ریاضی

نویں جماعت کی درسی کتاب

Ninth Standard
MATHEMATICS

9

حصّہ دوّم

(Part-II)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

KARNATAKA TEXTBOOK SOCIETY (R.)
6th Cross, Melleshwaram, Bengaluru - 560 003.

پیش لفظ

قومی درسیات کا خاکہ (NCF)، 2005 کی سفارشات کے مطابق اسکول کے اندر اور اسکول کے باہر کی بچوں کی زندگی میں تال میل ہونا لازمی ہے۔ اس اصول نے کتابی آموزش کی میراث سے رخصتی کی سمت دیکھائی۔ اس میراث نے ایک ایسا نظام پیدا کر دیا تھا جس نے اسکول، گھر اور کمیونٹی کے درمیان خلا پیدا کر دیا۔ قومی درسیات کے خاکے کی بنیاد پر تیار کئے گئے نصابوں اور کتابوں نے اس بنیادی نظریہ کو عملی جامہ پہنانے کی نمایاں کوشش کی ہے۔ اس لئے سمجھ کے دخل کے بغیر حافظے کے چلن کو کم کرنے اور مختلف مضامین کے درمیان کھینچے گئے حدود کو مٹانے کی کوشش کی۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ کوششیں دراصل ہمیں تعلیم کے اس نظام کی سمت لے جائے گی جہاں پر بچہ کو مرکزیت کا درجہ حاصل ہوگا، جس کا خاکہ تعلیم کی قومی پالیسی (1980) نے تیار کیا تھا۔

ان کاوشوں کی کامیابی کا انحصار اس بات پر ہوگا کہ اسکول کے پرنسپل اور ٹیچرس بچوں کو ان کی آموزش کے لئے کتنی حوصلہ افزائی کرتے ہیں اور بچوں کو سوالات کرنے نیز تصوراتی سرگرمیوں کے لئے کتنا اکساتے ہیں۔ ہمیں یہ تسلیم کرنا ہوگا کہ بچوں کو فراہم کئے گئے موقعوں، اوقات اور آزادی سے ان میں نئی معلومات کا اضافہ ہوتا ہے اور یہ اضافہ وہ اپنے بڑوں سے ملی جانکاری سے حاصل کرتے ہیں۔ نصابی کتابوں کو امتحانات کے لئے واحد بنیاد تسلیم کر لینا ہی ایک اہم وجہ ہے جس سے مختلف مسائل اور مواقع ضائع ہوجاتے ہیں۔ بچوں میں تخلیقیت یا پہل کاری کو پیدا کرنا اس وقت ہی ممکن ہے جب ہم بچوں کو سیکھنے کے عمل میں شرکاء کی حیثیت سے تسلیم کریں گے نہ کہ ان کو معلومات حاصل کرنے کا جامد جسم سمجھتے رہیں گے۔

ان مقاصد سے مراد ہے کہ اسکول کے معاملات اور طور طریقوں میں قابل لحاظ تبدیلی لانا، روزمرہ کے نظامِ اوقات میں لچک پیدا کرنا اتنا ہی لازمی ہے جتنا کہ سال بھر کے لئے تیار کئے گئے کیلنڈر میں پڑھانے کے دنوں کو پڑھائی کے لئے ہی مختص رکھنا، بچوں کو پڑھانے اور ان کی جانچ کے لئے دیکھائے گئے طریقے بھی یہ طے کرتے ہیں کہ یہ نصابی کتابیں اسکول میں بچوں کی زندگی کو کتنا خوشگوار بناتی ہیں نہ کہ اجیرن بنانے کا وسیلہ بنتی ہیں۔ نصاب تیار کرنے والوں نے بچوں کی نفسیات اور پڑھائی کے لئے درکار وقت کو ملحوظ رکھتے ہوئے معلومات کی تشکیل نو کر کے نصاب کے وزنی ہونے کے مسئلہ کو حل کرنے کی کوشش کی ہے۔ نصابی کتاب غور وفکر کرنے، چھوٹے چھوٹے گروپ میں بات چیت کرنے اور اپنے ہاتھ سے کر کے سیکھنے کو ترجیح دے کر اور ان کے لئے مواقع فراہم کر کے ان کوششوں کو بڑھاوا دیتی ہے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اس کتاب کو تیار کرنے کے لئے درسی کتاب تیار کرنے والی کمیٹی کے ذریعے کئے گئے کام کو نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ سراہتی ہے۔ ہم ریاضی اور سائنس کی ایڈوائزری کمیٹی کے چیئر پرسن پروفیسر جے۔ وی۔ نرلیکار اور اس کتاب کے چیف ایڈوائز پروفیسر پی سنسلیر نے اگنو (IGNOU)، نئی دہلی کے بہت ممنون ہیں کہ انہوں نے کمیٹی کو اس کام کے کرنے میں اپنا تعاون دیا، بہت سارے ٹیچرس نے اس کتاب کو تیار کرنے میں اپنا تعاون دیا اور ہم شکر گزار ہیں پرنسپل حضرات کے جن کے تعاون سے اس کام کا انجام پانا ممکن ہوسکا۔ ہم ان اداروں اور تنظیموں کے بھی احسان مند ہیں جنھوں نے اپنے وسائل، مواد اور افراد کو فیّاضی سے استعمال کرنے کی اجازت دی خاص طور پر ہم ان ممبران کا جو ثانوی اور اعلیٰ تعلیم کے محکمہ وزارت فروغ انسانی وسائل کے ذریعے بنائی گئی قومی نگراں کمیٹی کے چیئر پرسن پروفیسر مرینال میری اور پروفیسر جی۔ پی۔ دیش پانڈے کا شکریہ ادا کرتے ہیں کہ انھوں نے اپنا قیمتی وقت اور تعاون دیا۔

ہم اس نصابی کتاب کے اردو ترجمے کی ذمہ داری بخوبی انجام دینے کے لیے جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی کے شکر گزار ہیں، خاص طور پر جامعہ ملیہ اسلامیہ کے وائس چانسلر پروفیسر مشیر الحسن اور محترمہ رخشندہ جلیل کے ممنون و شکر گزار ہیں جنھوں نے مرکز برائے جواہر لعل نہرو اسٹڈیز، جامعہ ملیہ اسلامیہ کے آوٹ ریچ پروگرام کے ذریعہ اس عمل میں رابطہ کار کے فرائض بخوبی انجام دیئے۔ کونسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے مترجم محمد قاسم کی شکر گزار ہے۔ این سی ای آر ٹی مجموعی اصلاحات اور اپنے یہاں تیار مواد کے معیار کو بہتر بنانے کے لئے پابند ہے۔ اس سلسلہ میں ہم آپ کی رائے اور مشوروں کا خیر مقدم کریں گے۔

ڈائریکٹر
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

نئی دہلی
20/ دسمبر 2005

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

درسی کتابیں تیار کرنے والی کمیٹی

ریاضی اور سائنس کی ایڈوائزری گروپ کے چیئر پرسن

جے۔وی۔نرلیکار، امیریٹس پروفیسر ایڈوائزری کمیٹی کے چیئر پرسن، انٹر یونیورسٹی سینٹر فور ایسٹرونومی اینڈ ایسٹروفزکس (IUCCA)، گنیش بھنڈ، پونہ یونیورسٹی، پونے

چیف ایڈوائزر

پی سنکیلر، پروفیسر، اسکول آف سائنسز'IGNOU، نئی دہلی

چیف کوآرڈی نیٹر

حُکم سنگھ، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی۔

ممبران

اے۔کے۔واز لوار، پروفیسر اور ھیڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی

انجلی لال، پی جی ٹی، ڈی۔اے۔وی۔ پبلک اسکول، سیکٹر 14، گڑگاؤں

انجو نیرولہ، پی جی ٹی، ڈی۔اے۔وی پبلک اسکول، پشپانجلی انکلیو، پیتم پورہ، دہلی

جی۔پی۔دکشت، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف میتھ میٹکس اینڈ ایسٹرونومی، لکھنؤ یونیورسٹی، لکھنؤ۔

کے۔اے۔ایس۔ایس۔وی، کامیسوارہ راؤ اسسٹینٹ پروفیسر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن، بھونیشور۔

مہندر۔آر۔گجارے، ٹی ۔ جی۔ ٹی۔ اتُل ودیالیہ۔اَتل، ضلع ولساد۔

مہندر شنکر، اسسٹینٹ پروفیسر، (ایس ۔جی ۔ریٹائیر ڈ) این سی ای آر ٹی۔

راماباالاجی، ٹی جی ٹی۔کے۔وی، ایم، ای۔جی اینڈ سینٹر۔سینٹ جان روڈ، بنگلور۔

سنجے مدگل۔اسسٹینٹ پروفیسر، سی آئی ای ٹی، این سی ای آر ٹی

ششی دھر جگدیشن، ٹیچر اور ممبر گورننگ کونسل، سینٹر فار لرننگ، بنگلور

ایس۔وینکٹ رمن، اسسٹینٹ پروفیسر، اسکول آف سائنسز، اگنو، نئی دہلی

اُدے سنگھ، اسسٹینٹ پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی۔

وید ڈ دیجا، وائس پرنسپل (ریٹائرڈ)، گورنمنٹ گرلس سیکنڈری اسکول، سینک وہار، دہلی

ممبر کوآرڈی نیٹر

رام اوتار، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی (دسمبر 2005 تک)

آر۔پی۔موریہ، ایسوسی ایٹ پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی (جنوری 2006 سے)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اظہار تشکر

کونسل درسی کتاب کی ریویو ورکشاپ میں شامل ہونے والے مندرجہ ذیل شرکا کی شکر گزار ہے: اے۔ کے۔ سکسینہ، پروفیسر (ریٹائیرڈ) لکھنؤ یونیورسٹی، لکھنؤ؛ سنیل بجاج، ایچ او ڈی، ایس سی ای آر ٹی، گڑگاؤں؛ کے ایل آریہ، پروفیسر (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی؛ وندیتا کالرا، لیکچرر، ایس۔ کے۔ ودیالیہ، وکاس پوری، نئی دہلی؛ جگدیش سنگھ پی جی ٹی، سینک اسکول، کپورتھلا؛ پی۔ کے۔ بگّا، ٹی جی ٹی، ایس۔ بی۔ پی سبھاش نگر، نئی دہلی؛ آر۔ سی۔ مہانا، ٹی جی ٹی، کیندریہ ودیالیہ، سنبھل پور؛ ڈی۔ آر۔ کھانڈو۔ ٹی جی ٹی، جے این وی۔ دودھونی گول پاڑہ؛ ایس۔ ایس۔ چٹّوپادھیائے، اسسٹنٹ ماسٹر، بی دھان نگر، گورنمنٹ ہائی اسکول، کولکتہ؛ وی۔ اے، سجاتا، ٹی جی ٹی، کے۔ وی۔ واسکو نمبر 1، گوا؛ اکیلا سہدیون، ٹی جی ٹی، کے۔ وی مینم بکم، چنئی؛ ایس۔ سی۔ راؤتو، ٹی جی ٹی، سینٹرل اسکول فار تبتن، مسوری؛ نیل۔ پی۔ زیویر، ٹی جی ٹی، جے این وی، نریمان گلم؛ امت بجاج، ٹی جی ٹی، سی آر پی ایف، پبلک اسکول، روہنی، دہلی؛ آر۔ کے۔ پانڈے، ٹی جی ٹی، ڈی۔ ایم۔ اسکول، آر آئی ای، بھوپال؛ وی۔ مادھوی، ٹی جی ٹی، سنسکرتی اسکول، چانکیہ پوری، نئی دہلی؛ جی، سری ہری بابو، ٹی جی ٹی، جے این وی، سِر پور کاغذ نگر، عادل آباد اور آر۔ کے۔ مشرا، ٹی جی ٹی، اے۔ ای۔ سی اسکول، نروہ

اس کتاب کی تیاری میں ایم۔ چندرا، پروفیسر اینڈ ہیڈ (ریٹائرڈ)، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی کے تعاون کے ہم خاص طور پر بے حد شکر گذار ہیں۔

کونسل اس کتاب کی تیاری کے لیے کمپیوٹر انچارج دیپک کپور، ڈی ٹی پی آپریٹر نریش کمار، کاپی ایڈیٹر پرگتی بھاردواج اور پروف ریڈر یوگیتا شرما کی کوششوں کی بھی شکر گزار ہے۔

اے پی سی آفس، ڈی ای ایس ایم کی انتظامیہ، پبلی کیشن ڈویژن اور این سی ای آر ٹی کے سکریٹریٹ کے تعاون کا بھی شکریہ ادا کیا جاتا ہے۔

© KVEDS NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

NCF–2005 ಆಧರಿಸಿ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಲಾದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ 9ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಉರ್ದು ಮಾಧ್ಯಮದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕರ್ನಾಟಕದಲ್ಲಿ ಭಾಗ – 1 ಮತ್ತು ಭಾಗ – 2 ಎಂದು ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಟ್ಟು 7 ಮಾಧ್ಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತರಲಾಗಿದೆ. NCF–2005ರ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕ ಹೊಂದಿದೆ.

2005ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

- ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಜೀವನದ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದು.
- ಕಂಠಪಾಠ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಮುಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಶ್ರೀಮಂತಗೊಳಿಸುವುದು.
- ಜ್ಞಾನದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಕಲಿಕಾ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.
- ಭಾರತದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ನೀತಿಯನ್ವಯ ಮಕ್ಕಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಸ್ಪಂದಿಸುವುದು.
- ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಇಂದಿನ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಜೀವನಾವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
- ವಿಷಯಗಳ ಮೇರೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಗ್ರ ದೃಷ್ಟಿಯ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬದುಕಿಗೆ ಜ್ಞಾನ ಸಂಯೋಜನೆ.
- ಮಕ್ಕಳಿಂದಲೇ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವುದು.

9ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವಂತೆ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ನೂತನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ತನ್ಮೂಲಕ ಅವರನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಭಾರತದ ಸ್ವಸ್ಥಸಮಾಜದ ಉತ್ತಮ ಪ್ರಜೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಯಶಸ್ಸಿಗೆ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಕೆಲವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅದು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೂ ಪೂರಕವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ/ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆ ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ತಮ್ಮ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುವುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸ್ನೇಹಿ ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕ ಸ್ನೇಹಿಯಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಸಂತೋಷದಾಯಕ ಹಾಗೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಸೂಕ್ತವಾದ ದಾರಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

9ನೇ ತರಗತಿಗೆ NCERT ಯ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮಭಾರಿಗೆ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ದಿಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ಇಲಾಖೆಯ ಉನ್ನತ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಅನುಮತಿ, ಸಹಕಾರ ಹಾಗೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವನ್ನು ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ನವದೆಹಲಿ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ
ಬೆಂಗಳೂರು–560 085

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

فہرست

پیش لفظ II

7 مثلثات 1

7.1 تعارف 1

7.2 مثلثوں کی مماثلت 1

7.3 متماثل مثلثوں کے اصول 4

7.4 مثلث کے کچھ خصوصیات 13

76 مثلثوں کی متماثلت کے کچھ اور اُصول 18

خلاصہ 23

8 چار ضلعی 24

8.1 متوازی الاضلاع کی خصوصیات 24

8.2 وسطی نقطہ مسئلہ 32

8.3 خلاصہ 36

9 دائرے 37

9.1 کسی نقطہ پر وتر کے ذریعہ بنازاویہ 37

9.2 مرکز سے وتر پر بنایا گیا عمود 39

9.3 مساوی وتر اور مرکز سے ان کے فاصلے 40

9.4 دائرے کے قوس کے ذریعے بنازاویہ 44

9.5 دائروی چار ضلعی 47

9.6 خلاصہ 52

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10 ہیرون کا فارمولہ **54**
10.1 ملث کا رقبہ۔ ہیرون کے فارمولہ سے 54
10.2 خلاصہ 59

11 سطحی رقبہ کا حجم **60**
11.1 ایک قائم دائروی مخروط کا سطحی رقبہ 60
11.2 کرہ کا سطحی رقبہ 64
11.3 ایک قائم دائر مخروط کا حجم 69
11.4 کرہ کا حجم 72
11.5 خلاصہ 75

12 شماریات **76**
12.1 آنکڑوں کا گرافی اظہار 76
12.2 خلاصہ 92

ضمیمہ ۔2 ریاضیاتی موڈلنگ کا تعارف **93**
A2.1 تعارف 93
A2.2 عبارتی سوالات کی نظر ثانی 94
A2.3 کچھ ریاضیاتی ماڈل 99
A2.4 ماڈلنگ کا طریقہ (عمل اس کے فائدہ اور بندش) 108
A2.5 خلاصہ 112

جواب/ اشاریہ **2** 114

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

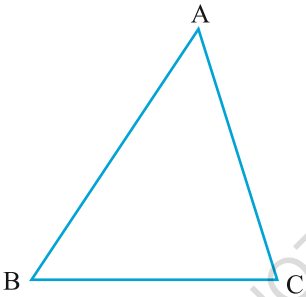
باب 7

A1J1X4

مثلثیں (TRIANGLES)

7.1 تعارف: (Introduction)

آپ پچھلی کلاسوں میں مثلث اور اس کی بہت سی خصوصیات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ تین قاطع خطوط سے بنی شکل کو مثلث کہتے ہیں ایک مثلث میں 3 اضلاع 3 زاویہ اور 3 راس ہوتے ہیں مثال کے طور پر مثلث ABC کو ΔABC سے ظاہر کرتے ہیں۔ (شکل 5.1 دیکھیے) مثلث کے 3 اضلاع AB، BC، CA اور 3 زاویہ $\angle A$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ اور A, B اور C، 3 راس میں پہلے باب 6 میں آپ نے مثلثوں کی کچھ خصوصیات کے بارے میں پڑھا ہے اس باب میں آپ تفصیل کے ساتھ مثلثوں کی متماثلت C اصولوں کے مثلثوں کی کچھ اور خصوصیات اور مثلث میں مساوات کے بارے میں پڑھیں گے۔ ان میں سے بہت سی خصوصیات کی تصدیق آپ پہلے ہی پچھلی کلاسوں میں کر چکے ہیں ہم ان میں کچھ کو اب ثابت کریں گے۔



شکل 8.1

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

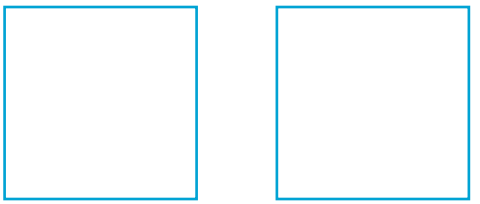
7.2 مثلثوں کی متماثلت (Congruence of Triangles)

آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ آپ کے فوٹو گراف کی یکساں سائز کی دو کاپیاں بالکل ایک سی ہوتی ہیں اسی طرح سے ایک ہی سائز کی دو چوڑیاں، ایک بینک کے ذریعہ دیئے گئے ATM کارڈ ایک ہی شکل کے ہوتے ہیں آپ ایک ہی سال میں نکالے گئے ایک روپیہ کے سکہ کو ایک دوسرے پر رکھا جائے تو وہ دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔

کیا آپ کو یاد ہے کہ ایسی اشکال کیا کہلاتی ہیں؟ یقیناً یہ متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ (متماثل کے معنی میں ہر طرح سے برابر

یعنی شکل میں سائز میں دونوں یکساں)

اب آپ ایک ہی نصف قطر کے دو دائرہ بنائیے اور ایک کو دوسرے پر رکھیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ وہ دونوں ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں ہم انکو متماثل دائرہ کہتے ہیں۔ ایک ہی پیمائش والے ایک ضلاع والے دو مساوی ضلعی مثلثوں کو ایک دوسرے مربع کو دوسرے مربع پر رکھ کر اس عمل کو دہرائیے (شکل 7.2 دیکھیے) یا مساوی اضلاع والے دو مساوی



شکل 7.2

مثلثوں کو ایک دوسرے پر رکھیئے آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ مربع بھی ایک دوسرے کے متماثل ہیں اور مساوی ضلعی مثلث بھی۔

آپ کو حیرت ہو رہی ہوگی کہ ہم متماثلت کیوں پڑھ رہے ہیں۔ آپ سب نے اپنے فریج میں برف کی ٹرے ضرور دیکھی ہونگی۔ مشاہدہ کیجیے کہ برف کے سارے ٹکڑے جو اس ٹرے سے نکلتے ہیں متماثل ہوتے ہیں۔ ٹرے میں برف کو ڈھالنے والے خانہ بھی متماثل ہوتے ہیں (سارے مستطیل یا سارے مثلث نما یا دائرہ نما) اس لیے جب بھی یکساں چیزوں کو بنایا جاتا ہے اس کو بنانے کے لیے متماثلت کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔

کبھی کبھی آپ کو اپنے پین کے ریفل کو نئے ریفل سے بدلنا مشکل ہوتا ہے یہ اس لیے ہوتا ہے کہ نیا ریفل اس سائز کی نہیں ہوتا جس کو آپ بدلنا چاہتے ہیں۔ ظاہر ہے اگر دونوں ریفل یکساں ہوں یا متشاکل ہوں تو نیا ریفل پین میں فٹ آئے گا۔

اس طرح سے آپ کو بہت سی ایسی مثالیں مل سکتی ہیں۔ جہاں متماثل اشیاء کا استعمال روزمرہ زندگی میں ہوتا ہے۔

کیا آپ متماثل اشکال کی کچھ اور مثالوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟

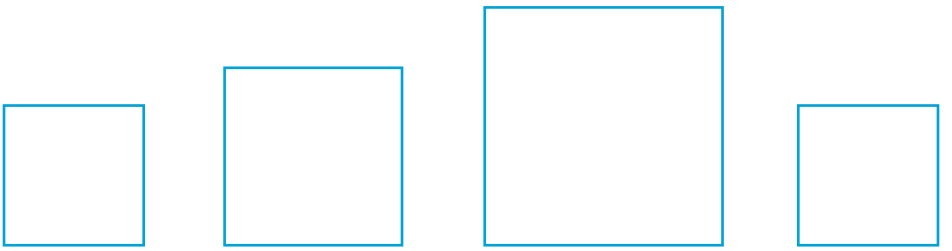
اب مندرجہ ذیل میں کونسی اشکال مربع کے متماثل نہیں ہیں۔

شکل 7.3 (ii) اور (iii) میں بڑے مربع بے شک شکل 5.3 (i) میں دیئے گئے مربع کے متماثل ہیں لیکن شکل (iv) 7.3 میں دیا گیا مربع شکل 7.3 (i) میں دیئے گئے مربع کے متماثل ہے۔

آیئے اب ہم دو مثلثوں کی متماثلت بارے میں بات کرتے ہیں۔

آپ پہلے ہی جانتے ہیں کہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے اضلاع اور زاویہ دوسرے مثلث کے نظیری اضلاع اور زاویہ کے برابر ہوں۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



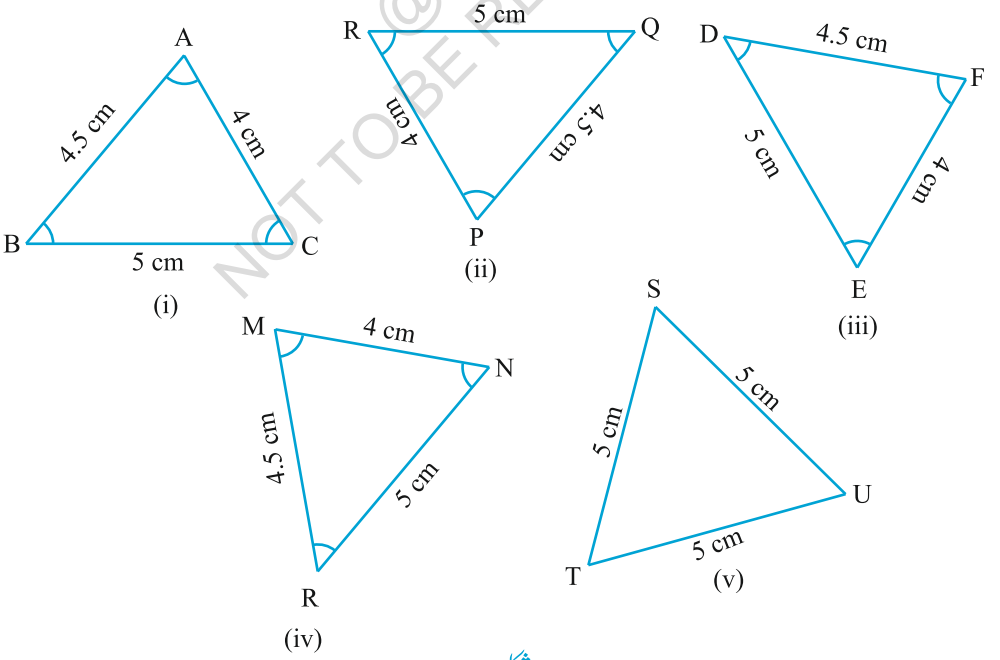
شکل 7.3

اب نیچے دیئے گئے مثلثوں میں سے کون سے مثلث شکل 5.4(i) کے ΔABC کے متماثل ہے۔

شکل 7.3(ii) سے (v) تک تمام مثلثوں کو کاٹ کر نکال لیجیے۔ اور پھر ان کو ایک ایک کر کے مثلث ΔABC پر رکھیے۔

آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ شکل 7.4 کے (ii)، (iii) اور (iv) ΔABC کی متماثل ہیں۔ جب کہ شکل 5.4(v)، ΔSTU، ΔABC کے متماثل نہیں ہے۔

اگر ΔPQR، ΔABC کے متماثل ہوتا ہے تو ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں۔ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$



شکل 7.4

© ITBS NOT TO BE REPUBLISHED

نوٹ کیجیے کہ جب $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ تب ΔPQR کے اضلاع ΔABC کے نظیری مساوی اضلاع پر گرتے ہیں ایسا ہی زاویوں کے ساتھ بھی ہوتا ہے۔

یعنی PQ، AB کو QR، BC کو اور RP، CA کو ڈھکتا ہے۔ $\angle P$ ؛ $\angle A$ کو، $\angle Q$ ، $\angle B$ کو اور $\angle R$ ، $\angle C$ کو ڈھکتا ہے۔ان کے راسوں میں بھی ایک ایک مماثلت ہے۔یعنی P کی مطابقت A سے Q کی B سے اور R کی C سے ہے۔اس کو ہم اس طرح $P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ لکھتے ہیں۔

نوٹ کیجیے اس مطابقت کے تحت $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ لیکن یہ لکھنا صحیح نہیں ہوگا کہ $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ ۔

اس طرح سے شکل 5.4(iii) میں۔

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ اور $EF \leftrightarrow CA$

اور $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ اور $E \leftrightarrow C$

اس لیے $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ لیکن $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ لکھنا ٹھیک نہیں ہے۔

شکل (vi)5.4 کے مثلثوں اور ΔABC کے درمیان مطابقت لکھیئے۔

مثلثوں کی مماثلت کو علامتی شکل میں لکھنے کے لیے ضروری ہے کہ اس کے راسوں کی مطابقت کو صحیح لکھیں۔

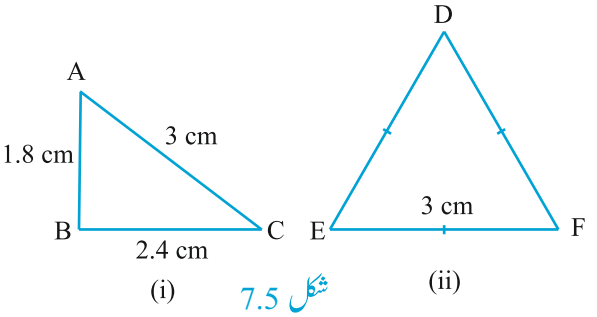
نوٹ کیجیے متماثل مثلثوں کے نظیری حصہ مساوی ہوتے ہیں اور ہم مختصر CPCT لکھتے ہیں جس کا مطلب ہے متماثل مثلثوں کے نظیری حصّے۔

CP CT - Corresponding parts of congruent triangle

7.3 متماثل مثلثوں کے اصول (Criteria for Congruence of Triangles)

پچھلی کلاسوں میں آپ نے متماثل مثلثوں کے اصولوں کے بارے میں پڑھا تھا آیئے ان کو دہراتے ہیں۔

دو مثلث بنایئے جن کا ایک ضلع 3 سینٹی میٹر کا ہے۔کیا یہ مثلث متماثل ہیں؟ مشاہدہ کیجیے کہ یہ متماثل نہیں ہے۔(شکل 7.5 دیکھیے)

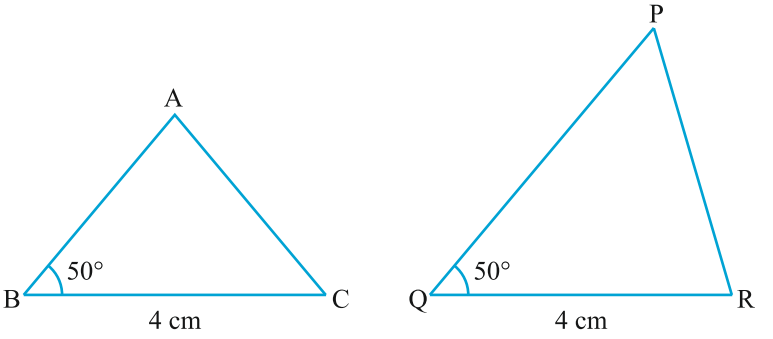


(i) (ii)

شکل 7.5

© BTSE NOT TO BE REPUBLISHED

اب دو ایسے مثلث بنائیے جن کا ایک ضلع 4 سم اور ایک زاویہ 50 کا ہو (شکل 5.6 دیکھیے) کیا یہ متماثل ہیں؟



شکل 7.6

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو مثلث متماثل نہیں ہیں۔

اس مشغلہ کو مثلثوں کے دوسرے جوڑوں کے لیے دہرائے۔

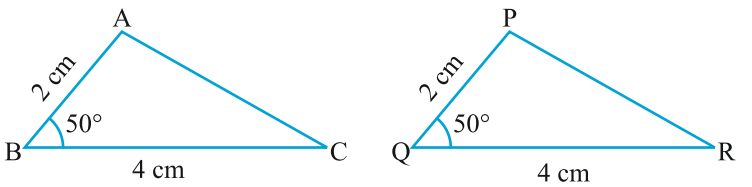
اس سے پتہ چلتا ہے کہ اضلاع کے ایک جوڑے یا اضلاع کے ایک جوڑے اور دو زاویوں کے ایک جوڑے کا برابر ہونا مثلث کے متماثل ہونے کے لیے کافی ہیں۔

کیا ہوا گر مساوی زاویوں کے دوسرے بازو (اضلاعی بھی مساوی ہوں؟

شکل 7.7 میں $\angle B = \angle Q, BC = QR$ اور $AB = PQ$ ہیں ΔABC اور ΔPQR کی متماثلت کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔

سابقہ معلومات سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ اس حالت میں دونوں مثلث متماثل ہونگے۔ ΔABC اور ΔPQR کے لیے اس بات کی تصدیق کیجیے۔

اس مشغلہ کو دوسرے مثلثوں کے جوڑے کے لیے دہرائیے کیا آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو ضلع اور ان کے درمیان کے زاویہ کا مساوی ہونا مثلثوں کی متماثلت کے لیے کافی ہے۔؟ ہاں یہ کافی ہے۔



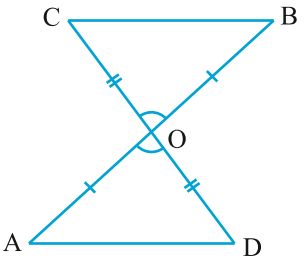
شکل 7.7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہ متماثلت کا پہلا اصول ہے۔

بدیہیہ 7.1: (SAS متماثلت کا اصول) دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو ضلع اور ان کے درمیان کا زاویہ اور دوسرے **مثلث** کے نظیری ضلع اور درمیانی زاویہ کے برابر ہو۔

اس نتیجہ کو پچھلے ثابت کیے گئے نتائج کی مدد سے ثابت نہیں کیا جاسکتا اس لیے اسکو بدیہہ کے طور پر صحیح قبول کیا جاتا ہے۔ (Appendix 1 دیکھیے)



شکل 7.8

آیئے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: شکل 7.8 میں $OA = OB$ اور $OD = OC$ دکھایئے کہ

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ اور $AD \parallel BC$

حل: آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ ΔAOD اور ΔBOC میں

$OA = OB$ اور $OD = OC$ (دیا ہوا ہے)

مزید کیوں کہ $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ سے بالمقابل زاویہ ہیں۔ اس لیے $\angle AOD = \angle BOC$

اس لیے $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS متماثلت کا اصول)

(ii) متماثل مثلثوں AOD اور BOC میں دوسرے نظیری حصہ بھی برابر ہوتے ہیں اس لئے $\angle OAD = \angle OBC$

اور یہ قطعات خط AD اور BC کے لئے متبادل زاویوں کے جوڑے ہیں۔

اس لیے $AD \parallel BC$

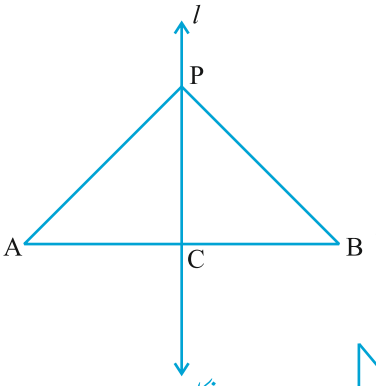
مثال 2: AB ایک قطعہ خط ہے اور l اس کا عمودی ناصف ہے۔ اگر کوئی نقطہ P، l پر واقع ہے تو دکھایئے کہ P، A اور B سے برابر فاصلہ پر ہے۔

حل: خط $l \perp AB$ اور C سے گزرتا ہے جو کہ AB کا وسطی نقطہ ہے۔ (شکل 7.9) آپ کو دکھانا ہے کہ $PA = PB$، ΔPCA اور ΔPCB پر غور کیجیے۔

ہمارے پاس ہے $AC = BC$ (C، AB کا وسطی نقطہ ہے)

$\angle PCA = \angle PCB = 90^0$ (دیا ہوا ہے)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



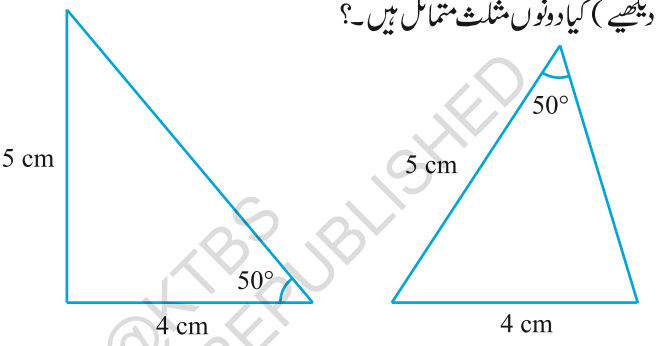
شکل 7.9

اس لیے PC = PC (مشترک)

اس لیے $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS متماثلت)

اس لیے PA = PB کیونکہ یہ متماثل مثلث کے نظیری اضلاع ہیں۔

آیئے اب دو مثلث ایسے بناتے ہیں جن کے اضلاع 4cm اور 5cm ہیں اور ایک زاویہ 50^0 جو مساوی اضلاع کے درمیان نہیں ہے (شکل 7.10 دیکھیے) کیا دونوں مثلث متماثل ہیں۔؟



شکل 7.10

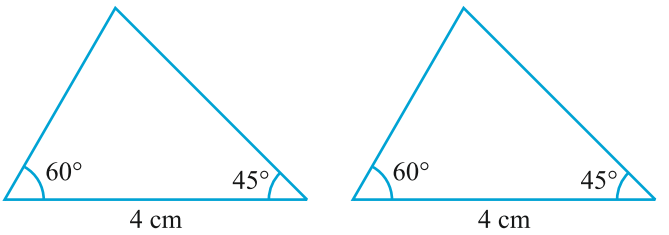
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

نوٹ کیجیے کہ دونوں مثلث متماثل نہیں ہیں۔

اس مشغلہ کے مثلثوں کے کچھ اور جوڑوں کے لیے دہرایئے۔ آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ مثلثوں کے متماثل ہونے کے لیے ضروری ہے کہ مساوی زاویہ مساوی ضلعوں کے درمیان ہوں۔

اس لیے SAS متماثلت اصول درست ہے لیکن ASS یا SSA درست نہیں۔

اب دو ایسے مثلث بنایئے جس میں دو زاویہ 60^0 اور 45^0 ہوں اور ان کے درمیان کا ضلع 4cm ہے (شکل 7.11 دیکھیے)



شکل 7.11

ان مثلثوں کو کاٹ کر نکالیے اور ایک مثلث کو دوسرے مثلث پر رکھیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ دیکھتے ہیں کہ ایک مثلث دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے، یعنی دونوں مثلث متماثل ہیں۔ اس مشغلہ کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔ آپ مشاہدہ کریں گے کہ دو زاویہ اور ان کے درمیان کے ضلع کا برابر ہونا مثلثوں کے لیے کافی ہے۔

اس نتیجہ کو ہم زاویہ۔ ضلع۔ زاویہ ASA متماثلت کا اصول کہتے ہیں۔ اس کو ASA کا اصول لکھتے ہیں۔ اپنے آپ نے پچھلی کلاسوں میں اس اصول کی تصدیق کی ہوگی۔ آیئے اس اصول کو بیان اور ثابت کرتے ہیں۔

کیونکہ اس نتیجہ کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے یہ مسئلہ کہلاتا ہے۔ اور اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم SAS بدیہہ کا استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.1: (ASA متماثلت اصول): دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویہ اور درمیانی ضلع کے برابر ہو۔

ثبوت: ہمیں دو مثلث ΔABC اور ΔDEF دیئے ہوئے ہیں۔ جس میں

$$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

اور

$$BC = EF$$

ہمیں ثابت کرنا ہے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

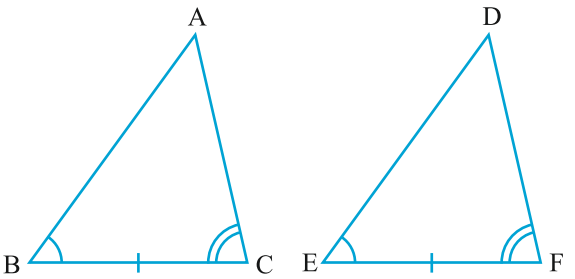
دو مثلثوں کو متماثل ثابت کرنے کے لیے تین باتیں/حالتیں سامنے آتی ہیں۔

حالت (i) مان لیجیے۔ $AB = DE$ (شکل 7.12 دیکھیے)

اب آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

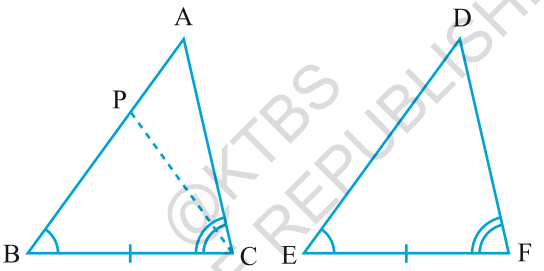
$AB = DE$	(مانا گیا ہے)
$\angle B = \angle E$	(دیا ہوا ہے)
$BC = EF$	(دیا ہوا ہے)
اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(SAS اصول)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 7.12

حالت ii: مان لیجیے اگر ممکن ہو AB > DE، اس لیے AB پر نقطہ P اس طرح لے سکتے ہیں کہ PB = DE۔ اب ΔPBC اور DEF پر غور کیجیے (شکل 7.13 دیکھیے)



شکل 7.13

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

مشاہدہ کیجیے کہ ΔPBC اور ΔDEF میں

PB = DE	(بناوٹ سے)
∠E = ∠E	(دیا ہوا ہے)
BC = EF	(دیا ہوا ہے)

اس لیے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

ΔPBC ≅ ΔDEF (متماثلت کا SAS ہے)

کیونکہ مثلث متماثل ہیں اس لیے ان کے نظیری حصہ بھی مساوی ہونگے۔

اس لیے	∠PCB = ∠DEF بدیہیہ SAS
لیکن ہمیں دیا ہوا ہے	∠ACB = ∠DEF
اس لیے	∠ACB = ∠PCB

لیکن کیا یہ ممکن ہے؟

یہ ممکن ہے اگر P اور A پر منطبق ہو یا ED = BA

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS بدیہ سے)

حالت (iii) اگر $AB < DE$، ہم DE پر نقطہ M اس طرح چنتے ہیں کہ ME = AB اور حالت (ii) میں دیئے گئے دلائل کو دہراتے ہوئے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ AB=DE اور اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

فرض کیجیے اب دو مثلثوں میں زاویوں کے دو جوڑے اور نظیری ضلعوں کا ایک جوڑا برابر ہے لیکن ضلع نظیری مساوی زاویوں کے درمیان نہیں ہے۔ کیا مثلث اب بھی متماثل ہیں؟ آپ دیکھیں گے کہ یہ متماثل ہیں کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں کہ کیوں؟

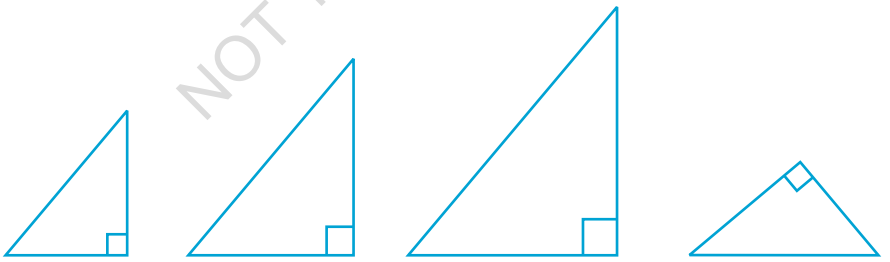
آپ جانتے ہیں کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔ اس لیے اگر زاویوں کے دو جوڑے مساوی ہیں تو تیسرا بھی مساوی ہوگا۔ (مساوی زاویوں کا حاصل جمع - 180^0)

اس لیے دو مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر کوئی زاویوں کے دو جوڑے اور نظیری ضلعوں کا ایک جوڑا مساوی ہوں۔ ہم اس کو AAS متماثلت اصول کہتے ہیں۔

اس لیے اب مندرجہ ذیل مشغلہ کرتے ہیں۔

40^0، 50^0 اور 90^0 زاویوں کے مثلث بنایئے۔ ایسے کتنے مثلث آپ بنا سکتے ہیں۔؟

درحقیقت مختلف لمبائیوں والے اضلاع کے ایسے بہت سے مثلث بنائے جا سکتے ہیں۔ (شکل 7.14 دیکھیے)



شکل 7.14

مشاہدہ کیجیے کہ یہ مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہو بھی سکتے ہیں اور نہیں بھی۔

اس لیے تینوں زاویوں کا مساوی ہونا مثلثوں کی متماثلت کے لیے کافی نہیں ہے۔ اس لیے مثلثوں کی متماثلت کے لیے تین مساوی حصوں میں سے ایک ضلع ہونا ضروری ہے اس لیے اب کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

@KTBC NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 3: قطع خط AB ایک دوسرے قطع خط CD کے متوازی ہے۔ O، AD کا وسطی نقطہ ہے۔ (شکل 7.15 دیکھیے) دکھایئے کہ (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O، BC کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

حل: (i) ΔAOB اور ΔDOC پر غور کیجیے۔

$\angle ABO = \angle DCO$ (متبادل زاویہ کیونکہ $AB \parallel CD$ اور BC قاطع ہے)

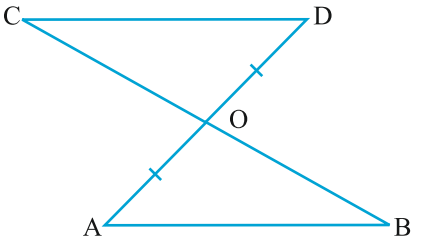
$\angle AOB = \angle DOC$ (بالمقابل زاویہ)

$OA = OD$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS اصول)

(ii) $OB = OC$ (CPCT)

اس لیے O؛ BC کا وسطی نقطہ ہے۔

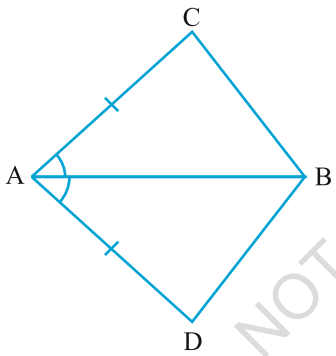


شکل 7.15

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 7.1

1. چار ضلعی ACBD میں
AC=AD اور AB، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔ دکھایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$
BC اور BD کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔



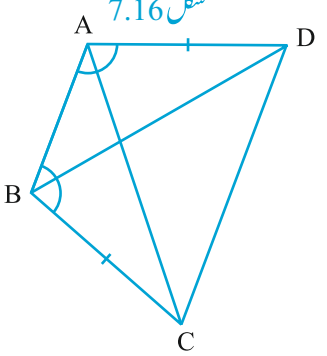
شکل 7.16

2. ABCD ایک چار ضلعی ہے جس میں AD=BC اور $\angle DAB = \angle CBA$ ہے (شکل 5.17 دیکھیے)
ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

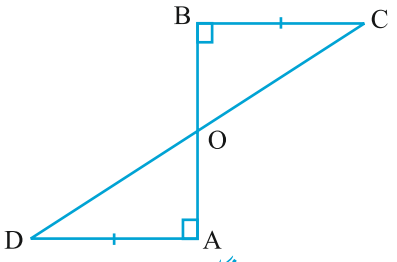
(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



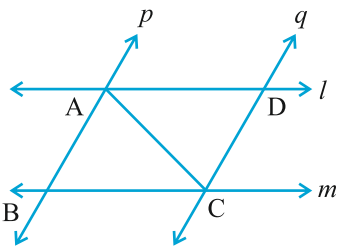
شکل 7.17

3. AD اور BC ایک قطع خط AB کے مساوی عمود ہیں (شکل 7.18 دیکھیے) دکھایئے کہ AB، CD کی تصنیف کرتا ہے۔



شکل 7.18

4. l اور m دو متوازی خطوط ہیں۔ جن کو دو متوازی خطوط p اور q قطع کرتے ہیں (شکل 7.19 دیکھیے) دکھایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

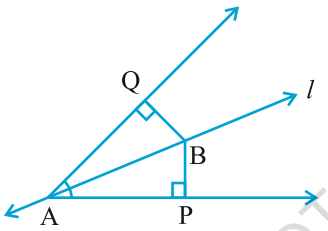


شکل 7.19

5. خط l، $\angle A$ کا ناصف ہے اور B، l پر کوئی نقطہ ہے۔ BP اور BQ نقطہ B سے $\angle A$ کے بازوؤں پر دو عمود ہیں۔ (شکل 7.20 دیکھیے) دکھایئے کہ:

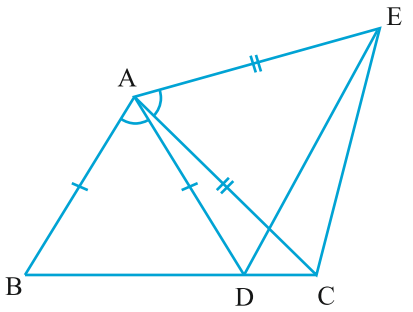
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ یا B، $\angle A$ کے بازوؤں سے برابر کا فاصلہ پر ہے۔



شکل 7.20

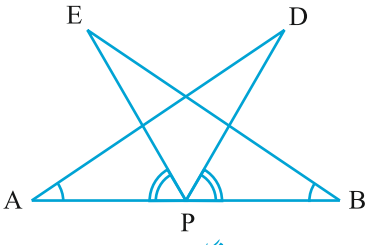
6. شکل 7.21 میں $AC = AE$, $AB = AD$ اور $\angle BAD = \angle EAC$ دکھایئے کہ $BC = DE$



شکل 7.21

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7. AB ایک قطع خط ہے اور P اسکا وسطی نقطہ، D اور E، AB کے ایک ہی طرف ایسے نقطے ہیں کہ $\angle BAD = \angle ABE$ اور $\angle EPA = \angle DPB$ (شکل 7.22 دیکھئے) دکھایئے کہ:

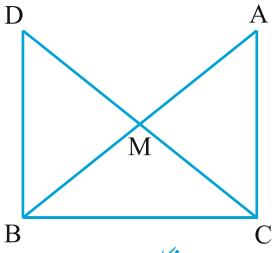


شکل 7.22

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$

8. ایک قائم زاوی مثلث ABC ہے $\angle C$ زاویہ قائمہ ہے۔ M وتر AB کا وسطی نقطہ ہے۔ C کو M سے ملایا جاتا ہے اور D تک اس طرح بڑھایا جاتا ہے۔ کہ $CM = DM$۔ نقطہ D کو نقطہ B سے ملایا جاتا ہے۔ (شکل 7.23 دیکھیے) دکھایئے کہ



شکل 7.23

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ایک قائم زاویہ ہے۔

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACD$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

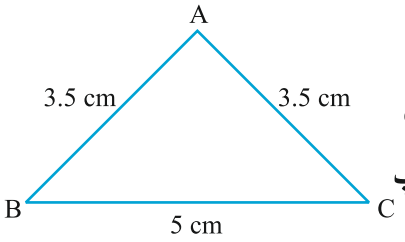
7.4 مثلث کی کچھ خصوصیات (Some Properties of a Triangle)

اوپر دیئے گئے سیکشن میں آپ نے مثلثوں کی متماثلت کے دو اصول پڑھے۔ آیئے اب کا اطلاق ان مثلثوں سے متعلق خصوصیات کے مطالعہ کے لیے کریں جن کے دو اضلاع مساوی ہوں۔

مندرجہ ذیل عملی کام کیجیے:

ایک مثلث بنایئے جس میں دو اضلاع مساوی ہوں مان لیجیے ہر ایک 3.5 سینٹی میٹر کا اور تیسرا ضلع 5 سینٹی میٹر کا ہے (شکل 7.24 دیکھیے) آپ ایسی بناوٹیں پچھلی کلاسوں میں کر چکے ہیں۔

کیا آپ کو یاد ہے کہ ایسے مثلث کیا کہلاتے ہیں۔



شکل 7.24

ایسے مثلث جس میں دو اضلاع مساوی ہوں مساوی الساقین کہلاتا ہے۔ اس لیے ΔABC (شکل 7.24 میں) ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں $AB = AC$

اب $\angle B$ اور $\angle C$ کی پیائش کیجیے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔

اس مشغلہ کو مختلف اضلاع والے دوسرے مساوی الساقین مثلث کے لیے دہرایئے۔

آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایسے ہر ایک مثلث میں مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ بھی مساوی ہیں۔

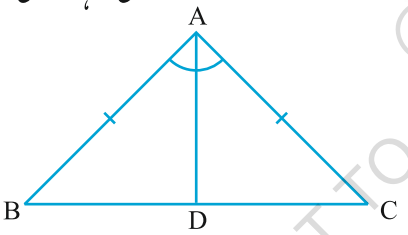
یہ ایک بہت اہم نتیجہ ہے۔ جو یقیناً تمام مساوی الساقین مثلث کے لیے درست ہے۔ اس کا ثبوت ہم مندرجہ ذیل میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 7.2: مساوی الساقین مثلث کے مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ بھی مساوی ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کو ہم کئی طریقوں سے ثابت کر سکتے ہیں۔ ایک ثبوت مندرجہ ذیل ہے۔

ثبوت: ہمیں ایک مساوی الساقین مثلث ABC دیا ہوا ہے۔ جس میں AB=AC ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle B = \angle C$

آیئے $\angle A$ کا ناصف بناتے ہیں ۔ اور مان لیجیے D، $\angle A$ کے ناصف اور BC کا نقطہ تقاطع ہے (شکل 7.25 دیکھیے)



شکل 7.25

ΔBAD اور ΔCAD

$AB = AC$ (دیا ہوا ہے)

$\angle BAD = \angle CAD$ (بناوٹ سے)

$AD = AD$ (مشترک)

اس لیے $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (اصول SAS)

اس لیے $\angle ABD = \angle ACD$ کیونکہ متماثل مثلثوں کے نظیری زاویہ ہیں۔

اس لیے $\angle B = \angle C$

کیا اس کا معکوس بھی درست ہے؟ یعنی اگر کسی مثلث کے دو زاویہ مساوی ہیں تو کیا ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ان کے سامنے کے اضلاع بھی مساوی ہیں؟

مندرجہ ذیل عملی کام کیجیے:

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

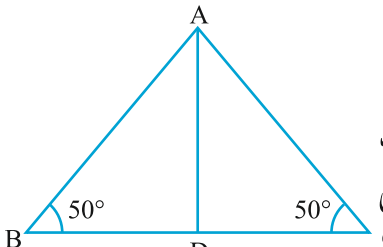
کسی بھی لمبائی BC کا ایک مثلث ABC بنائیے جس میں $\angle B = \angle C = 50^0$ کا ناصف کھینچیے اور مان لیجیے کہ یہ BC کو D پر قطع کرتا ہے۔ (شکل 7.26)

اس مثلث کو کاغذ کی شیٹ سے کاٹ لیجیے اور اس کو AD پر سے اس طرح موڑیئے کہ راس C اور راس B کو منطبق کرے۔

اضلاع AC اور AB کے بارے میں کیا خیال ہے۔؟

مشاہدہ کیجیے کہ AB، AC کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے۔

اس لیے $AC = AB$



شکل 7.26

اس مشغلہ کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔ ہر ایک کے لیے آپ مشاہدہ کریں گے کہ مساوی زاویوں کے سامنے کے اضلاع بھی مساوی ہیں۔ اس لیے ہمارے پاس مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

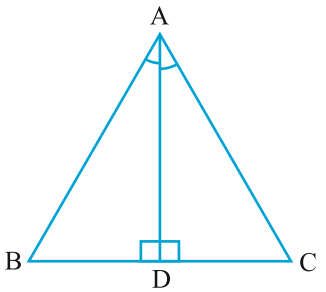
مسئلہ 7.2: مثلث کے مساوی زاویوں کے سامنے کے اضلاع بھی مساوی ہوتے ہیں۔

یہ مسئلہ 7.3 کا معکوس ہے۔

اس لیے اس مسئلہ کو آپ ASA متماثلت کے اصول کا استعمال کر ثابت کر سکتے ہیں۔

اس نتیجہ کو استعمال کرائیے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 4: ΔABC میں $\angle A$ کا ناصف AD ضلع BC پر عمود ہے۔ (شکل 7.27 دیکھیے) دکھائیے کہ $AB = AC$ اور ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



شکل 7.27

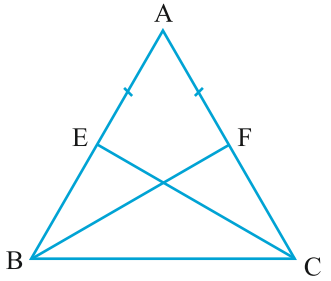
حل: ΔABD اور ΔACD میں

$\angle BAD = \angle CAD$	(دیا ہوا ہے)
$AD = AD$	(مشترک)
$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$	(دیا ہوا ہے)
اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	(اصول ASA)
اس لیے $AB = AC$	(CPCT)

NOT TO BE REPUBLISHED @KEBS

یا ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

مثال 5: E اور F بالترتیب ΔABC کے مساوی اضلاع AC اور ABC کے وسطی نقطے ہیں۔ (شکل 7.28 دیکھیے) دکھایئے کہ $BF = CE$



شکل 7.28

حل: ΔABF اور ΔACE میں $AB = AC$ (دیا ہوا ہے)

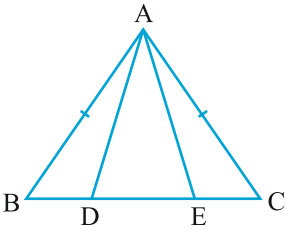
$\angle A = \angle A$ مشترک

$AF = AE$ (مساوی الاضلاع کے نصف)

اس لیے $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (اصول SAS)

اس لیے $BF = CE$ (CPCT)

مثال 6: ایک مساوی الساقین مثلث ABC جس میں $AB = AC$، D اور E، BC پر ایسے نقطے ہیں کہ $BE = CD$ (شکل 7.29 دیکھیے) دکھایئے کہ $AD = AE$



شکل 7.29

حل: ΔABD اور ΔACE میں

$AB = AC$

دیا ہوا ہے۔ (1)

$\angle B = \angle C$ (مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ) (2)

اس لیے $BE - DE = CD - DE$

یعنی $BD = CE$ (3)

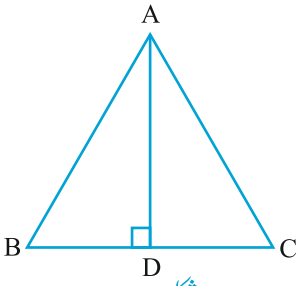
اس لیے $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (1)، (2)، (3) اور SAS اصول کا استعمال کرنے پر

اس سے ہمیں ملتا ہے $AD = AE$ (CPCT)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 7.2

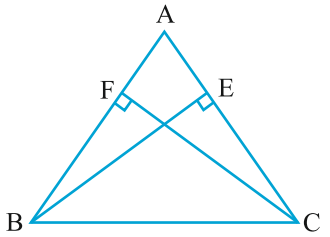
1. ایک مساوی الساقین مثلث ABC میں $AB = AC$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ A کو O سے ملایئے۔ دکھایئے۔



شکل 7.30

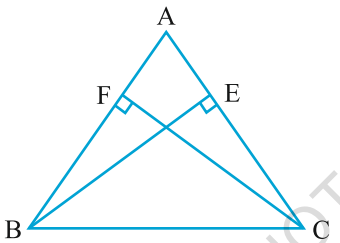
(i) $OB = OC$ (ii) AO، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

2. ΔABC میں AD، ضلع BC کا عمودی ناصف ہے۔ (شکل 7.30 دیکھیے) دکھایئے کہ ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB=AC



شکل 7.31

3. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں ارتفاعات (altitudes) BE اور CF بالترتیب اضلاع AC اور AB پر کھینچے گئے ہیں (شکل 7.31 دیکھیے) دکھایئے کہ یہ ارتفاعات مساوی ہیں۔

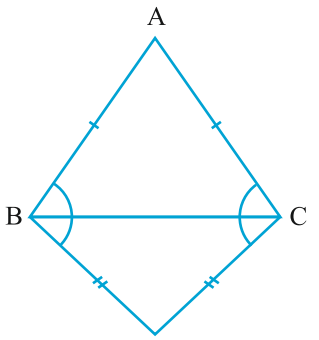


شکل 7.32

4. ABC ایک مثلث ہے جس میں اضلاع AC اور AB کے ارتفاعات BE اور CF مساوی ہیں (شکل 7.32 دیکھیے) دکھایئے کہ

(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

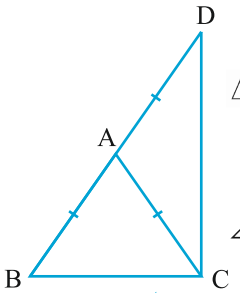
(ii) $AB = AC$ یعنی ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



شکل 7.33

5. ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ BC پر بنے دو مساوی الساقین مثلث ہیں (شکل 7.33 دیکھیے) دکھایئے کہ $\angle ABD = \angle ACD$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 7.34

6. ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔جس میں $AB = AC$ ضلع BA کو D تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ $AD = AB$ ہے (شکل 7.34 دیکھئے) دکھایئے کہ ΔBCD ایک زاویہ قائمہ ہے۔

7. ABC ایک قائم زاوی مثلث ہے جس میں $\angle A = 90^0$ اور $AB = AC$ ہے تو $\angle B$ اور $\angle C$ معلوم کیجیے

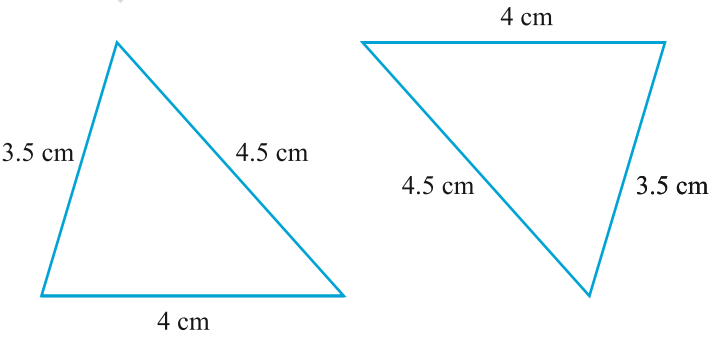
8. دکھایئے کہ مساوی ضلعی مثلث کا ہر ایک زاویہ 60^0 کا ہوتا ہے۔

7.5: مثلثوں کی متماثلت کے کچھ اور اصول

(Some More Criteria for Congruence of Triangles)

اس باب کے شروع میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا دوسرے مثلث کے تینوں زاویوں کے برابر ہونا ان کی متماثلت کے لیے کافی نہیں ہے۔آپ متحیّر ہونگے کہ آیا ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسرے مثلث کے تینوں اضلاع کے برابر ہوتا مثلثوں کی متماثلت کے لیے کافی ہے۔آپ پچھلی کلاسوں میں تصدیق کر چکے ہیں کہ یہ یقیناً درست ہے۔

مزید یقین کرنے کے لیے 4cm ، 3.5cm اور 4.5cm اضلاع والے دو مثلث بنایئے (شکل 5.35 دیکھیے) ان کو کاٹ لیجیے اور ایک دوسرے پر رکھ کر دیکھیے کیا آپ مشاہدہ کرتے ہیں وہ ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں اگر مساوی ضلعوں کو مساوی ضلعوں پر رکھا جائے۔اس لیے مثلث متماثل ہیں۔



شکل 7.35

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس مشغلہ کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔ ہم متماثلت کے ایک اور اصول تک پہنچتے ہیں۔

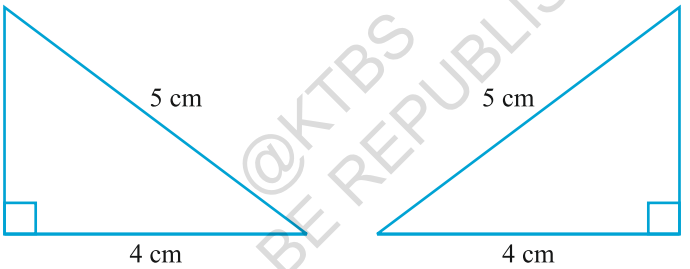
مسئلہ 7.4: (SSS متماثلت اصول) اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسرے مثلث کے تینوں اضلاع کے مساوی ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کو ہم مناسب بناوٹ (عمل) کے استعمال سے ثابت کر سکتے ہیں۔

آپ SAS متماثلت اصول میں دیکھ چکے ہیں کہ مساوی زاویوں کے جوڑے نظیری مساوی اضلاع کے جوڑوں کے درمیان میں ہونے چاہئیں ۔ اگر ایسا نہیں ہوتا تو ضروری نہیں کہ مثلث متماثل ہوں۔

اس عملی کام کو کیجیے۔

وتر 5cm اور ضلع 4cm والے دو قائم زاوی مثلث بنائیے (شکل 7.36 دیکھیے)



شکل 7.36

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ان کو کاٹ کیجیے اور ایک مثلث کو دوسرے کے اوپر اس طرح رکھیے کہ مساوی ضلعوں پر ہوں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ دونوں مثلث ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں اس لیے یہ متماثل ہیں اسی مشغلہ کو قائم مثلثوں کے دوسرے جوڑوں کے ساتھ دہرائیے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔؟

آپ پاتے ہیں کہ دو قائم مثلث متماثل ہوتے ہیں اگر اضلاع کا ایک جوڑا اور وتر آپس میں برابر ہوں پچھلی کلاسوں میں آپ اس کی تصدیق کر چکے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ اس متماثلت میں زاویہ قائمہ درمیانی زاویہ نہیں ہے۔

اس طرح سے آپ کو متماثلت کا ایک اور اصول ملتا ہے۔

مسئلہ 7.5: RHS متماثلت اصول: دو قائم زاوی مثلثوں میں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے ایک وتر

اور ضلع کے مساوی ہو تو دونوں مثلث متماثل ہوں گے۔

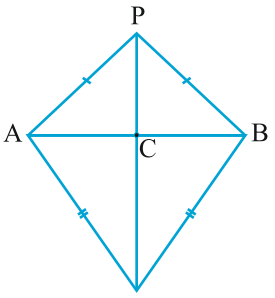
نوٹ کیجیے کہ RHS کا مطلب زاویہ قائمہ-وتر-ضلع

آیئے اب کچھ مثال حل کرتے ہیں۔

مثال 7: AB ایک قطع خط ہے۔AB کی مخالف سمتوں میں P اور Q دو ایسے نقطے ہیں کہ ہر ایک A اور B نقطوں سے برابر فاصلہ پر ہے۔(شکل 7.37 دیکھیئے) دکھایئے کہ خط PQ، AB کا عمودی ناصف ہے۔

حل: آپ کو یاد ہوگا کہ PA=PB اور QA=QB اور آپ کو دکھانا ہے کہ $PQ \perp AB$ اور AB,PQ کی تنصیف کرتا ہے۔

مان لیجیے PQ، AB کو C پر قطع کرتا ہے۔



شکل 7.37

کیا آپ اس شکل میں دو متماثل مثلثوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟

آیئے ہم ΔPAQ اور ΔPBQ لیتے ہیں۔

ان مثلثوں میں

$AP = BP$ (دیا ہوا ہے)

$AQ = BQ$ (دیا ہوا ہے۔)

$PQ = PQ$ (مشترک)

اس لیے $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (اصول SSS)

اس لیے $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT)

آیئے اب ΔPAC اور ΔPBC پر غور کرتے ہیں۔

آپ کے پاس ہے $AP = BP$ (دیا ہوا ہے۔)

$\angle APC = \angle BPC$ $(\angle APQ = \angle BPQ)$ پہلے ثابت ہو چکا ہے۔

$PC = PC$ (مشترک)

اس لیے $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (اصول SAS)

اس لیے $AC = BC$ (CPCT)

اور $\angle ACP = \angle BCP$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اور $\angle ACP + \angle BCP = 180^0$ (CPCT)

اور $2\angle ACP = 180^0$ (خطی جوڑا)

یا $\angle ACP = 90^0$ (2)

(1)اور(2) سے آپ آسانی سے نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ AB،PQ کا عمودی ناصف ہے۔

[نوٹ کیجیے کہ ΔPAQ اور ΔPBQ کی متماثلت کو دکھائے بغیر آپ $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ نہیں دکھا سکتے

حالانکہ AP=BP (دیا ہوا ہے)

PC= PC (مشترک)

$\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB میں مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ)

کیونکہ یہ نتائج ہمیں SSA اصول دیتے ہیں ۔ جو مثلثوں کی متماثلت کے لیے ہمیشہ درست نہیں ہے۔ اور زاویہ بھی مساوی ضلعوں کے جوڑوں کے درمیان نہیں ہے۔]

ان کے کچھ اور مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 8: P ایک نقطہ ہے جو خطوط l اور m جو ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں اور مساوی فاصلہ پر ہے (شکل 7.38 دیکھیے) دکھائیے کہ خط AP ان کے درمیان زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

حل: آپ کو دیا ہوا ہے کہ خطوط l اور m ایک دوسرے کو نقطہ A پر قطع کرتے ہیں۔ مان لیجیے یہ دیا ہوا ہے کہ PB=PC

آپ کو دکھانا ہے کہ $\angle PAB = \angle PAC$

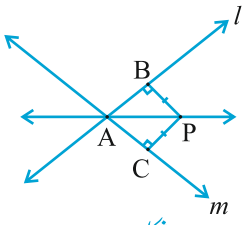
اس لیے ΔPAB اور ΔPAC پر غور کیجیے۔ ان دونوں مثلثوں میں

PB=PC (دیا ہوا ہے)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^0$ (دیا ہوا ہے)

PA = PA (مشترک)

اس لیے $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (اصول RHS)



شکل 7.38

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

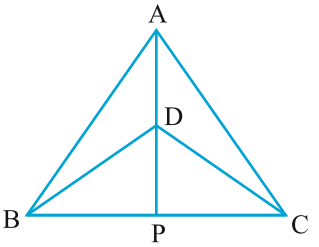
اس لیے $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

نوٹ کیجیے کہ یہ نتیجہ مشق 7.1 سوال 5 میں ثابت کیے گئے نتیجہ کا معکوس ہے۔

7.3

مشق 7.3

1. ΔABC اور ΔDBC ایک قاعدہ BC پر ہے دو مساوی الساقین مثلث میں اور ان کے راس A اور D ضلع BC کے ایک ہی طرف ہیں (شکل 7.39 دیکھیے) اگر AD کو اس طرح بڑھایا جاتا ہے کہ وہ BC کو P پر قطع کرتے تو دکھائیے کہ:



شکل 7.39

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

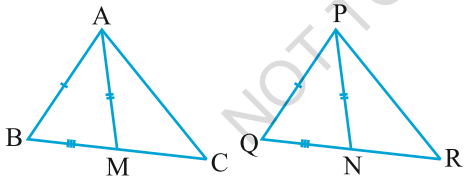
(iii) AP، $\angle A$ اور $\angle D$ دونوں کی تنصیف کرتا ہے۔

(iv) AP، BC کا عمودی ناصف ہے۔

2. AD مساوی الساقین مثلث ABC کا ارتفاع ہے جس میں $AB = AC$ دکھائیے کہ

(i) AD، BC کی تنصیف کرتا ہے۔ (ii) AD، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

3. ΔABC کے دو اضلاع AB اور BC اور وسطانیہ AM بالترتیب ΔPQR کے اضلاع PQ اور QR اور وسطانیہ PN کے مساوی ہیں۔ (شکل 7.40 دیکھیے) دکھائیے کہ:



شکل 7.40

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

4. BE اور CF، ABC کے درمیان ارتفاعت ہیں۔

RHS متماثلت کے اصول کو استعمال کیجیے ثابت

کیجیے کہ ABC مساوی الساقین مثلث ہے۔

5. ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں

$AB = AC$ ہے $AP \perp BC$ بنائیے اور دکھائیے کہ $\angle B = \angle C$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.6 خلاصہ Summary

اس سبق میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط کے بارے میں پڑھا ہے۔

1. دو اشکال متماثل ہیں اگر ان کی شکل اور سائز یکساں ہوں۔
2. ایک ہی نصف قطر والے دائرہ متماثل ہوتے ہیں۔
3. یکساں ضلع والے مربع متماثل ہوتے ہیں۔
4. مطابقت $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ اور $C \leftrightarrow Q$ کے تحت اگر دو مثلث ABC اور PQR متماثل ہیں تو ہم علامتی طور پر ہم ان کو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔
5. اگر ایک مثلث کے دو ضلع اور انکے درمیان کا زاویہ دوسرے مثلث کے دو ضلع اور ان کے درمیان کے زاویہ کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہونگے۔ (متماثلت کا SAS اصول)
6. اگر ایک مثلث کے دو زاویہ اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویہ اور ان کے درمیان کے ضلع کے برابر ہوں تو دونوں مثلث مساوی ہونگے۔ (متماثلت کا ASA اصول)
7. اگر ایک مثلث کے دو زاویہ اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے دو زاویہ اور نظیری ضلع برابر ہوں تو دونوں مثلث متوازی ہونگے۔ (AAS متماثلت اصول)
8. مثلث کے مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
9. مثلث کے مساوی زاویوں کے سامنے کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔
10. مساوی ضلعی مثلث کا ہر زاویہ 60^0 کا ہوتا ہے۔
11. اگر ایک مثلث کے تینوں ضلع دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے برابر ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہونگے (متماثلت کا SSS اصول)
12. اگر دو قائم زاوی مثلثوں میں ایک مثلث وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ایک ضلع کے برابر ہو تو دونوں مثلث متماثل ہونگے۔ (متماثلت کا RHS اصول)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

باب 8

I5I9N9

چار ضلعی (QUADRILATERALS)

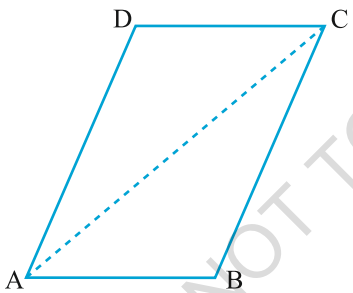
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.1 متوازی الاضلاع کی خصوصیات (Properties of a Parallelogram)

آیئے ایک عملی کام کرتے ہیں

ایک کاغذ کی ایک شیٹ سے وتر پر سے متوازی الاضلاع کو کاٹئے (شکل 8.1 دیکھیے) آپ کو دو مثلث حاصل ہوتے ہیں؟ آپ ان مثلثوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ایک مثلث کو دوسرے پر رکھئے' اگر ضرورت ہو تو اس کو پلٹ کر رکھیے۔



شکل 8.1

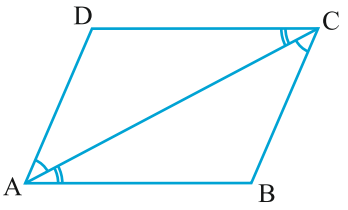
آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں- مشاہدہ کیجیے کہ دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں- اس مشغلہ کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرایئے ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے-

آیئے اس نتیجہ کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 8.1: متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

ثبوت: مان لیجیے A B CD ایک متوازی الاضلاع ہے اور AC اس کا وتر [شکل 8.2 دیکھیے] مشاہدہ کیجیے کہ وتر AC متوازی الاضلاع کو دو مثلثوں میں منقسم کرتا ہے یعنی ΔABC اور ΔCDA ہمیں ان مثلثوں کو متماثل ثابت کرنے کی ضرورت ہے۔

ΔABC اور ΔCDA میں نوٹ کیجیے کہ $BC \parallel AD$ اور AC ایک قاطع ہے



شکل 8.2

اس لیے $\angle BCA = \angle DCA$ (متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے)

اور $AB \parallel DC$ اور AC ایک قاطع ہے

اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$ (متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے)

اور $AC = CA$ (مشترک)

اس لیے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA اصول)

یا وتر AC متوازی الاضلاع ABCD کو دو متماثل مثلث ABC اور CDA میں منقسم کرتا ہے۔ اب متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع کی پیمائش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پاتے ہیں کہ AB=DC اور AD = BC' یہ متوازی الاضلاع کی دوسری خصوصیت ہیں جو نیچے بیان کی گئی ہے۔

مسئلہ 8.2 متوازی الاضلاع میں مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

آپ پہلے ثابت کر چکے ہیں کہ وتر متوازی الاضلاع کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتے ہیں تو ان کے نظیری حصوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ وہ برابر ہیں۔

اس لیے AB=DC اور AD=BC

اس نتیجہ کا معکوس کیا ہے؟ آپ: پہلے ہی جانتے ہیں کہ کسی مسئلہ میں جو دیا ہوا ہوتا ہے اسی کو اس کے معکوس میں ثابت کیا جاتا ہے اور جو مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے وہ اس کے معکوس میں دیا ہوا ہوتا ہے۔ اس طرح سے مسئلہ 8.2 کو ہم مندرجہ ذیل میں بیان کرتے ہیں

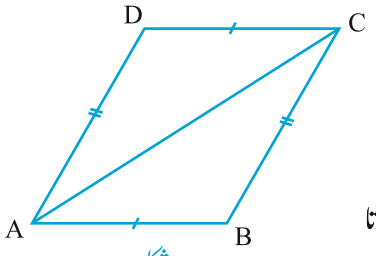
اگر ایک چارضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے تب اس کے مخالف اضلاع کا ہر جوڑا مساوی ہوتا ہے اس لیے اس کا معکوس ہے۔

مسئلہ 8.3: اگر کسی چارضلعی کے مخالف اضلاع کا ہر جوڑا مساوی ہو تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں کیوں؟

مان لیجیے چارضلعی ABCD کے اضلاع AB اور CD مساوی ہیں اور AD=BC [شکل 8.3 دیکھیے] وتر AC بنائیے

@KTRSI NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 8.3

ظاہر ہے $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$

اور $\angle BCA = \angle DAC$ (کیوں؟)

آپ ابھی دیکھ چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع کا ہر مخالف جوڑا مساوی ہوتا ہے۔اس کے برعکس اگر کسی چارضلعی کا ہر ایک مخالف جوڑا مساوی ہو تو چارضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے کیا ہم مخالف زاویوں کے لیے بھی یہی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

ایک متوازی الاضلاع بنائیے اور اس کے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

مخالف زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہے۔

اس مشغلہ کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرائیے۔ہم ایک اور نتیجہ کی طرف پہنچتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے:

مسئلہ 8.4: ایک متوازی الاضلاع میں مخالف زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

کیا اس مسئلہ کا معکوس بھی درست ہے؟ چارضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت اور کسی قاطع کے ذریعے متوازی خطوط کو قطع کرنے پر حاصل نتائج کا استعمال کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا معکوس بھی درست ہے۔اس لیے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 8.5: اگر ایک چارضلعی میں مخالف زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہو تو یہ متوازی الاضلاع ہوگا۔یہ متوازی الاضلاع کی ایک اور خصوصیت ہے۔اس لئے اس کا مطالعہ کرتا ہے ایک متوازی اضلاع ABCD بنائیے اور اس کے دونوں وتر بنائیے جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں [شکل 8.4 دیکھیے]

OA، OB، OC اور OD کی پیمائش کیجیے

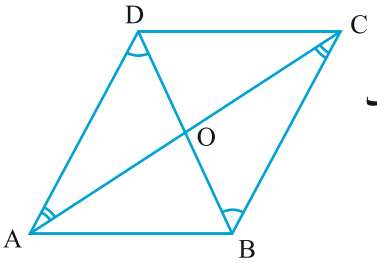
آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کریں گے کہ OA=OC اور OB = OD یا O دونوں وتروں کا وسطی نقطہ ہے۔

اسی مشغلہ کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرائیے: ہر مرتبہ آپ نوٹ کرینگے کہ O، وتروں کا وسطی نقطہ ہے۔اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 8.6: متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

اب کیا ہوگا اگر چارضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں؟ کیا یہ متوازی الاضلاع ہوگا؟ یقیناً یہ صحیح ہے، یہ نتیجہ مسئلہ

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED



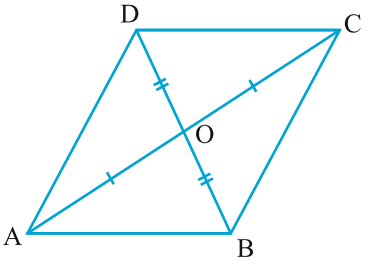
شکل 8.4

8.6 کا معکوس ہے۔ یہ نیچے دیا ہوا ہے

مسئلہ 8.7: اگر کسی چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اب اس مسئلہ کو مندرجہ ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ شکل 8.5 میں یہ دیا ہوا ہے کہ OA=OC اور OB=OD



شکل 8.5

اس لیے $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle ABO = \angle CDO$ (کیوں؟)

اس سے ہمیں حاصل ہوتا $AB \parallel CD$

اسی طرح سے $AD \parallel BC$ اس لیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

آیئے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

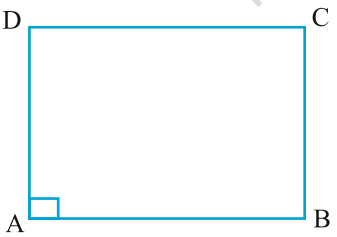
مثال 1: دکھایئے کہ مستطیل کا ہر زاویہ زاویہ قائمہ ہے۔

حل: آیئے دہراتے ہیں کہ مستطیل کیا ہے۔

مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

مان لیجیے ABCD ایک مستطیل ہے۔ جس میں $\angle A = 90^0$

ہمیں دکھانا ہے کہ $\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$



شکل 8.6

ہمارے پاس ہے $AD \parallel BC$ اور AB ایک قاطع ہے [شکل 8.6 دیکھیے]

اس لیے $\angle A + \angle B = 180^0$ (قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ)

لیکن $\angle A = 90^0$

اس لیے $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

اب $\angle C = \angle A$ اور $\angle D = \angle B$ (متوازی الاضلاع کے مخالف زاویہ)

اس لئے $\angle C = 90^0$ اور $\angle D = 90^0$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لیے مستطیل کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

مثال 2: دکھایئے کہ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

حل: معین ABCD (شکل 8.7 دیکھیے) پر غور کیجیے۔

آپ جانتے ہیں کہ AB=BC=CD=DA (کیوں؟)

اب ΔAOD اور ΔCOD میں DOA= OC (متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

OD=OD (مشترک)

AD=CD (دیا ہوا ہے)

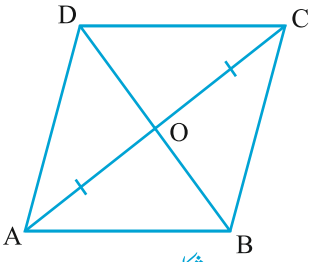
اس لیے $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS متماثلت اصول)

اس لیے $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

لیکن $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ (خطی جوڑ)

اس لیے $2\angle AOD = 180^0$

یا $\angle AOD = 90^0$



شکل 8.7

اس طرح سے معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں

مثال 3: ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB=AC ہے۔ AD خارجی زاویہ $\angle PAC$ کی تنصیف کرتا ہے اور AB || CD (شکل 8.8 دیکھیے) دکھایئے کہ

(i) $\angle DCA = \angle BCA$ اور (ii) ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

حل: (i) ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں AB=AC

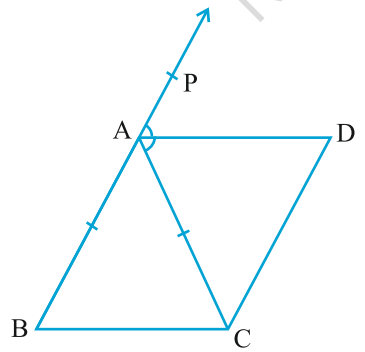
(دیا ہوا ہے)

اس لیے $\angle ACB = \angle ABC$ (مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ)

$\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (مثلث کا خارجی زاویہ)

یا $\angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

اب AD، $\angle PAC$ کی تنصیف کرتا ہے (2)



شکل 8.8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لیے $\angle PAC = 2\angle DAC$

اس لیے $2\angle DAC = 2\angle ACB$ [(1)اور(2) سے]

یا $\angle DAC = \angle ACB$

(ii) اب یہ مساوی زاویہ متبادل داخلی زاویوں کا جوڑا بناتے ہیں جب خطوط BC اور AD کو قاطع AC قطع کرتا ہے۔

اس لیے $BC \parallel AD$

اور $BA \parallel CD$ دیا ہوا ہے

اب چارضلعی ABCD کے مخالف اضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہیں۔

اس لیے ABCD ایک متوازی اضلاع ہے

مثال 4: دو متوازی خطوط l اور m کو قاطع p قطع کرتا ہے (شکل 8.9 دیکھیے)۔ دکھایئے کہ داخلی زاویوں کے ناصفوں سے بنا چارضلعی مستطیل ہے۔

حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $PS \parallel QR$ اور قاطع p ان کو نقطہ A اور C پر بالترتیب قطع کرتا ہے۔

$\angle PAC$ اور $\angle ACQ$ کے ناصف نقطہ B پر قطع کرتے ہیں اور $\angle ACR$ اور $\angle SAC$ نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ ہمیں دکھانا ہے کہ چارضلعی ABCD ایک مستطیل ہے

اب $\angle PAC = \angle ACR$ (متبادل زاویہ کیوں $l \parallel m$ اور p ایک قاطع ہے)

اس لیے $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

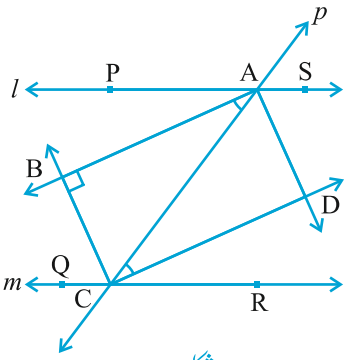
یعنی $\angle BAC = \angle ACD$

یہ خطوط AB اور DC کے لیے قاطع AC سے متبادل زاویوں کا جوڑا بناتے ہیں اور یہ مساوی بھی ہے

اس لیے $AB \parallel DC$

اسی طرح سے $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ اور $\angle CAD$ پر غور کیجیے)

اس لیے چارضلعی ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے



شکل 8.9

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

اور $\angle PAC + \angle CAS = 180^0$ (خطی جوڑا)

اس لیے $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

یا $\angle BAC + \angle CAD = 90^0$

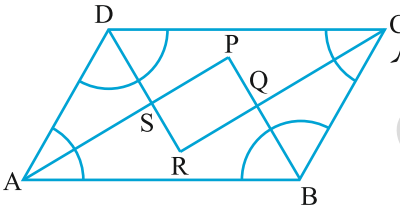
یا $\angle BAD = 90^0$

اس لیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ 90^0 ہے۔

اس لیے ABCD ایک مستطیل ہے۔

مثال 5: دکھایئے کہ متوازی الاضلاع کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کی تشکیل کرتے ہیں۔

حل: مان لیجیے P, Q, R اور S بالترتیب متوازی الاضلاع ABCD کے $\angle A$ اور $\angle B$، $\angle B$ اور $\angle C$، $\angle C$ اور $\angle D$، $\angle D$ اور $\angle A$ کے ناصفوں کے نقطۂ تقاطع ہیں۔ (شکل 8.10 دیکھیے)



شکل 8.10

ΔASD میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

کیوں کہ DS, $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے اور AS, $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

اس لیے $\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

$= \frac{1}{2} \times 180^0$ ($\angle A$ اور $\angle D$ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ ہیں)

$= 90^0$

اور $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت)

یا $90^0 + \angle DSA = 180^0$

یا $\angle DSA = 90^0$

اس لیے $\angle PSR = 90^0$ ($\angle DSA$ کے بالمقابل زاویہ)

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\angle APB = 90^0$ یا $\angle SPQ = 90^0$ (جیسا کہ $\angle DSA$ کے لیے دکھایا گیا

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

ہے)اسی طرح سے $\angle PQR = 90^0$ ہےاور $\angle SRQ = 90^0$

اس لیے PQRS ایک چار ضلعی ہے جس میں تمام زاویہ قائمہ زاویہ ہیں۔

کیا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک مستطیل ہے؟ اس لیے جانچ کریں۔

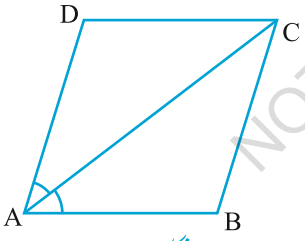
ہم دکھا چکے ہیں $\angle PQR = \angle PSR = 90^0$ اور $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ اس لیے مخالف زاویوں کا ہر جوڑا مساوی ہے۔

اس لیے PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ (دراصل تمام زاویہ) 90^0 کے ہیں۔

اور اس لیے PQRS ایک مستطیل ہے۔

مشق 8.1

1. اگر کسی متوازی الاضلاع کے وتر مساوی ہوں تو دکھائیے کہ یہ مستطیل ہے۔
2. دکھائیے کہ اگر کسی چار ضلعی کے وتر مساوی ہوں اور ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہوں تو یہ ایک مربع ہے۔
3. متوازی الاضلاع ABCD کا وتر AC، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔



شکل 8.11

[شکل 8.11 دیکھئے] دکھائیے کہ

(i) یہ $\angle C$ کی تنصیف کرے گا اور (ii) ABCD ایک معین ہے۔

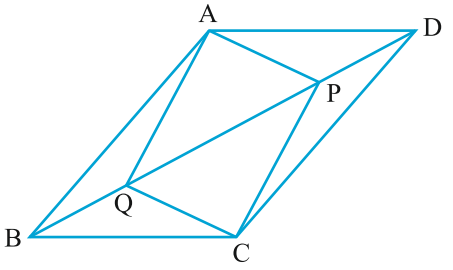
4. ABCD ایک مستطیل ہے جس میں AC، $\angle A$ اور $\angle C$ کی تنصیف کرتا ہے دکھائیے کہ

(i) ABCD ایک مربع ہے (ii) وتر BD، $\angle B$ اور $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے

© NCTB
NOT TO BE REPUBLISHED

5. متوازی الاضلاع ABCD میں P اور Q دو نقطے وتر BD پر اس طرح ہیں کہ DP=BQ

[شکل 8.12 دیکھیے] دکھایئے کہ:

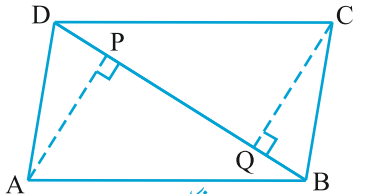


شکل 8.12

(i) $\triangle APD \cong \triangle CQB$ (ii) $AP = CQ$

(iii) $\triangle AQB \cong \triangle CPD$ (iv) $AQ = CP$

(v) APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



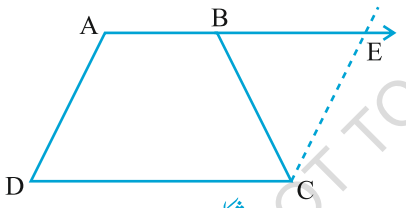
شکل 8.13

6. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور AP اور CQ، وتر BD پر بالترتیب راس A اور C سے ڈالے گئے عمود ہیں (شکل 8.13 دیکھیے) دکھایئے کہ

7. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel CD$ اور $AD = BC$ (شکل 8.14 دیکھیے) دکھایئے کہ:

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) $AP = CQ$



شکل 8.14

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) وتر AC = وتر BD

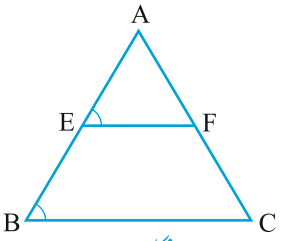
[اشارہ: AB کو بڑھایئے C سے گذرتا ہوا ایک خط DA کے متوازی بنایئے جو بڑھے ہوئے AB کو E پر قطع کرے]

8.2 وسطی-نقطہ مسئلہ (Mid-point theorem)

آپ نے مثلث اور چار ضلعی کی بہت سی خصوصیات کا مطالعہ کیا آیئے اب ایک اور اہم نتیجہ کا مطالعہ کرتے ہیں جس کا تعلق مثلث کے وسطی نقاط سے ہے۔ مندرجہ ذیل عملی کام کیجیے۔

ایک مثلث بنایئے اور اس کے دو اضلاع کے وسطی نقطہ E اور F مارک کیجیے E اور F کو ملایئے-[شکل 8.15 دیکھیے] EF- اور BC کی پیائش کیجیے $\angle AEF$ اور $\angle ABC$ کی پیائش کیجیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 8.15

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پاتے ہیں کہ

$EF = \frac{1}{2}BC$ اور $\angle AEF = \angle ABC$

اس لیے $EF \parallel BC$ - اس مشغلہ کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرایئے۔

مسئلہ اس طرح سے آپ مندرجہ ذیل مسئلہ تک پہنچتے ہیں۔

مسئلہ 8.8: مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے

آیئے ایک مثلث ΔABC بنائیں۔

آپ مندرجہ ذیل طریقہ سے اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں۔

شکل 8.16 کا مشاہدہ کیجیے جس میں E اور F بالترتیب AB اور AC کے وسطی نقطہ ہیں اور $CD \parallel BA$ ۔

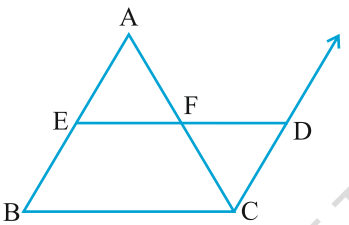
$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (اصول ASA)

اس لیے $EF = DF$ اور $BE = AE = DC$ (کیوں؟)

اس لیے BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اس سے حاصل ہوتا ہے $EF \parallel BC$

نوٹ کیجیے کہ $EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$



شکل 8.16

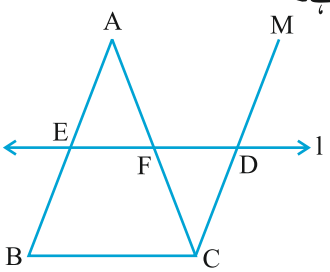
کیا آپ مسئلہ 7.9 کا معکوس بیان کر سکتے ہیں۔

آپ دیکھیں کہ مندرجہ بالا مسئلہ کا معکوس بھی درست ہوتا ہے جو مندرجہ ذیل ہے۔

مسئلہ 8.8: مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا جانے والا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا۔

شکل 8.17 میں مشاہدہ کیجیے کہ E، AB کا وسطی نقطہ ہے۔ E سے گذرنے والا خط l، BC کے متوازی ہے اور $CM \parallel BA$

ΔAEF اور ΔCDF کی متماثلت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے



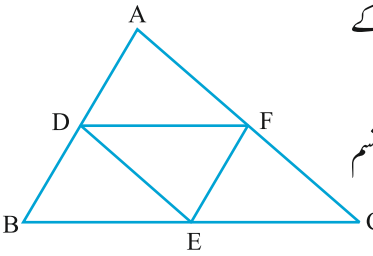
شکل 8.17

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کہ AF=CF

مثال 6: ΔABC میں D, E اور F بالترتیب اضلاع AB، BC اور CA کے وسطی نقطے ہیں

[شکل 8.18 دیکھیے] دکھایئے کہ ΔABC چار متماثل مثلثوں میں منقسم ہوجاتا ہے۔



شکل 8.18

حل: کیوں کہ D اور E، ΔABC کے اضلاع AB اور BC کے وسطی نقطہ ہیں

اس لیے مسئلہ 8.8 کی رو سے $DE \parallel AC$

اسی طرح سے $DF \parallel BC$ اور $EF \parallel AB$

اس لیے ADEF، BDFE اور DFCE تمام متوازی اضلاع ہیں

اب DE، متوازی الاضلاع BDFE کا وتر ہے

اس لیے $\Delta BDE \cong \Delta FED$

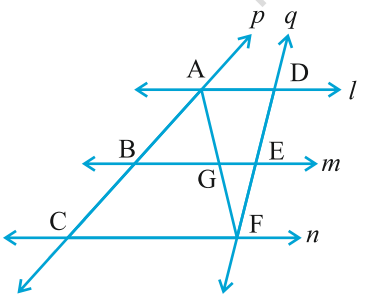
اسی طرح سے $\Delta DAF \cong \Delta FED$

اور $\Delta EFC \cong \Delta FED$

اسطرح سے چاروں مثلث متماثل ہیں۔

مثال 7: قاطع p اور q متوازی خطوط l، m اور n کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ l، m اور n پر مساوی مقطوعہ (Intercept) AB اور BC کو p پر کاٹتے ہیں (شکل 8.19 دیکھیے)

دکھایئے کہ l، m اور n، q پر بھی مساوی مقطوعہ DE اور EF کاٹیں گے۔



شکل 8.18

حل: اس میں دیا ہوا ہے کہ AB=BC اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ DF=EF۔

آیئے A کو F سے ملائیں جو m کو G پر قطع کرے۔

منحرف A C F D دو مثلثوں میں منقسم ہوگیا۔ جن کے نام ہیں

ΔACF اور ΔAFD

ΔACF میں یہ دیا ہوا ہے کہ B، AC کا وسطی نقطہ ہے (AB=BC)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اور $BG \parallel CF$ (کیوں کہ $m \parallel n$)

اس لیے G، AF کا وسطی نقطہ ہے (مسئلہ 7.10 کا استعمال کرتے ہوئے)

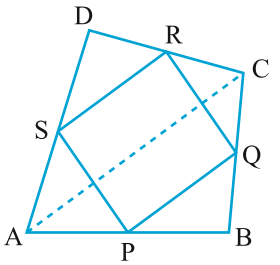
اب ΔAFD میں ہم یہی دلائل استعمال کرتے ہیں کیوں کہ G، AF کا وسطی نقطہ ہے $GE \parallel AD$ اور اس لئے مسئلہ 7.10 کی رو سے E، DF کا وسطی نقطہ ہے

یعنی $DE = EF$

دوسرے لفظوں میں l، m، اور n، q پر بھی مساوی مقطوعہ کاٹیں گے۔

مشق 8.2

1. $ABCD$ ایک چار ضلعی ہے جس میں P، Q، R اور S، اضلاع AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقطہ ہیں (شکل 8.20 دیکھیے) AC ایک وتر ہے۔ دکھائیے کہ



شکل 8.20

(i) $SR \parallel AC$ اور $SR = \frac{1}{2} AC$

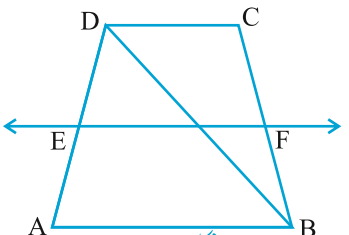
(ii) $PQ = SR$

(iii) $PQRS$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

2. $ABCD$ ایک معین ہے اور P، Q، R اور S بالترتیب اضلاع AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔ دکھائیے کہ چار ضلعی $PQRS$ ایک مستطیل ہے۔

3. $ABCD$ ایک مستطیل ہے اور P، Q، R اور S بالترتیب اضلاع AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقطے ہیں۔ دکھائیے کہ چار ضلعی $PQRS$ ایک معین ہے۔

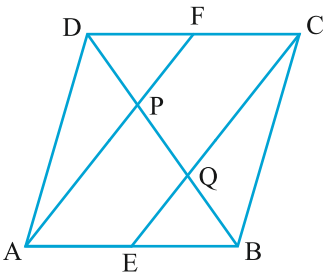
4. $ABCD$ ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel DC$ اور BD وتر ہے اور E، AD کا وسطی نقطہ ہے۔ E سے گذرتا ہوا ایک خط AB کے متوازی کھینچئے جو BC کو F پر قطع کرے شکل (8.21) دیکھیے کہ F، BC کا وسطی نقطہ ہے۔



شکل 8.21

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. متوازی الاضلاع ABCD میں E اور F بالترتیب اضلاع AB اور CD کے وسطی نقطے ہیں (شکل 8.22) دکھایئے کہ قطعات خط AF اور EC وتر BD کو تین برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔



شکل 8.22 8.22

6. ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle C$ ' زاویہ قائمہ ہے۔ وتر AB کے وسطی نقطہ M سے گذرتا ہوا ایک خط AB ہے جو AC کے متوازی ہے' AC کو D پر قطع کرتا ہے۔ دکھایئے کہ

(i) AC' D کا وسطی نقطہ ہے۔

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.3 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزیں پڑھیں

1. متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔
2. متوازی الاضلاع میں:
3. مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور مساوی ہوتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
4. معین کے وتر ایک دوسرے کو قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
5. مربع کے وتر ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں اور مساوی ہوتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
6. مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطع خط تیسرے ضلع کے مساوی اور اس کا آدھا ہوتا ہے
7. مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔

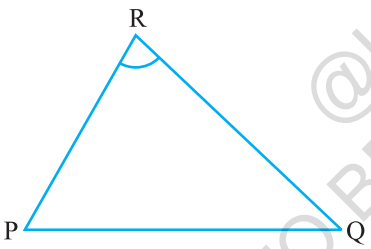
باب 9

Q6X6W3

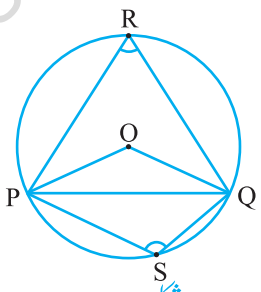
دائرے (CIRCLES)

9.1 کسی نقطہ پر وتر کے ذریعہ بنا زاویہ (Angle Subtended by a Chord at a Point)

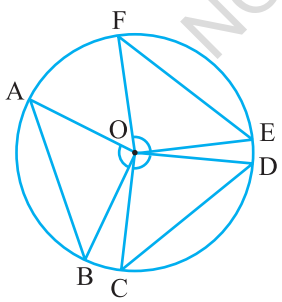
ایک قطعہ خط PQ اور ایک نقطہ R جو PQ پر نہ ہو، لیجیے PR اور QR کو ملائیے (شکل 9.1 دیکھیے) تب ∠PRQ قطعہ خط PQ سے نقطہ R پر بنا زاویہ کہلاتا ہے شکل 9.2 میں زاویے POQ، PRQ اور PSQ کیا کہلاتے ہیں؟ ∠PQR وتر PQ سے مرکز O پر بنا زاویہ ہے، ∠PRQ سے اور ∠PSQ سے بالترتیب PQ سے قوس اکبر اور قوس اصغر پر نقطے R اور S پر بنے زاویہ ہیں 9.5



شکل 9.1



شکل 9.2



شکل 9.3

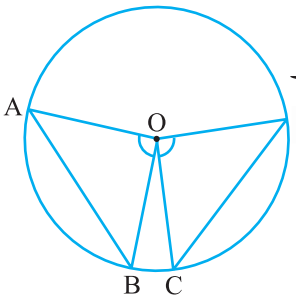
آیئے وتر کے سائز اور اس کے ذریعہ مرکز پر بنے زاویوں کے درمیان تعلق کی جانچ کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کے دائرے کے مختلف وتر اور ان کے ذرائع مرکز پر بنے زاویہ میں بڑے وتر سے مرکز پر بنا زاویہ بھی بڑا ہوگا کیا ہوگا اگر آپ دو مساوی وتر لیں تو؟ کیا ان کے ذرائع مرکز پر بنے زاویہ مساوی ہونگے یا نہیں؟

دو یا اس سے زیادہ مساوی وتر کھینچئے اور ان سے مرکز پر بنے زاویوں کی پیمائش کیجیے (شکل 9.3 دیکھیے) آپ دیکھیں گے کہ ان کے ذریعہ مرکز پر بنے زاویہ برابر ہیں۔ آیئے اس حقیقت کا ثبوت دیتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مسئلہ 9.1: دائرہ کے مساوی وتر دائرہ کے مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں۔

ثبوت : آپ کو مرکز O والے دائرے کے دو مساوی وتر AB اور CD دیئے ہوئے ہیں۔



شکل 9.4

(شکل 9.4 دیکھیے) آپ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ $\angle AOB = \angle COD$

مثلث COD اور AOB میں

$OA = OC$ (ایک ہی دائرہ کے نصف قطر)

$OB = OD$ ایک ہی دائرہ کے نصف قطر)

$AB = CD$ دیا ہوا ہے

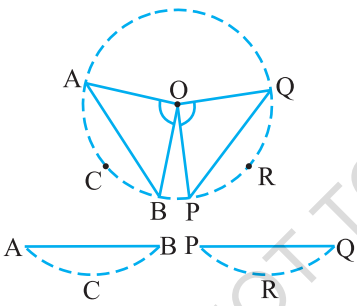
اس لئے $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS اصول)

اس سے ملتا ہے $\angle AOB = \angle COD$ (متماثل مثلث کے نظیری حصے)

ریمارک: آسانی کے لئے ہم متحاثل مثلثوں کے نظیری حصوں کے لئے CPCT استعمال کرتے ہیں کیوں کہ ہم کثرت سے اسکا استعمال کرتے ہیں۔

اب آپ ان وتروں کے بارے میں کیا کہتے ہیں جو مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں؟ کیا یہ مساوی ہیں یا نہیں؟ اس لئے اس کی مندرجہ ذیل مشغلہ سے جانچ کرتے ہیں۔

ایک ٹریسنگ پیپر لیجیے اور اس پر ایک دائرہ ٹریس کیجیے اس کو دائرہ کے ساتھ ساتھ کاٹ لیجیے تا کہ ایک ڈسک حاصل ہو سکے: اس کے مرکز O پر زاویہ AOB بنائیے جہاں BCA دائرہ پر دو نقطہ ہیں۔ مرکز پر ایک اور زاویہ POQ، $\angle AOB$ کے مساوی بنائیے: ان زاویوں کے سروں کے ساتھ ساتھ ایک ڈسک کاٹ لیجئے (شکل 9.5 دیکھیے) آپ کو دائرے کے دو قطعہ ACB اور PRQ حاصل ہونگے۔ اگر آپ ایک کو دوسرے پر رکھیں تو آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ یہ ایک دوسرے کو ڈھک لیتے ہیں یعنی یہ متماثل ہیں اس لئے $AB = PQ$



شکل 9.5

حالانکہ آپ نے اس کو کئی خاص زاویوں کے لئے دیکھا اس کو دوسرے مساوی زاویوں کے لئے دہرائیے: ہر حالت میں وتر مساوی ہونگے۔ اس لئے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.2 : اگر وتر مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں تو وتر بھی مساوی ہونگے مدرجہ بالا مسئلہ، مسئلہ 9.1 کا معکوس ہے، نوٹ کیجیے کہ شکل 9.4 میں اگر آپ $\angle AOB = \angle COD$ لیتے ہیں تب $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (کیوں؟)

کیا اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $AB = CD$؟

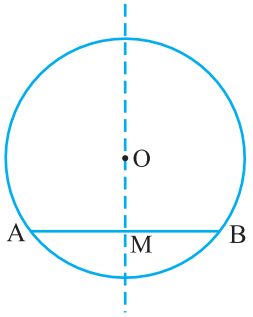
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 9.1

1. یاد کیجیے کہ دو دائرہ متماثل ہوتے ہین اگران کے نصف قطر مساوی ہوں ثابت کیجئے کہ متماثل دائروں کے مساوی وتر مرکز پر مساوی زاویئے بنائیں گے۔
2. ثابت کیجیے کہ اگر متماثل دائروں کے وتر مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں تو وتر مساوی ہوتے ہیں۔

9.2 مرکز سے وتر پر بنایا گیا عمود (Perpendicular from the Centre to a Chord)

مشغلہ: ایک ٹریننگ پیپر پر ایک دائرہ بنائیے مان لیجیے O اس کا مرکز ہے۔ ایک وتر AB بنائیے مان لیجیے کرلیں AB کو نقطہ M پر کاٹتی ہے۔ تب $\angle OMA=\angle OMB=90^0$ یا OM، AB پر عمود ہے۔ کیا نقطہ B، نقطہ A پر منطبق ہے۔ (شکل 9.6 دیکھیے) ہاں یہ ہے۔ اس لئے MA = MB



شکل 9.6

OA اور OB کو ملا کر اور قائم مثلثوں OMA اور OMB کو متماثل ثابت کرا کر اس کا ثبوت آپ خود دیجیے یہ مثال مندرجہ ذیل نتیجہ کی ایک خاص شکل ہے۔

مسئلہ 9.3: دائرہ کے مرکز سے اس کے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

اس مسئلہ کا معکوس کیا ہے؟ اس کو لکھنے کے لئے پہلے یہ صاف ہوجائے اور مسئلہ 9.3 میں کیا دیا گیا ہے اور کیا ثابت کیا گیا۔ دائرے کے مرکز سے اس کے وتر پر عمود کھینچا گیا یہ دیا ہوا ہے اور یہ عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔ یہ ثابت کیا گیا ہے۔ اس طرح سے اس کے معکوس میں مفروضہ ہے اگر دائرہ کے مرکز سے گذرنے والا خط وتر کی تنصیف کرتا ہے اور جو ثابت کرتا ہے وہ ہے کہ خط وتر پر عمود ہے اس لئے معکوس ہے۔

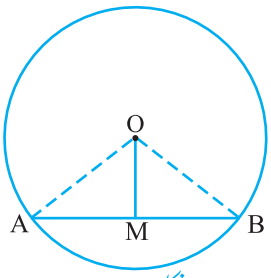
مسئلہ 9.4: دائرہ کے مرکز سے گذرنے والا خط اگر وتر کی تنصیف کرے تو وہ اس پر عمود ہوگا۔

کیا یہ صحیح ہے؟ ایسی ہی کچھ اور مثالیں لیجیے اور دیکھیے آپ دیکھیں گے کہ تمام حالتوں میں یہ صحیح ہوگا اگر یہ صحیح ہے تو مندرجہ ذیل میں ہم اس کا ثبوت وجوہات کے ساتھ دیتے ہیں۔

مان لیجیے AB مرکز ایک O والے دائرہ کا ایک وتر ہے O کو AB کے وسطی نقطہ M سے ملایا گیا۔ آپ کو ثابت کرنا ہے کہ $OM \perp AB$ OA اور OB کو ملائیے (شکل 9.7 دیکھیے) OAM اور OBM میں

OA = OB (کیوں؟)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 9.7

$AM = BM$ (کیوں؟)

$OM = OM$ (مشترک)

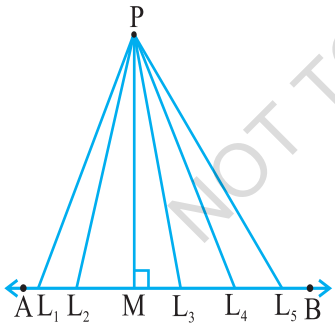
اس لئے $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (کیسے؟)

اس سے حاصل ہوتا ہے $\angle OMA = \angle OMB = 90^0$ (کیوں؟)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9.3 مساوی وتر اور مرکز سے ان کے فاصلے
(Equal Chords and Their Distance from the Centre)

مان لیجیے AB ایک خط ہے اور P ایک نقطہ کیونکہ ایک خط پر لامحدود نقطے ہوتے ہیں اگر آپ ان نقطوں کو P سے ملائیں تو آپ کو لامحدود بہت سے قطعات $PL_4, PL_3, PM, PL_2, PL_1$ وغیرہ حاصل ہونگے۔ اس میں سے کونسا فاصلہ P سے AB کے درمیان ہے؟ آپ تھوڑی دیر سوچئے اور جواب حاصل کیجئے۔ ان تمام قطعات خط میں سے PM جو P سے AB پر عمود سے سب سے کم فاصلہ ہے ریاضی میں ہم اس کم ترین فاصلہ کو P سے AB کا فاصلہ کہتے ہیں، اس لئے آپ کہہ سکتے ہیں کہ

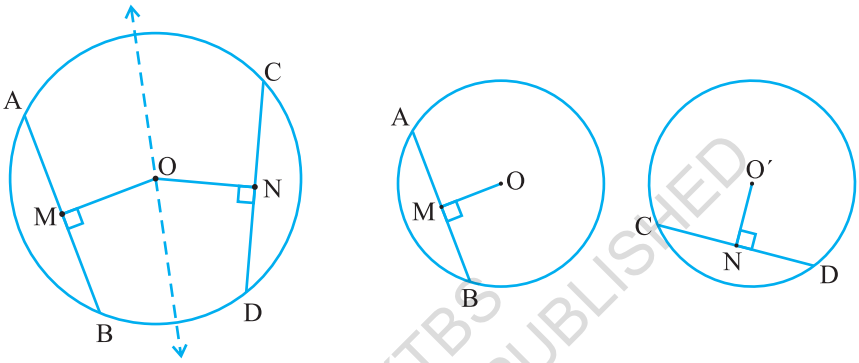


شکل 9.8

ایک نقطہ سے کسی خط پر عمود کی لمبائی اس نقطہ سے اس خط کا فاصلہ ہوتا ہے۔

نوٹ کیجئے کہ اگر نقطہ خط پر واقع ہو تو اس نقطہ سے خط کا فاصلہ صفر ہے۔

ایک دائرہ کے بہت سے وتر ہو سکتے ہیں مختلف لمبائیوں والے بہت سے وتروں کو بنا کر آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ وتر جتنا لمبا ہوگا مرکز سے اس کا فاصلہ اتنا ہی کم ہوگا اور وتر جتنا چھوٹا ہوگا مرکز سے اس کا فاصلہ اتنا ہی زیادہ ہوگا۔ قطر کا فاصلہ کتنا ہوگا جو کہ مرکز سے گزرتا ہوا دائرہ کا سب سے بڑا وتر ہے؟ کیونکہ مرکز اسی پر واقع ہے اس لئے فاصلہ صفر ہوگا۔ کیا آپ کو ایسا لگتا ہے کہ وتروں کی لمبائی اور مرکز سے ان کے درمیان فاصلوں میں کچھ تعلق ہے۔ اگر ایسا ہے تو آیئے دیکھتے ہیں۔



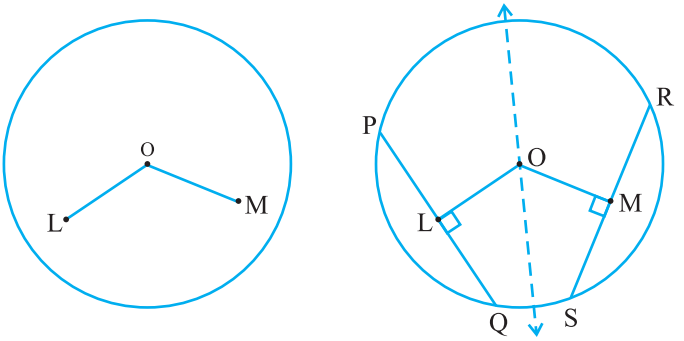
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

شکل 9.9

مشغلہ : ایک ٹریسنگ پیپر پر کسی بھی نصف قطر کا ایک دائرہ بنایئے اس پر دو مساوی وتر AB اور CD بنایئے اور مرکز O سے ان پر عمود OM اور ON بھی ڈالئے۔ شکل کو اس طرح موڑیئے کہ B، D کے اوپر اور A، C کے اوپر آیئے [شکل (i) 9.9 دیکھئے] آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ O کرلیس پر اور M، N کے اوپر آتا ہے اس لئے OM = ON اب اس مشغلہ کو مرکز O کے متماثل دائرہ اور ان کے مساوی وتر AB اور CD لیکر دہرایئے۔ ان پر عمود OM اور ON ڈالئے [شکل (ii) 9.9 دیکھئے] ایک دائری ڈسک کاٹئے اور اس کو دوسرے پر اس طرح دیکھئے کہ AB، CD پر منطبق ہو۔ تب آپ یہ دیکھیں گے کہ O، O پر اور N، M پر منطبق ہوگا۔ اس طرح سے آپ نے مندرجہ ذیل کی تصدیق کی۔

مسئلہ 9.5: دائرہ (یا متماثل دائروں کے مساوی وتر مرکز (یا مرکزوں) سے برابر فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

اب ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا اس مسئلہ کا معکوس بھی درست ہے یا نہیں اس کے لئے مرکز O کا ایک دائرہ بنایئے۔ مرکز O سے مساوی لمبائیوں والے دو قطعات خط OL اور OM دائرے کے اندر کھینچئے [شکل (i) 9.10] اور پھر دائرہ کے دو وتر PQ اور RS بنایئے جو بالترتیب OL اور OM پر عمود ہوتی ہے [شکل 9.10 (ii) دیکھئے]



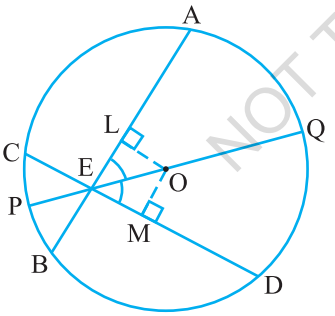
(i) (ii)

شکل 9.10

PQ اور RS کی لمبائیوں کی پیمائش کیجئے، کیا یہ مختلف ہیں؟ نہیں دونوں برابر ہیں، اس مشغلہ کو کچھ اور مساوی قطعات خط اور وتر بنا کر دہرائیے جبکہ وتر ان پر عمود ہوں۔ اس سے مسئلہ 9.5 کی تصدیق ہوتی ہے جو کہ مندرجہ ذیل میں بیان کیا گیا ہے۔

مسئلہ 9.8: وتر جو مرکز سے برابر فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ ان کی لمبائیاں برابر ہوتی ہیں، مندرجہ بالا نتائج کی مزید وضاحت کے لئے ہم ایک مثال لیتے ہیں۔

مثال 2! اگر دو قطع کرتے ہوئے وتر ان کے نقطہ تقاطع سے گزرنے والے قطر کے ساتھ مساوی زاویہ بناتے ہیں تو ثابت کیجئے کہ وتر مساوی ہیں۔



شکل 9.11

حل: AB اور CD مرکز O والے دائرہ کے ایسے وتر ہیں جو نقطہ E پر قطع کرتے ہیں اور PQ، E سے گزرتا ہوا دائرہ کا قطر ہے جبکہ $\angle AEQ = \angle DEQ$ [شکل 9.11 دیکھئے] آپ کو ثابت کرنا ہے کہ AB = CD وتر AB اور CD پر بالترتیب عمود OL اور OM بنائیے۔ اب

$$\angle LOE = 180^0 - 90^0 - \angle LEO = 90^0 - \angle LEO$$

(مثلث زاویوں کی جمعی خصوصیت)

$$= 90^0 - \angle AEQ = 90^0 - \angle DEQ$$

© KBS NOT TO BE REPUBLISHED

$= 90^0 - \angle MEO = \angle MEO$

مثلث OLE اور OME میں

$\angle LEO = \angle MEO$ (کیوں؟)

$\angle LOE = \angle MOE$ (اوپر ثابت کیا گیا ہے)

EO = EO (مشترک)

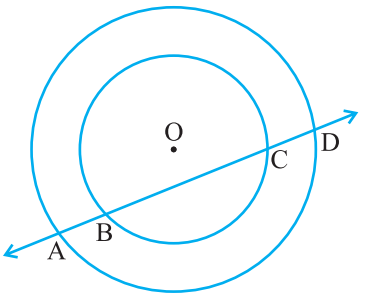
اس لیے $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (کیوں؟)

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے OL = OM (CPCT)

اس لیے AB=CD (کیوں؟)

مشق 9.2

1. 5cm اور 3cm نصف قطر والے دو دائرہ دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں اور ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ 4cm ہے۔ مشترک وتر کی لمبائی معلوم کیجئے۔
2. اگر دائرہ کے دو مساوی وتر دائرہ کے اندر قطع کریں تو ثابت کیجئے کہ ایک وتر کے قطعات دوسرے وتر کے نظیری قطعات کے برابر ہیں۔
3. اگر دائرہ کے دو مساوی وتر دائرہ کے اندر قطع کریں تو ثابت کیجئے کہ ان کے نقطہ تقاطع اور مرکز کو ملانے والا خط وتر کے ساتھ مساوی زاویہ بناتا ہے۔
4. اگر ایک خط O مرکز والے دو ہم مرکز دائروں (دائرے جن کا ایک ہی مرکز ہو) کو A، B اور C پر قطع کرے تو ثابت کیجئے کہ AB = CD [شکل 9.12 دیکھئے]



شکل 9.12

5. تین لڑکیاں ریشما، سلمہ، مندیب ایک پارک میں بنے ہوئے 5 نصف قطر والے ایک دائرہ پر کھڑے ہو کر ایک کھیل کھیل رہی ہیں۔ ریشما ایک گیند سلمہ کی طرف، سلمہ مندیب کی طرف اور مندیب ریشما کی طرف

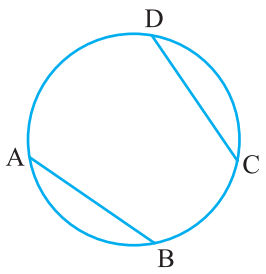
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اور سلمہ، سلمہ اور مندیپ کے درمیان فاصلہ 6cm ہو تو ریشما اور مندیپ کے درمیان کتنا فاصلہ ہوگا؟

6. ایک کالونی میں 20m نصف قطر والا دائرہ کی شکل کا ایک پارک ہے تین لڑکے انکور، شیدا اور ڈیوڈ اس کی باؤنڈری پر برابر فاصلوں پر بیٹھے ہیں ان کے پاس ایک دوسرے سے بات کرنے کے لئے ایک کھلونا فون ہے۔ فون کے تاد کی لمبائی معلوم کیجئے۔

9.4 دائرہ کے قوس کے ذریعہ بنا زاویہ (Angle Subtended by an Arc of a Circle)

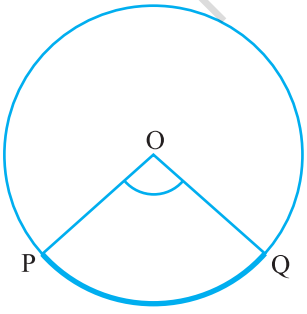
آپ دیکھ چکے ہیں کہ قطر کے علاوہ دائرہ کے کسی بھی وتر کے سرے کے نقطے دائرہ کو دو قوسوں میں منقسم کرتے ہیں ایک قوس اکبر اور ایک قوس اصغر۔ اگر آپ دو مساوی وتر لیں تو قوسوں کے سائز کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا اسے وتر سے بنا قوس دوسرے وتر سے بنے قوس سے لمبا ہے؟ نہیں یہ ایک دوسرے کے مساوی ہی نہیں بلکہ متماثل بھی ہیں یعنی ایک قوس کو دوسرے کے اوپر رکھا جائے تو ایک دوسرے کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔



شکل 9.13

اس حقیقت کی تصدیق آپ دائرہ وتر CD سے بنے قوس کو کاٹ کر اور اس کو مساوی وتر AB سے بنے قوس کے اوپر رکھ کر کر سکتے ہیں۔ آپ دیکھتے ہیں کہ قوس CD قوس AB کو پوری طرح ڈھک لیتا ہے [شکل 9.13 دیکھئے] اس سے پتہ چلتا ہے کہ مساوی وتر متماثل قوس بناتے ہیں اور اس کے برعکس متماثل قوس دائرہ کے مساوی وتر بناتے ہیں۔ اس کو آپ مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کر سکتے ہیں۔

اگر دائرہ کے دو وتر مساوی ہوں تو ان کے نظیری قوس متماثل ہونگے اور اس کے برعکس اگر دو قوس متماثل ہوں تو ان کے نظیری وتر مساوی ہونگے۔



شکل 9.14

اور اس طرح سے کسی قوس کے ذریعہ مرکز پر بنا زاویہ اس کے نظیری وتر سے مرکز پر بنا زاویہ ہوتا ہے اس طرح اگر قوس اصغر مرکز پر زاویہ بناتا ہے تو قوس اکبر (reflexangle) معکوس زاویہ بناتا ہے۔ اس لئے شکل 9.14 میں قوس اصغر PQ سے O پر بنا زاویہ POQ سے اور قوس اکبر PQ سے O پر بنا زاویہ معکوس زاویہ POQ مذکورہ بالا خصوصیت اور مسئلہ 9.1 کی رو سے مندرجہ ذیل نتیجہ درست ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

دائرہ کے متماثل قوس (یا مساوی قوس) مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں۔

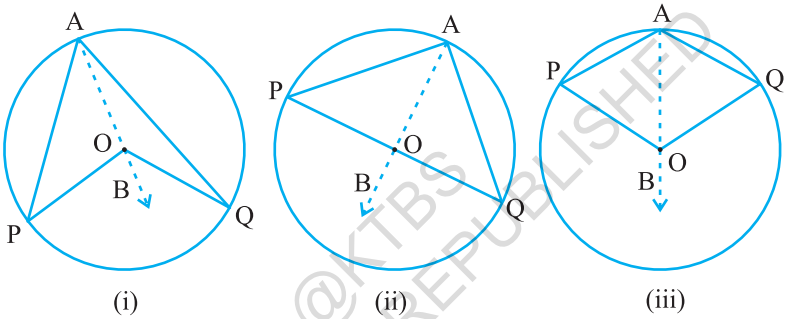
اس طرح سے ایک وتر کے ذریعہ مرکز پر بنا زاویہ اس کے نظیری قوس (اصغر) سے مرکز پر زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل مسئلہ قوس کے ذریعہ مرکز پر بنے زاویہ اور دائرہ پر ایک نقطہ کے درمیان ایک تعلق کو بتاتا ہے۔

مسئلہ 9.7: کسی قوس کے ذریعہ مرکز پر بنا زاویہ اس قوس کے ذریعے دائرہ کے باقی حصہ پر بنے زاویہ کا دگنا ہوتا ہے۔

ثبوت : دائرہ کا ایک قوس PQ دیا ہوا ہے جو مرکز O پر POQ سے اور دائرہ کے باقی حصہ پر کسی نقطہ A پر PAQ سے بناتا ہے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle POQ = \angle PAQ$



شکل 9.15

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

تین مختلف حالتوں پر غور کرتے ہیں جیسا کہ شکل 9.15(ii) میں PQ قوس اصغر PQ(ii) ایک نصف دائرہ PQ(iii) قوس اکبر:

آیئے OA کو ملا کر اور اس کو نقطہ B تک بڑھا کر شروعات کرتے ہیں۔

تمام حالتوں میں

$$\angle BOQ = \angle OAQ = \angle AQO$$

کیونکہ مثلث کا خارجی زاویہ اس کے داخلی مقابل زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔

اور ΔOAQ میں

OA = OQ (ایک ہی دائرہ کے نصف قطر)

اس لئے $\angle OAQ = \angle OQA$ (مسئلہ 9.5)

اس لئے حاصل ہوتا ہے $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ (1)

اسی طرح $\angle BOP = 2\angle OAP$ (2)

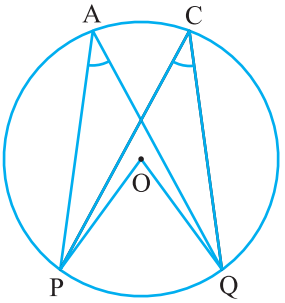
(1)اور(2) سے $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OMP + \angle OAQ)$

یہ ایسا ہی ہے جیسے $\angle POQ = 2\angle PAQ$ (3)

حالت(iii) جہاں PQ قوس اکبر ہے (3) کو معکوس زاویوں سے بدل دیجئے۔ $POQ = 2\angle PAQ$

ریمارک : مان لیجئے مندرجہ ذیل شکل میں ہم P اور Q کو ملا کر وتر بنا دیں تب $\angle PAQ$ قطعہ PAQP میں بنا زاویہ ہے۔

مسئلہ 9.7: میں نقطہ A دائرے کے باقی حصہ پر کہیں بھی ہوسکتا ہے۔اس لیے اگر آپ اس حصہ پر کوئی نقطہ C لیں (دیکھئے شکل: 9.16) تو اس میں ملتا ہے۔



شکل 9.16

$$\angle PAQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

اس لیے $\angle PCQ = \angle PAQ$ اس سے مندرجہ ذیل مسئلہ کا ثبوت ملتا ہے۔

مسئلہ 9.8: دائرہ کے ایک ہی نقطہ میں بنے زاویہ مساوی ہیں۔

اس لیے مسئلہ 9.8 کی حالت (ii) کا علیحدگی سے مطالعہ کرتے ہیں۔ یہاں PAQ کے نصف دائرہ میں بنا زاویہ لیں اور $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2}\times 180^0 = 90^0$ ۔اگر آپ نصف دائرہ میں کوئی دوسرا نقطہ C لیں تو آپ کو حاصل ہوگا۔ $\angle CPQ = 90^0$

اس طرح سے آپ کو دائرہ کی ایک اور خصوصیت کا علم ہوتا ہے۔

نصف دائرہ میں بنا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.8: کا معکوس بھی درست ہے۔اس کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 9.9 : اگر دو نقطوں کو ملانے والے قطع خط دوسرے دو نقطوں جو اس قطع خط کے حاصل خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں، پر مساوی زاویے بنائے تو چاروں نقطے دائرہ پر واقع ہوں گے۔(یعنی یہ ہم دائرہ ہیں)

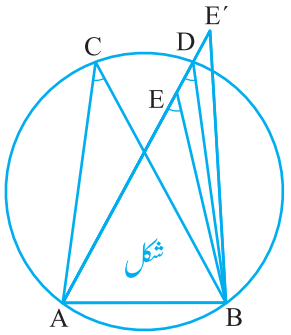
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس نتیجہ کی سچائی آپ مندرجہ ذیل میں دیکھ سکتے ہیں۔

شکل: 9.17 میں AB ایک قطع خط ہے جو دو نقطوں C اور D پر مساوی زاویہ بناتا ہے۔ یعنی

$$\angle ACB = \angle ADB$$

یہ دکھانے کے لیے کہ نقطہ A، B، C اور D ایک ہی دائرہ پر واقع ہیں۔ اس لیے نقطہ A، B اور C سے گزرتا ہوا ایک دائرہ بنائیں۔ مان لیجئے کہ یہ نقطہ D پر سے نہیں گزرتا تب یہ AD (یا بڑھے ہوئے AD کو) کو ایک نقطہ مان لیجئے (یا E) پر قطع کریگا۔



شکل 9.17

اگر نقطہ A، C، E اور B ایک دائرہ پر واقع ہوں تو

$$\angle ACB = \angle ADB \quad (\text{کیوں؟})$$

لیکن یہ دیا ہوا ہے۔ $\angle ACB = \angle ADB$

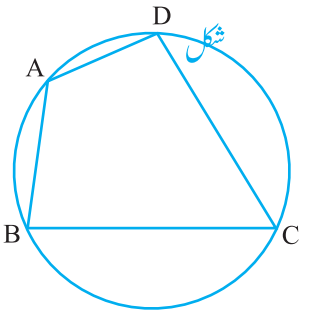
اس لیے $\angle AEB = \angle ADB$

یہ ممکن نہیں ہے جب تک کہ D، E پر منطبق نہ ہو۔ (کیوں؟)

اس طرح سے E بھی D پر منطبق ہوگا۔

9.5 دائری چارضلعی (Cyclic Quadrilaterals)

ایک چارضلعی ABCD دائری کہلاتا ہے اگر اس کے چاروں راس دائرہ پر ہوں (شکل: 9.18 دیکھئے) ایسے چارضلعی میں آپ ایک خاص خصوصیت پائیں گے۔ مختلف اضلاع والے بہت سے دائری چارضلعی بنائیے اور ہر ایک کو ABCD نام دیجئے۔ (مختلف نصف قطر والے بہت سے دائروں میں ہر ایک پر چار نقطے لے کر ایسا کیا جا سکتا ہے۔) مقابل (یا مخالف) زاویوں کی پیمائش کر کے اپنے مشاہدات کو مندرجہ ذیل جدول میں لکھئے:



شکل 9.18

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

چار ضلعی کا نمبر	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6						

جدول سے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔

آپ دیکھتے ہیں کہ $\angle A+\angle C=180^0$ اور $\angle B+\angle D=180^0$ پیمائش کی غلطی کو نظر انداز کرتے ہوئے۔

اس سے مندرجہ ذیل کی تصدیق ہوتی ہے۔

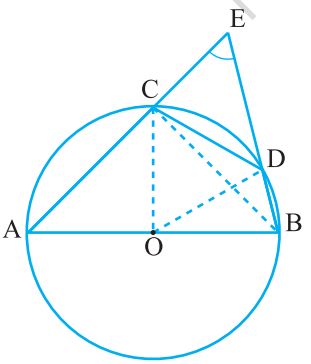
مسئلہ 9.10: دائری چار ضلعی کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔

درحقیقت اس مسئلہ کا معکوس جو ذیل میں بیان کیا گیا ہے، وہ بھی درست ہے۔

مسئلہ 9.11: اگر کسی چار ضلعی کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے تو چار ضلعی دائری ہے۔

اس مسئلہ کی پیمائش آپ مندرجہ ذیل طریقہ سے اسی طرح دیکھ سکتے ہیں جس طرح مسئلہ 12.10 کے لیے دیکھا تھا۔

مثال 2: شکل 9.19 میں AB دائرہ کا قطر ہے۔ CD دائرہ کا وتر ہے جو نصف قطر کے برابر ہے AC اور BD کو جب بڑھایا جاتا ہے تو ہو نقطہ E پر قطع کرتے ہیں ثابت کیجئے کہ $\angle AEB=60^0$



شکل 9.19

حل: OD، OC اور BC کو ملائیے

مثلث OCD مساوی ضلعی ہے (کیوں؟)

اس لیے $\angle COD=60^0$

اب $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle COD$ (مسئلہ 12.8)

اس سے حاصل ہوتا ہے $\angle CBD=30^0$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

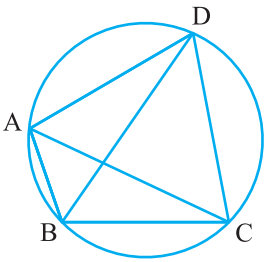
دوبارہ $\angle ACB = 90^0$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle BCE = 180^0 - \angle ACB = 90^0$

جس میں ہمیں ملتا ہے۔ $\angle CBE = 90^0 - 30^0 = 60^0$ یعنی $\angle ABE = 60^0$

مثال 3: شکل 9.20 میں ABCD ایک دائری چار ضلعی ہے جس میں AC اور BD اس کے وتر ہیں۔

اگر $\angle DBC = 55^0$ اور $\angle BAC = 45^0$ (ایک ہی قطع میں بنے زاویہ) $\angle BCD$ تلاش کیجیے



شکل 9.20

حل: $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$

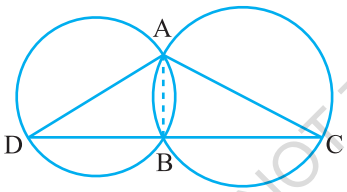
اس لیے $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55^0 + 45^0 = 100^0$

لیکن $\angle DAB + \angle BCD = 180^0$ دائری چار ضلعی کے مقابل زاویہ

اس لیے $\angle BCD = 180^0 - 100^0 = 80^0$

مثال 5: دو دائرے ایک دوسرے کو دو نقطوں A اور B پر قطع کرتے ہیں۔ AB اور AC دائرہ کے دو قطر ہیں (شکل 9.21 دیکھیے) ثابت کیجیے کہ B، قطع خط DC پر واقع ہے۔



شکل 9.21

حل: AB کو ملائیے۔

$\angle ABD = 90^0$ (نصف دائرہ میں بنا زاویہ)

$\angle ABC = 90^0$ (نصف دائرہ میں بنا زاویہ)

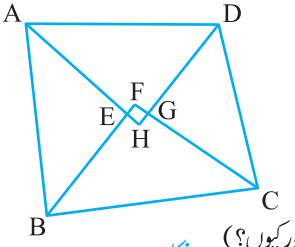
اس لیے $\angle ABD + \angle ABC = 90^0 + 90^0 = 180^0$

اس لیے DBC ایک خط ہے۔ یعنی B، قطع خط DC پر واقع ہے۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 5 : ثابت کیجیے کہ کسی چار ضلعی کے اندرونی زاویوں کے ناصف سے بنا چار ضلعی اگر ممکن ہو) دائرہ ہوگا۔

حل: شکل 9.22 میں ABCD ایک چار ضلعی ہے جس میں اندرونی زاویوں A، B، C اور D کے زاویائی ناصف بالترتیب AH، BF، CF اور DH چار ضلعی بناتے ہیں۔



شکل 9.22

اب $\angle FEG = \angle AEB = 180^0 - \angle EAB - \angle EBA$ کیوں؟

$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

اس لیے $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - Đ GDC$ (اور کیوں؟)

$\angle FEH + \angle FGH = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180^0 - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$= 360^0 - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^0 - \frac{1}{2} \times 360^0$

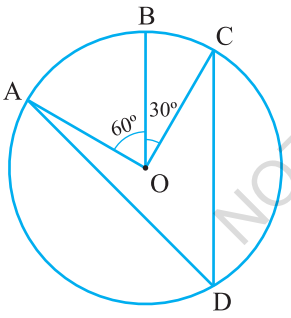
$= 360^0 - 180^0 = 180^0$

اس لیے مسئلہ 9.11 کی رو سے چار ضلعی FFGH دائری ہے۔

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

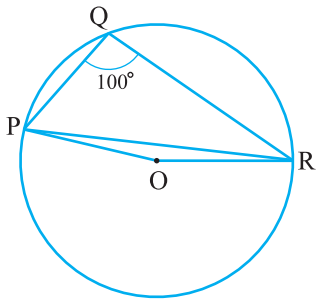
مشق 9.3

1. شکل 9.23 میں مرکز O والے دائرہ پر A، B، اور C نقطے اس طرح ہیں کہ $\angle BOC = 30^0$ اور $\angle AOB = 60^0$ اگر D دائرہ پر قوس ABC کے علاوہ کوئی نقطہ ہے تو $\angle ADC$ معلوم کیجیے۔



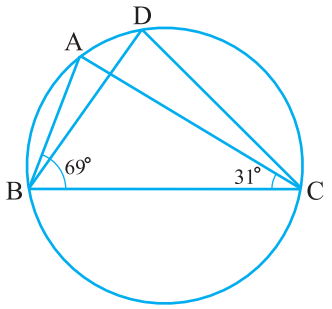
شکل 9.23

2. دائرہ کا ایک وتر اسکے نصف قطر کے برابر ہے اس وتر کے ذریعہ دائرہ کے قوس اصغر پر واقع ایک نقطہ اور قوس اکبر پر واقع ایک نقطہ پر بنے زاویہ معلوم کیجیے۔



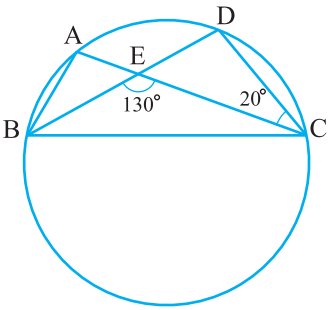
شکل 9.24

3. شکل 9.24 میں $\angle PQR = 100^0$، O, R, Q, P مرکز والے دائرہ پر نقطے ہیں۔ $\angle OPR$ معلوم کیجیے۔



شکل 9.25

4. شکل 9.25 میں $\angle ABC = 69^0$، $\angle ACB = 31^0$، $\angle BDC = 31^0$ معلوم کیجیے۔



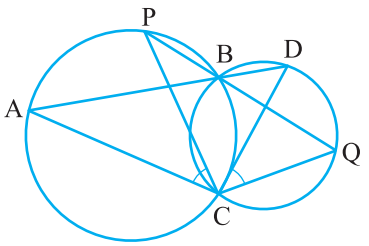
شکل 9.26

5. شکل 9.26 میں B.A، اور D دائرہ پر چار نقطے ہیں AC اور BD نقطہ E پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ $\angle BEC = 130°$ اور $\angle ECD = 20°$ کو $\angle BAC$ معلوم کیجیے۔

© KSRS NOT TO BE REPUBLISHED

6. ABCD ایک دائری چار ضلعی ہے جس کے وتر ایک نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $\angle DBC = 70^0$، $\angle BAC = 30^0$ تو $\angle BCD$ معلوم کیجیے۔ مزید اگر AB = BC تو $\angle ECD$ معلوم کیجیے۔

7. اگر دائری چار ضلعی کے وتر اس کے راسوں سے شروع ہوتے ہوئے دائرہ کے قطر ہیں تو ثابت کیجیے کہ یہ ایک مستطیل ہے۔



شکل 9.27

8. اگر منحرف کے غیر متوازی اضلاع مساوی ہیں تو ثابت کیجیے کہ یہ دائری ہے۔

9. دو دائرے دو شکلوں B اور C پر قطع کرتے ہیں B سے دو قطعات خط ABD اور PBQ کھینچے گئے جو دائرہ کو بالترتیب A،

P،D، اورQ پر قطع کرتے ہیں (شکل 9.27 دیکھیے) ثابت کیجیے کہ $\angle ACP = \angle QCD$

10. مثلث کے دو اضلاع کو قطر لے کر دائرے بنائے گئے۔ ثابت کیجیے کہ ان دائروں کا نقطہ تقاطع تیسرے ضلع پر واقع ہے۔

11. ABC اور ADC مشترک وتر AC والے دو قائم زادی مثلث ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $\angle CAD = \angle CBD$

12. ثابت کیجیے کہ دائرہ متوازی الاضلاع ایک مستطیل ہے۔

9.6 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط پر غور کیا۔

1. دائرہ مستوی میں ان تمام نقطوں کا مجموعہ ہے جو کسی متعین نقطے سے یکساں فاصلہ پر ہوتے ہیں۔
2. دائرہ کے مساوی وتر (یا متماثل دائرہ کے) مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں۔
3. اگر دائرہ کے (یا متماثل دائرہ کے) دو وتر مرکز پر (نظیری مراکز پر) مساوی زاویہ بناتے ہیں تو وتر بھی مساوی ہونگے۔
4. دائرہ کے مرکز سے اس کے وتر پر ڈالا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے
5. دائرے کے مرکز سے وتر کے وسطی نقطہ کو ملانے والا خط وتر پر عمود ہوتا ہے۔
6. دائرہ کے (متماثل دائروں کے) مساوی وتر مرکز سے (نظیری مرکزوں) مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔
7. وتر جو دائرہ کے مرکز سے (نظیری مرکز سے) مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں مساوی ہوتے ہیں۔
8. اگر دائرہ کے دو قوس متماثل ہوں تب ان کے نظیری وتر مساوی ہونگے۔ اس کے برعکس اگر دائرہ کے دو وتر مساوی ہوں تو ان کے نظیری قوس (اصغر یا اکبر) متماثل ہونگے۔
9. دائرہ کے متماثل قوس مرکز پر مساوی زاویہ بناتے ہیں۔
10. دائرہ کے قوس اسے دائرہ کے مرکز پر زاویہ اس کے ذریعہ دائرہ کے باقی حصہ پر کس نقطہ پر بنے زاویہ کا دوگنا

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہوتا ہے۔

1. 11. دائرہ کے ایک ہی قطع میں بنے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔
12. نصف دائرے میں بنا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔
13. اگر دو نقطوں کو ملانے والا قطع خط دوسرے دو نقطوں پر جو اس قطع خط کے حامل خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔ پر مساوی زاویہ بنائیں تو چاروں نقطے دائرہ پر واقع ہونگے
14. دائری چار ضلعی کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔
15. اگر کسی چار ضلعی کے مقابل زاویوں کا حاصل جمع ہو تو چار ضلعی دائری ہے۔

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

باب 10

Z3L6A2

ہیرون کا فارمولہ (Heron's Formula)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

10.1: مثلث کا رقبہ ہیرون کا فارمولہ سے (Area of Triangle – by Heron's Formula)



ہیرون (10 سے 75 عیسوی)

شکل 10.1

ہیرون 10 عیسوی میں مصر کے الیکزینڈریا میں پیدا ہوا۔ وہ اطلاقی ریاضی پر کام کرتا تھا۔ ریاضی اور فزیکل مضامین پر اس کا کام اتنا زیادہ تھا کہ وہ اس میدان میں (encyclopedia) کہلاتا ہے۔ اس کے جیومیٹریائی کام میں زیادہ تر مساحت کے مسائل تھے جو تین کتابوں میں لکھے گئے۔ پہلی کتاب میں مربع، مستطیل، مثلث، منحرف، مخصوص قسم کے چار ضلعی، مساوی کثیر ضلعی، دائرے، استوانہ، مخروط اور کرہ وغیرہ کے رقبہ سے متعلق باتیں تھیں۔ اس کتاب میں ہیرون نے مثلث کے رقبہ کے مشہور فارمولہ سے معرف کرایا جب کہ اس کی تین اضلاع کی لمبائیاں دی ہوئی ہوں۔

ہیرون کے ذریعہ دئے گئے مثلث کے رقبہ کے فارمولہ کو صرف ہیرو کا فارمولہ بھی کہتے ہیں۔ یہ فارمولہ ہے:

(II)

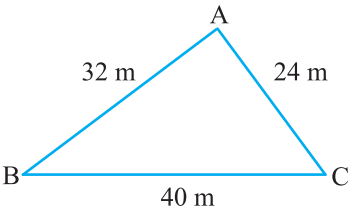
$$\text{مثلث کا رقبہ } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

جہاں a، b اور c مثلث کے اضلاع ہیں اور s مثلث کا نصف احاطہ ہے یعنی $\frac{a+b+c}{2}$

یہ فارمولہ وہاں بہت مفید ہوتا ہے جہاں مثلث کی اونچائی معلوم کرنا ممکن نہیں۔ آیئے مندرجہ بالا میں دئے گئے پارک ABC کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے اس کا استعمال کرتے ہیں۔

ہم $a = 40$ ، $b = 24\text{m}$ ، $c = 32\text{m}$ لیتے ہیں

اس لیے ہمارے پاس ہے $s = \frac{40+24+32}{2}\text{m} = 48\text{m}$



شکل 10.2

$$s - a = (48 - 40)\text{m} = 8\text{m}$$

$$s - b = (48 - 24)\text{m} = 24\text{m}$$

$$s - c = (48 - 32)\text{m} = 16\text{m}$$

اس لیے پارک ΔABC کا رقبہ

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}\,\text{m}^2$$

$$= 384\text{m}^2$$

مزید ہم دیکھتے ہیں کہ $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ یعنی پارک کے اضلاع ایک قائم مثلث بناتے ہیں جس میں سب سے بڑا ضلع جو 40m ہے وتر ہوگا اور اضلاع AB اور AC کے درمیان کا زاویہ 90^0 ہوگا۔

فارمولہ 1 کا استعمال کر کے ہم پارک کے رقبہ کی جانچ کر سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{2} \times 32 \times 24\text{m}^2 = 384\text{m}^2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اس طرح سے حاصل رقبہ وہی ہے جو ہیرون کے فارمولہ سے حاصل ہوا تھا۔

اب ہم ہیرون کے فارمولہ سے اس حقیقت کی تصدیق اوپر نکالے گئے مثلثوں کے رقبوں سے کریں گے۔

(i) مساوی ضلعی مثلث جس کا ضلع 10cm کا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) مساوی الساقین مثلث جس کا غیر مساوی ضلع 8cm کا اور مساوی ضلع 5cm ہے

آپ دیکھیں گے کہ

(i) کے لیے ہمارے پاس ہے $s=\frac{10+10+10}{2}\text{cm}=15\text{cm}$

مثلث کا رقبہ $=\sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}\text{cm}^2$

$\sqrt{15\times5\times5\times5}\text{cm}^2=25\sqrt{3}\text{cm}^2$

(ii) کے لیے ہمارے پاس ہے $s=\frac{8+5+5}{2}\text{cm}=9\text{cm}$

مثلث کا رقبہ $=\sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}\text{cm}^2$

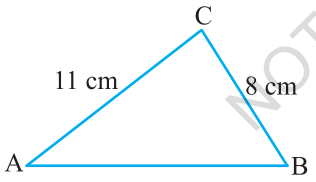
$\sqrt{9\times1\times4\times4}\text{cm}^2=12\text{cm}^2$

آیئے کچھ اور مثالیں حل کرتے ہیں

مثال 1: ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے دو اضلاع 8cm اور 11cm ہیں اور احاطہ 32cm (شکل 10.3 دیکھیے)

حل: یہاں احاطہ $c=32\text{cm}$، $a=8\text{cm}$ اور $b=11\text{cm}$

تیسرا ضلع $c=32cm-(8+11)cm=13cm$



شکل 10.3

$s-a=(16-8)cm$

$s-b=(16-11)cm=5cm$

$s-c=(16-13)cm=3cm$

اس لیے $2s=32cm$ یعنی $s=16cm$

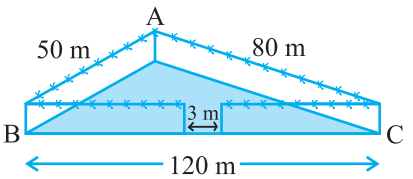
اس لیے مثلث کا رقبہ $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{16\times8\times5\times3}cm^2=8\sqrt{30}cm^2$

مثال 2: ایک مثلث نما پارک کے اضلاع 120m، 80m اور 50m کے ہیں (شکل 10.4 دیکھیے) ایک مالی دھنیا اس کے چاروں طرف ایک تار باندھنا چاہتا ہے اور اس کے اندر گھاس اگانا چاہتا ہے۔ گھاس اگانے کے لیے اس کو کتنے رقبہ کی

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ضرورت ہوگی۔20 روپیہ فی میٹر کی شرح سے چاروں کانٹے دار تار لگانے کا خرچ معلوم کیجیے اگر 3m جگہ گیٹ کے لیے چھوڑ دیتی ہے۔



شکل 10.4

حل: پارک کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہمارے پاس ہے

$$2s = 50m + 80m + 120 = 250\,m$$

یعنی $s = 125m$

اب $s - a = (125 - 120)m = 5m$

$s - b = (125 - 80)m = 45m$

$s - c = (125 - 50)m = 75m$

اس لیے پارک کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}m^2$

$= 375\sqrt{15}m^2$

اور پارک کا احاطہ $AB+BC+CA = 250m$

اس لئے چاروں طرف تار لگانے کے لیے تار کی لمبائی $= (250m - 3m)$ (گیٹ کے لیے چھوڑی گئی)

$247m = 247m =$

تار لگانے کا خرچ 247×20 روپیہ $= 4940$ روپیہ

مثال 3: ایک مثلث نما پلاٹ کے اضلاع میں 3:5:7 کی نسبت ہے اور اس کا احاطہ 300m ہے اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

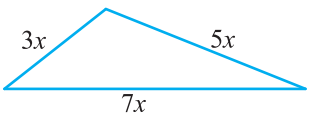
حل: مان لیجیے میٹروں میں اس کے اضلاع ہیں $3x, 5x$ اور $7x$ (شکل 10.5 دیکھیے)

تب ہم جانتے ہیں کہ $3x+5x+7x=300$ (مثلث کا احاطہ)

اس لئے $15x=300$ میں سے ملتا ہے $x=20$

اس طرح سے مثلث کے اضلاع ہیں $3 \times 20\,m, 5 \times 20\,m$ اور $7 \times 20\,m$

یعنی $60m, 100\,m$ اور $140\,m$



شکل 10.5

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کیا آپ اس کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں [ہیرون کے فارمولہ کو استعمال کر کے]؟

ہمارے پاس ہے $s = \frac{60+100+140}{2} m = 150m$

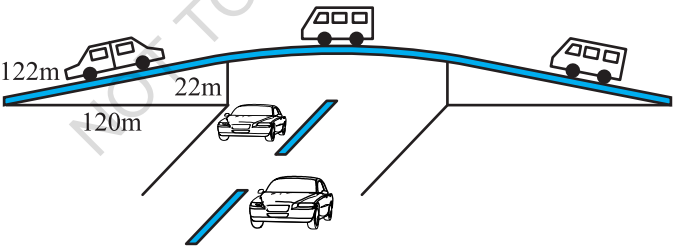
اور اس لیے $\sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}m^2$ رقبہ ہوگا

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}m^2$$

$$= 1500\sqrt{3}m^2$$

مشق 10.1

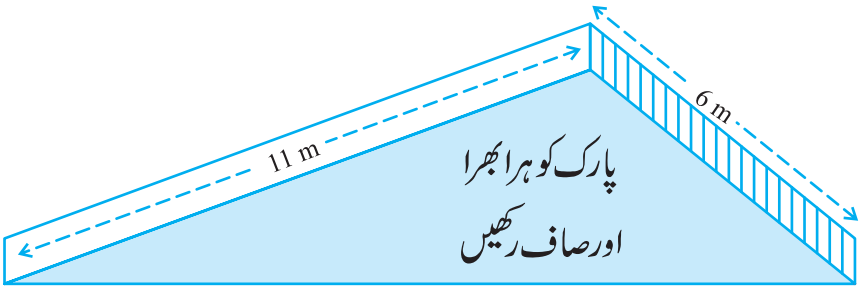
1. ٹریفک کا ایک سگنل بورڈ جس پر (آگے اسکول ہے) لکھا ہوا ہے ایک مساوی ضلعی مثلث ہے جس کا ضلع a ہے۔ ہیرون کے فارمولہ کو استعمال کر کے سگنل بورڈ کا رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کا احاطہ 180cm ہو تو سگنل بورڈ کا رقبہ کیا ہوگا۔
2. ایک فلائی اوور کی مثلث نما دیواریں ایڈورٹائزمنٹ کے لیے استعمال ہوتی ہیں۔ دیواروں کے اضلاع ہیں 122m، 22m اور 120m (شکل 10.6 دیکھیے) ایڈورٹائزمنٹ کے ذریعہ ہر سال 5000 روپیہ فی مربع میٹر کمائی کی جاتی ہے۔ ایک کمپنی نے تین مہینوں کے لیے اس کی دیواریں کرائے پر لیں۔ اُس نے ان کا کتنا کرایہ ادا کیا؟



شکل 10.6

3. ایک پارک میں ایک سلائیڈ ہے۔ اس کی ایک طرف کی دیوار پر کسی رنگ سے اس پیغام کے ساتھ رنگ کیا گیا ہے۔ پارک کو ہرا بھرا اور صاف ستھرا رکھیں' (شکل 10.7 دیکھیے) اگر دیوار کے اضلاع 15m، 11m اور 6m ہوں تو رنگ کیے گئے حصّہ کا رقبہ معلوم کیجیے

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 10.7

4. ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے دو اضلاع 18cm اور 10cm کے ہیں اور اس کا احاطہ 42cm ہے۔
5. ایک مثلث کے اضلاع میں 12:17:25 کی نسبت ہے اور اس کا احاطہ 540 cm ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔
6. ایک مساوی الساقین مثلث کا حاطہ 30cm ہے اور اس کے مساوی اضلاع میں ہر ایک 12cm کا ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10.2: خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل کا مطالعہ کیا۔

1. ایک مثلث جس میں اس کے اضلاع a، b اور c دیے ہوئے ہوں اس کا رقبہ ہیرون کا فارمولہ کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے جو ہے

$$\text{مثلث کا رقبہ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

جہاں $s = \frac{a+b+c}{2}$

باب 11

B7I9C4

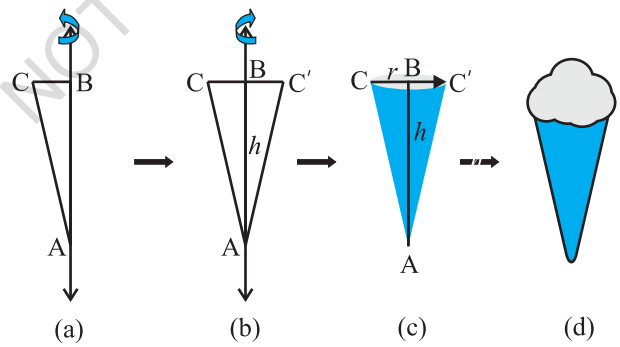
سطحی رقبہ اور حجم (SURFACE AREAS AND VOLUMES)

11.1 ایک قائم دائری مخروط کا سطحی رقبہ (Surface area of a Right Circular Cone)

اب تک ہم متماثل اشکال کو اکٹھا کر کر ٹھوس اشیاء بنا رہے تھے۔ یہ تمام اشکال پرزم کہلاتی ہیں۔

آیئے اب ایک اور قسم کے ٹھوس پر غور کرتے ہیں۔ جو پرزم نہ ہو۔ (اس قسم کے ٹھوس اہرام Byramids کہلاتے ہیں) آیئے ہم دیکھتے ہیں کہ ان کی تشکیل کیسے ہوتی ہے۔

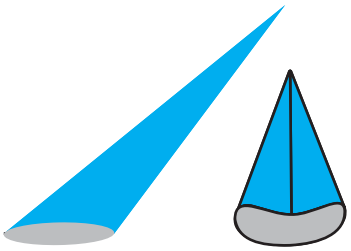
مشغلہ : ایک قائم زاوی مثلث ABC جو B پر قائم ہے۔ کاٹیے، مثلث کے عمودی ضلعوں میں سے ایک کے ساتھ (AB کے) ایک موٹا سا دھاگا پیسٹ Paste کیجیے شکل (a) 11.1 دیکھیے۔ دھاگا کو اپنے دونوں ہاتھوں سے مثلث کے دونوں طرف سے پکڑ کر مثلث کو دھاگے کے ساتھ کئی مرتبہ گھمایئے۔ ایسا کرنے سے کیا ہوتا ہے۔؟ کیا آپ اس شکل کو پہچان سکتے ہیں جو مثلث دھاگے کے اردگرد سے بناتا ہے۔ (شکل 11.1(b) دیکھیے)؟ کیا یہ عمل آپ کو اس وقت کی یاد نہیں دلاتا جب آپ نے اس میں شکل کے ایک برتن میں آئس کریم کھائی تھی (شکل (c) اور (d) 11.1 دیکھیے)؟



شکل 11.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہ ایک قائم دائری مخروط کہلاتا ہے۔ (شکل 11.1(c) میں دکھائی گئی شکل ایک قائم دائری استوانہ ہے جس میں نقطہ A راس کہلاتا ہے۔ اور AB اس کی اونچائی BC نصف قطر اور AC مخروط کی ترچھی اونچائی یہاں B مخروط کے دائرہ قاعدہ کا مرکز ہے۔ مخروط کی اونچائی نصف قطر اور اونچائی کو بالترتیب؟ اور l سے ظاہر کرتے ہیں۔ آیئے ایک بار پھر دیکھتے ہیں کہ کونسا مخروط دائرہ مخروط نہیں ہے۔ کیونکہ (a) میں راس کو قاعدہ کے مرکز سے ملانے والا خط، قاعدہ پر قائم زاویہ نہیں بناتا اور شکل (b) میں قاعدہ دائرہ نہیں ہے۔

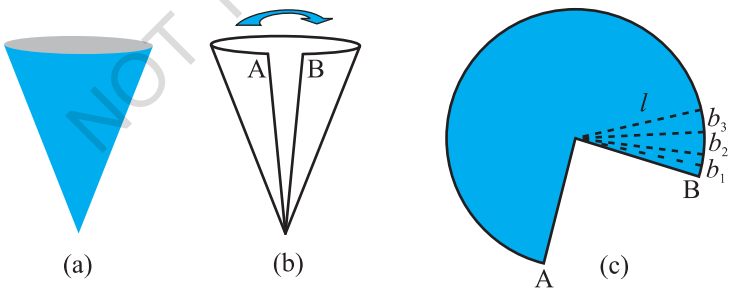


شکل 11.2

استوانہ ہی کی طرح، کیونکہ ہر صرف قائم دائری مخروط کے بارے میں پڑھیں گے۔ یاد رکھیے اس باب میں مخروط سے ہماری مراد قائم دائری مخروط ہے۔

مشغلہ: (1) ایک صاف ستھرے پیپر کے ایک مخروط کو اس کے ایک ضلع کے ساتھ اس طرح کاٹتے ہیں کہ پیپر (Overlap) نہ ہو۔ اس کے کھولنے پر آپ کی وہ شکل دیکھتے ہیں جو مخروط کی سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ وہ خط جن پر سے آپ مخروط کو کاٹتے ہیں مخروط کی ترچھی اونچائی کہلاتی ہے اور اس کو ہم l سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایک گول کیک کے حصہ جیسے نظر آتا ہے۔

(ii) اگر آپ A اور B پارک گئے اضلاع کی ٹیپ کو ایک ساتھ رکھیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل 11.3 (c) کی خمیدہ سطح مخروط کے دائرہ قاعدہ کی تشکیل کرتا ہے۔



شکل 11.3

(iii) اگر شکل ((11.3(c)) کی شکل والے پیپر کو نقطہ O سے کھینچے جانے والے خطوں کے ساتھ سیکڑوں چھوٹے چھوٹے ٹکروں

© KBS NOT TO BE REPUBLISHED

میں کاٹا جائے تو ایسا ہر حصہ ایک چھوٹا مثلث ہوگا۔ جس کی اونچائی مخروط کی ترچھی اونچائی l ہوگی۔

(iv) اب ہر ایک مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ہر ایک مثلث کا قاعدہ $\times l$۔

اس لیے، پورے پیپر کا رقبہ

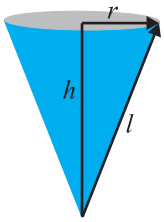
= تمام مثلثوں کے رقبہ کا حاصل جمع

$$=\frac{1}{2}b_1l+\frac{1}{2}b_2l+\frac{1}{2}b_3l+....=\frac{1}{2}l(b_1+b_2+b_3+....)=$$

$=\frac{1}{2}\times l\times$ (11.3 (c)) کی پوری خمیدہ باؤنڈری کی لمبائی $=$

= کیونکہ $b_1+b_2+b_3+....$ شکل کی خمیدہ کی سطح کی تشکیل کرتے ہیں۔

لیکن شکل کا خمیدہ مخروط کے قاعدہ کا احاطہ بنانا ہے اور مخروط کے قاعدہ کا محیط $(=2\pi r)$ ہے



شکل 11.4

اس لیے، $\frac{1}{2}\times l\times 2\pi r=\pi rl$ **مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ**

جہاں r اسکے قاعدہ کا نصف قطر اور l اسکی ترچھی اونچائی۔

نوٹ کیجیے کہ $l^2=r^2+h^2$ (جیسا کہ شکل 11.4 میں دیکھا جاسکتا ہے۔)،

فیثاغورث کے مسئلہ کو استعمال کرنے پر یہاں h مخروط کی اونچائی ہے۔

اس لیے $l=\sqrt{r^2+h^2}$

اب اگر مخروط کا قاعدہ نہ ہو تو r نصف قطر والا ایک دائری پیپر اور چاہیے جب کہ رقبہ πr^2

اس لیے، $\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$ **مخروط کا کل سطحی رقبہ**

مثال 1: ایک مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے کل ترچھی اونچائی 10cm اور قاعدہ کا نصف قطر 7cm

حل: خمیدہ سطح کا رقبہ $=\pi rl=\frac{22}{7}\times 7\times 10cm^2$

$=220cm^2$

مثال 2: ایک مخروط کی اونچائی 16cm اور قاعدہ کا نصف قطر 12cm ہے تو مخروط کی خمیدہ سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں، $h=16cm$ اور $r=12cm$

اس لیے، $l^2=h^2+r^2$

$l=\sqrt{16^2+12^2}cm=20cm$

اس لیے، خمیدہ سطح کا رقبہ $=\pi rl$

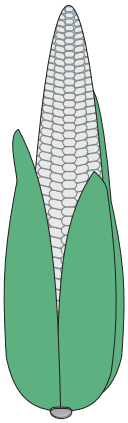
$=3.14\times 12\times 20cm^2=753.6=cm^2$

NOT TO BE REPUBLISHED @KBS

کل سطحی رقبہ $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)\,cm^2$

$= (753.6 + 452.16)\,cm^2 = 1205.76 cm^2$



شکل 11.5

مثال 3: ایک بھٹا (شکل 11.5 دیکھیے) کی شکل تقریباً ایک مخروط کی طرح ہے جس کے چوڑے سرے کا نصف قطر 2.1cm اور لمبائی (اونچائی) 20cm ہے اگر بھٹے کی ہر $1cm^2$ سطح میں 4 دانے ہوں تو بتائیے پورے بھٹے میں کل کتنے دانہ ہیں۔

حل: کیونکہ بھٹے کے دانہ صرف اس کی خمیدہ سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس لیے ہمیں اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ جاننے کی ضرورت ہے اور اس پر موجود دانوں کی تعداد کی اس سوال میں ہمیں مخروط کی اونچائی دی ہوئی ہے۔ اس لیے ہمیں اس کی ترچھی اونچائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

یہاں، $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}\,cm$

$\sqrt{404.41}\,cm = 20.11\,cm$

اس لیے، بھٹے کی خمیدہ سطح کا رقبہ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11\,cm^2 = 132.726\,cm^2 = 132.73\,cm^2$ تقریباً

$1cm^2$ سطح پر دانوں کی تعداد ہے $= 4$

اس لیے پوری خمیدہ سطح پر دانوں کی تعداد ہوگی۔

$132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ تقریباً

اس لیے، بھٹے پر تقریباً 531 دانے ہونگے۔

مشق 11.1

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر 10.5cm ہے اور اس کی اونچائی 10cm۔ اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ایک مخروط کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کی ترچھی اونچائی 9m اور قاعدہ کا قطر 24cm ہے

3. ایک مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ $308cm^2$ اور اسکی ترچھی اونچائی 14cm ہے اس کا
(i) قاعدہ کا نصف قطر اور (ii) اور مخروط کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

4. ایک مخروط نما ٹینٹ کی اونچائی 10m ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 24m ہے تو اس کی (i) ترچھی اونچائی معلوم کیجیے (ii) ستر روپیہ فی مربع میٹر کی شرح سے ٹینٹ میں استعمال ہونے والے کینوس کا خرچ معلوم کیجیے۔

5. ایک مخروطی ٹینٹ جس کی اونچائی 8m اور قاعدہ کا نصف قطر 6m ہے۔ بتانے کے لیے 3m چوڑی کتنی تارپولین درکار ہے؟ یہ فرض کرتے ہوئے کہ سلامی میں اور کاٹنے میں ضائع ہونے والی کل تارپولین تقریباً 20cm ہے ($\pi=3.14$) استعمال کیجیے۔

6. ایک مخروطی گنبد کی ترچھی اونچائی اور قاعدہ کا قطر بالترتیب 25m اور 14m ہے۔ 210 روپیہ فی میٹر $100m^2$ کی شرح سے اس کی خمیدہ سطح کو سفیدی کرانے کا کل خرچ معلوم کیجیے۔

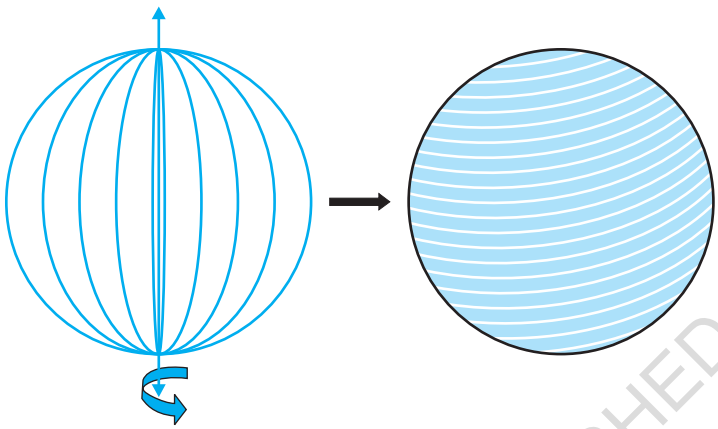
7. جوکر کی ایک ٹوپی قائم دائری مخروط کی شکل کی ہے۔ جس کے قاعدہ کا نصف قطر 7cm اور اونچائی 24cm ہے ایسی دس ٹوپیاں بنانے میں درکار شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

8. ایک بس اسٹاپ کو سڑک کے باقی حصہ سے الگ کرنے کے لیے گتے کے 50 کھوکھلے مخروط استعمال کیے گئے ہیں ہر ایک مخروط کے قاعدہ کا قطر 40cm اور اونچائی 1m ہے اگر ہر ایک مخروط کی باہری سطحوں کو 12 روپیہ فی مربع میٹر (m^2) کی شرح سے پینٹ کیا جائے تو تمام مخروطوں کو پینٹ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجیے؟
($\pi=3.14$ اور $\sqrt{1.04}=1.02$) استعمال کیجیے۔

11.2 کرہ کا سطحی رقبہ (Surface Area of a Sphere)

کرہ کیا ہے؟ کیا ایسا ہی ہے جیسے دائرہ؟ کیا آپ دائرہ کو پیپر پر بنا سکتے ہیں۔؟ ہاں آپ بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ دائرہ ایک بند مستوی شکل ہے۔ جو ایک متعین (Fix) نقطہ سے یکساں فاصلہ پر موجود نقطوں سے بنی ہے۔ جس میں متعین نقطہ دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔ اب اگر آپ ایک دائری ڈسک کے قطر کے ساتھ ایک دھاگا پیسٹ کریں اور اسکو گھمائیں جیسا کہ آپ نے پچھلے سیکشن میں مثلث کو گھمایا تھا۔ آپ کو ایک ٹھوس نظر آئے گا (شکل 11.6 دیکھیے) یہ کس سے مشابہت رکھتا ہے؟ ایک گیند ہے؟ یہ کرہ کہلاتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 11.6

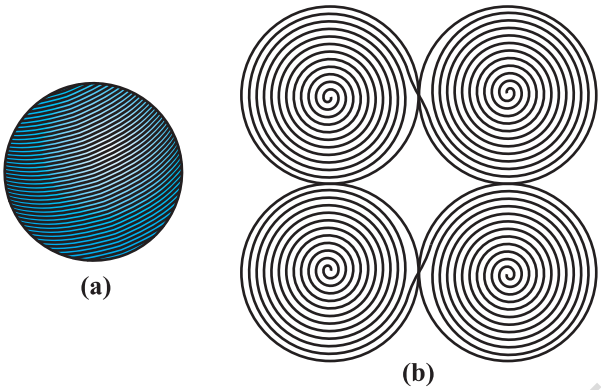
کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ دائرہ کے مرکز کا کیا ہوتا ہے۔ جب یہ گھوم کر کرہ بناتا ہے۔؟ یقیناً یہ کرہ کا مرکز بن جاتا ہے۔ اس طرح سے کرہ ایک تین شکل ہے جو فضا میں ان تمام نقطوں سے مل کر بنی ہے جو ایک متعین نقطہ، جو کرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔ اسے یکساں فاصلہ جو نصف قطر کہلاتا ہے پر واقع ہوں۔

نوٹ: ایک کرہ گیند کی سطح جیسا ہوتا ہے۔ لفظ ٹھوس کرہ اس ٹھوس کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ جس کی سطح کرّوی ہو۔

مشغلہ: کیا آپ نے کبھی کسی لٹو سے کھیلے ہیں یا آپ نے کبھی کسی کو اس سے کھیلتے دیکھا ہے۔؟ آپ جانتے ہونگے کہ کس طرح سے اس کے چاروں طرف دھاگا لپیٹا جاتا ہے۔ آیئے ربڑ کی ایک گیند لیتے ہیں اور اس میں ایک کیل لگاتے ہیں۔ کیل کے سہارے گیند کے چاروں طرف دھاگا لپیٹتے ہیں جب آپ گیند کے آخری حصہ تک پہنچ جائیں تو دھاگا کو اپنی جگہ پر روکے رکھنے کے لیے پن لگائیں اور گیند کے باقی حصہ پر دھاگا لپیٹنا جاری رکھیں ۔ جب تک آپ گیند پوری طرح سے نہ ڈھک لیں (شکل 11.7 (a) دیکھیے) دھاگا کے ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر مارک کیجیے اور ابتدائیہ گیند کی سطح سے دھاگا کو ہٹائیں۔ اب اپنے استاد سے گیند کے قطر کو ناپنے کے لیے مدد لیجیے۔ جس سے آپ اس کا نصف قطر آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں اور پھر کاغذ کی ایک شیٹ پر گیند کے نصف قطر کے مساوی نصف قطر والے چار دائرہ بنایئے ۔ ایک ایک کر کے ان دائروں پر وہ دھاگا لپیٹیے جو آپ نے گیند پر لپیٹا تھا۔ (شکل 11.7(b) دیکھیے)۔

اس طرح سے آپ نے کیا حاصل کیا؟

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 11.7

وہ دھاگہ جس سے کرہ کی پوری سطح کو ڈھک لیا تھا۔ چاروں دائرہ کے پورے خطہ کو بھر لیا۔ جس کے نصف قطر کرہ کے نصف قطر کے برابر ہیں۔ اس کا کیا مطلب ہے۔؟ اس سے پتہ چلتا ہے کہ کرہ کا سطحی رقبہ جس کا نصف قطر r

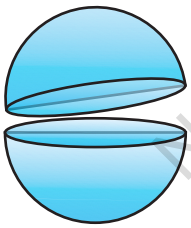
$= 4 \times (\pi r^2)$ گنا 4 بقیہ کا دائرہ کے نصف قطر والے r

اس لیے، **کرہ کا وسطی رقبہ $= 4\pi r^2$**

جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے۔

کرہ کی سطح پر آپ کتنے رخ دیکھتے ہیں؟ صرف ایک جو خمیدہ ہے۔

آیئے اب ایک ٹھوس کرہ لیتے ہیں۔ اور ایک مستوی جو اس کے مرکز سے گزرتی ہے سے اسکو بیچ سے کاٹتے ہیں۔ کرہ کیسا ہو گیا؟



شکل 11.8

ہاں، یہ دو مساوی حصوں میں منقسم ہو گیا۔ (شکل 11.8 دیکھیے) ہر نصف حصہ کو کیا کہتے ہیں؟ یہ ایک نصف کرہ کہلاتا ہے۔

اور نصف کرہ کی سطح کے بارے میں کیا خیال ہے۔ اس میں کتنے رخ ہیں۔؟ دو ایک خمیدہ سطح ہے اور ایک فلٹ رخ۔

نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا (یہ کرہ کی خمیدہ سطح کے رقبہ کا آدھا ہے۔ جو $4\pi r^2$ کا $\frac{1}{2}$ ہے۔

اس لیے، **نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $2\pi r^2$**

جہاں r اس کرہ کا نصف قطر ہے۔ جس کا نصف کرہ ایک حصہ ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اب نصف کرہ کے دونوں رخوں کو لینے پر اسکا سطحی رقبہ ہے $2\pi r^2+\pi r^2$

اس لیے، نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ $3\pi r^2$

مثال 4: 7cm نصف قطر والے کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: 7cm نصف قطر والے کرہ کا سطحی رقبہ ہے۔

$$4\pi r^2=4\times\frac{22}{7}\times7\times7\ cm^2=616\ cm^2$$

مثال 5: (i) خمیدہ سطح کا رقبہ (ii) اور 21cm نصف قطر والے نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: 21cm نصف کرہ کا خمیدہ سطح کا رقبہ کیا ہوگا۔

$$2\pi r^2=2\times\frac{22}{7}\times21\times21\ cm^2=2772\ cm^2$$

(ii) نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ ہوگا۔

$$3\pi r^2=3\times\frac{22}{7}\times21\times21\ cm^2=4158\ cm^2$$

مثال 6: ایک کھوکھلا کرہ جس میں اور موٹر سائیکل سوار ڈرائیونگ کے کرتب دکھاتا ہے، کا قطر 7m ہے۔ موٹر سائیکل کی ڈرائیونگ کے لیے دستیاب رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: کرہ کا قطر 7m ہے اس لیے نصف قطر 3.5m ہے اس لیے موٹر سائیکل کے لیے دستیاب جگہ کرہ کا سطحی رقبہ ہے۔ جو ہے

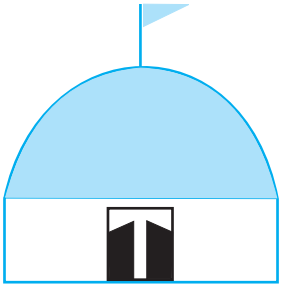
$$4\pi r^2=4\times\frac{22}{7}\times3.5\times3.5\ m^2$$
$$=154\ m^2$$

مثال 7: اٹسٹوپا کے نصف کروی گنبد کو پینٹ کرانا ہے۔ (شکل 11.9 دیکھیے) اگر گنبد کے قاعدہ کا نصف قطر 176m ہے تو 5 روپے فی 100cm کی شرح سے اس کے اوپر پینٹ کرنے کا خرچ معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ گنبد کے گول حصہ پر پینٹ ہونا ہے۔ اس لیے ہمیں نصف کرہ کی خمیدہ سطح کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ تاکہ ہمیں پتہ چل سکے کہ کتنے حصہ پر پینٹ ہونا ہے۔ اب گنبد کا محیط ہے=17.6cm اس لیے، $17.6 = 2\pi r$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لیے، گنبد کا نصف قطر ہوگا $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}\,m = 2.8\,m$



شکل 11.9

گنبد کی خمیدہ سطح کا رقبہ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8\,m^2$

$= 49.28\,m^2$

اب، $100\,cm^2$ رقبہ کے پینٹ کا خرچ ہے = 5 روپے۔

اس لیے، پینٹ کرانے کا خرچ ہے 500 روپے

اس لیے، پورے گنبد کو پینٹ کرانے کا خرچ $= 49.28 \times Rs500$

$= Rs24640$

مشق 11.2

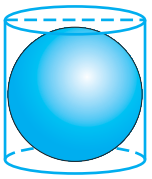
جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔ اگر اس کے نصف قطر
(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm ہوں۔
2. کرہ کا وسطی رقبہ معلوم کیجیے۔ اگر اس کے قطر
(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 cm ہوں۔
3. 10 cm نصف قطر والے نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک کرہ غبارہ میں ہوا بھرنے سے اس کا نصف قطر 7 cm سے 14 cm ہو جاتا ہے۔ ان دو حالتوں میں غبارہ کی سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔
5. پیتل کے ایک نصف کرہ پیالا کا اندرونی قطر 10.5 cm ہے۔ 16 روپیہ فی 100 cm کی شرح سے اس کے اندر کی طرف (Tin-Plating) کا خرچ معلوم کیجیے۔
6. ایک کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے اگر اس کا سطحی رقبہ $154\,cm^2$ ہے۔
7. چاند کا قطر زمین کے قطر کا تقریباً ایک چوتھائی ہے۔ اس کے سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8. ایک نصف کروی پیالہ 0.25cm موٹے ایک اسٹیل کا بنا ہوا ہے۔ پیالہ کا اندرونی قطر 5cm ہے۔ پیالے کے باہری خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

9. R نصف قطر والا ایک کرہ ایک قائم دائری استوا کے اندر پوری طرح فکس ہے۔ (شکل 11.10 دیکھیے)



شکل 11.10

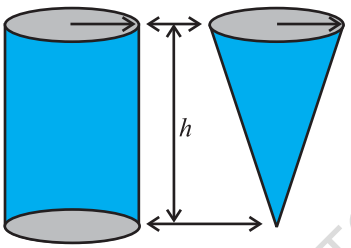
(i) کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

(ii) استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(iii) (i) اور (ii) میں حاصل رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

11.3 ایک قائم دائر مخروط کا حجم (Volume of a Right Circular Cone)

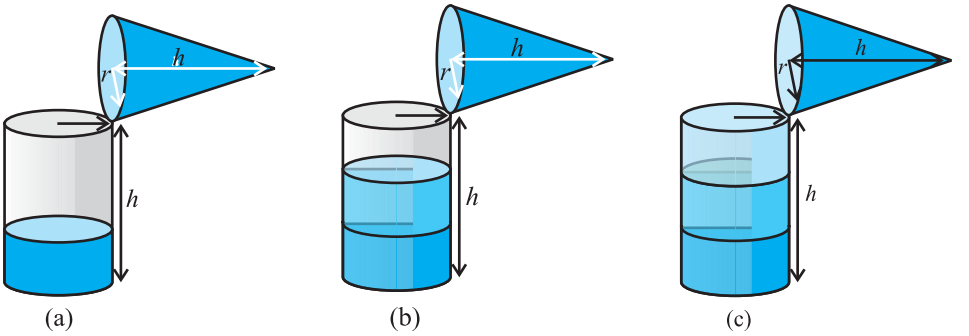
شکل 11.11 میں کیا آپ ایک ہی قاعدہ کے نصف قطر اور ایک ہی اونچائی والے ایک قائم دائری استوانہ اور ایک قائم دائری مخروط کو دیکھ سکتے ہیں؟



شکل 11.11

@CTES NOT TO BE REPUBLISHED

مشغلہ: ایک ہی نصف قطر (قاعدہ کا) اور ایک ہی اونچائی والے کھوکھلے استوانہ اور کھوکھلا مخروط بنانے کی کوشش کیجیے۔ پھر ہم ایک تجربہ کر سکتے ہیں جس سے ہمیں پیرسیکلنیل طور پر ایک قائم دائری مخروط کا حجم معلوم کرنے میں مدد ملے گی۔



شکل 11.12

اس لئے، اسے اس طرح سے شروع کرتے ہیں۔

مخروط کے کنارے تک اسے ریت سے بھر دیجئے اور اس کو استوانہ میں خالی کر دیجئے ہم دیکھیں گے کہ یہ اس کا کچھ حصہ بھرتا ہے [شکل 11.12(a) دیکھیے]

ہم پھر کنارے تک ریت کو مخروط میں بھرتے ہیں اور اس کو استوانہ میں ڈال دیتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ استوانہ ابھی تک پورا نہیں بھر [ل 11.12(b) دیکھیے]

جب مخروط کو تیسری مرتبہ ریت سے بھر کر اس کو استوانہ میں ڈالا جاتا ہے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ استوانہ بھی اب کنارے تک پورا بھر گیا [دیکھیے شکل 11.12(c)]

اس تجربہ سے ہم اسانی سے یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں۔ مخروط جو گنا حجم استوانہ کا حجم ہوتا ہے جس کے قاعدہ کا نصف قطر اور اونچائی وہی ہو جو مخروط کی ہے اس کا مطلب ہے مخروط کا حجم استوانہ کے حجم کا ایک تہائی ہے۔

اس لئے، $\frac{1}{3}\pi rh$ = مخروط کا حجم

جہاں r مخروط کا نصف قطر اور h اونچائی ہے

مثال 8 : ایک مخروط کی اونچائی اور ترجیحی اونچائی بالترتیب 21 cm اور 28 cm ہیں۔ مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔

حل: $l^2 = r^2 + h^2$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2}\, cm = 7\sqrt{7}\, cm$$

@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\sqrt{7}\times 7\sqrt{7}\times 21 \ cm^2$

$= 7546 \ cm^2$

مثال 9 : مونیکا کے پاس کینوس کا ایک ٹکڑا ہے جس کا رقبہ $551 m^2$ وہ اس کا استعمال ایک مخروطی ٹینٹ بنانے میں کرتا ہے جس کے قاعدہ کا نصف قطر 7cm فرض کرتے ہوئے سینے کے لئے مارجن اور کاٹتے وقت برباد ہو مر کینوس تقریباً 1cm ہے تو اس کینوس سے بنے ٹینٹ کا حجم معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ کینوس کا رقبہ $= 551 m^2$ کیونکہ برباد ہوا کینوس $1 m^2$ ہے، اس لئے ٹینٹ بنانے کے لئے دستیاب کینوس کا رقبہ $550 \ m^2 = (551-1) m^2$

اب ٹینٹ کا سطحی رقبہ $= 550 m^2$ اور ٹینٹ کا مطلوبہ قاعدہ کا نصف قطر $= 7m$

نوٹ کیجیے کہ ٹینٹ میں صرف خمیدہ سطح کا رقبہ ہوتا ہے (ٹینٹ کے فرش کو کینوس سے نہیں ڈھکا جاتا)

اس لئے ٹینٹ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $= 550 \ m^2$

یعنی، $\pi rl = 550$

یا، $\frac{22}{7}\times 7\times l = 550$

یا، $l = 3\frac{550}{22} m = 25 m$

اب، $l^2 = r^2 + h^2$

اس لیے، $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \ m = \sqrt{625-49} m = \sqrt{576} \ m$

$= 24 \ cm$

اس لیے، مخروطی ٹینٹ کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 24 m^3 = 1232 m^3$

مشق 11.3

جب تک وضاحت نہ کی جائے، $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے

1. ایک قائم دائری مخروط کا حجم معلوم کیجیے جس کا

(i) نصف 6a اور اونچائی 7cm ہو (ii) نصف قطر 3.5cm اور اونچائی 12cm ہو۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ایک مخروطی برتن کی گنجائش لیٹروں میں معلوم کیجیے جس میں
(i) نصف قطر 7cm اور ترچھی اونچائی 25cm ہو (ii) اونچائی 12cm اور ترچھی اونچائی 13cm ہو

3. ایک مخروط کی اونچائی 15cm ہے اگر اس کا حجم 1570vm ہے تو قاعدہ کا نصف قطر معلوم کیجیے ($\pi = 3.14$ لیجیے)

4. 9cm اونچائی والے ایک قائم دائری مخروط کا حجم $48\pi cm^3$ ہے اس کے قاعدہ کا قطر معلوم کیجیے۔

5. ایک مخروطی گڑھا جس کے اوپر کا قطر 3.5cm ہے 12cm گہرا ہے۔ کلومیٹر میں اس کی گنجائش معلوم کیجیے۔

6. ایک قائم دائری مخروط کا حجم $9856cm^3$ ہے اگر قاعدہ کا قطر 28cm ہو تو معلوم کیجیے
(i) مخروط کی اونچائی (ii) مخروط کی ترچھی اونچائی (iii) مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ۔

7. ایک قائم زاوی مثلث ABC جس کے اضلاع 5cm، 12cm اور 13cm ہیں کو اس کے 12cm لمبائی والے ضلع پر گھمایا گیا۔ اس طرح سے حاصل ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

8. اگر سوال 7 میں مثلث ABC کو 5cm لمبائی والے ضلع پر گھمایا جائے تو اس طرح سے حاصل ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے اور اس طرح سے حاصل دونوں ٹھوسوں کے حجم میں نسبت بھی معلوم کیجیے۔

9. گیہوں کا ایک ڈھیر مخروط کی شکل کا ہے جس کا قطر 105cm اور اونچائی 3cm ہے اس کا حجم معلوم کیجیے بارش سے بچانے کے لئے اس ڈھیر کو کینوس سے ڈھکا جاتا ہے۔ مطلوبہ کینوس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

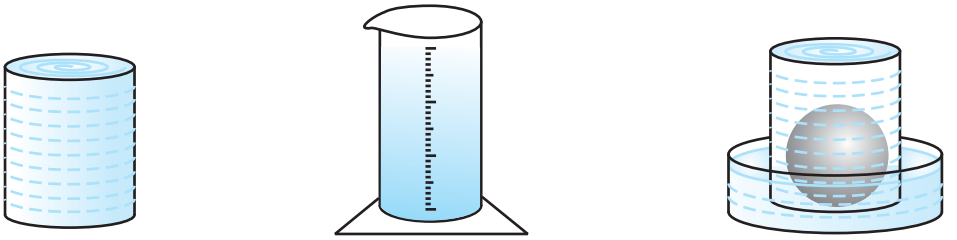
11.4 کرہ کا حجم (Volume of a Sphere)

اس لئے دیکھتے ہیں کہ کرہ حجم کس طرح معلوم کریں پہلے مختلف نصف قطر والے دو یا تین کرہ لیجیے اور ایک بڑا برتن لیجیے جس میں الگ ہی وقت میں یہ دونوں کرہ آسانی سے آسکیں۔ ایک بڑا ٹرف (ناند) لیجیے جس میں آپ اس برتن کو رکھ سکیں۔ اور پھر برتن کو کنارے تک پانی سے بھر دیں [شکل 11.13(a) دیکھیے]۔

اب احتیاط سے کرہ میں سے ایک کو برتن میں رکھئے برتن میں سے کچھ پانی بہہ کر ناند (Through) میں گرے گا جس میں یہ برتن رکھا ہوا ہے شکل 11.13(b) دیکھیے ناند میں سے پانی ایک پیمائشی استوانہ میں ڈال دیجیے (ایک استوانہ جار جس میں نشان لگے ہو) اور پانی جو بہہ کر ناند میں آیا ہے۔ اس کی پیمائش کیجیے (شکل 11.13(c) دیکھیے) مان لیجیے ڈبوئے گئے کرہ کا نصف قطرہ ہے (آپ کرہ کا قطر معلوم کر کے اس کا نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں) اور پھر $\frac{3}{4}\pi r^3$ کی قدر معلوم کیجیے کیا آپ اس

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

قدر کو اس بہتے ہوئے پانی کے حجم کے برابر پائیں گے؟



شکل 11.13

اسی عمل کو ایک مختلف سائز والے کرہ کے ساتھ دہرایئے۔

اس کرہ کا نصف قطر R معلوم کیجئے اور پھر $\frac{3}{4}\pi R^3$ کی قدر معلوم کیجیے ایک بار پھر اس کی قدر اس کرہ کے ذرائع ہٹائے گئے پانی کے جمع کے برابر ہوگی۔ اس سے ہم کیا نتیجہ نکالتے ہیں یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ کسی کرہ کا حجم اس کرہ کے ذرائع ہٹائے گئے پانی کے حجم کی پیائش کے برابر ہے۔ مختلف نصف قطروں کے کروں کے ساتھ اس تجربہ کو دہرایئے۔ آپ دیکھیں گے کہ نتیجہ ایک ہی ہوگا یعنی کرہ کا حجم اس کے نصف قطر کے مکعب کا $\frac{4}{3}\pi$ گنا ہے اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ایک کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے۔

اونچی کلاسوں میں ہم اس کو ثابت بھی کیا جا سکتا ہے لیکن اس سیکشن میں ہم اس کو اسطرح ہی کہیں گے جیسے یہ درست ہے۔

کیونکہ نصف کرہ، کرہ کا نصف ہے تو کیا آپ نصف کرہ کے حجم کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟

ہاں یہ ہے $\frac{1}{2}$ کا $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

اس لئے، نصف کرہ کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3$

جہاں r نصف کرہ کا نصف قطر ہے

اس فارمولہ کے استعمال کی وضاحت کے لیے ہم کچھ مثالوں کو لیتے ہیں۔

مثال 10 11.2a نصف قطر والے کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

حل: مطلوبہ حجم ہے $\frac{4}{3}\pi v^3$

$$= 5887.32\text{cm}^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2\text{cm}^3$$

مثال 11: ایک شوٹ پُٹ 4.99 نصف قطر والا ایک کرہ ہے اگر دھات 5 کثافت 7.8g فی ہے تو شوٹ پُٹ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ شوٹ پُٹ دھات کا بنا ایک ٹھوس کرہ ہے اور اس کی قیمت اس کے حجم اور کثافت کا حاصل ضرب ہے اس لئے ہمیں کرہ کا حجم معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

اب کرہ کا حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\, cm^3$$

$$493 cm^3$$

مزید 1cm دھات کی قیمت ہے 7.8g

اس لئے شوٹ پُٹ کی قیمت ہے $= 7.8\times 493\, g$

$$(\text{تقریبا}) = 3.85\text{kg} = 3845.44\text{g}$$

مثال 12: ایک نصف کرہ پیالہ کا نصف قطر 3.5a ہے اس میں موجود پانی کا حجم کیا ہوگا

حل: پیالہ میں جتنا پانی آ سکتا ہے اس کا حجم

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5\, cm^2 = 89.9\, cm^2$$

مشق 11.4

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. کرہ کا حجم معلوم کیجیے جس کا نصف قطر

(i) 7cm (ii) 0.63cm

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. ایک ٹھوس کروی گیند کے ذریعہ ہٹائے گیے پانی کی مقدار معلوم کیجیے جس کا قطر (i)28cm (ii)0.21m

3. دھات کی ایک گیند کا قطر 4.2cm گیند کی قیمت معلوم کیجیے اگر دھات کی کثافت 89g فی cm^3 ۔

4. چاند کا قطر زمین کے قطر کا تقریباً $\frac{1}{4}$ ہے چاند کا حجم زمین کے حجم کی کونسی کیر ہے؟

5. 10.5cm قطر والے نصف کروی پیالہ میں کتنے لیٹر دودھ آئیگا

6. 1 نصف کروی ٹنکی 1cm موٹے تو ہے کی شیٹ کی بنی ہوئی ہے اگر اس کا اندرونی نصف قطر 1cm ہو تو اس ٹنکی کے بننے میں استعمال ہوئے لوہے کا حجم معلوم کیجیے۔

7. اس کرہ کا حجم معلوم کیجیے جس کا سطحی رقبہ $154cm^2$ ہے۔

8. ایک بلڈنگ کا گنبد نصف کروی شکل کا ہے۔اندر سے اس کی سفیدی کا کل خرچ Rs 498.96 ہے اگر سفیدی کا خرچ فی مربع میٹر 2.00 روپے ہو تو

(i) گنبد کا اندرونی سطحی رقبہ معلوم کیجئے، (ii) گنبد کے اندر موجود ہوا کا حجم معلوم کیجئے

9. 27 ٹھوس لوہے کے کرے جس میں ہر ایک کا نصف قطر r اور سطحی رقبہ S ہے کو پگھلا کر ایک کرہ بنایا گیا جس کا سطح رقبہ S ہے معلوم کیجیے (i) نئے کرہ کا نصف قطر 'r' (ii) s اور "s" میں نسبت۔

10. دواؤں کا ایک کیپ سول 3.5mm قطر والے ایک کرہ کی شکل کا ہے اس کو بھرنے کے لئے mm^3 میں کل کتنی دودھ کی ضرورت ہے۔

11.15 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ $= \pi rl = \pi rh$

2. ایک قائم دائری مخروط کا سطحی رقبہ $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r\,(l+r)$

3. r نصف قطر والے کرہ کا سطحی رقبہ $= 4\pi r^2$

4. نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $= 2\pi r^2$

5. نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ $= 3\pi r^2$

6. مخروط والے کرہ کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

7. r نصف قطر والے کرہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

8. نصف کرہ کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[یہاں حروف r,a,h,b,l, وغیرہ اپنے عام مفہوم میں استعمال ہوئے ہیں۔جن کا انحصار سیاق وسباق پر ہے۔]

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

باب 12

E7G4N1

شماریات (STATISTICS)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

12.1 آنکڑوں کا گرافی اظہار (Graphical representation of Data)

آنکڑوں کو جدول کے ذریعہ اظہار کرنا ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم اپنی توجہ ایک اور اظہار کی طرف مرکوز کرنا چاہتے ہیں یعنی گرافی اظہار کی طرف کیا خوب کہا ہے کسی نے ایک تصویر ہزار الفاظ سے بہتر ہوتی ہے۔

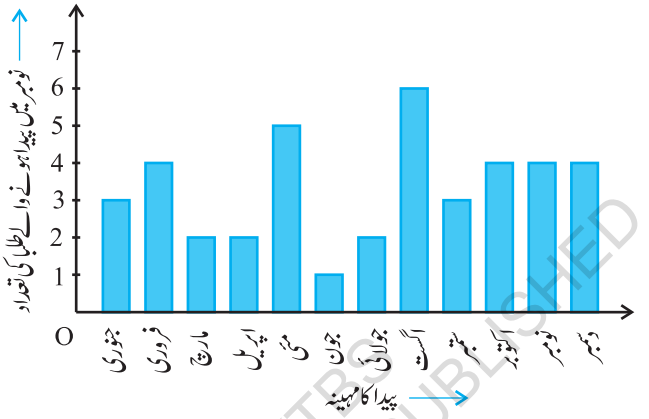
عام طور پر انفرادی اشیاء کے درمیان موازنہ گراف کے ذریعہ اچھی طرح سے کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح سے اصل آنکڑوں کی نسبت ان کے اظہار کو سمجھنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ اس سیکشن میں ہم مندرجہ ذیل گرافی اظہار کے بارے میں پڑھیں گے۔

(A) بارگراف (B) یکساں اور مختلف چوڑائیوں کے ہسٹوگرام (C) تعدد کثیر ضلعی

(A) بارگراف (Bar Graph)

پچھلی کلاسوں میں آپ بارگراف اور اس کی بناوٹ کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ یہاں ہم اس کو زیادہ رسمی طور پر سمجھنے کی کوشش کریں گے یاد کیجیے کہ یکساں چوڑائی والے بارگراف جن کے درمیان برابر فاصلہ ہوتا ہے صفر کو دکھانے کے لیے محور (مان لیجیے x- محور) پر بتایا جاتا ہے۔ متغیر کی قیمتوں کو دوسرے محو (y- محور) پر دکھایا جاتا ہے اور بار کی اونچائی متغیر کی قیمت پر منحصر کرتی ہے۔

مثال 1: نویں کلاس کے ایک خاص سیکشن کہ 40 طلباء سے ان کی پیدائش کے مہینہ کے بارے میں پوچھا گیا۔ اس طرح سے حاصل کردہ آنکڑوں کا گراف مندرجہ ذیل میں بتایا گیا ہے



شکل 12.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مندرجہ بالا بار گراف کا مشاہدہ کیجیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(i) نومبر کے مہینہ میں کتنے طلباء پیدا ہوئے

(ii) کون سے مہینہ میں سب سے زیادہ طلباء پیدا ہوئے؟

حل: آپ نوٹ کرتے ہیں کہ یہاں متغیر پیدائش کا مہینہ ہے اور متغیر کی قیمت پیدا ہوئے طلباء کی تعداد ہے۔

(i) نومبر کے مہینہ میں 4 طلباء پیدا ہوئے

(ii) زیادہ تر طلباء اگست کے مہینہ میں پیدا ہوئے۔

آیئے اب دہراتے ہیں کہ مندرجہ ذیل مثال کو لے کر ہم پارا گراف کس طرح بناتے ہیں

مثال 2: 20,000 روپے ماہانہ کی آمدنی والے ایک خاندان نے مختلف مدوں میں فی مہینہ خرچوں کو مندرجہ ذیل طریقہ سے پلان کیا۔ ان آنکڑوں کا بار گراف بنایئے

جدول 12.1

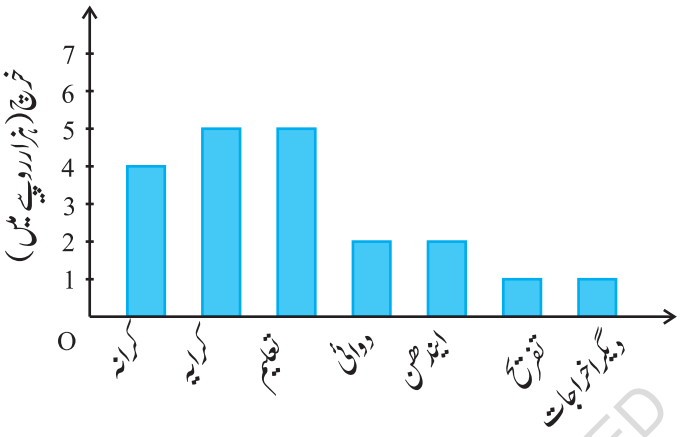
مدیں	خرچ (1000 روپیوں میں)
کرانہ	4
کرایہ	5
بچوں کی تعلیم	5
دوائیاں	2
تفریح	1
ایندھن	2
متفرق	1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل: ان آنکڑوں کا بارگراف ہم مندرجہ ذیل طریقہ سے بناتے ہیں۔نوٹ کیجیے کہ دوسرے کالم میں اکائی ہزار روپیوں میں ہے۔اس لیے مسالہ کے آگے 4 کا مطلب ہے 4000 روپیے۔

1. کیوں کہ بار کی چوڑائی کوئی اہمیت نہیں رکھتی کوئی بھی پیمانہ چنتے ہوئے گراف کو مدوں (متغیر) کا اظہار ہم افقی محور پر کرتے ہیں لیکن صفائی ک لیے ہم ان بار کی یکساں چوڑائیاں لیتے ہیں اوران کے درمیان یکساں فاصلہ (gap) برقرار رکھتے ہیں مان لیجیے ایک مد کا اظہار ایک اکائی سے ہوتا ہے۔
2. ہم خرچ (قیمت) کو عمودی محور پر ظاہر کرتے ہیں کیوں کہ زیادہ سے زیادہ خرچ Rs. 5000 ہے۔ہم اپنا پیمانہ ایک اکائی =100 روپے لے سکتے ہیں۔
3. اپنے پہلے مد یعنی کرانہ ،کو ظاہر کرنے کے لئے ہم 1 اکائی چوڑائی اور 4 اکائی اونچائی والے مستطیل بار بناتے ہیں۔
4. اسی طرح سے دو لگا تار باروں کے درمیان 1 اکائی کا (gap) دیتے ہوئے باقی مدوں کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہاں آپ آسانی سے ایک ہی نظر میں آنکڑوں کی خصوصیات کو دیکھ سکتے ہیں۔مثال کے طور پر تعلیم پر کیا گیا خرچ دواؤں پر کئے گئے خرچ کے دوگنے سے زیادہ ہے۔اس طرح سے کچھ باتوں میں جدولی اظہار سے یہ اظہار زیادہ بہتر ہے۔



شکل 12.2

مشغلہ 1: مشغلہ کے انھیں 4 گروپوں کو جاری رکھتے ہوئے آنکڑوں کو مناسب بارگراف سے ظاہر کیجیے آیئے اب دیکھتے ہیں جاری کلاس۔ وقفوں کی تعداد بٹاؤ جدول گرافی طور پر کس طرح ظاہر کیا جانا ہے۔

(B) ہسٹوگرام (Histogram)

یہ بھی بارگراف ہی کی طرح ایک قسم کا اظہار ہے جسے چار کلاس وقفوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر جدول 12.2 میں دکھائے گئے ایک کلاس کے 36 طلباء کے وزنوں کے تعداد بٹاؤ پر غور کیجیے۔

جدول 12.2

وزن کلوگرام میں	طلباء کی تعداد
30.3-35.5	9
35.5-405	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
کل	36

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

آیئے مذکورہ بالا آنکڑوں کو گرافی طور پر مندرجہ ذیل طریقہ سے اظہار کرتے ہیں۔

(i) ایک مناسب پیمانہ لے کر وزنوں کو افقی محور پر ظاہر کیجیے۔ ہم پیمانہ 1cm=5kg چن سکتے ہیں مزید کیوں کہ پہلا کلاس وقفہ 0 سے نہیں 30.5 سے شروع ہو رہا ہے۔ اس لیے ہم اس کو محور پر ایک (ٹوٹی ہوئی لائن) کنک کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں۔

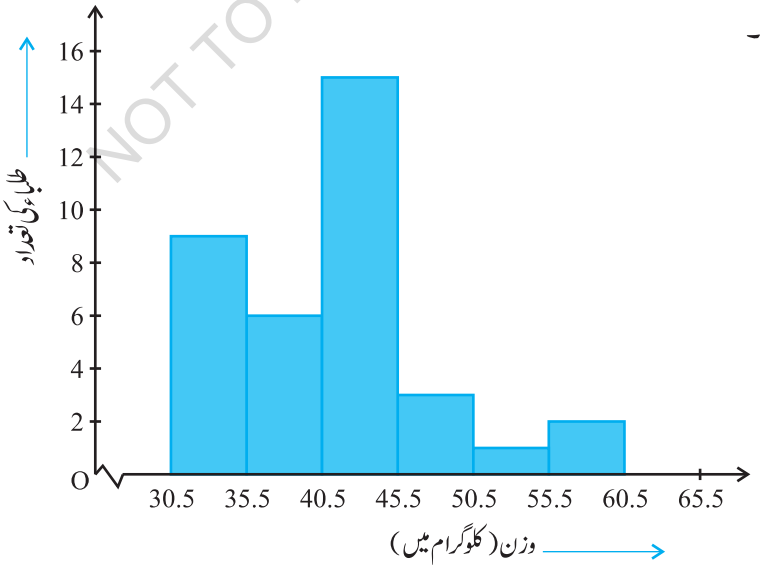
(ii) ہم طلباء کی تعداد (تعدد) کو مناسب پیمانہ لے کر عمودی محور پر ظاہر کرتے ہیں۔ کیوں کہ سب سے زیادہ تعدد 15 ہے۔ اس لئے ہم ایسا پیمانہ چنتے ہیں جس میں یہ تعداد 15 آسانی سے آجائے۔

(iii) اب ہم کلاس سائز کی چوڑائی والے مستطیلی (یا مستطیلی بار) بناتے ہیں جن کی لمبائی ان کی کلاس وقفہ کی نظیری تعدد کے برابر ہوتی مثال کے طور پر کلاس وقفہ 30.5-35.5 کا مستطیل وہ ہوگا جس کی چوڑائی 1cm اور لمبائی 4.5cm

(iv) اس طرح سے ہمیں شکل 12.3 میں دکھایا گیا گراف حاصل ہوتا ہے۔

مشاہدہ کیجیے کیوں کہ دو لگاتار مستطیلوں کے درمیان کوئی gap نہیں ہے اس لیے نتیجہ کے طور پر ملا گراف ایک ٹھوس شکل کی طرح دکھتا ہے یہ ہسٹوگرام کہلاتا ہے۔ جو کہ جاری کلاسوں والی تعدد بتاؤ کا گرافی اظہار ہے۔ مزید یہ کہ اس کی بناوٹ میں بار کی چوڑائی ایک بہت اہم کردار ادا کرتی ہے جو بار گراف میں نہیں۔

درحقیقت یہاں بنائے گئے سیدھے مستطیلوں کا رقبہ ان کی نظیری تعدد کے تناسب میں کیوں کہ مستطیلیوں کی چوڑائی یکساں ہوتی ہے اس لئے مستطیلوں کی لمبائی اس کی تعدد کے متناسب ہوتی ہیں۔ اس طرح سے ہم (iii) کے مطابق ہم لمبائی کھینچتے ہیں۔



شکل 12.3

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

اب ہم مذکورہ بالا سے مختلف ایک صورتحال پر غور کرتے ہیں

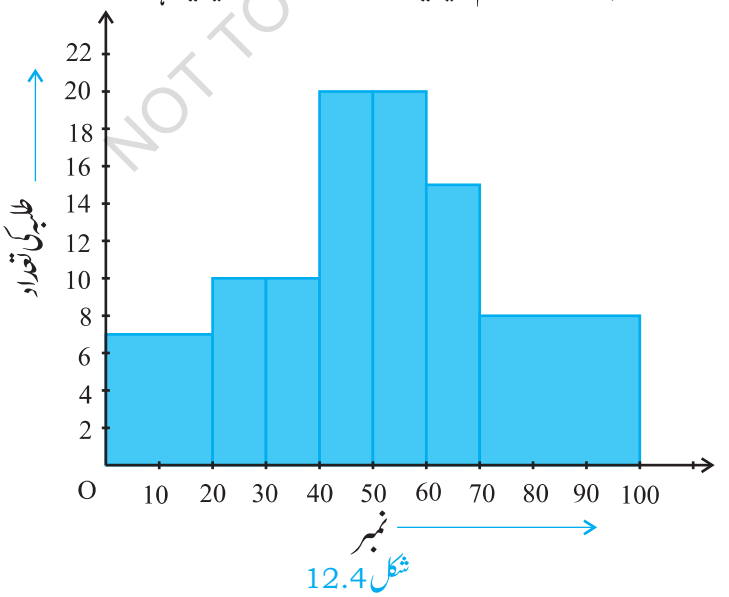
مثال 3: ایک استاد 100 نمبروں والے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں طلباء کے دو سیکشنوں کی کارکردگی کا تجزیہ کرنا چاہتا تھا۔ ان کی کارکردگی کو دیکھ کر اس نے پایا کہ کچھ طلباء 20 سے کم اور کچھ نے 70 یا اس سے زیادہ نمبر حاصل کئے۔ اس لئے اس نے طے کیا کہ ان کو مختلف سائز والے گروپوں میں گروپ کیا جائے جو ہوں گے 0-20، 20-30، 30-40، 40-50، 50-60، 60-70، 70-100۔ پھر اس نے مندرجہ ذیل جدول بنایا:

نمبر	طلباء کی تعداد
0-20	7
20-30	10
30-40	10
40-50	20
50-60	20
60-70	15
70 سے زیادہ	8
کل	90

12.3

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ایک طالب علم کے ذریعے اس جدول کا ہسٹوگرام بنایا گیا جو کہ شکل 12.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 12.4

اس کرافی اظہار کی احتیاط سے جانچ کرنے کے بعد کیا آپ سوچتے ہیں کہ اس نے آنکڑوں کا صحیح اظہار کیا ہے؟ نہیں یہ گراف ہماری غلط رہنمائی کرتا ہے۔ جیسا ہم نے پہلے بیان کیا تھا کہ مستطیلوں کا رقبہ ہسٹوگرام میں دئے گئے تعدد کے تناسب سے ہوتا ہے۔ پہلے یہ مسئلہ نہیں اٹھا تھا۔ کیوں کہ تمام مستطیلوں کی چوڑائی برابر تھی کیوں کہ یہاں مستطیلوں کی چوڑائی مختلف ہے۔ اس لئے یہ ہسٹوگرام صحیح تصویر نہیں دیتا۔ مثال کے طور پر یہ 70-100 کے وقفہ میں 60-70 کے وقفہ سے زیادہ تعدد ہوتا ہے۔

اس لئے یہ ضرورت ہے کہ ہم مستطیلوں کی لمبائیوں میں کچھ تبدیلیاں کریں تا کہ ان کا رقبہ ان کے تعدد کے پھر تناسب میں ہو جائے۔

اس میں کئے گئے اقدام مندرجہ ذیل ہیں

1. ایک سب سے چھوٹے کلاس سائز والے ایک کلاس وقفہ کو چنئے۔ مذکورہ بالا مثال میں سب سے چھوٹا کلاس سائز 10 ہے۔
2. اس طرح سے مستطیل کی لمبائی تبدیل ہو کر کلاس سائز 10 کے متناسب میں ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر جب کلاس سائز 20 ہے۔ مستطیل کی لمبائی 7 ہے۔ اس لئے جب کلاس سائز 10 ہے تو مستطیل کی لمبائی ہے $\frac{7}{10}\ 10 = 3.5$

اسی طرح سے آگے بڑھتے ہوئے ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے:

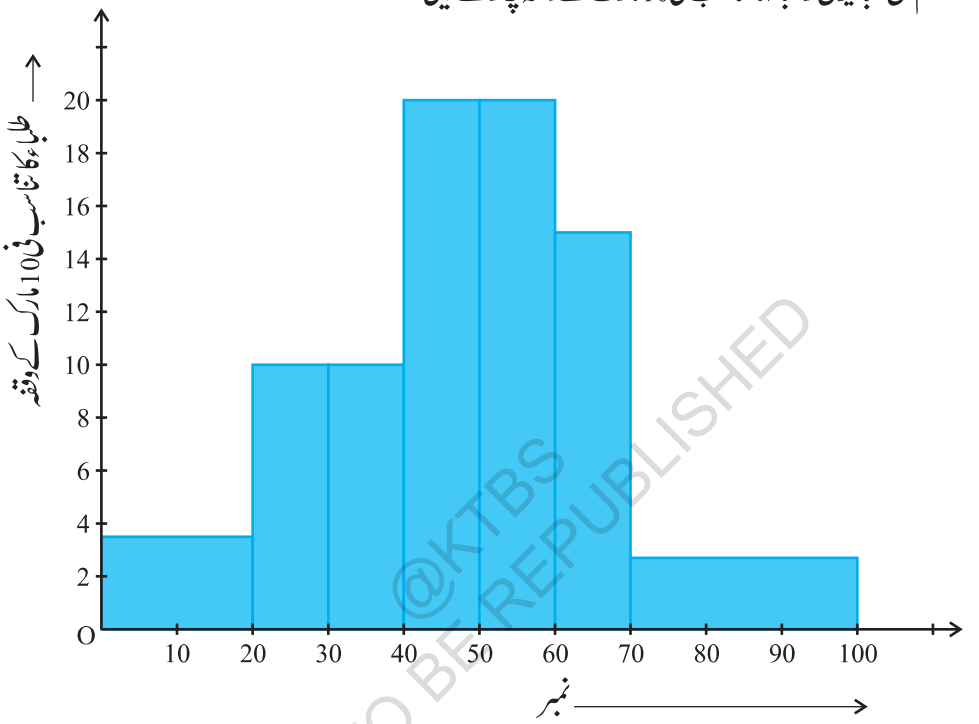
جدول 12.4

نمبر	تعداد	کلاس کی چوڑائی	مستطیل کی لمبائی
0-20	7	20	$\frac{7}{20}\times 10 = 3.5$
20-30	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
30-40	10	10	$\frac{10}{10}\times 10 = 10$
40-50	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
50-60	20	10	$\frac{20}{10}\times 10 = 20$
60-70	15	10	$\frac{15}{10}\times 10 = 15$
70-100	8	30	$\frac{8}{30}\times 10 = 2.67$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کیوں کہ ہم نے ہر ایک حالت میں 10 نمبروں کے لئے ان لمبائیوں کی تحسیب کی ہے

ہم ان لمبائیوں کو طلباء کا تناسب فی 10 مارک کے وقفہ پکارتے ہیں



شکل 12.5

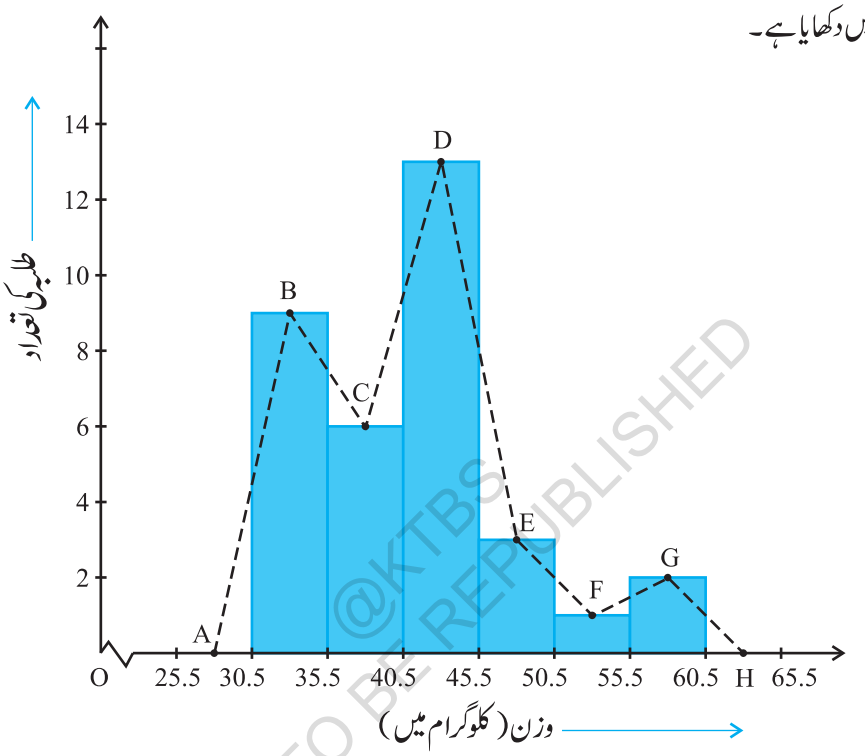
@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

اس طرح سے صحیح ہسٹوگرام جسکی چوڑائیاں مختلف ہیں شکل 12.5 میں دیا گیا ہے

(C) تعدد کثیر (Frequency Ploygon)

مقداری آنکڑوں اور ان کے تعدد کو ظاہر کرنے کے لئے ایک اور طریقہ ہے۔ یہ ایک کثیر ضلعی ہے۔ اس سے ہماری مراد کیا ہے یہ دیکھنے کے لئے شکل 12.5 میں دئے گئے ہسٹوگرام کو دیکھیے۔ آیئے ان میں متصل مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کے وسطی نقاط کو قطعہ خط سے ملا دیجیے ان وسطی نقاط کو B، C، D، E، F، G نام دیجئے۔ جب ان کو قطعات خط سے ملایا گیا تو ہمیں شکل BCDEFG حاصل ہوئے۔ کثیر ضلعی کو مکمل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ایک کلاس وقفہ ایسا ہے جس کا تعدد 0 ہے۔ اور جو 5-30.5-35 سے پہلے ہے اور 5-55.5-60 کے بعد میں ہے اور ان کے وسطی نقاط بالترتیب A اور H

ہیں اس طرح سے ABCDEFGH شکل 12.3 میں دکھائے گئے آنکڑوں کی نظیری تعدد کثیر ضلعی ہے۔ اس کو ہم نے شکل 12.6 میں دکھایا ہے۔



شکل 12.6

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حالاں کہ سب سے چھوٹے کلاس وقفہ 5 سے پہلے اور سب بڑے کلاس۔ وقفہ کے بعد کوئی کلاس نہیں ہے۔ صفر تعدد والی دو کلاسوں کو شامل کرنے سے تعدد کثیر ضلعی کا رقبہ ہسٹوگرام کے رقبہ کے برابر ہو جاتا ہے۔ نتیجہ کے طور پر تعدد کثیر ضلعی کا رقبہ کل تعداد کے مناسب ہوگا۔ کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ تعداد کثیر ضلعی کا رقبہ ہسٹوگرام کے رقبہ کے برابر کیوں ہوتا ہے؟

[اشارہ: متماثل مثلثوں کی خصوصیات استعمال کیجیے]

مسئلہ جب پیدا ہوتا ہے جب پہلی کلاس سے پہلے کوئی کلاس نہیں ہوتی۔ اس لئے ایسی ایک صورت حال پر غور کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ اس صورت حال میں تعدد کثیر ضلعی کس طرح بنایا جاتا ہے

مثال 4: ایک کلاس ٹیسٹ میں 51 طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ نمبروں 100 میں سے، پر جدول 14.9 میں دیئے گئے ہیں:

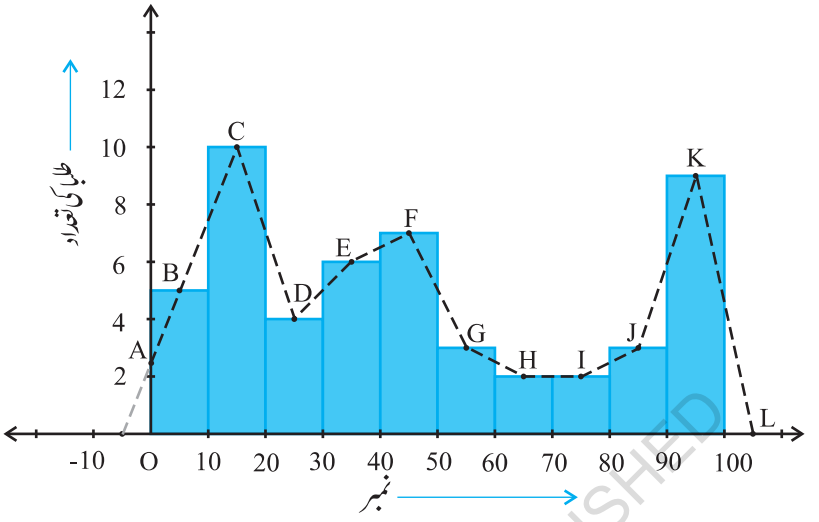
جدول 12.5

طلباء کی تعداد	نمبر
5	0-10
10	10-20
4	20-30
6	30-40
7	40-50
3	50-60
2	60-70
2	70-80
3	80-90
9	90-100
51	کل

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس تعدد بٹاؤ جدول کے نظیری تعدد کثیر ضلعی بنائیے

حل: آیئے سب سے پہلے آنکڑوں کا ہسٹوگرام بناتے ہیں اور مستطیلوں کے اوپری ضلعوں کے وسطی نقاط کو بالترتیب B، C، D، E، F، G، H، I، J، K مارک کیجیے یہاں پہلی کلاس 0-10 ہے یہاں 0-10 سے پہلے کلاس معلوم کرنے کے لئے افقی خط کو منفی سمت میں بڑھاتے ہیں۔ اور کلاس وقفہ (0-10-) کا وسطی نقطہ معلوم کرتے ہیں۔ پہلا سرے کا نقطہ یعنی B کو افقی محور پر منفی سمت میں صفر تعدد والے وسطی نقطہ سے ملا دیجیے۔ اس نقطہ جہاں یہ قطعہ خط افقی خط سے ملتا ہے، کو A مارک کرتے ہیں۔ مان لیجیے نقطہ L، دئے ہوئے آخری کلاس وقفہ سے اگلی کلاس کا وسطی نقطہ ہے تب ABCDEFGHIJKL ایک تعدد کثیر ضلعی ہے جو شکل 12.7 میں دکھائی گئی ہے۔



شکل 12.7

تعداد کثیر ضلعی کو آزادانہ طور پر ہم ہسٹوگرام بنائے بغیر بھی بنا سکتے ہیں۔اس کے لیے ہمیں ان تمام کلاس۔وقفوں کے وسطی نقاط کی ضرورت ہوتی ہے جو ان آنکڑوں میں استعمال ہوئے ہیں۔کلاس۔وقفوں کے ان وسطی نقاط کو ہم کلاس مارکس کہتے ہیں کسی وقفہ کے کلاس مارک معلوم کرنے کے لیے ہم اوپری کلاس حد اور نچلی کلاس حد کو جمع کر کے 2 سے تقسیم کر دیتے ہیں۔اس طرح سے

نچلی حد+اوپری حد= کلاس مارک

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 5: ایک شہر میں مصارف زندگی کے اشاریہ کے مطالعہ میں ہفتہ واری مشاہدات مندرجہ ذیل ہیں:

جدول 12.6

ہفتوں کی تعداد	معارف زندگی کا اشاریہ
5	140-150
10	150-160
20	160-170
9	170-180
6	180-190
2	190-200
52	کل

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مندرجہ بالا آنکڑوں کی تعدد کثیر ضلعی بنایئے (ہسٹوگرام بنائے بغیر)

حل: کیوں کہ ہمیں ہسٹوگرام کا استعمال کئے بغیر تعدد کثیر ضلعی بنانے ہے۔آئے اوپر دئے گئے کلاس وقفوں 140-150، 150-160 کے کلاس مارک معلوم کرتے ہیں۔ 140-150 کے لئے اوپری حد=150 اور نچلی حد=140

اس لئے کلاس مارک $\frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145$

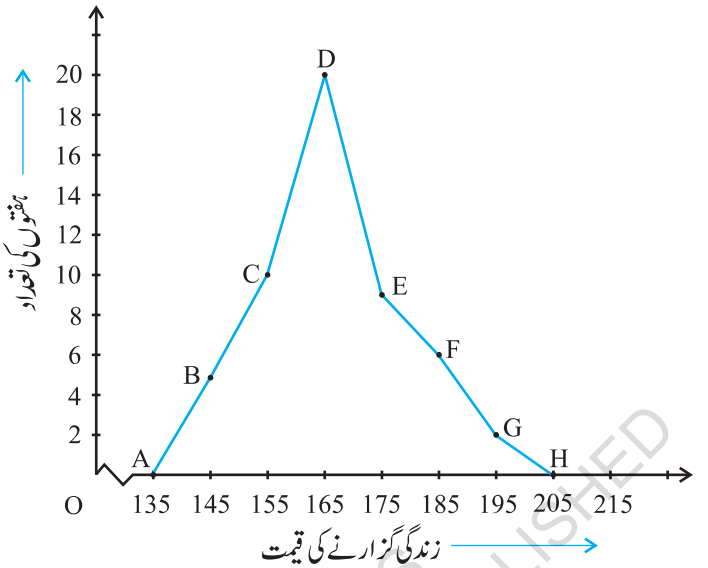
اسی طرح سے ہم دوسری کلاسوں کے بھی کلاس مارک معلوم کرتے ہیں۔اس طرح سے حاصل نیا جدول نیچے دکھایا گیا ہے

جدول 12.7

کلاس۔وقفہ یا کلاسیں	کلاس مارکس	تعدد
140-150	145	5
150-160	155	10
160-170	165	20
170-180	175	9
180-190	185	6
190-200	195	2
کل		52

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہم کلاس مارکس افقی محور پر لے کر اور تعدد عمودی محور پر لے کر تعدد کثیر ضلعی بنا سکتے ہیں۔اس کے لئے ہم پلاٹ کئے گئے نقاط B (145,5)، C(155,10)، D (165,20)، E(175,9)، F(185,6) اور G(195,2) کو قطعہ خطوط سے ملانا ہوگا۔ہمیں 130-140 کلاس کے نظیری کلاس مارکس کے نظیری نقاط کو پلاٹ کرنا نہیں بھولنا چاہیے (140-150) سے تھوڑا پہلے تعدد 0 ہے۔یعنی A (135,0) اور نقطہ H(205,0)، ایک دم G (195,2) کے بعد ہیں۔اس طرح سے نتیجہ میں ملی تعدد کثیر ضلعی ABCDEFGH ہوگی۔ (شکل 12.8 دیکھئے)



شکل 12.8

تعدد کثیر ضلعی کا استعمال جب ہوتا ہے جب آنکڑے لگاتار اور بڑے ہوتے ہیں۔ ایک ہی قسم کے دو مختلف آنکڑوں کا موازنہ کرنے میں یہ بہت مفید ہے۔ مثال کے طور پر ایک ہی کلاس کے دو سیکشنوں کی کارکردگی کا موازنہ کرنا۔ اب تک آپ سمجھ چکے ہوں گے کہ بارگراف، ہسٹوگرام اور تعدد کثیر ضلعی کا استعمال کہاں اور کیسے ہوتا ہے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 12.1

۱. دنیا بھر میں 44-15 (سالوں میں) عمر کی خواتین کے درمیان موت اور بیماری کی وجہ معلوم کرنے کے لیے ایک تنظیم نے ایک سروے کیا۔ جس سے مندرجہ ذیل اعداد و شمار (٪ میں) حاصل ہوئے:

S.N.		خواتین کے مرنے کی ٪ وجوہات
1.	تولیدی صحت کی وجہ	31.8
2.	دماغی صحت کی وجہ سے	25.4
3.	چوٹ کی وجہ سے	12.4
4.	دل کی حالت	4.3
5.	سانس کی وجہ	4.1
6.	دوسری وجوہات	22.0

(i) دی ہوئی اطلاعات کو گراف سے ظاہر کیجیے

(ii) دنیا بھر میں خواتین کی بیماری اور موت کی سب سے بڑی وجہ کیا ہے؟

(iii) اپنے استاد کی مدد سے معلوم کیجیے کہ مذکورہ بالا وجہ (ii) کو بیماری یا موت کی سب سے بڑی وجہ ہونے میں کون سی دو باتیں یا چیزیں اہم کردار ادا کرتی ہیں۔

2. مندرجہ ذیل آنکڑے ہندوستانی سماج کے مختلف سیکشنوں میں لڑکیوں کی تعداد فی ہزار لڑکوں کی (نزدیکی دہائی پر) تعداد سے نیچے دی ہوئی ہے:

سیکشن	فی ہزار لڑکوں پر لڑکیوں کی تعداد
SC	940
ST	970
غیر SC/ST	920
پچھڑا ہوا طبقہ	950
غیر پچھڑا ہوا طبقہ	920
دیہاتی	930
شہری	910

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) مندرجہ بالا اطلاعات کو گراف سے ظاہر کیجیے:

(ii) گراف سے آپ کون سے دو نتائج اخذ کرتے ہیں۔ ان کا جواز بھی دیجیے۔

3. صوبائی اسمبلی انتخابات میں مختلف سیاسی جماعتوں کے ذریعہ جیتی گئی سیٹوں کے نتیجہ مندرجہ ذیل ہیں:

سیاسی پارٹی	A	B	C	D	E	F
جیتی ہوئی سیٹ	75	55	37	29	10	37

(i) انتخابات کے نتائج کو ظاہر کرنے کے لیے مناسب گراف بنائیے

(ii) کس سیاسی پارٹی نے سب سے زیادہ سیٹیں جیتیں؟

4. 40 پودوں کی پتیوں 1 کی لمبائی کی پیمائش ملی میٹر میں اور حاصل آنکڑوں کو مندرجہ ذیل جدول میں ظاہر کیا گیا ہے:

پتیوں کی تعداد	لمبائی (mm میں)
3	118-126
5	127-135
9	136-144
12	145-153
5	154-162
4	163-171
2	172-180

(i) دئے ہوئے آنکڑوں کو ظاہر کرنے کے لئے ایک مناسب گراف (اشارہ: پہلے Class Intervels continuos بنایئے)

(ii) کیا انھیں آنکڑوں کے لئے کوئی دوسری مناسب گرافی اظہار بھی ہے؟

(iii) کیا یہ نتیجہ اخذ کرنا درست ہے کہ زیادہ تر پتیوں کی لمبائی 153 ملی میٹر ہے؟ کیوں؟

5. مندرجہ ذیل جدول میں 400 نیون لیمپ کی کل زندگی کا وقت دیا ہوا ہے

لیمپ کی تعداد	زندگی کا وقت (گھنٹوں میں)
14	300-400
56	400-500
60	500-600
86	600-700
74	700-800
62	800-900
48	900-1000

(i) ہسٹوگرام کی مدد سے دی ہوئی اطلاعات کو ظاہر کیجئے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) کتنے لیمپوں کی زندگی 700 گھنٹوں سے زیادہ ہے؟

6. مندرجہ ذیل دو جدول میں دو سیکشنوں کے طلباء کے ذریعہ حاصل کردہ نمبروں کا بٹاؤ دیا ہوا:

سیکشن A		سیکشن B	
نمبر	تعداد	نمبر	تعداد
0-10	3	0-10	5
10-20	9	10-20	19
20-30	17	20-30	15
30-40	12	30-40	10
40-50	9	40-50	1

دونوں سیکشنوں کے طلباء کے نمبروں کو ایک ہی گراف میں تعدد کثیر ضلعی سے ظاہر کیجئے

7. ایک کرکٹ میچ میں پہلی 60 گیندوں پر دو ٹیموں کے ذریعہ بنائے گئے رن مندرجہ ذیل ہیں:

گیندوں کی تعداد	ٹیم A	ٹیم B
1 - 6	2	5
7-12	1	6
13-18	8	2
19-24	9	10
25-30	4	5
31-36	5	6
37-42	6	3
43-48	10	4
49-54	6	8
55-60	2	10

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

دونوں ٹیموں کے آنکڑوں کو ایک ہی گراف میں تعدد کثیر ضلعی سے ظاہر کیجئے

8. ایک پارک میں کھیلتے ہوئے مختلف عمروں کے بچوں کی تعداد کو ایک بلامنصوبہ سروے میں مندرجہ ذیل پایا گیا:

بچوں کی تعداد	عمر (سالوں میں)
5	1-2
3	2-3
6	3-5
12	5-7
9	7-10
10	10-15
4	15-17

مندرجہ بالا آنکڑوں کو ہسٹوگرام سے ظاہر کیجئے

9. ایک ٹیلیفون کی ڈائرکٹری سے بلامنصوبہ 100 سرنیم (sur names) چنے گئے۔ سرنیم میں موجود انگلش کے حروفوں کا تعدد بٹاؤ نیچے دیا ہوا ہے:

سرنیم کی تعداد	حرفوں کی تعداد
6	1-4
30	4-6
44	6-8
16	8-12
4	12-20

(i) اطلاعات کو ظاہر کرنے کے لیے ہسٹوگرام بنائیے۔

(ii) وہ کلاس وقفہ لکھئے جس میں سب سے زیادہ سرنیم ہیں

12.2: خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1. اعداد و شمار کو گراف کے مختلف طریقوں بار گراف، ہسٹوگرام اور تعدد کثیر ضلعی میں کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ضمیمہ 2

ریاضیاتی موڈلنگ کا تعارف
(INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELING)

A2.1 تعارف (Introduction)

پچھلی کلاسوں ہی سے آپ اپنے گردونواح سے متعلق مسئلوں کو حل کر رہے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ نے سادہ سے متعلق سوالوں کو اس کو معلوم کرنے کے فارمولے کے استعمال سے حل کیا ہے۔ فارمولہ (یا مساوات) سادہ سود اور اس سے متعلق تین مقداریں، اصل زر، سود کی شرح اور مدّت کے درمیان تعلق ہوتا ہے۔ یہ فارمولہ ریاضیاتی موڈل کی ایک مثال ہے۔ ایک ریاضیاتی موڈل ایک ریاضیاتی تعلق ہے جو اصل زندگی کے مسئلہ کو بیان کرتا ہے ریاضیاتی موڈل بہت سے اصل زندگی کے مسائل کو حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے جیسے:

- سیٹلائٹ چھوڑنے میں
- مون سون کے آنے کی پیشین گوئی میں
- گاڑیوں سے ہوئی آلودگی کو کنٹرول کرنے میں۔
- بڑے شہروں میں ٹریفک کی بھیڑ کو کم کرنے میں۔

اس باب میں ہم آپ کو ریاضیاتی موڈل بنانے کے عمل سے متعارف کرائیں گے جو ریاضیاتی موڈلنگ کہلاتا ہے۔ ریاضیاتی موڈلنگ میں ہم اصل زندگی سے متعلق کوئی مسئلہ لیتے ہیں اور اس کو ایک معادل ریاضیاتی مسئلہ کے طور پر لکھتے ہیں پھر ہم اس ریاضیاتی مسئلہ کو حل کرتے ہیں اور اس کے حل کی ترجمانی اصل زندگی کے مسئلہ کی زبان میں کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ یہ حل کسی قدر اصل زندگی کے مسئلہ کے لئے موضوع ہے۔ اس طرح سے ریاضیاتی موڈلنگ کے چار مراحل، تشکیل، حل، ترجمانی اور معقولیت ہوتے ہیں۔

ہم اس کی شروعات سیکشن A2.2 میں آپ کے ذریعہ اپنائے گئے عبارتی سوالوں کو حل کرنے کے عمل پر نظر ڈال کر کرتے

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ہیں یہاں ہم پہلے وہ عبارتی سوال زیر بحث لائیں گے جو آپ کے ذریعہ پچھلی کلاسوں میں حل کئے گئے سوالوں سے مشابہہ ہیں۔ بعد میں ہم دیکھیں گے عبارتی سوالوں کو حل کرنے میں استعمال ہوئے کچھ اقدام ریاضیاتی موڈلنگ میں بھی استعمال ہوتے ہیں۔

اگلے سیکشن میں یعنی سیکشن A2.3 میں ہم کچھ سادہ سے موڈل کا مطالعہ کریں گے۔

سیکشن A2.4 میں ہم موڈلنگ کے تمام طریقہ اس کے فائدہ اور کچھ نقصانات کا مطالعہ کریں گے۔

A2.2: عبارتی سوالات کی نظر ثانی (Review of Word Problems)

اس باب میں ہم کچھ عبارتی سوالوں کا مطالعہ کریں گے جو ایسے ہی ہیں جیسے آپ پچھلی کلاسوں میں حل کر چکے ہیں۔ آیئے راست تناسب کے سوالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 1: میں نے اپنی کار سے 48 لیٹر پٹرول میں 432 کلومیٹر کا سفر کیا۔ اپنی کار سے مجھے ایسی جگہ جانا ہے جو 180 کلومیٹر کے فاصلہ پر ہے۔ مجھے کتنے پیٹرول کی ضرورت ہوگی؟

حل: اس سوال کو حل کرنے میں شامل اقدام کی ہم فہرست بنائیں گے۔

قدم 1: تشکیل: آپ جانتے ہیں کہ جتنا لمبا سفر آپ کریں گے اتنا ہی پٹرول زیادہ استعمال ہوگا یعنی پٹرول کی مقدار طے کئے گئے فاصلہ کے (راست) سیدھے تناسب میں ہے۔

432 کلومیٹر کا سفر کرنے کے لئے پٹرول کی ضرورت = 48 لیٹر

180 کلومیٹر کا سفر کرنے کے لیے پٹرول کی ضرورت = ؟

ریاضیاتی شکل کا حلیہ: مان لیجیے

طے کیا گیا فاصلہ = x

ضرورت پڑنے والا پٹرول = y، x کے راست تناسب میں ہے۔

اس لیے جہاں k ایک مستصلہ ہے $y = kx$

میں نے 48 لیٹر پٹرول سے 432 کلومیٹر کا فاصلہ طے کر لیا تھا۔

اس لئے $y=48, x=432$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

کیوں کہ y=kx اس لئے $y = \frac{1}{9}x$ (1)

مساوات (1) جتنا پٹرول درکار ہے اور طے کئے گئے فاصلہ کے درمیان تعلق کو بیان کرتی ہے۔

قدم 2: حل: ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ 180 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لئے ہمیں کتنے پٹرول کی ضرورت ہوگی۔ اس کے لئے ہمیں y کی قدر معلوم کرنی ہے جب x=180 ہو، x=180 (1) ہمیں رکھنے سے میں حاصل ہوتا ہے

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

قدم 3: ترجمانی: کیوں کہ y=20 اس لئے ہمیں 180 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں 20 لیٹر پٹرول کی ضرورت ہوگی۔ کیا آپ کو ایسا لگتا ہے کہ تمام صورت حال میں ہم فارمولہ (1) استعمال نہیں کر سکتے؟ مثال کے طور پر فرض کیجیے 432 کلومیٹر کا راستہ پہاڑی ہے 180 کلومیٹر کا راستہ پلین علاقہ کا ہے۔ پہاڑی راستہ پر کار میں پٹرول تیز شرح سے خرچ ہوگا جب کہ پلین علاقہ میں کم شرح سے۔ اس طرح سے یہ فارمولہ ان ہی حالات میں کام کرے گا جب دونوں فاصلوں میں استعمال ہونے والے پٹرول کی شرح مساوی ہو۔ یا اگر حالتوں میں فرق ہو تو پٹرول کی مقدار میں فرق بہت کم ہو۔ صرف انہی صورت حال میں استعمال ہوا۔ پٹرول طے کئے گئے فاصلہ کے سیدھے تناسب میں ہوگا۔ سوال حل کرتے وقت ہم اسے مان کر چلتے ہیں کہ حالات یکساں ہوں گے۔

مثال 2: فرض کیجیے سدھیر نے 8% سالانہ کی شرح سے سادہ سود پر 15000 روپیے کی سرمایہ کاری کی۔ سرمایہ کاری سے واپس ملنے والی رقم سے وہ 19000 روپئے قیمت خرید والی ایک واشنگ مشین خریدنا چاہتا ہے وہ کتنی مدّت تک 15000 روپئے کی سرمایہ کاری کرے کہ اس کو واشنگ مشین خریدنے کے لئے کافی رقم ہو؟

حل: قدم 1: تشکیل: یہاں ہم اصل زر اور سود کی شرح جانتے ہیں: سود وہ رقم ہے جو اُسے 15000 روپئے کے علاوہ واشنگ مشین خریدنے کے لئے درکار ہے، ہمیں سالوں کی تعداد معلوم کرنی ہے۔

ریاضیاتی شکل: سادہ سود کا فارمولہ ہے۔ $1 = \frac{pnr}{100}$

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

جہاں اصل زر=p ‘سالوں کی تعداد=n سود کی شرح =% r اور سادہ سود= I ہے۔

یہاں اصل زر=15000 روپیے ہے

واشنگ مشین خریدے کے لئے سدھیر کو درکار رقم=19000

اس لئے اس کو سود لینا ہوگا15000– 19000

=4000 روپیے

سالوں کی تعداد جب تک 15000 روپئے جمع کرنا ہیں = n

8٪ کی شرح سے n سالوں میں 15000 روپئوں پر سود=I

تب، $I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$

اس لئے، $I = 200\,n$ (1)

ہمیں سالوں کی تعداد اور سود کے درمیان ایک تعلق دیتا ہے اگر 8% سالانہ کی شرح سے 15000 روپیوں کی سرمایہ کاری کی جائے۔

ہمیں وہ مدت معلوم کرنی ہے جس میں سود 4000 روپئے حاصل ہو (1) میں I=4000 رکھنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$4000 = 1200\,n \quad \ldots\ldots (2)$$

قدم 2: سوال کا حل: (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

قدم 3: ترجمانی: کیوں کہ $n = 3\frac{1}{3}$ اور ایک سال کا ایک تہائی 4 مہینہ ہوتا ہے اس لئے سدھیر 3 سال اور 4 مہینہ بعد واشنگ مشین خرید سکتا ہے۔

کیا آپ نے مندرجہ بالا مثال میں جو فرض کیا تھا اس کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟ ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ سود کی شرح اس مدّت تک یکساں رہتی ہے جس مدّت کی ہمیں سود کی تحسیب کرنی ہوتی ہے۔ نہیں تو فارمولہ $\frac{pnr}{100}$ کام نہیں کرے گا‘ ہمیں یہ بھی مان کر چلنا ہوگا کہ جب تک سدھیر کے پاس پوری رقم نہیں آجاتی واشنگ مشین کی قیمت نہیں بڑھتی۔

مثال 3: ایک ناؤ دریا میں بہاؤ کے ساتھ چلتے ہوئے دریا کے کنارے موجود دو شہروں کے درمیان کا فاصلہ پانچ گھنٹوں میں

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

طے کرتی ہے۔ یہی فاصلہ وہ بہاؤ کے مخالف چلتے ہوئے 6 گھنٹوں میں طے کرتی ہے۔ اگر پانی کی رفتار2km/secہوتو ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار معلوم کیجیے؟

حل قدم 1: تشکیل: ہم دریا کی رفتار اور دو جگہوں کے درمیان فاصلہ طے کرنے میں لیا گیا وقت کے بارے میں جانتے ہیں ہمیں ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار معلوم کرنی ہے۔

ریاضیاتی شکل: مان لیجیے ناؤ کی رفتار x' لیا گیا وقت tاور طے کیا گیا فاصلہ y ہے۔

تب y=xt (1)

مان لیجئے دو جگہوں کے درمیان فاصلہ d

دریا کی رفتار۔ ناؤ کی رفتار= بہاؤ کے مخالف جاتے ہوئے ناؤ کی اصل رفتار ہوگی۔

کیوں کہ ناؤ بہاؤ کے خلاف جاری ہے۔

اس لئے بہاؤ کے خلاف ناؤ کی رفتار=km/hr (x-2)

بہاؤ کے خلاف چلتے ہوئے دو شہروں کے درمیان فاصلہ 6 گھنٹہ میں طے کرتی ہے۔

اس لئے (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے d=6(x-2) (2)

بہاؤ کے ساتھ چلتے وقت دریا کی رفتار ناؤ کی رفتار میں جمع کرنی ہوگی۔

اس لئے بہاؤ کے ساتھ ناؤ کی رفتار ہے=Km/h (x+2)

ناؤ وہی فاصلہ بہاؤ کے ساتھ چلنے میں 5 گھنٹہ میں طے کرتی ہے اس لئے

d=5(x+2) (3)

(2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

5(x+2) =6(x-2) (4)

قدم 2: حل معلوم کرنا: (4) میں x کو حل کرنے پر ہم کو x=22 حاصل ہوتا ہے

قدم 3: ترجمانی: کیوں کہ x=22 اس لئے ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار ہے22km/hv

مذکورہ بالا مثال میں ہم جانتے ہیں کہ دریا کی رفتار ہر جگہ ایک سی نہیں رہتی۔ کناروں کی طرف یہ ہلکے بہتا ہے جبکہ بیچ

©KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

میں تیزی سے ناؤ کناروں سے شروع کرتی ہے اور دریا کے بیچ میں چلتی ہے جب یہ اپنی منزل کی طرف پہنچتی ہے تو اس کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔اس لئے دریا کے بیچ اور دریا کے کنارے پر ناؤ کی رفتار میں کچھ فرق ہوتا ہے۔کیوں کہ یہ دریا کے کنارے پر بہت کم وقت کے لئے ہوتی ہے اس لئے رفتار کا فرق بہت کم مدت کے لئے اثر انداز ہوگا۔اس لئے ہم دریا کی رفتار کے علاوہ پانی کی سطح اور ناؤ کی سطح کے درمیان رگڑ (friction) بھی ناؤ کی اصل رفتار پر اثر انداز ہوتی ہے۔ہم یہ بھی مان لیتے ہیں کہ یہ اثر بہت چھوٹا ہوتا ہے۔

اس لئے ہم فرض کرتے ہیں

1.دریا اور ناؤ کی رفتار ہمہ وقت یکساں رہتی ہے۔

2.ہوا کی رگڑ اور ناؤ اور دریا کے درمیان کی رگڑ کو ہم نظر انداز کر دیتے ہیں۔

مذکورہ بالا مفروضات کو نظر میں رکھتے ہوئے ہمیں ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار معلوم کرنی ہے جیسا ہم اوپر عبارتی سوالوں میں دیکھ چکے ہیں کہ اس قسم کے سوالوں کو حل کرنے میں 3 قدم ہوتے ہیں، یہ ہیں:

1. تشکیل: ہم سوال کا تجزیہ کرتے ہیں کہ کون سی بات کا سوال کے حل پر زیادہ اثر ہوتا ہے۔یہ متعلقہ چیزیں (Relevant factores) کہلاتی ہیں، پہلی مثال میں ہماری متعلقہ چیزیں یا باتی طے کیا گیا فاصلہ اور خرچ ہوا پٹرول تھیں۔ہم دوسری چیزیں جیسے راستہ کا فرق چلنے کی رفتار وغیرہ کو نظر انداز کر دیتے ہیں نہیں تو سوال کو حل کرنا بہت مشکل ہو جائے۔وہ چیزیں جن کو ہم نظر انداز کر دیتے ہیں غیر متعلقہ چیزیں یا باتیں کہلاتی ہیں۔

پھر ہم ریاضیاتی مسئلہ کو ایک یا ایک سے زیادہ ریاضیاتی مساواتوں کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

2. حل: ہم پھر مناسب طریقوں کا استعمال کر کر قدم 1 میں ریاضیاتی مساواتوں کو حل کر کے مسئلہ کا حل معلوم کر لیتے ہیں۔

3. ترجمانی: ہم دیکھتے ہیں کہ قدم 2 میں حاصل حل کا مطلب ہے اصل عبارتی سوال کے سیاق وسباق میں۔

یہاں آپ کے لئے کچھ مشقیں ہیں آپ عبارتی سوالات کے حل میں شامل اقدام کی سمجھ کی جانچ کرنے کے لئے مذکورہ بالا اقدام مندرجہ ذیل مسائل کو حل کر کے کر سکتے ہیں۔

مشق A2.1

مندرجہ ذیل ہر ایک مسئلہ میں صاف طور پر بیان کیجیے کہ مذکورہ بالا اقدام 1، 2 اور 3 کے دوران متعلقہ اور غیر متعلقہ چیزیں

© KTRSP NOT TO BE REPUBLISHED

(باتیں) کیا ہیں۔

1. فرض کیجیے ایک کمپنی کو کچھ مدّت کے لئے ایک کمپیوٹر کی ضرورت ہے۔ کمپنی کمپیوٹر یا تو 2000 روپیہ مہنیہ کرائے پر لے سکتی ہے یا 25000 روپئے میں خرید سکتی ہے۔ اگر کمپنی کو لمبے عرصہ تک کمپیوٹر کا استعمال کرنا پڑے تو اُسے اتنا زیادہ کرایہ دینا پڑے گا کہ اُس کے لئے کمپیوٹر خریدنا زیادہ سستا سودا ہوگا۔ دوسرے طرف اگر کمپنی کو صرف ایک مہینہ تک استعمال کرنا ہو تو کرائے پر لینا اس کے لئے سستا ہوگا۔ مہینوں کی وہ تعداد بتائے جس کے بعد ایک کمپیوٹر خریدنا سستا ہوگا۔

2. مان لیجیے ایک کار ایک مقام A سے شروع کر کے 40 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے مقام B کی طرف روانہ ہوتی ہے اُسی وقت ایک دوسری کار مقام B سے 30 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرتی ہوئی مقام B کی طرف روانہ ہوتی ہے۔ اگر A اور B کے درمیان 100 کلومیٹر کا فاصلہ ہے تو کتنے وقت بعد دونوں ایک دوسرے سے ملیں گے؟

3. چاند کا زمین سے فاصلہ 3,84,000 کلومیٹر اور زمین کے چاروں طرف اس کا راستہ تقریباً دائری ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے وہ زمین کے چاروں طرف فاصلہ 24 گھنٹے میں پورا کرتا ہے تو وہ کس رفتار سے زمین کے اردگرد گھوم رہا ہے۔

4. ایک کنبہ اُن مہینوں میں جن میں پانی گرم کرنے والے ہیٹر کا استعمال نہیں ہوتا بجلی کا اوسطاً بل 1000 روپیا دا کرتا ہے اور جن مہینوں میں پانی گرم کرنے والا ہیٹر استعمال ہوتا ہے اُن میں اوسطاً بجلی کا بل 1240 روپئے ہوتا ہے۔ واٹر ہیٹر استعمال کرنے کا خرچ 8 روپیہ فی گھنٹہ ہے۔ ایک دن میں اوسطاً واٹر ہیٹر کتنے گھنٹے استعمال ہوتا ہے۔

A2.3: کچھ ریاضیاتی موڈل (Some Methematical Models)

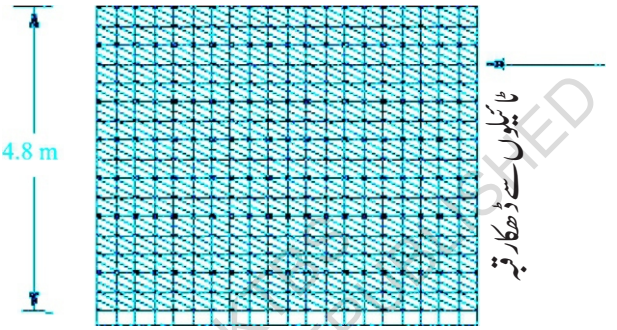
ابھی تک ہمارے مطالعہ میں کوئی بات بھی نئی نہیں تھی۔ اس سیکشن میں ہم پچھلے سیکشن میں مطالعہ کئے گئے تین اقدام میں ایک اور کا اضافہ کرنے جارہے ہیں اور یہ قدم ہے validation قانونی شکل قانونی شکل سے ہماری مراد کیا ہے؟ آیئے دیکھتے ہیں، اپنی اصل۔ زندگی میں ہم ایسے موڈل کو قبول نہیں کرتے جو ایسے جواب دیتا ہو جو حقیقت سے کوسوں دور ہوں۔ حقیقت سے دور جوابات کی جانچ کے اس طریقہ کو اور ضرورت پڑنے پر اس کی شکل میں خاطر خواہ تبدیلی لانے کو قانونی شکل کہتے ہیں۔ یہ موڈلنگ میں بہت اہم قدم ہے۔ ہم اس قدم کا تعارف اس سیکشن میں کریں گے۔

پہلے ہم ایک مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں قانونی شکل کے بعد موڈل میں ترمیم کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 4: فرض کیجیے آپ کے پاس 6m لمبا اور 5m چوڑا ایک کمرہ ہے آپ اس کے فرش پر 30m ضلع والے مربع موزائک ٹائل لگانا چاہتے ہیں۔ آپ کو کتنے ٹائلوں کی ضرورت ہوگی؟ اس کا ایک ریاضیاتی موڈل بنا کر حل کیجیے۔

حل: تشکیل: سوال کو حل کرنے کے لئے ہمیں کمرہ اور ٹائیل کے رقبہ پر غور کرنا ہے۔ ٹائیل کا ضلع 0.3m کا ہے کیوں کہ لمبائی 6m ہے اس لئے ہم کمرہ کے فرش میں کمرہ کی لمبائی کے ساتھ $\frac{6}{0.3} = 20$ ٹائیل فٹ کر سکتے ہیں۔ (شکل A2.1 دیکھیے)



شکل A2.1

کیوں کہ کمرہ کی چوڑائی 5 میٹر ہے اس لئے ہم $\frac{5}{0.3} = 16.67$ کالموں میں 16 ٹائل فٹ کر سکتے ہیں کیوں 15x0.3=4.8، 5-4.8=0.2 یعنی 0.2 میٹر چوڑائی کے جگہ پر ٹائیل نہیں لگے گی۔ یہ حصہ ٹائلوں کو کاٹ کر اس سائز کے بنانے کے بعد اُس جگہ پر لگانے سے ڈھکے گا۔ فرش کی چوڑائی جو ٹائیلوں سے ڈھکی ہوئی نہ ہوگی 0.2m ہے جو ٹائل کی لمبائی یعنی 0.3 کے آدھے سے زیادہ ہے۔ اس لیے ہم ٹائیلوں کو دو برابر حصوں میں توڑ کر باقی بچے حصوں میں فٹ نہیں کر سکتے ہیں۔

ریاضیاتی شکل: ہمارے پاس ہے۔

غیر ڈھکے رقبہ کے ٹائیلوں کی تعداد (چوڑائی کے ساتھ ٹائیلوں کی تعداد x لمبائی کے ساتھ ٹائیلوں کی تعداد) = ٹائیلوں کی کل تعداد

حل: جیسا ہم نے اوپر کہا ہے کہ لمبائی کے ساتھ ٹائیل کی تعداد 20 ہے اور چوڑائی کے ساتھ 16 اس لئے ہمیں آخری قطار کے لئے 20 اور ٹائیلوں کی ضرورت ہوگی۔ ان تمام قدروں کو (1) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے 340=20+320=(20x16)+20

@RATIONALIZED NOT TO BE REPUBLISHED

ترجمانی: فرش کو ڈھکنے کے لئے ہمیں 340 ٹائیلوں کی ضرورت ہوگی۔

قانونی شکل Validation: اصل زندگی میں آپ کا راج مستری آپ سے اُن ٹائیلوں کے بدلے میں کچھ اور ٹائیل لانے کے لئے کہے گا جو اُس نے کاٹ کر چھوٹے سائز کے بنانے میں برباد کر دئے تھے۔ اس تعداد کا دارومدار آپ کے مستری کے ہنر پر ہوگا۔ لیکن اس کے لئے ہمیں مساوات (1) کی ترمیم کرنی ہوگی۔ اس سے آپ کو ٹائیلوں کی تعداد کا ایک رف آئیڈیا ہو جائے گا۔ اس لئے ہم یہیں پر رُک جائیں گے۔

آیئے اب ایک دوسری صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 5: 2000 میں اقوام متحدہ (UN) کے 191 ممبر ممالک نے ایک اقرار نامہ پر دستخط کئے۔ اس اقرار نامہ میں ممالک نے اس بات پر اتفاق کیا کہ سال 2015 تک ترقی کے کچھ نشانے حاصل کئے جائیں۔ یہ ہزارے کی ترقی کے نشانے کہلائے۔ اس میں ایک نشانہ ہے جنس (Gender) کی مساوات کو فروغ دینا۔ یہ طے کرنے کے لیے کہ اس گول (نشانہ) کو کس حد تک حاصل کیا گیا ایک پیمانہ بنایا گیا اور وہ تھا:

لڑکے اور لڑکیوں کی، ابتدائی، ثانوی اور کالج کی تعلیم میں نسبت۔ کیوں کہ ہندوستان نے بھی اس اقرار نامہ پر دستخط کئے تھے۔ اس لیے اس نسبت کو بہتر بنانا اس کے لئے ضروری تھا۔ جدول A2.1 میں ان فی صد لڑکیوں کے اعداد و شمار دئے گئے ہیں جنھوں نے ابتدائی (پرائمری) اسکولوں میں داخلہ لیا۔

جدول A2.1

سال	داخلہ % میں
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1997-98	43.5*
1998-1999	43.5*
1999-2000	43.6*
2000-2001	43.7*
2001-2002	44.1*

* سے مراد عارضی آنکڑے ہیں

ذرائع Educational Statistics, Webpage of Department of Education, GOI

ان آنکڑوں کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی طور پر یہ بیان کیجیے کہ پرائمری اسکول میں لڑکیوں کے داخلے کا تناسب کس شرح سے بڑھتا ہے۔ اُس سال کا تخمینہ بھی لگائیے جس میں لڑکیوں کا داخلہ 5% ہو جائے گا۔

حل: پہلے ہم اس مسئلہ کو ریاضی کے مسئلہ کی شکل میں تبدیل کرتے ہیں۔

قدم: تشکیل: جدول A2.1 1991-92، 1992-93 وغیرہ سالوں میں داخلوں کے بارے میں بتاتا ہے کیوں کہ طلباء تعلیمی سال کے شروع میں ہی اسکول میں داخلہ لیتے ہیں اس لئے ہم سال 1991، 1992 لے سکتے ہیں۔ فرض کر لیجیے کہ لڑکیوں کا فی صد جو پرائمری اسکول میں داخلہ لیتی ہیں۔ اُسی شرح سے بڑھ رہا ہے جس شرح سے جدول A2.1 میں دکھایا گیا ہے۔ اس لئے سالوں کی تعداد اہم ہے نہ کہ کون سے سال۔

(ایسی ہی ایک صورت حال جب ہم 8% سالانہ کی شرح سے تین سال کا سود معلوم کرتے ہیں جس میں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ وہ تین سال 1999 سے 2003 تک ہیں یا 2001 سے 2004 تک۔ جو چیز اہم ہے اس میں وہ ہے سود کی شرح جو دی گئی ہے) یہاں بھی ہم دیکھیں گے کہ داخلہ 1991 کے بعد کیسے بڑھے ہیں اور ایسا ہم 1991 کے بعد گذرے سالوں کی تعداد اور داخلوں میں موازنہ کر کے کر سکتے ہیں۔ اس لئے 1991 کو 0 سال لیتے ہیں اور 1992 کو 1 سال کیوں کہ 1991 کے بعد 1992 تک 1 سال گذر چکا ہے۔ اسی طرح سے ہم 1993 کے لئے 2، 1994 کے لئے 3 وغیرہ لکھتے ہیں۔ اسلئے اب جدول A2.1 جدول A2.2 کی طرح دکھے گی۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جدول A2.2

سال	داخلہ ٪ میں
0	41-9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

داخلہ میں اضافہ مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے:

جدول A2.3

سال	داخلہ ٪ میں	اضافہ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1

6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 سے 1992 تک ایک سال کے عرصہ کے آخر میں داخلوں کی تعداد٪ 0.7 بڑھ گئی یعنی٪ 41.9 سے٪ 42.6 ہوگئی۔دوسرے سال کے آخر میں یہ٪ 42.6 سے٪ 42.7 مذکورہ بالا جدول سے ہم سالوں کی تعداد اور فی صد کے درمیان ایک مستحکم تعلق نہیں معلوم کر سکتے۔لیکن اضافہ یکساں ہے۔صرف پہلے اور 10 ویں سال میں اضافہ بہت زیادہ ہے۔ان قدروں کا درمیانہ ہے 0.7 + 0.1+ 0.2 + 0,2 + 0.;1 + 0.3+0 + 0.1 + 0.1 + 04

یعنی0.22' آیئے فرض کرتے ہیں کہ داخلہ یکسوئی کے ساتھ 0.22 فی صد کی شرح سے بڑھ رہے ہیں

ریاضیاتی شکل: ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ داخلہ فی صال٪0.22 کی شرح سے یکسوئی سے بڑھ رہے ہیں۔

اسلئے پہلے سال میں فی صد داخلہ=41.9+0.22' دوسرے سال میں فی صد داخلہ "= 41.9+ 0.22 + 0.22

=41.9+2x0.22 اور تیسرے سال میں فی صد داخلے 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22= 41.9+ 3x 0.22

اس لئے xویں سال میں فی صد داخلے=x>,1 کے لئے .41.9 + 0.22x (1)

اب ہمیں اُن سالوں کی تعداد بھی معلوم کرنی ہے جس میں داخلہ٪50 تک پہنچ جائیں گے۔اس لئے ہمیں مساوات میں x کی قدر معلوم کرنی ہوگی 50 = 41 .9 + 0.22x

قدم 2: حل:(2) کو x کے لئے حل کرنے پر' ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$

قدم 3: ترجمانی: کیوں کہ سالوں کی تعداد ایک صحیح عدد: اس لئے ہم اگلا صحیح عدد سے لیں گے جو 37 ہے اس لئے داخلہ کی فی صد تعداد٪ 50 تک 2028 =97 +1991 یعنی 2028 تک ہوگی۔

عبارتی سوالات میں ہم اکثر یہیں تک رک جاتے ہیں۔کیوں کہ ہم اصل زندگی کی صورت حال سے دوچار ہیں۔اس لئے ہمیں دیکھنا ہوگا کہ کس حد تک یہ قدر اصل صورتِ حال سے مطابقت رکھتی ہے۔

© OKTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

قدم 4: قانونی شکل: آیئے جانچ کرتے ہیں کہ فارمولہ (1) حقیقت سے نزدیک ہے۔ آیئے فارمولہ (1) کا استعمال کرتے ہوئے پہلے سے معلوم سالوں کی قدروں کو معلوم کرتے ہیں اور ان کا موازنہ پہلے سے معلوم قدروں سے ان کا فرق معلوم کر کے کریں گے۔ یہ قدریں جدول A2.4 میں دی گئی ہیں۔

جدول A 2.4

سال	داخلہ ٪ میں	(1) میں دی گئی قدریں % میں	فرق ٪ میں
0	41.9	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22.	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جیسا آپ مندرجہ ذیل جدول میں دیکھ سکتے یں کہ فارمولہ (1) میں دی گئی کچھ قدریں اصل قدروں سے ٪1 سے ٪0.3 یا ٪0.5 تک کم ہیں جس سے فرق 3 سے 5 سال تک بڑھ سکتا ہے۔ کیوں کہ فی سال اضافہ اصل میں ٪1 سے ٪2۔ ہم طے کر سکتے ہیں کہ یہ فرق قابلِ قبول ہے اور ہیں تک رُک جائیں۔ ایسی حالت میں (1) ہمارا ریاضیاتی موڈل ہے۔

فرض کیجیے ہم یہ طے کرتے ہیں کہ غلطی بہت بڑی ہے اور ہمیں اس موڈل کو مزید بہتر بنانا ہے۔ پھر ہمیں قدم 1 تک واپس جانا ہوگا یعنی تشکیل تک اور مساوات (1) کو بدلئے۔ آیئے ایسا کرتے ہیں

قدم 1: تشکیل نو: ہم اب تک یہی فرض کرتے ہیں کہ قدریں یکسوئی سے 0.22٪ بڑھ رہی ہیں۔لیکن اب ہم غلطی کو کم کرنے کے لئے ایک اصلاحی عنصر کا تعارف کرتے ہیں۔اس کے لئے ہم تمام غلطیوں کا درمیانہ معلوم کرتے ہیں۔ یہ ہے

$$0.18=\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}$$

غلطیوں کا درمیانہ لے کر اس قدر سے ہم اپنے فارمولہ کی تصحیح کرتے ہیں

نئی ریاضیاتی شکل: آیئے اب ہم غلطیوں کے درمیانہ کو(1) میں دیے گئے فی صد داخلہ میں جمع کریں۔اس لئے ہمارا صحیح کیا گیا فارمولہ ہے۔

$x=41.9+0.22x+0.18=42.08+0.22x$ ویں سال میں فی صد داخلہ $n \geq 1$ کے لئے(3) ہم مناسب طریقہ سے مساوات(2) کی ترمیم کریں گے x کے لئے نئی مساوات ہوگی

$$(4)\ 50=42.08+0.22x$$

قدم 2: نیا حل: مساوات(4) کو x کے لئے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$n=\frac{50-42.08}{0.22}=\frac{7.92}{0.22}=36$$

قدم 3: ترجمانی: کیوں کہ $n=36$ اس لئے پرائمری اسکول میں لڑکیوں کے داخلہ 50٪ تک سال $1991+36=2027$ یعنی 2027 میں پہنچے گے۔

قدم 4: قانونی شکل: ایک بار پھر فارمولہ(3) کے استعمال سے ملی قدروں کا اصل قدروں سے موازنہ کرتے ہیں۔جدول A2.5 میں موازنہ دیا گیا ہے:

جدول A2.5

سال	داخلہ٪ میں	(1) سے ملیں قدریں	قدروں میں فرق	(3) سے ملیں قدریں	قدروں میں فرق
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	0.12
8	43.6	43.66	0.06	43.84	0.24
9	43.7	43.88	0.18	44.06	0.36
10	44.1	44.11	0	44.28	0.18

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ (3) کے ذریعہ ملی بہت سی قدریں (1) سے ملی قدروں کی بہ نسبت اصل قدروں سے زیادہ قریب ہیں۔اس حالت میں غلطیوں کا درمیانہ 0 ہے۔

اسلئے اپنے عمل کو ہم یہیں روک دیتے ہیں۔اس لئے مساوات (3) ہماری ریاضیاتی شکل ہے جس سے ہمیں سالوں اور کل داخلوں میں لڑکیوں کے فی صد داخلوں کے درمیان ایک ریاضیاتی تعلق ملتا ہے۔ہم نے ایک ریاضیاتی موڈل بنایا ہے جو اضافہ (بڑھت) (growth) کو بیان کرتا ہے۔ مذکورہ بالا صورتِ حال میں ہم نے جو طریقہ اپنایا ہے وہ ریاضیاتی موڈلنگ کہلاتا ہے۔ہم پہلے موجود ریاضیاتی اوزاروں سے ریاضیاتی موڈل بنانے کی کوشش کی ہے۔ ہمارے پاس موجود اعداد و شمار (انکڑوں) سے پیشین گوئیاں کرنے کے لئے اور بھی بہتر ریاضیاتی اوزار ہیں لیکن وہ آپ کے کورس میں نہیں ہیں۔ یہاں یہ موڈل بنانے سے ہمارا مقصد آپ کے لئے موڈلنگ کے طریقہ (یا عمل) کی تشریح کرنا ہے نا کہ اس مرحلہ پر کوئی پیشین گوئی کرنا۔

اب آپ اب تک کے ہمارے مطالعہ کی تفہیم کی جانچ کرنے کے لئے ایک اصل زندگی کی صورتِ حال کا موڈل بنایئے میں یہاں آپ کے لئے ایک مثال ہے جس کی کوشش کر سکتے ہیں۔

مشق A2.2

1. مندرجہ ذیل جدول میں 400 میٹر کی دوڑ میں طلائی تمغہ پانے والوں کے وقت جب سے دئے گئے ہیں جب سے یہ دوڑ

© KIBS NOT TO BE REPUBLISHED

اولمپک کھیلوں میں شامل ہے' سالوں کا وقت سے تعلق قائم کرتے ہوئے ایک ریاضیاتی موڈل بنایئے۔ اوراس کا استعمال اگلے اولمپک کے وقت کا تخمینہ لگانے میں کیجئے۔

جدول A 2.6

وقت (سیکنڈوں میں)	سال
52.01	1964
52.03	1968
51.08	1927
49.28	1976
48.88	1980
48.83	1984
48.65	1988
48.83	1992
48.25	1996
49.11	2000
49.41	2004

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A.2.4 موڈلنگ کا طریقہ (عمل) اس کے فائدے اور بندشیں
(The Proces of Modelling, its Advantages & Limitations)

آیئے اب ہم اپنے مطالعہ کو ریاضیاتی موڈلنگ کے مذکورہ بالا مثالوں میں دکھائے گئے پہلوؤں کو اُجاگر کر کے اپنے مطالعہ کو اختتام تک پہنچاتے ہیں۔ پچھلے سیکشن کے پس منظر کے ساتھ اب ہم اس حالت میں ہیں کہ موڈلنگ میں شامل اقدام پر نظر ثانی کر سکتے ہیں۔

قدم 1: تشکیل: آپ سیکشن 2.2 A کی مثال 1 کی تشکیل والے حصّہ اور سیکشن A2.3 میں مطالعہ کئے گئے موڈل کی تشکیل والے حصہ کے درمیان فرق نوٹ کیا ہوگا۔ مثال 1 میں تمام اطلاعات فوراً استعمال ہونے والی ہیں جب کہ A2.3 دئے گئے موڈل میں ایسا نہیں ہے۔ مزید اس کی ریاضیاتی شکل معلوم کرنے میں ہمیں کچھ وقت لگتا ہے۔ ہم نے اپنے پہلے فارمولہ کی جانچ کی اور یہ پایا کہ یہ اتنا اچھا نہیں ہے جتنا دوسرا ہے۔ عمومی طور پر یہ اکثر صحیح ہوتا ہے۔ یعنی جب اصل زندگی کی صورتِ حال کا موڈل بنانے کی کوشش ہوتی ہے۔ پہلے موڈل کو اکثر ترمیم کی ضرورت ہوتی ہے۔ جب ہم ایک اصل زندگی کے مسئلہ کو حل کرتے ہیں تو تشکیل میں اچھا خاصہ وقت درکار ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر نیوٹن کے حرکت کے تین قوانین جو حرکت کی ریاضیاتی شکل ہیں، اتنے آسان ہیں کہ آسانی سے بیان کئے جاسکیں۔ لیکن نیوٹن ان قوانین تک ایک کثیر اعداد و شمار اور پچھلے سائنسدانوں کا مطالعہ کر کے پہنچا ہے۔

تشکیل میں مندرجہ ذیل اقدام شامل ہے:

(i) **مسئلہ کو بیان کرنا:** اکثر مسئلہ کو مبہم طریقہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر سب سے بڑا مقصد یہ پکّا کرنا ہے کہ لڑکے اور لڑکیوں کا داخلہ برابر ہو۔ اس کا مطلب ہے کہ اسکول جانے والی عمر کے لڑکوں کا 50% اور اسکول جانے والی عمر کی لڑکیوں کا 50% داخلہ ہو۔ یا دوسرا طریقہ یہ پکا کرنا کہ 50% اسکول جانے وال بچے لڑکیاں ہوں۔ ہم نے اپنے مسئلہ میں دوسرا طریقہ استعمال کیا ہے۔

(ii) **متعلقہ عناصر کی شناخت:** یہ طے کرنا کہ ہمارے مسئلہ کے لئے کونسی مقداریں اور تعلق اہم ہیں اور کون سے اتنے غیر اہم کہ ان کو نظر انداز کیا جاسکے۔ مثال کے طور پر ہماری پرائمری اسکول کے داخلوں کے مسئلہ میں پچھلے سال میں داخل کی گئی فیصد لڑکیاں اس سال داخل کی گئی لڑکیوں کی تعداد پر اثر انداز ہوتی ہیں۔ یہ اس لئے ہوتا ہے کہ جتنی زیادہ سے زیادہ لڑکیاں اسکول میں داخلہ لیتی ہیں بہت سے والدین بھی یہ محسوس کریں گے ان کو اپنی بیٹوں کو بھی اسکول میں داخلہ دلوانہ چاہیے لیکن ہم نے اس عنصر کو نظر انداز کر دیا۔ کیوں کہ اس کی اہمیت جب ہوتی ہے جب داخلہ ایک خاص فی صد سے زیادہ ہو جائے۔ مزید اس عنصر کو شامل کر کے ہم اپنے موڈل کو اور زیادہ پیچیدہ بنا سکتے ہیں۔

(iii) **ریاضیاتی شکل:** اب فرض کیجیے کہ ہم پر یہ بات واضح ہوگئی ہے کہ مسئلہ کیا ہے اور اس کے کون سے پہلو دوسروں کی بہ نسبت زیادہ متعلق ہیں۔ تب ہمیں اس میں شامل پہلوؤں کے درمیان مساوات کا گراف اکوئی دوسری مناسب شکل

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(خلیہ) کی شکل میں تعلق معلوم کرنا ہوگا۔ اگر یہ ایک مساوات ہوگی تب ہر اہم پہلو کو ہماری ریاضیاتی مساوات میں ایک متغیر سے ظاہر کرنا چاہیے۔

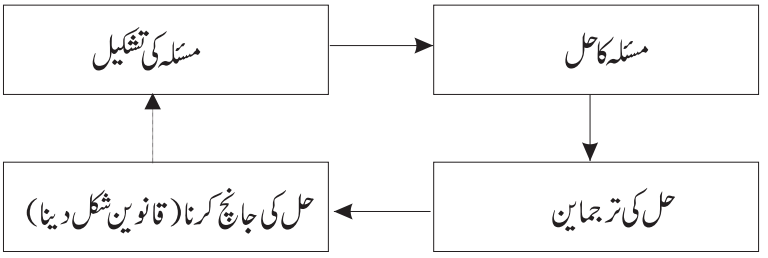
قدم 2: حل معلوم کرنا: ریاضیاتی تشکیل حل نہیں دیتی ہمیں اس کی معادل ریاضیات مسئلہ کو حل کرنا ہوگا یہ وہ جگہ ہے جہاں آپ اپنے ریاضی کے علم کو مفید پائیں گے۔

قدم 3: حل کی ترجمانی کرنا: ریاضیاتی حل موڈل میں موجود متغیروں کی قدر یا قدریں ہوتی ہیں ہم واپس اصل زندگی کے مسئلہ کی طرف جاتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ مسئلہ میں ان قدروں کا کیا مطلب ہے۔

قدم 4: حل کو قانونی شکل دینا: جیسا ہم نے A2.3 میں دیکھا کہ حل نکالنے کے بعد ہم یہ جانچ کرتے ہیں کہ آیا حل حقیقت سے مطابقت رکھتا ہے اگر ہاں تو ریاضیاتی موڈل قابل قبول ہے اگر نہیں تو ہم واپس دوبارہ تشکیل کے قدم کی طرف جاتے ہیں اور ان سے موڈل کو بہتر بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔

اس عمل میں یہ قدم عبارتی سوالوں کا حل کرنا اور ریاضیاتی موڈلنگ کے درمیان نمایاں فرق ہے۔ یہ موڈلنگ میں ایک بہت اہم قدم ہے جو عبارتی سوالوں میں نہیں ہوتا۔ بے شک کچھ اصل زندگی کے مسئلوں میں یہ ممکن ہے کہ اپنے جواب کو ہمیں قانونی شکل دینے کی ضرورت نہیں ہوتی کیوں کہ مسئلہ بہت آسان ہوتا ہے اور ہم صحیح طریقہ سے صحیح حل حاصل کر لیتے ہیں۔ اور ایسا A2.3 کے پہلے موڈل میں ہم نے غور کیا تھا۔ ہم نے نیچے شکل A2.2 میں اس ترتیب کا خلاصہ دیا ہے۔ ہمیں ریاضیاتی موڈلنگ کے اقدام ایک ایک کر کے آتے ہیں۔ قانونی شکل کے قدم سے تشکیل کے قدم کی حرکت کو نقطہ وار تیر سے دکھایا گیا ہے۔ یہ اس لئے کہ یہ ضروری نہیں کہ اس قدم کو دوبارہ استعمال کیا جائے۔

اب جب کہ آپ نے ریاضیاتی موڈلنگ میں شامل تمام مرحلوں کا مطالعہ کر لیا ہے۔ آیئے اب اس کے کچھ پہلوؤں کا مطالعہ کریں۔



شکل A2.2

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ریاضیاتی موڈلنگ کا مقصد ہے۔اصل زندگی سے متعلق کچھ مفید اطلاعات لے کر ان کو ریاضیاتی مسائل میں بدلنا' یہ خاص طور سے اُس وقت زیادہ مفید ہوتی ہے جب دوسرے ذرائع جیسے درست مشاہدہ یا تجربہ کے ذریعہ اطلاعات حاصل کرنا ممکن نہ ہو یا بہت مہنگا ہو۔

آپ اس بات پر بھی متحیر ہوں گے کہ ہمیں ریاضیاتی موڈلنگ کی ضرورت کیوں ہوتی ہے؟ آیئے موڈلنگ کے کچھ فائدوں پر غور کرتے ہیں۔فرض کیجیے ہم تاج محل پر متھرا ریفائنری(Refinery) کے نکلنے والے اخراج سے ہونے والی تباہی کا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ہم سیدھے تاج محل پر تجربہ نہیں کرنے لگیں گے کیوں کہ یہ محفوظ نہیں ہوگا۔بے شک ہم اس کے موڈل کا استعمال کر سکتے ہیں۔لیکن اس کے لئے ہمیں مخصوص قسم کی سہولیات کی ضرورت ہوتی ہے جو کافی مہنگی ہوسکتی ہے۔اس لئے یہاں پر ریاضیاتی موڈلنگ بہت زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

فرض کیجیے ہم جاننا چاہتے ہیں کہ 5 سال بعد ہمیں کتنے پرائمری اسکولوں کی ضرورت ہوگی۔تب ہم اس مسئلہ کو صرف ریاضیاتی موڈلنگ سے ہی حل کر سکتے ہیں۔اسی طرح سے صرف موڈلنگ کے ہی ذریعہ سائنسداں بہت عجیب وغریب چیزوں کے وجود کی تشریح کرنے کے قابل ہوئے۔

A2.3 میں آپ نے دیکھا کہ بہتر طریقوں سے ہم دوسری مثالوں کے جواب کو بہتر بنانے کی کوشش کر سکتے تھے لیکن ہم وہیں رُک گئے کیوں کہ ہمارے پاس ریاضیاتی اوزار نہیں تھے اور ایسا اصل زندگی میں بھی ہوتا ہے۔

اکثر ہم ریاضیاتی اوزار دستیاب نہ ہونے کی وجہ سے تقریباً جوابات سے بھی مطمئن ہوجاتے ہیں۔مثال کے طور پر موڈلنگ میں استعمال ہوئی موڈل مساوات اتنی پیچیدہ ہوتی ہیں کہ انکا صحیح حل نکالنے کے لئے ریاضیاتی اوزار دستیاب نہیں ہوئے۔

آپ حیرت کریں گے کہ کس حد تک ہم اپنے موڈل کو بہتر بنانے کی کوشش کر سکتے ہیں جب ہم ایسا کرتے ہیں ان کو بہتر بنانے کے لئے ہم عام طور پر اور بھی بہت سی باتوں کو زیرِ غور لاتے ہیں۔جب ہم ایسا کرتے ہیں تب ہم ریاضیاتی مساوات میں اور متغیر جمع کرتے ہیں۔ایک موڈل بہت سادہ ہونا چاہیے تاکہ اس کو آسانی سے استعمال کیا جا سکے۔ایک اچھے موڈل میں دو باتیں ضروری ہونی چاہئیں۔

1. درستگی یعنی حقیقت سے یہ کتنا قریب ہے۔
2. جس کا استعمال آسانی سے کیا جا سکے۔

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال کے طور پر نیوٹن کے حرکت کے قوانین بہت آسان ہیں لیکن اتنے طاقت ور بھی ہیں کہ بہت سی فزیکل صورت حال کو موڈل کی شکل دے سکیں۔

اس لئے کیا ریاضیاتی موڈلنگ تمام مسائل کا جواب ہے؟ نہیں۔ اس کی کچھ بندشیں بھی ہیں۔ اس لئے ہمیں ہمیشہ یہ ذہن میں رکھنا چاہئے کہ موڈل اصل زندگی کے مسئلہ کا اختصار ہے ور دونوں ایک ہی چیز نہیں ہیں یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے کسی ملک کا نقشہ جو اس کے فزیکل فیچر کے بارے میں بتاتا ہے اور وہ مسلک خود کے درمیان فرق ہوتا ہے۔ ہم اس نقشہ سے سطح سمندر سے کسی جگہ کی اونچائی کا تو پتہ لگا سکتے ہیں لیکن اس سے ہم لوگوں کی خصوصیت کے بارے میں اندازہ نہیں لگا سکتے۔

اس لئے ہمیں موڈل کو اس مقصد کے لئے استعمال کرنا چاہئے جس کے لئے یہ بتایا گیا ہے۔ اور ان باتوں کو بھی یاد رکھنا چاہئے جو اس کو بناتے وقت ہم نے نظر انداز کر دی تھیں ہم اس موڈل کا اسعمال ان حدود میں کریں گے جہاں اس کا اطلاق ہوتا ہے۔ اگلی کلاسوں میں ہم اس پہلو پر تھوڑا زیادہ مطالعہ کریں گے۔

© NIOS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A2.3

1. نصابی کتابوں میں حل کئے گئے عبارتی سوالات ریاضیاتی موڈلنگ سے کس طرح مختلف ہیں؟
2. فرض کیجیے اب چار سڑکوں کے ٹریفک جنکشن پر گاڑیوں کے انتظار کرنے کے وقت کو کم سے کم کرنا چاہتے ہیں تو مندرجہ ذیل میں کونسی باتیں اہم ہیں اور کون سی نہیں؟

(i) پٹرول کی قیمت۔

(ii) وہ شرح جس سے گاڑیاں چار مختلف سڑکوں پر پہنچتی ہیں۔

(iii) ہلکی چلنے والی گاڑیوں جیسے سائیکل رکشا اور تیز چلنے والی گاڑیوں جیسے کاریں اور موٹر سائیکلوں کے درمیان تناسب۔

A2.5 خلاصہ Summary

اس یونٹ میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزوں کا مطالعہ کیا۔

1. عبارتی سوالوں کو حل کرنے میں شامل اقدام پر نظرِ ثانی۔
2. کچھ ریاضیاتی موڈل بنائے۔

3. ریاضیاتی موڈلنگ میں شامل اقدام، جو ذیل کے باکس میں دئے گئے ہیں، کا مطالعہ کیا:

1. تشکیل
   (i) سوال کو بیان کرنا
   (ii) متعلقہ عامل کی شناخت
   (iii) ریاضیاتی شکل
2. حل معلوم کرنا۔
3. اصل زندگی کے مسئلہ کے سیاق میں حل کی ترجمانی کرنا۔
4. اس بات کی جانچ کرنا کہ موڈل کس حد تک مطالعہ کئے گئے مسئلہ کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔

4. ریاضیاتی موڈلنگ کا مقصد فائدہ اور بندشیں (Limitations)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جوابات/اشارے
ANSWERS/HINTS

مشق:7.1

1۔ یہ مساوی ہیں

6. $\angle BAC = \angle DAE$

مشق: 7.2

.6 $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$

7. ہرایک $45°$ کا ہے

مشق: 7.3

3. (ii)اور(i) سے $\angle ABM = \angle PQN$

4. BD کی ملایئے اور دکھایئے $\angle B > \angle D$ AC کو ملائیں اور دکھایئے $\angle A > \angle C$

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$ وغیرہ۔

مشق:8.1

3. (i) ΔDAC اور ΔBCA سے دکھایئے $\angle DAC = \angle BCA$ اور $\angle ACD = \angle CAB$ وغیرہ

(ii) دکھایئے $\angle BAC = \angle BCA$ مسئلہ 84 کا استعمال کرنے پر۔

مشق:8.2

2. دکھایئے کہ PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے اور یہ بھی دکھایئے $PQ \parallel AC$ اور $PS \parallel BD$ اس لیے $\angle P = 90°$

5. AECF ایک متوازی الاضلاع ہے، اس لیے $AF \parallel CE$ وغیرہ۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 9.1

1. متماثل دائروں کے وتروں کو لیتے ہوئے ٹھیک مسلہ 9.1 کی طرح ثابت کیجئے

2. اوپر کے دو مثلوں کی متماثلت کو دکھانے کے لیے۔ متماثلت کا SAS بدیہی کا استعمال کیجئے

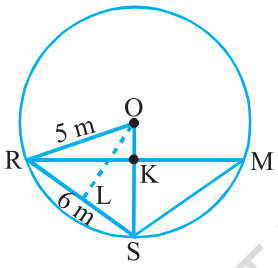
مشق 9.2

6a.1 پہلے دیکھیے کہ مرکز کو ملانے والا خط چھوٹے دائرہ کے نصف قطر پر عمود بنے اور دیکھیے کہ مشترک وتر کا چھوٹے دائرہ سے فاصلہ ہے

2. اگر مرکز 0 کے دائرہ کے مساوی وتر CD، AB نقطہ پر قطع کرتے ہیں AB پر OM اور معمود کھینچیے اور Of کو ملائیں۔ دکھائے کہ قائم مثلیں OME متماثل ہیں۔

3. مثال دو کی طرح آگے بڑھیں AD 4 پر OM عمود کھینچیے۔

5. سینچا، سلمہ اور مزہب کو بلترتیب S,R اور M سے ظاہر کریں، مان لیجئے میٹر $KR = x$ شکل دیکھیے۔



$\Delta ORS = \frac{1}{2} x \times 5$ کا رقبہ اور $\Delta ORS = \frac{1}{2} RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$

x معلوم کیجئے اور پھر RM

6. مساوی ضلی مثلث کی خصوصیات اور فیثا غورث کے صلہ کو استعمال کیجئے۔

مشق 9.3

1. $45°$ 2. $150°, 30°$ 3. $10°$

4. $80°$ 5. $110°$ 6. $\angle BCD = 80°$ اور $\angle ECD = 50°$

8۔ CD پر عمودی AM اور BN کھینچیے $AB \parallel CD$ اور $AB < CD$ دکھائے $\Delta AMD \cong \Delta BNC$ اس سے ملتا ہے $\angle C = \angle D$ اور اس لئے $\angle A + \angle C = 180°$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق

10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2, 900\sqrt{3}\,cm^2$ 2. Rs 1650000 3. $20\sqrt{2}\,m^2$ 4. $21\sqrt{11}\,cm^2$ 5. 9000 cm^2 6. $9\sqrt{15}\,cm^2$ 7 8

مشق 11.1

1. 165cm^2 2. 1244.57m^2 3. (i) 26m (ii) ₹137280 4. (i) 7cm (ii) 462cm^2 5. Rs 1155.63 6. Rs 384.34 تقریباً 7. 5500cm^2 8

مشق 11.2

1. (i) 1386cm^2 (ii) 394.24cm^2 (iii) 2464cm^2
2. (i) 616cm^2 (ii) 1386cm^2 (iii) 38.5m^2
3. (i) 942cm^2 4. 1:4.4 5. Rs 27.72 6. 3.5cm 7. 1:16.7 8. 173.25cm^2 9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1:1

مشق 11.3

1. (i) 154cm^3 (ii) 264cm^3
2. (i) 1.232l (ii) $\frac{11}{35}l$
3. 8cm. 4 10cm 5. 38.5kl 6. (i) 48cm (ii) 50cm (iii) 2200cm^2
7. $100\pi cm^3$ 8. $240\pi cm^3$, 5:12 9. 99.825m^2, 86.625m^3

مشق 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}cm^3$ (ii) 1.05m^3 تقریباً
2. (i) $11498\frac{2}{3}cm^3$ (ii) 0.004851m^3
3. 345.39g (تقریباً) 4. $\frac{1}{64}$ 5. 0.303l (تقریباً) 6. 0.06348m^3 (تقریباً)
7. $179\frac{2}{3}cm^3$ 8. (i) 249.48m^2 (ii) 523.9m^3 (تقریباً)
9. (i) $3r$ (ii) 1:9
10. 22.46mm^3 (تقریباً)

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 12.1

1.(i) تولیدی صحت۔

3. (ii) پارٹی A 4 (ii) تعدد کثیر خلعی (iii) نہیں 5.(ii)184

8۔

عمر سالوں میں	تعداد	چوڑائی	مستطیل لمبائی
1-2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1=5$
2-3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1=3$
3-5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1=3$
5-7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1=6$
7-10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1=3$
10-15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1=2$
15-17	4	2	$\frac{4}{2}\times 1=2$

9۔ (i) اب آپ ان لمبایوں کو استعمال کر کے ہوگرام بنا سکتے ہیں۔

حروفوں کی تعداد	تعداد	وقفہ کی چوڑائی	مستطیل لمبائی
1-4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2=4$
4-6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2=30$
6-8	44	2	$\frac{44}{2}\times 2=44$
8-12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2=8$
15-20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2=1$

اب ہوگرام بتائے

6-8(ii)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق A2.1

1. قدم تشکیل

متعلقہ عامل میں کمپیوٹر کرائے ہے لینے کا عرصہ اور بمکو دیے گئے دو خرچ جیسے ہم فرض کرتے ہیں کے کمپیوٹر خریدنے اور کرائے پر دینے میں زیادہ فرق نہیں ہے اس لیے ہم اسی تبدیلی کو غیر متعلقہ سمجھنے میں ہم کمپیوٹر تمام برانڈس اور نسلوں کو ایک سا ہی لیتے ہیں یعنی یہ فرق غیر متعلقہ ہے۔

مہینوں کے لیے کمپوٹر کے کرایہ کا خرچ ہے $2000x$ Rs ہے اگر یہ کمپوٹر کی قیمت سے زیادہ ہو جاتی ہے۔ ہمارے لیے بہتر یہی ہوگا کے کمپوٹر کو خرید لیا جائے اس لیے مساوات ہے۔

$$2000x = 25000$$

$$x = \frac{25000}{2000} - 12.5$$

قدم 2 حل 1 کو حل کرنے پر۔۔۔۔۔۔

قدم 3 ترجمانی کیونکہ 12.5 مہینوں بعد کمپوٹر کرایہ کا خرچ زیادہ ہو جائیگا اس لیے کمپوٹر کو خریدنا سستا سودا ہوگا اگر آپ کو اسے 12 مہینوں سے زیادہ استعمال کرنا ہے۔

2۔ قدم 1 تشکیل ہم یہ فرض کرتے ہیں کے کار یکساں رفتار سے چلتی ہے اس لیے رفتار میں کوئی بھی تبدیلی غیر متعلقہ ہے۔ اگر کار میں گھنٹوں بعد ملتی ہیں۔ تو پہلی کار نے A سے 40 کلومیٹر فاصلہ طے کیا ہوگا اور دوسری کار نے $30x$ کلومیٹر کا فاصلہ طے کیا ہوگا۔ اس لیے A سے $(100 - 30x)$ کلومیٹر کے فاصلہ پر ہوگی اس لیے مساوات ہوگی۔

$$40x = 100 - 30x \text{ یعنی } 70x = 100$$

قدم 2 حل: مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{100}{70}$

قدم 3 ترجمانی $\frac{100}{70}$ تقریباً 1.4 گھنٹے ہوتے ہیں اس لیے کار میں 1.4 گھنٹے کے بعد ملیگی۔

3 قدم: 1 تشکیل رفتار جس سے چاند زمین کے ارد گرد گھومتا ہے۔

قدم 2: حل کیونکہ مدار تقریباً دائری کے اس لیے لمبائی $2 \times \pi \times 384000$ کلومیٹر 2411520 کلومیٹر چاند ایک چکر پورا کرنے میں 24 گھنٹا لیتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لیے رفتار $100480km/h = \frac{2411520}{24}$

قدم 3: ترجمانی رفتار ہے $100480km/h$

4. تشکیل:۔ایک مفروضہ ہے یہ کہ بل میں فرق صرف پانی کا ہیٹر استعمال کرنے سے لیے مان لیجئے اوسط گھنٹو کی تعداد جس میں ہیٹر ااستعمال ہوتا ہے x

ہیٹر کو استعمال کرنے پر فی مہینہ فرق Rs 1240–Rs1000=Rs240

پانی کے ہیٹر کو ایک گھنٹہ تک استعمال کرنے کا خرچ 8 روپے

اس لیے پانی کے ہیٹر کو 30 دن تک استعمال کرنے کا خرچ 8 روپے

اور پانی کے ہیٹر کو 30 دن تک استعمال کرنے کا خرچ پانی کا ہیٹر استعمال کرنے کی وجہ سے بل میں فرق

اس لیے $240x = 240$

حل: اس مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x=1$

ترجمانی کیونکہ $x=1$ پانی کا ہیٹر ااوسطاً 1 گھنٹہ روزانہ استعمال ہوتا ہے

مشق A2.2

1. ہم یہاں کوئی خاص حل نہیں پیش کر رہے۔اپ وہی طریقہ استعمال کر سکتے ہیں جو اپ نے پچھلی مثال میں کیا ہے یا کوئی دوسرا طریقہ جو اپکو مناسب لگتا ہو۔

مشق A2.3

1. ہم پہلے ہی بیان کر چکے ہیں کہ اصل زندگی کی صورت حال میں تشکیل کا حصہ کافی تفصیل میں ہوگا۔
اور عبارتی سوالوں میں ہمیں جواب کو قانونی شکل دینے کی ضرورت نہیں ہوتی، حالانکہ اس عبارتی سوال کا صحیح جواب ہوگا لیکن اصل زندگی کی صورت حال میں ایسا نہیں ہوگا۔

2. اہم باتیں میں (ii) دور (iii) یہاں ایک اہم بات نہیں حالانکہ فروخت کی گئی۔گاڑیوں پر اس کا اثر ہوسکتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED