्या पिशव्या विकते, तर नफा किंवा तोटा किती?

   (b) जर राखाडी सिमेंटच्या 6,400 पिशव्या विकलेल्या असतील तर नफाही नाही आणि तोटाही नाही यासाठी कंपनीला पांढऱ्या सिमेटच्या किती पिशव्या विकाव्या लागतील?

4. खालील विधाने सत्य होण्यासाठी रिकाम्या जागी पूर्णांक भरा.

   (a) $(-3) \times$ _____ $= 27$ (b) $5 \times$ _____ $= (-35)$

   (c) _____ $\times (-8) = (-56)$ (d) _____ $\times (-12) = 132$

   (e) _____ $\div (-8) = 7$ (f) _____ $\div 12 = -11$

## पूर्णांक वापरलेल्या राशी (Expressions Using Integers)

$5 \times -3 \times 4$ या राशीची किंमत किती? जर आपण $5 \times -3$ चा गुणाकार करुन येणाऱ्या गुणाकाराला 4 ने गुणले किंवा $= -3 \times 4$ चा गुणाकार करून येणाऱ्या गुणाकाराला 5 ने गुणले, तर यामध्ये कांही फरक पडतो का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$(5 \times -3) \times 4$
$= -15 \times 4$
$= -60$

$5 \times (-3 \times 4)$
$= 5 \times -12$
$= -60$

? 3 पूर्णांकांच्या गुणाकाराची आणखी कांही उदाहरणे घ्या आणि हा गुणधर्म पडताळून पहा. तुम्हाला काय दिसून येते?

जर आपण या दोन प्रकारे गट करुन गुणाकार केला तर तुम्ही पहाल की गुणाकार समान येतो. म्हणून पूर्णांकांच्या बेरजेप्रमाणेच पूर्णांकांचा गुणाकार साहचर्य असतो.

सामान्यपणे a, b आणि c या कोणत्याही तीन पूर्णांकासाठी

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

$5 \times -3 \times 4$ या राशीमध्ये 5 आणि 4 यांचा पहिला गुणाकार करून येणाऱ्या गुणाकाराला -3 ने गुणणे; $(5 \times 4) \times (-3)$

$$5 \times 4 = 20, \text{ आणि } 20 \times -3 = -60.$$

येथे सुद्धा समान गुणाकार मिळतो.

? $5 \times -3 \times 4$ चा गुणाकार करण्याचा आणखी कोणता क्रम आहे का? या सर्व घटनांमध्ये गुणाकार समान येतो का?

? $25 \times -6 \times 12$ या राशीचा गुणाकार सर्व वेगवेगळ्या क्रमानुसार करून सर्व घटनांमध्ये गुणाकार समान येतो का ते पडताळून पहा.

जर 3 किंवा अधिक संख्यांच्या कोणत्याही क्रमाने गुणाकार केला तर त्यांचा गुणाकार समान राहतो.

खालील गुणाकाराच्या श्रेणीकडे पहा.

$$-1 \times -1 = 1$$
$$-1 \times -1 \times -1 = -1$$
$$-1 \times -1 \times -1 \times -1 = 1$$
$$-1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$$

जेव्हा -1 चा गुणाकार 2 किंवा 4 वेळा केला तर गुणाकार धन येतो.
जेव्हा -1 चा गुणाकार 3 किंवा 5 वेळा केला तर गुणाकार ऋण येतो.
या विधानाचे तुम्ही पुढे सामान्यीकरण करू शकाल का?

गणिती बोल

? अनेक पूर्णांकांच्या गुणाकाराचे हे आकलन वापरुन, तुम्ही अनेक पूर्णांकाच्या गुणाकाराचे चिन्ह शोधण्यासाठी एक सोपा नियम बनवू शकाल का?

? आता $5 \times [4 \times (-2)]$ या राशीचा विचार करा. धन पूर्णांकांच्या बाबतीत होते, त्याप्रमाणेच ही राशी $5 \times 4 + 5 \times (-2)$ या राशीशी समान आहे का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

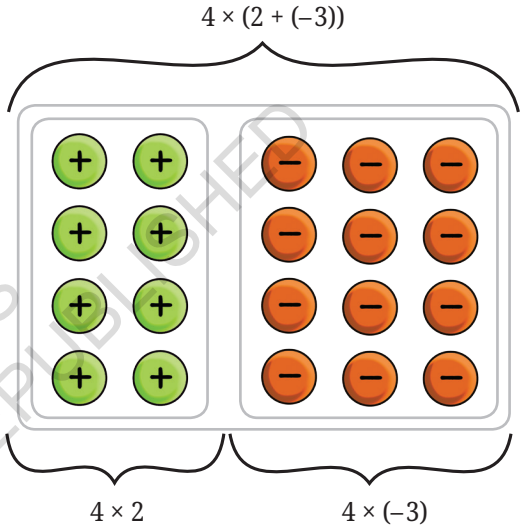
आम्हाला ते समान असल्याचे दिसते. स्मरण करा की आपण या गुणधर्माला वितरण गुणधर्म म्हणतो.

? $(-2) \times [4 + (-3)]$ या राशीसाठी वितरण गुणधर्म लागू होतो का ते तपासा. (म्हणजेच ही राशी $(-2)\times4+(-2)\times(-3)$ शी समान आहे का) आणि तुमच्या निवडीच्या इतर कांही राशीसाठी गुणधर्म तपासून पहा.

तुमच्या लक्षात काय आले? आम्हाला असे दिसून येते की, पूर्णांकांसाठी वितरण गुणधर्म लागू होतो. हे असे नेहमीच घडते का?

धन पूर्णकांच्या बाबतीत वितरण गुणधर्म लागू होतो. हे दृश्यरुपात समजून घेण्यासाठी आपण मुद्रांची आयताकृती मांडणी केलेली होती. आपण पुर्णांकांसाठी सुद्धा सारखीच म्हणजे धन पुर्णांकांसाठी हिरव्या मुद्रा आणि ऋण पूर्णांकांसाठी लाल मुद्रा वापरू शकतो. उदाहरणार्थ, खालील आयताकृतीतील मुद्रांची मांडणी विचारात घ्या.

आपण पाहतो की, ही संपूर्ण मांडणी $4 \times [2 \times (-3)]$ दर्शविते आणि हे स्पष्ट आहे की ही मांडणी $4 \times 2$ आणि $4 \times (-3)$ यांच्या बेरजेशी समान आहे.




? तुम्ही $-4 \times [2+(-3)]$ सारख्या राशींसाठी वितरण गुणधर्म दृश्यरुपात दाखवू शकता का? [**सुचना** : 4 ने गुणणे म्हणजेच त्या संख्येचा व्यस्त 4 वेळा मिळविणे या बाबीचा उपयोग करा.]

प्रयत्न करा

म्हणून a, b आणि c या कोणत्याही पूर्णांकांसाठी,

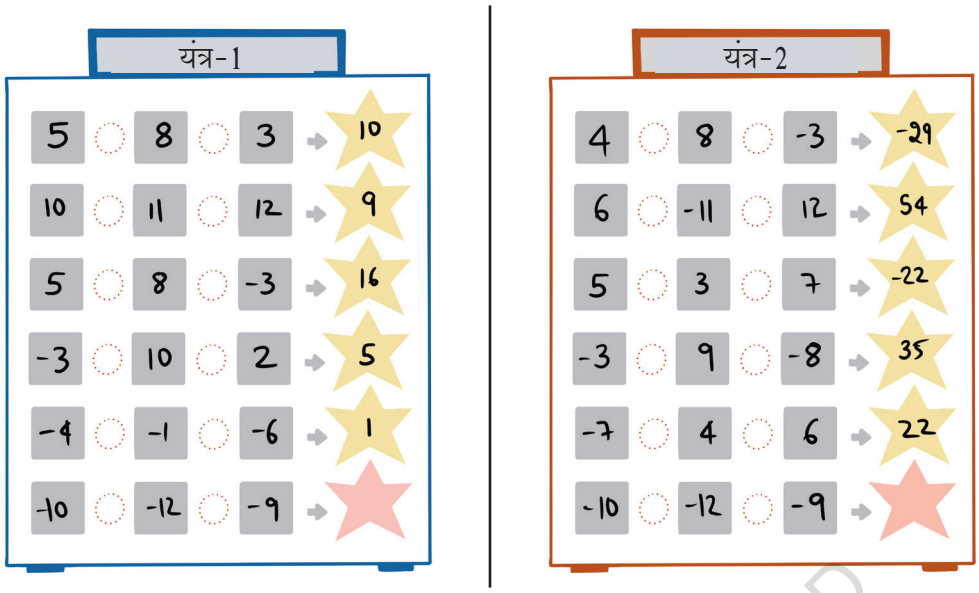
$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

## नियम ओळखा (Pick the Pattern)

खालीलप्रमाणे दोन नमुना यंत्रे दिलेली आहेत. प्रत्येक यंत्र 3 संख्या घेते आणि कांही क्रिया करून निकाल देते.

? यंत्र-1 ने केलेल्या क्रिया शोधा.

© KRBS NOT TO BE REPUBLISHED




यंत्र-1 ने केलेल्या क्रिया :

[पहिली संख्या] + [दुसरी संख्या] – [तिसरी संख्या]

हे राशीच्या रुपामध्ये लिहिले असता $a + b - c$ असे होते. जेथे a ही पहिली संख्या, b ही दुसरी संख्या आणि c ही तिसरी संख्या आहे.

उदाहरणार्थ $5 + 8 - 3 = 10$ आणि $(-4) + (-1) - (-6) = 1$

त्यामुळे शेवटच्या गटाचा निकाल $(-10) + (-12) - (-9) =$ _____

? यंत्र-2 ने केलेल्या क्रिया शोधा आणि मोकळ्या जागा भरा.

तुमचे स्वतःचे यंत्र बनवा आणि तुमच्या मित्रांना त्यामधील क्रिया शोधण्याचे आव्हान द्या.

गणिती बोल

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील राशींच्या किंमती काढा.

(a) $(-5) \times (18 + (-3))$ (b) $(-7) \times 4 \times (-1)$

(c) $(-2) \times (-1) \times (-5) \times (-3)$

2. खालील राशींच्या किंमती काढा.

(a) $(-27) \div 9$ (b) $84 \div (-4)$

(c) $(-56) \div (-2)$

3. $(-1)$ शी गुणाकार केल्यास खालील उत्तरे मिळतील असे पूर्णांक शोधा.

© KSSB NOT TO BE REPUBLISHED

(a) 27 (b) $-31$

(c) $-1$ (d) 1

(e) 0

4. जर $47-56+14-8+2-8+5=-4$ तर पूर्ण राशीची गणना न करता $-47+56-14+8-2+8-5$ ची किंमत काढा.

5. तुम्हाला मागील वर्षी अभ्यासलेल्या कोलाट्झच्या अनुमानाचे स्मरण आहे का? पूर्णांकांसाठी त्यामध्ये बदल करुन प्रयत्न करा. तो नियम असा आहे की, कोणत्याही संख्येने सुरुवात करा. जर ती संख्या सम असेल तर तिची अर्धी (निम्मी) करा. जर ती विषम असेल तर तिला-3 ने गुणा आणि 1 मिळवा. हे पुन्हा पुन्हा करा. उदाहरणाचा क्रम खालीलप्रमाणे दर्शविला आहे.

$-7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 32 \rightarrow -16 \rightarrow -8 \rightarrow -4$

$\rightarrow -2 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

वेगवेगळ्या संख्यांनी सुरुवात करुन प्रयत्न करा, जशा (-21), (-6) इ. तुम्ही निरीक्षण केलेल्या नमुन्यांचे वर्णन करा.

गणिती बोल

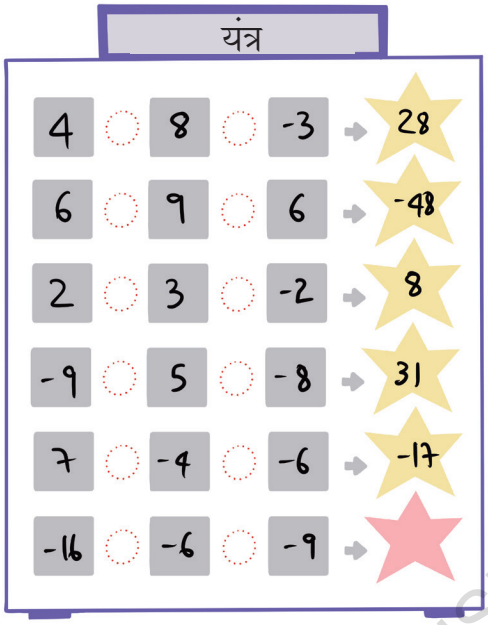
6. एका परीक्षेमध्ये, प्रत्येक बरोबर उत्तराला (+4) गुण दिले जातात आणि चुकीच्या उत्तराला (-2) गुण दिले जातात.

(a) अनिताने परीक्षेमधील सर्व प्रश्नांची उत्तरे सोडविली आहेत. तिची 15 उत्तरे बरोबर होती तरी सुद्धा तिला 40 गुण मिळाले, तर तिची किती उत्तरे चुकीची होती? परीक्षेमध्ये असलेल्या प्रश्नांची संख्या किती?

(b) अनिलची पाच उत्तरे बरोबर होती तरी त्याला (-10) गुण मिळाले? तर त्याची किती उत्तरे चुकीची होती? त्याने उत्तर न देता काही प्रश्न सोडले होते का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. नियम ओळखा - खाली दिलेल्या यंत्राने केलेल्या क्रिया शोधा.




8. अशी कल्पना करा की तुम्ही एका अशा ठिकाणी आहात, ज्या ठिकाणचे तापमान प्रत्येक तासाला $5^0$C ने कमी होते. जर सध्याचे तापमान $8^0$C असेल तर चार तासानंतरचे तापमान दर्शविणारी राशी लिहा.

9. हा गुणाकार असणाऱ्या तीन क्रमवार संख्या शोधा : (a) – 6, (b) 120.

10. एका पर ग्रहावरील समाजात पिब्स (pibs) नावाचे एक विचित्र चलन वापरले जाते. ज्यामध्ये फक्त दोन प्रकारची नाणी आहेत. एक +13 पिब्सचे नाणे आणि एक -9 पिब्सचे नाणे. तुमच्याकडे अशी अनेक नाणी आहेत. तर +85 पिब्स किंमत असलेली वस्तू खरेदी करणे शक्य आहे का?

    होय. आम्ही 10 नाण्यांची +13 पिब्स आणि 5 नाण्यांची -9 पिब्स वापरुन एकूण +85 पिब्स बनवू शकतो. दोन प्रकारच्या नाण्यांचा उपयोग करुन खालील एकूण रक्कम मिळविण्याचा प्रयत्न करा.

    (a) +20 (b) +40

    (c) –50 (d) +8

    (e) +10 (f) –2

    (g) +1

(सूचना : 13 आणि 9 चे कांही गुणक लिहिल्यास ते तुम्हाला मदत करु शकतात.)

(h) 1568 पिब्स किंमतीची वस्तू खरेदी करणे शक्य आहे का?

प्रयत्न करा

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. खालील किंमती काढा.

(a) $(32 \times (-18)) \div ((-36))$ (b) $(32\ ) \div ((-36) \times (-18))$

(c) $(25 \times (-12)) \div ((45) \times (-27))$ (d) $(280 \times (-7)) \div ((-8) \times (-35))$

12. खाली दिलेल्या राशींची चढत्या क्रमात मांडणी करा.

(a) $(-348) + (-1064)$ (b) $(-348) - (-1064)$

(c) $348 - (-1064)$ (d) $(-348) \times (-1064)$

(e) $348 \times (-1064)$ (f) $348 \times 964$

13. $(-548) \times 972 = -532656$ दिलेले आहे, तर खालील किंमती लिहा.

(a) $(-547) \times 972$ (b) $(-548) \times 971$

(c) $(-547) \times 971$

14. $207 \times (-33 + 7) = -5382$ दिलेले आहे, तर $-207 \times (33 - 7) =$ _____ (किंमत लिहा.)

15. $3, -2, 5, -6$ या संख्या फक्त एकदाच वापरा आणि '+', '–', आणि '×' या क्रिया फक्त एकदाच वापरुन आवश्यक तेथे कंस वापरुन अशी राशी लिहा की,

(a) सर्वात मोठे उत्तर शक्य असताना

(b) सर्वात लहान उत्तर शक्य असताना

16. कमीतकमी पाच वेगवेगळ्या प्रकारे पूर्णांक वापरुन रिकाम्या जागा भरा.

(a) $\square + \square \times \square = -36$ (b) $(\square - \square) \times \square = 12$

(c) $(\square - (\square - \square)) = -1$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# सारांश
# SUMMARY

- जेव्हा दोन पूर्णांकांचा गुणाकार केला जातो, तेव्हा जर गुणक (multiplier) आणि गुण्य (multiplicand) दोन्ही धन असतील, किंवा दोन्ही ऋण असतील, तर गुणाकार धन असतो. जर त्यापैकी एक धन आणि दुसरा ऋण असेल तर गुणाकार ऋण असतो.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −9 | −6 | −3 | 3 | 3 | 6 | 9 |
| −6 | −4 | −2 | 2 | 2 | 4 | 6 |
| −3 | −2 | −1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| −3 | −2 | −1 | × | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | −1 | −2 | −3 |
| 6 | 4 | 2 | 2 | −2 | −4 | −6 |
| 9 | 6 | 3 | 3 | −3 | −6 | −9 |

- जेव्हा दोन पूर्णांकांचा भागाकार केला जातो, तेव्हा जर भाज्य (dividend) आणि भाजक (divisor) दोन्ही धन असतील, किंवा दोन्ही ऋण असतील, तर भागाकार धन असतो. जर त्यापैकी एक धन आणि दुसरा ऋण असेल तर भागाकर ऋण असतो.
- 'a' आणि 'b' या कोणत्याही दोन पूर्णांकांसाठी $a \times b = b \times a$. पूर्णांकांचा गुणाकार हा क्रमनिरपेक्ष असतो.
- a, b आणि c या कोणत्याही तीन पूर्णांकांसाठी $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ पूर्णांकांचा गुणाकार हा साहचर्य असतो.
- a, b आणि c कोणत्याही तीन पूर्णांकासाठी $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ पूर्णांकांचा गुणाकार हा बेरजेवर वितरण असतो.

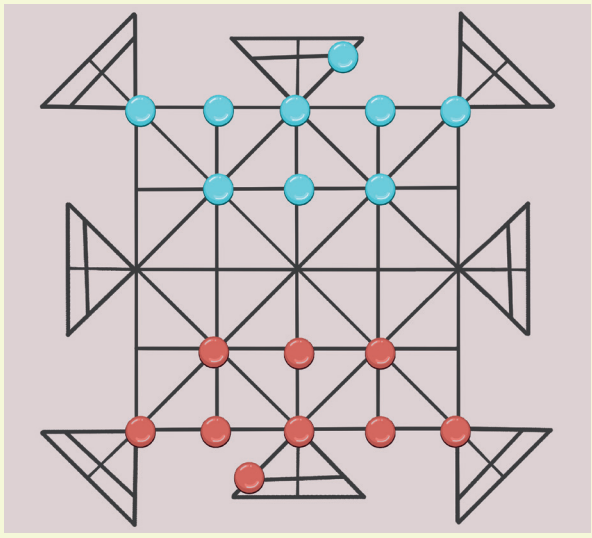
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



कोड्याची वेळ!

## तेरहूचू (Terhuchu)

तेरहूचू हा आसाम आणि नागालँडमध्ये खेळला जाणारा एक खेळ आहे. त्या फलकामध्ये 16 चौरस असून खालील आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कर्णांच्या खूणा केलेल्या असतात. हा फलक सहसा दगडाच्या मोठ्या तुकड्यावर कोरलेला किंवा फक्त मातीत रेखाटलेला असतो. या खेळामध्ये दोन खेळाडू असतात आणि आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे प्रत्येक खेळाडूजवळ 9 नाण्यांचा संच असतो एका संचातील नाणी ही दुसऱ्या संचातील नाण्यापेक्षा पूर्णपणे वेगळी असतात.



## उद्दिष्ट (Objective)

या खेळाचे मुख्य ध्येय प्रतिस्पर्ध्याची सर्व नाणी जिंकणे (हस्तगत करणे) हा आहे. असे करणारा पहिला खेळाडू हा विजयी होतो. प्रतिस्पर्ध्याच्या वैध चालींना रोखूनही एखादा खेळाडू जिंकू शकतो. जर खेळ अनिर्णीततेकडे जात असेल तर ज्याच्याजवळ जास्त नाणी आहेत तो खेळाडू जिंकतो.

## खेळण्याची पध्दत (Gameplay)

- खेळाची सुरुवातीची स्थिती वर दाखविल्याप्रमाणे असते.
- खेळाडू आळीपाळीने खेळतात. प्रत्येक फेरीत ते एका रेषेत एका नाण्याला कोणत्याही दिशेने जवळच्या मोकळ्या छेदन बिंदूवर हलवू शकतात किंवा जर प्रतिस्पर्ध्याचे नाणे लगतच्या छेदन बिंदूवर असेल आणि त्याच्या पलिकडे एक मोकळा छेदन बिंदू असेल तर ते प्रतिस्पर्ध्याच्या नाण्यावरुन उडी मारून त्या रिकाम्या छेदन बिंदूवर जाऊ शकतात.
- जर एखाद्या खेळाडूने प्रतिस्पर्ध्याच्या नाण्यावरुन उडी मारली तर ते नाणे हस्तगत केले असे मानले जाते आणि फलकावरून काढून टाकले जाते. एका चालीत एकापेक्षा जास्त नाणी हस्तगत करता येतात आणि प्रत्येक उडीनंतर दिशा बदलली जाऊ शकते.
- मुख्य चौरसाबाहेरील त्रिकोणी कोपऱ्यामधील एक नाणे एका छेदन बिंदूवरुन उडी मारून सरळ पुढील छेदन बिंदूवर जाऊ शकते. म्हणजेच ते एका रिकाम्या छेदन बिंदूवर उडी मारुन त्याच्या पलिकडील छेदन बिंदूवर जाऊ शकते.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

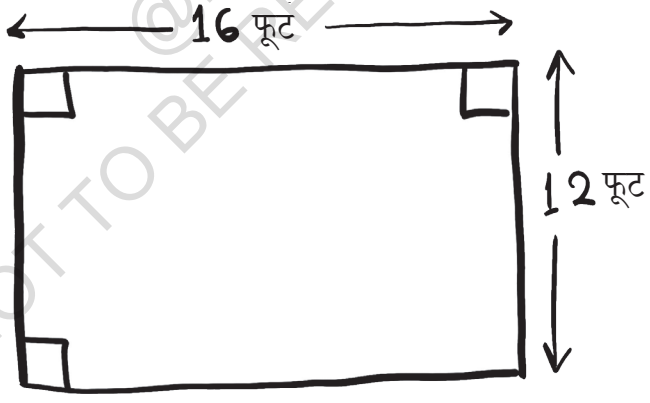
# 3 सामायिक आधार शोधणे (FINDING COMMON GROUND)

W2I4A3

## 3.1 सर्वात मोठा (The Greatest of All)

? समीक्षा आपले नवीन घर बांधत आहे. घराची मुख्य खोली ही 12 फूट × 16 फूट मापाची आहे. तिला असे वाटते की, खोलीच्या जमीनीला समान मापाच्या चौरसाकृती फरशा बसविल्या तर छान दिसतील. तिला फरशीची लांबी पूर्ण संख्येत फूटामध्ये हवी असून शक्य तितक्या कमीतकमी फरशा बसवायच्या आहेत. तर तिला कोणत्या मापाच्या फरशा विकत घ्याव्या लागतील?

चला तर, येथे वापरल्या जाऊ शकतील अशा सर्वात मोठ्या (कमाल) चौरसाकृती फरशा कशा शोधायच्या हे पाहूया. त्या खोलीची रुंदी 12 फूट आणि लांबी 16 फूट आहे.




@KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

फरशा खोलीच्या रुंदीमध्ये अगदी बरोबर बसण्यासाठी फरशीच्या बाजू 12 चे अवयव (विभाजक) असावे लागतील. याचप्रमाणे फरशा खोलीच्या लांबीमध्ये अगदी बरोबर बसण्यासाठी फरशीच्या बाजू 16 चे अवयव असावे लागतील. म्हणून फरशीच्या बाजू या 12 आणि 16 या दोन्हीचे अवयव असावे लागतील. 12 आणि 16 यांचे सामायिक अवयव कोणते आहेत?

12 चे अवयव 1,2,3,4,6 आणि 12 हे आहेत. 16 चे अवयव 1,2,4,8 आणि 16 हे आहेत. सामायिक अवयव 1, 2 आणि 4 हे आहेत.

म्हणून चौरसाकृती फरशीच्या बाजू 1 फूट, 2 फूट आणि 4 फूट असू शकतील? यापैकी तिला मोठ्यात मोठी चौरसाकृती आकाराची फरशी हवी आहे. असे का याचे स्पष्टीकरण तुम्ही देऊ शकता का?

त्यामुळे तिला 4 फूट मापाच्या फरशा बसविणे गरजेचे आहे.

या मापाच्या किती फरशा तिने विकत घेतल्या पाहिजेत?

प्रयत्न करा

जर समीक्षाने फरशीची लांबी ही पूर्ण संख्या फूट असावी असा आग्रह केला नसता तर त्यांची लांबी अपूर्णांक संख्या असू शकली असती का? त्यावेळी उत्तर बदलले असले का?

दोन किंवा अधिक संख्यांचा **महत्तम साधारण विभाजक - म.सा.वि. (HCF)** हा त्यांच्या सामायिक विभाजकांमधील सर्वात मोठा (महत्तम) सामायिक विभाजक असतो. त्याला मोठ्यात मोठा सामायिक भाजक (GCD) असेही म्हणतात.

मागील उदाहरणामध्ये 4 हा 12 आणि 16 चा म.सा.वि. आहे.



मागील पानावर दर्शविल्याप्रमाणे आपण दिलेली घटना समजून घेण्यासाठी कच्ची आकृती काढू शकतो. हे आकलन करण्यास आणि प्रश्न सोडविण्यास सोपे होते.

? लेखना दोन शेतांमधून भात विकत घेते आणि बाजारामध्ये नेऊन विकते. तिने एका शेतामधून 84 किग्रॅ. आणि दुसऱ्या शेतामधून 108 कि.ग्रॅ. भात विकत घेतले. तिला हे भात पोत्यांमध्ये भरायचे आहे, ते तिला असे करायचे आहे की प्रत्येक पोत्यात फक्त एकाच शेतातील भात असेल आणि सर्व पोत्यांचे वजन समान (पूर्ण किलो संख्येत) असेल. जर तिला कमीतकमी पोती वापरायची असतील तर प्रत्येक पोत्याचे वजन किती असावे लागेल ?

84 किलो भात समान वजनाच्या पोत्यांमध्ये विभागण्यासाठी आपल्याला 84 चे अवयव काढावे लागतील. त्याचप्रमाणे 108 चे सुध्दा अवयव काढणे गरजेचे आहे.

84 चे अवयव - 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 आणि 84 आहेत.

108 चे अवयव - 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54 आणि 108 हे आहेत.

लेखनाला दोन्ही शेतांसाठी समान वजनाची पोती वापरायची असल्यामुळे. पोत्याचे वजन सामायिक अवयव असला पाहिजेत. 84 आणि 108 चे सामायिक अवयव

1,2,3,4,6 आणि 12 हे आहेत.

दोन्ही पोत्यांमधील भात समान वजनाच्या पोत्यांमध्ये भरण्यासाठी ती यापैकी कोणतेही वजन वापरु शकते. परंतु तिला पोत्यांची संख्या कमीतकमी ठेवायची आहे.

तर पोत्यांची संख्या कमीतकमी होण्यासाठी तिने कोणते वजन निवडले पाहिजे?

? तुम्हाला इयत्ता 6 वी मधील उडयांचा जॅकपॉट हा खेळ आठवतो का? 'आद्य (मूळ) वेळ' हा धडा पहा. ग्रंपी हा एका संख्येवर खजिना ठेवतो आणि जंपी हा उडीचा पल्ला निवडतो व खजिना मिळविण्याचा प्रयत्न करतो. खालील प्रत्येक घटनेत, ज्या दोन संख्यांवर खजिना पत्ला आहे त्या दिलेल्या आहेत. तर सर्वात लांब उडीचा शोधा (0 पासून सुरु करून) ज्याचा वापर करून जंपी खजिना ठेवलेल्या दोन्ही संख्यावर पोहोचू शकेल.

© KSB NOT TO BE REPUBLISHED

(a) 14 आणि 30 (b) 7 आणि 11

(c) 30 आणि 50 (d) 28 आणि 42

? संख्या मिळविण्यासाठीच्या सर्वात लांब उडीचा पल्ला हा त्यांच्या म.सा.वि. शी समान आहे का? ते तसे का आहे याचे स्पष्टीकरण द्या.

आता पर्यंत आपण म.सा. वि. शोधण्यासाठी सर्व अवयवांची यादी तयार करत होतो. ज्या संख्यांना अनेक अवयव असतात तेथे हे कंटाळवाणे होऊ शकते. जसे की 30 आणि 50, 28 आणि 42 यासारख्या संख्यांसाठी तुम्ही निरीक्षण केले आहे.

काही वेळेला आपण काही अवयव विसरु शकतो, त्यामुळे चुका होऊ शकतात.

? ही प्रक्रिया सोपी केली जाऊ शकते का? ती अधिक विश्वासार्ह केली जाऊ शकते का?

असे आढळून येते की मूळ अवयवीकरण वापरल्याने ही प्रक्रिया सोपी होऊ शकते. आपण मूळ संख्या आणि मूळ अवयवीकरणाची उजळणी करून सुरुवात करुया.

## मूळ संख्या (Primes)

स्मरण करा की, मूळ संख्या ही 1 पेक्षा मोठी संख्या असते आणि तिला 1 आणि तीच संख्या हे विभाजक (अवयव) असतात. गेल्या वर्षी आम्ही 1 ते 100 मधील संख्याचे मूळसंख्यामधील नमुने शोधण्याचा प्रयत्न केला होता. आपण इरटोस्थेनेसची चाळण-सर्व मूळ संख्यांची यादी करण्याची पध्दत देखील पाहिली आहे.

© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

## मूळ अवयवीकरण (Prime Factorisation)

कोणतीही संयुक्त संख्या ही मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या स्वरुपात लिहिता येते. जोपर्यंत फक्त मूळ संख्या शिल्लक राहत नाहीत तोपर्यंत संयुक्त संख्येचे अवयव काढत रहावे.

स्मरण करा की यालाच आपण दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयवीकरण म्हणतो. उदा. 90 चे मूळ अवयवीकरण खालीलप्रमाणे शोधू शकतो.

$$90 = 3 \times 3 \times 2 \times 5$$

90 या संख्येचे अवयव $3 \times 30$ किंवा $2 \times 45$ किंवा अशा कांही वेगळ्या पध्दतीनी सुध्दा काढले जाऊ शकतात. या सर्वांमधून सारखेच मूळ अवयव मिळतील का?

आश्चर्यकारकपणे, मूळ अवयव हे नेहमी सारखेच असतात, कदाचित फक्त त्यांच्या क्रमामध्ये बदल झालेला असतो. उदाहरणार्थ, जर आपण $3 \times 30$ च्या पुढील अवयवीकरणाचा विचार केल्यास,

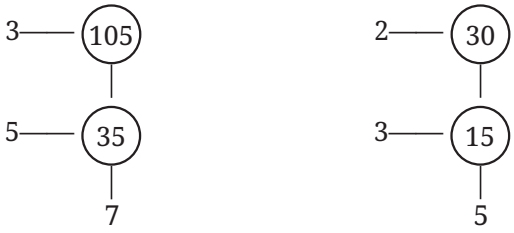
$$90 = 3 \times 30 = 3 \times 2 \times 15 = 3 \times 2 \times 3 \times 5$$

आम्हाला वरीलप्रमाणे अवयव मिळतात.

आपल्याला तेच अवयव मिळालेले आहेत, फक्त त्यांचा क्रम वेगळा आहे. लक्षात ठेवा की मूळ संख्येचे मूळ अवयवीकरण ही स्वतः मूळ संख्याच असते.

## मूळ अवयवीकरणाची प्रक्रिया (Procedure for Prime Factorisation)

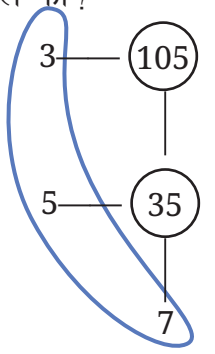
खाली काय घडून येते हे तुम्ही पाहू शकाल का?




प्रत्येक वर्तुळामधील संख्या ही तिच्या डावीकडील आणि खालील संख्यांचा गुणाकार आहे. उदाहरणार्थ, $30=2 \times 15$, $15=3\times5$, प्रत्येक वेळी संयुक्त संख्येचे अवयव असे पाडले जातात की, ज्यामध्ये किमान एक अवयव मूळ संख्या असते. जेव्हा आपण मूळ संख्येपर्यंत पोहचतो तेव्हा अवयवीकरण थांबते.

या दोन आकृत्या वापरुन 105 आणि 30 चे मूळ अवयवीकरण लिहू शकाल का?

आपण डाव्या बाजूला आणि तळाशी असलेले मूळ अवयव एकत्रीत करतो. त्यानंतर आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे मूळ अवयवीकरण तयार करतो.




$105 = 3 \times 5 \times 7$

अवयव पाडत असताना सहसा वर्तुळे वगळली जातात. आणि नमुन्यानुसार पायऱ्या वापरल्या जातात.




चला तर आपण या पद्धतीला **भागाकार पध्दत** म्हणू.

वरील पध्दतीचा उपयोग करुन 1200 चे मूळ अवयवीकरण शोधण्याचा प्रयत्न करा. जर आपण आधीची पध्दत वापरली तर त्याची गणना खालील प्रमाणे झाली असती.

$$1200 = 40 \times 30 = 5 \times 8 \times 5 \times 6 = \ldots$$

कोणती गणना सोडविण्यासाठी सोपी आहे?

## मूळ अवयवीकरण वापरुन संख्यांचे अवयव काढणे (Factors of a Number Using Prime Factorisation)

संख्येच्या मूळ अवयवीकरणापासून आपण त्या संख्येचे सर्व अवयव काढू शकतो. यांचा उपयोग दोन संख्यांचा म.सा.वि. शोधण्याची प्रक्रिया सोपी बनविण्यासाठी केला जाऊ शकतो.

840 ही संख्या आणि तिचे मूळ अवयव $2\times2\times2\times3\times5\times7$ हे विचारात घ्या.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? $2\times2\times7=28$ हा 840 चा अवयव आहे का?

? जर होय असेल, तर त्याला कितीने गुणले असता 840 येतील?

या प्रश्नांची उत्तरे देण्यासाठी, आपल्याला 840 च्या मूळ अवयवांचा क्रम खालील प्रमाणे घ्यावा लागेल (आठवा की अवयवांचा क्रम बदलल्याने गुणाकार बदलत नाही) :

$$840 = (2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 3 \times 5).$$

म्हणून,

$$840 = 28 \times 30$$

म्हणून $(2 \times 2 \times 7)=28$ हा 840 चा अवयव आहे, आणि त्याला 30 $(2 \times 3 \times 5)$ ने गुणले असता 840 मिळतात.

? याचप्रकारे, $2 \times 7=14$ हा 840 चा अवयव आहे का? कारण लिहा.

$(2 \times 2 \times 2)$ हा 840 चा अवयव आहे का? कारण लिहा.

$(3 \times 3 \times 3)$ हा 840 चा अवयव आहे का? कारण लिहा.

आपण ही कल्पना वापरून एखाद्या संख्येचे सर्व संभाव्य अवयव हे फक्त तिचे मूळ अवयव वापरून लिहू शकतो का?

? मूळ अवयवीकरण वापरुन 225 चे अवयव काढा.

225 चे मूळ अवयव पाडले असता, ते आपल्याला खालीलप्रमाणे मिळतात.

$225 = 5 \times 5 \times 3 \times 3.$

| | |
|---|---|
| 5 | 225 |
| 5 | 45 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

आपण पाहिले आहे की, या अवयवीकरणाचा कोणताही 'उपघटक' आपल्याला अवयव देतो. चला हे उपघटक आपण व्यवस्थितपणे जोडूया.

मूळ अवयव :3, 5.
दोन मूळ अवयवांचे संयोजन: $3 \times 3 = 9, 5 \times 5 = 25, 3 \times 5 = 15.$
तीन मूळ अवयवांचे संयोजन: $3 \times 3 \times 5 = 45, 3 \times 5 \times 5 = 75.$
चार मूळ अवयवांचे संयोजन: $3 \times 3 \times 5 \times 5 = 225.$ या अवयवांच्या यादीमध्ये 1 हा अवयव घेतला तर आपण पाहतो की, 225 चे अवयव 1,3,5,9,15,25,45,75, 225 हे आहेत.

? 225 चे सर्व अवयव या यादीमध्ये आले आहेत का ते तपासा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

खालील संख्यांच्या सर्व अवयवांची यादी करा.

(a) 90 (b) 105

(c) 132 (d) 360 (या संख्येला 24 अवयव आहेत.)

(e) 840 (या संख्येला 32 अवयव आहेत.)

कांही मूळ अवयवीकरणांचे निरीक्षण केल्यानंतर अंशू असे सांगतो की, ''संख्या जितकी मोठी, तितकेच तिचे मूळ अवयवीकरण जास्त लांब असते.''

अंशूच्या दाव्याविषयी तुम्हाला काय वाटते?

आपण पाहू शकतो की ते खरे नाही. उदाहरणार्थ 96 आणि 121 च्या मूळ अवयवीकरणाकडे पहा.

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$121 = 11 \times 11.$$



गणितामध्ये पुराव्याशिवाय किंवा पडताळ्याविना केलेल्या विधानांना किंवा दाव्यांना 'अनुमान' म्हणतात. अंशूचा दावा हा एक अनुमान आहे. आपण हे अनुमान एका उदाहरणाने खोडून काढले आहे; म्हणजेच असे उदाहरण जे अनुमान खोटे ठरविते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## मूळ अवयवीकरण वापरुन संख्यांचा म.सा.वि. शोधणे (Finding the HCF of Numbers Using Prime Factorisation)

सामायिक अवयव आणि महत्तम साधारण विभाजक (म.सा.वि.) शोधण्यासाठी केलेल्या निरीक्षणांचा वापर कसा करायचा ते आता आपण पाहू.

**उदाहरण 1**: 45 आणि 75 चा सामायिक अवयव (विभाजक) आणि म.सा.वि. काढा

दोन्ही संख्यांचे मूळ अवयवीकरणा करा.

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$
$$75 = 3 \times 5 \times 5.$$

आपण पाहिले आहे की,

45 चे अवयव हे 3×3×5 मधील अवयवांचे उपघटक आहेत आणि 75 चे अवयव हे 3×5×5 मधील अवयवांचे उपघटक आहेत.

त्यामुळे सामायिक विभाजक (अवयव) हे दोन्ही अवयवीकरणांचे उपघटक असले पाहिजेत. तुम्ही ते लिहू शकता का?



समस्या शोधताना किंवा सोडविताना तुम्हाला सुध्दा काही अनुमाने सुचू शकतात. तुम्ही त्यांची कारणे शोधण्याचा आणि ती पडताळून पाहण्याचा प्रयत्न करून त्याबद्दल वर्गमित्रांना सांगू शकता.

| | |
|---|---|
| ③ × 3 × 5<br>③ × 5 × 5 | 3 |
| 3 × 3 × ⑤<br>3 × 5 × ⑤ | 5 |
| 3 × ③ × ⑤<br>③ × ⑤ × 5 | 3 × 5 |

3,5, 3 × 5 = 15 हे दोन्हींचे उपघटक आहेत, आणि म्हणून ते 1 सह सामायिक अवयव आहेत. यांच्यापैकी सर्वात मोठा 15 आहे. म्हणून त्यांचा म.सा.वि. = 15 आहे.

? **उदाहरण 2**: 112 आणि 84 चे सामायिक विभाजक आणि म.सा.वि. काढा.

मूळ अवयवीकरणाने गणना करून, आपल्याला मिळेल

112 = 2 × 2 × 2 × 2 × 7 आणि

84 = 2 × 2 × 3 × 7

सामायिक उपघटक शोधून, आपल्याला खालीलप्रमाणे अवयव मिळतील.

| | |
|---|---|
| ② × 2 × 2 × 2 × 7<br>② × 2 × 3 × 7 | 2 |
| 2 × 2 × 2 × 2 × ⑦<br>2 × 2 × 3 × ⑦ | 7 |
| 2 × ② × ② × 2 × 7<br>② × ② × 3 × 7 | 2 × 2 |
| ② × 2 × 2 × 2 × ⑦<br>2 × ② × 3 × ⑦ | 2 × 7 |
| ② × ② × 2 × 2 × ⑦<br>② × ② × 3 × ⑦ | 2 × 2 × 7 |

©KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

यांच्यापैकी महत्तम सामायिक अवयव, म.सा.वि. हा $2\times2\times7=28$ आहे.

**उदाहरण 3**: 96 आणि 275 चे सामायिक अवयव आणि म.सा.वि. शोधा

आपण पुढीलप्रमाणे अवयव लिहू.

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$275 = 5 \times 5 \times 11.$$

येथे उपघटक नाहीत म्हणजेच या दोन अवयवीकरणात सामायिक अवयव नाही. त्यामुळे फक्त 1 हा सामायिक अवयव आहे. हाच त्यांचा म.सा.वि आहे.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

खालील संख्यांचे सामायिक अवयव आणि म.सा.वि. शोधा.

(a) 50, 60 (b) 140, 275

(c) 77, 725 (d) 370, 592

(e) 81, 243

त्यांच्या अवयवांची यादी न करता प्रत्यक्षपणे म.सा.वि. कसा शोधाल?

**उदाहरण 4**: 30 आणि 72 चा म.सा.वि. शोधा.

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

आपल्याला म.सा.वि. शोधताना सर्वात मोठ्या सामायिक उपघटकाची गरज आहे. स्पष्टपणे, त्यामध्ये फक्त तेच मूळ अवयव असतील जे दोन्ही अवयवीकरणात आढळतात. या उदाहरणात ते 2 आणि 3 आहेत.

त्यामध्ये 2 हे किती वेळा येतात?

30 च्या मूळ अवयवीकरणामध्ये फक्त एकदा 2 आहेत. त्यामुळे सर्वात मोठ्या सामायिक उपघटकामध्ये फक्त एकदाच 2 आहेत.

त्यामध्ये 3 किती वेळा असतील?

30 च्या मूळ अवयवीकरणामध्ये फक्त एकदा 3 आहेत त्यामुळे सर्वात मोठ्या सामायिक उपघटकामध्ये फक्त एकदाच 3 आहेत.

ते खालीलप्रमाणे दर्शविलेले आहे.

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{म.सा.वि.} = 2 \times 3 = 6$$

म्हणून, म.सा.वि. शोधण्यासाठी, आपण सामायिक मूळ अवयव ओळखतो आणि दिलेल्या संख्यांच्या अवयवीकरणामध्ये त्यापैकी प्रत्येक अवयव कमीतकमी कितीवेळा येतो याचा शोध

NOT TO BE REPUBLISHED @KBS

घेतो.

**उदाहरण 5**: 225 आणि 750 चा म.सा.वि. काढा.

$$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$$
$$750 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$$

सामायिक मूळ संख्या 3 आणि 5 आहेत. आता आपण सर्वात मोठा उपघटक शोधूया. यामध्ये 3 हे किती वेळा आले आहेत?

750 मध्ये 3 हे एकदाच आले आहेत. जे दोन्ही संख्यांमध्ये कमीतकमी वेळा आले आहेत. म्हणून सर्वात मोठ्या उपघटकात 3 फक्त एकंदाच येतात. यामध्ये 5 हे किती वेळा आले आहेत?

225 मध्ये 5 हे कमीत कमी 2 वेळा आले आहेत. म्हणून सर्वात मोठ्या उपघटकात 5 हे 5 हे 2 वेळा असले पाहिजेत. म्हणजेच $5 \times 5$.

$225 = 3 \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{5}$

$750 = 2 \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{5} \times 5$

$HCF = 3 \times 5 \times 5 = 75$

2 पेक्षा जास्त संख्यांचा म.सा.वि. काढण्यासाठी, सामायिक मूळ अवयवांचा सर्वात मोठा सामायिक उपघटक शोधण्यासाठी हीच पध्दत वापरली जाऊ शकते.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील संख्याचा म.सा.वि. शोधा.
   (a) 24, 180 (b) 42, 75, 24
   (c) 240, 378 (d) 400, 2500
   (e) 300, 800

2. 72 आणि 144 या संख्या विचारात घ्या. त्यांचे संयुक्त संख्यामध्ये अवयव पाडले आहेत असे समजा, जसे की $72 = 6 \times 12$ आणि $144 = 8 \times 18$. हे पाहून कोणीही या दोन संख्यामध्ये 1 व्यतिरिक्त कोणताही समाईक अवयव नाही असे म्हणू शकेल का? कारण सांगा.

## 3.2 सर्वात लहान पण शेवटची नाही! (Least, but not Last!)

अंशू आणि गुणा कापडाच्या पट्ट्यांपासून तोरणे बनवितात. तोरण बनविण्यासाठी अनेक पट्ट्या एकापुढे एक ठेवल्या जातात. अंशू 6 सें.मी. लांबीच्या पट्ट्या वापरतो आणि गुणा 8 सें.मी. लांबीच्या पट्ट्या वापरतो. जर दोघांनाही समान लांबीची तोरणे बनवायची आहेत तर तोरणांची सर्वात शक्य तितकी कमी लांबी किती



असू शकेल?

त्या दोघांनीही बनविलेल्या सर्वात लहान तोरणाची लांबी किती आहे?

$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$750 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

$HCF = 3 \times 5 \times 5 = 75$

अंशू प्रत्येकी 6 सें.मी. कापडाच्या पट्ट्या वापरतो. तो जे तोरण बनवितो ते 6 च्या पटीत असेल तर. त्यामुळे तोरणाची लांबी 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 सें.मी. इत्यादी असेल.

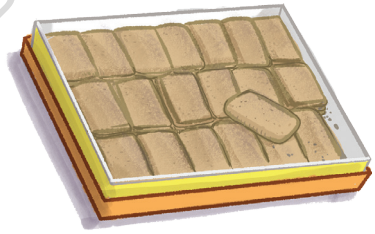
याचप्रमाणे गुणाणे बनविलेले तोरण 8 च्या पटीतील असेल त्यामुळे त्याने बनविलेल्या तोरणाची लांबी 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 सें.मी. इ.असेल.

यावरून आपण पाहू शकतो की, जर दोघांनाही समान लांबीची तोरणे बनवायची असतील, तर तोरणांची लांबी 6 आणि 8 चा सामायिक विभाज्य गुणक असली पाहिजे. या दोन याद्यामधून, आपण पाहू शकातो की, 24 आणि 48 हे 6 आणि 8 चे दोन सामायिक विभाज्य आहेत. म्हणून 24 सें. मी. आणि 48 सें.मी. लांबीची तोरणे अंशू आणि गुणा शिवू शकतात.

त्यापैकी 24 ही लहानात लहान आहे म्हणून 24 सें. मी. ही सर्वात लहान तोरणाची लांबी आहे, जी दोघेही शिवू शकतात. 24 ही 6 आणि 8 च्या सर्व सामायिक विभाज्यांमधील सर्वात लहान (लघुतम) संख्या आहे.

सर्वात मोठ्या सामायिक विभाज्याबद्दल तुमचे मत काय? अशा प्रकारची संख्या अस्तित्वात आहे का?

? एक मिठाईचे दुकान दर सोमवारी शाळकरी मुलांना मोफत गजाक देते. आज सोमवार आहे आणि कमलने गजाक खाण्याचा आनंद लुटला. परंतु ती दर 10 दिवसांनी एकदा मिठाईच्या दुकानाला भेट देते. पुढच्या वेळी तिला मिठाईच्या दुकानातून फुकट गजाक कधी मिळेल? (उत्तर दिवसाच्या संख्येत द्या.)



गजाक ही मिठाई तीळ, गूळ आणि तुपापासून बनविली जाते.



जसे आपण यापूर्वी पाहिले आहे, परिस्थितीची कल्पना केल्याने किंवा चित्ररुपाद्वारे आपल्याला हे पाहण्यास मदत झाली की, ही समस्या पट्ट्यांच्या लांबीच्या पटी वापरून सोडविली जाऊ शकते.

दुकान दर सोमवारी मोफत मिठाई देत असल्याने, ते पुन्हा मिठाई मोफत देणारे दिवस

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, ... इत्यादी.

या 7 च्या पटीतील संख्या (विभाज्य गुणक) आहेत.

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 दिवसांनी कमल पुन्हा मिठाईच्या दुकानात येईल.

या 10 च्या पटीतील संख्या (विभाज्य/गुणक) आहेत.

कमल पुन्हा मोफत मिठाई कधी खाईल? हे वरील गुणकांच्या दोन्ही क्रमांमधील सामायिक असलेल्या दिवशी घडेल. असे दिसून येते की, हे पहिल्यांदा 70 दिवसांनी घडून येईल.

© BTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लक्षात घ्या की, येथे सुध्दा 70 ही 7 आणि 10 च्या सर्व सामायिक विभाज्यांमधील सर्वात लहान (लघुत्तम) संख्या आहे.

या दोन्ही समस्यांचे उत्तर लघुत्तम सामायिक विभाज्य आहेत.

दोन किंवा अधिक संख्यांचा **लघुतम साधारण विभाज्य-ल.सा.वि (LCM)** हा त्यांच्या सामायिक विभाज्यांमधील सर्वात लहान (लघुत्तम) सामायिक विभाज्य असतो.

? तुम्हाला इयत्ता 6 वी मधील इडली-वडा (Idli-wada) खेळ आठवतो का (आद्य (मूळ) वेळ हा धड़ा पहा)? दोन संख्या निवडल्या जातात आणि जेव्हा खेळाडू त्यांच्या पटीतील संख्येवर येतात तेव्हा ती संख्या कोणत्या पटीत आहे यावर अवलंबून 'इडली' किंवा 'वडा' म्हटले जाते. जर ती संख्या सामायिक विभाज्य असेल तर 'इडली-वडा' म्हटले पाहिजे. खाली प्रत्येक समस्येसाठी 'इडली' आणि 'वडा' यांच्याशी संबंधीत दोन संख्या दिल्या आहेत. 'इडली-वडा' म्हटले जाईल अशी पहिली संख्या शोधा.

(a) 4 आणि 6 (b) 7 आणि11

(c) 14 आणि 30 (d) 15 आणि 55

यांचे उत्तर नेहमी दोन संख्यांचा ल.सा.वि. असते का? स्पष्ट करा.

म.सा.वि प्रमाणेच विभाज्यांची (गुणकांची) यादी करून लसावि शोधण्याची प्रक्रिया कंटाळवाणी असू शकते. हे तुम्ही (c) आणि (d) साठी पाहिले आहे.

मूळ अवयवीकरण ल.सा.वि. शोधण्याची प्रक्रिया सुलभ करु शकते.

? आपण दोन संख्यांचे मूळ अवयव वापरुन त्यांचा ल.सा.वि. कसा शोधू शकतो?

## मूळ अवयवीकरणाने ल.सा.वि. शोधणे (Finding LCM through Prime Factorisation)

आपण पाहिले आहे की, संख्येचा प्रत्येक अवयव हा तिच्या मूळ अवयवीकरणाचा एक उपघटक घेऊन तयार होतो. या वस्तुस्थितीचा वापर आपण दोन संख्यांचा म.सा.वि. शोधण्यासाठीच्या पद्धतीकरिता केला आहे. त्याचप्रमाणे आपण ल.सा.वि. शोधण्यासाठी एक पध्दत तयार करु शकतो.

आपण याची सुरुवात एका संख्येचे मूळ अवयवीकरण आणि त्या संख्येच्या विभाज्यांची तुलना करुन करुया. उदाहरणार्थ, आपण 36 आणि तिचा विभाज्य 648(=36×18) घेऊया.

आपल्याला खालीलप्रमाणे अवयवीकरण मिळते,

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3,$$

$$648 = 36 \times 18 = (2 \times 2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3).$$

तुम्ही कोणते निरीक्षण कराल? आपण पाहू शकतो की, विभाज्याच्या मूळ अवयवामध्ये

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

दिलेल्या संख्येच्या मूळ अवयवांसह आणखी कांही मूळ अवयव समाविष्ट असतात. हे प्रत्येक संख्येच्या पटीबरोबर घडून येईल का?

ल.सा.वि. काढण्यासाठी याचा वापर होऊ शकतो का?

**उदाहरण 6** : 14 आणि 35 यांचा ल.सा.वि. काढा.

आपल्याला मिळते की,

$$14 = 2 \times 7$$
$$35 = 5 \times 7.$$

सामायिक विभाज्यामध्ये प्रत्येक मूळ अवयव हा उपघटक असला पाहिजेत $2\times7$ हा उपघटक आणि $5\times7$ हा उपघटक आहे.

उदाहरणार्थ,

$2\times7\times5\times7\times3$ हा 14 आणि 35 चा सामायिक विभाज्य आहे.

$2\times2\times5\times7\times7\times11$ हा आणखी एक सामायिक विभाज्य आहे.

$2\times3\times5\times7$ हा सामायिक विभाज्य आहे का?

14 आणि 35 च्या सर्व सामायिक विभाज्यांमधील सर्वात लहान (लघुत्तम) कोणता आहे?

तो $2\times5\times7 = 70$ आहे.

कारण $2\times5\times7$ मध्ये $14=2\times7$ आणि $35=5\times7$ हे दोन्ही आहेत, आणि $2\times5\times7$ मधून कोणतीही संख्या काढली तर अशी संख्या मिळते जी 14 आणि 35 चा सामायिक विभाज्य नाही.

**उदाहरण 7** : 96 आणि 360 चा ल.सा.वि. शोधा.

आपल्याकडे आहे की,

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

प्रत्येक सामायिक विभाज्यामध्ये 96 आणि 360 या दोन्हींचे मूळ अवयव असावे लागतील ल.सा.वि साठी आपल्याला अशा सर्वात लहान संख्येची गरज आहे. प्रत्येक मूळ अवयव पाहून आपण त्यांचा ल.सा.वि काढूया.

दोन्ही संख्यामध्ये येणारे मूळ अवयव 2,3 आणि 5 हे आहेत.

आता, आपण प्रत्येक मूळ अवयव किती वेळा येतात ते पाहूया.

ल.सा.वि मध्ये 2 हे किती वेळा येतात?

96 च्या अवयवीकरणात $2\times2\times2\times2\times2$ (2 हे 5 वेळा येतात) 360 च्या अवयवीकरणात $2\times2\times2$ (2 हे तीन वेळा येतात) ल.सा.वि. चा भाग म्हणून 2 हे 5 वेळा निवडल्यास त्यामध्ये दोन्हींच्या उपघटकांचा समावेश होतो.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2 हे 5 पेक्षा जास्त वेळा निवडल्यास एक सामायिक विभाज्य मिळेल; परंतु तो सर्वात लहान असणार नाही. हे असे का ते तुम्ही पाहू शकाल का?

? ल.सा.वि. मध्ये 3 किती वेळा येतात?

96 च्या अवयवीकरणात 3 (3 हे एकदा) येतात आणि 360 च्या अवयवीकरणात 3×3 (3 हे दोन वेळा) येतात त्यामुळे ल.सा.वि. चा भाग म्हणून 3 हे दोनवेळा निवडल्यास त्यामध्ये दोन्हींचे सर्व उपघटक येतात.

? ल.सा.वि. मध्ये 5 किती वेळा येतात?

96 च्या अवयवीकरणात 5 हे येत नाहीत. आणि 360 च्या अवयवीकरणात 5 हे एकदा येतात म्हणून आपण ल.सा.वि. चा भाग म्हणून 5 एकदाच निवडू.

म्हणून 96 आणि 360 चा ल.सा.वि. $2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=1440$ होतो.

दोन संख्यांचा ल.सा.वि. काढताना, आपण दोन्ही संख्याच्या अवयवीकरणात येणारे सर्व अवयव ओळखू शकतो आणि प्रत्येक अवयव जास्तीत जास्त किती वेळा येतो ते शोधू शकतो. ही प्रक्रिया दोनपेक्षा अधिक संख्यांचा ल.सा.वि. शोधण्यासाठी वाढविली जाऊ शकते.

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

खालील संख्यांचा ल.सा.वि. काढा

(a) 30, 72 (b) 36, 54

(c) 105, 195, 65 (d) 222, 370

## 3.3 नमुने, गुणधर्म आणि एक सुंदर पद्धत! (Patterns, Properties, and a Pretty Procedure!)

6 आणि 18 यांचा म.सा.वि. 6 आहे, जी दिलेल्या दोन संख्यांपैकी एक संख्या आहे.

? अशा आणखी काही संख्यांच्या जोड्या शोधा ज्यामध्ये म.सा.वि. हा दोन संख्यापैकी एक असतो, अशा संख्यांच्या जोड्यांचे वर्णन आपण कसे करू शकतो?

आपण पाहू शकतो की, जेव्हा एक संख्या ही दुसऱ्या संख्येचा अवयव असते तेव्हा हे घडते. याचा अर्थ असा सुध्दा होतो की, दुसरी संख्या ही पहिल्या संख्येची विभाज्य असते. असे विधान जे एका नमुन्याचे किंवा गुणधर्माचे वर्णन करते आणि ते सर्व शक्य घटनांमध्ये सत्य असते त्याला **सामान्य विधान** असे म्हणतात. या प्रक्रियेला **सामान्यीकरण** असे म्हणतात.




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बीजगणिताचा वापर करुन देखील अशा सामान्यीकरणाचे वर्णन केले जाऊ शकते. ते कसे ते आपण पाहूया.

जर 'n' ही एक संख्या असेल तर 'n' च्या पटीतील कोणतीही संख्या धन पूर्णांकाला ही 'n' ने गुणून लिहिली जाते. उदाहरणार्थ, जर आपण 'n' आणि 5n घेतले ($5 \times n$) तर 5n हा 'n' चा गुणक आहे, आणि n हा 5n चा अवयव आहे.

n आणि 5n चा म.सा.वि. = n.

? हा गुणधर्म पूर्ण करणाऱ्या संख्यांची जोडी (म्हणजेच दोन पैकी एक संख्या म.सा.वि. असतो),

(a) जर 'm' ही एक संख्या असेल तर दुसरी संख्या कोणती असेल?

(b) जर '7k' ही एक संख्या असेल तर दुसरी संख्या कोणती असेल?

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील संख्यांच्या जोड्यांसाठी म.सा.वि. विषयी सामान्य विधान बनवा. सामान्य विधानाकडे येण्यापूर्वी तुम्ही खालील उदाहरणे विचारात घेऊ शकता. ती सत्य आहेत का? यासाठी याविषयी शक्य ते स्पष्टीकरण द्या.

गणिती बोल

   (a) दोन क्रमवार समसंख्या.

   (b) दोन क्रमवार विषमसंख्या.

   (c) दोन सम संख्या.

   (d) दोन क्रमवार संख्या.

   (e) दोन सह-मूळ संख्या.

तुमची निरीक्षणे तुमच्या वर्गात सांगा.

2. 3 आणि 24 चा ल.सा.वि. 24 आहे. (जो दिलेल्या दोन संख्यांपैकी एक आहे.)

   (a) अशा आणखी काही संख्यांच्या जोड्या शोधा, जेथे ल.सा.वि. हा दोन संख्यापैकी एक संख्या आहे.

   (b) अशा संख्यांविषयी एक सामान्य विधान बनवा. बीजगणित वापरुन अशा संख्यांच्या जोड्यांचे वर्णन करा.

3. खालील संख्यांच्या जोड्यांसाठी ल.सा.वि. विषयी सामान्य विधान तयार करा सामान्य विधानाकडे येण्यापूर्वी तुम्ही खालील उदाहरणे विचारात घेऊ शकता. ती सत्य का आहेत यासाठी शक्य ते स्पष्टीकरण द्या.

   (a) 3 च्या पटीतील दोन संख्या

   (b) दोन क्रमवार सम संख्या

   (c) दोन क्रमवार संख्या

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(d) दोन सह-मूळ संख्या

? जर दोन्ही संख्या दुप्पट केल्या तर त्या दोन संख्याचा म.सा.वि. किती होईल? कांही संख्याच्या जोड्या घेऊन शोधा. त्यांचा म.सा.वि. सुध्दा दुप्पट का होईल हे तुम्ही सांगू शकाल का?

जर दोन्ही संख्या दुप्पट केल्या तर दोन्ही संख्याच्या मूळ अवयवांमध्ये 2 हा एक जादा अवयव येतो. या 2 चा सामायिक उपघटक म्हणून सर्वात मोठ्या अवयवात समावेश होतो त्यामुळे म.सा.वि. दुप्पट होतो. उदाहरणार्थ, 270 आणि 50 या संख्या विचारात घ्या.

$$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$50 = 2 \times 5 \times 5$$

म.सा.वि. $= 2 \times 5 = 10$

जर आपण त्या संख्या दुप्पट केल्या तर 540 आणि 100 मिळतात.

$$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

म.सा.वि. $= 2 \times 2 \times 5 = 20$.

? $14 \times 16$ , $14 \times 9$ या 14 च्या पटीतील दोन संख्यांचा विचार करा. त्यांचा म.सा.वि. किती?

स्पष्टपणे 14 हा समाईक अवयव आहे. तोच मोठ्यात मोठा सामाईक अवयवसुध्दा आहे का? ते पाहण्यासाठी, आपण मूळ अवयवीकरणाने गणना करुया.

$$14 \times 6 = \underbrace{2 \times 7}_{14} \times 2 \times 3$$
$$14 \times 9 = \underbrace{2 \times 7}_{14} \times 3 \times 3$$

म.सा.वि. $= 14 \times 3 = 42$.

? येथे आणखी काही संख्या आहेत जेथे दोन्ही संख्या या एकाच संख्येच्या पटीत आहेत. त्यांचा म.सा.वि. शोधा.

(a) $18 \times 10, 18 \times 15$ (b) $10 \times 38, 10 \times 21$

(c) $5 \times 13, 5 \times 20$ (d) $12 \times 16, 12 \times 20$

? समस्या (b) प्रमाणेच यापैकी कोणत्या घटनांमध्ये म.सा.वि. हा सामायिक गुणकाइतकाच आहे? जेथे म.सा.वि. 10 अशा ओह. हे केव्हा घडते हे समजून घेण्यासाठी याप्रकारच्या आणखी काही उदाहरणांचा शोध घ्या.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# म.सा.वि आणि ल.सा.वि. साठी कार्यक्षम पध्दती (Efficient Procedures for HCF and LCM)

उजवीकडील पद्धतीचे निरीक्षण करा. ती कशी केली जाते ते तुम्ही स्पष्ट करू शकाल का?

हे मूळ अवयीकरण पद्धतीप्रमाणेच आहे. प्रत्येक पायरीमध्ये दोन्ही संख्यांना एका सामायिक अवयवाने भाग दिला जातो आणि पुढील ओळीमध्ये दोन भागाकार लिहिले जातात. ही क्रिया दोन्ही संख्यांचा कोणताही सामायिक मूळ अवयव येणार नाही तोपर्यंत निरंतर चालू राहते.

| | |
|---|---|
| 2 | 84, 180 |
| 2 | 42, 90 |
| 3 | 21, 45 |
| | 7, 15 |

? 84 आणि 180 चा म.सा.वि. शोधण्यासाठी ही पध्दत कशी वापरली जाते याचा शोध घ्या.

(**सूचना** : निरीक्षण करा की, 84 = 2×2×3×7 आणि 180=2×2×3×15 हे मूळ अवयवीकरणाप्रमाणेच आहे.)

? खालील उदाहरणांमध्ये म.सा. वि. काढा

| | |
|---|---|
| 2 | 300, 150 |
| 5 | 150, 75 |
| 5 | 30, 15 |
| 3 | 6, 3 |
| | 2, 1 |

म.सा.वि. = 2 × 5 × 5 × 3

| | |
|---|---|
| 2 | 630, 770 |
| 5 | 315, 385 |
| 7 | 63, 77 |
| | 9, 11 |

म.सा.वि. = 2 × 5 × 7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ही प्रक्रिया फक्त म.सा.वि. काढण्यासाठीच नाही तर ल.सा.वि. शोधण्यासाठी सुध्दा वापरली जाते, ती कशी ते तुम्ही पाहू शकाल का?

| | |
|---|---|
| 2 | 300, 150 |
| 5 | 150, 75 |
| 5 | 30, 15 |
| 3 | 6, 3 |
| | 2, 1 |

ल.सा.वि. = 2 × 5 × 5 × 3 × 2 × 1

| | |
|---|---|
| 2 | 630, 770 |
| 5 | 315, 385 |
| 7 | 63, 77 |
| 3 | 9, 11 |
| | 3, 11 |

ल.सा.वि. = 2 × 5 × 7 × 3 × 3 × 11

? हे ल.सा.वि. का आहेत?

(**सूचना**: 300 आणि 150 चा ल.सा.वि म्हणून चिन्हांकित केलेल्या अवयवांच्या गुणाकारामध्ये 300 आणि 150 या दोन्हींचे मूळ अवयवीकरण असेल का? ही सर्वात लहान संख्याच आहे का?)



गुणा म्हणतो की ''मला म.सा.वि. / ल.सा.वि शोधण्यासाठी अवयव काढण्याचा एक उत्तम मार्ग मिळाला. हा वर्गामध्ये शिकविलेल्या पेक्षा जलद आहे!''

"300 आणि 150 या संख्यासाठी, मी प्रथम त्या दोन संख्यांना थेट 50 ने भाग देऊ शकतो''.

50×3 हा म.सा.वि. होईल.

50×3×2×1 हा ल.सा.वि होईल''.

अंशुने सुध्दा मोठ्यात मोठा सामायिक अवयव काढण्याचा प्रयत्न केला.

| | |
|---|---|
| 50 | 300, 150 |
| 3 | 6, 3 |
| | 2, 1 |



''630 आणि 770 या दोन्ही संख्यांना मी प्रथम 10 ने भाग देतो. आता मी त्यांना 7 ने भाग देतो.

10×7=70 हा म.सा.वि. होईल.

10×7×9×11=6930 ल.सा.वि. होईल

हे का कार्य करते हे तुम्ही पाहू शकाल का?

| | |
|---|---|
| 10 | 630, 770 |
| 7 | 63, 77 |
| | 9, 11 |

आपल्याला एकावेळी फक्त एकाच मूळ अवयवाने भाग देण्यापुरते मर्यादित करण्याची आवश्यकता नाही. आपण दोन्ही संख्यांना कोणत्याही सामायिक अवयवाने भाग जातो ते ओळखून भाग देऊ शकतो.

? खालील संख्यांच्या जोड्यांसाठी तुम्ही ही पध्दत वापरून पाहू शकाल का?

(a) 90 आणि 150 (b) 84 आणि 132

प्रयत्न करा

## ल.सा.वि. आणि म.सा.वि. या दोन्हींचा समावेश असलेला गुणधर्म (Property Involving both the HCF and the LCM)

? दोन संख्यांचा गुणाकार किंवा ल.सा.वि. यापैकी कोणते मोठे आहे?

? तुम्ही उदाहरणांद्वारे वरील विधानाचे विश्लेषण करु शकता. त्यानंतर तर्क लावण्याचा किंवा सिद्ध करण्याचा प्रयत्न करा. ल.सा.वि. हा त्या संख्यांच्या गुणाकारपेक्षा कधीही मोठा का नसतो? (**सूचना**: गुणाकार देखील दोन संख्यांच्या सामायिक गुणक असतो का?)

दोन संख्यांचा गुणाकार, त्यांचा म.सा.वि आणि ल.सा.वि. यांच्यामध्ये एक मनोरंजक संबंध आहे.

? 105 आणि 95 या संख्यांचा विचार करा आणि त्यांचा ल.सा.वि. काढा.

मूळ अवयवीकरण करुन त्यांचे अवयव काढूया.

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$95 = 5 \times 19$$

$$\text{ल.सा.वि.} = 3 \times 5 \times 7 \times 19$$

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

चला अवयवांच्या स्वरुपात त्यांचा गुणाकार विचारात घेऊया.

$$105 \times 95 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 19$$

ल.सा.वि. हा त्यांच्या गुणाकाराचा अवयव आहे का? जर होय असेल तर गुणाकार मिळविण्यासाठी त्याला कितीने गुणले पाहिजे? हे आपण पाहू शकतो की,

$$105 \times 95 = \text{ल.सा.वि} \times 5$$

? खालील उदाहरणामध्ये ल.सा.वि. हा त्यांच्या गुणाकाराचा अवयव आहे का शोधा. जर असेल तर ल.सा.वि. शी गुणून गुणाकार मिळणारी संख्या ओळखा. तुम्हाला कोणता नमुना दिसून येतो का? खालील संख्याचा उपयोग कराव तपासा.

(a) 45, 105 (b) 275, 352 (c) 222, 370

? तुम्हाला दिसून आले का, प्रत्येक उदाहरणामध्ये, ज्या संख्येने ल.सा.वि. ला गुणले असता गुणाकार मिळतो ती प्रत्यक्षात म.सा.वि. आहे का?

म्हणून आमचे निरिक्षण खालील मुद्दा सुचविते

म.सा.वि. × ल.सा.वि. = दोन संख्यांचा गुणाकार

? हे का घडते? तुम्ही याचे स्पष्टीकरण किंवा पुरावा देऊ शकाल का?

प्रयत्न करा

**(सूचना:** दिलेल्या संख्यांचे मूळ अवयवीकरण विचारात घ्या. त्यांच्या मूळ अवयवांपैकी कांही अवयव दोन्ही अवयवीकरणामध्ये सामायिक आहेत आणि राहिलेले अवयव दोन्हीपैकी एकामध्ये येतात. म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. मध्ये सामान्य आणि सामान्य नसलेले मूळ अवयव कसे वितरित केले जातात ते पहा. गुणाकारामध्ये हे दोन्ही प्रकारचे मूळ अवयव कसे येतात ते पहा आणि त्यांची तुलना करा.)

? जर तीन संख्या विचारात घेतल्या तर हा गुणधर्म लागू पडतो का ते शोधा.

प्रयत्न करा

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील दोन ओळीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे रंग पुनरावर्तीत होतात. तर निळे तारे पुन्हा कधी भेटतील?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



2. (a) $5 \times 7 \times 11 \times 11$ हा $5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 2$ चा विभाज्य का?

   (b) $5 \times 7 \times 11 \times 11$ हा $5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 2$ चा अवयव आहे का?

3. खालील संख्यांचा म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. शोधा. तुमचे उत्तर मूळ अवयवीकरणाच्या स्वरुपात मांडा.

   (a) $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$ आणि $12 \times 7 \times 11$

   (b) 45 आणि 36

4. दोन संख्या शोधा ज्यांचा म.सा.वि. 1 आणि ल.सा.वि. 66 आहे.

5. एका गुराख्याने आपल्या सर्व गायींना चारण्यासाठी शेतात नेले. गायी 3 दरवाजे असलेल्या फाटकावर आल्या, प्रत्येक फाटकामधून समान संख्येने गायी गेल्या. नंतर 5 दरवाजे असलेल्या फाटकामधून समान संख्येने त्या गेल्या. नंतर 7 दरवाजे असलेल्या तिसऱ्या फाटकामधून समान संख्येने त्या गेल्या. जर त्या गुराख्याजवळ 200 पेक्षा कमी गायी असतील तर त्याच्या जवळ असलेल्या गायींची संख्या किती? (कर्नाटकामधील लोककथेवरील गणितावर आधारित समस्या)

6. एका पेटीची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे 12 सें.मी., 18 सें.मी. आणि 36 सें.मी. आहे. खालीलपैकी कोणत्या आकाराचे घन त्या पेटीमध्ये अंतर न ठेवता बंद केले जाऊ शकतात?

   (a) 9 सें.मी. (b) 6 सें.मी.

   (c) 4 सें.मी. (d) 3 सें.मी.

   (e) 2 सें.मी.

7. खालील संख्यापैकी 306 आणि 36 या दोन्हींना पूर्णपणे भाग देणारी सर्वात मोठी संख्या कोणती?

   (a) 36 (b) 612

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(c) 18 (d) 3

(e) 2 (f) 360

8. 3,4,5 आणि 7 ने भाग जाणारी परंतु 11 ने भाग दिला असता 10 बाकी राहणारी लहानात लहान संख्या शोधा.

प्रयत्न करा

9. मुले 'पर्वतावर आग लागली (Fire in the mountain) हा खेळ खेळत आहेत. जेव्हा 6 ही संख्या पुकारली तेव्हा कोणीही बाहेर पडले नाही. जेव्हा 9 ही संख्या पुकारली तेव्हा कोणीही बाहेर पडले नाही. परंतु जेव्हा 10 ही संख्या पुकारली तेव्हा काही मुले बाहेर पडली. तर सुरुवातीला किती मुले खेळत असतील?

(a) 72 (b) 90

(c) 45 (d) 3

(e) 36 (f) यापैकी कोणतीही नाही.

10. योग्य विधानासमोर '✓' खूण करा. m,n या दोन वेगवेगळ्या मूळ संख्यांचा ल.सा.वि हा इतका असू शकतो :

(a) दोन्ही संख्यापेक्षा कमी.

(b) त्या दोन संख्याच्या मध्ये.

(c) त्या दोन संख्यापेक्षा मोठा.

(d) $m \times n$ पेक्षा लहान.

(e) $m \times n$ पेक्षा मोठ.

11. एक कुत्रा एका सशाचा पाठलाग करत आहे. सशाला 150 फूट आघाडी आहे. कुत्रा प्रत्येकवेळी 7 फूट उडी मारतो. तर ससा प्रत्येकवेळी 9 फूट उडी मारतो. कुत्र्याने किती उड्या मारल्यास तो सशाला पकडू शकेल?

प्रयत्न करा

12. 1,2,3,4,5,6,8,9,10 च्या पटीतील सर्वात लहान संख्या कोणती? तुम्हाला इयत्ता 6 वी मधील प्रकरण 5 मधील उत्तर आठवते का?

13. प्रसिध्द प्राचीन भारतीय गणिततज्ञ महावीराचार्य (इ.स. 650) यानी मांडलेली एक समस्या येथे आहे. $\frac{8}{15}, \frac{1}{20}, \frac{7}{36}, \frac{11}{63}$ आणि $\frac{1}{21}$ या सर्वांची बेरीज करा. तुम्हाला किती उत्तर मिळेल? आपण कार्यक्षमपणे यांची बेरीज कशी शोधू शकतो?

गणिती बोल

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# सारांश
# SUMMARY

- गेल्या वर्षी आपण सामायिक गुणक आणि सामायिक अवयव पाहिले आहेत आणि मूळ संख्यांच्या अद्भूत जगाची ओळख करून घेतली आहे.
- या प्रकरणामध्ये, आपण संख्यांचे मूळ अवयवीकरण शोधण्याच्या पध्दतीचा अभ्यास केला आहे.
- एखाद्या संख्येचे अवयव मूळ अवयवीकरणाने शोधणे सोपे आहे. परंतु खूप कंटाळवाणेही आहे. आपल्याला प्रत्येक संभाव्य उपघटकाची यादी करावी लागते.
- **महत्तम साधारण विभाजक (म.सा.वि.)** हा संख्यांच्या गटाच्या सर्व सामायिक अवयवामधील सर्वात मोठा अवयव आहे,
  - संख्यांच्या मूळ अवयवीकरणामध्ये प्रत्येक सामायिक अवयवाचा समावेश असतो.
  - म.सा.वि शोधण्यासाठी आपण सर्व संख्याच्या मूळ अवयवीकरणामध्ये कमीतकमी वेळा येणाऱ्या प्रत्येक अवयवांचा समावेश करतो.
- **लघुत्तम साधारण विभाज्य (ल.सा.वि.)** हा संख्यांच्या गटाच्या सर्व सामायिक गुणकातील सर्वात लहान सामायिक गुणक आहे.
  - प्रत्येक सामायिक गुणकामध्ये संख्यांच्या मूळ अवयवीकरणाचा समावेश असतो.
  - ल.सा.वि. शोधण्यासाठी आपण सर्व संख्यांच्या मूळ अवयवीकरणामध्ये जास्तीत जास्त वेळा येणाऱ्या प्रत्येक अवयवाचा समावेश करतो.
  - आपण म.सा.वि आणि ल.सा.वि. विषयी अधिक शोध घेतला. जेव्हा संख्या या क्रमवार, सम आणि सह-मूळ इ. असतील तेव्हा संबंधित नमुने आणि गुणधर्मांचा शोध घेतला आहे.
- आम्ही म.सा.वि आणि ल.सा.वि. हे दोन्ही एकाचवेळी शोधण्याच्या पद्धतीचा अभ्यास केला. ते जलदपणे कसे काढायचे हे सुध्दा आम्ही पाहिले आहे.
- गणिताची चर्चा करताना वापरल्या जाणाऱ्या काही पदांचा आपण अभ्यास केला आहे. ती म्हणजे **अनुमान** आणि **सामान्यीकरण**.

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

आतापर्यंत सापडलेली सर्वात मोठी मूळ संख्या 4,10,24,320 अंकी आहे. तिचा शोध 12 आक्टोबर 2024 रोजी लागला.



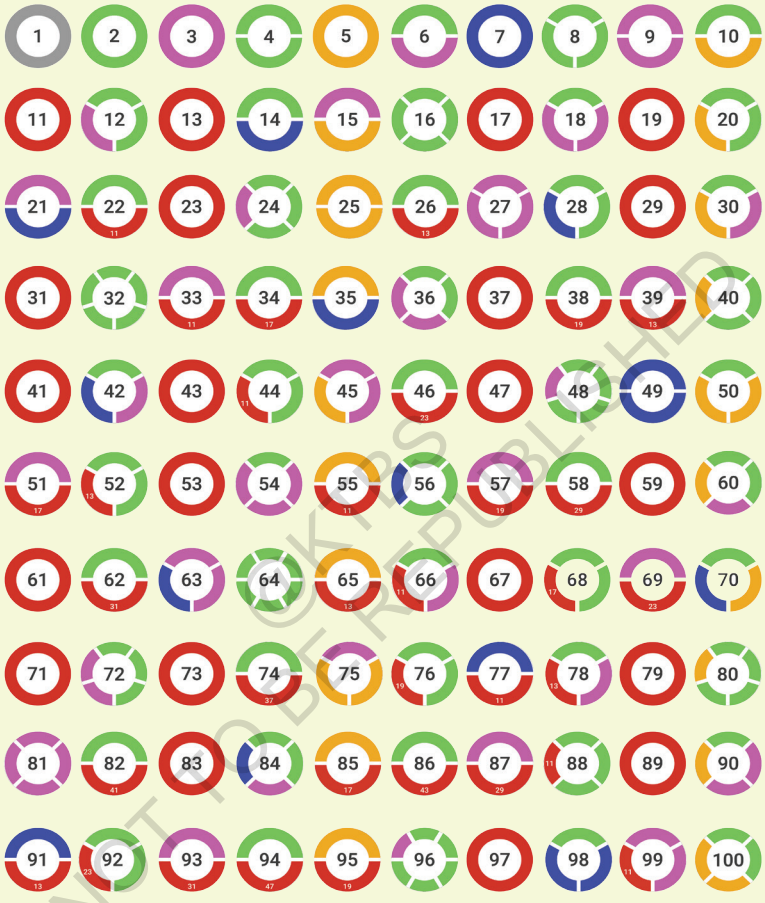


कोड्याची वेळ!

# रहस्यमय रंग

प्रत्येक पानावरील पृष्ठ क्रमांकाभोवती असलेल्या या वेगवेगळ्या वर्तुळांच्या रचनेबद्दल कदाचित तुमच्या लक्षात आले असेल आणि तुम्ही त्याबद्दल विचार केला असेल!

खालील चित्रामध्ये 1 ते 100 पर्यंतच्या संख्यांच्या सर्व रचना दर्शविल्या आहेत.




© KISS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रत्येक संख्येसाठी वापरलेल्या रंगाचा संकेत ओळखण्याचा प्रयत्न करा.

येथे अनेक मनोरंजक नमुने आहेत.

तुमच्या निरीक्षणांची तुमच्या वर्ग मित्रांशी चर्चा करा

ही पद्धत पुढे वाढवून 101 ते 110 पर्यंतच्या पृष्ठक्रमांकांमध्ये रंग भरा.



# 4 बिंदूच्या पलीकडे आणखी एक नजर
## (ANOTHER PEETS BEYOND THE POINT)

E5I9U1

### 4.1 दशांशाची जलद उजळणी (A Quick Recap of Decimals) :

लक्षात ठेवा की, दशांश हे भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीचे नैसर्गिक विस्तार आहेत. जे अपूर्णांक, ($\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ इत्यादी) आणि त्यांची बेरीज दर्शविण्यासाठी वापरले जातात.

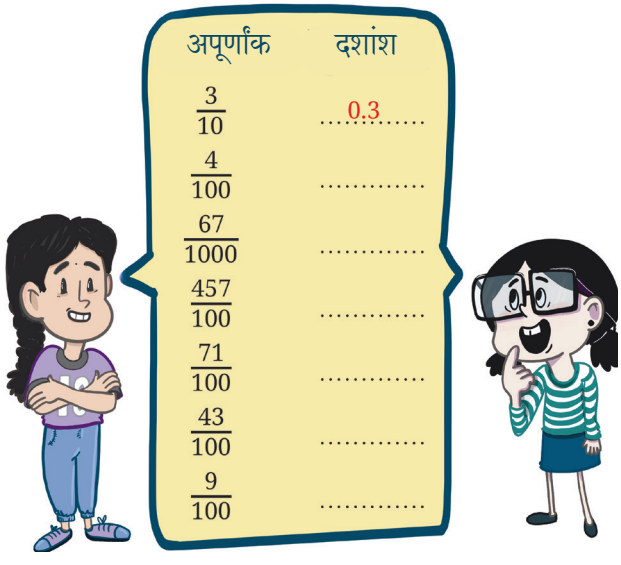
उदाहरणार्थ 27.53 अशा एका राशीचा निर्देश करते ज्यामध्ये :

- 2 दशक
- 7 एकक (एकम)
- 5 दशांश
- 3 शतांश

अपूर्णांकांचा गुणाकार आणि भागाकार कसा करायचा हे आम्ही अगोदरच अभ्यासलेले आहे. या प्रकरणामध्ये आम्ही या क्रिया दशांशावर कशा करायच्या हे अभ्यासणार आहोत. तुम्ही पाहू शकाल की, दशांशाचा गुणाकार व भागाकार करण्याच्या पध्दती या मोजसंख्यांच्या गुणाकार आणि भागाकारांचा नैसर्गिक विस्तार आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? जोनाली आणि पल्लवी एक खेळ खेळतात. जोनाली एक अपूर्णांक सांगते आणि पल्लबी त्याचा सममूल्य दशांश सांगते. रिकाम्या जागेमध्ये पल्लवीची उत्तरे लिहा.




जोनाली मसाले खरेदी करण्यासाठी बाजारात जाते. ती 50 ग्रॅम दालचिनी, 100 ग्रॅम जिरे, 25 ग्रॅम वेलदोडे आणि 250 ग्रॅम मिरी खरेदी करते. प्रत्येक राशी अपूर्णांक तसेच दशांश स्वरुपात लिहून किलो ग्रॅममध्ये दर्शवा.

जोनालीने पल्लवीला दिलेल्या अपूर्णांकांचे छेद हे 10, 100, 1000 इत्यादी आहेत. खालील अपूर्णांकाना अपूर्णांकांच्या बेरजेच्या आणि दशांश स्वरुपात सुद्धा लिहा.

| अपूर्णांक | अंशाचा विस्तार | एक दशांश, एक शतांश, एक सहस्त्रांश यांची बेरीज | दशांश |
|---|---|---|---|
| $\frac{254}{1000}$ | $\frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{4}{1000}$ $= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}$ | 0.2 + 0.05 + 0.004 | 0.254 |
| $\frac{847}{10000}$ | | | |
| $\frac{173}{100}$ | | | |
| $\frac{23}{1000}$ | | | |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? 10, 100, 1000 अशा (1 नंतर शून्य असलेल्या) स्वरुपाच्या संख्येने कोणत्याही संख्येला भागण्याचा एक साधा नियम तुम्ही बनवू शकता का? उदाहरणार्थ, $\frac{123}{10}$, $\frac{24}{100}$ किंवा $\frac{678}{1000}$, मागील समस्यांमधील नमुना पहा.




येथे तसा एक नियम आहे. 123÷10 हे उदाहरण विचारात घेऊ.

**पायरी 1**: भाज्य आहे तसा लिहा आणि शेवटी एक दशांश बिंदू ठेवा.

123.

**पायरी 2**: भाजकातील शून्यांची संख्या मोजा.

10 → 1 शून्य

**पायरी 3** : पायरी 1 मधील दशांश बिंदू जितके शून्य पायरी 2 मध्ये आहेत. तितक्या स्थानांनी डावीकडे हलवा. जर गरज असल्यास समोर शून्य लिहा.

12.3

**उदाहरणे :**

| | |
|---|---|
| $24 \div 100 = 0.24$ | $678 \div 1000 = 0.678$ |
| $12 \div 1000 = 0.012$ | $12345 \div 1000 = 12.345$ |

## 4.2 दशांशांचा गुणाकार (Decimal Multiplication)

**उदाहरण 1**: अर्शद एका स्टेशनरी दुकानामध्ये जातो आणि 5 पेन खरेदी करतो, जर एका पेनची किंमत ₹ 9.5 (9 रुपये आणि 50 पैसे) असेल तर दुकानदाराला त्याने किती रक्कम दिली पाहिजेत?

येथे आम्ही कोणती क्रिया वापरली पाहिजे?

आम्हाला 9.5 ला 5 ने गुणले पाहिजे, जे 9.5 ची 5 वेळा बेरीज केल्याप्रमाणे आहे.

म्हणजेच $9.5 \times 5 = 9.5+9.5+9.5+9.5+9.5 = 47.5$

आम्ही प्रत्यक्षपणे अपूर्णांकांत रुपांतर करून सुध्दा संख्यांचा गुणाकार करु शकतो.

9.5 हे $\frac{95}{10}$ आणि 5 हे $\frac{5}{1}$ असे अपूर्णांकात आहेत.

5 पेनांची किंमत $= \frac{5}{1} \times \frac{95}{10}$

दोन अपूर्णांकांचा गुणाकार करताना आम्ही अंशाने अंशाला आणि छेदाने छेदाला गुणतो याचे स्मरण करा.

$$\frac{5}{1} \times \frac{95}{10} = \frac{5 \times 95}{1 \times 10}$$

$$= \frac{475}{10}$$

$$= 47.5$$

5 पेनांची किंमत ₹ 47.5 आहे.

**उदाहरण 2**: एक कार एक लिटर पेट्रोलमध्ये 12.5 कि.मी. प्रवास करते. तर 7.5 लिटर पेट्रोलमध्ये तिने किती अंतर प्रवास केला?

आम्हाला 12.5 ला 7.5 ने गुणले पाहिजे.

आक्रमिलेले अंतर $= 12.5 \times 7.5$

$$= \frac{125}{10} \times \frac{75}{10} = \frac{125 \times 75}{10 \times 10} = \frac{9375}{100} = 93.75$$

@MTRS NOT TO BE REPUBLISHED

कारने आक्रमिलेले अंतर 93.75 कि.मी. आहे.

गणिती बोल

(?) दोन दशांशाचा गुणाकार एक नैसर्गिक संख्या असू शकतो का?

(?) एक दशांश आणि एक नैसर्गिक संख्या यांचा गुणाकार एक नैसर्गिक संख्या असू शकतो का?

**उदाहरण 3:** अजयची शाळा आणि त्याचे घर यामधील अंतर 827 मी. आहे. आठवड्यातील 6 दिवस तो सकाळी शाळेला चालत जातो आणि संध्याकाळी परत घरी चालत येतो. तो एका आठवड्यात किती अंतर चालतो? उत्तर किलो मीटरमध्ये लिहा.

शाळा आणि घर यामधील प्रत्येक मार्गाचे अजयने चाललेले अंतर 827 मी. म्हणजेच 0.827 कि. मी. आहे.

म्हणून एका दिवसात तो पुढीलप्रमाणे अंतर चालतो,

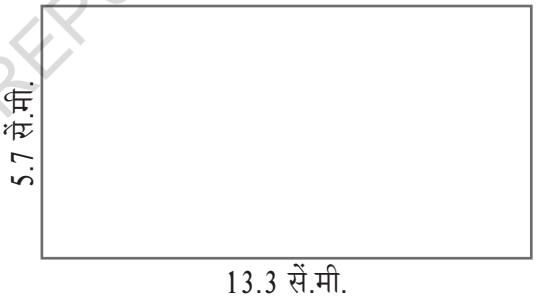
$$0.827 \times 2 = \frac{827}{1000} \times 2 = \frac{827 \times 2}{1000} = \frac{1654}{1000} = 1.654$$

एका आठवड्यात तो 6 दिवस शाळेला जातो. म्हणून एका आठवड्यात तो,

$$1.654 \times 6 = \frac{1654}{1000} \times 6 = \frac{1654 \times 6}{1000} = \frac{9924}{1000} = 9.924$$ अंतर चालतो.

एका आठवड्यात अजय 9.924 कि.मी. अंतर चालतो.

(?) **उदाहरण 4:** दिलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.




आयताचे क्षेत्रफळ =

$$5.7 \times 13.3 = \frac{57}{10} \times \frac{133}{10} = \frac{7581}{100} = 75.81$$

क्षेत्रफळ 75.81 चौ. सें. मी. आहे.

(?) गुणक, गुण्य आणि गुणाकारातील दशांश बिंदू नंतरच्या अंकांच्या संख्येचे निरीक्षण करा. छेदामधील शून्यांच्या संख्येची सुध्दा नोंद करा.

| उदाहरणे | दशांश बिंदू नंतरच्या अंकाची संख्या | | |
|---|---|---|---|
| | गुणक | गुण्य | गुणाकार |
| $9.5 \times 5 = \frac{95 \times 5}{10} = \frac{475}{10} = 47.5$ | 1 | 0 | 1 |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| | | | |
|---|---|---|---|
| $12.5 \times 7.5$<br>$= \frac{125}{10} \times \frac{75}{10} = \frac{9375}{100} = 93.75$ | **1** | **1** | **2** |
| $1.64 \times 6$<br>$= \frac{164}{100} \times 6 = \frac{984}{100} = 9.84$ | **2** | **0** | **2** |
| $5.7 \times 13.35$<br>$= \frac{57}{10} \times \frac{1335}{100}$<br>$= \frac{57 \times 1335}{10 \times 100} = \frac{76095}{1000}$<br>$=76.095$ | **1** | **2** | **3** |




? $596 \times 248 = 147808$ हे आम्हाला माहित आहे असे समजा. $5.96 \times 24.8$ चा गुणाकार तुम्ही लगेच लिहू शकता का?

? वरील उदाहरणांकडे पाहून तुम्ही दोन दशांशांच्या गुणाकाराचा नियम तयार करू शकता का?000

दशांशांचा गुणाकार हा त्यांच्या संगत अपूर्णांकांच्या गुणाकारा इतका असतो. जेव्हा अपूर्णांकांचा गुणाकार करतो तेव्हा आम्ही अनुक्रमे अंशाचा अंशाशी आणि छेदाचा छेदाशी गुणाकार करतो.

अंशांचा गुणाकार = दशांश चिन्ह काढून टाकून संख्यांचा केलेला गुणाकार

दोन्ही छेद हे 1, 10, 100, 1000,... या स्वरुपात असल्याने छेदांचा गुणाकार हा सुध्दा 1 नंतर शून्य असलेल्या स्वरुपात येतो. गुणाकारातील शून्यांची संख्या ही प्रत्येक छेदामधील शून्यांच्या संख्येच्या बेरजेइतकी असते.

गुणाकारामध्ये, छेदामधील एकूण शून्यांच्या संख्येच्या आधारे दशांश बिंदू ठेवला जातो.

म्हणून दोन दशांशांचा गुणाकार करताना आम्ही दशांश बिंदू वगळून मिळालेल्या दोन संख्यांचा गुणाकार करु शकतो आणि नंतर खाली दर्शविल्याप्रमाणे योग्य रितीने दशांश बिंदू देतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$5.96 \times 24.8$ ची किंमत काढू.

$$596 \times 248 = 147808$$

$$5.96 \times 24.8 = 147.808$$

2 दशांश स्थाने, 1 दशांश स्थान, 3 दशांश स्थाने

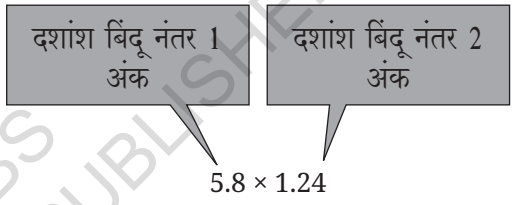
$2 + 1 = 3$ दशांश स्थाने

? **उदाहरण 5**: 58 आणि 1.24 यांचा गुणाकार करण्यासाठी वरील नियमाचा उपयोग करुया.

प्रथम 58 आणि 124 यांचा गुणाकार करुया.

गुणाकार हा 7192 आहे.

गुणक आणि गुण्य यांच्यातील दशांश बिंदू नंतर असणाऱ्या अंकांच्या संख्येची बेरीज ही 3 आहे. म्हणून गुणाकार हा 7.192 आहे.




गुणक आणि गुण्य यांचे अपूर्णांकांत रुपांतर करून याचा पडताळा करा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## गुणाकार हा नेहमी गुणलेल्या संख्यांपेक्षा मोठा असतो का?

दोन अपूर्णांकांच्या गुणाकाराचे स्मरण करा. जेव्हा दोन अपूर्णांकांचा गुणाकार केला जातो तेव्हा नेहमी गुणाकार हा मोजसंख्यापेक्षा विपरीत दोन संख्यांपेक्षा मोठा किंवा त्यांच्याइतका असेल असे नाही. दोन दशांशांच्या गुणाकाराच्या बाबतीत याचे परीक्षण करूया.

$2.25 \times 8 = 18$

वरील उदाहरणामध्ये गुणाकार (18) हा 2.25 आणि 8 पेक्षा मोठा आहे.

परंतु $0.25 \times 8 = 2$ मध्ये गुणाकार (2) हा 0.25 पेक्षा मोठा परंतु 8 पेक्षा लहान आहे.

$0.25 \times 0.8 = 0.2$ या उदाहरणामध्ये गुणाकार (0.2) हा 0.25 आणि 0.8 या दोन्ही दशांशापेक्षा लहान आहे.

? दोन दशांशांचा गुणाकार त्या दोन्ही संख्यांपेक्षा केव्हा मोठा असतो? तो दोन्ही संख्यांपेक्षा केव्हा लहान असतो?

दशांश हे अपूर्णांकांचे केवळ प्रतिनिधीत्व असल्यामुळे गुणलेल्या संख्यामधील संबंध आणि गुणाकार हा अपूर्णांकांसारखाच असतो.

| स्थिती | गुणाकार | संबंध |
|---|---|---|
| स्थिती 1 | दोन्ही संख्या 1 पेक्षा मोठ्या आहेत. (म्हणजेच $3.4 \times 6.5$) | गुणाकार (22.1) हा दोन्ही संख्यापेक्षा मोठा आहे. |
| स्थिती 2 | दोन्ही संख्या 0 आणि 1 मधील आहेत. (म्हणजेच $0.75 \times 0.4$) | गुणाकार (0.3) हा दोन्ही संख्यापेक्षा लहान आहे. |
| स्थिती 3 | एक संख्या 0 आणि 1 मधील आहे आणि एक संख्या 1 पेक्षा मोठी आहे. (म्हणजेच $0.75 \times 5$) | गुणाकार (3.75) हा 1 पेक्षा मोठ्या असलेल्या संख्येपेक्षा लहान आहे आणि 0 आणि 1 मधील संख्येपेक्षा मोठी आहे. |

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. एक दशांश हे 0.1, एक शतांश हे 0.01 इत्यादी. यांचे स्मरण करा. तर खालील गुणाकार हा दशांश, शतांश इत्यादी मध्ये लिहा.
   (a) $6 \times 4$ दशांश = 24 दशांश
   (b) $7 \times 0.3$
   (c) $9 \times 5$ शतांश
2. गुणाकार करा.
   (a) $27.34 \times 6$
   (b) $4.23 \times 3.7$
   (c) $0.432 \times 0.23$
3. तेजसला एका अंगरख्यासाठी 1.65 मी. कापड लागते. तर 3 अंगरख्यांसाठी किती मीटर कापड लागेल?
4. मीनूने 4 वह्या आणि 3 खोडरबर खरेदी केले. प्रत्येक वहीची किंमत ₹ 15.50 आणि एका खोडरबरची किंमत ₹ 2.75 आहे. तर तिने खरेदीसाठी किती रुपये खर्च केले?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. एक रुपयाच्या नाण्याची जाडी 1.45 मि.मी. आहे. अशी 36 नाणी एकावर एक ठेवून तयार झालेल्या वृत्तचितीची एकूण उंची किती आहे? उत्तर सेंटीमीटरमध्ये लिहा.

6. एक किलो ग्रॅम संत्र्यांची किंमत ₹ 56.50 आहे. तर 2.250 कि.ग्रॅ. संत्र्यांची किंमत किती? 56.50 हे 56.5 आणि 2.250 हे 2.25 असे लिहून आम्ही गुणाकार करु शकतो का? आम्हाला सारखाच गुणाकार मिळेल का? कारण लिहा.




7. द्वारकादास प्रत्येक वहीची किंमत ₹ 23.6 प्रमाणे घाऊक दराने वह्यांची खरेदी करतो आणि प्रत्येक वही ₹ 30 दराने विकतो. जर त्याने एका आठवड्यात 50 वह्यांची विक्री केली तर त्याला किती नफा मिळेल?

8. $18 \times 12 = 216$, दिलेले आहे. तर गुणाकार करा.

(a) $18 \times 1.2$ (b) $18 \times 0.12$

(c) $1.8 \times 1.2$ (d) $0.18 \times 0.12$

(e) $0.018 \times 0.012$ (f) $1.8 \times 12$

वरील कोणत्या उदाहरणामध्ये गुणाकार हा 1 आहे?

9. खालील कोणत्या उदाहरणामध्ये गुणाकार हा 1 पेक्षा कमी आहे? प्रत्यक्ष गुणाकार न करता तुम्ही उत्तर काढू शकता का?

(a) $7 \times 0.6$ (b) $0.7 \times 0.6$

(c) $0.7 \times 6$ (d) $0.07 \times 0.06$

10. खालील संख्यांना 10, 100 आणि 1000 ने गुणून कोष्टक पूर्ण करा.

| | **× 10** | **× 100** | **× 1000** |
|---|---|---|---|
| 5.7 | | | |
| 23.02 | | | |
| 0.92 | | | |
| 0.306 | | | |
| 24.67 | | | |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 4.3 दशांशांचा भागाकार (Decimal Division)

**उदाहरण 6**: अनुजाकडे 3.9 मी. लांबीची एक रेबीन आहे आणि तिला तिचे 10 समान तुकडे करावयाचे आहेत. तर प्रत्येक तुकड्याची दशांशातील लांबी किती?




येथे 10 तुकडे असून प्रत्येक तुकड्याची लांबी काढण्यासाठी आम्ही 3.9 ला 10 ने भागले पाहिजे.

म्हणून 3.9 ÷ 10 हे किती येतात?

आता 3.9 चे अपूर्णांकात रुपांतर करु $3.9 = \frac{39}{10}$

म्हणून $3.9 \div 10$ हे $\frac{39}{10}$ ला 10 ने भागण्या प्रमाणेच आहे.

एका अपूर्णांकाला भाजकाने भागणे हे अपूर्णांकाला भाजकाच्या व्यक्तांकाने गुणल्याप्रमाणे आहे याचे स्मरण करा. 10 चा व्यस्तांक $\frac{1}{10}$ आहे.

म्हणून, $\frac{39}{10} \div 10 = \frac{39}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{39}{100} = 0.39$.

अशाप्रकारे रेबीनच्या प्रत्येक तुकड्याची लांबी ही 0.39 मी. आहे.

जर रेबीनचे 100 समान तुकडे केले तर प्रत्येक तुकड्याची लांबी किती होईल?

$3.9 \div 100 = \frac{39}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{39}{1000} = 0.039$.

जेव्हा रेबीनचे 100 समान तुकडे केले जातात तेव्हा प्रत्येक तुकड्याची लांबी 0.039 मी असते.

0.039 मीटर म्हणजे किती सेंटीमीटर आणि किती मिलीमीटर?

या भागाकारांकडे पाहून, आपण 1, 10, 100, 1000 आणि अशाच संख्यांनी दशांश संख्यांना भागण्यासाठी एक सोपा नियम तयार करू शकतो.

जेव्हा आपण दशांशाला 1, 10, 100, 1000 आणि अशाच संख्यांनी भाग देतो, तेव्हा आपण भाजकामध्ये जितके शून्य आहेत तितक्या स्थानांनी दशांश बिंदू डावीकडे सरकवू शकतो!

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

| दशांश | ÷ 10 | ÷ 100 | ÷ 1000 | ÷ 10000 |
|---|---|---|---|---|
| 18.7 | 1.87 | 0.187 | 0.0187 | 0.00187 |
| 21.1 | | | | |
| 0.13 | | | | |
| | | 2.146 | | |
| | | | | 0.0058 |

? **उदाहरण 7**: नीनूकडे 29 मीटर लाल रेबीन आहे आणि तिला ती अनुसोबत समान वाटायची आहे. तर त्यापैकी प्रत्येकीला रेबीनचा किती लांबीचा तुकडा मिळेल?




रेबीनचे दोन समान भाग करायचे असल्याने, प्रत्येक मुलीला 29÷2 मीटर तुकडा मिळेल.

जर त्यापैकी प्रत्येकीला 14 मी. रेबीन मिळाली, तर 1 मी. शिल्लक राहते. जर आपण 1 मी. दोघींमध्ये विभागली, तर प्रत्येकीला आणखी $\frac{1}{2}$ मी. मिळेल.

? आपण $\frac{1}{2}$ चे दशांशमध्ये रूपांतर कसे करतो? जर छेद 1, 10, 100, 1000 इत्यादी असेल तर अपूर्णांकाला दशांश म्हणून व्यक्त करणे सोपे आहे. मग, आपण $\frac{1}{2}$ साठी असा छेद असणारा सममूल्य अपूर्णांक शोधू शकतो का?

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$ (अंश आणि छेदाला 5 ने गुणून)

आपल्याला माहित आहे की, अपूर्णांक $\frac{5}{10}$ ला 0.5 असे दशांशामध्ये दर्शविले जाऊ शकते.

त्यामुळे, प्रत्येक मुलीला 14 मी. आणि अतिरिक्त 0.5 मी. रेबीनचा तुकडा मिळेल.

म्हणून, प्रत्येकीला मिळणाऱ्या रेबीनची लांबी 14+0.5= 14.5 मी.

NOT TO BE REPUBLISHED © MKTBS

(?) आता जर रेबीन 2 ऐवजी चार मित्रांमध्ये वाटली गेली तर काय होईल?

त्यामुळे, प्रत्येकाला $29 \div 4$ मी. म्हणजे $\frac{29}{4}$ मी. रेबीन मिळेल.

आता या अपूर्णांकांचा छेद 4 आहे. अपूर्णांकाचे दशांशमध्ये रूपांतर करण्यासाठी, छेद 1, 10, 100, 1000 आणि अशाच स्वरुपाचा असल्यास मदत होते. आपण $\frac{29}{4}$ साठी असा छेद असणारा सममूल्य अपूर्णांक शोधू शकतो का?

4 हा 10 चा अवयव आहे का? नाही. तो 100 चा अवयव आहे का? होय. $4 \times 25 = 100$. म्हणून आपण अंश आणि छेदाला 25 ने गुणून $\frac{29}{4}$ चा सममूल्य अपूर्णांक मिळवू शकतोः

$$\frac{29 \times 25}{4 \times 25} = \frac{725}{100} = 7.25$$

त्यामुळे, त्या 4 मित्रांपैकी प्रत्येकाला रेबीनचा 7.25 मी. तुकडा मिळेल.

## स्थानमूल्यांचा वापर करून भागाकार (Division Using Place Value)

दशांशांचा भागाकार मिळविण्यासाठी दोन मोजसंख्यांना कसे भागावे हे आपण पाहिले आहे. आपण प्रथम भागाकाराला अपूर्णांक रुपात दर्शविले. नंतर आपण 1, 10, 100, 1000 आणि अशाच स्वरुपाचा छेद असलेला सममूल्य अपूर्णांक शोधला. त्यानंतर हा सममूल्य अपूर्णांक दशांश म्हणून दर्शविणे सोपे झाले.

आता, आपण दशांशांचा भागाकार करण्यासाठी भागाकारामध्ये स्थानमूल्यांचा वापर करण्याची पध्दत पाहूया.

(?) समजा आपल्याला भागाकार $\frac{10}{3}$ हा दशांशात लिहायचा आहे. आपण या अपूर्णांकांचे 1, 10, 100, 1000 इत्यादीसारखा छेद असलेल्या सममूल्य अपूर्णांकात रूपांतर करू शकतो का?

हे शक्य नाही. त्यामुळे आपल्याला दोन मोजसंख्यांना भागण्यासाठी एका अधिक सामान्य पध्दतीची आवश्यकता आहे. स्थानमूल्यांचा वापर करून भागाकार कसा करायचा हे आपण पाहूया.

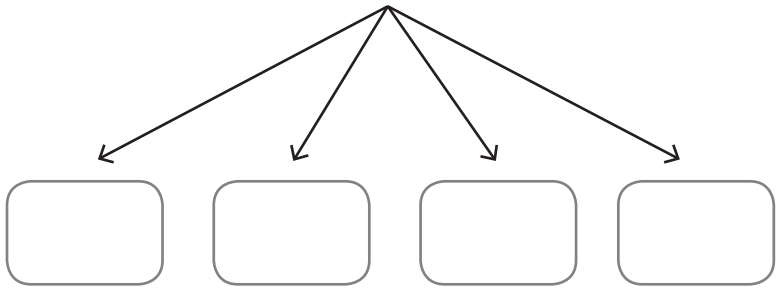
स्थानमूल्यांचा वापर करून भागाकार करण्याच्या उजळणीने सुरुवात करूया.

**उदाहरण 8** : $1324 \div 4$ ची किंमत शोधा.

$1324 \div 4 \longrightarrow$ ला चार समान भागांमध्ये विभाजित करा.

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

1 सहस्त्र + 3 शतक + 2 दशक + चार एकक

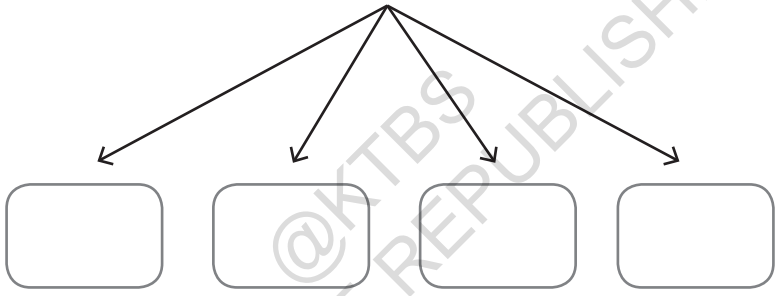


1 सहस्त्र ÷ 4 → पुन्हा गट केल्याशिवाय शक्य नाही.

1 हजाराचे 10 शतकांमध्ये पुनर्गटण करा.

10 शतक + 3 शतक = 13 शतक

13 शतक + 2 दशक + 4 एकक



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13 शतक ÷ 4 → प्रत्येक भागाला 3 शतक मिळतात आणि 1 शतक शिल्लक राहते.

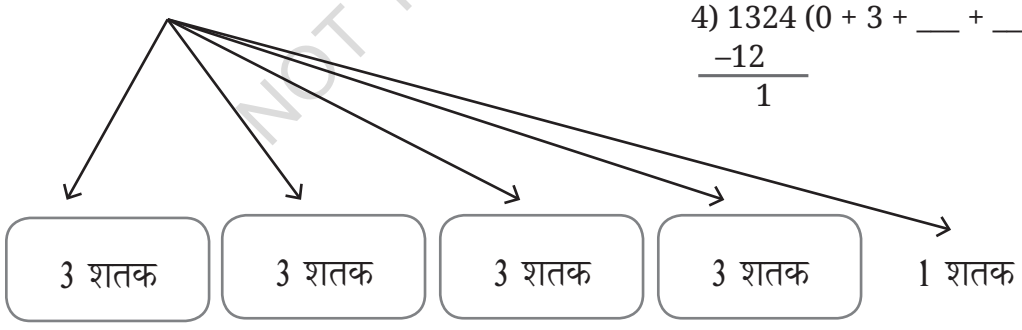
13 शतक + 2 दशक + 4 एकक

स श द ए

4) 1324 (0 + 3 + ___ + ___

−12

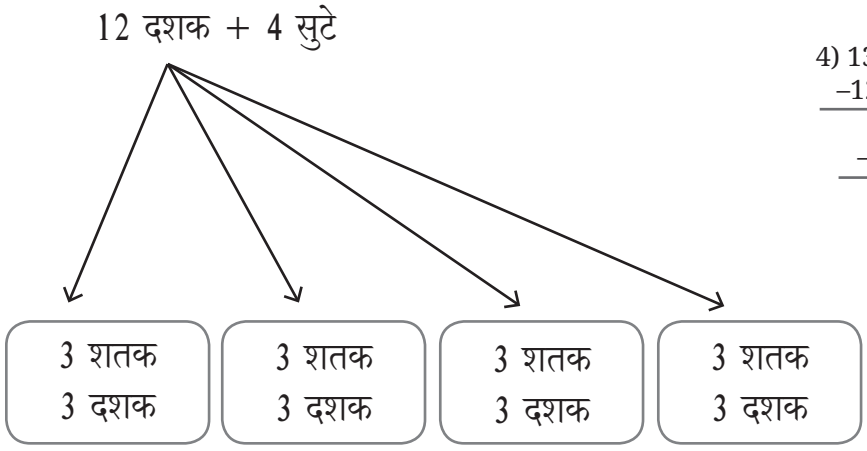
1




1 शतकाचे 10 दशकांमध्ये पुनर्गठण करा.

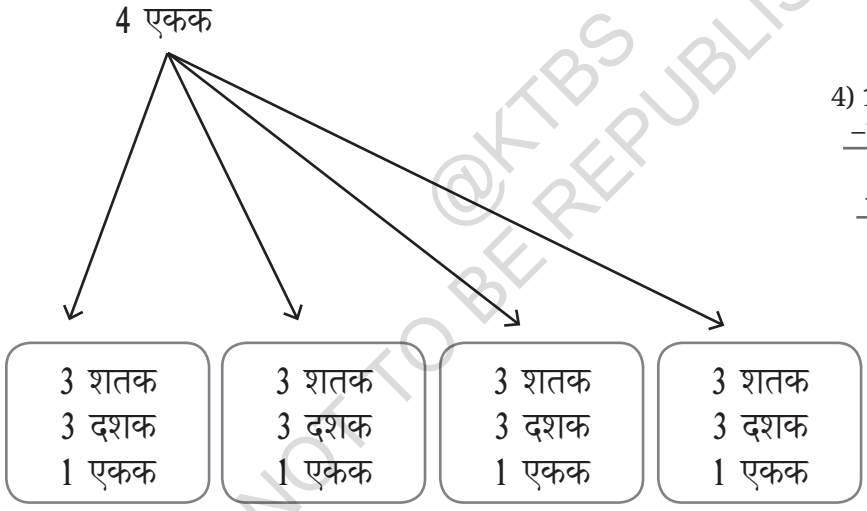
10 दशक + 2 दशक = 12 दशक

12 दशक ÷ 4 → प्रत्येक भागाला 3 दशक मिळतात.




स श द ए
4) 1324 (0 + 3 + 3 + ___
–12
12
–12
0

4 एकक ÷ 4 → प्रत्येक भागाला 1 एकक मिळतो




स श द ए
4) 1324 (0 + 3 + 3 + 1
–12
12
–12
04
–4
0

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

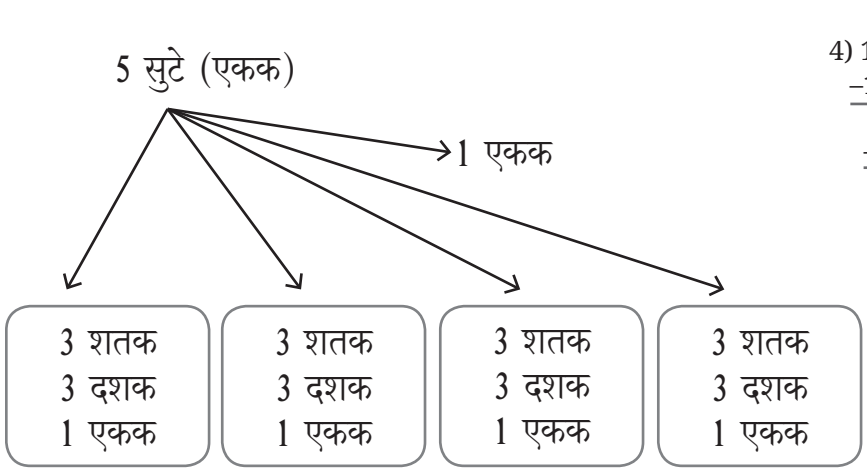
म्हणून, 1324÷4 = 0 सहस्त्र + 3 शतक + 3 दशक + 1 सुटे (एकक) = 331
स्थानमूल्यांचा वापर करून केलेल्या या भागाकाराला आपण **'दीर्घ भागाकार'** असेही म्हणतो.

## दशांशांत उत्तर येणारा भागाकार (Division with a Decimal Quotient)

आता, आपण दीर्घ भागाकाराचा उपयोग करून 1325÷4 ची किंमत काढूया.

1325 ÷ 4 → 1325 ची 4 समान भागांमध्ये विभागणी करा.

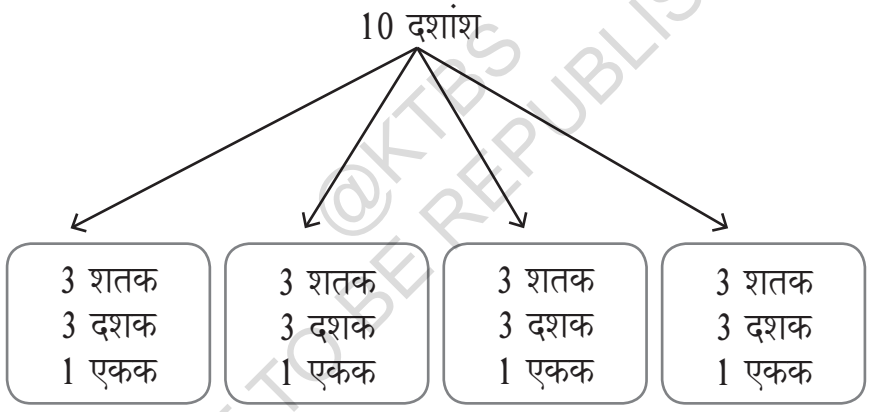
आपण मागील समस्येमध्ये वापरलेल्या पायऱ्यांचा अवलंब करू शकतो.




```
                 स श द ए
4) 1325 (0 + 3 + 3 + 1
  –12
   12
  –12
   05
   –4
    1
```

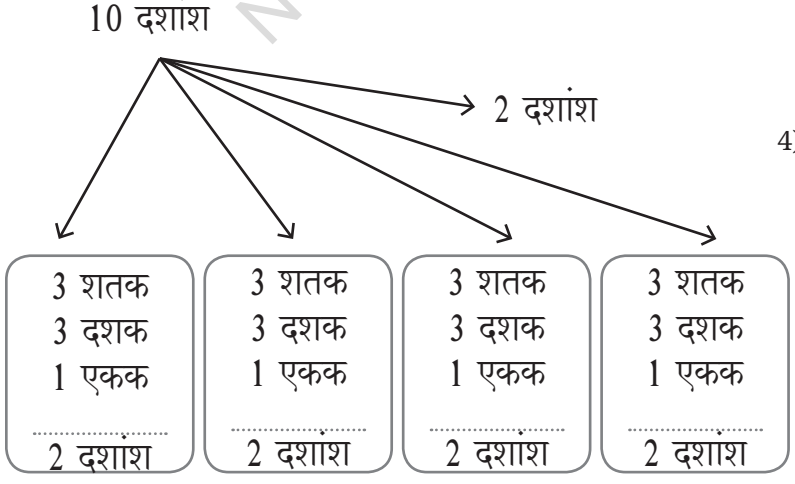
आपल्याकडे 1 एकक शिल्लक आहे.

1 एककाचे 4 समान भागांमध्ये कसे विभाजन करायचे हे स्पष्ट नाही. पण आपण याचे 10 दशांशामध्ये पुनर्गठण करू शकतो.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

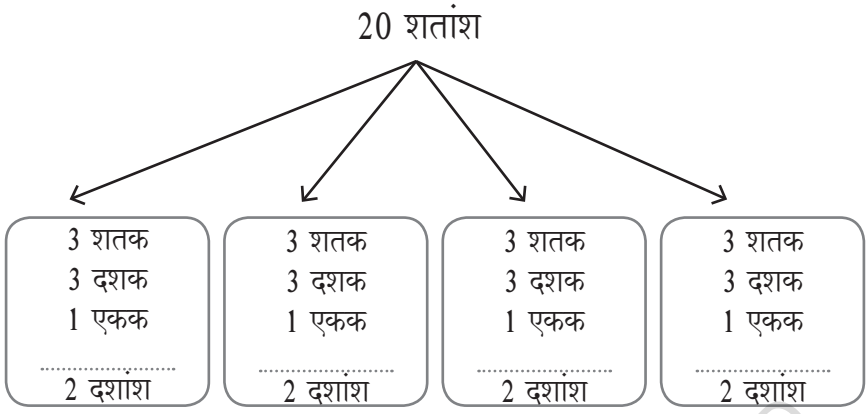
10 दशांश ÷ 4 → प्रत्येक भागाला 2 दशांश मिळतील आणि 2 दशांश शिल्लक राहतील.



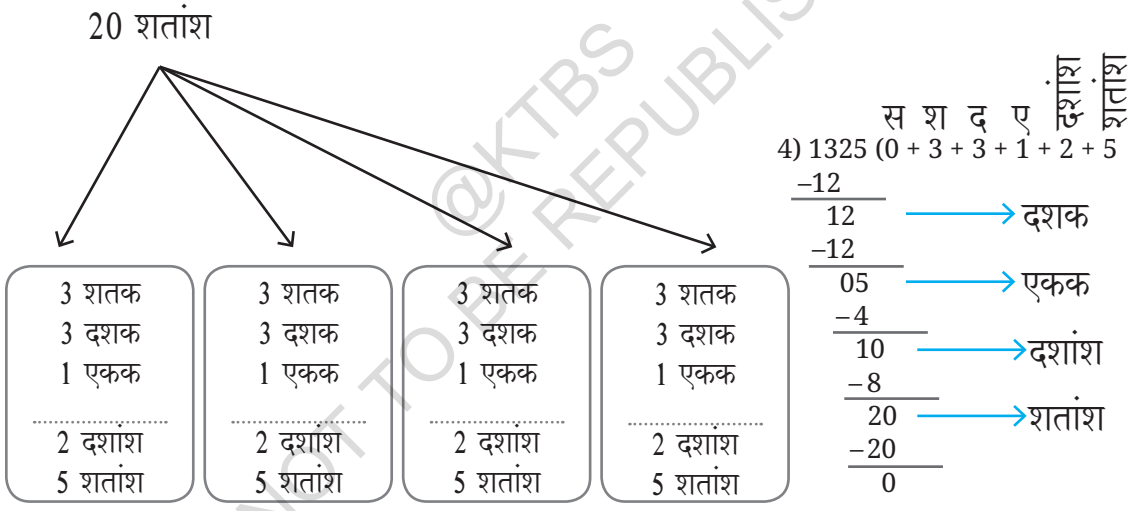

```
                 स श द ए  दशांश
4) 1325 (0 + 3 + 3 + 1 + 2
  –12
   12   → दशक
  –12
   05   → एकक
   –4
   10   → दशांश
   –8
    2
```

आपल्याकडे 2 दशांश शिल्लक राहिले आहेत.

2 दशांशांना 4 समान भागांमध्ये विभागण्यासाठी, आम्हाला त्यांना 20 शतांशांमध्ये रूपांतरित करावे लागेल.




20 शतांश ÷ 4 → प्रत्येक भागाला 5 शतांश मिळतात.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून, 1325 ÷ 4=0 हजार + 3 शतक + 3 दशक + 1 एकक + 2 दशांश + 5 शतांश. हे आपल्याला 331.25 म्हणून माहीत आहे.

त्यामुळे 1325 ÷ 4 = 331.25

आपण $\frac{1325}{4}$ या अपूर्णांकासाठी सममूल्य अपूर्णांक शोधून याची पडताळणी करु शकतो का?

ज्याचा छेद 1, 10, 100, 1000 इत्यादी असेल असा सममूल्य अपूर्णांक मिळविण्यासाठी आपण अंश आणि छेद यांना 25 ने गुणू शकतो.

$$\frac{1325 \times 25}{4 \times 25} = \frac{33125}{100} = 331.25$$

अशाप्रकारे स्थानमूल्यांचा वापर करून भागाकार करण्याची पद्धत दशांशांचा भागाकार शोधण्यासाठी वाढविता येते. एककाचे दशांशमध्ये भाग केले जाऊ शकतात, दशांशांचे शतांशामध्ये भाग केले जाऊ शकतात आणि प्रक्रिया चालू ठेवता येते.

**उदाहरण 9**: 237 ÷ 8 चे मूल्य शोधा.

237÷8 → 2 शतक + 3 दशक +7 एकक यांना 8 समान भागांमध्ये विभाजित करा.

2 शतकांना 8 समान भागामध्ये विभागण्यासाठी आपल्याला त्यांचे 20 दशकांमध्ये पुनर्गठण करावे लागेल.

20 दशक + 3 दशक = 23 दशक

23 दशक ÷ 8 → 2 दशक आणि 7 दशक बाकी राहतात.

7 दशकांचे 70 एककांमध्ये पुनर्गठण केले जाऊ शकते.

70 एकक + 7 एकक = 77 एकक

77 सुटे ÷ 8 → 9 एकक आणि 5 एकक बाकी राहतात.

```
    श  द  ए
8) 237 (0  2
  –16          → दशक
   7

    श  द  ए
8) 237 (0  2  9
  –16          → दशक
   77
  –72
    5          → एकक
```

5 एककांना 8 समान भागांमध्ये विभाजित करण्यासाठी, आपल्याला त्यांचे 50 दशांशांमध्ये पुनर्गठण करावे लागेल.

**जेव्हा आपण एककांचे दशांशांमध्ये पुनर्गठण करतो, तेव्हा भागाकारात दशांश बिंदू ठेवतो.**

50 दशांश ÷ 8 → 6 दशांश आणि 2 दशांश बाकी राहतात.

```
      श  द  ए  दशां.
8) 237 (0  2  9 . 6
  16          → दशक
   77
   72         → एकक
   50         → दशांश
   48
    2
```

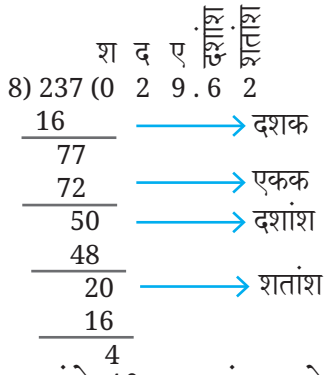


लक्षात ठेवा, जेव्हा आपण एककाचे दशांशांमध्ये भाग करतो, तेव्हा भागाकारात दशांश बिंदू ठेवणे आवश्यक आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

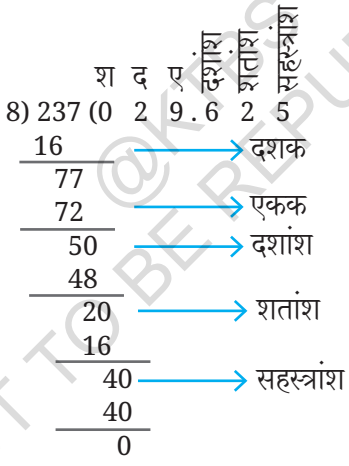
2 दशांशांचे 8 समान भागांमध्ये विभाजन केले जाऊ शकत नाही. म्हणून आपल्याला त्यांचे 20 शतांशांमध्ये पुनर्गठण करावे लगेल.

20 शतांश ÷ 8 → 2 शतांश आणि 4 शतांश बाकी राहतात.




4 शतांशांचे 8 समान भाग करण्यासाठी, आपल्याला त्यांचे 40 सहस्त्रांश असे पुनर्गठण करावे लागते.

40 सहस्त्रांश ÷ 8 → 5 सहस्त्रांश



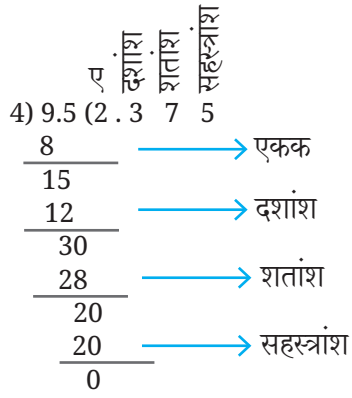

NOT TO BE REPUBLISHED @KVS

म्हणून, 237 ÷ 8 = 29.625

## भाज्य दशांशात असताना भागाकार (Division with a Decimal Dividend)

**उदाहरण 10** : एका दुकानदाराकडे 9.5 किलोग्रॅम साखर आहे आणि त्याला ती 4 पिशव्यांमध्ये समानरित्या बांधायची आहे. तर प्रत्येक पिशवीचे वजन किती असेल?

प्रत्येक पिशवीचे वजन काढण्यासाठी आपल्याला 9.5 ला 4 ने भाग द्यावा लागेल.




पुन्हा, आपण दशांशांना भाग देण्यापूर्वी भागाकारात दशांश बिंदू ठेवतो. साखरेच्या प्रत्येक पिशवीचे वजन 2.375 किलो ग्रॅम आहे.

**उदाहरण 11** : 0.06 ÷ 5 चे मूल्य किती?

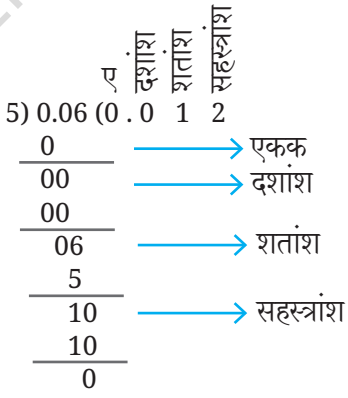
0.06 → 0 एकक + 0 दशांश + 6 शतांश

0 एकक ÷ 5 → 0 एकक

जेव्हा एकक आपण एककांमधून दशांशामध्ये जातो, तेव्हा आपल्याला भागाकारात दशांश बिंदू ठेवावा लागतो.

0 दशांश ÷ 5 → 0 दशांश

6 शतांश ÷ 5 → 1 शतांश आणि 1 शतांश बाकी राहतो. आपल्याला 1 शतांशचे पुनर्गठण करुन 10 सहस्त्रांशांमध्ये रुपांतरीत करावे लागेल.




10 सहस्त्रांश ÷ 5 → 2 सहस्त्रांश

म्हणून, भागाकार 0.012 आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. छेदांचे 1, 10, 100, 1000 मध्ये रूपांतर करून भागाकार करा आणि दीर्घ भागाकार पध्दतीने (स्थानमूल्याद्वारे भागाकार) उत्तराची पडताळणी करा.

(a) $\frac{18}{5}$ (b) $\frac{415}{4}$

(c) $\frac{1217}{2}$ (d) $\frac{4827}{8}$

2. योग्य उत्तर निवडा.

(a) $\frac{1526}{4}$ =

(i) 38.15 (ii) 380.15

(iii) 381.5 (iv) 381.05

(b) $\frac{3567}{8}$ =

(i) 4458.75 (ii) 44.5875

(iii) 445.875 (iv) 4458.75

लक्षात ठेवा, जेव्हा आपण एककांचे दशांशांमध्ये पुनर्गठण करतो तेव्हा आपल्याला भागाकारात दशांश बिंदू ठेवावा लागतो.



3. भागाकार करा.

(a) 132 ÷ 4 = (b) 13.2 ÷ 4 =

(c) 1.32 ÷ 4 = (d) 0.132 ÷ 4 =

4. भागाकार करा.

(a) 126 ÷ 8 = (b) 12.6 ÷ 8 =

(c) 1.26 ÷ 8 = (d) 0.126 ÷ 8 =

(e) 0.0126 ÷ 8 =

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## भाजक दशांशात असताना भागाकार (Division with a Decimal Divisor)

**उदाहरण 12** : रवी स्कूटरने 2.5 तासात पूण्याहून माथेरानला गेला. हे अंतर 126 कि.मी. होते. तर त्याचा सरासरी वेग किती होता?

सरासरी वेग काढण्यासाठी आपण अंतराला वेळेने भागू शकतो.

126 ÷ 2.5.

जेव्हा भाजक दशांश असतो, तेव्हा आपण भाजकाचे अपूर्णांकात रूपांतर करतो.

$126 \div \frac{25}{10} = 126 \times \frac{10}{25} = \frac{1260}{25}$.

दीर्घ भागाकार पद्धतीने आपल्याला भागाकार 50.4 मिळतो.

म्हणून रवीने प्रवास केलेला सरासरी वेग 50.4 किलोमीटर दर तास होता.

**उदाहरण 13** : 4.68 ÷ 1.3 सोडवा.

पुन्हा, भाजकाचे अपूर्णांकात रूपांतर केल्यावर आपल्याला पुढील उत्तर मिळते.

$4.68 \div \frac{13}{10} = 4.68 \times \frac{10}{13} = \frac{46.8}{13}$.

आता, $4.68 \div 0.13$ या विषयी काय?

$$4.68 \div 0.13 = 4.68 \div \frac{13}{100} = 4.68 \times \frac{100}{13} = \frac{468}{13}$$

(?) तुम्ही या उदाहरणांमध्ये काय निरीक्षण केले आहे?

जेव्हा भाजक दशांश असतो, तेव्हा आपण भाजकाला 10, 100, 1000 इत्यादीने योग्यरित्या गुणून त्याचे मोजसंख्येत रूपांतर करू शकतो. याच संख्येने आपल्याला भाज्यालाही गुणावे लागते. अशाप्रकारे,

$$\frac{4.68}{0.13} = \frac{4.68 \times 100}{0.13 \times 100} = \frac{468}{13}$$

एकदा आपण भाजकाला मोजसंख्येत रुपांतरीत केले की, भागाकार शोधण्यासाठी आपण स्थानमूल्य पध्दतीचे अनुकरण करू शकतो.

## हा भागाकार कधी संपतो का? (Does This Ever End?)

(?) तुम्ही $10 \div 3$ हे सोडवू शकता का? दीर्घ भागाकार पध्दतीने सोडविण्याचा प्रयत्न करा.

$10 \longrightarrow 1$ दशक + 0 एकक

**पायरी 1**: 1 दशकाचे 10 एककांमध्ये पुनर्गठण करा. 10 एकक $\div$ 3 $\rightarrow$ 3 एकक आणि 1 बाकी राहते.

**पायरी 2**: 1 एककाचे 10 दशांशामध्ये पुनर्गठण करा. 10 दशांश $\div$ 3 $\rightarrow$ 3 दशांश आणि 1 दशांश बाकी राहते.

**पायरी 3** : 1 दशांशचे 10 शतांश मध्ये पुनर्गठण करा. 10 शतांश $\div$ 3$\rightarrow$3 शतांश आणि 1 शतांश बाकी राहते.

**पायरी 4 :** 1 शतांशाचे 10 सहस्त्रांशामध्ये पुनर्गठण करा.

10 सहस्त्रांश $\div$ 3 $\rightarrow$ 3 सहस्त्रांश आणि 1 सहस्त्रांश शिल्लक राहतो. 1 सहस्त्रांशचे 10 दशसहस्त्रांश मध्ये पुनर्गठण करा.

```
3) 10 ( 3.333 ...
   9
  10
   9
  10
   9
  10
   9
   ...
```

ही प्रक्रिया कधीही संपणार नाही! प्रत्येक वेळी आपण 3 ने भागता, तेव्हा 1 बाकी राहते.
ही प्रक्रिया संपेल का?

दीर्घ भागाकारात आपण पाहतो की, प्रत्येक पायरीत आपल्याला 1 बाकी मिळते. म्हणून, ही प्रक्रिया कधीही संपणार नाही!

म्हणून, $10 \div 3$ हे निश्चित अंकांच्या संख्येत दशांश रूपात अंतसह व्यक्त केले जाऊ शकत नाही.

$$10 \div 3 = 3.333 \ldots$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

काही दशांशांचे भागाकार असे असतात जिथे भागाकार कधीही संपत नाहीत. पुढील वर्गात आपण अशा संख्यांचा सखोल विवरणासह शोध घेऊ.

(?) तुम्ही 10÷9 आणि 10 ÷ 11 चा भागाकार शोधू शकता का?

आता 1 ला 7 ने भागा (1÷7)

हा भागाकार संपेल का?

आपल्याला मिळणाऱ्या सर्व बाकी लक्षात घ्या. ती 1 पासून सुरू होते. नंतर 3, नंतर 2, नंतर 6 आणि असेच पुढे चालू राहते. आपण याला एका साखळीच्या रुपात दर्शवूया.

$1 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5$

$5 \leftarrow 4 \leftarrow 6 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$

$1 \to 3 \ldots$

```
7) 1 ( 0.142857142857...
   0
   ---
   10
    7
   ---
   30
   28
   ---
   20
   14
   ---
   60
   56
   ---
   40
   35
   ---
   50
   49
   ---
   10
    7
   ---
   30
   28
   ---
   20
   14
   ---
   60
   56
   ---
   40
   35
   ---
   50
   49
   ---
    1
```

तुम्ही कोणते निरीक्षण केले? हा भागाकार कधीच का संपत नाही, हे तुम्ही स्पष्ट करू शकता का?

केवळ बाकीची पुनरावृत्ती होत नाही, तर भागाकारामधील अंक देखील एका चक्रात पुनरावर्तीत होतात!

0.142857 142857 14...

## जादुई संख्या : (A Magic Number) 142857:

7 ने 1 ला भागताना जी संख्या 142857 प्राप्त झाली तिचा विचार करुया. 142857 ला 1 ते 6 पर्यंतच्या संख्यांनी गुणा.

(?) गुणाकार किती येतात? तुमच्या काय लक्षात येते?

तुम्हाला तीच संख्या परत मिळते. पण अंक चक्रीय पद्धतीने फिरविलेले मिळतात. 142857 ला 7 ने गुणा तुम्हाला काय दिसते?

असे आणखी दुसरे अंक आहेत का? होय!

(?) अशी एक संख्या एक शोधण्यासाठी तुम्ही 1÷17 चे दशांश अपूर्णांकात रुपांतर करू शकता आणि अंकाची पुनरावृत्ती होणारा गट वापरू शकता.

प्रयत्न करा

अशा अमर्याद 'चक्रीय' संख्या आहेत का? म्हणजेच आपण नेहमी असे चक्रीय अंक शोधू शकतो की ते कुठेतरी थांबतात? 1927 मध्ये, ऑस्ट्रियन गणिततज्ञ एमिल आर्टिन यांनी असा तर्क केला होता की, असे अंक अमर्याद असू शकतात. तथापि, आज जवळपास एका शतकानंतरही जरी यावर अनेक गणिततज्ञांनी संशोधन केले आहे तरीदेखील या तर्काचे अजूनही रहस्यमय आहे!

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

## भाज्य, भाजक आणि भागाकार (Dividend, Divisor, and Quotient)

जेव्हा आपण दोन मोजसंख्यांचा भागाकार करतो, तेव्हा भागाकार नेहमी भाज्यापेक्षा लहान असतो. उदाहरणार्थ, $128 \div 4 = 32$, 32 (भागाकार) < 128 (भाज्य)

पण जेव्हा आपण 128 ला 0.4 ने भाग देतो तेव्हा काय होते?

$$128 \div 0.4 = 320.$$

भागाकार हा भाज्यापेक्षा मोठा असतो,

? भाजक दशांश असताना भागाकार नेहमी भाज्यापेक्षा मोठा असेल का? वेगवेगळ्या भाजकांसह प्रयत्न करून पहा.

गणिती बोल

भाज्य, भाजक आणि भागाकार यांच्यातील संबंधाचे वर्णन करा. गुणाकारासाठी जसे केले होते त्याचप्रमाणे वेगवेगळ्या परिस्थितींमध्ये हा संबंध दर्शविण्यासाठी एक कोष्टक तयार करा.

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील अपूर्णांकांचे दशांशात रुपांतर करा.
   (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{13}{4}$
   (c) $\frac{4}{50}$ (d) $\frac{5}{8}$
2. भागाकार करा.
   (a) $24.86 \div 1.2$
   (b) $5.728 \div 1.52$
3. दिलेल्या माहितीचा वापर करून सोडवा. ($156 \times 12 = 1872$.)
   (a) $15.6 \times 1.2 =$ _____ (b) $187.2 \div 1.2 =$ _____
   (c) $18.72 \div 15.6 =$ _____ (d) $0.156 \times 0.12 =$ _____
4. खालील उदाहरणे सोडवा.
   (a) $25 \div$ _____ $= 0.025$ (b) $25 \div$ _____ $= 250$
   (c) $25 \div$ _____ $= 2.5$ (d) $25 \div 10 = 25 \times$ _____
   (e) $25 \div 0.10 = 25 \times$ _____ (f) $25 \div 0.01 = 25 \times$ _____
5. भागाकार शोधा.
   (a) $2.46 \div 1.5 =$ (b) $2.46 \div 0.15 =$
   (c) $2.46 \div 0.015 =$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.46÷1.5 मध्ये मिळालेला भागाकार हा 2.46 ÷ 0.15 मध्ये मिळालेल्या भागाकाराशी समान आहे का ?

6. 4 मीटर लांबीचा एक लाकडी ठोकळा समान लांबीच्या 5 तुकड्यांमध्ये कापायचा आहे. तर प्रत्येक तुकड्याची लांबी किती असेल?
7. जर 12 बाजू असलेल्या एका नियमित बहुभुजाकृतीची परिमिती 208.8 सें.मी. असेल, तर तिच्या बाजूची लांबी किती असेल?
8. 3 लिटर कलिंगडाचा रस 8 मित्रांमध्ये समान वाटला. तर प्रत्येकाला किती रस मिळेल? रसाचे प्रमाण मिलीलिटर मध्ये सांगा.
9. एक कार 12.6 लिटर पेट्रोलमध्ये 234.45 कि.मी. अंतर जाते. तर प्रति लिटर प्रवास केलेले अंतर किती आहे?
10. 13.5 कि.ग्रॅ. पीठ 15 विद्यार्थ्यांमध्ये समान वाटले. तर प्रत्येक विद्यार्थ्याला किती पीठ मिळते?

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2} = 0.5$ | $\frac{1}{5} = 0.2$ |
| $\frac{1}{2 \times 2} = 0.25$ | $\frac{1}{5 \times 5} = 0.04$ |
| $\frac{1}{2 \times 2 \times 2} = 0.125$ | $\frac{1}{5 \times 5 \times 5} = 0.008$ |
| $\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 0.0625$ | $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 0.0016$ |
| $\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = ?$ | $\frac{1}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = ?$ |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(?) तुम्हाला कोणता नमुना दिसतो? 2 आणि 5 याप्रकारे एकमेकांशी का संबंधित आहेत? गणिती बोल

## 4.4 लीप वर्षामागील विचार! (Look Before You Leap!)

पृथ्वीला सूर्याभोवती फिरण्यासाठी 365.2422 दिवस लागतात. 365 दिवस नाही, हे तुम्हाला माहित होते का? आपल्या सोयीसाठी आपण कॅलेंडरमध्ये 365 दिवस मानतो. आपण ग्रेगोरियन कॅलेंडरबद्दल बोलत आहोत.




याचा अर्थ असा की, एका कॅलेंडर (दिनदर्शिका) वर्षानंतर किंवा 365 दिवसांनंतरही पृथ्वीला सूर्याभोवती

तिची एक प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी अजून 0.2422 दिवस लागतात. हे जास्त वाटत नाही. पण अशा 100 कॅलेंडर वर्षानंतर काय होईल?

दशांशांच्या गुणाकाराची तुमची समज वापरू.

$$0.2422 \times 100 = 24.22 \text{ दिवस.}$$

100 कॅलेंडर वर्षांनंतर पृथ्वीला तिच्या 100 व्या सूर्याभोवतीच्या प्रदक्षिणेसाठी आणखी 24.22 दिवस लागतील.

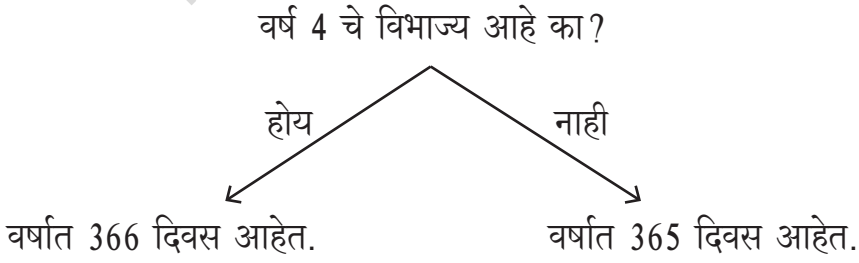
तुमच्या विज्ञान वर्गांमध्ये तुम्ही शिकला आहात की, पृथ्वी ही आपल्या अक्षावर झुकलेली असल्यामुळे आणि सूर्याभोवती प्रदक्षिणा करत असल्यामुळे आपल्याला ऋतू अनुभवता येतात. जर आपले कॅलेंडर सूर्याभोवती पृथ्वीचे स्थान अचूकपणे दर्शवित नसेल, तर आपले ऋतू आणि आपले वार्षिक कॅलेंडर जुळणार नाहीत!

ही समस्या दुरुस्त करण्यासाठी लीप वर्षाची कल्पना मांडली आहे. प्रत्येक चौथ्या वर्षी कॅलेंडर वर्षात एक अतिरिक्त दिवस जोडला जातो.

## समायोजन करणे (Making an Adjustment)




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




? तुम्हाला माहित आहे का कोणत्या महिन्यात हा अतिरिक्त दिवस असतो?
चला हा उपाय कसा कार्य करतो ते पाहूया.

| वर्ष 1 | वर्ष 2 | वर्ष 3 | वर्ष 4 | वर्ष 5 | वर्ष 6 | वर्ष 7 | वर्ष 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 365 | 365 | 365 | 366 | 365 | 365 | 365 | 366 | ... |

वरील क्रम पाहिल्यास 4 कॅलेंडर वर्षानंतर एकूण दिवसांची संख्या

$4 \times 365 + 1 = 1461$ दिवस आहे.

सूर्यभोवती 4 पूर्ण प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी पृथ्वीला किती दिवसांची आवश्यकता आहे?

$4 \times 365.2422 = 1460.9688$ दिवस.

? दर 4 वर्षांनी एक अतिरिक्त दिवस जोडण्याच्या या नवीन योजनेनुसार 100 कॅलेंडर वर्षांमध्ये दिवसांची संख्या किती असेल? ती संख्या मोजण्यासाठी तुम्ही एक गणिती सूत्र / राशी लिहू शकता का?

गणिती बोल

राशी तयार करण्याचा येथे एक मार्ग आहे प्रत्येक कॅलेंडर वर्षात 365 दिवस असतात. 100 कॅलेंडर वर्षांमध्ये दिवसांची संख्या $100 \times 365$ असते. पण जी वर्षे 4 चे विभाज्य आहेत त्यांच्यात एक अतिरिक्त दिवस असतो.

? 100 वर्षात किती वर्षे 4 चे विभाज्य आहेत?

म्हणून 100 कॅलेंडर वर्षामध्ये असणाऱ्या दिवसांची संख्या,

$$(100 \times 365 + \frac{100}{4} \times 1) = 36,525 \text{ दिवस.}$$

? तुम्ही याच प्रश्नासाठी वेगळी राशी तयार करू शकता का?

गणिती बोल

सूर्याभोवती 100 वेळा प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी पृथ्वीला लागणाऱ्या दिवसांची वास्तविक संख्या,

$100 \times 365.2422 = 36,524.22$ दिवस.

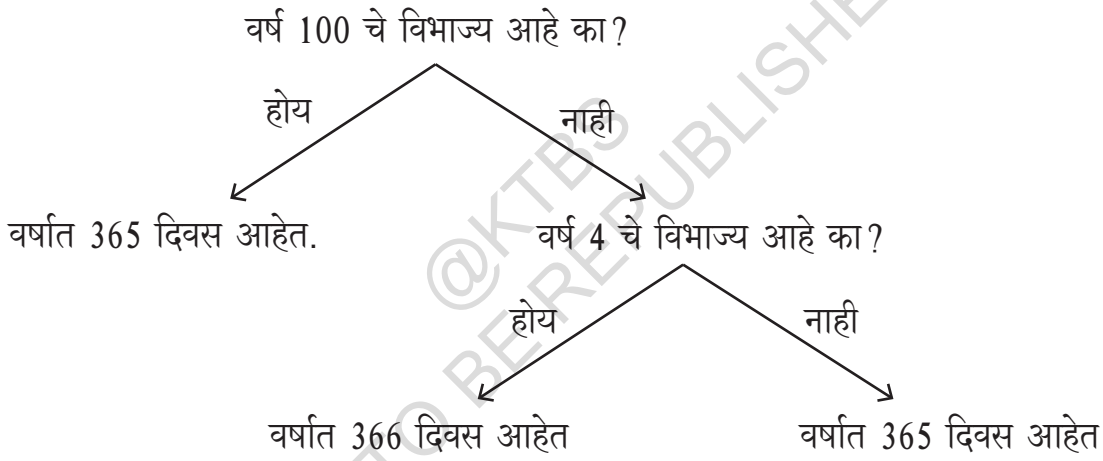
अशाप्रकारे दर चौथ्या वर्षी एक दिवस जोडल्यास 100 वर्षानंतर कॅलेंडरमधील दिवस पृथ्वीला सूर्याभोवती प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी लागणाऱ्या दिवसांच्या वास्तविक संख्येपेक्षा जास्त आहे. आपण जास्त भरपाई केली आहे.

तर ज्या तज्ञ लोकांनी दिनदर्शिका तयार केल्या त्यांनी ठरविले की, ते प्रत्येक शंभराव्या वर्षात 1 अतिरिक्त दिवस जोडणार नाहीत!

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

## आणखी एक समायोजन करणे (Making Another Adjustment)




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? या नवीन दुरुस्तीसह 100 कॅलेंडर वर्षातील दिवसांच्या संख्येसाठी तुम्ही एक राशी लिहू शकता का?

गणिती बोल

आपण पाहिले की 100 वर्षांमध्ये 4 चे विभाज्य असणारी 25 वर्षे आहेत. 100 हे सुध्दा 4 चे विभाज्य आहे. पण आपल्याला ते वगळावे लागेल. म्हणून फक्त 24 वर्षांमध्ये 366 दिवस असतील आणि उर्वरित 76 वर्षांमध्ये 365 दिवस असतील. म्हणून राशी अशी लिहिता येईल,

$$\left(\frac{100}{4}-\frac{100}{100}\right)\times 366+(100-\left(\frac{100}{4}-\frac{100}{100}\right)\times 365$$

$$=(24\times 366)+(76\times 365)=36{,}524 \text{ दिवस}$$

हे 36524.22 दिवसांच्या जवळ आहे पण ते पुरेसे आहे का? या समायोजनाने 1000 वर्षानंतर काय होते?

जर आपण दर चार वर्षांनी 1 दिवस जोडण्याची (100 व्या वर्षात नाही) ही नवीन योजना स्वीकारली तर 1000 कॅलेंडर वर्षातील दिवसांची संख्या,

$$36524 \times 10 = 3,65,240 \text{ दिवस.}$$

पृथ्वीला सूर्याभोवती 1000 वेळा प्रदक्षिणा घालण्यासाठी लागणाऱ्या दिवसांची संख्या.

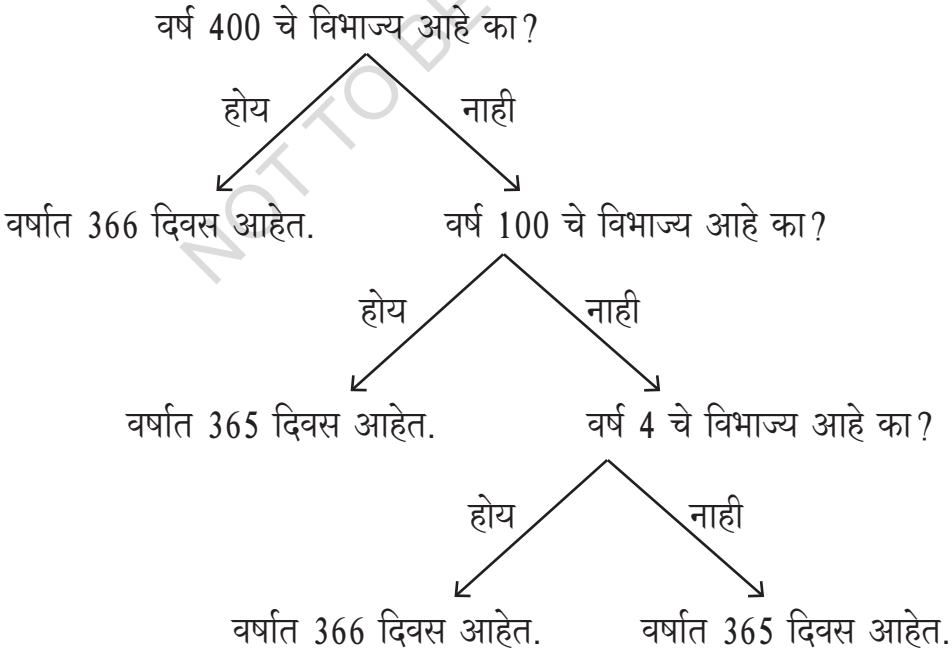
$$1000 \times 365.2422 = 3,65,242.2 \text{ दिवस.}$$

म्हणजे 2.2 दिवसांचा फरक आहे.

हा फरक भरून काढण्यासाठी असा निर्णय घेण्यात आला की प्रत्येक 400 वे वर्ष लीप वर्ष असेल!




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



या योजनेसहे आपण 1000 कॅलेंडर वर्षातील दिवसांची संख्या मोजूया.

1000 कॅलेंडर वर्षांमध्ये 400 ने भाग जाणारी किती वर्षे आहेत? 2.

1000 कॅलेंडर वर्षांमध्ये 100 ने भाग जाणारी पण 400 ने भाग न जाणारी किती वर्षे आहेत? 10 – 2 = 8.

1000 कॅलेंडर वर्षांमध्ये 4 ने भाग जाणारी पण 100 आणि 400 ने भाग न जाणारी किती वर्षे आहेत? 250-10=240

बाकीची वर्षे 1000-(2+8+240)=750 आहेत.

म्हणून, 1000 कॅलेंडर वर्षांमधील एकूण दिवसांची संख्या,

(750 × 365) + (240 × 366) + (8 × 365) + (2 × 366) = 3,65,242 दिवस.

पृथ्वीला सूर्याभोवती 1000 वेळा प्रदक्षिणा घालण्यासाठी 3,65,242.2 दिवस लागतात. म्हणजेच हे 1000 कॅलेंडर वर्षांमध्ये पृथ्वीला सूर्याभोवती प्रदक्षिणा घालण्यासाठी लागणाऱ्या दिवसांच्या प्रत्यक्ष संख्येपेक्षा थोडे कमी (0.2 दिवसांनी) आहे.

दिनदर्शिका निर्मात्यांना 1000 वर्षांमध्ये होणाऱ्या एका लहान फरकाची जास्त चिंता करायची नव्हती! म्हणून त्यांनी लीप वर्षाची योजना जशी आहे तशी ठेवली...

## आणखी देखील एक समायोजन करणे
## (Making Yet Another Adjustment)



@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED



या अंतिम लीप वर्षाच्या योजनेने तुम्ही 10,000 कॅलेंडर वर्षामधील दिनदर्शिका दिवसांची संख्या आणि पृथ्वीला सूर्याभोवती 10,000 प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी लागणाऱ्या प्रत्यक्ष दिवसांची संख्या काढू शकता का? फरक काय आहे? जर खूप मोठा फरक असेल तर तुम्ही या समस्येवर काही उपाय सूचवू शकता का?







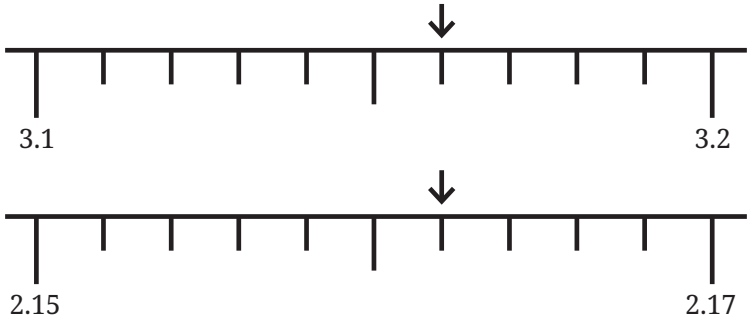
? पृथ्वी सूर्याभोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी अचूक 364.2422 दिवस घेते हे लोकांनी कसे शोधून काढले, याचे तुम्हाला कधी आश्चर्य वाटते का?

? भारतातील पारंपारिक दिनदर्शिका, पृथ्वी सूर्याभोवती फिरण्यासारख्या खगोलशास्त्रीय घटनांशी किंवा आकाशातील ताऱ्यांच्या स्थितींशी दिवसांचे अचूकपणे आणि सातत्याने कसे जुळवून ठेवू शकतात, याचा अभ्यास करा.




## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. 210 ग्रॅम वजनाच्या शेंगदाणा चिक्कीच्या पाकिटाची किंमत ₹70.5 आहे. तर 110 ग्रॅम वजनाच्या बटाटा चिप्सच्या पाकिटाची किंमत ₹ 33.25 आहे. यापैकी कोणते स्वस्त आहे?
2. बाणाच्या चिन्हावर दशांश संख्या लिहा :




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. श्यामलाने ₹ 30 प्रति कि.ग्रॅ. दराने 3 कि.ग्रॅ. केळी खरेदी केली. तिने मोजली असता ती एकूण 35 होती. तिने प्रत्येक केळे ₹5 ला विकले तर सर्व केळी विकून तिला किती नफा झाला?



4. एका शिक्षकांनी पुस्तकांच्या रकान्यात पाठ्यपुस्तके ठेवली आहेत, ज्यांची जाडी 2.5 से.मी. आहे. शिक्षकांना त्या रकान्यात 80 पाठ्यपुस्तके ठेवायची आहेत. रकान्याची लांबी 160 से.मी. आहे. तर त्या रकान्यात किती पुस्तके ठेवली जाऊ शकतात? जागा शिल्लक राहिली का? किती जागा शिल्लक राहिली?

5. खालील रिकाम्या जागा योग्य प्रकारे भरा.

| | | |
|---|---|---|
| 1 सें.मी. = 10 मि.मी.<br>1 मी. = 100 सें.मी.<br>1 कि.मी. = 1000 मी. | 1 कि.ग्रॅ. = 1000 ग्रॅ.<br>1 ग्रॅ. = 1000 मि.ग्रॅ. | 1 लि. = 1000 मि.लि. |

| | | |
|---|---|---|
| 5.5 कि.मी. = _____ मी. | 35 सें.मी. = _____ मी. | 14.5 सें.मी. = _____ मि.मी. |
| 68 ग्रॅ = _____ कि.ग्रॅ. | 9.02 मी. = _____ मि.मी. | 125.5 मि.ली. = _____ लि. |

6. श्रीधराचार्य यांनी त्यांच्या 'पाटीगणित' या पुस्तकात खालील समस्या मांडली आहे. ''$6\frac{1}{4}$ ला $2\frac{1}{2}$ ने भागले आणि 60 ला $3\frac{1}{3}$ ने भागले. तर दोन्ही भागाकार स्वतंत्रपणे सांगा.'' तुम्ही या उदाहरणातील अपूर्णांकांचे दशांशात रुपांतर करून सोडविण्याचा प्रयत्न करू शकता का?

गणिती बोल

7. खालील चौकटी कमीत कमी 2 वेगवेगळ्या पध्दतींनी भरा.

(a) ☐ × ☐ = 2.4 (b) ☐ × ☐ = 14.5

8. 756 ÷ 36 = 21 दिले असता खालील भागाकार करा.

(a) 75.6 ÷ 3.6 (b) 7.56 ÷ 0.36

(c) 756 ÷ 0.36 (d) 75.6 ÷ 360

(e) 7560 ÷ 3.6 (f) 7.56 ÷ 0.36

@KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

9. जर प्रत्येक चौकट a ÷ b दर्शवत असेल तर रिकाम्या चौकटी भरा.

| b ↓ a → | 1517 | 151.7 | 15.17 | 1.517 | 15170 |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 41 | | | | |
| 3.7 | | | 4.1 | | |
| 0.37 | | | | | |
| 0.037 | | 4100 | | | |
| 370 | | | | | |

10. 2,4,5,8 आणि 0 या अंकांचा वापर करून चौकटी भरा. ☐☐.☐ × ☐.☐ जेणेकरून. खालील बाबी मिळतील,

(a) जास्तीत जास्त गुणाकार
(b) कमीत कमी गुणाकार
(c) मूल्य 150 पेक्षा मोठे
(d) मूल्य 100 च्या सर्वात जवळचे
(e) मूल्य 5 च्या सर्वात जवळचे

11. खालील उदाहरणे चढत्या क्रमाने मांडा

(a) 245.05 × 0.942368
(b) 245.05 × 7.9682
(c) 245.05 ÷ 7.9682
(d) 245.05 ÷ 0.942368
(e) 245.05
(f) 7.9682

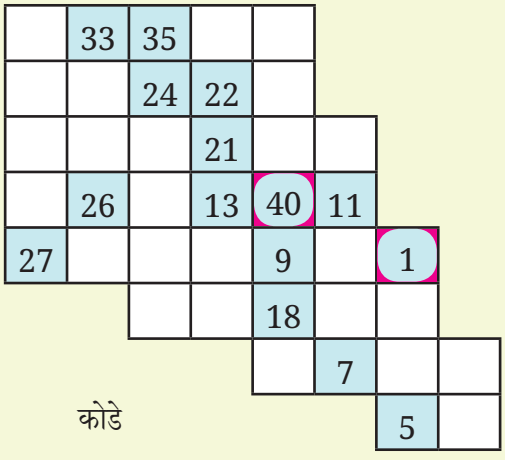
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## सारांश / SUMMARY

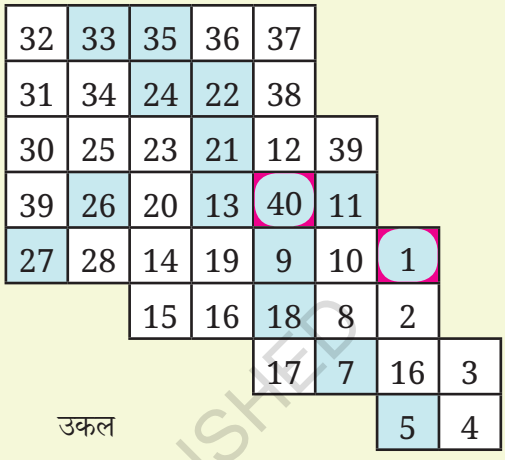
- या प्रकरणात आपण दशांश अपूर्णांकाचा गुणाकार आणि भागाकार करण्याच्या प्रक्रियेचा अभ्यास केला आहे.
- दशांश अपूर्णांकांच्या गुणाकारामध्ये आपण प्रथम गुणक आणि गुण्य यांना मोजसंख्या मानून त्यांचा गुणाकार करतो. आलेल्या गुणाकारामध्ये दशांश स्थानांची संख्या ही गुणक आणि गुण्य यांमधील दशांश स्थानांच्या एकूण संख्येइतकी असते.
- दशांश अपूर्णांकांच्या भागाकारामध्येही त्याच प्रक्रियेचा वापर करतो. म्हणजेच स्थानमूल्यांवर आधारित मोज संख्यांसह भागाकार (दीर्घ भागाकार), एककांचे (सुटे) दशांश मध्ये, दशांशाचे शतांश मध्ये, शतांशांचे सहस्त्रांश मध्ये, आणि पुढे असे पुनर्गठण सुरु राहते. जेव्हा एककांचे दशाशात पुनर्गठण केले जाते, तेव्हा दशांश चिन्ह भागाकारात ठेवले जाते.
- असे दशांशांचे भागाकार आहेत जिथे भागाकार कधीच संपत नाही. प्रत्येक पुनर्गठणानंतर आणि भागल्यानंतर नेहमी बाकी राहते!




# हिडाटो - संख्याकोडे



कोडे



उकल

हिडाटो कोडयामध्ये चौरसांची एक चौकट दिलेली असते. ती सामान्यत: सुडोकू (Sudocu) किंवा काकुरो (Kakuro) प्रमाणे चौरसाकार असते. पण ती एकसंघ रचना बनविणारी अशी षटकोनी किंवा इतर कोणत्याही आकाराची असू शकते. त्यामध्ये वर्तुळासारखी अंतर्गत छिद्रे असू शकतात पण ती चौकट सलग एकच भाग असते.

साधारणपणे प्रत्येक हिडाटो कोडयात सर्वात लहान आणि सर्वात मोठया संख्या आधीच चौरसामध्ये दिलेल्या असतात.

चौकटीत (सर्वात लहान संख्येपासून सर्वात मोठया संख्येपर्यंत) सर्व संख्या सलग मार्गाने जोडल्या जातील अशाप्रकारे त्या भरणे हे तुमचे काम आहे. पुढील संख्या ही शेजारच्या कोणत्याही घरात असणे आवश्यक आहे. ज्यामध्ये तिरप्या दिशेला लागून असलेली घरेही समाविष्ट आहेत.

या कोडयामध्ये काही संख्या आधीच दिलेल्या असतात. (सर्वात लहान आणि सर्वात मोठया संख्यांच्या मधील मूल्य असलेल्या) ज्यामुळे कोडयाचे एकच उत्तर मिळते.

खालील हिडाटो कोडी सोडविण्याचा प्रयत्न करा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | | 1 | | |
| | 20 | | | 4 |
| | 14 | | 8 | |
| | | 15 | | 9 |
| | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 36 | 1 | 2 | | | |
| | | | 4 | 6 | 13 | |
| | | 34 | | | 12 | |
| 39 | | | 30 | | | |
| | | 31 | | | | |
| | | | | | 17 | |
| | 26 | | 23 | 21 | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | | | | |
| | | | | 7 | 10 | | | |
| | | | | | | | | |
| | | 5 | | | 1 | 17 | 15 | |
| | | | | | | | | |
| | 44 | | 49 | | | 28 | | |
| | 54 | 42 | | 50 | | 29 | 26 | |
| 56 | | | | | 35 | 34 | 25 | 23 |
| | | | | | | | | |
| | | | | 39 | | | | |



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# 5 बिंदूंची जोडणी (CONNECTING THE DOTS)

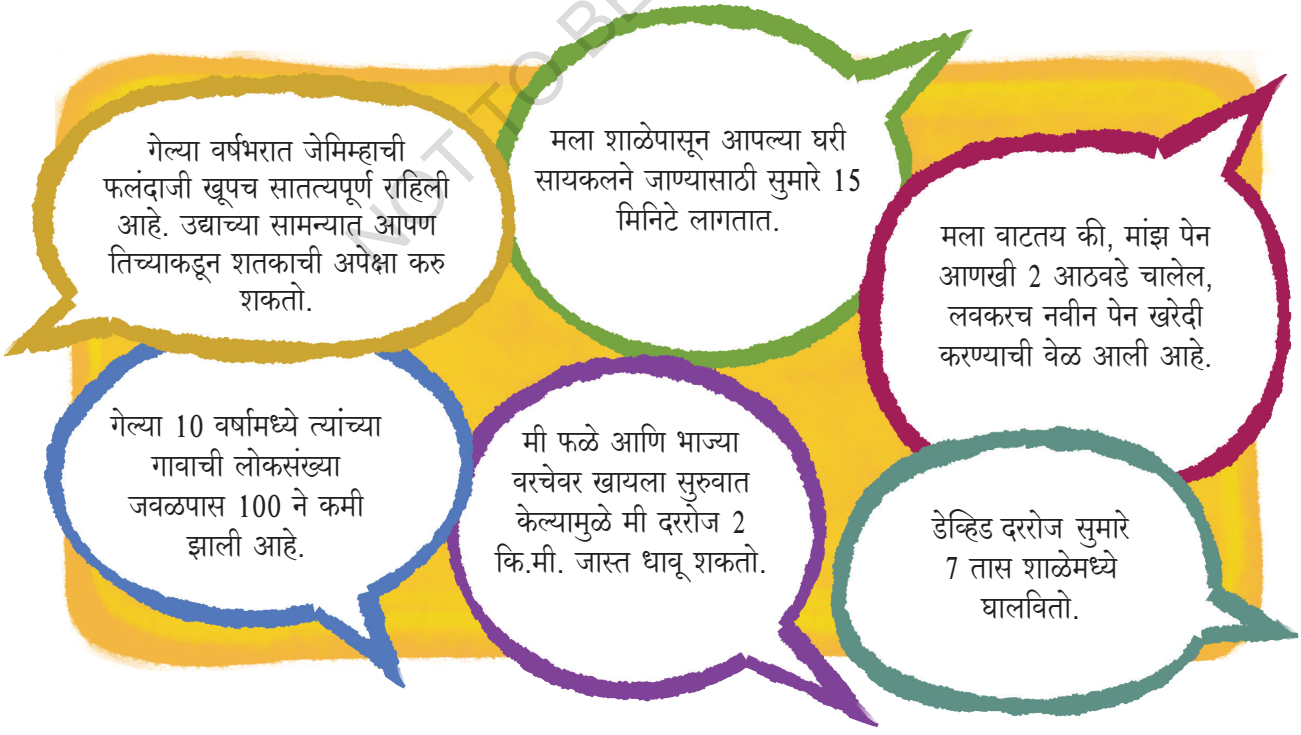
## 5.1 प्रश्न आणि विधाने (Questions and Statements)

तुमच्या शिक्षकांनी तुम्हाला सांगितले की, आज संध्याकाळी ते त्यांच्या बालपणीच्या दोन मित्रांना भेटणार आहेत. एकटा 5 फूट उंचीचा आणि दुसरा 6 फूट उंचीचा आहे. या माहितीवरून प्रत्येक मित्राचे लिंग कोणते आहे याचा तुम्हाला अंदाज आहे का?

तुम्ही अशी कल्पना केली आहे की 5 फूट उंचीची व्यक्ती महिला आणि 6 फूट उंचीची व्यक्ती पुरुष आहे. तुम्ही चूकीचे असण्याची शक्यता आहे. परंतु अनुभव सांगतो की 5 फूट उंचींचा पुरुष आणि 8 फूट उंचीची महिला हे क्वचितच आढळते. बऱ्याच वेळा आपण पाहिले आहे की, महिलांपेक्षा पुरुषांची उंची जास्त असते.

वरील उदाहरण हे संख्यात्मक विचारसरणीचे एक सोपे उदाहरण आहे. आपल्याला नियमितपणे अशी अनेक विधाने आढळतात. जशी की,

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED



आम्ही त्यांना सांख्यिकीय विधाने म्हणतो. सोप्या भाषेत सांगायचे झाले तर एखाद्या घटने विषयीची सांख्यिकीय विधाने किंवा सारांश जी संख्यात्मक मूल्ये, प्रमाण, संभाव्यता किंवा भाकित स्वरुपात व्यक्त केली जाते.

सांख्यिकीय प्रश्न हा असा प्रश्न आहे, ज्याचे उत्तर माहिती संग्रहीत करून देता येते. उदाहरणार्थ ''आमच्या शाळेतील इयत्ता 7 वीच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांची उंची किती आहे?'' हा एक सांख्यिकीय प्रश्न आहे. आम्हाला अपेक्षा आहे की, इयत्ता 7 वी च्या सर्व विद्यार्थ्यांची उंची सारखीच नसेल, परंतु आम्ही माहिती संग्रहीत करू शकतो. त्याचे विश्लेषण करु शकतो आणि उंचीबद्दल निष्कर्ष काढू शकतो. सामान्यत: कोल्हापूरमध्ये कांदे महाग असतात की सोलापूरमध्ये? हा प्रश्न सुध्दा एक सांख्यिकीय प्रश्न आहे, किंमती कालांतराने बदलू शकतात. म्हणून या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी आम्हाला माहिती पाहणे, त्याचे विश्लेषण करणे आणि योग्य सांख्यिकीय विधाने करुन निष्कर्ष काढणे आवश्यक आहे.

गणिती बोल

? खालीलपैकी कोणते सांख्यिकीय प्रश्न आहेत?

(a) भारतामध्ये टेनिस बॉलची किंमत किती आहे?

(b) या रस्त्यावर राहणारे कुत्रे किती वयाचे आहेत?

(c) तुमच्या वर्गातील कोणत्या विद्यार्थ्यांना टेकडीवर चालणे आवडते?

(d) तुम्हाला वाचनाची आवड आहे का?

(e) या भिंतीत अंदाजे किती विटा आहेत?

(f) कालच्या सामन्यात सर्वोत्तम गोलंदाज कोण होता?

(g) गेल्यावर्षी बाडमेरमध्ये पावसाचे प्रमाण किती होते?

सांख्यिकी हा शब्द माहिती संग्रहीत करणे, आयोजित करणे, विश्लेषण करणे, अर्थ लावणे आणि सादरीकरण करणे याच्या अभ्यासाशी संबंधीत आहे. या प्रकरणामध्ये आपण सांख्यिकीय प्रश्नांना सामोर जाऊन, माहिती आणि आलेखाचे विश्लेषण केल्याने त्यांची उत्तरे कशी मिळू शकतात हे शिकूया.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 5.2 प्रतिनिधिक किंमती (Representative Values)

? शुभमन आणि यशस्वी यांनी क्रिकेट मालिकेमध्ये केलेल्या धावा खालील कोष्टकामध्ये दिलेल्या आहेत. तुमच्या मते कोणाची कामगिरी चांगली आहे?

| खेळाडू | सामना (1) | सामना (2) | सामना (3) | सामना (4) |
|---|---|---|---|---|
| शुभमन | 0 | 17 | 21 | 90 |
| यशस्वी | 67 | 55 | 18 | 35 |



श्रेयस म्हणतो की, ''दोघांचीही कामगिरी सारखीच आहे कारण यशस्वीने पहिल्या आणि दुसऱ्या सामन्यात जास्त धावा केल्या आहेत तर शुभमनने तिसऱ्या आणि चौथ्या सामन्यात जास्त धावा केल्या आहेत''.

वैष्णवी म्हणते की, ''मला वाटते की शुभमनची कामगिरी उत्तम आहे कारण त्याने एका सामन्यामध्ये सर्वात जास्त धावा केल्या आहेत. - 90''.



श्रेयस म्हणतो की, नाही! यशस्वीने उत्तमरीत्या फलंदाजी केली आहे. कारण त्याने एकूण 175 धावा केल्या आहेत; तर शुभमनने फक्त 128 धावा केल्या आहेत.

वैष्णवी म्हणते, ''ओह! यशस्वीची फलंदाजी अधिक सातत्यपूर्ण आहे. जरी किमान धावा आणि कमाल धावा यामध्ये फरक कमी आहे तरीसुद्धा''.

खालील कोष्टक या दोन खेळाडूनी आणखी एका मालिकेमध्ये केलेल्या धावा दिलेल्या आहेत तर या मालिकेमध्ये कोणाची कामगिरी उत्तम झाली आहे असे तुम्हाला वाटते.

| खेळाडू | सामना 1 | सामना 2 | सामना 3 | सामना 4 | सामना 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| शुभमन | 23 | 07 | 10 | 52 | 18 |
| यशस्वी | 26 | 53 | 02 | - | 15 |

वैष्णवी म्हणते की, ''येथे शुभमनची कामगिरी उत्तम आहे. कारण त्याने केलेल्या एकूण धावा 110 आहेत तर यशस्वीच्या एकूण धावा 96 आहेत''.

? तुम्हाला वैष्णवीच्या विधानाविषयी काय वाटले?

श्रेयस म्हणतो की, ''परंतु यशस्वीने 96 धावा 4 सामन्यात केल्या आहेत आणि शुभमनने 110 धावा 5 सामन्यात केल्या आहेत''.

कोणाची कामगिरी उत्तम आहे हे आपण कसे सांगू शकतो? बऱ्याचदा दोन दोन गटांची तुलना करणे आणि एखादा दुस-यापेक्षा उत्तम आहे, हे सांगणे सोपे नाही.

? एकच संख्या ही त्या गटातील संख्यांचे प्रतिनिधित्व करु शकते का? उदाहरणार्थ, एकाच संख्येने मालिकेमधील शुभमन आणि यशस्वी यांची कामगिरी दर्शवू शकतो का? याची चर्चा करा.

एक पध्दत आपण याआधीच पाहिली आहे-गटातील सर्वांची एकूण किंमत! परंतु जर गटांचे आकार वेगवेगळे असतील, तर एकूण तुलना करण्यासाठी हे माप पुरेसे (योग्य) असू शकत नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

काही सामन्यांमध्ये एका खेळाडूने अधिक धावा तर इतर सामन्यात कमी धावा केलेल्या असतील. गटाची प्रातिनिधिक संख्या ही कमाल आणि किमान यामधील समतोल शोधून घेतली जाते. उदाहरणार्थ, सर्व सामन्यामध्ये केलेल्या धावांची बेरीज करून त्याला सामन्यांच्या संख्येने भागले जाते. या किंमतीला आपण दिलेल्या माहितीची **सरासरी** किंवा **अंकगणिती मध्य** असे म्हणतो.

येथे खेळाडूने सामन्यामध्ये केलेल्या धावांची सरासरी संख्या = खेळाडूने सर्व सामन्यांमध्ये केलेल्या एकूण धावा ÷ खेळलेल्या सामन्यांची संख्या

शुभमनने सामन्यामध्ये केलेल्या धावांची सरासरी संख्या = 110 ÷ 5 = 21 धावा.

यशस्वीने सामन्यामध्ये केलेल्या धावांची सरासरी संख्या = 96 ÷ 4=24 धावा.

या मालिकेमध्ये यशस्वीच्या धावांच्या संख्येची सरासरी ही शुभमनपेक्षा जास्त आहे.

**सरासरी** किंवा **अंकगणिती मध्य** (AM) किंवा फक्त **मध्यची** गणना खालील प्रमाणे आहे.

$$\text{मध्य} = \frac{\text{माहितीमधील सर्व किंमतींची बेरीज}}{\text{माहितीमधील किंमतींची संख्या}}$$

## सरासरी एक उचित विभागणी (Average as Fair-Share)

सरासरी ही उचित विभागंणी किंवा योग्य विभागणी म्हणून समजली जाऊ शकते.

? श्रेया आणि तिच्या 4 मैत्रिणीनी जमा केलेले पेरु पुढील प्रमाणे आहेत. ते म्हणजे 3, 8, 10, 5 आणि 4, तसेच पराग आणि त्याच्या 5 मित्रांनी जमा केलेल्या पेरुंची संख्या 5, 4, 6, 3, 4 आणि 8 आहे. प्रत्येक गट आपले पेरु आपापसात समानरीत्या विभागून घेतात. तर कोणत्या गटातील प्रत्येकाला मिळणारा पेरुंचा वाटा मोठा असेल.

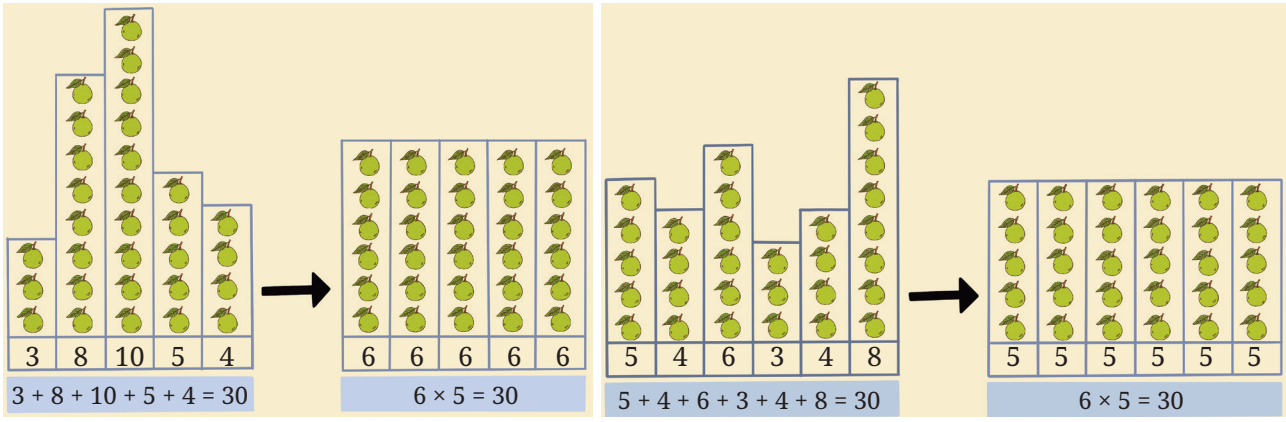
याचा शोध घेण्यासाठी, प्रथम आपल्याला प्रत्येक गटाने जमा केलेले पेरु किती? ते पाहावे लागतील. त्यानंतर एकूण पेरुंच्या संख्येला गटातील एकूण लोकांच्या संख्येने भाग दिला तर प्रत्येक सदस्याचा वाटा मिळतो.

श्रेयाच्या गटाने जमा केलेले एकूण पेरु = 3+8+10+5+4 = 30 पेरु. तर श्रेयाच्या गटातील प्रत्येक सदस्याचा वाटा = 30÷5=6 पेरु.

परागच्या गटाने जमा केलेले एकूण पेरु = 5+4+6+3+4+8=30 पेरु. तर परागच्या गटातील प्रत्येक सदस्याचा वाटा = 30÷6 = 5 पेरु.

श्रेयाच्या गटातील सदस्यांना परागच्या गटातील सदस्यांपेक्षा एक पेरु जास्त मिळतो.

@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED




? वैष्णवी आपल्या बागेत दररोज फुलणाऱ्या जास्वंदीच्या फुलांची संख्या नोंदविते. गेल्या कांही दिवसातील तिची माहिती 2,7,9,4,3 अशी आहे. तर वैष्णवीच्या बागेत दररोज फुलणाऱ्या जास्वंदीच्या फुलांची सरासरी संख्या किती?



सरासरी = (एकूण फुललेल्या जास्वंदीच्या फुलांची संख्या) ÷ (दिवसांची संख्या)

= (2 + 7 + 9 + 4 + 3) ÷ 5

= 25 ÷ 5 = 5

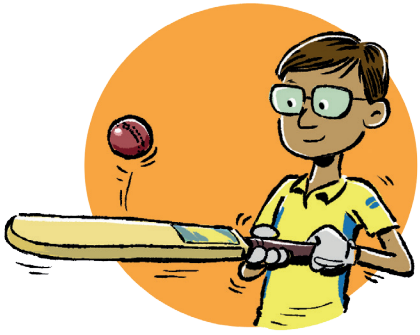
सरासरीनुसार दररोज 5 जास्वंदीची फुले फुलतात.

या घटनेमध्ये, सरासरी ही जर दररोज समान संख्येने फुले फुलली असती तर त्यांची संख्या सांगते.

प्राचीन भारतीय गणिततज्ञानी सरासरी किंवा अंकगणिती मध्यसाठी सममिती हा शब्द वापरला. सम म्हणजे समान. भारतीय ग्रंथामध्ये हे अंकगणिती मध्यसाठी वापरलेल्या काही संज्ञामध्ये ब्रम्हगुप्त (इ.स. 628) मध्ये समरज्जू (अ रेषाखंडाचे माप), महावीराचार्य (इ.स. 850) मध्ये समीकरण (समान करणे, समतोलीत करणे), श्रीपती (इ.स. 1039) मध्ये साम्य (समानता, निष्पक्षता, समान दृष्टीकोन) आणि भास्कराचार्य (इ.स. 1150) आणि गणेश (इ.स. 1545) मध्ये सममिती (म्हणजे माप) यांचा समावेश आहे. ही पदे दर्शवितात की भारतीय विद्वानांनी अंकगणिती मध्याला सामान्य किंवा समानता साधणारे मूल्य मानले आहे. जे मूल्यांच्या संग्रहाचे प्रातिनिधिक माप आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## शोधा पाहू (Figure it Out)



1. श्रेयस हा बॅट आणि बॉलने खेळत आहे. परंतु क्रिकेट नाही. तो चेंडू खाली पडण्यापूर्वी बॅटला लागून वर किती वेळा जातो याची गणना करतो. 3 प्रयत्नांची माहिती 6, 2 ,9, 5, 4, 6, 3, 5 ही आहे. श्रेयस बॅटने चेंडूला कितीवेळा मारतो याची सरासरी काढा.
2. तुम्ही स्वतः वरील कृती करून प्रयत्न करा.1 किंवा त्यापेक्षा अधिक प्रयत्नांची माहिती संग्रहीत करून सरासरी काढा.

प्रयत्न करा

3. तुमच्या परिसरातील शेजारी फुलणाऱ्या वनस्पती ओळखा. फुलण्याच्या हंगामातील एका आठवड्यात रोज फुलणाऱ्या फुलांची नोंद करा. तर दररोज फुलणाऱ्या फुलांची सरासरी संख्या किती?
4. दोन मित्र 100 मी. धावण्याच्या स्पर्धेसाठी प्रशिक्षण घेत आहेत. गेल्या आठवड्यामधील त्यांच्या धावण्याच्या वेळा सेकंदामध्ये दिल्या आहेत. निखिलची वेळ-17, 18, 17 16, 19, 17, 18. सुनिलची वेळ-20, 18, 18, 17, 16, 16, 17. आहे. तर सरासरी मध्ये कोण जलद धावतो?
5. सलग 6 वर्षामध्ये शाळेत दाखल झालेल्यांची संख्या 1555, 1670, 1750 2013, 2040, 2126 आहे. तर त्या काळात शाळेत नोंद झालेल्यांची सरासरी किंवा मध्य किती?

## तुमच्या कांद्यांची माहिती! (Know Your Onions!)

दोन शहरांमधील कांद्यांचा मासिक दर प्रति किलोग्रॅम रुपयामध्ये खालील कोष्टकामध्ये दिली आहे. तुमच्या मतानुसार कोठे कांदे अधिक महाग आहेत?

गणिती बोल

| महिना | कोल्हापूर |
|---|---|
| जानेवारी | 25 |
| फेब्रुवारी | 24 |
| मार्च | 26 |
| एप्रिल | 28 |
| मे | 30 |
| जून | 35 |

| महिना | सोलापूर |
|---|---|
| जानेवारी | 19 |
| फेब्रुवारी | 17 |
| मार्च | 23 |
| एप्रिल | 30 |
| मे | 38 |
| जून | 35 |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| | |
|---|---|
| जूलै | 39 |
| ऑगस्ट | 43 |
| सप्टेंबर | 49 |
| ऑक्टोबर | 56 |
| नोव्हेंबर | 59 |
| डिसेंबर | 44 |

| | |
|---|---|
| जूलै | 42 |
| ऑगस्ट | 39 |
| सप्टेंबर | 53 |
| ऑक्टोबर | 60 |
| नोव्हेंबर | 52 |
| डिसेंबर | 42 |

खुशबू : मला वाटते की सोलापूरमध्ये कांदे अधिक महाग आहेत. कारण तेथे सर्वात जास्त दर आहे तो 60 आहे.

नफिसा: मी प्रत्येक ठिकाणाच्या सर्व महिन्यातील दरांची बेरीज केली. कोल्हापूरमधील एकूण किंमत ₹458 आहे. तर सोलापूरमधील एकूण किंमत ₹ 450 आहे.

विशाल: सोलापूरमध्ये कांदे अधिक महाग आहेत, कारण तेथे 50 च्यावरील 3 संख्या आहेत.

संपत: मी दोन्ही ठिकाणच्या प्रत्येक महिन्याच्या दरांची तुलना केली. कोल्हापूरमध्ये 6 महिन्यासाठी दर जास्त आहेत, तर सोलापूरमध्ये 5 महिन्यासाठी दर जास्त आहेत आणि एका महिन्याचे दर समान आहेत. त्यामुळे मला वाटते की, कोल्हापूरमध्ये कांदे अधिक महाग आहेत.

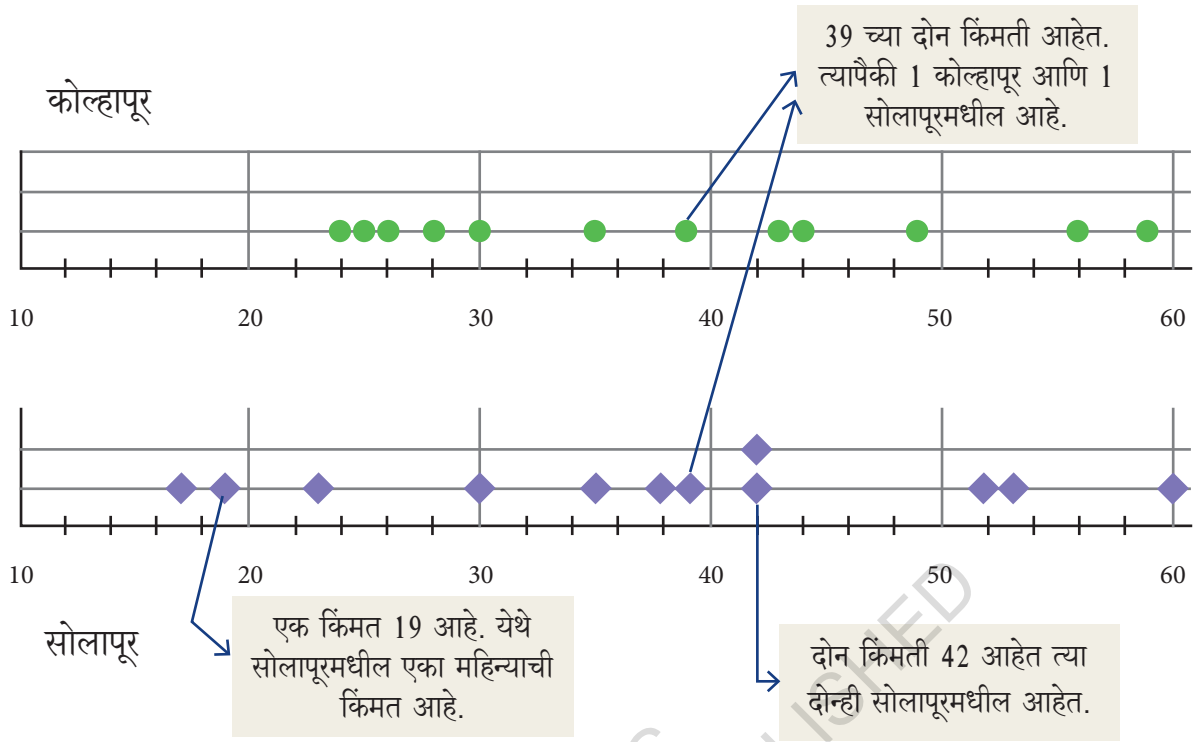
जिथिन: माझ्या लक्षात आले की, कोल्हापूरमधील सर्वात जास्त आणि सर्वात कमी दरामधील फरक 59-24=35 आणि सोलापूरमधील 60-17=43.

माहितीचे वर्णन आणि तुलना **कमाल (सर्वात जास्त)** आणि **किमान (सर्वात कमी)** किंमतींचा संदर्भ घेऊन केला जातो. तसेच सरासरी किंमत ही सर्वांची **एकूण** किंमत व सर्वात मोठी किंमत आणि सर्वात लहान किंमत यामधील फरक घेऊन केली जाते.

© KBS NOT TO BE REPUBLISHED

## ? माहितीची तुलना करण्यासाठी इतर कोणत्याही मार्गाचा विचार करु शकता का?

माहितीचा अभ्यास आपण अनेक प्रकारे करू शकतो. खाली दर्शविलेला एक मार्ग म्हणजे **बिंदू आलेख** (dot plot). बिंदू आलेखाद्वारे माहिती बिंदूंच्या आधारे एका रेषेवर ठिपक्यांच्या स्वरुपात दर्शवितात. ज्यामुळे आपल्याला माहितीमधील बदल दर्शविण्यास मदत होते. खालील आकृतीमध्ये प्रत्येक ठिपका कांद्याची मासीक किंमत दर्शवितो.




कोल्हापूरमधील दर हिरव्या आणि सोलापूरमधील दर जांभळ्या रंगाने दर्शविले आहेत. क्षितिज रेषा 10 ते 60 पर्यंतचे दर दर्शविते (0 ते 10 पर्यंत किंवा 60 च्यावर कोणतेही दर नाहीत म्हणून) उभ्या रेषेवरील ठिपके विशिष्ट माहिती मूल्ये किती वेळा आली आहेत हे दाखवितात. लक्षात घ्या की क्षितीज किंवा उभ्या रेषेवर एककामधील अंतर समान आहे.

? पूर्वी दर्शविलेल्या कोष्टकामधील सर्व माहिती यामध्ये दर्शविलेली आहे का?

? याकडे पाहून आपण जानेवारी महिन्यातील कोल्हापूरमधील कांद्याच्या दराची माहिती सांगू शकतो का?

सादरीकरणाची ही पध्दत माहितीची क्रमवारी लावते. परंतु मूल्यांचा मूळ (महिना वार) क्रम गमावित. तरीसुध्दा हे आपल्याला आपल्या इच्छेप्रमाणे माहिती गटबध्द करण्याची परवानगी देते. जसे की, विशालने केले आहे. उदाहरणार्थ, सोलापूरमध्ये 10-20 दरम्यान 2 माहिती मूल्ये आहेत. तर कोल्हापूरमध्ये एकही नाही. हे प्रतिनिधीत्व माहितीमधील बदल पाहण्यास सोपे बनविते, तसेच माहिती कुठे आणि कशी एकत्रीत झाली किंवा पसरली आहे ते सांगते. सोलापूरमधील दर कोल्हापूरमधील दरांपेक्षा जास्त पसरलेले आहेत हे आपण सहजपणे सांगू शकतो. सर्वात जास्त किंवा सर्वात कमी मूल्ये ओळखणे सोपे होते.

या दोन ठिकाणच्या दरांची तुलना करण्याच्या मार्गपैकी आपण सरासरीचाही वापर करु शकतो.

© ERS NOT TO BE REPUBLISHED

? कोल्हापूर आणि सोलापूर मधील कांद्यांचा सरासरी दर शोधा.

''कांद्याचा दर ₹35 प्रति किलो आहे.'' असे विधान कदाचित कोणताही पुढील प्रश्न निर्माण करणार नाही. परंतु माहितीमधील बदल पाहिल्यास. जसे की कोल्हापूर आणि सोलापूरमधील वर्षभरातील कांद्याच्या किंमती कुतुहल निर्माण करु शकतात. उदाहरणार्थ, कोणालातरी त्या दोन ठिकाणाविषयी अधिक माहिती करून घेण्याची उत्सुकता असू शकते. तुम्हाला कदाचित आश्चर्य वाटेल.




? तुम्हाला आणखी कशाविषयी आश्चर्य वाटते?

गणिती बोल

उत्तरे शोधण्यासाठी तुम्ही तुमच्या समवयस्क मित्र-मैत्रीणी, शिक्षक किंवा कुटुंबातील सदस्यांशी उत्सुकता असलेल्या प्रश्नांविषयी चर्चा करु शकता.



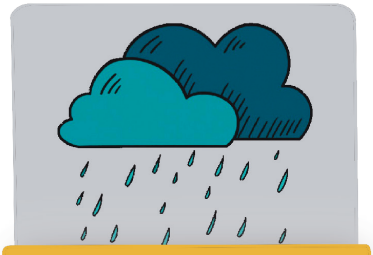
माहितीचे निरीक्षण करणे, त्यांचा अर्थ लावण्याचा प्रयत्न करणे ही मनोरंजक गोष्टी उघड करु शकते. हे आपल्या कुतुहलाला विविध दिशांनी चालना देऊ शकते.

## आपल्या सभोवतालची सरासरी (Averages Around Us)

संख्याशास्त्र, गणित, प्रायोगिक विज्ञान, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, खेळ, जीवशास्त्र आणि विविध शिस्तीमध्ये नियमितपणे अंकगणिती मध्याची माहिती दर्शविण्यासाठी उपयोग होतो. हे काही

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

प्रमाणात प्रसिध्द आहे कारण अंकगणिती मध्याची व्याख्या ही साधी आणि समजण्यास सोपी आहे. वेगवेगळ्या परिस्थितीतील सरासरीचा समावेश असलेली काही विधाने खालील प्रमाणे दाखविलेली आहेत.



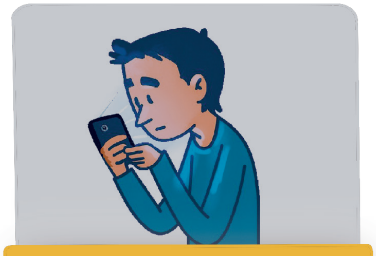
झारखंडमध्ये जुलै महिन्यात दररोज पडणाऱ्या पावसाची सरासरी 37.2 मि.मी. ही आहे.




यावर्षी माझ्या स्कूटीचे सरासरी मायलेज अंदाजे 45 किलोमीटर प्रति लिटर इतके आहे.



पंजाबमध्ये गहूचे सरासरी उत्पन्न 4.7 टन प्रति हेक्टर तर बिहारमध्ये 2.9 टन प्रति हेक्टर आहे.



स्मार्टफोनचा वापर करणारे दिवसातून सरासरी 58 वेळा आपला फोन तपासतात.



सामान्यपणे एक भारतीय नागरिक दररोज सरासरी 0.45 कि.ग्रॅ. इतका कचरा निर्माण करतो.




2017-2024 या कालावधीत दरवर्षी प्रदर्शित झालेल्या भारतीय सिनेमांची सरासरी संख्या 3126 आहे

© KISS NOT TO BE PUBLISHED

## बाह्यमूल्ये आणि मध्यांक (Outliers and Medians)

सरासरी ही नेहमी मूल्यांच्या संग्रहाचा योग्य सारांश देते का? जर नाही असे असेल तर, त्यावर पर्याय कोणता? चला तर तो शोधूया.

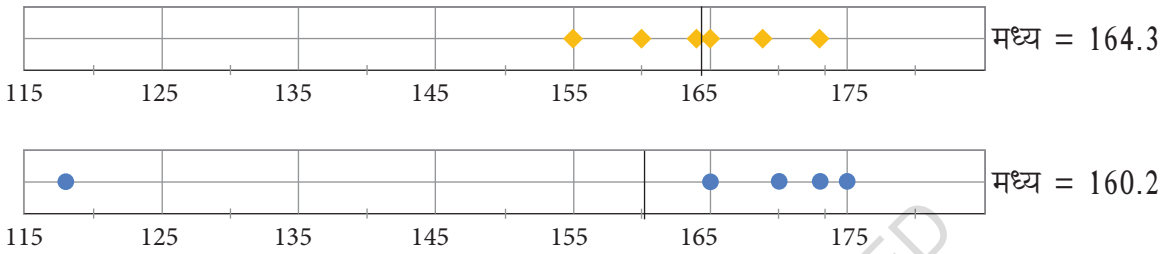
## कुटुंबांची उंची (Height of a Family)

कुटुंबातील सदस्य यांगबा आणि पूवीझी यांची उंची खालीलप्रमाणे आहे.

यांगबाचे कुटुंब - 170 सें.मी., 173 सें.मी., 165 सें.मी., 118 सें.मी., 175 सें.मी. 169 सें.मी., 173 सें.मी., 155 सें.मी., 165 सें.मी., 160 सें.मी., 164 से.मी.
पूवीझीचे कुटुंब - 170 सें.मी., 173 सें.मी., 165 सें.मी., 118 सें.मी., 195 सें.मी.

? प्रत्येक कुटुंबाच्या उंचीची सरासरी शोधा. तुम्ही असे सांगू शकाल का, यांगबाच्या कुटुंबाची उंची ही पूवीझीच्या कुटुंबापेक्षा जास्त आहे?

पूवीझीच्या कुटुंबाची सरासरी उंची (160.2 सें.मी.) ही यागंबाच्या कुटुंबापेक्षा कमी आहे (164.3 में मी.). जरी पूवीझीच्या कुटुंबातील जास्तीत जास्त सदस्य उंच आहेत तरी पण त्या कुटुंबाची सरासरी उंची कमी आहे. याचे कारण म्हणजे एक मूल लहान आहे आणि ते कुटुंबातील इतर सदस्यांप्रमाणे उंच नाही. त्यांची सरासरी उंची 160.2 सें.मी. जी 5 पैकी चार सदस्याची उंची कमी आहे. येथे माहिती दर्शविण्यास सरासरी योग्य नाही.




? तुम्ही ही माहिती योग्यरीत्या दर्शविणाऱ्या इतर संख्येविषयी विचार करू शकता का?

एक पध्दत म्हणजे माहितीची मांडणी क्रमाने करुन त्यांच्या मध्यावर येणारी संख्या घेणे. त्या संख्येला **मध्यांक** असे म्हणतात.

पूवीझीच्या कुटुंबाच्या उंचीचा मध्यांक शोधण्यासाठी, आम्ही प्रथम उंचीची क्रमवार मांडणी करतो.

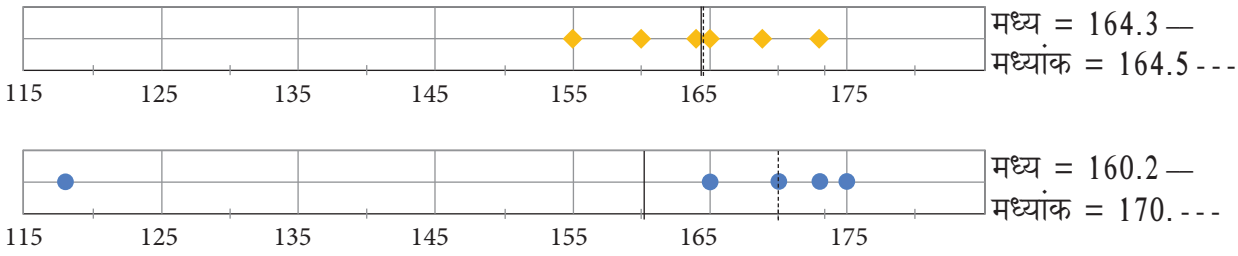
118, 165, 170, 173, 175.

या क्रमात मांडलेल्या माहितीची मधील संख्या 170 आहे. त्यामुळे उंचीचा मध्यांक 170 सें.मी. आहे.

आता आपण यागंबाच्या कुटुंबाचा मध्यांक शोधूया. जर त्यांची उंची क्रमवार मांडली तर ती अशी मिळते,

155, 160, 164, 165, 169, 173.

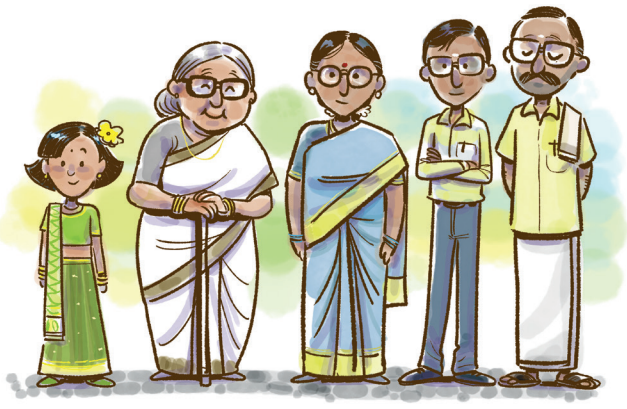
ज्याअर्थी मध्यावर येणारी संख्या मध्यांक आहे. यामध्ये त्यांच्यापेक्षा कमी आणि जास्त असलेल्या संख्या समान आहेत. या माहितीला एकच मधली संख्या नाही कारण त्यांची संख्या सम (6) आहे. अशा घटनेमध्ये क्रमवार मांडणी केलेल्या माहितीच्या मधील दोन संख्यांची सरासरी घेतली जाते. म्हणून यांगबाच्या कुटुंबाची सरासरी उंची (164+165)÷2=164.5 सें.मी. आहे.




©KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

? या घटनेमध्ये मध्यांक हा सरासरी पेक्षा उंचीचे उत्तम प्रकारे प्रतिनिधित्व करतो का?

पूवीझीच्या कुटुंबात सर्वात लहान मुलाची उंची ही कुटुंबातील इतरांच्या उंचीपेक्षा खूपच वेगळी आहे. अशा मूल्याला आपण बाह्यमूल्य म्हणतो. बाह्यमूल्ये ही अशी मूल्ये आहेत जी माहितीमधील इतर मूल्यांपेक्षा लक्षणीयरित्या विचलित होतात. कोणत्याही बाह्यमूल्याच्या अनुपस्थितीत यागंबाच्या माहितीमध्ये मध्य आणि मध्यांक एकमेकांच्या जवळ कसे आले आहेत हे लक्षात घ्या.



? पूवीझीच्या माहितीमध्ये बाह्यमूल्यांमूळे मध्य हा मध्यांकापेक्षा खूपच कमी आहे.

बाह्यमूल्य 118 वगळता पूवीझीच्या माहितीचा मध्य आणि मध्यांक शोधा. त्यामध्ये तुम्हाला कोणता बदल दिसतो?

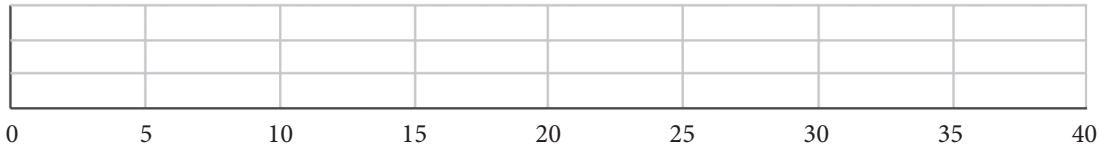
## ? तुम्ही पुस्तकी किडे आहात का? (Are you a bookworm?)

उन्हाळ्याच्या सुट्टीनंतर, एका वर्गशिक्षकांनी त्यांच्या वर्गातील मुलांना विचारले की, त्यांनी किती लघुकथा वाचल्या आहेत. प्रत्येक विद्यार्थ्याने खालील प्रमाणे दर्शविल्यानुसार वाचलेल्या कथांची संख्या एका कागदाच्या तुकड्यावर लिहून उत्तरे दिली. वाचलेल्या लघुकथांच्या संख्येचे मध्य आणि मध्यांक शोधा. त्यांची गणना करण्यापूर्वी मध्य मध्यांकापेक्षा कमी आहे की जास्त आहे याचा तुम्ही अंदाज लावू शकता का?




© KEBS NOT TO BE REPUBLISHED

खालील बिंदू आलेखामध्ये मध्य आणि मध्यांकाच्या माहितीच्या खुणा करा.




मध्यांक मूल्य 6 याचा अर्थ असा आहे की, वर्गातील निम्या मुलांनी 6 किंवा त्यापेक्षा अधिक लघुकथा वाचल्या आहेत.

? यापैकी कोणती किंमत तुम्ही बाह्यमूल्य म्हणून विचारात घ्याल?

? बाह्यमूल्याच्या अनुपस्थितीत मध्य आणि मध्यांक शोधा. तुम्ही कोणता बदल पाहाल?

बाह्यमूल्य असणारी माहिती दर्शविण्यासाठी सरासरी ही नेहमी योग्य नाही. अति उच्च किंवा अति कमी बाह्यमूल्ये गणिताच्या बेरजेवर महत्वाचा प्रभाव टाकू शकतात. त्यामुळे सरासरीवर परिणाम होतो. उदाहरणार्थ, पूवीझीच्या कुटुंबातील 118 सें.मी. उंची ही माहितीमधील बाहयमूल्य असून शेवटची संख्या आहे. तसेच लहान कथांच्या मोजणीने 40 ही माहितीमधील जास्तीत जास्त मोठी शेवटची संख्या आहे. या घटनामध्ये आम्ही पाहिले आहे की बाह्यमूल्यामूळे मध्यांकावर फारसा परिणाम झाला नाही.

© KSTB NOT TO BE REPUBLISHED

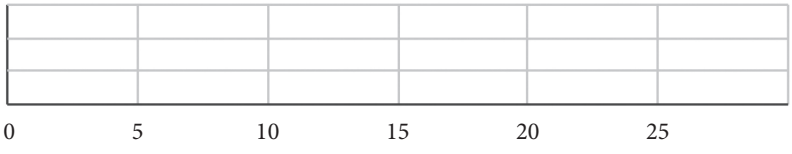
## आपण एकाच निष्कर्षावर आहोत का? (Are We on the Same Page?)



? तुम्ही वर्तमानपत्र वाचता का? आठवड्याच्या वेगवेगळ्या दिवशी वर्तमानपत्रामध्ये किती पाने असतात, ती सारखीच असतात की वेगवेगळी असतात. हे तुम्ही कधी पाहिले आहे का?

खालील यादीमध्ये सोमवारपासून रविवारपर्यंतच्या एका विशिष्ट वर्तमानपत्राच्या पानांची संख्या लिहिली आहे. ती म्हणजे 16, 18, 20, 22, 26, 16, 10.

वरील माहितीच्या बिंदू आलेख (Dot plot) वर मध्य आणि मध्यांकाच्या खुणा करा.




? आपण विचारात घेतलेल्या तीन उदाहरणांमधील उंची, लघुकथा आणि वर्तमानपत्राची पाने यांच्या माहितीमधील विचलने खालीलप्रमाणे असताना निरीक्षण करा.

गणिती बोल

(a) मध्य आणि मध्यांक हे एकमेकाच्या जवळ आहेत.

(b) जेव्हा मध्य आणि मध्यांक हे तुलानात्मकदृष्ट्या दूर आहेत, मध्य < मध्यांक

(c) जेव्हा मध्य आणि मध्यांक हे तुलनात्मकदृष्ट्या दूर आहेत, मध्य > मध्यांक.

जेव्हा माहिती अधिक संतुलीत किंवा समान रितीने पसरलेली असते, तेव्हा मध्य आणि मध्यांक एकमेकांच्या जवळ असल्याचे दिसतात. जेव्हा बाह्यमूल्य खालच्या टोकाला असतो, तेव्हा मध्य त्याच्या दिशेने सरकतो म्हणजेच मध्य < मध्यांक. जेव्हा बाह्यमूल्य वरच्या (जास्त) टोकाला असतो तेव्हा मध्याच्या दिशेने सरकतो म्हणजेच मध्य > मध्यांक

? जेव्हा बाह्यमूल्ये दोन्ही बाजूनी असतात तेव्हा मध्य आणि मध्यांकावर होणाऱ्या परिणामाचा विचार करा. हे तपासण्यासाठी आणि स्पष्ट करण्यासाठी तुम्ही काही उदाहरणे घेऊ शकता.




मध्य आणि मध्यांकाला केंद्रीय कलाची मापने असे म्हणतात. म्हणजेच ही मूल्यांची विशिष्ट मूल्याभोवती असण्याची प्रवृती आहे. दुसऱ्या शब्दात सांगायचे तर ते माहितीचे केंद्र दर्शवितात.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## अंत्यबिंदू आणि मूलतत्व (of Ends and the Essence)

आपण आताच पाहिल्याप्रमाणे, मध्य आणि मध्यांक माहितीबद्दल वेगवेगळे दृष्टीकोन देऊ शकतात. माहितीचे विश्लेषण करण्याचा भाग म्हणून दिलेल्या माहितीतील मूल्ये पाहणे देखील महत्वाचे असू शकते.

## तुमचा वर्ग किती उंच आहे? (How Tall is Your Class?)

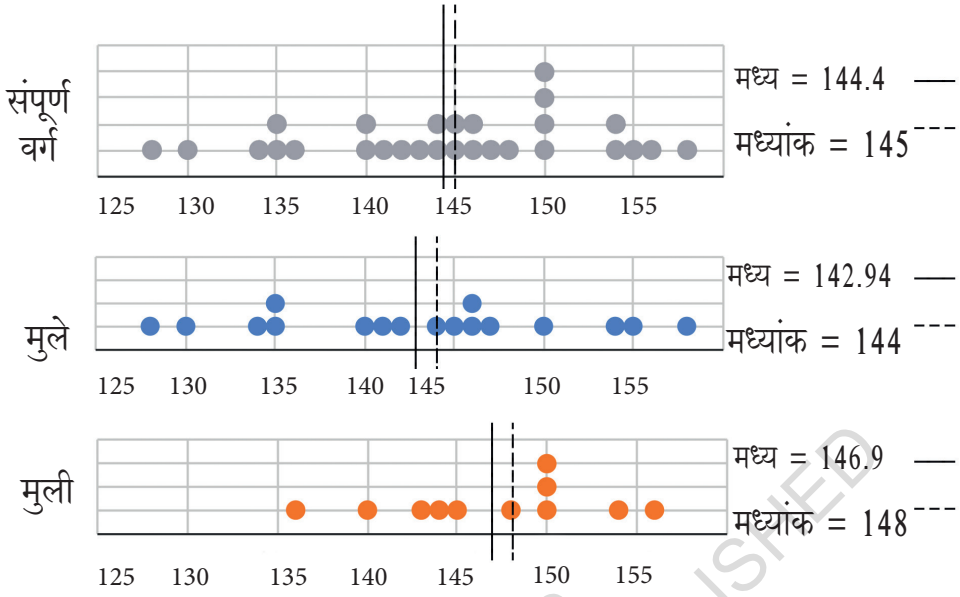
समजा की, तुमचा वर्ग किती उंच आहे? हा प्रश्न तुम्हाला केला तर याचे उत्तर तुम्ही काय द्याल?

खालील कोष्टकामध्ये 5 वी च्या वर्गातील उंची सें.मी. मध्ये दिलेली आहे.

| | |
|---|---|
| मुले | 147, 135, 130, 154, 128, 135, 134, 158, 155, 146, 146, 142, 140, 141, 144, 145, 150 |
| मुली | 143, 136, 150, 144, 154, 140, 145, 148, 156, 150, 150 |

आपण बिंदू आलेखाचा उपयोग करून माहिती आलेखाद्वारे दर्शवू शकतो. अंत्यबिंदू आणि नमुने ओळखून विचलन पाहू शकतो. आपण केंद्रीय कलाची मापे सुध्दा शोधू शकतो. पूर्ण

वर्गासाठीचा बिंदू आलेख आणि त्यानंतर मुलांचे व मुलींचे बिंदू आलेख दर्शविलेले आहेत. प्रत्येक संग्रहाचा मध्य आणि मध्यांक सुध्दा दर्शविलेला आहे.




©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? बिंदू आलेख आणि केंद्रीय कलाच्या मापावरुन आपण कोणते अनुमान काढू शकतो?

वर्ग किती उंच आहे? या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी खालील मुद्दे मदत करु शकतात.

- मुलांची उंची ही अधिक पसरलेली असून ती 128 ते 158 च्या दरम्यान आहे. मुलींची उंची 136 आणि 156 मध्ये आहे. वर्गात सर्वात उंच आणि सर्वात लहान (बुटके) अशी दोन्ही मुले आहेत.
- तरीही, मुलांची सरासरी उंची संपूर्ण वर्गाच्या सरासरी उंचीपेक्षा कमी आहे आणि मुलींच्या सरासरी उंचीपेक्षा सुध्दा कमी आहे. तेव्हा आपण म्हणू शकतो की, या वर्गात मुली या मुलांपेक्षा, जास्त उंचीच्या आहेत. अर्थात याचा अर्थ असाही नाही की, प्रत्येक मुलगी ही मुलांपेक्षा उंच आहे.
- मुलांच्या उंचीसाठी मध्य < मध्यांक (142.94 < 144) जे खालच्या बाजूच्या मूल्यांचा थोडा जास्त प्रभाव दर्शविते. मुलींच्या उंचीसाठी देखील मध्य < मध्यांक (146.9 < 148) जे खालच्या बाजूंच्या मूल्यांचा थोडा जास्त प्रभाव दर्शविते.

? वर्गाच्या सरासरी उंची पेक्षा जास्त उंचीचे किती विद्यार्थी आहेत?

? वर्गाच्या सरासरी उंचीपेक्षा जास्त उंचीची किती मूले आहेत?

## एक मिनिट म्हणजे किती वेळ? (How long is a minute?)

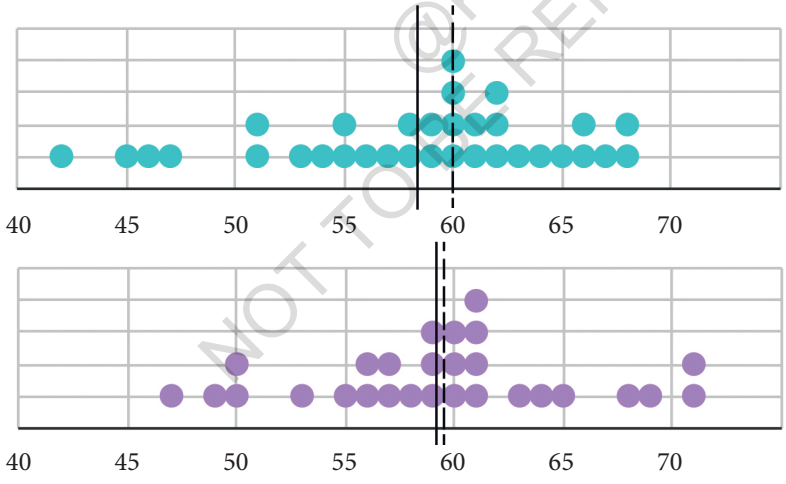
एक मिनिटाचा अवधी किती असेल याचा अंदाज घेण्यासाठी मुलांच्या दोन गटांना विचारण्यात आले. त्यांनी डोळे मिटून सुरुवात केली आणि जेव्हा त्यांना वाटले की, एक मिनिट पूर्ण झाले आहे तेव्हा त्यांनी डोळे उघडले. अर्थात त्यांनी डोळे मिटविलेले असताना मोजायचे नाही. खालील बिंदू आलेख दर्शवितो की मुलांनी किती वेळानंतर डोळे उघडले पाहिजेत.




? या कृतीमध्ये दोन्ही गटांनी किती चांगल्याप्रकारे कामगिरी केली यावर चर्चा करा. माहितीमधील विचलन आणि त्यांचा केंद्रीय कल यांचे वर्णन आणि तुलना करा.

गणिती बोल

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED




गट A
मध्य = 58.21 ——
मध्यांक = 60 ---




गट B
मध्य= 59.28 ——
मध्यांक 59.5. ---

**शून्य मध्यांक धावा काढल्या ! (Zero Median Runs Scored!)**

एका क्रिकेट सामन्यात, खेळाडूने काढलेल्या धावांचा मध्यांक शून्य असू शकतो परंतु संघाच्या एकूण धावा $\frac{407}{10}$ असू शकतात का?




अतिरिक्त धावांचा विचार केल्यास, या डावात एका खेळाडूने काढलेल्या सरासरी धावा $(407-19)\div 11 = 35.27$.

## शून्य विरुध्द मूल्य रहित (Zero vs. No value)

समजा की, एका मालिकेमध्ये एका खेळाडूने 57, 13, 0, 84, 51, 27 धावा काढल्या आहेत. त्या खेळाडूने तिसऱ्या सामन्यामध्ये 0 धावा केल्या आहेत. आणि 5 वा सामना खेळलेला नाही. त्यामुळे एकूण सामन्यांची संख्या 7 ऐवजी 6 घ्यावी लागेल. त्याच्या प्रत्येक सामन्यामध्ये काढलेल्या सरासरी धावांची गणना अशी करता येईल.

$(57 + 13 + 0 + 84 + 51 + 27) \div 6$.

सीताच्या घराच्या मागील अंगणामध्ये आंब्याचे झाड आहे. मागील वर्षी प्रत्येक महिन्याला मिळालेल्या आंब्यांची संख्या जानेवारी ते डिसेंबर पर्यंत अनुक्रमे 0, 0, 8, 24, 41, 16, 5, 0, 0, 0, 0, 0 अशी आहे. जर दर महिन्याला मिळालेल्या आंब्यांच्या संख्याचा मध्य

© NOT TO BE REPUBLISHED

आणि मध्यांक काढायचे असतील, तर फक्त (उन्हाळ्यातील) महिन्यांमध्ये आंबे मिळतात हे शोधणे योग्य राहील.

**सरासरी पाया (A Mean Foot)**

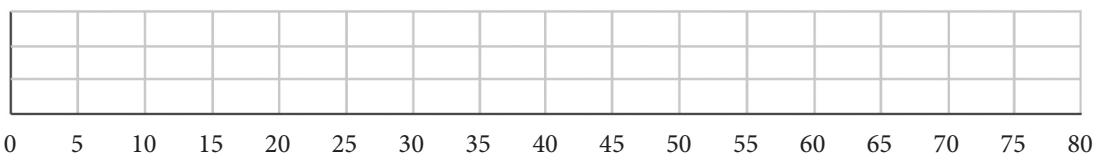
1500 च्या सुरवातीला युरोपमध्ये, जमीनीचे मोजमाप कण्यासाठी सळईचा उपयोग करत होते, जिची 16 फूट लांब म्हणून व्याख्या करण्यात आली होती. त्यावेळी फूट म्हणजे माणसाच्या एका पायाची लांबी. परंतु पायाचे आकार वेगवेगळे आसायचे त्यामुळे कोणत्या पायाचे माप घ्यायचे ही समस्या होती. ही समस्या सोडविण्यासाठी 16 प्रौढ पुरुषांना एका सरळ रेषेत टाचेपासून बोटापर्यंत उभे राहण्यास सांगण्यात आले आणि त्या रेषेच्या लांबीची सळई 16 फूट घेण्यात आली. सळई निश्चित झाल्यानंतर त्याचे समान 16 भाग करण्यात आले. त्यापैकी एकाने प्रत्येकी एका फूटाचे माप दर्शविले. जरी मध्य या शब्दाचा तेथे कोठेही उल्लेख केलेला नसला तरी, थोडक्यात हा 16 वैयक्तिक पायांचा अंकगणिती मध्य होता.



जेकॉब कोबेलच्या 1 फूटाच्या शोधाचे वर्णन

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. कोल्हापूर आणि सोलापूर मधील कांद्याच्या किंमतीच्या दराचा मध्यांक शोधा.
2. संस्कृतीने आपल्या वर्गामध्ये प्रत्येकाच्या घरी किती पाळीव प्राणी आणि पाळीव पक्षी आहेत असे विचारले, कांही विद्यार्थी गैरहजर होते. माहितीच्या किंमती 0, 1, 0, 4, 8, 0, 0, 2, 1, 1, 5, 3, 4, 0, 0, ___, 10, 25, 2, ___, 2, 4 आहेत असे सांगितले. तर त्यांचा मध्य आणि मध्यांक काढा. या माहितीचे तुम्ही वर्णन कसे कराल?
3. रितु ही हाब्रा येथील खजूरांच्या झाडांच्या बागेची काळजी घेते. झाडांची उंची (फूटामध्ये) खालीलप्रमाणे दिलेली आहे. ती म्हणजे 50, 45, 43, 52, 61, 63, 46, 55, 60, 55, 59, 56, 56, 49, 54, 65, 66, 51, 44, 58, 60, 54, 52, 57, 61, 62, 60, 60, 67 आहे. बिंदू आलेख काढा आणि मध्य आणि मध्यांक दर्शवा. तुम्ही या खजूरच्या झाडांचे वर्णन कसे कराल? मध्य काढण्यासाठीची जलद पध्दत तुम्ही सुचवू शकाल का? सरासरी उंची पेक्षा कमी उंचीची किती झाडे आहेत?




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

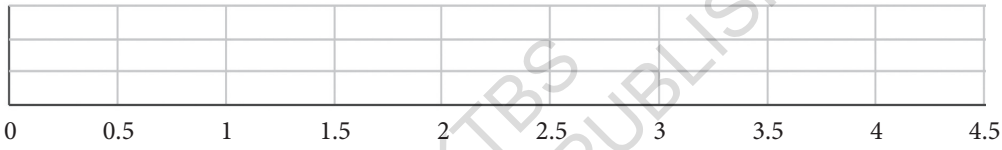
4. एका नळामधून दररोज होणाऱ्या पाण्याच्या वापराचे मोजमाप करण्यात आले. पहिल्या कांही दिवसापर्यंत पाण्याचा वापर लिटरमध्ये 5.6, 8, 3.09, 12.9, 6.5, 12.1, 11.3, 20.5, 7.4 आहे. तर,

   (a) दैनंदिन वापराचा मध्य आणि मध्यांक 25 आणि 30 यामध्ये आहे का? मध्य आणि मध्यांकाचे अर्थ वापरुन तुमच्या दाव्याचे समर्थन करा.

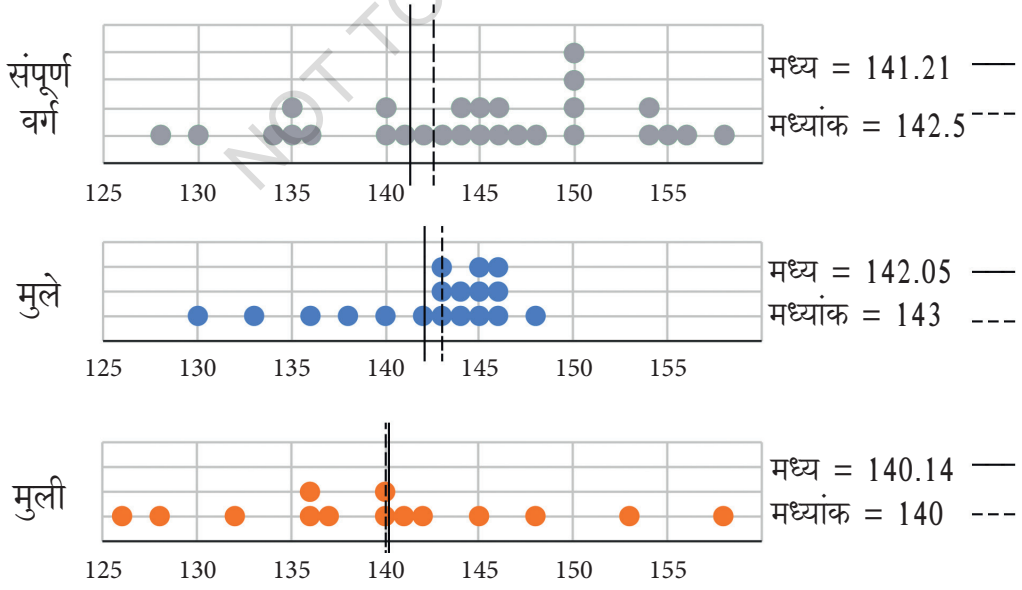
   (b) दिलेल्या माहितीमध्ये मध्य किंवा मध्यांक हे किमान (मूल्यापेक्षा कमी) किंवा कमाल (मूल्यापेक्षा जास्त) असू शकते का?

5. काही नवजात बालकांचे वजन किलोग्रॅममध्ये दिलेले आहे. ही माहीती खाली दिलेल्या बिंदू आलेखामध्ये दर्शवा, माहितीचे विश्लेषण करा आणि तुलना करा.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **मूले** | 3.5 | 4.1 | 2.6 | 3.2 | 3.4 | 3.8 |
| **मुली** | 4.0 | 3.1 | 3.4 | 3.7 | 2.5 | 3.4 |



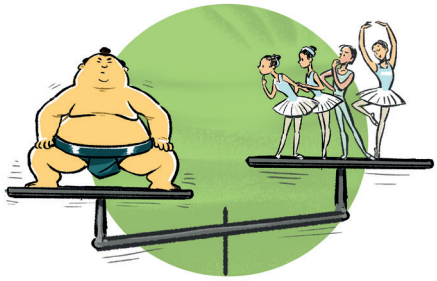

6. त्याच शाळेमधील इयत्ता 5 वी च्या दुसऱ्या विभागातील विद्यार्थ्यांच्या उंचीचा बिंदू आलेख खालील प्रमाणे दर्शविला आहे. तुम्ही तुमचे निरीक्षण सांगू शकाल का? बिंदू आलेख आणि केंद्रीय कलाच्या मापनावरून आपण कोणते अनुमान काढू शकतो?




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? दोन्ही विभागाच्या उंचीची तुलना करा आणि तुमच्या निरीक्षणांची चर्चा करा.

7. काही सुमो पैलवान (Sumo wrestlers) आणि बॅलेट डान्सर (Ballet dancers) यांचे वजन खालीलप्रमाणे दिलेले आहे. ते म्हणजे सुमो पैलवान 295.2 कि.ग्रॅ., 250.7 कि.ग्रॅ., 234.1 कि.ग्रॅ., 221.0 कि.ग्रॅ., 200.9 कि.ग्रॅ. आणि बॅलेट डान्सर 40.3 कि.ग्रॅ., 37.6 कि.ग्रॅ., 38.8 कि.ग्रॅ., 45.5 कि.ग्रॅ., 44.1 कि.ग्रॅ., 48.2 कि. ग्रॅ. आहे. एक सुमो पैलवान हा बॅलेट डान्सर पेक्षा अंदाजे किती पटीने वजनदार आहे?



गणिती बोल

## 5.3. माहिती दर्शविणे (Visualising Data)

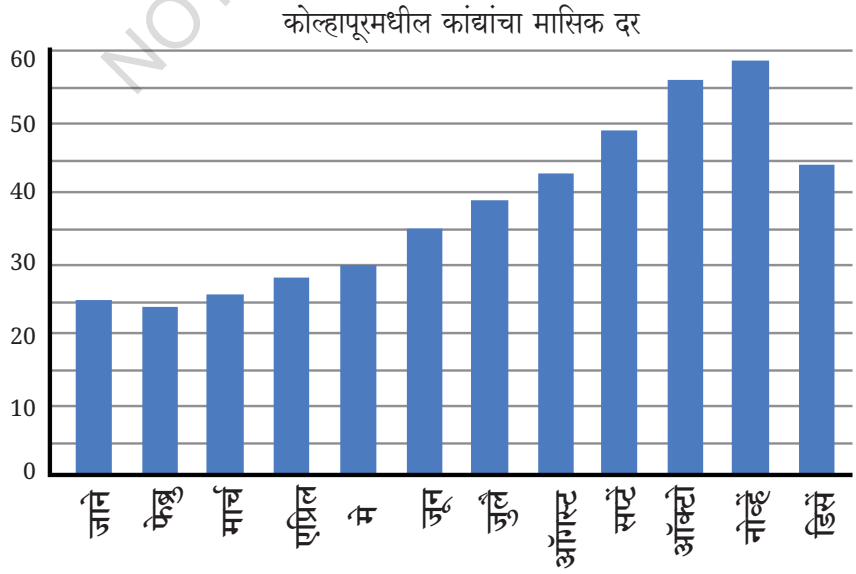
जर माहिती चित्ररूपात सादर केली तर अधिक स्पष्टपणे समजून येते. याला **माहिती दर्शविणे** असे म्हणतात. मागील वर्षी आपण पाहिले आहे की, आलेख वापरुन माहिती दर्शविली जाते. आता आपण दिलेली माहिती इतर प्रकारे कशी दर्शविली जाते याचा शोध घेऊया.

### स्तंभांचे गट करणे (Clubbing the Columns)

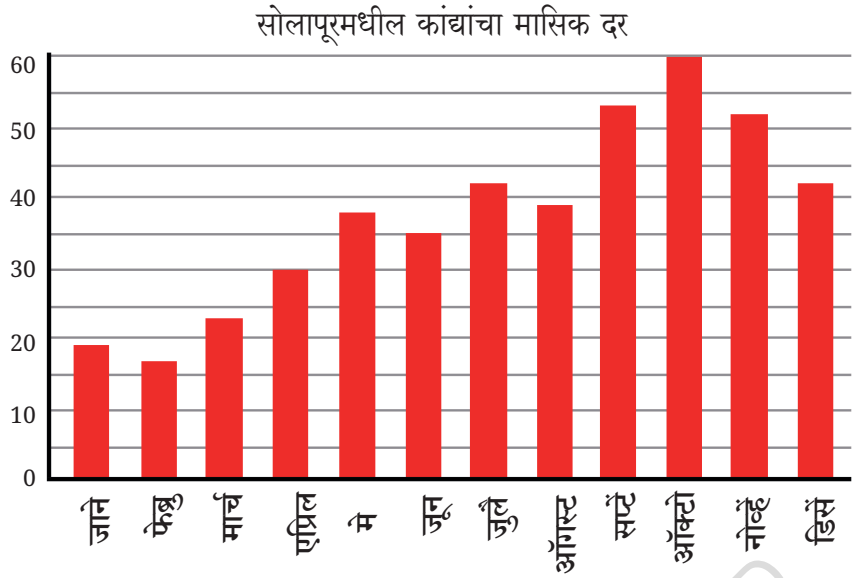
यापूर्वी आपण कोल्हापूर आणि सोलापूरमधील कांद्याच्या किंमती पाहिल्या आहेत.

| | जाने | फेब्रु | मार्च | एप्रिल | मे | जून | जुलै | ऑगस्ट | सप्टें | ऑक्टो | नोव्हें | डिसें |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| कोल्हापूर | 25 | 24 | 26 | 28 | 30 | 35 | 39 | 43 | 49 | 56 | 59 | 44 |
| सोलापूर | 19 | 17 | 23 | 30 | 38 | 35 | 42 | 39 | 53 | 60 | 52 | 42 |

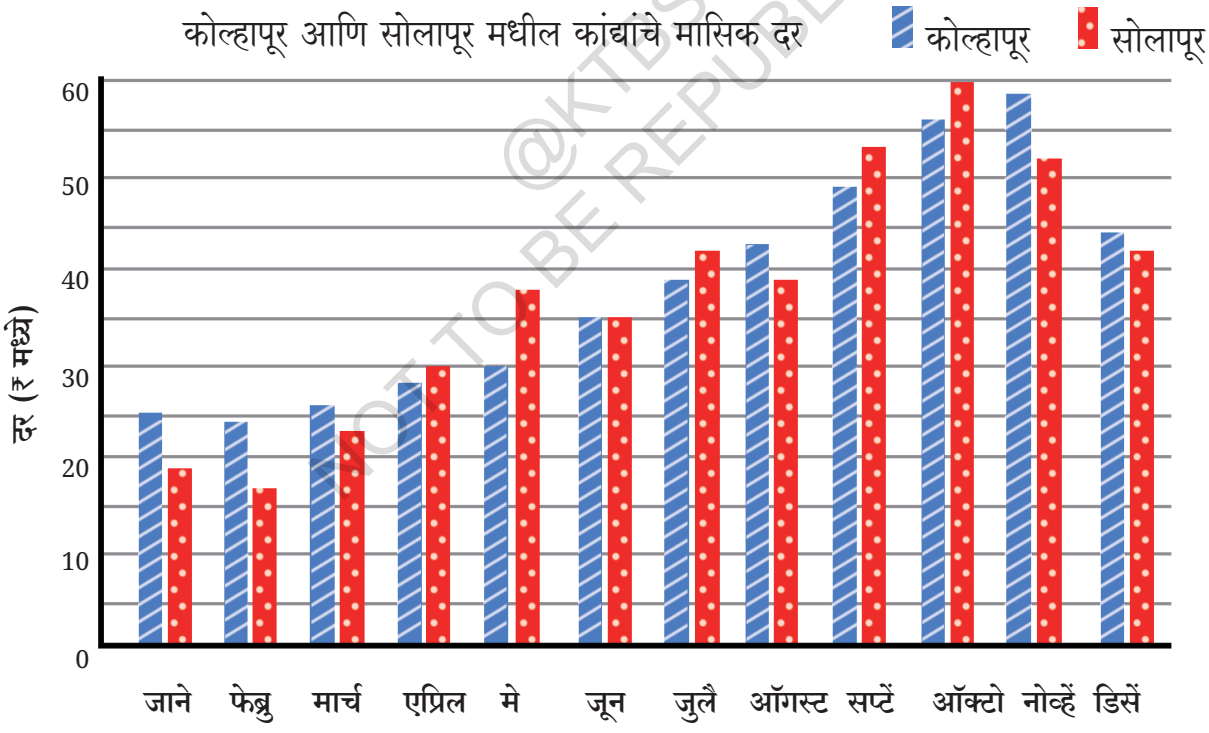
या माहीतीसाठी दोन स्तंभाचा आलेख खालील प्रमाणे दिलेला आहे.




NOT TO BE REPUBLISHED © KEBS




दोन आलेखांना एकत्रित करून एकच आलेख काढता येतो. परंतु आपण स्तंभ बाजू-बाजूला जोडून काढू शकतो. कोष्टकामध्ये दिलेली माहिती खालील आलेखाशी जुळते की नाही ते तपासा.




@KTDS
NOT TO BE REPUBLISHED

दोन ठिकाणांची माहिती स्पष्टपणे वेगळी करण्यासाठी आपण वेगवेगळ्या रंगांचा वापर करतो. याला **समूह स्तंभालेख** असे म्हणतात. ज्याअर्थी प्रत्येक समुहामध्ये दोन स्तंभ आहेत म्हणून त्याला **द्विस्तंभालेख** असे म्हणतात.

? या आलेखामध्ये वापरलेले प्रमाण कोणते आहे?

स्तंभाची सापेक्ष उंची आपल्याला प्रत्येक महिन्यात कांदे कुठे जास्त विकले गेले आहेत ते सांगते. आपण उभ्या रेषेवरील स्तंभाचा संदर्भ घेऊन अंदाजे फरक पाहू शकतो.

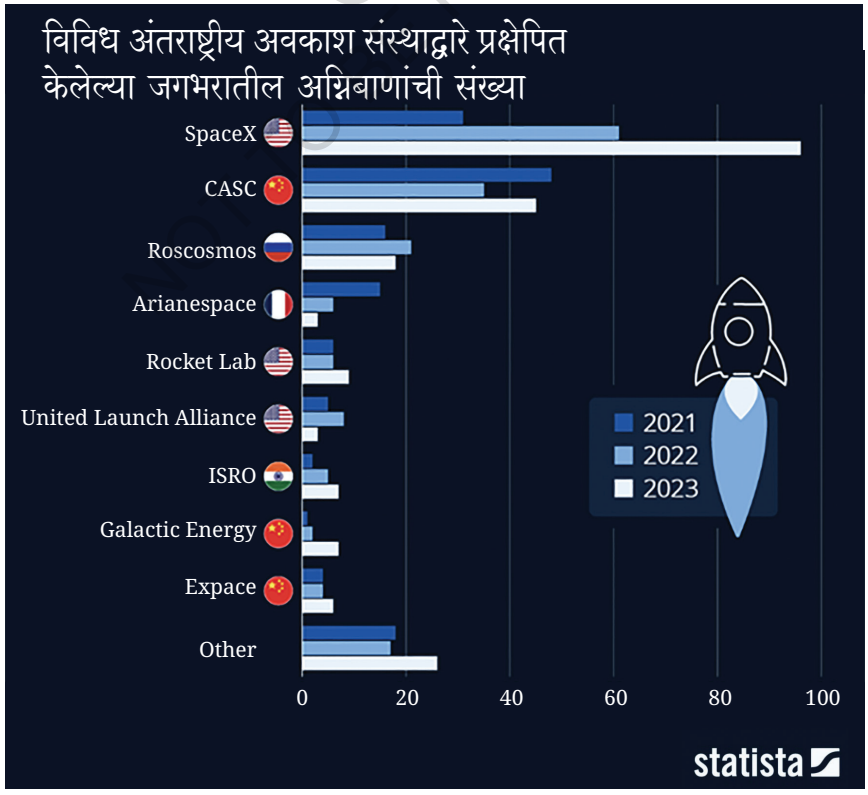
स्तंभातील बिंदू आणि तिरकस रेषा अशा लोकांसाठी मदत करतात, ज्याना रंग ओळखण्यात अडचण येते. जेव्हा गोष्टी राखाडी (काळ्या-पांढऱ्या) छापल्या जातात तेव्हा त्या सहायक असतात.

? आता दोन्ही ठिकाणच्या महिन्यानुसार किंमतींची तुलना करणे सोपे आहे का?

## 10...9...8...7...6...5...4...3...2...1...उड्डाण!

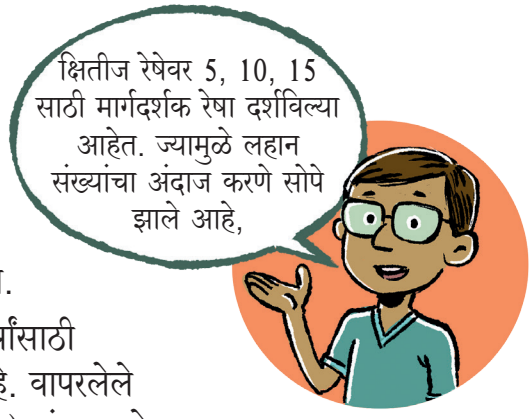
तुम्ही कदाचित वैज्ञानिक घोषवाक्ये (Probe) (जसे की इस्रोने 2023 मध्ये प्रक्षेपित केलेले चंद्रयान-3 किंवा 1977 मध्ये नासाने प्रक्षेपित केलेले व्हॉयेजर -1) निरीक्षण उपग्रह (1975 मध्ये इस्रोने प्रक्षेपित केलेला आर्यभट किंवा 1957 मध्ये सोव्हीयत स्पेस प्रोग्रॅमने प्रक्षेपित स्पूटनिक-1) आंतरराष्ट्रीय अंतराळ स्थानक मानवी अंतराळ उड्डाणाविषयी तुम्ही ऐकले आहे. या सर्व अंतराळ मोहिमा अग्निबाणांचा (रॉकेट) वापर करुन प्रक्षेपित केल्या जातात. खालील आलेख वेगवेगळ्या संस्थानी केलेल्या जगभरातील अग्निबाणांच्या प्रक्षेपणांची संख्या दर्शवितात.

? तुमच्या निरीक्षणांची इतरांशी चर्चा करा. (या संस्था कोणत्या देशांशी संबंधीत आहेत हे ओळखण्यासाठी तुम्ही शिक्षकांची मदत घेऊ शकता.)




© KTBS REPUBLISHED

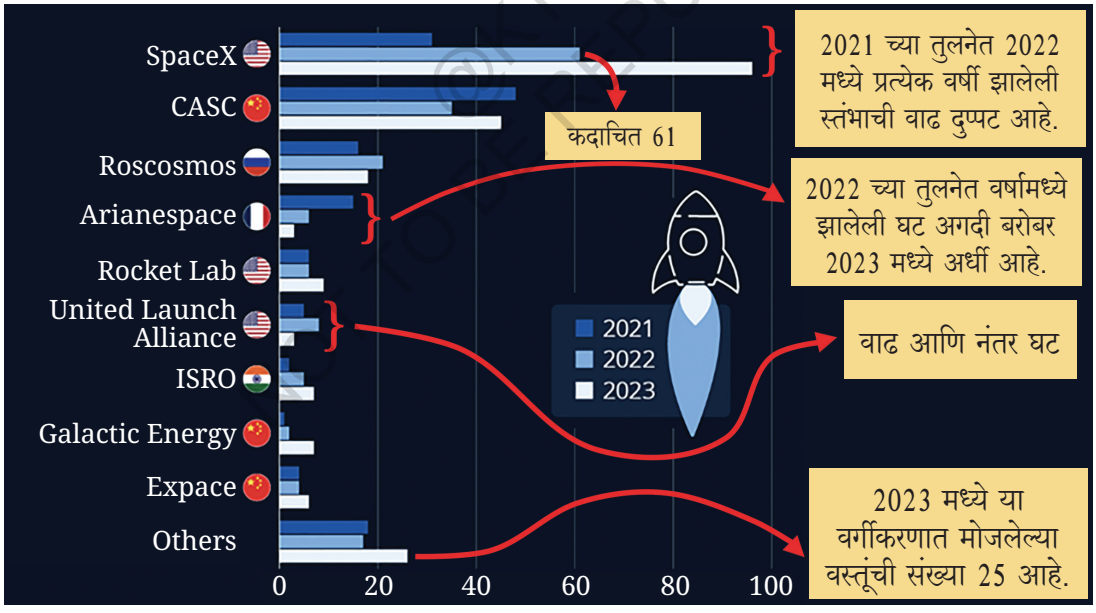
आलेखामध्ये बरीच माहिती असते आणि ती समजून घेणे कधीकधी कठीण होऊ शकते. आलेखामधील माहिती समजून घेण्यास सोपी बनविण्यासाठी आपण 2-पायऱ्यांची प्रक्रिया वापरु शकतो.




**पायरी 1: काय दिले आहे ते ओळखणे.**

? आलेख कसा काढलेला आहे, कोणते प्रमाण वापरले आहे आणि माहिती कोणता नमुना दर्शविते. हे लक्षात घ्या.

- प्रत्येक संस्थेसाठी 2021, 2022 आणि 2023 या वर्षांसाठी प्रक्षेपणांची संख्या तीन सलग्न स्तंभानी दर्शविली आहे. वापरलेले प्रमाण 1 एकक लांबी 20 रॉकेट. तळाच्या (खालील) संख्याकडे लक्ष द्या.
- 'Others' वर्ग जगभरातील अनेक संस्था दर्शविते, ज्या आलेख लहान करण्यासाठी एकत्रितपणे गटबध्द करण्यात आल्या आहेत.
- लक्षात घ्या की, कांद्यांच्या दरांच्या द्विस्तंभालेखामध्ये महिने क्रमाने दर्शविले आहेत म्हणजेच जानेवारी ते डिसेंबर हे वेळेतील बदलाचे निरीक्षण करण्यासाठी आहे. परंतु या घटनेतील संस्थाच्या क्रमातील बदलामुळे अर्थ बदलत नाही.




**पायरी 2 : काय दिलेले आहे त्यावरुन अनुमान काढणे.**

? तुमच्या प्रत्येक निरीक्षणाचा अर्थ लावा आणि विश्लेषण करा.

- दिलेल्या कालावधीनुसार आपण असे म्हणू शकतो की, युएसए (USA), चीन (CHINA) आणि रशिया (RUSSIA) हे रॉकेट प्रक्षेपण करणारे प्रमुख देश आहेत.
- स्पेसेक्स (Spacex) ने 2021 च्या तुलनेत 2022 मध्ये जवळजवळ दुप्पट रॉकेट प्रक्षेपित केले आणि 2022 च्या तुलनेत 2023 मध्ये सुमारे 35 अधिक रॉकेटचे प्रक्षेपण केले.
- एरियन स्पेस (Arianespace) ने दरवर्षी प्रक्षेपित केलेल्या रॉकेटची संख्या कमी आहे.
- युनायटेड लाँच अलायन्स (United Launch Alliance) ने 2021 च्या तुलनेत 2022 मध्ये रॉकेटचे जास्त प्रक्षेपण केले. त्यानी 2023 मध्ये 2021 आणि 2022 पेक्षा कमी रॉकेटचे प्रक्षेपण केले.
- इतर संस्थानी 2023 मध्ये सुमारे 25 रॉकेट प्रक्षेपित केली.

? या माहितीचा वापर करून खालीलपैकी कोणत्या विधानांचे समर्थन केले जाऊ शकते?

(a) सर्व संस्थांनी मागील वर्षापेक्षा जास्त रॉकेट प्रक्षेपित केले.

(b) फक्त युएसए (USA) मधील संस्थेने एका वर्षात 50 पेक्षा अधिक रॉकटचे प्रक्षेपण केले.

(c) फ्रान्सने सर्व 3 वर्षात प्रक्षेपित केलेल्या रॉकेटची संख्या 40 पेक्षा कमी आहे.

(d) सीएएससी (CASC) ने या तीन वर्षात प्रक्षेपित केलेल्या रॉकेटची सरासरी संख्या 40 आहे.

(e) या तीन वर्षात इस्रो (ISRO) ने प्रक्षेपित केलेल्या रॉकेटची संख्या गॅलॅक्टीक एनर्जी पेक्षा जास्त आहे.

(f) रशियाने या तीन वर्षात 60 पेक्षा जास्त रॉकेट प्रक्षेपित केले आहेत.

? प्रत्येक वर्षी सातत्याने जास्तीत जास्त रॉकेट प्रक्षेपित केलेल्या संघटनेची यादी करा.

? 2023 मध्ये जगभरातील प्रक्षेपित केलेल्या रॉकेटची अंदाजे एकूण संख्या ही आहे.

(a) 200 पेक्षा कमी (b) 200 ते 400

(c) 400 ते 600 (d) 600 पेक्षा जास्त.

या आलेखाकडे पाहिल्यानंतर आपल्याला अनेक प्रश्न पडले असतील. तुम्हाला आश्चर्य वाटले असेल की, युएसए (USA) ने इतक्या संख्येने रॉकेट का प्रक्षेपित केले आहेत. मागील वर्षापासून पुढे ही माहिती पाहण्यास तुम्ही उत्सुक असाल. या आलेखाकडे पाहून तुम्ही कोणती गोष्ट जाणून घेण्यास उत्सुक आहात.

© IITES NOT TO BE REPUBLISHED

# एकाचवेळी उन्हाळा आणि हिवाळा (Summer and Winter at the Same Time)

खालील तक्ता वेगवेगळ्या देशातील दोन शहरांमधील हवामानाविषयी माहिती दर्शवितो. दिलेल्या संख्या तासामध्ये आहेत. ही माहिती कशाशी संबंधीत आहे याची तुम्ही कल्पना करु शकाल का?

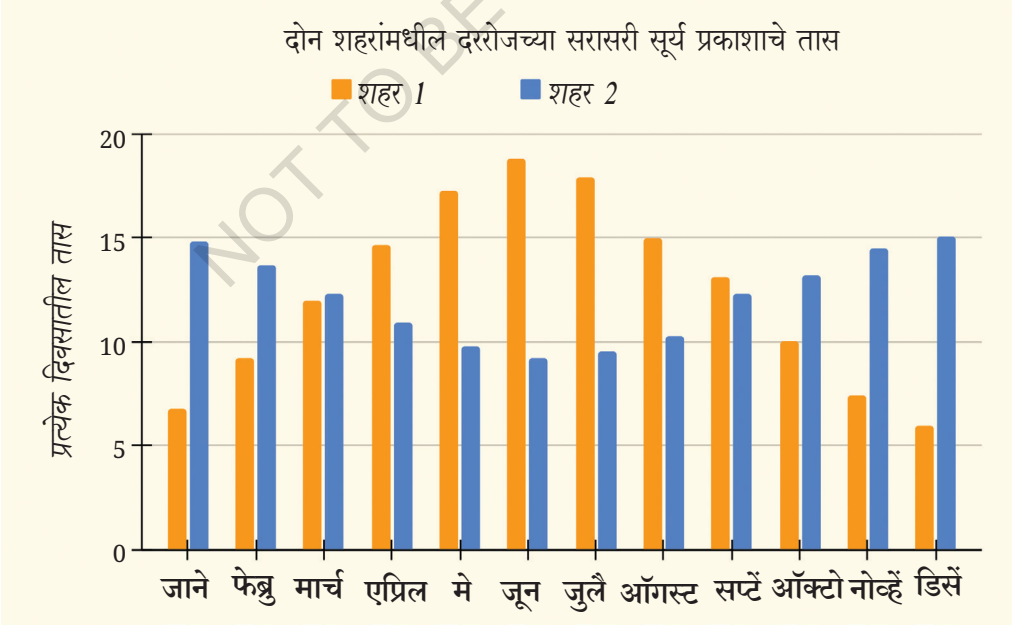
**शहर 1**

| जाने | फेब्रु | मार्च | एप्रिल | मे | जून | जुलै | ऑगस्ट | सप्टें | ऑक्टो | नोव्हें | डिसें |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 210 | 257 | 372 | 441 | 536 | 564 | 555 | 465 | 394 | 310 | 222 | 186 |

**शहर 2**

| जाने | फेब्रु | मार्च | एप्रिल | मे | जून | जुलै | ऑगस्ट | सप्टें | ऑक्टो | नोव्हें | डिसें |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 459 | 384 | 381 | 327 | 304 | 276 | 295 | 318 | 369 | 409 | 435 | 468 |

ही माहिती वर्षातील या दोन महिन्यांमधील सूर्यप्रकाशाचे तास (म्हणजे सूर्य किमान अंशतः क्षितीजाच्या वर असतो) या माहितीवर आधारित आहे. प्रत्येक महिन्यातील दररोजच्या सरासरी सूर्यप्रकाशाचे तास दर्शविणारा समूह स्तंभालेख खालीलप्रमाणे दिलेला आहे. ही सरासरी मासिक सूर्यप्रकाशाचे तास त्या महिन्यातील दिवसांच्या संख्येने भाग दिल्याने मिळते.




सादर केलेली माहिती ओळखण्यासाठी आणि तिचे विश्लेषण करण्यासाठी आपण 2-पायऱ्यांची प्रक्रिया वापरूया.

© KISS NOT TO BE REPUBLISHED

**पायरी 1: कोणती माहिती दिलेली आहे ते ओळखणे (Step 1: Identify what is given)**

? आलेख कशारितीने संघटीत केला आहे, कोणते प्रमाण वापरलेले आहे, माहिती कोणते नमुने दर्शविते. हे लक्षात घेणे.

- आडवी रेषा ही वर्षातील महिने दर्शविते. उभी रेषा ही दररोजच्या सूयप्रकाशाचे तास दर्शविते, त्यासाठी 1 एकक = 5 तास हे प्रमाण घेतलेले आहे. जून महिना शहर- 1 साठी कमाल मूल्य आणि शहर-2 साठी किमान मूल्य दर्शवित आहे.

**पायरी 2: दिलेल्या माहितीवरून निष्कर्ष काढणे. (Step 2: Infer from what is given)**

? तुमच्या प्रत्येक निरीक्षणाचे स्पष्टीकरण करून अर्थ सांगणे, योग्य सारांश आणि निष्कर्ष यांची चर्चा करणे.

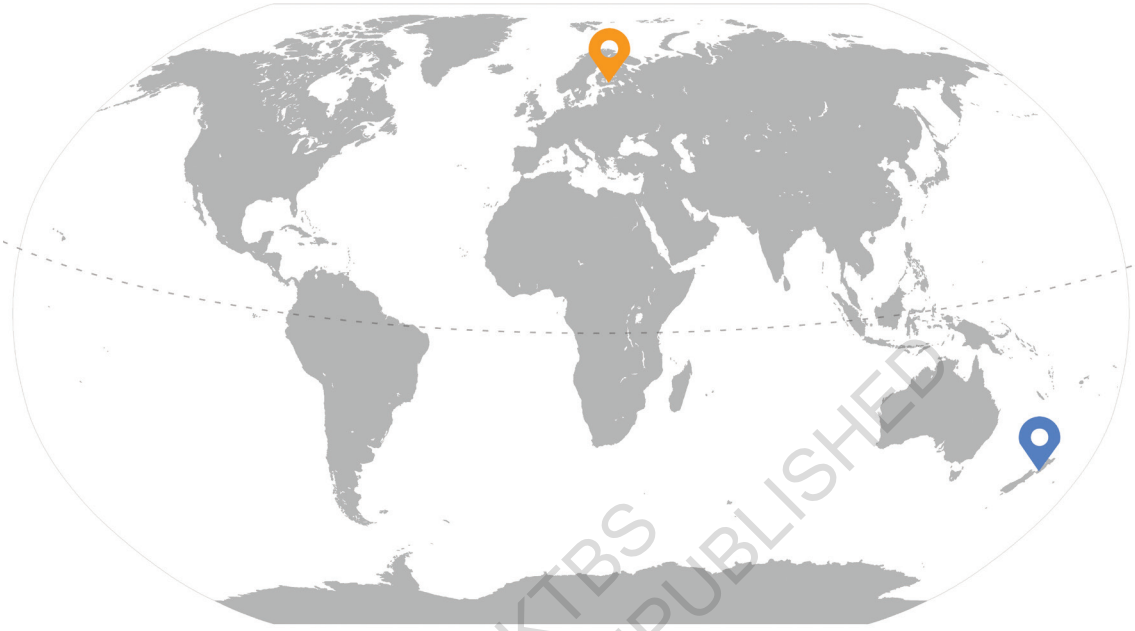
- शहर-1 मध्ये दररोज सूर्यप्रकाशाचे सरासरी तास जानेवारीपासून वाढतात आणि जूनमध्ये ते अंदाजे 17-18 तासांपर्यंत कमाल मूल्यावर पोहोचतात. त्यानंतर ते कमी होत जातात आणि डिसेंबरमध्ये अंदाजे 6 तासापर्यंत किमान मूल्यावर पोहोचतात.
- शहर-2 मध्ये दररोजच्या सरासरी सूर्यप्रकाशाचे तास कमी होत जातात आणि जूनमध्ये अंदाजे 1 तासापर्यंत किमान मूल्यावर पोहोचतात. त्यानंतर ते वाढतात आणि डिसेंबर मध्ये अंदाजे 15 तासापर्यंत कमाल मूल्यावर पोहोचतात.
- शहर-1 मधील कमाल आणि किमान मूल्ये शहर-2 च्या मूल्यांच्या तुलनेत अधिक तीव्र आहेत. म्हणजेच शहर-1 मधील कमाल सूर्यप्रकाशाचे दिवस हे शहर-2 पेक्षा जास्त आहेत. आणि शहर-1 मधील किमान सूर्यप्रकाशाचे दिवस हे शहर-2 पेक्षा कमी आहेत.
- जूनमध्ये शहर-1 मधील पूर्ण दिवसाच्या (24 तासाच्या) सुमारे $\frac{3}{4}$ भागासाठी सूर्यप्रकाश असतो. तर डिसेंबर-जानेवारी दरम्यान फक्त $\frac{1}{4}$ भागासाठी सूर्य-प्रकाश असतो.

? यावरुन या दोन शहरांचे स्थान कोठे आहे याचा अंदाज येतो का?

शहर-1 आणि शहर-2 ही विषुववृत्तापासून दूरवर अनुक्रमे उत्तर आणि दक्षिण गोलार्धात आहेत. शहर-1 हे हेलसिंकी, फिनलँड आणि शहर-2 हे वेलिंग्टन, न्यूझीलंड आहे. हे नकाशामध्ये सुद्धा दर्शविलेले आहे. जूनमध्ये उत्तर गोलार्ध सूर्याकडे झुकलेला असतो,

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्यामुळे दिवसाचे तास जास्तीत जास्त आहेत, तेथे उन्हाळा असतो. त्याच काळात दक्षिण गोलार्ध सूर्यापासून दूर झुकलेला असतो त्यामुळे तेथे हिवाळा असून दिवस लहान असतो. सूर्यप्रकाशाचा हा उलट हंगामी नमुना शहरांचे स्थान विरुद्ध गोलार्धात असल्यामुळे आहे.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? तुम्हाला याहीपेक्षा जास्त शोध घ्यायचे आहेत का?

गणिती बोल





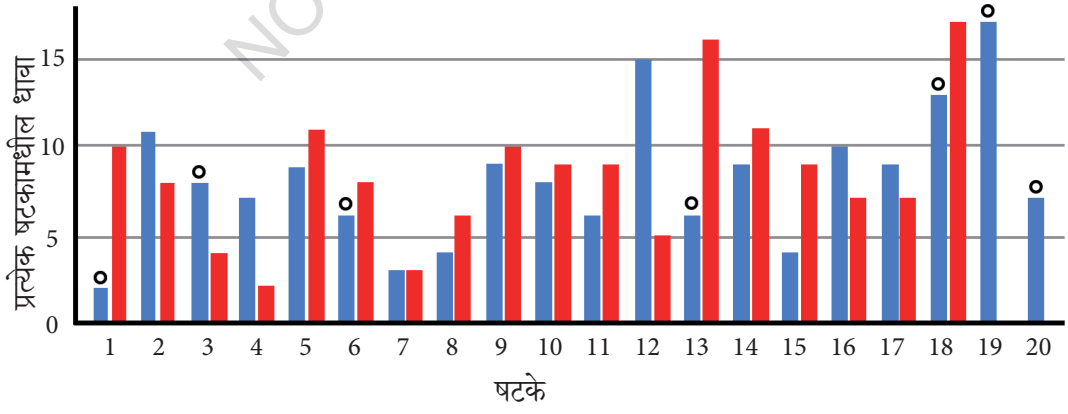
©timeanddate.com/Brendan Goodenough

नार्वेमधील अंदोया येथील मध्यरात्रीचा सूर्य

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## फक्त एक मिनिट पुरेसे आहे. (All it Takes is a Minute)

तुम्ही कधीतरी क्रिकेट सामना पाहायचा चुकविलेला आहे का? तुम्ही एका आलेखाकडे पाहून एका मिनिटामध्ये माहिती मिळवू शकता. तुम्ही खाली दर्शविल्यासारखे आलेख पाहिलेले असतील.



आडवी रेषा 1 पासून सुरु होणारी षटके दर्शविते तर उभी रेषा प्रत्येक षटकात काढलेल्या धावा दर्शविते. हा आलेख प्रत्येक षटकामध्ये दोन्ही संघानी काढलेल्या धावा दुहेरी स्तंभालेखामध्ये दर्शवितो. प्रत्येक स्तंभ हा एका संघाशी संबंधीत आहे. त्यांना आपण निळा संघ (निळ्या रंगाने दर्शविलेला) आणि लाल संघ (लाल रंगाने दर्शविलेला) असे समजूया. प्रत्येक षटकातील धावांसाठी वापरलेले प्रमाण 1 एकक = 5 धावा आहे. स्तंभाच्या वर दर्शविलेली वर्तुळे ही त्या षटकात बाद झालेले गडी दर्शवितात.

? या आलेखावर आधारित खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

1. आपण फलंदाजी प्रथम कोणी केली ते सांगू शकतो का? सामना कोणी जिंकला?
2. निळ्या संघाने 12 षटकामध्ये किती धावा केल्या आहेत?
3. लाल संघाने कमीतकमी धावा केलेले षटक कोणते?
4. प्रथम फलंदाजी केलेल्या संघाने दिलेले लक्ष्य सांगणे सोपे आहे का?

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

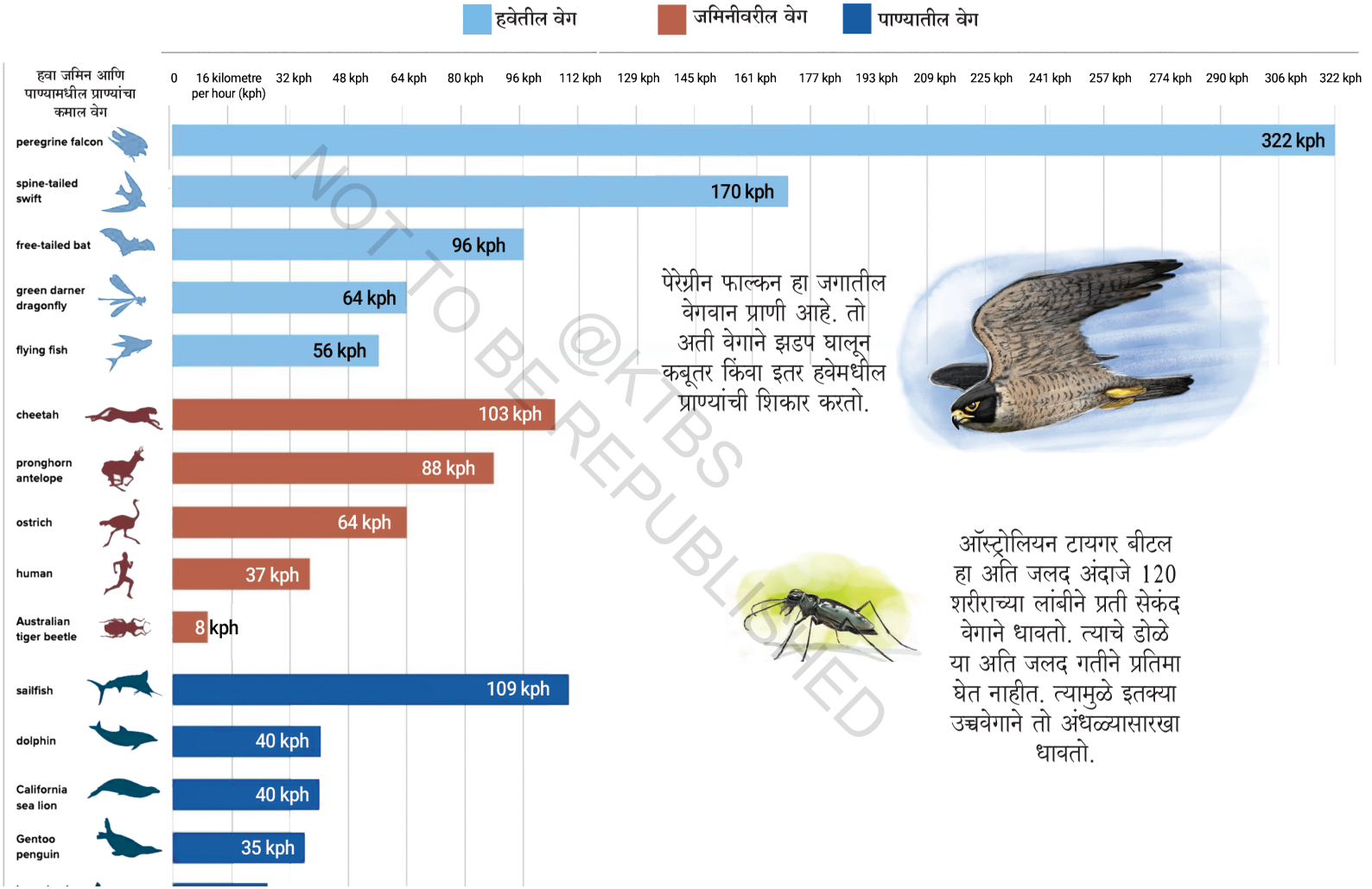
1. खालील माहिती आलेखामध्ये काही प्राण्यांचा हवा, जमीन आणि पाणी यामधील वेग दाखविला आहे. तर आपण याला स्तंभालेख असे म्हणू शकतो का?
   (a) या आलेखात वापरलेले प्रमाण कोणते?
   (b) या माहिती आलेखात तुम्हाला कोणती गोष्ट मनोरंजक वाटली? तुम्हाला पुढे कोणती गोष्ट शोधायची आहे?

गणिती बोल

   (c) अशा प्राण्यांची एक जोडी ओळखा. ज्यामध्ये एकाचा वेग हा दुसऱ्याच्या वेगाच्या दुप्पट आहे.
   (d) सेलफिश हा हंपबॅक व्हेलपेक्षा अंदाजे 4 पटीने वेगवान आहे. असे आपण म्हणू शकतो का?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## किती वेग?




पेरेग्रीन फाल्कन हा जगातील वेगवान प्राणी आहे. तो अती वेगाने झडप घालून कबूतर किंवा इतर हवेमधील प्राण्यांची शिकार करतो.





ऑस्ट्रोलियन टायगर बीटल हा अति जलद अंदाजे 120 शरीराच्या लांबीने प्रती सेकंद वेगाने धावतो. त्याचे डोळे या अति जलद गतीने प्रतिमा घेत नाहीत. त्यामुळे इतक्या उच्चवेगाने तो अंधळ्यासारखा धावतो.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

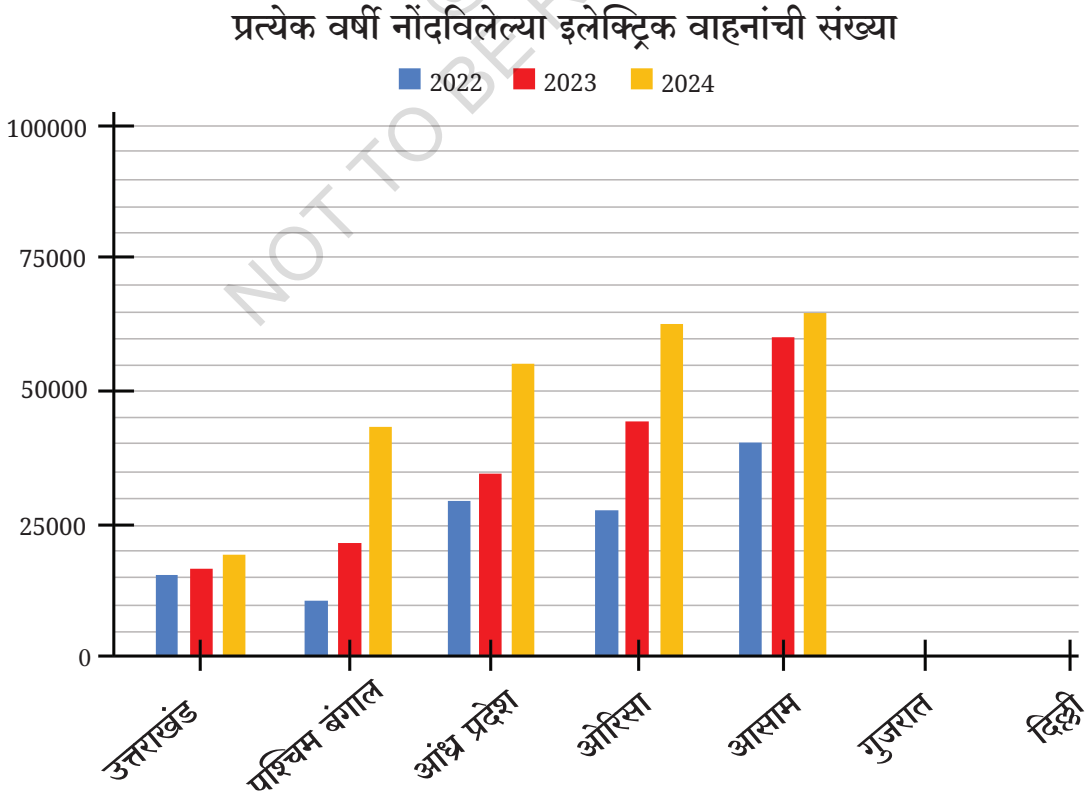
2. प्रतिभाने आपल्या विद्यार्थ्यांना विचारले की,''जर तुम्हाला पाण्यात (पाण्यावर आधारित) हवेत (हवेवर आधारित) किंवा अंतराळात (अवकाशात) प्रवास करण्याची महाशक्ती मिळाली तर तुम्ही कशाची निवड कराल?'' याचे उत्तर खालीलप्रमाणे दाखविलेले आहे. काहीनी कोणतीही निवड केलेली नाही. दोन्ही इयत्तानी प्रत्येक पर्यायांची निवड आणि तुलना करणारा समूह स्तंभालेख काढा, योग्य प्रमाणाची निवड करा.

| | |
|---|---|
| **इयत्ता 5 वी** | w, a, a, a, w, n, s, a, n, w, a, a, a, a, a, w, w, s, a, a, n, w, a, a, n |
| **इयत्ता 6 वी** | n, w, s, a, s, w, s, s, a, a, w, s, s, a, s, a, n, w, s, s, a, w, a, w, a |

3. राजस्थानमधील जोधपूर येथील वेगवेगळ्या महिन्याचे दोन दिवसातील बदललेले तापमान खालीलप्रमाणे दिलेले आहे. दुहेरी स्तंभालेख काढा, 1 एकक = 4 हे प्रमाण वापरा. हे दोन दिवस कोणत्या महिन्यामधील असू शकतात याचा तुम्ही अंदाज करू शकता का?

| | मध्यरात्री 12 वा | पहाटे 3 वा | सकाळी 6 वा | सकाळी 9 वा | दुपारी 12 वा | दुपारी 3 वा | संध्याकाळी 6 वा | रात्री 9 वा |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **दिवस 1** | 20°C | 18°C | 16°C | 20°C | 26°C | 34°C | 30°C | 24°C |
| **दिवस 2** | 37°C | 34°C | 30°C | 33°C | 37°C | 43°C | 42°C | 39°C |

4. खालील समूह स्तंभालेख हा काही राज्यांमधील 2022 ते 2024 या प्रत्येक वर्षात नोंदविलेल्या इलेक्ट्रिक वाहनांची संख्या दर्शवितो.




NOT TO BE REPUBLISHED @KSTBS

(a) गुजरात आणि दिल्ली या राज्यांची माहिती (हजारापर्यंत अंदाज केलेली) खालील कोष्टकामध्ये दिलेली आहे. तर स्तंभालेखाशी संबंधीत स्तंभ काढा. (स्तंभाची वरील बाजू दोन योग्य उभ्या मार्गदर्शक रेषांनी ठेवली तरी पुरेसे आहे.)

| | 2022 | 2023 | 2024 |
|---|---|---|---|
| गुजरात | 69000 | 89000 | 78000 |
| दिल्ली | 62000 | 74000 | 81000 |

(b) आलेख कसा संघटित केला आहे, कोणते प्रमाण वापरले आहे आणि माहिती कोणते नमुने दर्शवितो हे लक्षात घ्या.

(c) 2022 ते 2024 मध्ये विविध राज्यांमध्ये झालेल्या बदलाचे तुम्ही कसे वर्णन कराल?

(d) 2022 च्या तुलनेत 2023 मध्ये आसाममध्ये अंदाजे किती जास्त नोंद झाली आहे?

(e) 2022 ते 2024 पर्यंत पश्चिम बंगालमध्ये नोंदणीत किती पटीने वाढ झाली?

(f) 2023 आणि 2024 मध्ये उत्तराखंड अगदी कमी प्रमाणात नवीन नोंदणी झाली कारण की स्तंभालेखामध्ये कमीतकमी वाढ झाली आहे. हे विधान बरोबर आहे का?

© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

## 5.4 माहिती गुप्तहेर (Data Detective)

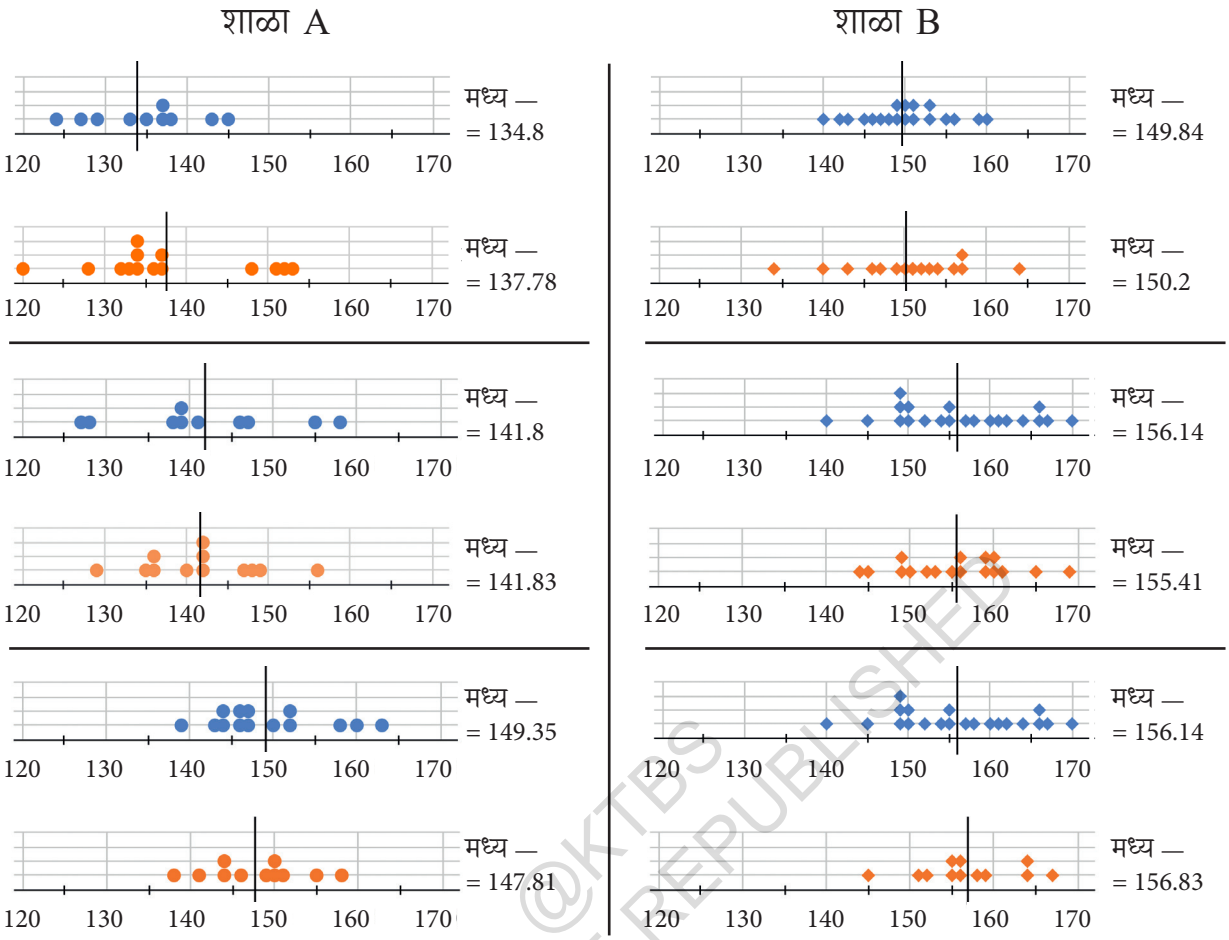
गोष्ट सुंदर बनविण्यासाठी उत्तम प्रकारे बनविलेली वाक्ये एकानंतर एक ठेवली. याच प्रकारे उत्तमपणे संघटित, उत्तमपणे सादरीकरण केलेली माहिती मनोरंजक गोष्टी सांगू शकते आणि नवीन समस्यांचा शोध घेते किंवा समस्या सोडविण्यास मदत करते.

## उंचीची कथा सांगणे (Telling Tall Tales)

यापूर्वी आपण इयत्ता 5 वीच्या 2 वर्गातील मुला-मुलींच्या उंचीची माहिती पाहिली आहे. तेथे एका वर्गामध्ये मुलींची सरासरी उंची मुलांपेक्षा जास्त होती आणि दुसऱ्या वर्गात मुलांची उंची मुलींपेक्षा जास्त होती

? खालील आलेखामध्ये दोन वेगवेगळ्या शाळांमधील इयत्ता 6 वी, 7 वी आणि 8 वी मधील मुलांची (निळ्या रंगाने) आणि मुलींची (केशरी रंगाने) उंची दर्शविणारा बिंदू आलेख दिलेला आहे. तर तुमच्या लक्षात काय येते? तुमच्या निरीक्षणांची चर्चा करा.

गणिती बोल




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या माहितीकडे पाहिल्यानंतर तुमच्या समोर प्रश्न येऊ शकतात.

या दोन शाळांमध्ये एकाच इयत्तेच्या मुलांमध्ये उंचीत इतका बदल का होऊ शकतो?

''या शाळा कुठे आहेत?''

''माझ्या शाळेमधील इयत्ता 6 ते 8 पर्यंतच्या विद्यार्थ्यांची उंची किती असेल?

''इयत्ता 7 वी च्या सर्व मुला-मुलींची उंची किती असेल?''.

सामान्यपणे आपण पाहिले आहे की, पुरुष हे स्त्रियांपेक्षा जास्त उंच असतात. परंतु मुलांच्या आणि मुलींच्या उंचीबद्दल काय? मुले ही मुलींपेक्षा अधिक उंच आहेत का? फक्त एक-दोन शाळांमधील माहिती पाहून आपण आपल्या देशातील किंवा संपूर्ण जगातील मुला-मुलींसाठी याचे सामान्यीकरण करु शकत नाही.

भारतातील वेगवेगळ्या वयातील मुला-मुलींच्या उंचीच्या (सर्वेक्षणावर 1989, 1999, 2009, 2019 आधारीत) कांही माहितींचे निरीक्षण करा. 2019 या वर्षातील 5 ते 19 वयोगतील मुलांची आणि मुलींची उंची खालील कोष्टकामध्ये दिलेली आहे. प्रत्येक वर्षात पहिला स्तंभ मुलांची उंची आणि दुसरा स्तंभ मुलींची उंची दर्शवितो.

| वय | 1989 | | 1999 | | 2009 | | 2019 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 101.3 | 100 | 102.4 | 101.7 | 105.1 | 104 | 107.1 | 107.2 |
| 6 | 107.5 | 106 | 108.7 | 107.5 | 111 | 109.7 | 113.1 | 112.9 |
| 7 | 113 | 111.4 | 114.2 | 112.6 | 116.2 | 114.8 | 118.6 | 118 |
| 8 | 118.1 | 116.5 | 119.2 | 117.5 | 120.9 | 119.6 | 123.5 | 122.7 |
| 9 | 122.9 | 121.7 | 123.9 | 122.4 | 125.2 | 124.5 | 128.1 | 127.6 |
| 10 | 127.5 | 127.3 | 128.3 | 127.8 | 129.4 | 129.9 | 132.6 | 132.8 |
| 11 | 132.2 | 133.4 | 132.8 | 133.6 | 133.7 | 135.7 | 137 | 138.6 |
| 12 | 137.7 | 139 | 138 | 139.1 | 138.9 | 141.1 | 142.2 | 143.8 |
| 13 | 144.2 | 143.2 | 144.3 | 143.1 | 145.2 | 145.1 | 148.4 | 147.7 |
| 14 | 150.6 | 146.2 | 150.5 | 146.1 | 151.5 | 148 | 154.4 | 150.4 |
| 15 | 155.4 | 148.5 | 155.2 | 148.4 | 156.3 | 150.1 | 159 | 152.4 |
| 16 | 158.9 | 150.1 | 158.7 | 150.1 | 159.9 | 151.6 | 162.3 | 153.8 |
| 17 | 161.3 | 151.2 | 161.4 | 151.3 | 162.6 | 152.6 | 164.6 | 154.7 |
| 18 | 162.9 | 151.8 | 163.2 | 152.1 | 164.3 | 153 | 166 | 155.2 |
| 19 | 163.5 | 151.9 | 164.2 | 152.4 | 165.1 | 153 | 166.5 | 155.2 |

या कोष्टकामध्ये दर्शविलेल्या माहितीचे निरीक्षण करण्यासाठी पुरेसा वेळ खर्च करा. तुमच्या वर्गमित्रांबरोबर तुम्ही शोधलेल्या माहितीची चर्चा करा. तुम्हाला तत्पर चौकशीसाठी काही मुद्दे.

गणिती बोल

- 1989 पासून 2019 पर्यंत एका विशिष्ट वयोगटातील मुला-मुलींच्या उंचीतील बदल.
- एका विशिष्ट वर्षातील विविध वयोगटाच्या मुलांची उंची विरुद्ध मुलींची उंची.
- 2019 मधील लगतच्या वयातील मुला-मुलींच्या उंचीमधील बदल.

खालील पैकी कोणती विधाने या माहितीच्या आधारे सिध्द केली जाऊ शकतात?

1. 1989 ते 2019 पर्यंत प्रत्येक वयोगटातील मुले आणि मुली या दोन्हींच्या सरासरी उंचीमध्ये वाढ झाली आहे.
2. 1989 मध्ये 13 वर्षाच्या मुलींची सरासरी उंची ही 2009 मधील 14 वर्षे वयाच्या मुलींपेक्षा जास्त होती.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. 2019 मधील 15 वर्षाच्या मुलांची सरासरी उंची ही 1989 मधील 16 वर्षाच्या मुलांच्या सरासरी उंचीपेक्षा जास्त आहे.
4. 13 वर्षाच्या सर्व मुली या 11 वर्षाच्या सर्व मुलींपेक्षा उंच आहेत.
5. 5 ते 19 या संपूर्ण वयोगटात, मुलांची सरासरी उंची ही मुलींच्या सरासरी उंचीपेक्षा जास्त आहे.
6. 19 वर्षानंतरही मुलांची उंची वाढत जाते.

गणिती बोल

? 2019 मध्ये, 5 ते 19 या वयोगटातील कोणत्या दोन लागोपाठच्या वया दरम्यान मुलांची उंची जास्तीत जास्त वाढली? 5 ते 19 वयोगटातील कोणत्या दोन लागोपाठच्या वयादरम्यान मुलींची उंची जास्तीत जास्त वाढली?

? समजा की, नवजात बालकाची सरासरी उंची 50 सें.मी. आहे. तर 1 ते 4 वयोगटातील लहान मुलांच्या सरासरी उंचीचा अंदाज करा.

? कोष्टकमध्ये निरीक्षण केलेल्या प्रवृत्तीच्या अधारे, 2029 या वर्षी 5 ते 19 वयोगटातील मुले आणि मुलींच्या उंचीचा तुम्ही केलेला अंदाज लिहा.



जेव्हा जेव्हा तुम्ही कांही माहिती किंवा आलेख पाहाल, तेव्हा त्यामध्ये कोणती कथा किंवा कोणती रहस्ये आहेत याचे जवळून बारकाईने निरीक्षण करावे लागेल.

तुम्हाला वजनाची माहिती पाहावी लागेल. किंवा तुम्हाला उत्सुकता असेल तर असे नमुने इतर देशांमध्येसुद्धा आहेत का ते पाहावे लागेल? तुम्हाला याचे आश्चर्यही वाटेल की, काही शतकापूर्वी माणसेही फारच लहान (बुटकी) होती! तसेच काही देशामधील लोक इतरांपेक्षा उंच आहेत का? खाली 1989 ते 2019 पर्यंत वेगवेगळ्या देशातील 19 वर्षाच्या मुला-मुलींच्या सरासरी उंचीमधील बदल दर्शविले आहेत.

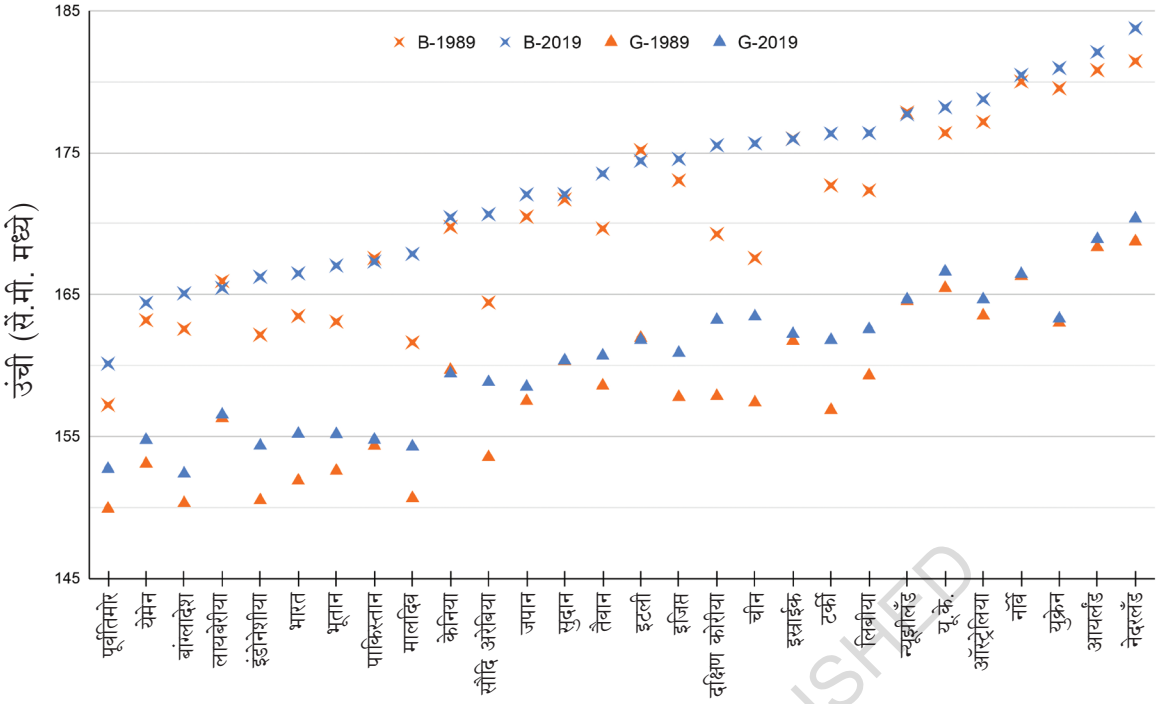
? आलेखाचे संघटन कसे केले आहे? कोणती माहिती सादर केलेली आहे?

? येथे मनोरंजक काय आहे?

गणिती बोल

लक्षात घ्या की, उभी रेषा 145 सें.मी. पासून सुरू होते. यामुळे त्यांची उंची (विस्तृत करून) जवळून पाहण्यास मदत होते.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

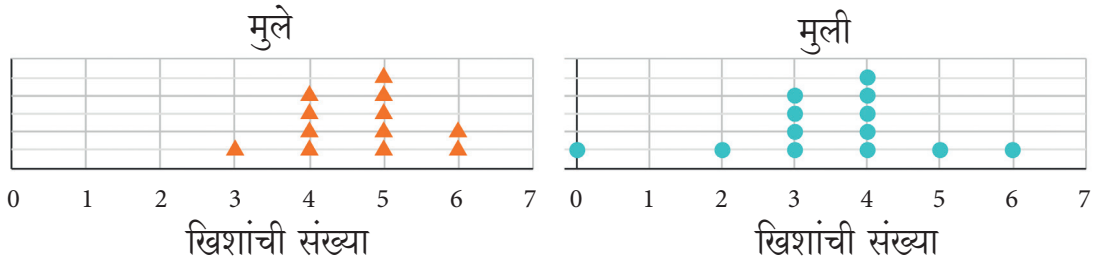



## मध्य विचलन (A Mean Deviation!)




## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील बिंदू आलेख मुलांच्या एका गटासाठी आणि मुलींच्या एका गटासाठी कपड्यावरील खिशांची (pockets) संख्या यांचे वितरण दर्शविते.




बिंदू आलेखावर आधारित खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?

(a) मुलींपेक्षा मुलांसाठीची माहिती अधिक बदलते.

(b) मुलींपेक्षा मुलांसाठी खिशांची मध्यांक संख्या अधिक आहे.

(c) मुलांपेक्षा मुलींच्या खिशांची सरासरी संख्या अधिक आहे.

(d) मुलींपेक्षा मुलांच्या खिशांची कमाल संख्या अधिक आहे.

2. खालील कोष्टक चार खेळामध्ये प्रत्येक खेळाडूने मिळविलेले गुण दर्शवितो.

| खेळाडू | खेळ 1 | खेळ 2 | खेळ 3 | खेळ 4 |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 14 | 16 | 10 | 10 |
| **B** | 0 | 8 | 6 | 4 |
| **C** | 8 | 11 | खेळला नाही | 13 |

आता खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

(a) A खेळाडूने प्रत्येक खेळात मिळविलेल्या सरासरी गुणांची संख्या लिहा.

(b) B ने प्रत्येक खेळात मिळविलेल्या सरासरी गुणांची संख्या काढा, एकूण गुणांना तुम्ही 3 ने भाग दिला की, 4 ने भाग दिला? का? B बद्दल काय?

(c) उत्तम कार्य कोणाचे आहे?

3. एका सामान्यज्ञान स्पर्धेत एका गटाच्या विद्यार्थ्यांनी 100 पैकी मिळविलेले गुण 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 आणि 75 आहेत. आणि त्याच स्पर्धेत आणखी एका गटाने मिळविलेले गुण 68, 59, 73, 86, 47, 79, 90, 93 आणि 86 आहेत. तर मध्य आणि मध्यांक वापरून कोणत्या गटाची प्रगती उत्तम आहे याचे वर्णन करा आणि तुलना करा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. एका वसाहतीच्या सर्वेक्षणात संग्रहीत केलेल्या माहितीचा विचार करा.

| आवडीचा खेळ | क्रिकेट | बास्केट बॉल | पोहणे | हॉकी | ॲथलेटिक्स |
|---|---|---|---|---|---|
| पाहिलेला | 1240 | 470 | 510 | 430 | 250 |
| सहभाग घेतलेला | 620 | 320 | 320 | 250 | 105 |

योग्य प्रमाणाची निवड करा आणि द्विस्तंभालेख काढा. तुमची निरीक्षणे लिहा.

5. खालीलप्रमाणे उंची (सें.मी. मध्ये) असलेल्या 17 विद्यार्थ्यांच्या गटाचा विचार करा 106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101. एका क्रिडा शिक्षकाला या विद्यार्थ्यांची दोन गटात विभागणी करायची अशारीतीने आहे. की, प्रत्येक गटात समान विद्यार्थी असावेत. एका गटातील विद्यार्थी एका ठराविक उंचीच्या खालील आणि दुसऱ्या गटातील विद्यार्थी त्या ठराविक उंचीपेक्षा जास्त असावेत असे करण्याची योग्य पध्दत सुचवा ''उंचीची कथा सांगणे'' या विभागाच्या माहितीवर आधारीत त्या विद्यार्थ्यांच्या वयाची कल्पना करु शकाल का?

6. तुमच्या वर्गातील मुलांच्या उंचीचा मध्य आणि मध्यांक यांचे वर्णन करा. ही उंची तुम्ही बिंदू आलेखाने दर्शवा.

7. एका शाळेमध्ये इयत्ता 7 वी च्या दोन तुकडया आहेत. प्रत्येक तुकडीमध्ये 15 मुले आणि 15 मुली आहेत. एका तुकडीतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीचा मध्य 154.2 सें.मी. आहे. या माहितीवरून दुसऱ्या तुकडीतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीच्या मध्याबद्दल काय सत्य असेल?

(a) दुसऱ्या तुकडीतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीचा मध्य 154.2 सें. मी. आहे.

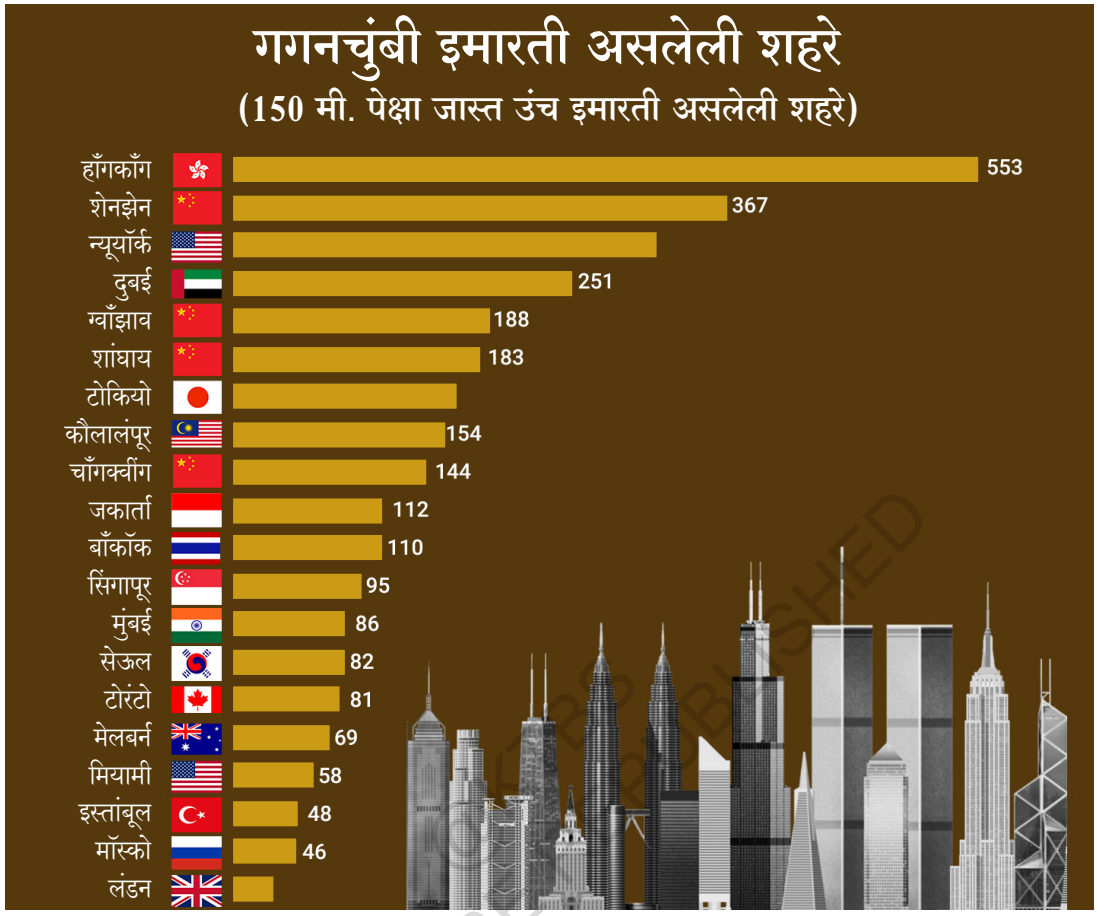
(b) दुसऱ्या तुकडीतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीचा मध्य 154.2 सें. मी. पेक्षा कमी आहे.

(c) दुसऱ्या तुकडीतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीचा मध्य 154.2 से. मी. पेक्षा जास्त आहे.

(d) दुसऱ्या तुकडीतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीचा मध्य शोधला जाऊ शकत नाही.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. वादळातही उंच उभे राहणे.




(a) न्यूयॉर्क, टोकिओ आणि लंडनमधील गगनचुंबी इमारतींच्या संख्येचे अंदाजे मूल्य लिहा.

(b) खालील विधाने बरोबर (सत्य) आहेत का?

(i) मुंबई पेक्षा जास्त गगनचुंबी इमारती फक्त 12 शहरांमध्ये आहेत.

(ii) मुंबईपेक्षा फक्त 7 शहरांमध्ये गगनचुंबी इमारतीपैकी काही आहेत.

(iii) जगातील सर्वात जास्त उंच इमारत हाँगकाँगमध्ये आहे.

9. खालील कोष्टकामध्ये दर्शविलेल्या वस्तूंचा अंदाज घ्या आणि नंतर मोजा. या माहितीच्या आधारावर द्विस्तंभालेख काढा तुमचे अंदाज किती अचूक आहेत? अंदाजे आणि मोजलेल्या किंमतीमधील सरासरी फरक शोधा.

NOT TO BE REPUBLISHED

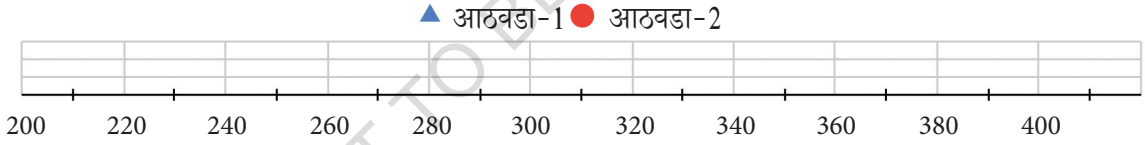
| वस्तू | अंदाजे लांबी (सें.मी. मध्ये) | मोजलेली लांबी (सें.मी. मध्ये) | धनात्मक फरक |
|---|---|---|---|
| पेनची लांबी | | | |
| रबरची लांबी | | | |
| तुमच्या कंपास पेटीची लांबी | | | |
| | | | |
| तुमच्या गणितच्या वहीची लांबी | | | |
| | | | |

10. अदितीला कोडे सोडवायला आवडते. तिने अलिकडेच सोप्या स्तरातील सुडोकू कोडी सोडविण्यास सुरवात केली आहे. ही कोडी सोडविण्यासाठी तिला लागलेला वेळ (सेंकंदमध्ये) 410, 400, 340, 340, 360, 400, 320, 290, 380, 280 270, 230, 220, 240 आहे. पहिल्या 9 किंमती 1 आठवड्याशी संबंधीत आहेत आणि राहिलेल्या 2 आठवड्याशी संबंधीत आहेत.



(a) दोन्ही आठवड्यांची माहिती दर्शविणारा बिंदू आलेख रचा.

(b) माहितीचा मध्य, मध्यांक आणि कोणतेही निरीक्षण असल्यास त्याचे वर्णन करा.




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

**11. वैयक्तिक प्रकल्प : खालीलपैकी किमान एकची निवड करा :**

(a) वाक्य किती मोठे असते? वेगवेगळ्या विषयाची कोणतीही दोन पुस्तके निवडा. प्रत्येक पुस्तकामधून भरपूर मजकूर असलेले कोणतेही एक पान निवडा.

(i) वाक्यांमध्ये प्रत्येक पानावर किती शब्द आहेत, याचे वर्णन करण्यासाठी बिंदू आलेख वापरा.

(ii) मध्य आणि मध्यांक वापरुन दोन्ही स्थानावरील माहितीची तुलना करा.

(b) नांवामध्ये काय आहे? तुमच्या सर्व मित्रांची नांवे लिहा. या माहितीवरून काही मनोरंजक गोष्टी करु शकता त्या खालीलप्रमाणे दिलेल्या आहेत.

(i) नावांच्या लांबीचा मध्य आणि मध्यांक काढा (नावातील अक्षरांच्या संख्येचा)

(ii) माहिती दर्शवा आणि त्यांच्यातील बदल आणि केंद्रीय कलाचे वर्णन करा.

(iii) कोणती सुरुवातीची अक्षरे प्रसिद्ध आहेत? कोणती कमी प्रसिध्द आहेत?

(iv) मध्यांक मधील सुरुवातीची अक्षरे कोणती? A-M आणि N-Z पासून सुरवात होणाऱ्या नावांच्या संख्येविषयी काय सांगू शकता?

(v) मुलांची नांवे आणि मुलींची नांवे दर्शविणाऱ्या संख्येचा व्दिस्तंभालेख काढा.

i. सुरुवात आणि शेवट स्वराने होतो.

ii. सुरुवात स्वराने आणि शेवट व्यंजनाने होतो.

iii. सुरुवात व्यंजनाने आणि शेवट स्वराने होतो.

iv. सुरुवात आणि शेवट व्यंजनाने होतो.

12. **वैयक्तिक प्रकल्प ( दीर्घ कालावधीसाठी):** दोन आठवडे किंवा त्यापेक्षा जास्त कालावधीसाठी माहिती संग्रहीत करावी लागते.
आत आणि बाहेर : तुम्ही दिवसातून किती वेळा बाहेर पडता याची माहिती एकत्रीत करा. हे एका महिन्यासाठी करा.

(i) या माहितीच्या बदलाचे आणि केंद्रीय कलाचे वर्णन करा. याचा बिंदू आलेख काढा.

(ii) तुम्हाला या माहितीविषयी कांही मनोरंजक वाटले का? तुमच्या निरीक्षणांची चर्चा करा.

(iii) तुम्ही तुमच्या कुटुंबातील कोणत्याही सदस्याना किंवा मित्रांना असे करण्यास सांगू शकता?




13. **लहान गट प्रकल्प :** खालीलपैकी किमान एकाची निवड करा. 8 ते 10 जणांचे गट बनवा. गरजेनुसार वैयक्तिक माहिती संग्रहीत करा. प्रत्येकाची माहिती एकत्रित करा आणि योग्य विश्लेषण करा.

(a) आपली उंची विरुध्द आपल्या कुटुंबाची उंची : आपल्या कुटुंबातील सदस्यांची उंची संग्रहीत करा.

(i) फक्त तुमच्या कुटुंबातील सदस्यांची उंची दर्शविणारा बिंदू आलेख रचा. त्यामधील बदल आणि केंद्रीय कलाचे वर्णन करा.

(ii) प्रत्येक विद्यार्थ्याची उंची आणि त्यांच्या कुटुंबाची उंची दर्शविणारा द्विस्तंभालेख काढा.

(iii) प्रत्येकाची माहिती पहा आणि तुमच्या निरीक्षणांची चर्चा करा.

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(b) वेळेचा अंदाज करणे: वेळ पहा आणि डोळे बंद करा. जेव्हा 1 मिनिट होते तेव्हा डोळे उघडा (मोजू नका). तुम्ही किती वेळानंतर डोळे उघडले आहेत याची नोंद करा. तुमची आणि तुमच्या कुंटुंबातील सदस्यांची ही माहिती जमा करा. 3 मिनिटांचा अंदाज घेण्यासाठी ही कृती पुन्हा करा.

(i) तुमच्या कुटुंबातील सदस्यांचे अंदाज दर्शविणारे दोन बिंदू आलेख तयार करा. (1 मिनिट आणि 3 मिनिटांसाठी)

(ii) बिंदू आलेखावर ही माहिती दर्शवा. त्यांच्यातील बदल आणि केंद्रीय कलाचे वर्णन करा.

(iii) प्रत्येक कुटुंबाचा सरासरी 1 मिनिट अंदाज आणि 3 मिनिट अंदाज दर्शविणारा द्विस्तंभालेख काढा.

(iv) प्रत्येकाची माहिती पहा आणि तुमच्या निरीक्षणांची चर्चा करा.

## सारांश
## SUMMARY

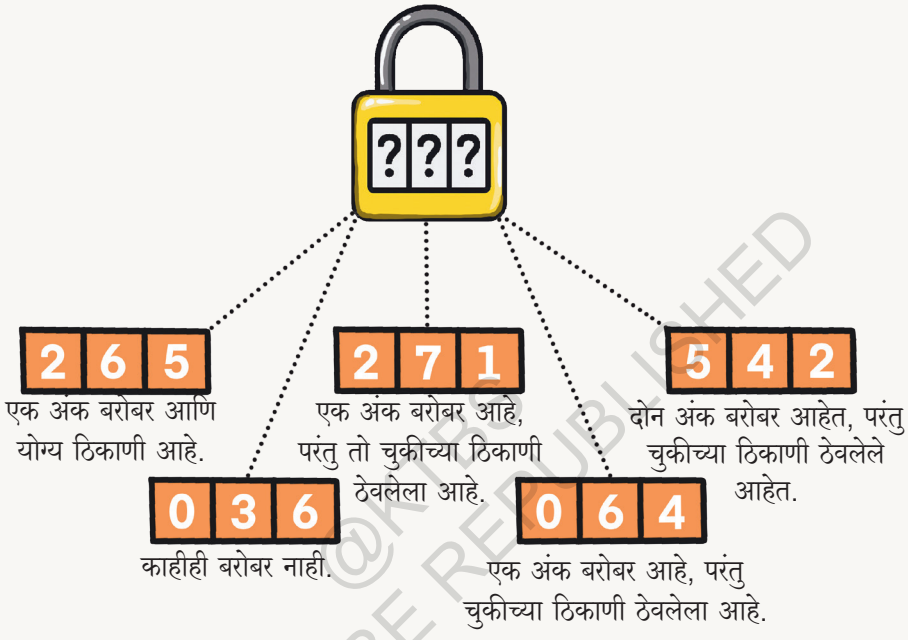
- बिंदू आलेख आपल्याला माहितीची कमाल आणि किमान श्रेणी आणि माहितीचा समूह किंवा ती कशी पसरते हे पटकन पाहण्यास मदत करतो.
- अंकगणिती मध्य = $= \frac{\text{माहितीमधील सर्व किंमतींची बेरीज}}{\text{माहितीमधील किंमतींची संख्या}}$.
- मध्यांक म्हणजेच कोणत्याही क्रमामध्ये मांडलेल्या माहितीच्या मध्यभागी येणारी संख्या होय. जर तेथे किंमती सम संख्येने असतील तर मध्य हा मध्यभागी येणाऱ्या दोन संख्यांची सरासरी असतो.
- आपण किमान, कमाल, एकूण, श्रेणी, अंकगणिती मध्य, सरासरी आणि मध्यांकाचा संदर्भ घेऊन अनेक प्रकारे माहितीचे वर्णन आणि तुलना करु शकतो.
- आपण समूह स्तंभालेख कसा वाचायचा आणि कसा बनवायचा ते अभ्यासलेले आहे. हे आलेख वेळेनुसार मूल्यांची तुलना करण्यासाठी आणि दर्शविण्यासाठी वापरले जाऊ शकतात.
- माहिती तपासल्यामुळे नवीन प्रश्नांसह आणि नवीन दिशांनी पुढे जाणे शक्य होते.

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

कोड्याची वेळ!

## बिंदू जोडणे

संख्यांच्या कुलूपामध्ये 3-अंकी संकेत असतो. खालीलप्रमाणे दिलेल्या सूचना वापरुन संकेत (कोड) शोधा.




© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED



# 6 रचना आणि फरशी जोडणी (CONSTRUCTIONS AND TILINGS)

## 6.1 भौमितिक रचना (Geometric Constructions)

### डोळे (Eyes)

तुम्हाला आठवते का, आपण इयत्ता 6 वी मध्ये 'डोळ्यांची' रचना केली होती?

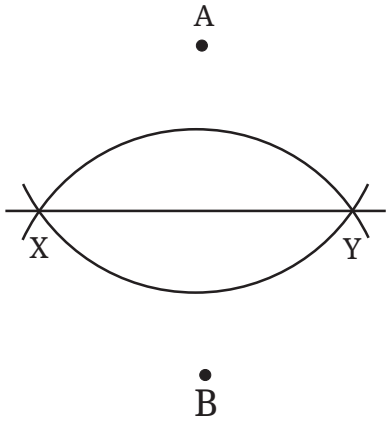




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अर्थात, डोळे हाताने रचले जाऊ शकतात, परंतु आम्हाला ते अशाप्रकारे रचायचे आहेत की प्रत्येक डोळ्याचा खालचा कंस आणि वरचा कंस सममितीय दिसेल. आपण दोन केंद्रे A आणि B (आकृती पहा) निश्चित करण्यासाठी आपल्या अवकाशीय अंदाजावर अवलंबून होतो, ज्यावरून आपण अनुक्रमे खालील कंस आणि वरील कंस काढू शकलो.

दोन्ही कंस XY ही रेषा परिभाषित करतात जी रेखाचित्राला आधार देते जरी ती अंतिम आकृतीचा भाग नाही तरी सुध्दा. आपण याआधारे रेषेपासून सुरुवात करू शकतो आणि पध्दतशीरपणे केंद्र A आणि B शोधू शकतो.

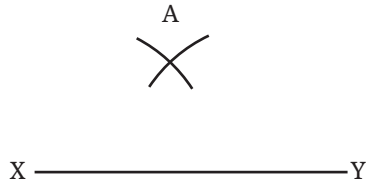



डोळा सममितीय असण्यासाठी किंवा आधारभूत रेषा सममिती अक्ष होण्यासाठी, वरील आणि खालील कंसांची त्रिज्या समान असावी लागते. दुसऱ्या शब्दात, AX = AY आणि BX = BY असल्यामुळे आपल्याकडे AX = BY असले पाहिजे. याचाच अर्थ AX = AY = BX = BY.

? आपण A आणि B कसे शोधू शकतो?

X आणि Y पासून, XY च्या वर आणि खाली समान त्रिज्या असलेले चाप काढा.

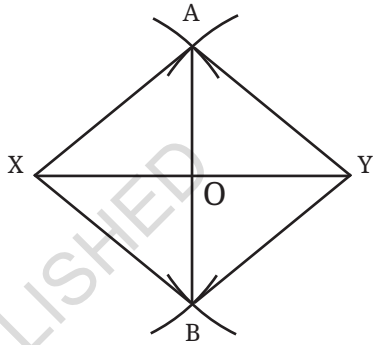
XY च्या वर आणि खाली याप्रमाणे दोन बिंदूंवर कंस एकत्र येतात ते आपल्याला अनुक्रमे A आणि B बिंदू देतील.




यांचा उपयोग करुन आपण 'डोळा' रचू शकतो.

आकृती 6.1

? आकृती 6.1 मध्ये, A आणि B ला एका रेषेने जोडले. AB, XY ला कुठे छेदतो आणि त्यांच्यामध्ये कोणता कोन तयार होतो?




आपल्याला आढळते की, AB हा XY च्या मध्यबिंदूतून जातो आणि त्याला लंब देखील असतो.

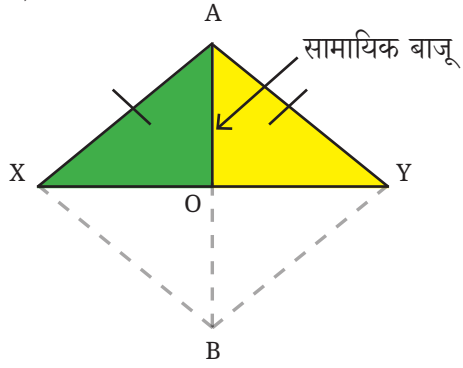
एखाद्या रेषेचे किंवा कोणत्याही भौमितिक वस्तूचे दोन समान भागांमध्ये विभाजन करणाऱ्या रेषेला दुभाजक म्हणतात. दिलेल्या रेषेला दुभागणाऱ्या आणि तिच्याशी लंब असलेल्या रेषेला **लंबदुभाजक** म्हणतात.

? XY च्या वर आणि खाली ज्या दोन बिंदूंवर कंस एकमेकांना छेदतात त्यांना जोडणारी रेषा नेहमी XY चा लंबदुभाजक असेल का? म्हणजे जेव्हा XY रेषाखंड कोणत्याही लांबीचा असेल आणि कंस कोणत्याही लांबीच्या त्रिज्या वापरून काढलेले असतील?

याचे उत्तर एकरूपतेद्वारे दिले जाऊ शकते. एक रेषाखंड XY विचारात घ्या A आणि B असे बिंदू शोधा की, AX = AY = BX = BY. रेषा AB, AX, AY, BX आणि BY काढा. AB आणि XY चा छेदनबिंदू 'O' असू द्या.

? AB हा XY चा लंब दुभाजक होण्यासाठी कोणते दोन त्रिकोण एकरूप असावेत (म्हणजे O हा XY चा मध्यबिंदू आहे आणि AB हा XY ला लंब आहे)?

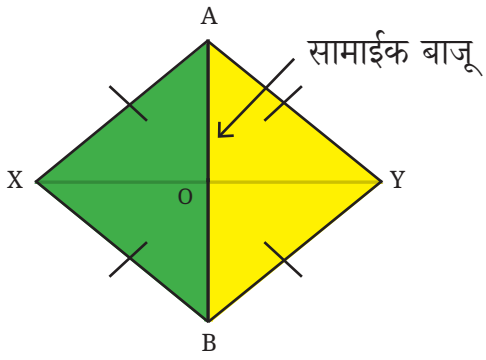
जर आपण $\Delta AOX \cong \Delta AOY$ असे सिद्ध केले, तर $OX = OY$ आणि $\angle AOX = \angle AOY$ कारण ते एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक आहेत. $\angle AOX$ आणि $\angle AOY$ मिळून एक सरळ कोन तयार करतात, $\angle AOX + \angle AOY = 180^0$ आहे. अशाप्रकारे, $\angle AOX = \angle AOY = 90^0$. यावरून हे सिद्ध होते की O हा XY चा मध्यबिंदू आहे आणि AB हा XY ला लंब आहे.




© MKTBC NOT TO BE REPUBLISHED

$\Delta AOX$ आणि $\Delta AOY$ मध्ये, $AX = AY$ आणि $AO$ दोन्ही त्रिकोणांमध्ये सामायिक आहे. हे आपल्याला माहित आहे.

जर आपण $\angle XAO = \angle YAO$ हे दाखवू शकलो तर, एकरुपतेच्या बा.को.बा. (SAS) कसोटीनुसार, आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की, हे त्रिकोण एकरुप आहेत.




हे दाखविण्यासाठी आपण पाहतो की, $\Delta ABX \cong \Delta ABY$ कारण $AX = AY$, $BX = BY$, आणि $AB$ ही दोन्ही त्रिकोणांमध्ये समायिक बाजू आहे.

अशाप्रकारे, आपल्याकडे $\angle XAB = \angle YAB$ किंवा $\angle XAO = \angle YAO$ आहेत कारण ते एकरुप त्रिकोणांचे संगत घटक आहेत.

म्हणून, $AB$ हा $XY$ चा लंबदुभाजक आहे.

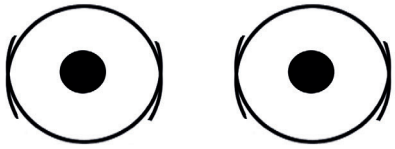
आपल्याकडे डोळ्यांचे विविध आकार असू शकतात.









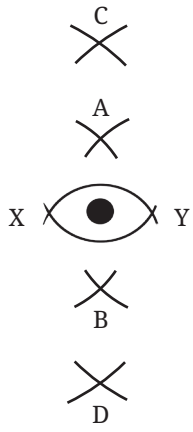




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आपल्याला हे वेगवेगळे आकार कसे मिळतील? प्रयत्न करा!

एक मार्ग म्हणजे इतर दोन बिंदू C आणि D निवडणे, ज्यामुळे, CX=CY=DX=DY होतील. या बिंदूंचा वापर करुन वेगवेगळ्या आकाराचा डोळा रचता येतो.




? बिंदू C आणि D हे लंबदुभाजक AB वर असतील का?

बिंदू C आणि D हे X आणि Y पासून समान अंतरावर आहेत. आपण आताच पहिले आहे की, अशा कोणत्याही दोन बिंदूना जोडल्याने XY चा लंबदुभाजक मिळतो. XY मध्ये फक्त एकच लंबदुभाजक आहे, तो म्हणजे रेषा AB, त्यामुळे C आणि D हे बिंदू रेषा AB वर असले पाहिजेत.

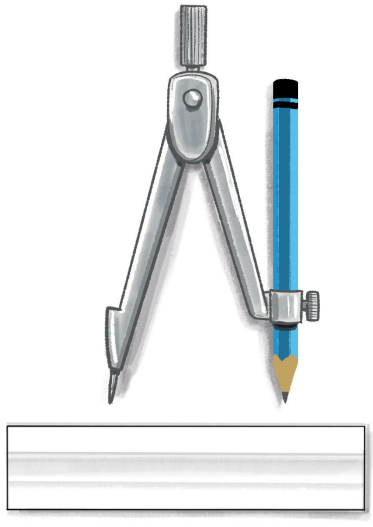
? आपण स्थापित केलेल्या तथ्यांचा वापर करून खालील विधानांचे समर्थन करा.

X आणि Y पासून समान अंतरावर असलेला कोणताही बिंदू XY च्या लंबदुभाजकावर असतो.

अशाप्रकारे, डोळ्यांच्या वरच्या आणि खालच्या कंसाचे चाप तयार करण्यासाठी लंबदुभाजाकावरील वेगवेगळ्या बिंदूच्या जोडीचा केंद्र म्हणून निवडून वेगवेगळ्या आकाराचे डोळे रचता येतात.

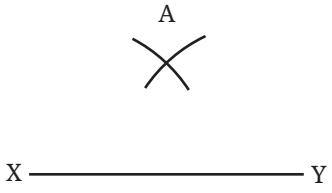
## लंबदुभाजकाची रचना (Construction of Perpendicular Bisector)

? दिलेला रेषाखंड XY असताना, केवळ खुणा नसलेली मोजपट्टी आणि कैवार वापरून त्याचा लंबदुभाजक कसा रचावा?



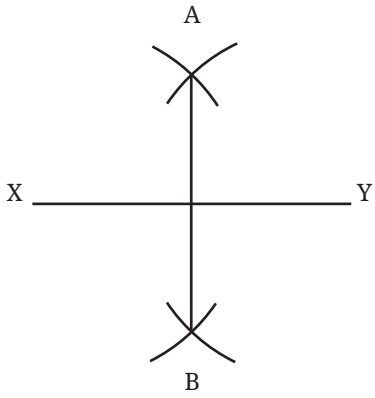
आपण पाहिले आहे की, XY च्या वर एक आणि खाली एक अशा X आणि Y पासून समान अंतरावर असलेल्या कोणत्याही दोन बिंदूंना जोडल्यास XY चा लंब दुभाजक मिळतो. ही लंबदुभाजक काढण्याची एक पध्दत मिळते.

1. X आणि नंतर Y पासून काही निश्चित त्रिज्या घेवून XY वर दोन पुरेसे लांब कंस रचा. ज्या बिंदूवर कंस मिळतात त्या बिंदूला A असे नावे द्या.




© RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. तीच त्रिज्या घेऊन X आणि Y वरून, XY च्या खाली दोन पुरेसे लांब कंस काढा. जिथे कंस एकमेकांना छेदतात त्या बिंदूला B असे नाव द्या.
3. AB हा अपेक्षित असलेला लंबदुभाजक आहे.



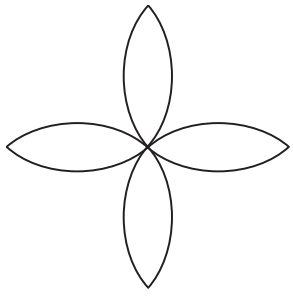

अशा प्रकारे, लंबदुभाजक सर्वात सोपी भौमितिक साधने-खुणा नसलेली मोजपट्टी आणि कैवार वापरुन काढला जाऊ शकतो. या प्रकरणामध्ये जोपर्यंत प्रमाणित एककांमध्ये विशिष्ट लांबीचे रेषाखंड काढावयाची आवश्यकता नसेल तोपर्यंत सर्व भौमितिक रचनांसाठी आपण फक्त ही दोनच साधने वापरु.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. लंबदुभाजक काढताना, XY च्या वर व्याणि खाली काढलेल्या कंसांसाठी समान त्रिज्या असणे आवश्यक आहे का? हे रचनेद्वारे तपासा आणि नंतर तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

   (**सूचना 1** : X आणि Y पासून समान अंतरावर असलेला कोणताही बिंदू लंबदुभाजकावर असतो.)

   (**सूचना 2** : जर रेषेवरील कोणतेही दोन बिंदू माहित असतील तर आपण संपूर्ण रेषा काढू शकतो.)
2. XY च्या वर आणि खाली कंसांच्या दोन्ही जोड्या XY च्या एकाच बाजूला काढू शकतो का? हे रचनेद्वारे तपासा आणि नंतर तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
3. एकमेकांना छेदणाऱ्या कंसाची एक जोडी रचताना, त्या दोन्हीसाठी समान त्रिज्या वापरणे आवश्यक आहे का? हे रचनेद्वारे तपासा आणि नंतर तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
4. फक्त मोजपट्टी आणि कंपास वापरून ही रचना पुन्हा करुन पहा.



© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

वरील रचना पूर्ण केल्यानंतर, तुम्ही तिची बाह्यरेषा गिरवण्यासाठी रंगीत पेन्सिलसोबत मोजपट्टी किंवा कैवारचा वापर करू शकता. यामुळे ही रचना आधार (पाया) रेषा आणि कंसांपासून वेगळी उठून दिसेल.

लंबदुभाजक काढण्याची ही पध्दत केवळ भौमितिकदृष्ट्या अचूक नाही तर ती अचूकपणे काढण्याचा एक व्यावहारीक मार्ग देखील आहे.

रेषाखंडाचा मध्यबिंदू शोधण्याची ही पध्दत, मोजपट्टी वापरून लांबी मोजण्यापेक्षा अधिक अचूक आहे.

## दिलेल्या बिंदूवर $90^0$ कोनाची रचना करणे

? आपण लंबदुभाजक काढण्याची पध्दत रेषेवरील कोणत्याही बिंदूवर $90^0$ कोन रचण्यासाठी वापरू शकतो का? एक रेषा काढा आणि त्यावर O हा बिंदू चिन्हांकित करा. O बिंदूवर $90^0$ चा कोन रचा.




? या रेषेचा असा भाग शोधा की, ज्यासाठी O हा मध्यबिंदू असेल.

O च्या दोन्ही बाजूंना रेषा वाढवा.

कंपासचा वापर करून O पासून समान अंतरावर दोन बिंदू X आणि Y चिन्हांकित करा, जेणेकरून O हा XY चा मध्यबिंदू असेल, XY चा लंब दुभाजक O मधून जाईल आणि दिलेल्या रषेला लंब असेल.

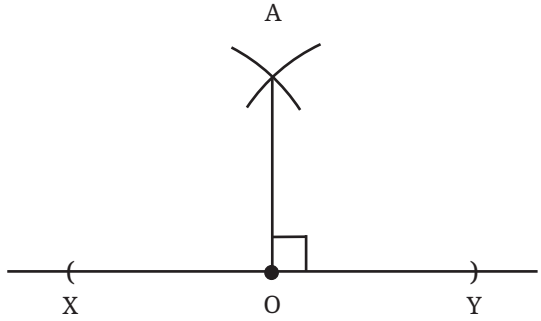


आकृती 6.2

या प्रकरणात, आपल्याला XY च्या लंबदुभाजकाला छेदणाऱ्या कंसांच्या दोन जोड्या काढण्याची गरज आहे का?

नाही, आपल्याला आधीच एक बिंदू O मिळाला आहे जो लंब दुभाजकावर आहे.

आकृती 6.2 आणि 6.3 या दिलेल्या बिंदूवर $90^0$ कोन काढण्याच्या पायऱ्या दर्शवितात.



आकृती 6.3

## 'सुलभसूत्र' मधील रचना पध्दत

भारतासह प्राचीन संस्कृतीमधील गणिततज्ञांना लंब आणि लंब दुभाजक काढण्याच्या अचूक पध्दती माहित होत्या.

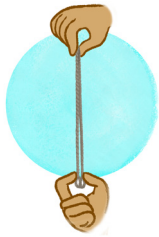
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

भारतात, हे ज्ञान असलेले सर्वात जुने ज्ञात ग्रंथ म्हणजे सूलभसूत्र हे वेदिक काळातील धार्मिक ग्रंथ आहेत, जे अग्नी वेदींच्या रचनाशी संबंधीत आहेत. सुलभसूत्र हा सहा वेदांगापैकी (एक संज्ञा ज्याचा शब्दश: अर्थ वेदांचे अवयव असा होतो) एक भाग आहे. आपण याआधी अभ्यासलेल्या लंब आणि लंबदुभाजक काढण्याच्या पद्धतींचा समावेश सुलभसूत्रामध्ये आहे. सुलभसूत्रामधील पध्दतींमध्ये तुम्ही वापरत असलेल्या कैवार पेक्षा वेगळ्या प्रकारच्या कैवारचा वापर केला जातो. तो म्हणजे दोरी, दोरीचा वापर वर्तुळे किंवा कंस काढण्यासाठी केला जाऊ शकतो. तसेच सरळ रेषा तयार करण्यासाठी ती ताणली जाऊ शकते.

याशिवाय, सुलभसूत्रामध्ये लंब रेषा काढण्याच्या इतर पध्दतींचांही समावेश आहे. येथे दोरीचा वापर करून लंबदुभाजक काढण्याची एक रंजक रचना दिली आहे. (कात्यायन-सुलभसूत्र 1.2)

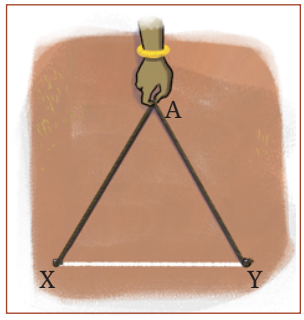
समजा, XY हा जमिनीवर काढलेला रेषाखंड आहे, ज्याचा आपल्याला लंबदुभाजक काढायाचा आहे. X आणि Y या प्रत्येक बिंदूवर एक छोटा खांब किंवा खुंटी जमिनीवर उभी रोवा.

एक पुरेशी लांब दोरी घ्या. तिच्या दोन्ही टोकांना दोन फास बनवा. फास बनविण्यासाठी वापरलेला दोरीचा भाग विचारात न घेता, दोरीला अर्ध्यावर दुमडून तिचा मध्यबिंदू शोधा व खूण करा.



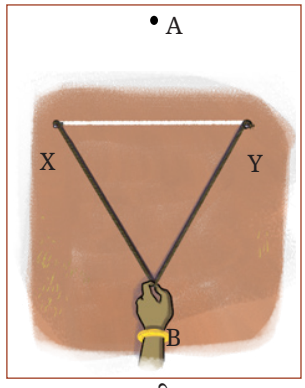
दोरीच्या टोकांचे दोन्ही फास X आणि Y वरील खांबांना ताणून बांधा.

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, दोरीचा मध्यबिंदू XY च्या वरच्या बाजूला असा ओढा की दोरीचे दोन्ही बाजूचे भाग पूर्णपणे ताणले जातील. या मध्यबिंदूच्या स्थितीला A असे नाव द्या.




आता त्याचप्रमाणे दोरीचा मध्यबिंदू XY च्या खालील बाजूला आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे असा ओढा की दोरीचे दोन्ही बाजूचे भाग पूर्णपणे ताणले जातील. या मध्यबिंदूच्या स्थितीला B असे नाव द्या.

AB हा अपेक्षित असलेला लंबदुभाजक आहे.




आकृती 6.4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

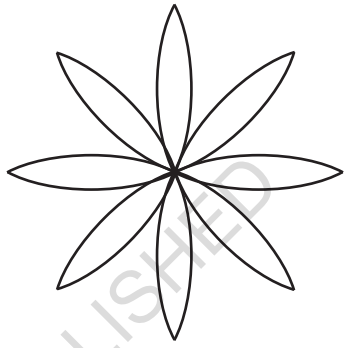
## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. आकृती 6.4 मध्ये AB हा लंबदुभाजक का आहे हे स्पष्ट करा.
2. दोरीचा वापर करुन रेषेवरील दिलेल्या बिंदूवर $90^0$ कोन करणाऱ्या वेगवेगळ्या पध्दती तुम्ही सांगू शकाल का?

गणिती बोल

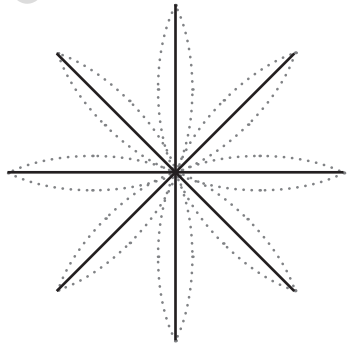
## एका रचनेसाठी कोन दुभागणे (Angle Bisection for a Design)

आपण ही आकृती कशी काढू शकतो?



आकृती 6.5

या आकृतीसाठी आधारभूत रेषा अशा दिसतील.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

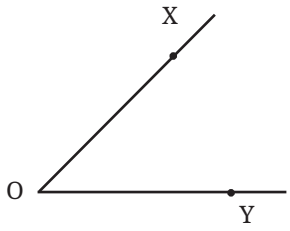
दोन लगतच्या रेषामधील कोन किती आहे?

लगतच्या रेषांच्या प्रत्येक जोडीमधील कोन समान असणे आवश्यक आहे. $360^0$ चे 8 समान भाग केल्यामुळे, प्रत्येक कोन $45^0$ चा होतो.

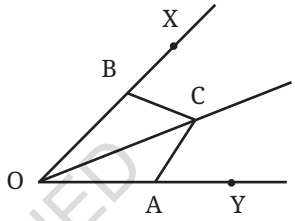
फक्त मोजपट्टी आणि कैवार वापरून आपण $45^0$ चा कोन कसा रचू शकतो?

$90^0$ चा कोन कसा रचायचा हे आपल्याला माहित आहे. जर आपण त्याचे दोन समान भाग करू शकलो, किंवा त्याला दुभागू शकलो, तर आपल्याला $45^0$ चा कोन मिळतो.

आता आपण कोणताही कोन दुभागण्याची एक सामान्य पध्दत अभ्यासूया. ∠XOY हा कोन विचारात घ्या.




जर आपण आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन एकरूप त्रिकोण ΔOBC आणि ΔOAC काढू शकलो, तर आपण तो कोन दुभागू शकतो. मग ∠BOC = ∠AOC होईल.

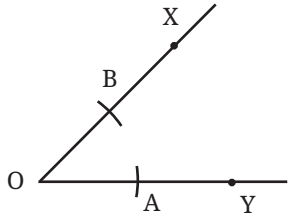



? कोन दिलेला असताना आपण हे एकरुप त्रिकोण कसे तयार करु शकतो?

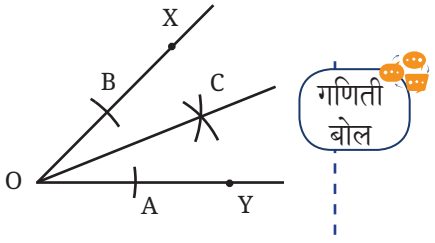
जर A आणि B असे चिन्हांकित केले की OA = OB, आणि जर C बिंदू असा निवडला की, BC=AC, तर बा.बा.बा. (SSS) कसोटीनुसार, ΔOBC ≅ ΔOAC म्हणून आपण खालीलप्रमाणे कोनदुभाजक काढू शकतो.

## कोन दुभागण्यासाठी पायऱ्या (Steps for Angle Bisection)

1. OA = OB होतील अशा प्रकारे A आणि B बिंदू चिन्हांकित करा.




2. पुरेशी लांब अशी समान त्रिज्या निवडून A आणि B पासून कंस काढा. त्या कंसांच्या छेदन बिंदूला C नाव द्या.
3. OC ही रेषा ∠AOB ला दुभागते.

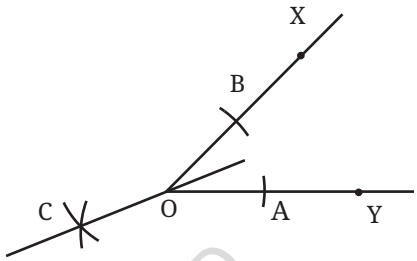



@KRTS NOT TO BE REPUBLISHED

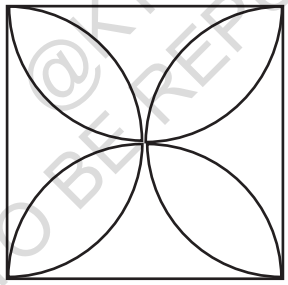
म्हणून तर प्रथम $90^0$ चा कोन रचून नंतर त्याचे दुभाजक काढून $45^0$ कोन रचला जाऊ शकतो.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. किमान 4 वेगवेगळे कोन तयार करा. त्यांचे दुभाजक काढा.
2. आकृती 6.5 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे 8-पाकळ्यांची आकृती रचा.
3. कोन दुभाजकांच्या पायरी-2 मध्ये, आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे जर समान त्रिज्येचे कंस दुसऱ्या बाजूला काढले, तर रेषा OC ही कोन दुभाजक होईल का? हे रचनेद्वारे तपासा आणि नंतर आपल्या उत्तराचे समर्थन करा.




4. कोन दुभाजक वापरून इतर कोणते कोन रचले जाऊ शकतात? तुम्ही $65.5^0$ चा कोन तयार करू शकता का?
5. दोरीचा वापर करून कोन दुभाजक काढण्याची एक पध्दत सुचवा.
6. खालील आकृतीची रचना करा.

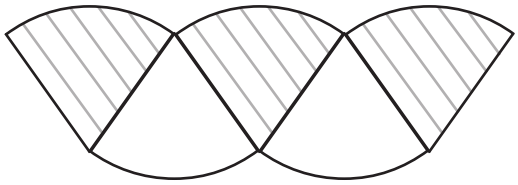


दिलेल्या चौरसात पाकळ्या कमाल संभाव्य आकारमानाच्या कशा बनवाव्या?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

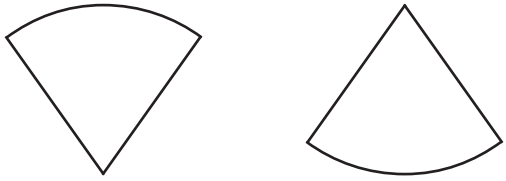
## पुनरावर्तीत एकक आणि पुनरावर्तीत कोन (Repeating Units and Repeating Angles)

खालील आकृतीची रचना करा.



आकृती 6.6

या आकृतीत, एकच एकक स्वत:ची पुनरावृत्ती करत आहे. ही आकृती रचण्यासाठी, आपल्याला त्याच एककाच्या दोन वेगवेगळ्या दिशांमधील तंतोतंत नकल बनविण्याची गरज आहे.

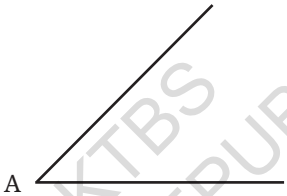


तंतोतंत नकल बनविण्यासाठी, दोन्ही एककांच्या भूजांची लांबी आणि भुजांमधील कोन समान असले पाहिजेत. आपण कैवारचा वापर करून समान लांबीची खात्री करू शकतो, पण समान कोन कसे सुनिश्चित करायचे?

चला, दिलेल्या कोनाची तंतोतंत प्रतिकृती बनविण्यासाठी एक पध्दत विकसित करूया.

? एक कोन काढा. फक्त मोजपट्टी आणि कंपास वापरून या कोनाची एक नकल करा.

गणिती बोल

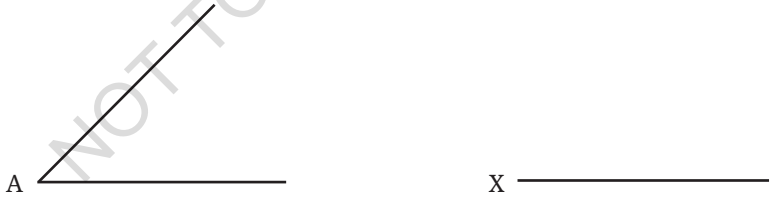



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

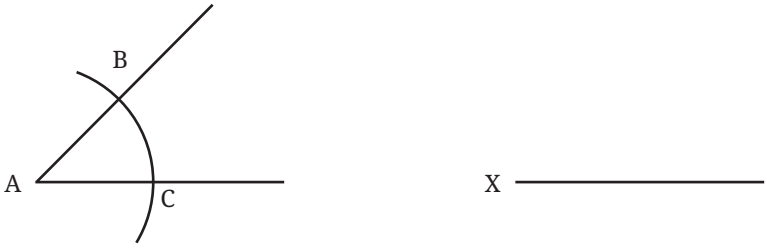
तुम्ही तुमची स्वत:ची पध्दत विकसित केली असेल. येथे एक सोपा दृष्टिकोन आहे.

## दिलेल्या कोनाच्या मापाचा समान कोन रचणे

1.



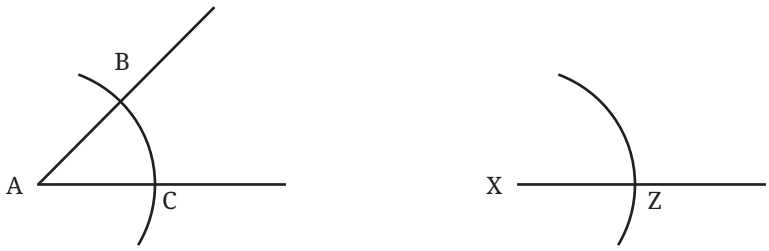

2.




A वरुन चाप काढा.

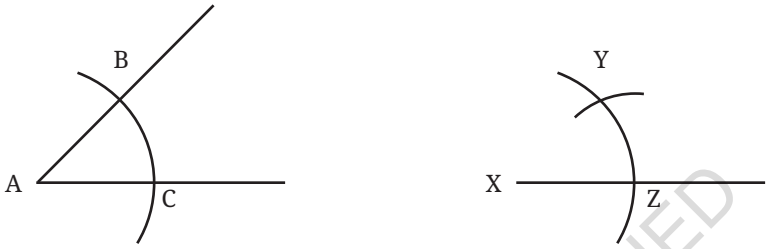
यामुळे आपल्याला समद्विभूज $\Delta ABC$ तयार करणारे तीन बिंदू मिळतात.

3.




X पासून समान त्रिज्येचा एक कंस काढा.

4.




कैवार वापरून BC मोजा. YZ = BC मिळविण्यासाठी Z वरून एक कंस काढा.

5.

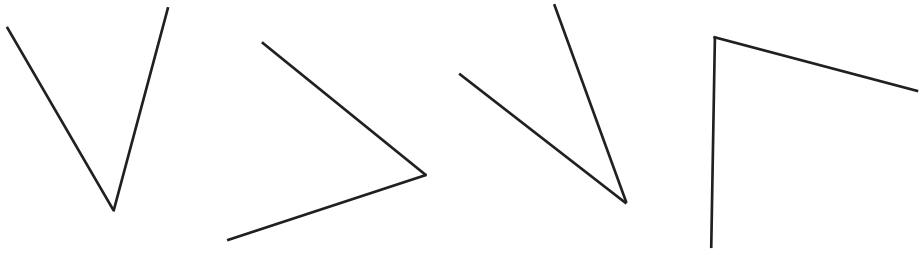



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एकरुपतेच्या बा.बा.बा. (SSS) कसोटीनुसार, $\Delta ABC$ हा $\Delta XYZ$ शी एकरूप आहे. म्हणून $\angle A = \angle X$

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. कोणतेही माप न घेता कमीतकमी 4 विविध कोनांची वेगवेगळ्या दिशांमध्ये रचना करा. तुमच्या वहीत या सर्व कोनांची नकल करा.



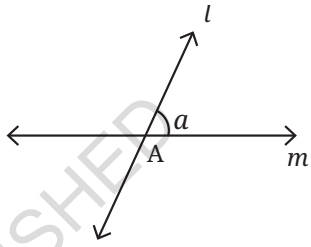
2. आकृती 6.6 ची रचना करा.

एखाद्या कोनाची तंतोतंत नकल करण्याची ही पध्दत, फक्त मोजपट्टी आणि कैवार वापरुन समांतर रेषांची रचना करताना, एका महत्वाच्या टप्यावर उपयोगात येते.

## दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढणे (Construction of a Line Parallel to the Given Line)

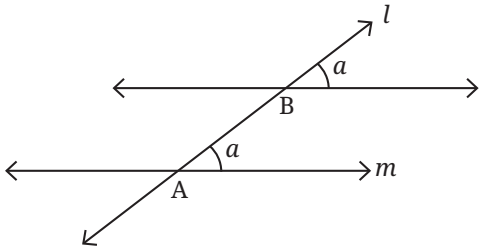
स्मरण करा, मोजपट्टी आणि त्रिकोणी गुण्या वापरून रचना करताना आपण समांतर रेषा मिळविण्यासाठी समान संगत कोन काढले होते.

? एका रेषेला समांतर रेषा काढण्यासाठी या कल्पनेची अंमलबजावणी आपल्याला कशी करता येईल.



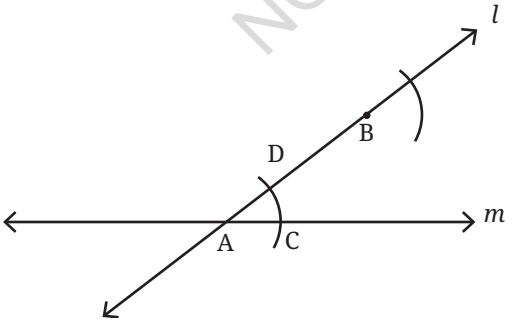
आकृती 6.7

समजा m ही एक रेषा आहे, तिला आपल्याला समांतर रेषा काढायची आहे. आपण एक रेषा $l$ काढू जी m ला a बिंदूत छेदते, रेषा $l$ ही रेषा m साठी आणि आपण m ला समांतर काढलेल्या रेषेसाठी छेदिका असेल.

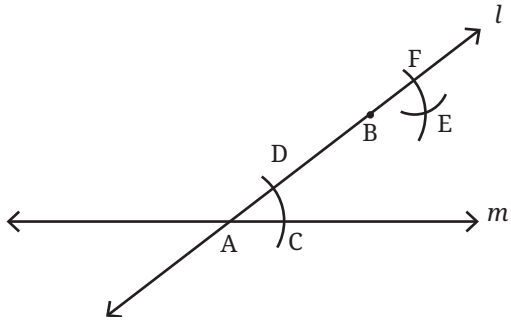



रेषा $l$ वर एक बिंदू B निवडू, ज्यामधून आपल्याला समांतर रेषा काढायची आहे. या समांतर रेषेने आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, समान संगत कोन तयार केले पाहिजे, हे m आणि $l$ मधील समान कोनांची रचना करुन केले जाऊ शकते.

येथे ही क्रिया करण्यासाठी टप्प्याटप्याने प्रक्रिया दिलेली आहे.

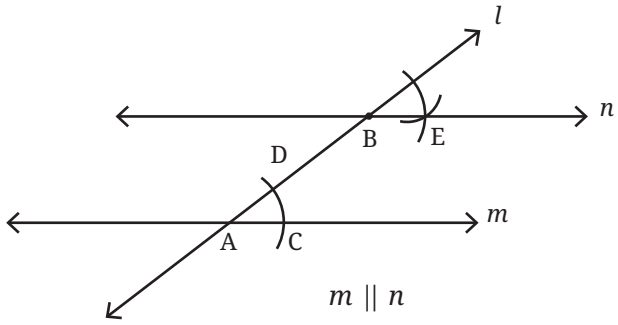


आकृती 6.8
A आणि B पासून समान त्रिज्येचे चाप काढा.



आकृती 6.9
CD लांबीचे माप घेऊन F वरुन चाप काढा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

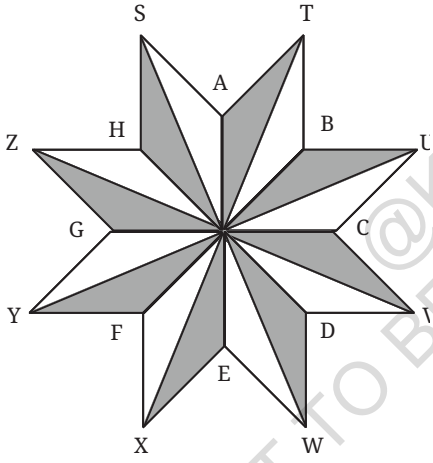


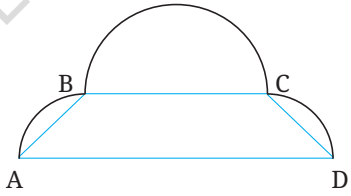

आकृती 6.10

आकृती 6.7 ते 6.10 या आकृत्या दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढण्याच्या पद्धतीचे विवरण करतात.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. वेगवेगळ्या दिशामध्ये समांतर रेषांच्या 4 जोड्या तयार करा.
2. खालील आकृतीची रचना करा.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## कमानीची रचना (Arch Designs)

### त्रिदल कमान (Trefoil Arch)

तुम्ही अशा प्रकारची सुंदर कमान पाहिली आहे का?



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=28374748

दिवान-ए-आम, लाल किल्ला, दिल्ली



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Central_Park_A.jpg

सेंट्रल पार्क, न्यूयॉर्क शहरामधील

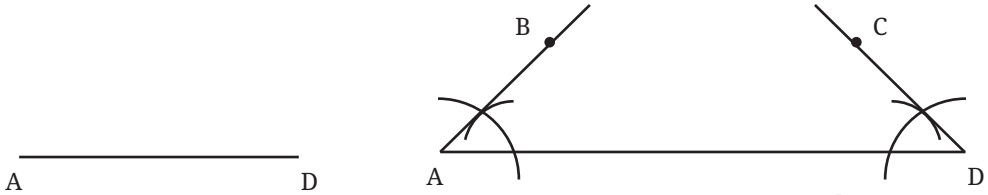
? त्यांनी या कमानी कशा बनविल्या?

पहिली पायरी म्हणजे कागद किंवा दगड यांसारख्या सपाट पृष्ठभागावर या रेखाटता येतात.

? कागदाच्या तुकड्यावर या कमानीचा आकार तयार करा.

चला या आकृतीला कोणत्या आधारभूत रेषा लागतील याचा विचार करूया.

सममितीसाठी, आपल्याकडे AB=CD असणे ∠BAD = ∠CDA असणे आवश्यक आहेत. तुम्ही या आधारभूत रेषा कशा रचाल?




A आणि D येथे समान कोन रचा.

AB=CD होईल असे B आणि C चिन्हांकित करा.

? या आधारभूत रेषांचा वापर करून कमानी रचा, जेणेकरून कमानी अधिक सुंदर आणि आकर्षक दिसतील.

## टोकदार कमान (A Pointed Arch)

काही कमानी अशा दिसतात.



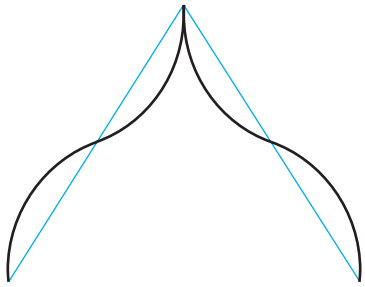
https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Diwan-i-Aam,_Red_Fort,_Delhi_-_2.jpg

दिवान-ए-आम, लाल किल्ला, दिल्ली

@ITBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आपण या आकाराची रचना कशी करू शकतो?

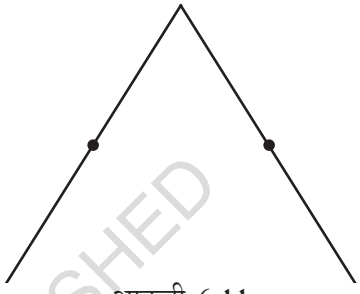
ही कमान काढण्यासाठी तुम्ही कोणत्या आधारभूत रेषा वापराल?



इयत्ता सहावीच्या पाठ्य पुस्तकातील 'नागमोडी तरंग' आठवा.

आधारभूत रेषा म्हणजे समान लांबीचे केवळ दोन रेषाखंड आहेत.

? जर त्यांचे मध्यबिंदू चिन्हांकित केले तर तुम्ही टोकदार कमान रचू शकाल का?



आकृती 6.11

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

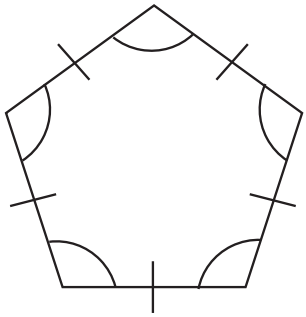
1. आकृती 6.11 मध्ये दाखविलेल्या सहाय्यक रेषांचा वापर करुन एक टोकदार कमान रचा. कंसाची त्रिज्या बदलून विविध कमानी रचा.
2. तुमचे स्वत:चे कमानीचे नक्षीकाम तयार करा.

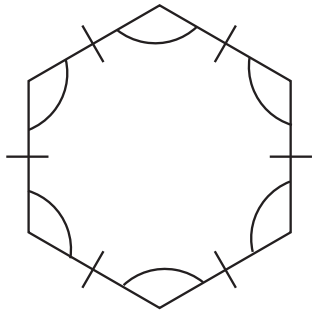
## नियमित षटकोन (Regular Hexagons)

नियमित बहुभुजाकृतीला समान बाजू आणि समान कोन असतात हे आठवा. 3 बाजू असलेली नियमित बहुभुजाकृती ही समभूज त्रिकोण असते आणि 4 बाजू असलेली नियमित बहुभुजाकृती ही चौरस असते. आपण अशा आकृत्या यापूर्वी रचल्या आहेत.

? आपण नियमित पंचकोन (5-बाजूंची आकृती) आणि नियमित षटकोन (6-बाजूंची आकृती) कशी रचू शकतो? सुरुवात करण्यासाठी समान बाजूच्या लांबीचा पंचकोन आणि समान बाजूच्या लांबीचा षटकोन तयार करण्याचा प्रयत्न करा.

प्रयत्न करा



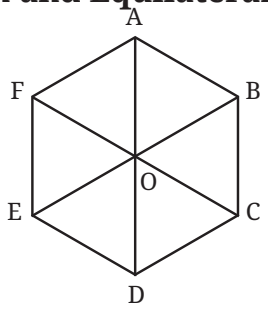


नियमित पंचकोन तयार करण्यासाठी आपल्याला त्रिकोण आणि पंचकोन यांचे आकलन उत्तम असायला हवे. तथापि नियमित षटकोन तयार करणे आपल्या आवाक्यात आहे!

? आपण नियमित षटकोनाचे लहान तुकड्यांमध्ये विभाजन करू शक्तो का?

**नियमित षटकोन आणि समभूज त्रिकोण (Regular Hexagon and Equilateral Triangles)**

नियमित षटकोनाचे समोरा समोरील बिंदू जोडल्यास काय होते? नियमित षटकोनाला समान बाजू आणि समान कोन असल्याने आपल्याला शेजारी दिलेली आकृती मिळेल अशी अपेक्षा करू शकतो का?



आकृती 6.12

या आकृतीतील सर्व त्रिकोण समभूज असतील का?

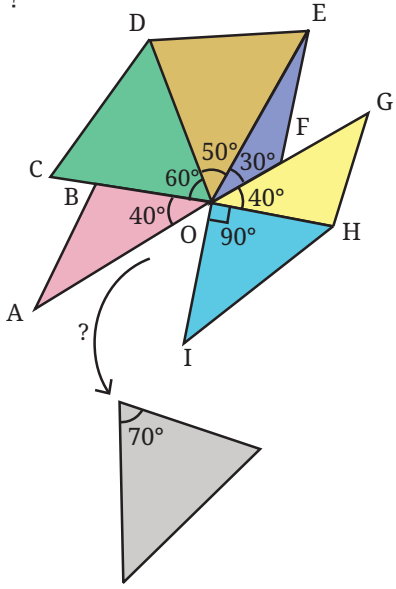
या प्रश्नांची उत्तरे देण्यासाठी, आपण आपला दृष्टीकोन उलट करुया.

? आकृती 6.12 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, सहा समभूज त्रिकोण एकत्र ठेवता येतील का? जर होय, तर याचा परिणाम नियमित षटकोनात होईल का?

जर सहा एकरूप समभूज त्रिकोण आकृती 6.12 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ठेवता आले तर परिणामी षटकोनाच्या बाजू समान असतील आणि त्यांचे कोन $60^0+60^0= 120^0$ (कसे?). त्यामुळे केंद्राभोवती सहा एकरूप समभूज त्रिकोण एकमेकांवर न येता आणि कोणतीही पोकळी न सोडता बसू शकतात की नाही हे आपल्याला खऱ्या अर्थाने तपासायचे आहे.

एका बिंदूवरील संपूर्ण कोन $360^0$ मानून आपण अंशाची व्याख्या केली आहे. त्यामुळे केंद्राभोवतीचे सर्व कोन मिळविण्यास $360^0$ इतके असावेत.

? या आकृतीचा विचार करा. $70^0$ चा कोन पोकळीत सामावतो का?




∠AOI किती आहे? आपल्याला मिळालेले आहे की,

40° + 60° + 50° + 30° + 40° + 90° + पोकळीतील कोन = 360°.

$70^0$ चा कोन सामावतो की नाही हे निश्चित करण्यासाठी याचा वापर करा.

यावरून, जर असे कोन असतील ज्यांची बेरीज $360^0$ आहे, तर त्यांचे शिरोबिंदू एका बिंदूवर अशा प्रकारे जोडले जाऊ शकतात.

(a) कोन एकमेकांवर येत नाहीत, आणि

(b) ते बिंदूभोवतीची जागा पूर्णपणे व्यापतात.

NOT TO BE REPUBLISHED © NCERT

समभूज त्रिकोणातील प्रत्येक कोन $60^0$ चा असल्याने असे सहा कोन मिळून $360^0$ होतात. म्हणून आकृती 6.12 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे सहा एकरूप त्रिकोण मांडले जाऊ शकतात.

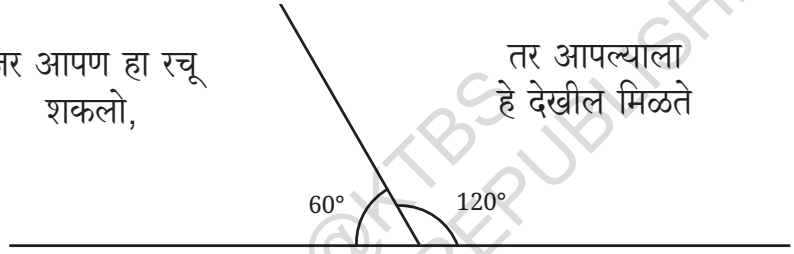
? आकृती 6.12 मध्ये तुम्ही AOD, BOE आणि COF या सरळ रेषा आहेत हे स्पष्ट करू शकता का?

? मोजपट्टी आणि कैवारचा वापर करुन 4 सें.मी. बाजू असलेला नियमित षटकोन रचा.

आपण मोजपट्टी आणि कैवारचा वापर करून $120^0$ चा कोन रचू शकलो तर आपण अधिक सोयीस्करपणे नियमित षटकोन रचू शकतो.

? हे आपण कसे करु शकतो?

आपण $60^0$ चा कोन रचू शकलो तर हे कसे करता येईल?




@MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

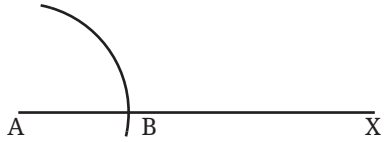
**$60^0$ च्या कोनाची रचना (Construction of a 60° angle)**

? आपण $60^0$ चा कोन कसा रचू शकतो?

जर आपण एक समभूज त्रिकोण रचला, तर आपल्याला $60^0$ कोन मिळतो! यासाठी आपण खालील पायऱ्या वापरु शकतो.

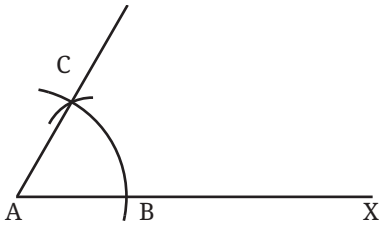
समजा आपल्याला रेषाखंड AX वर A बिंदूतून $60^0$ चा कोन हवा आहे.

**पायरी 1**




केंद्र A कल्पून कोणत्याही त्रिज्येने A बिंदूतून एक चाप काढा.

**पायरी-2**

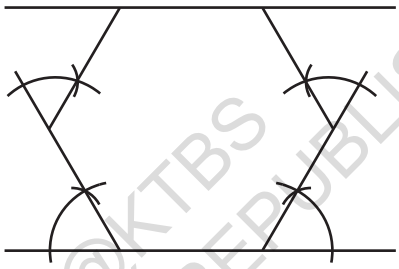



त्याच त्रिज्येने, B बिंदुवरुन पहिल्या कंसाला छेदणारा दुसरा कंस काढा. जेथे हे कंस एकमेकांना छेदतात त्या बिंदूला C नाव द्या.

आपल्याला, $\angle CAX = 60^0$ मिळतो.

? $\angle CAX = 60^0$ का आहे? येथे समभूज त्रिकोण आहे का?

या कल्पनांचा वापर करून आपण एक नियमित षटकोन रचू शकतो.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? 5 सें.मी. बाजूची लांबी असलेला एक नियमित षटकोन रचा.

## संबंधित रचना (Related Constructions)

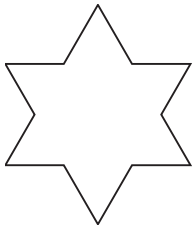
**$30^0$ आणि $15^0$ कोनांची रचना करणे. (Construction of 30° and 15° angles)**

? तुम्ही $30^0$ आणि $15^0$ कोनांची रचना कशी कराल?

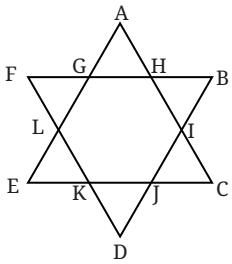
**6 - टोकांचा तारा**

गणिती बोल

? खालील 6 टोकांचा तारा रचा. लक्षात घ्या की, यात परिभ्रमणीय सममिती आहे.



**सूचना :**



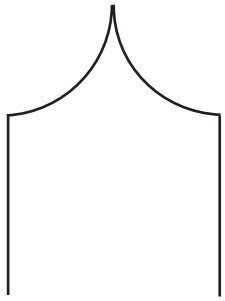

तुम्हाला येथे षटकोन दिसतो का?

? ताऱ्याची 6 टोके बनविणारे सहा त्रिकोण ΔAGH, ΔBHI, ΔCIJ, ΔDJK, ΔELK, ΔFLG - समभूज आहेत का? का?

(**सूचना** : कोन शोधा.)

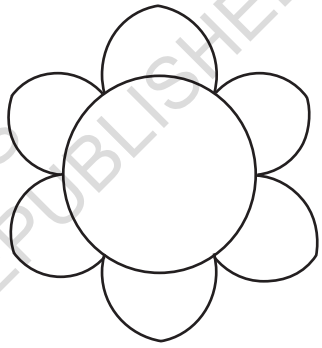
## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. खालील आकृत्या काढा.



(a)

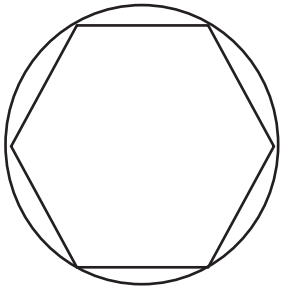
अंतर्वक्र कंस



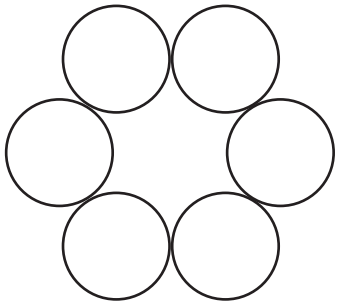
(b)

या आकृतीबद्दलची गंमत म्हणजे ही आकृती फक्त कैवार वापरून सुद्धा काढता येते! तुम्ही ते करू शकता का?

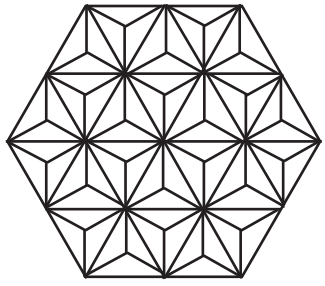
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



(c)



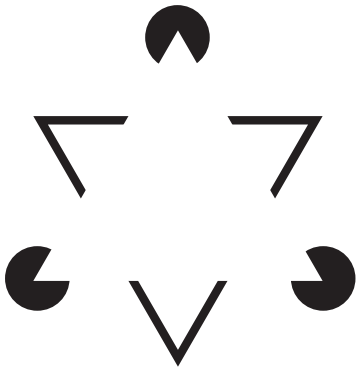
(d)

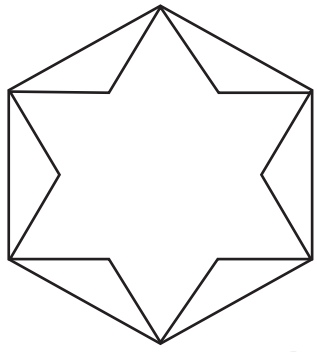


(e)

2. दृष्टिभ्रम : खालील आकृतीमध्ये तुम्हाला काही रंजक गोष्ट दिसते का? हे कसे घडते? ही आकृती तुमच्या वहीत पुन्हा काढा.

3. ही आकृती रचा.





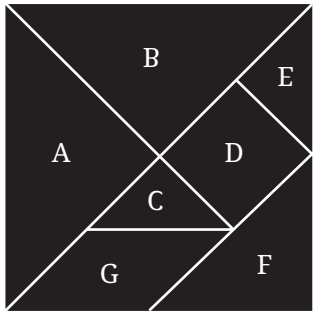
(**सूचना** : या आकृतीमधील कोन शोधा)

4. एक रेषा $l$ काढा आणि रेषेच्या बाहेर कोठेही एक बिंदू घ्या. दिलेल्या $l$ रेषेला P बिंदूमधून लंब काढा.
(**सूचना** : $l$ रेषेवर असा एक रेषाखंड शोधा, ज्याचा लंबदुभाजक P मधून जातो.)

प्रयत्न करा

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

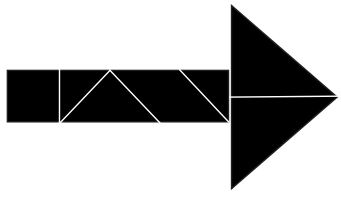
## 6.2 फरशी जोडणी (Tiling)




टॅनग्रॅम (सात तुकड्यांचे कोडे) हे चीनमध्ये विकसित केलेले कोडे आहे. बाजूला दाखविल्याप्रमाणे एका चौरसाचे 7 तुकड्यांमध्ये विभाजन करून ते बनविलेले असते.

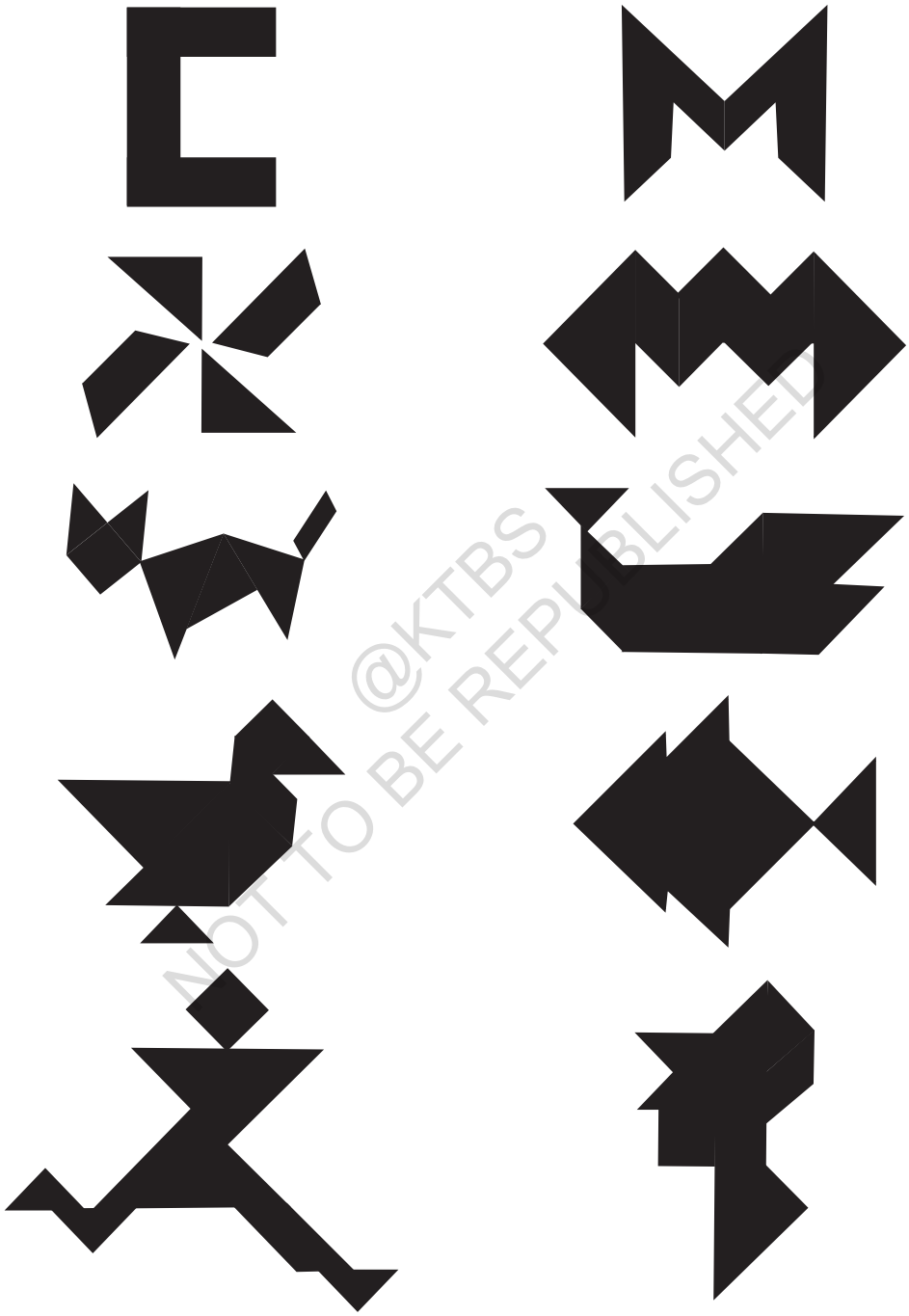
पुढील समस्यांसाठी, आपल्याला या 7 टॅनग्रॅम तुकड्यांची आवश्यकता असेल. हे (तुकडे) पुस्तकाच्या शेवटी दिलेले आहेत. किंवा आकृतीकडे पाहून, तुम्ही पुठ्ठ्याचे तुकडे कापून बनवू शकता.

आपण टॅनग्रॅमचे तुकडे पुन्हा व्यवस्थित जोडून मनोरंजक आकार बनवू शकतो. येथे बाण आहे.



## शोधा पाहू. (Figure it Out)

पुढीलपैकी प्रत्येक आकार बनवण्यासाठी टॅनग्रॅमचे तुकडे कसे पुन्हा व्यवस्थित जोडले जाऊ शकतात?

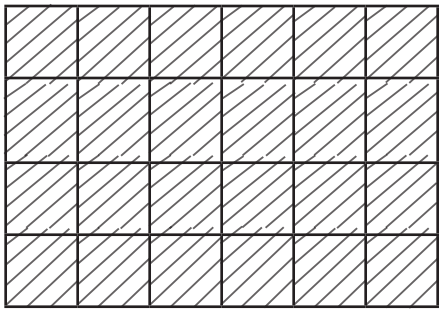


गणिती बोल

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विविध आकारांच्या फरशांचा वापर करून, कोणतीही पोकळी न ठेवता किंवा एकमेकांवर न आणता अच्छादलेल्या ठराविक क्षेत्राला फरशी जोडणी (Tiling) असे म्हणतात.

एकक चौरसांनी बनलेली एक आयताकृती चौकट विचारात घ्या.

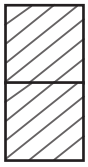


याला आपण 4 × 6 चौकट म्हणतो, कारण यात 4 पंक्ती आणि 6 स्तंभ आहेत.

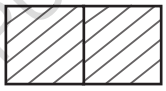
गणिती बोल

? 4×6 ची चौकट 2×1 फरशीच्या अनेक प्रती वापरून फरशी जोडणी करता येते का?

आपल्याला 2×1 फरशा फिरविण्याची आणि वापरण्याची परवानगी आहे.

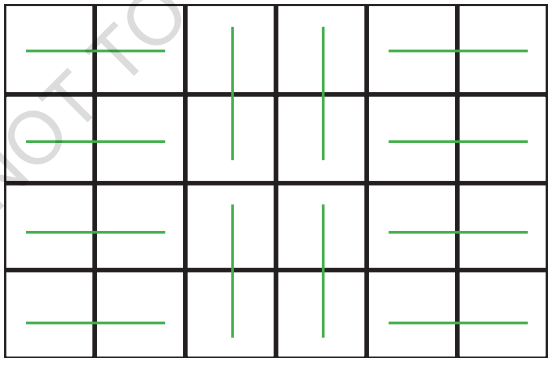


उभी फरशी



आडवी फरशी

येथे एक मार्ग दिला आहे.



साहजिकच ही एकाच प्रकारची जोडणी शक्य नाही.

? 4×7 ची चौकट 2×1 फरशा वापरून फरशी जोडणी करता येतो का?

? 5×7 च्या चौकटीबाबत काय?

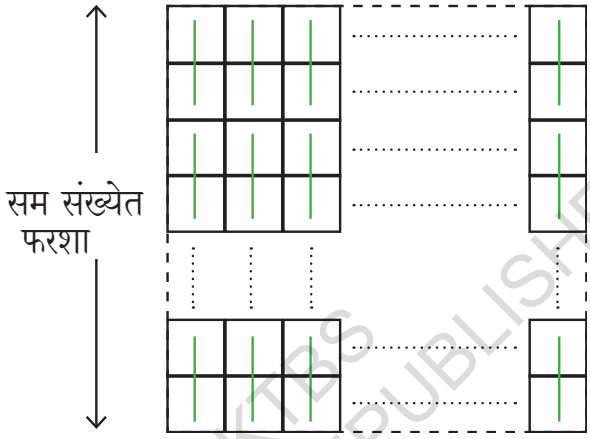
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2×1 फरशा वापरून 5×7 ची चौकट फरशी जोडणी करणे शक्य नाही. हे पाहण्यासाठी लक्षात घ्या की, चौकटीमध्ये 35 एकक चौरस आहेत. प्रत्येक फरशी नेमकी 2 एकक चौरस असते.

गणिती बोल

? स्पष्टीकरण पूर्ण करा.

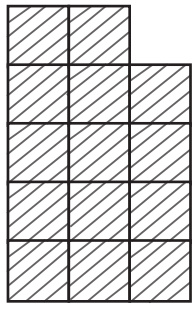
? जर m आणि n दोन्ही विषम संख्या असतील तर m×n चौकट तयार करण्यासाठी 2×1 च्या फरशा बसविता येतील का? कारणे द्या. या घटनेसाठी एक सामान्य पध्दत म्हणजे प्रत्येक स्तंभ हा उभ्या फरशीने झाकला जातो. हे शक्य आहे कारण येथील पक्तीची संख्या सम आहे.




? जर $m$ आणि $n$ यापैकी सम एक आणि दुसरी विषम असेल तर $m \times n$ फरशीची $2 \times 1$ चौकट शक्य आहे का? जर हो असेल तर, ही फरशी बनविण्यासाठीची सामान्य पध्दत शोधा.

? जर $m$ आणि $n$ दोन्हीही विषम असतील तर $2 \times 1$ फरशीची $m \times n$ चौकट शक्य आहे का?

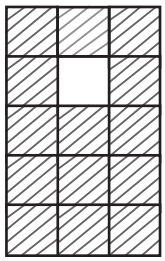
? येथे 5×3 ची चौकट आहे, ज्यातून एक एकक चौरस काढलेला आहे. आता, त्यात एकक चौरसांची सम संख्या आहे. ती 2×1 फरशांनी बसविता येईल का?



गणिती बोल

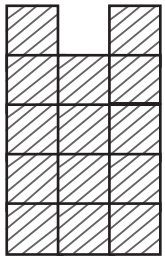
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? खालील जागेत 2×1 फरशा बसविता येतील का?



गणिती बोल

? या बाबत काय वाटते?

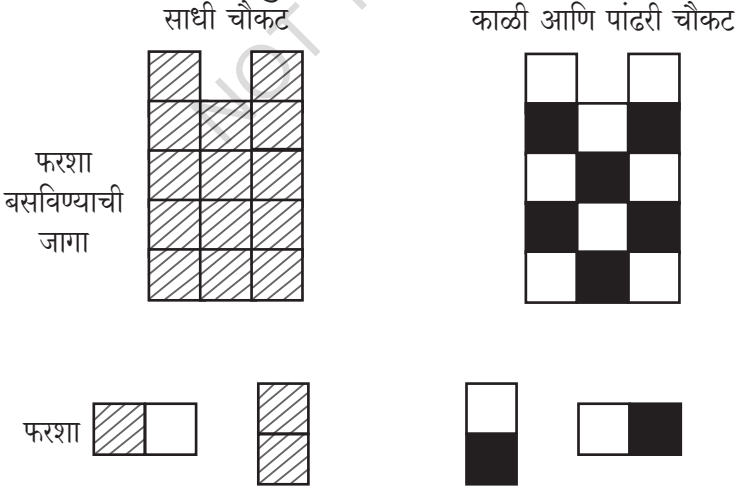


गणिती बोल

आकृती 6.13

? तुम्ही यावर फरशा लावू शकलात का? हे फरशी न लावता येण्यासारखे आहे याची आपल्याला खात्री होईल ती कशी? तुम्ही आणखी एक चौरस शोधू शकता का, जो 5×3 चौकटी मधून काढल्यास, त्याला फरशी बसविणे का शक्य नाही?

या प्रश्नांकडे पाहण्याचा एक मनोरंजक मार्ग आहे. या प्रकारच्या कोणत्याही फरशा लावण्याच्या समस्येसाठी आपण एकक चौरसांना काळा आणि पांढरा रंग देऊन एक समान समस्या तयार करू शकतो. ज्यामुळे काळ्या चौरसांना फक्त पांढरे शेजारी असतील आणि पांढऱ्या चौरसाना फक्त काळे शेजारी असतील. आकृती 6.13 मधील फरशा लावण्याच्या समस्येसाठी, आपल्याला पुढील गोष्टी मिळतात.




आकृती 6.14

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

काळया आणि पांढऱ्या जागेत समस्या अशी आहे की, त्या जागेवर 2×1 काळ्या आणि पांढऱ्या फरशा अशा प्रकारे लावाव्या लागतात की फरशीवरील प्रत्येक काळा चौरस चौकटीच्या काळ्या चौरसावर बसेल आणि प्रत्येक पांढरा चौरस पांढऱ्या चौरसावर बसेल.

? जर साधी चौकट फरशी लावण्यासाठी योग्य असेल, तर काळी आणि पांढरी चौकट फरशी लावण्यासाठी योग्य आहे का?

? जर काळी आणि पांढरी चौकट फरशी लावण्यासाठी योग्य असेल, तर साधी चौकट फरशी लावण्यासाठी योग्य आहे का?

गणिती बोल

या दोन्ही प्रश्नांची उत्तरे 'होय' आहेत, असे दिसून येते.

? आकृती 6.14 मधील काळ्या आणि पांढऱ्या जागेचे क्षेत्र फरशी बसविण्यायोग्य आहे का?

काळ्या आणि पांढऱ्या फरशा वापरुन फरशी जोडणी केलेल्या कोणत्याही जागेत काळ्या फरशा आणि पांढऱ्या फरशांची संख्या समान असणे आवश्यक आहे.

आकृती 6.14 मधील काळ्या आणि पांढऱ्या जागेत 8 पांढरे चौरस आणि 6 काळे चौरस असल्यामुळे, ती कधीही या फरशांनी जोडणी केली जाऊ शकत नाही!

? या कल्पनेचा उपयोग करुन 5×3 चौकटीमधून एक एकक चौरस काढून टाकल्यावर ती फरशी जोडणी करण्यायोग्य नाही हे दाखवणारा दुसरा चौरस शोधा.

गणिती बोल

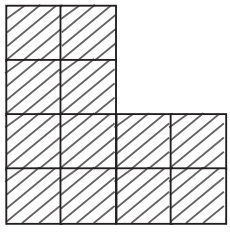
रंग वापरून समस्या अधिक गुंतागुंतीची करुन ती सोडविणे सोपे होते, हे आश्चर्यकारक नाही का? समस्येकडे पाहण्याचा हा किती सर्जनशील मार्ग आहे!

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

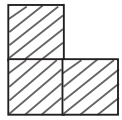
पुढील फरशी जोडणी शक्य आहेत का?

1.

फरशी जोडणी करावयाचे क्षेत्र

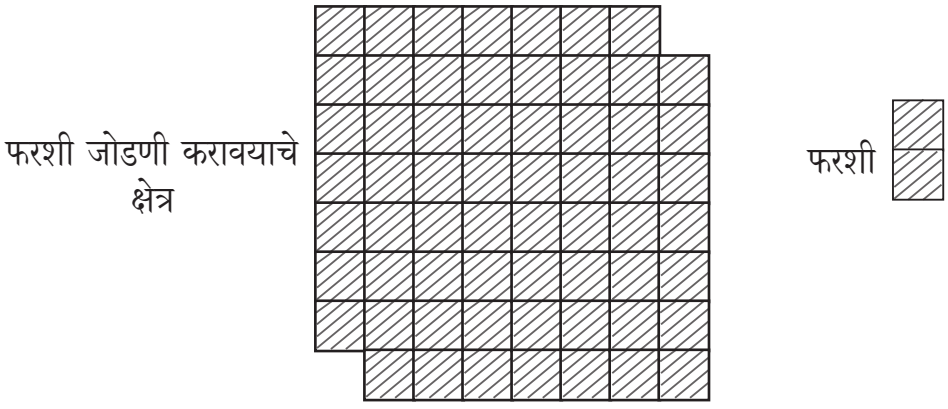


फरशा



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

2.

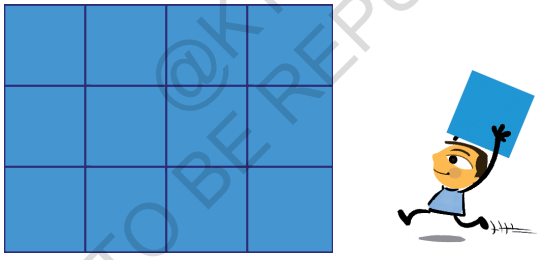



## संपूर्ण प्रतलावर फरशी जोडणी करणे (Tiling the Entire Plane)

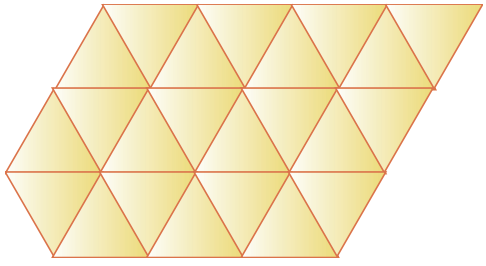
आतापर्यंत आपण एका विशिष्ट क्षेत्राची फरशी जोडणी कशी करायची हे पाहिले, संपूर्ण प्रतलाची फरशी जोडणी करण्याबद्दल काय?

? तुम्ही अशा आकाराचा विचार करू शकता का, ज्याच्या प्रतिकृती वापरुन संपूर्ण प्रतलावर फरशी जोडणी करता येईल?

स्पष्टपणे, हे चौरस घेऊन करता येते.



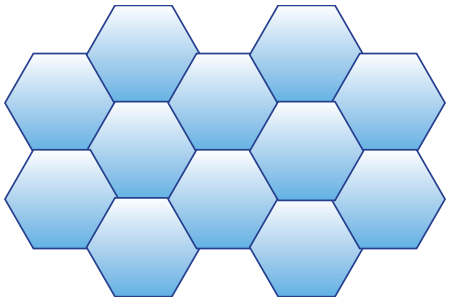
आणखी अशा नियमित बहुभुजाकृती आहेत का, ज्यांनी प्रतल पूर्णपणे झाकता येईल? समभूज त्रिकोणांबद्दल काय?



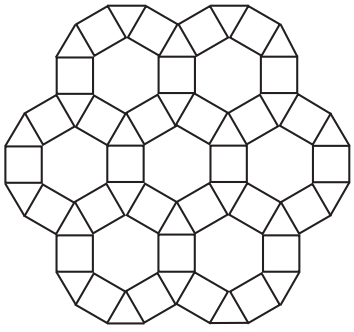
समभूज त्रिकोणांनी केलेली फरशी जोडणी ही आणखी एका नियमित बहुभुजाकृतीने फरशी जोडणी करण्याची शक्यता दर्शविते.

नियमित षटकोनांचा वापर करून देखील प्रतल पूर्णपणे झाकता येते.

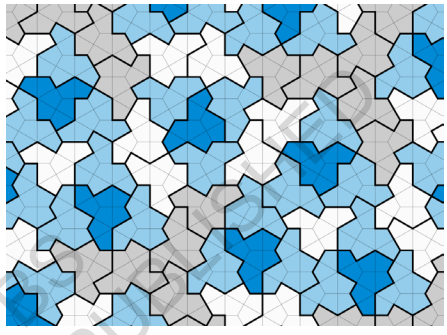
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



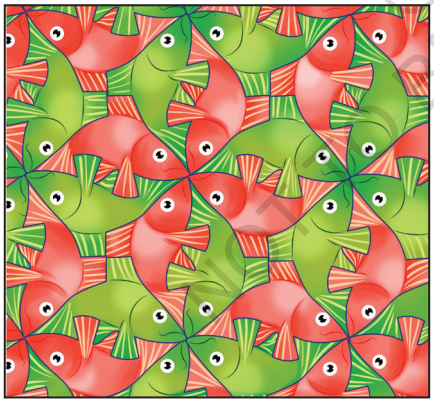
एकापेक्षा जास्त आकार वापरून आणि अनियमित बहुभूजांचा वापर करून देखील प्रतल संपूर्णपणे झाकता येते. महान डच कलाकार एशर (1898-1972) ज्यांच्या कार्याने फरशी जोडणी सारख्या गणितीय संकल्पनांचा शोध घेतला. त्यांनी आकारांनी प्रतल झाकण्याचे सर्जनशील मार्ग शोधून काढले आहेत! येथे काही उदाहरणे आहेत.



(a)



(b)



(c)

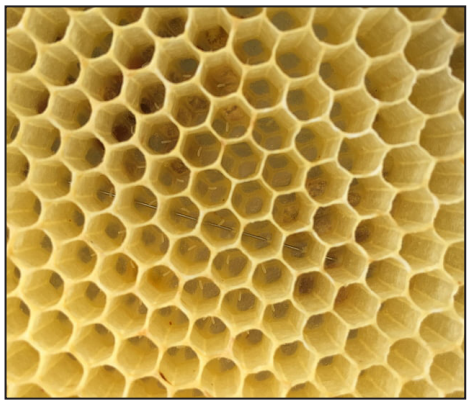


(d)

गणिततज्ञ अजूनही समतल भागावर फरशा बसविण्याचे वेगवेगळे मार्ग शोधत आहेत. फरशा बसविणे (b) 2023 मध्ये नुकतेच सापडले आहे.

तुम्ही तुमच्या दैनंदिन जीवनात फरशी जोडणी पाहिली आहे का? ती बऱ्याचदा इमारतींमध्ये आणि नक्षीकामामध्ये वापरलेली दिसून येते निसर्गातही फरशी जोडणी आढळतात. मधमाशांच्या पोळ्याचा आणि भुंग्यांच्या घरट्यांचा पुढील भाग षटकोनी कोशिकांचा वापर करुन तयार केला जातो!





या कोशिका कीटकांद्वारे त्यांची अंडी, अळ्या आणि कोष सुरक्षित ठेवण्यासाठी तसेच अन्न साठविण्यासाठी वापरल्या जातात. कारण तो भाग फरशी जोडणीने व्यवस्थित बसविलेला असतो, कोणतीही जागा वाया जात नाही.

मधमाशा आणि भुंगे षटकोनी कोशिका कशा बनवू शकतात याबद्दल शास्त्रज्ञांना अजूनही आश्चर्य वाटते. पुढच्या वेळी जेव्हा तुम्ही कोणतीही फरशी जोडणी पाहाल, तेव्हा त्याकडे अधिक लक्ष द्या!

फरशी जोडणी भूमितीमधील संशोधनाच्या सर्वात रोमांचक आणि सक्रीय क्षेत्रांपैकी एक आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## सारांश
## SUMMARY

- एखाद्या रेषाखंडाचे किंवा कोणत्याही भौमितिक राशीचे दोन समान भागांमध्ये विभाजन करणे याला **दुभागणे** म्हणतात.
- दिलेल्या रेषाखंडाच्या दोन अंतिम बिंदूंपासून समान अंतरावर असलेला कोणताही बिंदू त्याच्या **लंबदुभाजकावर** असतो. या गुणधर्माचा उपयोग मोजपट्टी आणि कैवार वापरून लंबदुभाजक काढण्यासाठी केला जाऊ शकतो.
- लंबदुभाजक काढण्याच्या पद्धतीत बदल करून, केवळ मोजपट्टी आणि कैवार वापरून रेषेवरील कोणत्याही बिंदूतून $90^0$ चा कोन काढता येतो.
- त्रिकोणांचे एकरूपता गुणधर्म वापरून कोन दुभागता येतात आणि त्यांची नकल करता येते.
- मोजपट्टी आणि कैवार वापरुन समभूज त्रिकोण रचून $60^0$ चा कोन रचता येतो.
- आकारांचा एक संच वापरून, कोणतीही जागा न सोडता किंवा एकमेकांवर न ठेवता, एखाद्या प्रदेशाला आच्छादित करण्याला **फरशी जोडणी** म्हणतात.

# 7 अज्ञाताचा शोध
# (FINDING THE UNKNOWN)

B6D2N2

## 7.1 अज्ञात शोधणे (Find the Unknowns)

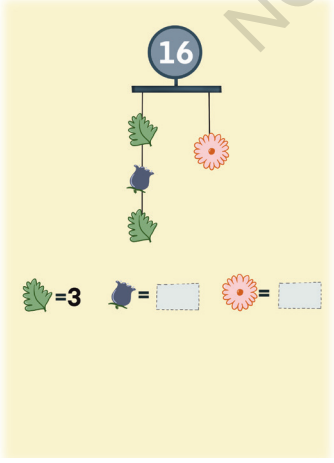
### अज्ञात वजन (Unknown Weights)

आपल्याकडे एक वजनकाटा आहे जो खालीलप्रमाणे कार्य करतो. संख्या वजनाचे समान एकक दर्शवितात.

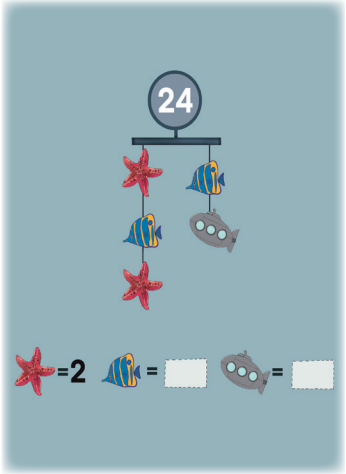



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

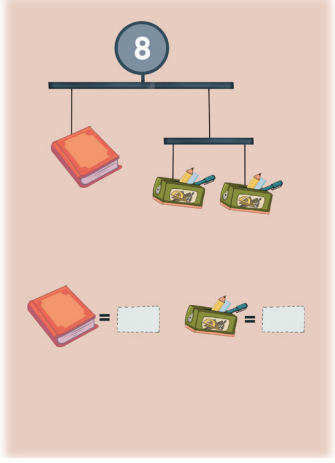
? खालील उदाहरणांमध्ये अज्ञात वजने शोधा.



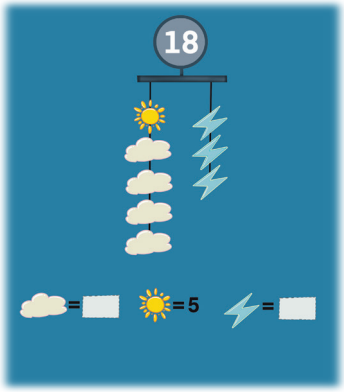

आकृती 7.1



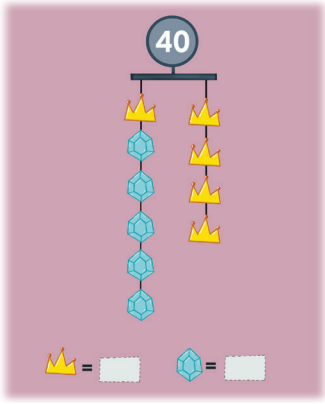

आकृती 7.2



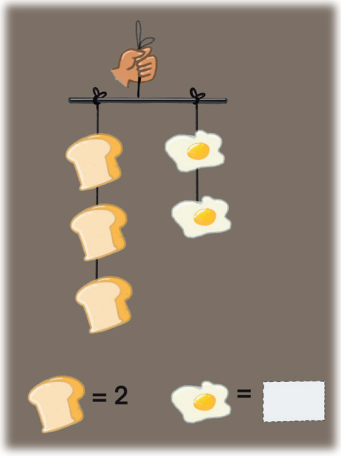

आकृती 7.3



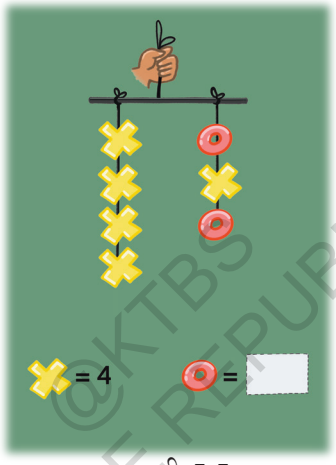

आकृती 7.4



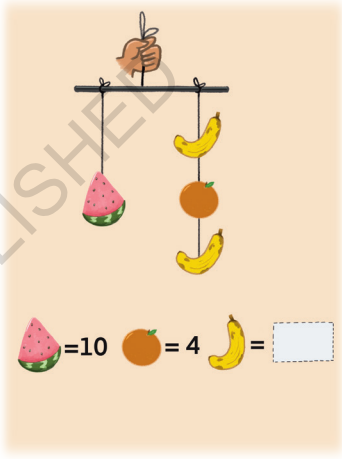

आकृती 7.5




आकृती 7.6




आकृती 7.7

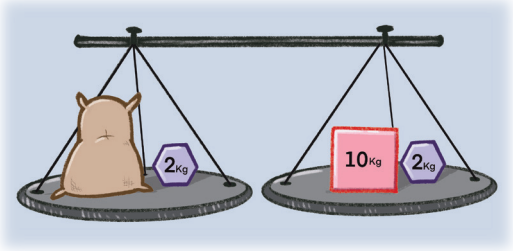



आकृती 7.8

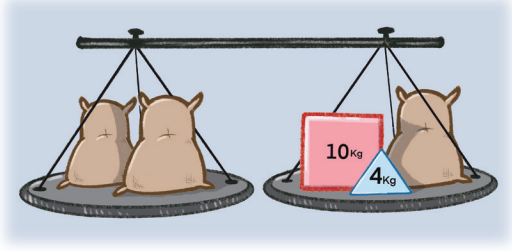
? उत्तरांची तुमच्या वर्गमित्रांशी चर्चा करा. तुमचे उत्तर बरोबर का आहे असे तुम्हाला वाटते, याची कारणे द्या.

गणिती बोल

? खालील प्रकरणांमध्ये पोत्याचे अज्ञात वजन शोधा. आकृती 7.10 मध्ये सर्व पोत्यांचे वजन सारखेच आहे.



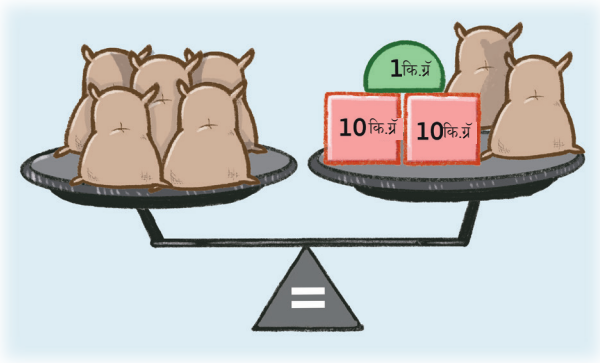

आकृती 7.9




आकृती 7.10

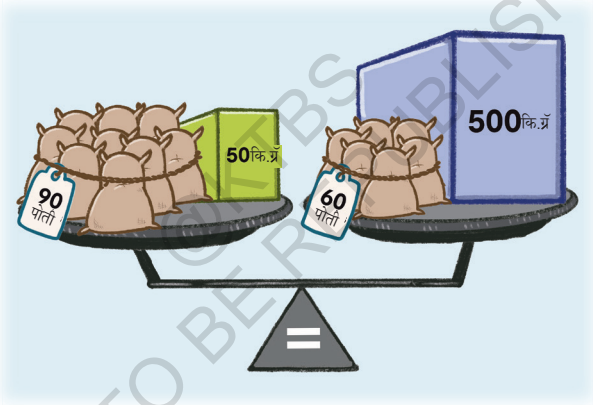
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(**सूचना** : जर आपण दोन्ही पारड्यांमधून समान वजन काढले, तरीही तराजू संतुलित राहील का? आकृती 7.10 साठी प्रत्येक पारड्यातून एक पोते काढा)




आकृती 7.11

(**सूचना** : तुम्ही वस्तू अशाप्रकारे काढू शकता का? की पोती फक्त एकाच पारड्यात राहतील?)




आकृती 7.12

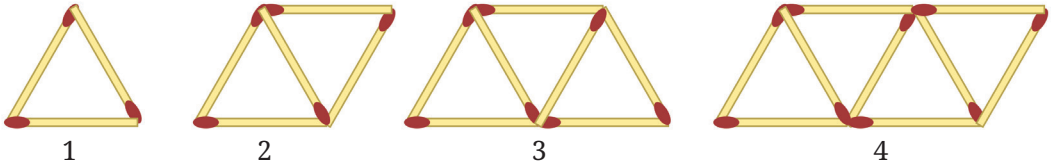
© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

**शिक्षकांसाठी सूचना** : तुमच्या विद्यार्थ्यांना वेगवेगळ्या रणनीती आणि पध्दती वापरून या समस्यांची उत्तरे शोधण्यासाठी प्रोत्साहित करा आणि त्यांना त्यांच्या पध्दतींची तुलना करण्यास सांगा.

चला एका वेगळ्या मांडणीमध्ये अज्ञात मूल्य शोधूया.

## माचिसच्या (काडीपेटी) काड्यांचा नमुना (Matchstick Pattern)

माचिसच्या काड्यांच्या मांडणीचा हा क्रम विचारात घ्या.



1 2 3 4

स्मरण करा की, आपण या क्रमाचा अभ्यास मागील प्रकरणात केला आहे.

आकृतीमध्ये माचिसच्या काड्यांच्या पहिल्या 4 रचना त्यांच्या क्रमातील स्थान क्रमांकासह दाखविल्या आहेत.

? जास्मिनने या क्रमात येणारी एक काड्यांची रचना करायचे ठरविले आहे ज्यासाठी बरोबर 99 काड्या वापरल्या जातात. या रचनेचा क्रमातील स्थान क्रमांक काय असेल?

या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी, प्रत्येक स्थानावरील काड्यांची संख्या माहित असणे उपयुक्त ठरते.

आपण पाहतो की,

स्थान 1 वरील रचनेत $2\times(1) + 1 = 3$ काडया आहेत,
स्थान 2 वरील रचनेत $2\times(2) + 1 = 5$ काडया आहेत,
स्थान 3 वरील रचनेत $2\times(3) + 1 = 7$ काडया आहेत,
आणि याप्रमाणे पुढे.
म्हणून, n च्या स्थानी $2n+1$ काडया राहतील.

जास्मिनच्या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी, आपल्याला n चे असे मूल्य शोधावे लागेल ज्यासाठी $2n+1$ चे मूल्य 99 असेल किंवा,

$$2n + 1 = 99.$$

? $2n + 1 = 99$ असताना, $n$ चे मूल्य काढण्याचे मार्ग तुम्ही शोधू शकता का?

गणिती बोल

? या क्रमात येणारी अशी रचना करणे शक्य आहे का? ज्यासाठी बरोबर 200 काड्या वापरल्या जातील?

दोन बैजिक राशींमधील समानतेच्या विधानाला **समीकरण** म्हणतात. आजकाल, चिन्हे वापरताना आपण समीकरण हे दोन बैजिक राशीमध्ये '=' हे समानतेचे चिन्ह लिहून व्यक्त करतो.

येथे समीकरणांची आणखी कांही उदाहरणे आहेत.

$$3x + 4 = 7,$$

$$20 = y - 3,$$

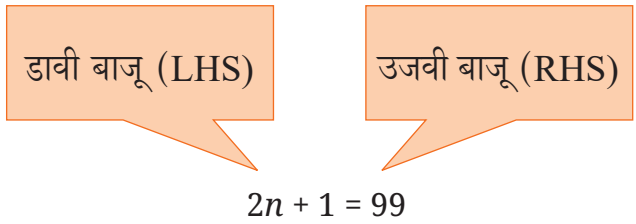
$$\frac{a}{3} = 50,$$

$2z + 4 = 5z - 14$ इत्यादी.

ज्या अक्षरी संख्यांच्या मूल्यांसाठी समानता कायम राहते किंवा ज्यासाठी समीकरणाच्या डाव्या बाजूचे (LHS) मूल्य समीकरणाच्या उजव्या बाजूच्या (RHS) मूल्याइतकेच असते, ती मूल्ये शोधण्याच्या प्रक्रियेला समीकरण सोडविणे म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTES

जसे आपण काड्यांच्या उदाहरणात पाहिले, तसे अज्ञात राशीला अक्षरी पद मानून समीकरण मांडल्यास आपल्याला तिचे मूल्य शोधण्यास मदत होऊ शकते.




? 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, आणि 7.11 वजन काट्याच्या समस्यांसाठी अज्ञात वजनासाठी अक्षरांचा वापर करुन समीकरणे तयार करा.

आकृती 7.6 मधील समस्येसाठी, आपण एका तळलेल्या अंडयाचे वजन e मानू.

पावाचा प्रत्येक तुकडा 2 वजनाचा असल्याने, आपल्याकडे एका बाजूला 2+2+2=6 आणि दुसऱ्या बाजूला e + e आहे. दोन्ही बाजू समान असल्याने आपल्याला पुढीलप्रमाणे समीकरण मिळते :

$$6 = e + e, \text{ किंवा}$$

$$2e = 6.$$

आकृती 7.7 मधील समस्येसाठी, (फुलासारखा आकार) = 4 आहे आणि आपण (डोनेटसारखा आकार) चे वजन y मानू शकतो म्हणून, आपल्याकडे एका बाजूला 16 आणि दुसऱ्या बाजूला 4+ 2y आहेत. अशाप्रकारे, आपल्याला हे समीकरण मिळते,

$$4 + 2y = 16.$$

? तुम्ही तयार केलेली समीकरणे सोडवा आणि तपासा की, तुम्हाला अज्ञात वजनासाठी तीच किंमत मिळते जी तुम्हाला आधी मिळाली होती.

? 5 समीकरणे तयार करा. ती सोडविण्याच्या पध्दती शोधा.

गणिती बोल

## 7.2 पध्दतशीरपणे समीकरणे सोडविणे (Solving Equations Systematically)

मागील भागात तयार केलेली विविध समीकरणे तुम्ही कशी सोडविली? समीकरण सोडविण्याचा एक मार्ग म्हणजे अक्षराच्या जागी वेगवेगळ्या किंमती वापरुन डावी बाजू = उजवी बाजू होते का ते तपासणे. उदाहरणार्थ, 2n+1=99 हे समीकरण घ्या.

जर आपण n = 5 ठेवले. तर आपल्याला डावी बाजू = 2(5)+1=11 मिळते. हे 99 पासून खूप दूर आहे.

आपण n = 10 वापरून पाहू शकतो का? आता डावी बाजू 21 आहे. ती अजूनही 99 शी समान नाही.

आपण n = 30 वापरून पाहू शकतो का? आता डावी बाजू 61 आहे. तीदेखील 99 पेक्षा कमी आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

चला n = 40 वापरून पाहू. डावी बाजू 81 आहे. आपण 99 च्या जवळ जात आहोत. जेव्हा n =50, तेव्हा डावी बाजू 101 आहे. हे थोडे जास्त झाले. जेव्हा n = 49, तेव्हा डावी बाजू 99 आहे! म्हणून,

2n + 1 = 99 या समीकरणाची उकल n = 49 आहे.

? या समीकरणाची दुसरी कोणतीही उकल असू शकते का?

या पध्दतीला चुका आणि शिका पध्दत म्हणतात.

चूका आणि शिका ही पध्दत अकार्यक्षम आहे.

? चूका आणि शिका पध्दत वापरून $5x - 4 = 7$ सोडविण्याचा प्रयत्न करा.

आठवा की वजन काट्याच्या बाबतीत, आपण ''चूका आणि शिका'' पध्दत वापरली नव्हती! कांही गणितांसाठी, उत्तर शोधणे अगदी सरळ होते. इतर कांहींसाठी आपण या तथ्याचा वापर केला की, जेव्हा आपण समतोलीत वजन काट्याच्या दोन्ही पारड्यातून समान वजन काढतो, तेव्हा तो समतोलच राहतो. समीकरणांमध्येही असाच गुणधर्म असतो का?

? 15+8=23 या समीकरणाचा विचार करा. जर आपण दोन्ही बाजूंना समान संख्या मिळविली, वजा केली, गुणली किंवा भागली, तर डाव्या बाजूची आणि उजव्या बाजूची समानता तीच राहील का?

उदाहरणार्थ, तुम्ही दोन्ही बाजूंमध्ये 10 मिळवून हे तपासू शकता.

समीकरणाच्या डाव्या बाजूची आणि उजव्या बाजूची किंमत समान असल्याने, दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया केल्यास त्यांच्या समानतेमध्ये स्पष्टपणे कांहीही बदल होणार नाही.

वजन काट्याच्या उदाहरणामध्ये आपण समान वजन काढून टाकले जेणेकरून सर्व अज्ञात वजन फक्त एकाच पारड्यात राहतील. त्यामुळे उदाहरणे सोडविणे सोपे झाले. समीकरण सोडविण्यासाठीही आपण हीच युक्ती वापरू शकतो! चला प्रथम अंकगणिताची कांही उदाहरणे सोडवूया.

? **उदाहरण 1** : हे माहित आहे की, 14593-1459+145-14+88 = 13353. तर 14593 - 1459 +145-14 ची किंमत काय आहे?

किंमत शोधण्यासाठी, आपल्याला 14593-1459+145-14 हे पूर्ण सोडवून पाहावे लागेल का?

नाही, आपण 13353 मधून 88 वजा करून हा फरक मिळवू शकतो.

गणिती बोल

? आपण असे का करू शकतो?

आपण असे करू शकतो कारण बेरीज आणि वजाबाकी या जास्त क्रिया आहेत. म्हणून आवश्यक असलेल्या राशीची किंमत दोन्ही बाजूंवरून 88 वजा करून शोधता येते,

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ज्यामुळे 88 ही संख्या निघून जाते आणि डाव्या बाजूला फक्त आपल्याला हवी असलेली राशी राहते.

$$14593 - 1459 + 145 - 14 + 88 - 88 = 13353 - 88$$

**उदाहरण 2** : हे माहित आहे की, $23 \times 41 \times 11 \times 8 \times 7 = 5,80,888$, तर $23 \times 41 \times 11 \times 8$ या राशीची किंमत काय आहे?

गुणाकार आणि भागाकार या व्यस्त क्रिया आहेत. या तथ्याचा वापर करून, आपण राशीची किंमत मिळविण्यासाठी 5,80,888 ला फक्त 7 ने भागू शकतो.

गणिती बोल

हे दोन्ही बाजूंना 7 ने भागण्यासारखेच आहे का, यामुळे 7 अवयव निघून जातो आणि डाव्या बाजूला फक्त सोडवायची राशी शिल्लक राहते?

**उदाहरण 3** : हे माहित आहे की, $12345-5432+135-24-(-67)=7091$. तर $12345-5432+135-24$ या राशीची किंमत किती?

या उदाहरणाची उकल बेरीज आणि वजाबाकी व्यस्त क्रिया आहेत या वस्तुस्थितीचा उपयोग करून देखील काढली जाऊ शकते, जे कदाचित अधिक सहजपणे कल्पना करण्यासारखे आहे.

फक्त डाव्या बाजूची राशी मूल्यांकनासाठी शिल्लक ठेवण्यासाठी डाव्या बाजूतून आपल्याला $(-67)$ हे पद काढून टाकण्याची आवश्यकता आहे. समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना $(-67)$ जोडून आपण हे पद काढून टाकू.

$$12345 - 5432 + 132 - 24 - (-67) + (-67) = 7091 + (-67)$$
$$12345 - 5432 + 132 - 24 - (-67) + (-67) = 7091 + (-67)$$

म्हणून $12345 - 5432 + 132 - 24 = 7024$

**उदाहरण 4**: हे माहित आहे की, $\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 \times \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{94080}{1017}$ तर $\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14$ ची किंमत किती होईल?

**उकल** :- फक्त डाव्या बाजूच्या राशी मूल्यांकनासाठी शिल्लक ठेवण्यासाठी आपल्याला $\left(\frac{8}{9}\right)$ हे पद काढून टाकण्याची आवश्यकता आहे. समीकरणांच्या दोन्ही बाजूंना $\left(\frac{8}{9}\right)$ ने भागून आपण हे करू शकतो.

$$\left[\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 \times \left(\frac{8}{9}\right)\right] \div \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{94080}{1017} \div \left(\frac{8}{9}\right)$$

$$\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{94080}{1017} \times \left(\frac{9}{8}\right)$$

म्हणून,

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

$$\left(\frac{35}{113}\right) \times 24 \times 14 = \frac{11760}{113}.$$

? या कल्पनांचा उपयोग करून आपण समीकरण $5x-4=7$ सोडवूया.

$5x$ एका बाजूला ठेवून समीकरणाच्या दोन्ही बाजू LHS आणि RHS मध्ये समानता कशी टिकून राहील?

फक्त $5x$ डाव्या बाजूला शिल्लक ठेवण्यासाठी आपल्याला $-4$ हे पद काढून टाकण्याची आवश्यकता आहे. दोन्ही बाजू मध्ये 4 मिळवून हे केले जाऊ शकते.

म्हणून $5x - 4 + 4 = 7 + 4$

$\therefore 5x = 11$

फक्त डाव्या बाजूला अज्ञात $x$ शिल्लक ठेवण्यासाठी आपल्याला 5 हा घटक काढून टाकण्याची आवश्यकता आहे. दोन्ही बाजूंना 5 ने भागून हे केले जाऊ शकते.

अशाप्रकारे $\frac{5x}{5} = \frac{11}{5}$

म्हणून $x = \frac{11}{5}$

? $x = \frac{11}{5}$ हे समीकरणाचे अचूक उत्तर आहे का, ते आपण तपासू शकतो का?

आपण $x$ ची $\frac{11}{5}$ ही किंमत समीकरणात ठेवून तपासू शकतो आणि LHS = RHS आहे की नाही हे पाहू शकतो, समीकरण आहे $5x-4=7$

LHS मध्ये $x$ ची किंमत $\frac{11}{5}$ घेऊन, आपल्याला पुढील प्रमाणे उकल मिळते,

$$\text{LHS} = 5\left(\frac{11}{5}\right) - 4$$

$$= \cancel{5}\left(\frac{11}{\cancel{5}}\right) - 4$$

$$= 11 - 4$$

$$= 7 = \text{RHS}$$

$$x = \frac{11}{5}$$

हे RHS शी समान आहे.

त्यामुळे $\frac{11}{5}$ हे समीकरणाचे अचूक उत्तर आहे.

? **उदाहरण 5**: $11y + (-5) = 61$ सोडवा.

फक्त अज्ञात पद $11y$ एका बाजूला ठेवण्यासाठी, आपल्याला दोन्ही बाजूतून $-5$ हे पद काढून टाकावे लागेल, हे $-(-5)$ म्हणजेच $+5$ दोन्ही बाजूंमध्ये मिळवून करता येईल.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$11y + (-5) - (-5) = 61 - (-5).$$

म्हणजे,

$$11y = 66$$

आपण थेट $y$ ची किंमत शोधू शकतो, कारण $11 \times 6 = 66$

y शोधण्यासाठी आपण दोन्ही बाजूंना 11 ने भागू शकतो.

$$11y \div 11 = 66 \div 11$$

तर $y = 6$ हे समीकरण $11y + (-5) = 61$ चे उत्तर आहे.

हे उत्तर अचूक आहे की नाही, हे तुम्ही तपासू शकता का?

**उदाहरण 6** : $6y + 7 = 4y + 21$ सोडवा.

या समीकरणात दोन्ही बाजूला अज्ञात पदे आहेत.

जेव्हा अज्ञात पद फक्त एका बाजूला असते, तेव्हा समीकरणे कशी सोडवायची हे आपण पाहिले आहे. अज्ञात पद एकाच बाजूला आणण्यासाठी काय करावे लागेल?

4y दोन्ही बाजूंमधून वजा करून आपल्याला मिळते,

$$6y + 7 - 4y = 4y + 21 - 4y$$

म्हणून,

$$2y + 7 = 21$$

दोन्ही बाजूंमधून 7 वजा करुन आपल्याला मिळते,

$$2y + 7 - 7 = 21 - 7$$

$$2y = 14$$

आपण थेट y चे मूल्य शोधू शकतो, हे पाहू शकतो की $2\times(7)=14y$ आहे.

आपण y शोधण्यासाठी दोन्ही बाजूना 2 ने भागू शकतो.

$$2y \div 2 = 14 \div 2$$

$$y = 7.$$



लक्षात ठेवा, तुमचे उत्तर तपासणे नेहमीच चांगले असते.

## शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. ही समीकरणे सोडवा आणि उत्तरे तपासा.
   (a) $3x - 10 = 35$
   (b) $5s = 3s$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(c) $3u - 7 = 2u + 3$

(d) $4(m + 6) - 8 = 2m - 4$

(e) $\frac{u}{15} = 6$

गणिती बोल

2. कोणतेही उत्तर नाही असे एक समीकरण रचा.

(**सूचना** : एका संख्येपेक्षा 4 ने जास्त आणि त्याच संख्येपेक्षा 5 ने जास्त कधीही समान असू शकत नाहीत.)

समीकरण व्यवस्थितपणे सोडविण्याची प्रक्रिया आपण एक निरीक्षण केल्यास अधिक कार्यक्षम होऊ शकते. समीकरण $11y + (-5) = 61$ विचारात घ्या, जे आपण सोडविले आहे. पहिली पायरी म्हणून, आपण $-5$ हे पद काढण्यासाठी दोन्ही बाजूंमधून $(-5)$ वजा केले, जे आपण सोडविले आहे.

$$11y + (-5) - (-5) = 61 - (-5)$$

ज्याअर्थी या क्रियेने डाव्या बाजूमधून $-5$ हे पद काढून टाकले, त्याअर्थी आपण ही पायरी अशी लिहू शकलो असतो.

$$11y = 61 - (-5)$$

लक्षात घ्या की, आपण उदाहरण 1 मध्ये पाहिल्याप्रमाणे बेरीज आणि वजाबाकीचा व्यस्त क्रिया म्हणून वापर करून देखील या पायरीपर्यंत पोहोचू शकतो.

त्याचप्रमाणे, जेव्हा आपल्याकडे $11y = 66$ होते तेव्हा डाव्या बाजूमधील गुणाकार घटक 11 काढून टाकण्यासाठी आपण दोन्ही बाजूंना 11 ने भागले.

$$11y \div 11 = 66 \div 11$$

ज्याअर्थी या क्रियेने, डाव्या बाजूमधील (LHS) गुणाकार घटक 11 काढून टाकला आहे. आपण ही पायरी अशी लिहू शकतो.

$$y = 66 \div 11$$

पुन्हा आपण उदाहरण 2 मध्ये पाहिल्याप्रमाणे गुणाकार आणि भागाकार यांना व्यस्त क्रिया म्हणून घेऊन या पायरीपर्यंत पोहोचू शकतो.

चला समीकरण सोडविण्याच्या दोन्ही पद्धती लिहूया.

| | |
|---|---|
| $11y + (-5) = 61$<br>$11y + (-5) - (-5) = 61 - (-5).$<br>$11y = 66$<br>$11y \div 11 = 66 \div 11$<br>$y = 6$ | $11y + (-5) = 61$<br>$11y = 61 - (-5)$<br>$11y = 66$<br>$y = 66 \div 11$<br>$y = 6$ |

चला, दुसरे एक समीकरण विचारात घेऊया जे आपण आधी सोडविले होते.

NOT TO BE REPUBLISHED © BOOKS

| | |
|---|---|
| $6y + 7 = 4y + 21$<br>$6y + 7 - 4y = 4y + 21 - 4y$<br>$2y + 7 = 21$<br>$2y + 7 - 7 = 21 - 7$<br>$2y = 14.$<br>$2y \div 2 = 14 \div 2$<br>$y = 7$ | $6y + 7 = 4y + 21$<br>$6y + 7 - 4y = 21$<br>$2y + 7 = 21$<br>$2y = 21 - 7$<br>$2y = 14.$<br>$y = 14 \div 2$<br>$y = 7$ |

? $\frac{u}{15} = 6$ सारख्या घटनेमध्ये काय होते?

LHS (डावी बाजू) मध्ये फक्त $u$ ठेवण्यासाठी दोन्ही बाजूंना 15 ने गुणाकार करणे.

$$u = 6 \times 15$$

$$u = 90$$

यावरून, आपण पुढील निरीक्षणे करू शकतो.

(a) जेव्हा समीकरणाच्या एका बाजूला बेरीज केलेले किंवा वजा केलेले एखादे पद त्या बाजूमधून काढले जाते, तेव्हा त्याची व्यस्त क्रिया '=' चिन्हाच्या दुसऱ्या बाजूला दिसते. उदाहरणार्थ, $2y + 7 = 21$ हे $2y = 21 - 7$ होते.

(b) जर समीकरणाची एक बाजू दोन किंवा अधिक संख्या किंवा राशींचा गुणाकार असेल, आणि आपण त्या घटकांपैकी एक काढला तर दुसरी बाजू समानतेसाठी त्या घटकाने भागली जाईल. उदाहरणार्थ, $2y = 14$ हे $y = 14 \div 2$ होते.

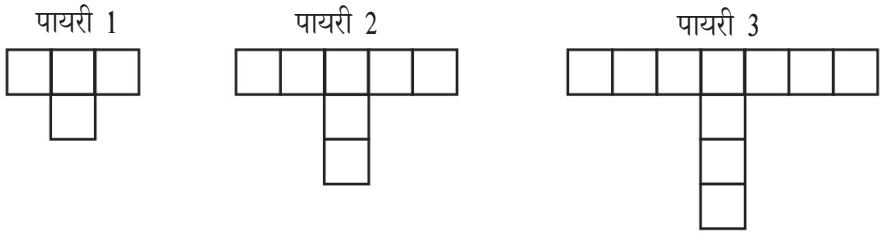
(c) जर समीकरणाची एक बाजू दोन संख्या किंवा राशींचा भागाकार असेल आणि आपण भाजक काढला, तर दुसरी बाजू समानतेसाठी या भाजकाने गुणली जाईल. उदाहरणार्थ, $\frac{u}{15} = 6$ हे $u = 6 \times 15$ होते.

## उदाहरणे सोडविणे (Solving Problems)

समीकरणे तयार केल्याने आणि सोडविल्याने आपल्याला जीवनातील अनेक समस्यांवर उपाय शोधण्याची क्षमता मिळते. अशी कांही उदाहरणे पाहूया.

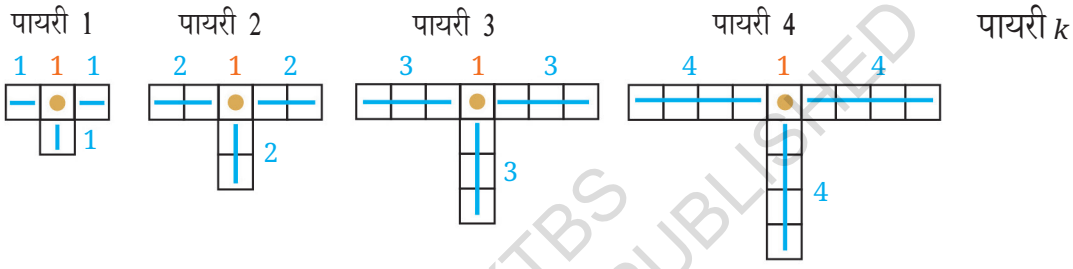
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**उदाहरण 7** : रंजनाने खाली दर्शविल्याप्रमाणे चौकोनी फरशा वापरून रचनांचा एक क्रम तयार केला आहे. ती हा क्रम पुढे वाढवू शकते का? जर होय, तर 100 फरशा वापरून बनविलेली रचना या क्रमातील कोणती पायरी असेल?




रंजना हा नमुना वेगवेगळ्या प्रकारे पाहू शकते. ते खालील प्रमाणे दर्शविलेले आहे.

**पध्दत 1 (Method 1)**




$1 + 1 + 1 + 1 = 4$

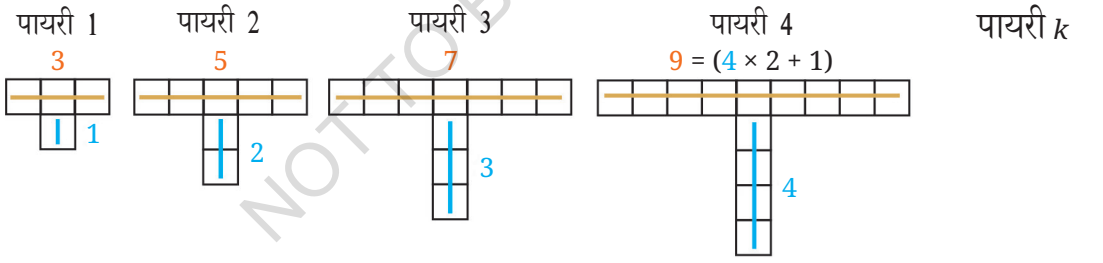
$2 + 2 + 2 + 1 = 7$

$3 + 3 + 3 + 1 = 10$

$4 + 4 + 4 + 1 = 13$

$k + k + k + 1 = 3k + 1$

**पध्दत 2 (Method 2)**




$1 + 3 = 4$

$2 + 5 = 7$

$3 + 7 = 10$

$4 + 9 = 4 + (4 \times 2 + 1) = 13$

$k + (2k + 1) = 3k + 1$

आपण $3k + 1$ ही राशी तयार केली आहे जी पायरी k मध्ये आवश्यक फरशांची संख्या दर्शविते.

पायरी k मध्ये 100 फरशा वापरून मांडणी शक्य आहे की नाही, हे तपासण्यासाठी आपण $3k+1 = 100$ हे समीकरण सोडवू शकतो. k चे मूल्य काढा.

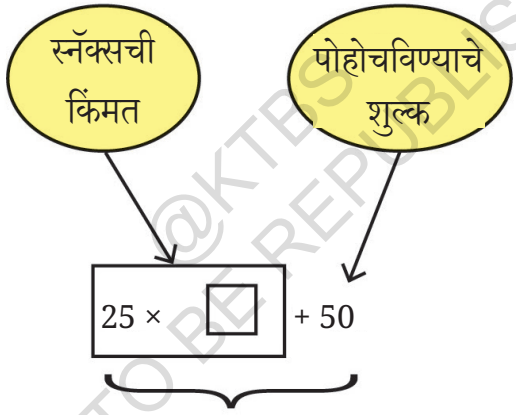
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**उदाहरण 8:** मधुमतीला एक पार्टी आयोजित करायची आहे. तिच्याकडे खर्च करण्यासाठी ₹ 500 आहेत. ती 'चाट' दुकानातून तिच्या पार्टीसाठी स्नॅक्स विकत घेण्याचे ठरविते. स्नॅक्सच्या प्रत्येक प्लेटची किंमत ₹ 25 आहे. स्नॅक्स मधुमतीच्या घरी पोहोचविण्यासाठी दुकानदार ₹ 50 चा निश्चित अतिरिक्त शुल्क आकारतो.

मधुमतीच्या कुटुंबात तिच्यासह 5 सदस्य आहेत. तिचे पालक तिला सांगतात की, तिने या पार्टीवर ₹ 500 खर्च करावेत. जर तिला तिच्या कुटुंबातील प्रत्येक व्यक्तीला आणि तिच्या मित्रांना स्नॅक्सची एक प्लेट द्यायची असेल तर ती तिच्या पार्टीत तिच्या कुटुंबाव्यतिरिक्त किती मित्रांना आमंत्रित करू शकते?

फातिमाची हे उदाहरण सोडवण्याची पध्दत खालीलप्रमाणे दर्शविली आहे.

तिने परिस्थिती एका कच्च्या आकृतीने दर्शविली आहे.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

₹ 500 मधून, जर आपण निश्चित वितरण खर्च वजा केला, तर मधुमतीकडे ₹ 450 शिल्लक राहतात.

म्हणून प्रश्न असा येतो की, ''प्रत्येकी ₹ 25 किंमतीच्या स्नॅक्सच्या किती प्लेटस ₹ 450 मध्ये विकत घेतल्या जाऊ शकतात?''

याचे उत्तर आहे 450÷25= 18 आहे.

₹ 450 मध्ये स्नॅक्सच्या 18 प्लेटस विकत घेतल्या जाऊ शकतात. तिच्या कुटुंबातील 5 सदस्यांचा विचार करून, ती मित्रांना तिच्या पार्टीसाठी आमंत्रित करू शकते.

महेशने एकूण लोकांची संख्या P ने दर्शविली, त्यामध्ये मधुमती आणि तिच्या कुटुंबातील सदस्य (5) यांचा समावेश आहे.

आलेला खर्च = $25p + 50$.

ही किंमत 500 रूपये असल्याने आपल्याला हे समीकरण मिळते,

$$25p + 50 = 500.$$

दोन्ही बाजूंमधून 50 वजा केल्यास आपल्याला मिळते,

$$25p = 500 - 50$$

$$25p = 450$$

दोन्ही बाजूंना 25 ने भागल्यास आपल्याला मिळते,

$$p = 450 \div 25 = 18$$

18 लोक तिच्या पार्टीत असू शकतात, त्यामध्ये तिच्या कुटुंबातील 5 सदस्य समाविष्ट आहेत. याचा अर्थ 13 मित्रांना आमंत्रित केले जाऊ शकते.

श्रीकांतने मधुमती आमंत्रित करु शकणाऱ्या मित्रांची एकूण संख्या $f$ ने दर्शविण्याचा निर्णय घेतला.

याची किंमत किती असेल?

आलेला खर्च = $25 (f + 5)$

मधुमतीकडे स्नॅक्ससाठी ₹ 450 रुपये असल्याने आपल्याला हे समीकरण मिळते,

$$25 (f + 5) = 450.$$

दोन्ही बाजूंना 25 ने भागल्यास,

$$f + 5 = 18$$

दोन्ही बाजूंमधून 5 वजा केल्यास,

$$f = 13$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**उदाहरण 9** : दोन मैत्रिणींना पैशांची बचत करायची आहे. जान्हवी 5000 रुपयांच्या प्रारंभिक रक्कमेपासून सुरुवात करते आणि दरमहा 650 रूपये बचत करते. सुनीता 5050 रूपयांपासून सुरुवात करते आणि दरमहा 500 रुपयांची बचत करते. किती महिन्यांनंतर त्यांच्याकडे समान रक्कम जमा होईल?

m ने अशा महिन्यांची संख्या दर्शवूया, ज्यानंतर त्यांची बचत समान होईल.

m महिन्यानंतर जान्हवीची बचत किती?

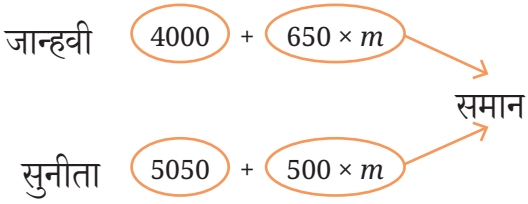
जान्हवीची बचत = $4000 + 650m$

m महिन्यांनंतर सुनीताची बचत किती?

सुनीताची बचत = $5050 + 500m$

m महिन्यांनंतर ही रक्कम समान असल्याने. आपल्याला खालील समीकरण मिळते.

$$4000 + 650\,m = 5050 + 500\,m$$



$4000 + 650\,m - 500\,m = 5050$ (दोन्ही बाजूंमधून 500m वजा केल्यास)

$4000 + 150\,m = 5050$

$150\,m = 5050 - 4000$ (दोन्ही बाजूंमधून 5000 वजा केल्यास)

$150\,m = 1050$

$m = 1050 \div 150$ (दोन्ही बाजूला 150 ने भागले)

$m = 7$.

म्हणून, 7 महिन्यांनंतर, दोघींकडेही समान रक्कम असेल.

उत्तर पडताळून पहा.

चला कांही समीकरणे सोडवूया.

**उदाहरण 10 :** $28(x + 4) + 300 = 1000$.

हे समीकरण सोडवा. हे समीकरण सोडवण्याचे कांही मार्ग येथे दिले आहेत.

| | | |
|---|---|---|
| दोन्ही बाजूतून 300 वजा करून, आपल्याला मिळते<br>$28(x + 4) = 1000 - 300$<br>$28(x + 4) = 700$<br>दोन्ही बाजूंना 28 ने भागून आपल्याला मिळते,<br>$x + 4 = 700 \div 28$<br>$x + 4 = 25$.<br>म्हणून $x = 25 - 4$, ज्यामुळे<br>$x = 21$ मिळते. | $28(x + 4) + 300 = 1000$<br>300 आणि 1000 हे 4 चे विभाज्य असल्यामुळे, जर आपण दोन्ही बाजूंना 4 ने भागले, तर आपल्याला एक सोपे समीकरण मिळते,<br>$\frac{28(x + 4) + 300}{4} = \frac{1000}{4}$<br>अपूर्णांकांच्या बेरजेचे नियम वापरून, आपल्याला मिळते,<br>$\frac{28(x + 4)}{4} + \frac{300}{4} = \frac{1000}{4}$<br>$7(x + 4) + 75 = 250$<br>दोन्ही बाजूतून 75 वजा करून,<br>$7(x + 4) = 175$<br>$7x + 28 = 175$<br>दोन्ही बाजूतून 28 वजा करून,<br>$7x = 147$<br>$x = \frac{147}{7} = 21$ | LHS ला सरळरुप देऊन,<br>$28(x + 4) + 300 = 1000$<br>$28x + 112 + 300 = 1000$<br>$28x + 412 = 1000$<br>दोन्ही बाजूंमधून 412 वजा करून,<br>$28x = 1000 - 412$<br>$28x = 588$<br>दोन्ही बाजूंना 88 ने भागून<br>$x = 588 \div 28$<br>$x = 21$ |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**उदाहरण 11** : रियाजने एक गणिताची युक्ती तयार केली, जी तो त्याचा मित्र आकाशसाठी वापरतो आणि कोणतीही मधली पायरी न सांगता त्याला उत्तर देण्यास सांगतो. आकाशला खालील पायऱ्या करण्यास रियाजने सांगितले.

1. एका संख्येचा विचार करा.
2. त्या संख्येतून 3 वजा करा.
3. त्या उत्तराला 4 ने गुणा.
4. त्या गुणाकारात 8 मिळवा.
5. शेवटचे उत्तर सांगा.



आकाशने सांगितलेले, शेवटचे उत्तर 24 होते. याचा वापर करून आकाशने सुरुवातीला विचार केलेली संख्या रियाजने अचूकपणे शोधून काढली. ती संख्या शोधा.

सुरुवातीची संख्या म्हणून वेगवेगळ्या संख्या वापरून या पायऱ्यांसह प्रयत्न करा. तुम्हाला सुरुवातीची संख्या आणि शेवटचे उत्तर यांच्यात कांही संबंध दिसतो का?

या परिस्थितीचे बीजगणिताच्या मदतीने नमुन्यात मांडून उत्तर शोधले जाऊ शकते. दुसऱ्या शब्दांत आपण अज्ञात वापरून एक समीकरण तयार करू शकतो. अज्ञात संख्या $x$ मानू.

**प्रत्येक पायरीनंतर आपल्याला कोणती पदे मिळतात?**

| पायऱ्या | पद |
|---|---|
| एका संख्येचा विचार करा. | $x$ |
| या संख्येतून 3 वजा करा. | $x - 3$ |
| त्या उत्तराला 4 ने गुणा | $4(x - 3) = 4x - 12$ |
| त्या गुणाकारात 8 मिळवा. | $4x - 12 + 8 = 4x - 4$ |

आकाशचे शेवटचे उत्तर 24 असल्यामुळे, आपल्याला खालील समीकरण मिळते.

$$4x - 4 = 24$$
$$4(x - 1) = 24$$
$$x - 1 = 6 \text{ (म्हणून, दोन्ही बाजूंना 4 ने भागू)}$$

म्हणून, आकाशने 7 ही संख्या मनात धरली होती.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? शेवटच्या उत्तरावरून सुरुवातीची संख्या मिळविण्यासाठी तुम्ही कोणताही सोपा नियम तयार करू शकता का?

? **उदाहरण 12:** रमेश आणि सुरेश यांच्याकडे एकूण 60 गोट्या आहेत. रमेशकडे सुरेशपेक्षा 30 गोट्या अधिक आहेत तर प्रत्येक मुलाकडे किती गोट्या आहेत?

या उदाहरणामध्ये आपल्याकडे दोन गोष्टी अज्ञात आहेत. जर आपण रमेशच्या. गोट्यांची संख्या $x$ ने आणि सुरेशच्या गोट्यांची संख्या y ने दर्शविली, तर आपल्याकडे कोणती वेगवेगळी समीकरणे आहेत?

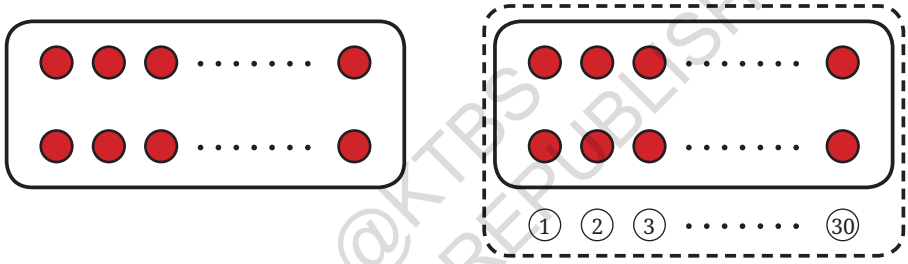


1. गोट्यांची एकूण संख्या 60 आहे.

$$x + y = 60$$

2. रमेशकडे सुरेशपेक्षा 30 गोट्या अधिक आहेत.

$$x = y + 30$$




सुरेश रमेश

या समीकरणांचा वापर करून आपण अज्ञात पद कसे शोधू शकतो? आतापर्यंत आपण फक्त एकच अज्ञात असलेले समीकरण सोडविण्यासाठी एक पद्धत विकसित केली आहे! असे समीकरण आपण खालीलप्रमाणे मिळवू शकतो.

सुरेशकडील गोट्यांची संख्या y ने दर्शवा आणि रमेशकडील गोटयांची संख्या y +30 ने दर्शवा.

गोट्यांची एकूण संख्या 60 असल्याने, आपल्याला हे समीकरण मिळते.

$$y + (y + 30) = 60$$

$$2y + 30 = 60$$

? दोन्ही अज्ञात शोधण्यासाठी याचा वापर करा.

## समीकरणे तयार करणे (Generating Equations)

आतापर्यंत, आपण एका दिलेल्या समीकरणाचे उत्तर शोधून त्यातील बैजिक पदाचे मूल्य शोधले आहे. आपण याउलट करू शकतो का? एका दिलेल्या बैजिक पदाच्या मूल्याचा वापर करून समीकरणे लिहू शकतो का?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? $y = 5$ हे त्यांचे उत्तर आहे, अशी समीकरणे लिहा. तुम्ही समीकरणे एकमेकांना सांगा आणि वापरलेल्या पध्दतीवर चर्चा करा.

गणिती बोल

दोन समीकरणे $y + 1 = 6$ आणि $3y = 15$ आहेत.

खालील साखळी क्रियांचा विचार करा, जेथे प्रत्येक नवीन समीकरण मागील समीकरणावर दोन्ही बाजूंनी समान क्रिया करून मिळविले आहे.

| | |
|---|---|
| $y + 1 = 6$ | $3y = 15$ |
| ↓ $-1$ ने गुणाकार | ↓ 6 ने बेरीज |
| $-y - 1 = -6$ | $3y + 6 = 21$ |
| ↓ $y$ ने बेरीज | ↓ 3 ने भागा |
| $-1 = -6 + y$ | $y + 2 = 7$ |
| ↓ 6 ने बेरीज | ↓ 2 ने वजाबाकी |
| $5 = y$ | $y = 5$ |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? तुम्ही खालच्या समीकरणापासून वरच्या समीकरणापर्यंत जाणारी साखळी बनवू शकता का? त्या साखळीत वरून खाली जाताना आणि खालून वर जाताना वापरल्या गेलेल्या क्रियांची तुलना करा.

गणिती बोल

? गणना न करता, प्रत्येक साखळीतील अज्ञात संख्येचे मूल्य तुम्ही शोधू शकता का?

(**सूचना** : आपण पाहिले आहे की, एका समीकरणावर दोन्ही बाजूंनी समान क्रिया केल्यास मिळालेले नवीन समीकरण देखील मूळ समीकरणाचे समाधान करते.)

? **उदाहरण 13** : तुम्ही $250 = 100x + 75$ या समीकरणात बसणारी एक वास्तविक जीवनातील परिस्थिती तयार करू शकता का?

**उत्तर** : जर आपण या संख्यांना पैशाच्या स्वरूपात मांडले तर आपण पाहू शकतो की, एकूण रक्कम ₹ 250 आहे.

येथे दोन पदे आहेत, ज्यांची बेरीज ₹250 आहे. RHS मध्ये दुसरे पद ₹75 निश्चित आहे आणि ते बदलत नाही. पहिल्या पदाचे मूल्य $x$ वर आधारित बदलेल, जो प्रत्येक वस्तूचा खर्च आहे. उदाहरणार्थ, आपण 100 चा विचार वस्तूंची संख्या म्हणून करू शकतो आणि 75 रूपये वितरण शुल्क असू शकते.

## शोधा पाहू (Figure it Out)

1. अशी 5 समीकरणे लिहा ज्यांची उकल $x=-2$ आहे.
2. प्रत्येक समीकरणातील किंमत शोधा :
   (a) $2y = 60$ (b) $-8 = 5x - 3$
   (c) $-53w = -15$ (d) $13 - z = 8$
   (e) $k + 8 = 12 - k$ (f) $7m = m - 3$
   (g) $3n = 10 + n$
3. मी एक 3 अंकी संख्या आहे. माझा शतक स्थानाचा अंक दशक स्थानाच्या अंकापेक्षा 3 ने कमी आहे. माझा दशक स्थानचा अंक एकक स्थानच्या अंकापेक्षा 3 ने कमी आहे. तिन्ही अंकांची बेरीज 15 आहे. तर मी कोण?
4. एका विटेचे वजन तिच्या अर्ध्या वजनापेक्षा 1 किलोग्रॅमने अधिक आहे तर त्या विटेचे वजन किती असेल?
5. एका संख्येच्या एक चतुर्थांश (पाव) भागात 9 मिळविल्यास तीच संख्या मिळते. तर ती संख्या कोणती?
6. $4k+1=13$ दिले असता, खालील राशींच्या किंमती शोधा.

$8k + 2$ $4k$ $k$ $4k - 1$ $-k - 2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 7.3 चूक लक्षात घ्या, चूक सुधारा (Mind the Mistake, Mend the Mistake)

खाली कांही समीकरणे आणि त्यातील अज्ञातांच्या (चलपद) किंमती शोधण्यासाठी वापरलेल्या पायऱ्या दिल्या आहेत. प्रत्येक उकल तपासा आणि पायऱ्या बरोबर आहेत का ते ठरवा. जर एखादी चूक असेल, तर त्या चूकीचे वर्णन करा, ती सुधारा आणि समीकरण सोडवा.

1
$4x + 6 = 10$
$4x = 10 + 6$
$4x = 16$
$x = 4$

2
$7 - 8z = 5$
$8z = 7 - 5$
$8z = 2$
$z = 4$

3
$2v - 4 = 6$
$v - 4 = 6 - 2$
$v - 4 = 4$
$v = 8$

4
$5z + 2 = 3z - 4$
$5z + 3z = -4 + 2$
$8z = -2$
$z = -\frac{2}{8}$

5
$15w - 4w = 26$
$15w = 26 + 4w$
$15w = 30$
$w = 2$

6
$3x + 1 = -12$
$x + 1 = -\frac{12}{3}$
$x + 1 = -4$
$x = -5$

7
$4(4q + 2) = 50$
$4(4q) = 50 - 2$
$16q = 48$
$q = 3$

8
$-2(3 - 4x) = 14$
$-6v - 8x = 14$
$-8x = 14 + 6$
$-8x = 20$
$x = -\frac{20}{8}$

9
$3(7y + 4) = 9 + 5y$
$7y + 4 = \frac{9}{3} + 5y$
$7y + 4 = 3 + 5y$
$7y - 5y + 4 = 3$
$2y = 4 - 3$
$y = \frac{1}{2}$

## 7.4 ऐतिहासिक संदर्भ (A Pinch of History)

प्राचीन भारतात चिन्हांचा वापर करून राशी तयार करणे आणि अशा राशी वापरून समीकरणे सोडविणे हा गणितीय संशोधनाचा एक महत्वाचा भाग होता. गणिताच्या या क्षेत्राला बीजगणित असे म्हटले जाते. ज्याला आता अल्जेब्रा म्हणून ओळखले जाते. बीज या शब्दाचा अर्थ बियाने असा होतो. ज्याप्रमाणे एका बीजामध्ये झाड लपलेले असते, त्याचप्रमाणे गणिताच्या एखाद्या समस्येचे उत्तर एका अज्ञात पदामध्ये लपलेले असते. उदाहरण सोडविणे हे त्या झाडाला वाढविण्यास मदत करण्यासारखे आहे. एकेक पायरी पुढे जात आपण जे लपलेले आहे ते शोधून काढतो.

आपण पूर्णांक आणि अपूर्णांक यासारख्या गणिताच्या विविध क्षेत्रांमध्ये ब्रम्हगुप्तांचे योगदान पाहिले आहे. त्यांच्या ब्रम्हस्फुटसिध्दांत (इ. स. 628) या पुस्तकातील 18 व्या अध्यायात त्यांनी अक्षरांचा वापर करून अज्ञात संख्येची बेरीज, वजाबाकी आणि गुणाकार कसा करावा हे देखील स्पष्ट केले आहे. हे आज आपण जसे $x$ किंवा $y$ वापरतो त्याप्रमाणेच आहे. हा अध्याय इतिहासातील बीजगणितावरील सर्वात जुन्या ज्ञात कामांपैकी एक होता. प्रख्यात गणिततज्ञ आणि फिल्ड्स मेडल विजेते डेव्हिड ममफोर्ड यांनी नमूद केल्याप्रमाणे, आज आपल्याला जे बीजगणित माहित आहे, त्याच्या निर्मितीमधील ब्रम्हगुप्त हे प्रमुख व्यक्ती आहेत.

8 व्या शतकात, भारतीय गणितीय विचारांचे अरबी भाषेत भाषांतर करण्यात आले. त्यांनी सध्याच्या इराकमध्ये राहणाऱ्या अल-ख्वारीझमी नावाच्या एका सुप्रसिध्द गणिततज्ञाला प्रभावित केले. सुमारे इ. स. 825 मध्ये यांनी हिसब अल - जब वाल - मुकाबला नावाचे

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

पुस्तक लिहीले. ज्याचा अर्थ ''पुन:संचलित करून आणि समतोल साधून केलेली गणना'' असा होतो.

या कल्पना आणखी दूरवर पसरल्या. 12 व्या शतकापर्यंत, अल-ख्वारीझमीच्या पुस्तकाचे लॅटिन भाषेत भाषांतर झाले आणि ते युरोपमध्ये आणले गेले, जेथे ते खूप लोकप्रिय झाले. त्यांच्या पुस्तकातील अल-जबर या शब्दावरून आपल्याला अल्जेब्रा हा शब्द मिळाला, जो आपण आजही वापरतो.

आज आपण अज्ञात गोष्टी दर्शविण्यासाठी जशी मुळाक्षरांमधील अक्षरे वापरतो, त्याचप्रमाणे ब्रम्हगुप्तांच्या काळातील प्राचीन भारतीय गणिततज्ञ वेगवेगळ्या अज्ञातांसाठी या, का, नी, पी, लो **(yā, kā, nī, pī, lo)** इ. विशिष्ट चिन्हे वापरत असत. या (*yā*) हे चिन्ह भावत्- तावत् याचे संक्षिप्त रूप होते. इतर जसे की, का (*kā* ) आणि नी (*nī*) हे पहिल्या अक्षरांचा संदर्भ देत असत. रंगांच्या नावांवरून कालक (काळा), नीलक (निळा) इत्यादी. या अज्ञातांच्या उलट, राशीमधील ज्ञात संख्यांना एक विशिष्ट रूप होते. आणि त्यांना रु (*rū.*) ने दर्शविले जात असे.

येथे आधुनिक बीजगणितीय राशी प्राचीन भारतीय लिपीमध्ये कशा लिहिल्या जात होत्या याची कांही उदाहरणे दिली आहेत.

| आधुनिक लेखन पध्दती | प्राचीन भारतीय लेखन पध्दती |
|---|---|
| $2x + 1$ | *yā 2 rū 1*<br>(प्रत्येक पदात अज्ञात / ज्ञात यांचा निर्देश प्रथम येत असे) |
| $2x - 8$ | *yā 2 rū 8̇*<br>(संख्येच्या डोक्यावर दिलेला बिंदू ती संख्या ऋण असल्याचे दर्शवित असे.) |
| $3x + 4 = 2x + 8$ | *yā 3 rū 4*<br>*yā 2 rū 8*<br>(समीकरणाच्या दोन्ही बाजू एका खाली एक दर्शवित असत.) |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**उदाहरण 16 :** भास्कराचार्याच्या (इ.स. 1150) बीजगणित या ग्रंथात हे उदाहरण आढळते.

एका माणसाकडे ₹ 300 आणि 6 घोडे आहेत. दुसऱ्या माणसाकडे 10 घोडे आणि ₹ 100 चे कर्ज आहे. जर दोघांची संपत्ती समान असेल आणि प्रत्येक घोड्याची किंमत सारखीच असेल, तर एका घोड्याची किंमत सांगा.

**उकल :**

समजा एका घोड्याची किंमत = ₹ $x$

दिलेल्या समस्येतील माहितीनुसार,

$$300 + 6x = 10x - 100$$

$$300 + 6x + (100) = 10x$$

$$400 + 6x = 10x$$

$$400 = 10x - 6x$$

$$400 = 4x$$

$$400 \div 4 = x$$

$$100 = x$$

म्हणून एका घोड्याची किंमत = ₹ 100

अशाप्रकारची उदाहरणे आणि त्यांची उत्तरे प्राचीन भारतात चांगल्या प्रकारे ज्ञात होती. खरे तर, एकच अज्ञात राशी असलेली उदाहरणे सोडविण्याची एक अतिशय पध्दतशीर पध्दत सर्वप्रथम आर्यभट्ट (499 इ.स) यांनी मांडली होती आणि ब्रम्हगुप्तांनी त्यांच्या ब्रम्हस्फुटसिद्धांत (इ.स. 628) या ग्रंथात तिची रुपरेषा दिली आहे. चला, त्यांची पध्दत समजून घेऊया. आपण खालील स्वरूपाची कांही समीकरणे पाहूया.

$5x + 4 = 3x + 8$ किंवा $3x - 6 = 2x + 4$

ही समीकरणे सोडविण्यासाठी आपण एखादे सूत्र तयार करू शकतो का? म्हणजेच, पहिल्या समीकरणासाठी 5, 4, 3 आणि 8 या संख्यांवर कांही क्रिया करून आपल्याला थेट उत्तर मिळेल का? अशाच पध्दतीचा वापर करून, तुम्ही 3, -6, 2 आणि 4 या संख्या वापरून दुसरे समीकरण सोडवू शकाल का?

सूत्र मिळवण्यासाठी, आपण चार संख्यांना A, B, C आणि D मानून या स्वरूपातील समीकरणांना सरळरुप देऊ शकतो. म्हणजेच

$$Ax + B = Cx + D$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ब्रम्हगुप्तांनी या स्वरुपातील समीकरणांची उकल खालील सूत्राद्वारे दिली आहे.

$$x = \frac{D - B}{A - C}$$

या पध्दतीचा वापर करून, आपण खालील समीकरणाची उकल शोधू शकतो.

$$650m + 4000 = 500m + 5050$$

केवळ खालीलप्रमाणे गणना करून,

$$m = \frac{5050 - 4000}{650 - 500}$$

? या सूत्राचा वापर करून तुम्ही $2x+3=4x+5$ हे समीकरण सोडवू शकता का?

प्राचीन भारतीय गणिततज्ञ हे जटिल गणिती संकल्पनांचे सोप्या प्रक्रियेत रूपांतर करण्यात उत्कृष्ट होते, जेणेकरून प्रत्येकजण समस्या सोडविण्यासाठी या प्रक्रियांचा वापर करू शकेल!

'बीजगणित' ही गणिताची अशी शाखा आहे, जी गणिती उदाहरण सोडविण्यासाठी अक्षरांच्या संकेतांचा वापर करते. आपण मागील पानांवर काही उदाहरणे पाहिली आहेत. बीजगणिताचा अभ्यास करून आपण संख्या, आकार आणि परिस्थितीमधील नमुन्यांचे सामान्यीकरण करायला शिकलो. आपण हे सामान्यीकरण बीजगणिताच्या भाषेत व्यक्त करतो, जी अचूक आणि शक्तिशाली दोन्ही आहे.

बीजगणित आपल्या गणिततज्ञांना दावे सिद्ध करण्याचा मार्ग देखील देते. (जसे की दोन विषम संख्यांची बेरीज नेहमी सम का असते) आणि अनेक प्रकारच्या समस्या सोडविण्यासाठी हे मदत करते.

प्राचीन भारतीय गणितज्ञांना बीजगणिताची ताकद चांगलीच माहित होती. आम्हाला आशा आहे की, तुम्ही सुध्दा ती ओळखाल आणि त्याचा वापर करताना आनंद घ्याल!

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

## ? शोधा पाहू. (Figure it Out)

1. रिकाम्या जागी योग्य पूर्णांक संख्या लिहा.

   (a) $5 \times \_\_\_ - 8 = 37$ (b) $37 - (33 - \_\_\_\_) = 35$

   (c) $-3 \times (-11 + \_\_\_\_) = 45$

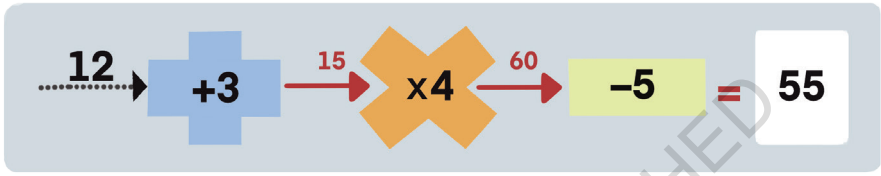
2. रंजू ही रोजंदारीवर काम करणारी मजूर आहे. ती दिवसाला ₹ 750 रुपये कमविते. तिचा मालक तिला 50 आणि 100 रूपयांच्या नोटांमध्ये पगार देतो. जर रंजूला 50 आणि 100 रुपयांच्या नोटा समान संख्येने मिळाल्या असतील, तर तिच्याकडे प्रत्येक प्रकारच्या किती नोटा आहेत?

3. दिलेल्या चित्रामध्ये, प्रत्येक काळा डाग (blob) समान संख्येचे निळे ठिपके झाकत आहे. जर चित्रात एकूण 25 ठिपके असतील, तर एका डागाखाली किती ठिपके झाकलेले आहेत? या उदाहरणाचे वर्णन करण्यासाठी एक समीकरण लिहा.



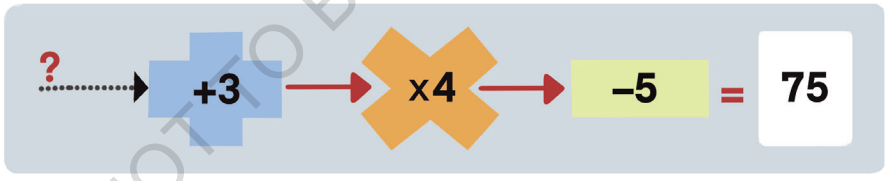

4. येथे कांही यंत्रे आहेत जी इनपुट (संख्या) घेतात. त्यावर क्रिया करतात आणि आउटपुट परिणाम म्हणून बाहेर पाठवितात.

(a)

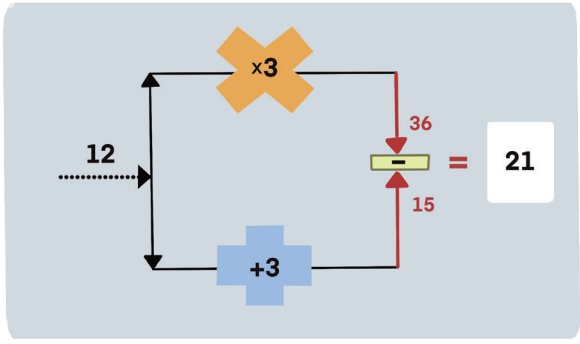



खालील उदाहरणांसाठी इनपुट (मूळ संख्या) शोधा.



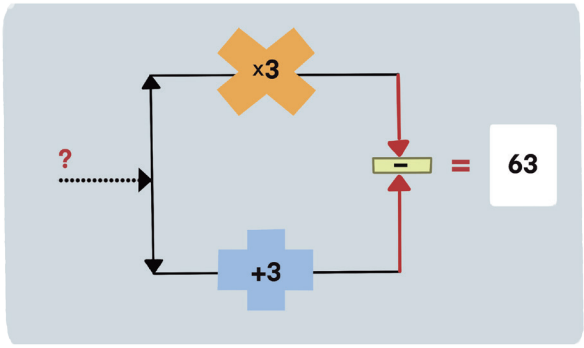



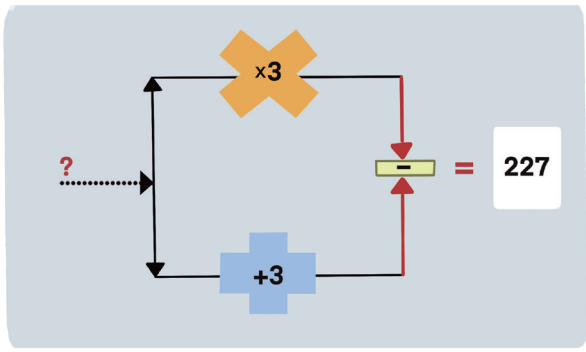

(b)



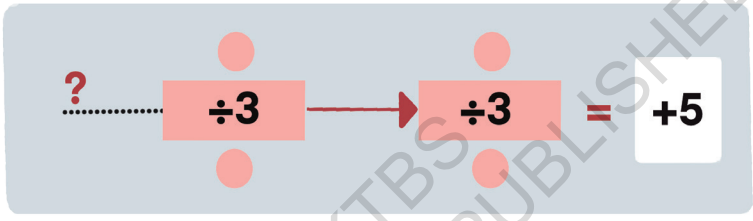

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

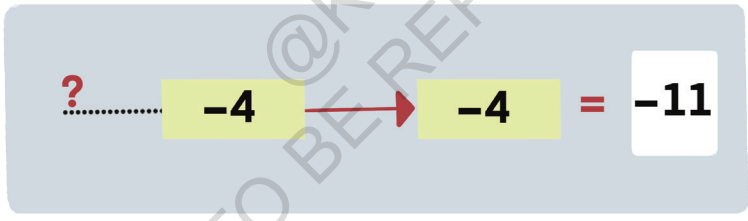
खालील घटनामधील इनपुट (संख्या) शोधा.




5. या मशीनचे इनपुट काय आहेत?



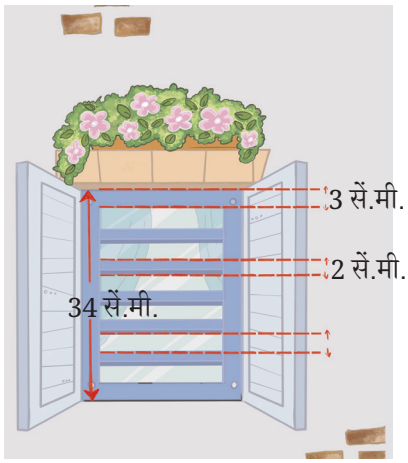




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. एका टॅक्सी चालकाचे दररोजचे निश्चित भाडे ₹ 400 आहे, त्याशिवाय प्रत्येक किलोमीटर प्रवासासाठी ₹ 20 लागतात. जर टॅक्सी प्रवासाची एकूण रक्कम ₹ 2200 असेल, तर प्रवास केलेल्या किलोमीटरची संख्या शोधा.

7. दोन संख्यांची बेरीज 76 आहे. एक संख्या दुसऱ्या संख्येच्या तिप्पट आहे. तर त्या संख्या कोणत्या आहेत?

8. ही आकृती एक जाळी असलेल्या खिडकीचे रेखाचित्र दर्शविते. जाळीतील दोन सळ्यांमधील अंतर किती आहे?




9. एका रेस्टॉरंटमध्ये 4 फळांचा रस आणि 7 चॉकलेट मिल्कशेकची किंमत ₹ 600 आहे. फळांच्या रसाची किंमत चॉकलेट मिल्कशेकपेक्षा ₹ 15 ने कमी आहे. तर फळांचा रस आणि मिल्कशेकची किंमत किती असेल?

10. जर $28p-36 = 98$ असेल, तर $14p-19$ आणि $28p-38$ ची किंमत काढा.

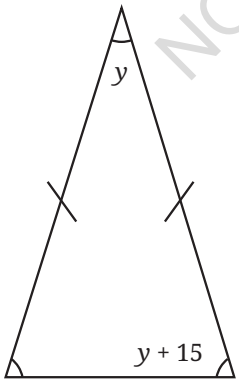
11. तीन समीकरणे सोडविण्याच्या पायऱ्या खाली दर्शविल्या आहेत. चूक ओळखा आणि ती दुरुस्त करा.

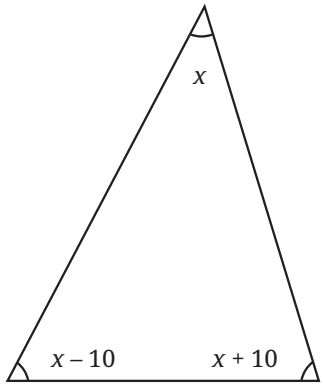
(a) $\cancel{6}x + 9 = 6\cancel{6}^{11}$
$x + 9 = 11$
$x = 11 - 9$
$x = 2$

(b) $14y + 24 = 36$
$7y + 12 = 18$
$7y = 6$
$y = \frac{6}{7}$

(c) $4x - 5 = 9x + 8$
$4x = 9x + 8 - 5$
$4x = 9x + 3$
$4x - 9x = 3$
$-5x = 3$
$x = \frac{-5}{3}$

12. या त्रिकोणांच्या कोनांची मापे काढा.



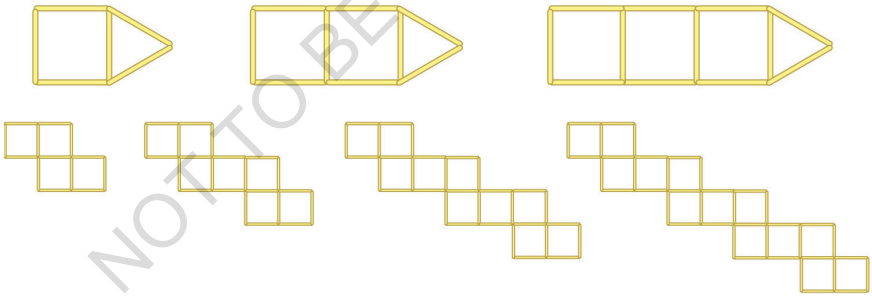

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13. $u=6$ हे उत्तर असलेल्या 4 समीकरणांची मांडणी करा.

14. बखशाली हस्तलिखितात (इ.स. 300) खालील उदाहरणाचा उल्लेख आहे. पहिल्या व्यक्तीला दिलेली रक्कम माहीत नाही. दुसऱ्या व्यक्तीला पहिल्या व्यक्तीच्या दुप्पट रक्कम दिली जाते. तिसऱ्या व्यक्तीला दुसऱ्या व्यक्तीच्या तिप्पट; आणि चौथ्या व्यक्तीला तिसऱ्या व्यक्तीच्या चौपट रक्कम दिली जाते. वाटप केलेली एकूण रक्कम ₹ 132 आहे. तर पहिल्या व्यक्तीला दिलेली रक्कम किती आहे?

15. एका जिराफची उंची त्यांच्या उंचीच्या अर्ध्या भागापेक्षा अडीच मीटरने जास्त आहे. तर जिराफची उंची किती आहे?

16. खाली दोन वेगळे आकृतीबंध दिले आहेत. प्रत्येक आकृतीक्रमात, काड्या वापरून केलेल्या मांडणीमधील सुरुवातीची काही स्थाने दर्शविली आहेत. नमुना ओळखा आणि प्रत्येक आकृतीबंधासाठी खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.
    (a) आकृतीबंधाच्या स्थान क्रमांक 11 मध्ये किती चौरस आहेत.
    (b) आकृतीबंधाच्या स्थान क्रमांक 11 मधील मांडणी करण्यासाठी किती काड्यांची आवश्यकता आहे ?
    (c) या आकृतीबंधाच्या बरोबर 85 काड्या वापरून मांडणी करता येईल का? जर होय, तर ती कोणत्या स्थान क्रमांकाशी जुळेल?
    (d) या आकृतीबंधाच्या बरोबर 150 काड्या वापरून मांडणी करता येईल का? जर होय, तर ते कोणत्या स्थान क्रमांकाशी जुळेल?

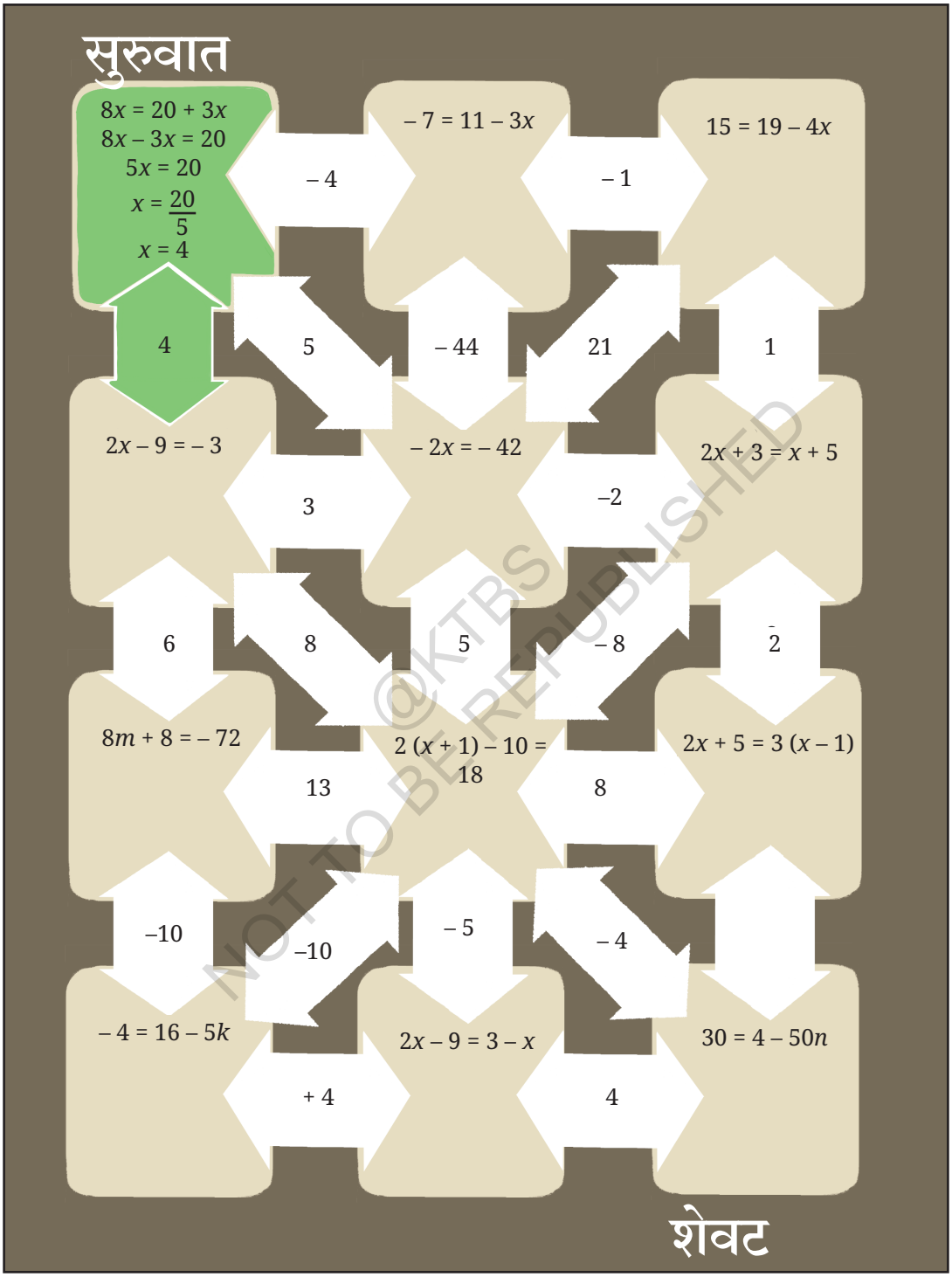


© BSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

17. एका संख्येत 36 मिळविल्यास ती स्वत:च्या दहा पटीइतकी होते. ती संख्या कोणती आहे?

18. ही समीकरणे सोडवा.
    (a) $5(r + 2) = 10$
    (b) $-3(u + 2) = 2(u - 1)$
    (c) $2(7 - 2n) = -6$
    (d) $2(x - 4) = -16$
    (e) $6(x - 1) = 2(x - 1) - 4$
    (f) $3 - 7s = 7 - 3s$
    (g) $2x + 1 = 6 - (2x - 3)$
    (h) $10 - 5x = 3(x - 4) - 2(x - 7)$

19. सुरुवाती (start) पासून शेवट (End) पर्यंतचा मार्ग शोधण्यासाठी समीकरणे सोडवा. दिलेल्या चौकटीत आपले काम दर्शवा आणि पुढे जात असताना तुमचा मार्ग रंगवा.




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

20. समुद्र किनाऱ्यावर कांही मुले आणि गाढव आहेत. यांच्याकडे मिळून 28 डोकी आणि 80 पाय आहेत. तिथे किती गाढव आहेत? तिथे किती मुले आहेत?

प्रयत्न करा

## सारांश
## SUMMARY

- एक बीजगणितीय समीकरण हे एक गणितीय विधान आहे जे दोन बीजगणितीय राशींची समानता दर्शविते.
- जेव्हा समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया केली जाते, तेव्हा समानता राखली जाते.
- समीकरणाची उकल शोधणे म्हणजे राशीमधील अज्ञातांची अशी मूल्ये शोधणे, ज्यामुळे डावी बाजू ही उजव्या बाजूशी समान होईल.
- समीकरणे बहुतेकदा दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया करून सोडविता येतात, जेणेकरून अज्ञाताचे मूल्य स्पष्ट होते.



कोड्याची वेळ!

### एक जादुई युक्ती

कोणत्याही एका संख्येचा विचार करा.
आता तिला 2 ने गुणा.
त्यामध्ये 10 मिळवा.
2 ने भाग द्या.
आता तुम्ही विचारात घेतलेली मूळ संख्या वजा करा.
शेवटी 3 मिळवा.

मी भविष्यवाणी करतो की तुमच्याकडे आता 8 आहे. माझे उत्तर बरोबर आहे का?
तुमच्या मित्रांबरोबर आणि कुटुंबातील सदस्यांबरोबर ही युक्ती करून पहा!
ही युक्ती कशी कार्य करते हे तुम्ही स्पष्ट करू शकता का?
(**सूचना** : विचारात घेतलेल्या पहिल्या संख्येला $x$ ने दर्शवा)
तुम्ही तुमच्या स्वत:च्या युक्त्या तयार करू शकता का?

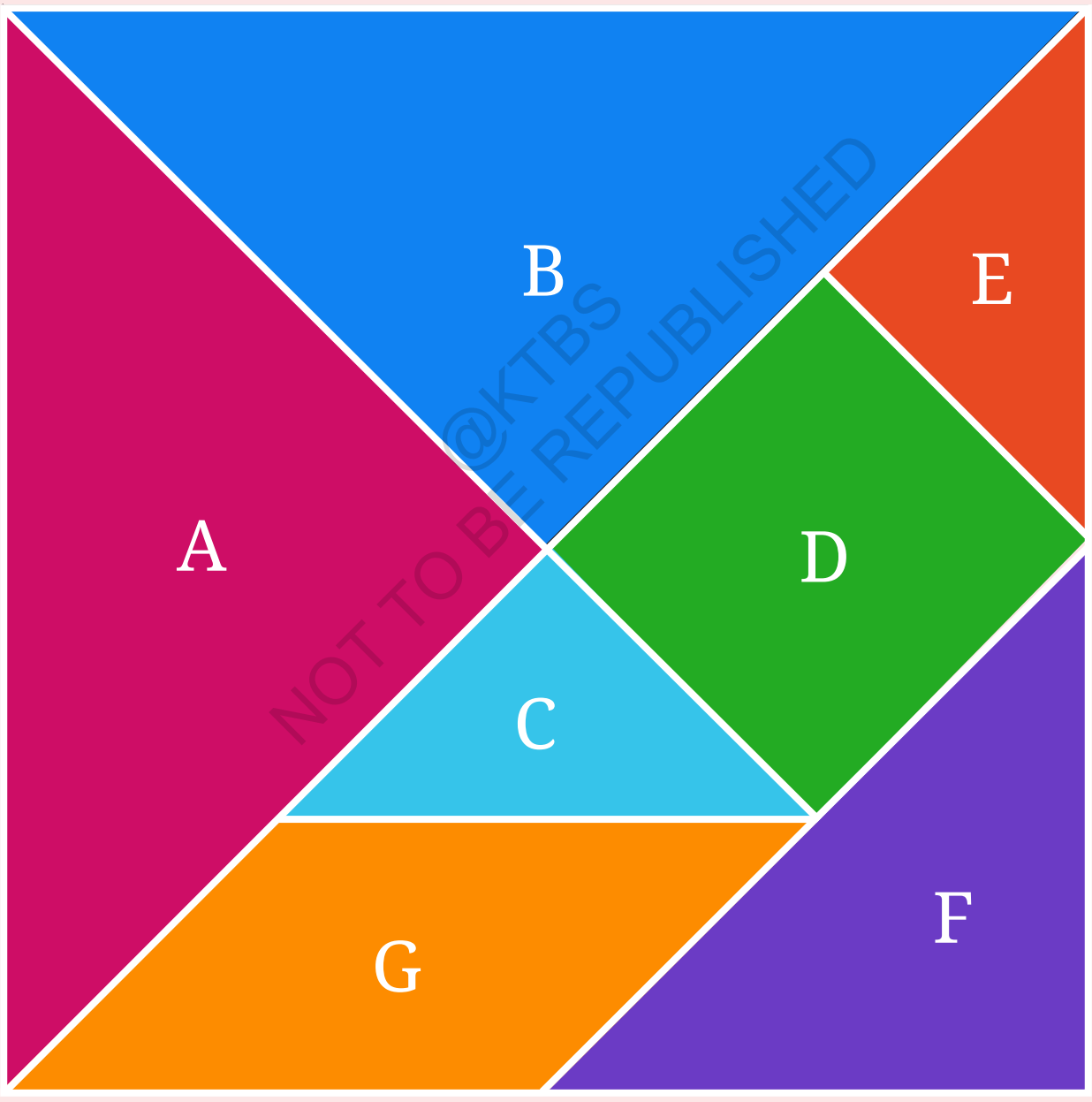


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# टॅनग्रॅम (TANGRAM)

W4L6N9

**टीप** : प्रत्येक आकार पांढऱ्या सीमारेषेवरून कापा.




@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED