ریاضی

دسویں جماعت کی نصابی کتاب

Tenth Standard

MATHEMATICS

10

حصّہ دوم

(Part-II)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جامعہ ملیہ اسلامیہ، نئی دہلی

نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

KARNATAKA TEXTBOOK SOCIETY (R.)

6th Cross, Malleshwaram Bengaluru-560 003

فہرست

8۔	ٹرگنومیٹری کا تعارف (Introduction to Trigonometry)	1
9۔	ٹرگنومیٹری کے کچھ استعمال (Some Applications of Trigonometry)	23
10۔	دائرے (Circles)	34
11۔	دائروں سے متعلق رقبہ (Areas Related to Circles)	45
12۔	سطحی رقبہ اور حجم (Surface Areas and Volumes)	52
13۔	شماریات (Statistics)	63
14۔	احتمال (Probability)	93
	ضمیمہ A2 : ریاضیاتی موڈلنگ (Mathematical Modelling)	111
	جوابات/اشارے	123

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5013CH08

8 ٹرگنومیٹری کا تعارف (INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY)

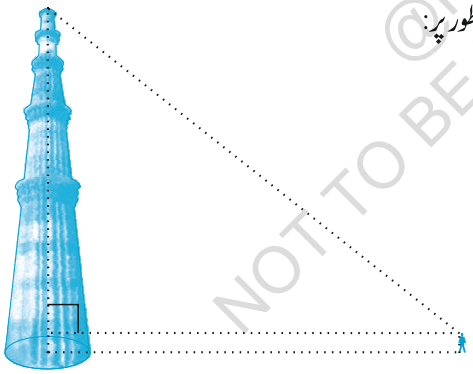
شاید ایسی کوئی چیز نہیں جو ریاضی میں وہ مرکزی اہمیت رکھتی ہو جو ٹرگنو میٹری کی ہے۔

جے۔ایف۔ہربرٹ (1980)

8.1 تعارف

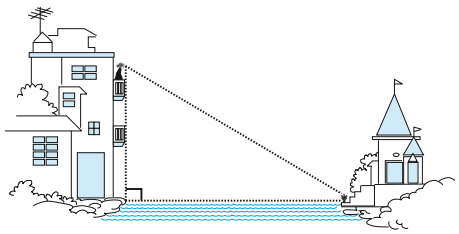
آپ سابقہ کلاسوں میں مثلثوں اور خاص طور سے قائم مثلثوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔آیئے اپنے گردونواح سے کچھ ایسی مثالیں لیں جہاں قائم مثلثوں کو تصور کیا جا سکتا ہو۔مثال کے طور پر:

1۔ مان لیجئے اسکول کے کچھ طلباء قطب مینار گھومنے گئے، اگر کوئی طالب علم مینار کے اوپری حصہ کو دیکھتا ہے، تو ایک قائم مثلث کا تصور ابھر کر سامنے آتا ہے۔جیسا کہ شکل 8.1 میں دکھایا گیا ہے۔کیا وہ طالب علم بغیر پیائش کئے ہوئے مینار کی اونچائی معلوم کر سکتا ہے۔



شکل 8.1

2۔ فرض کیجئے ایک لڑکی دریا کے کنارے پر واقع اپنے مکان کی بالکنی میں بیٹھی ہوئی ہے۔وہ نیچے کی طرف ایک پھولوں کے گملے کو دیکھ رہی ہے جو دریا کے دوسرے کنارے پر واقع ایک مندر کی سیڑھیوں پر رکھا ہوا ہے اس صورت حال میں بھی قائم مثلث کی تشکیل تصور کی جا سکتی ہے جیسا کے شکل 8.2 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر آپ وہ

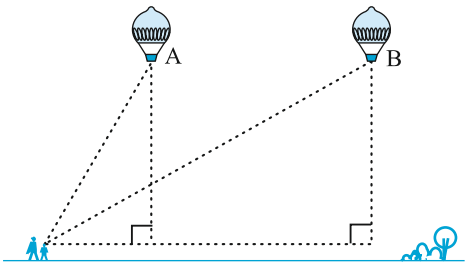


شکل 8.2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اونچائی جانتے ہوں جہاں پر وہ لڑکی بیٹھی ہے تو کیا آپ دریا کی چوڑائی معلوم کر سکتے ہیں۔

3۔ مان لیجئے گرم ہوا والا غبارہ ہوا میں اڑ رہا ہے ایک لڑکی اس غبارہ کو آسمان میں دیکھتی ہے اور اپنی ماں کے پاس دوڑ کر جاتی ہے اور اسکو اس کے بارے میں بتاتی ہے۔ اس کی ماں بھی تیزی سے مکان کے باہر آ کر اس غبارے کو دیکھتی ہے، جب لڑکی پہلے اس کو دیکھتی ہے تو وہ نقطہ A پر تھا جب وہ اپنی ماں کے ساتھ باہر آ کر اس کو دیکھتی ہے تو وہ اڑتا ہوا نقطہ B پر پہنچ جاتا ہے۔ کیا آپ B کا زمین سے ارتفاع معلوم کر سکتے ہیں؟



شکل 8.3

اوپر دی گئی تمام صورت حال میں فاصلہ اور بلندیاں کسی ریاضی کی تکنیک سے معلوم کئے جا سکتے ہیں جو ریاضی کی ایک شاخ کے تحت آتی ہے جسے ٹرگنومیٹری کہتے ہیں۔ لفظ ٹرگنومیٹری ایک یونانی لفظ 'Tri' (جس کا مطلب تین ہے) اور 'gon' (جس کا مطلب اضلاع) اور 'Metron' (جس کا مطلب پیمائش)۔ درحقیقت ٹرگنومیٹری مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے تعلق کے مطالعہ کا نام ہے۔ ٹرگنومیٹری کے سلسلہ میں سب سے پہلے کام مصر اور بیبلونیا میں ہوا۔ ماہر فلکیات نے اس کا استعمال زمین سے سیاروں اور ستاروں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کے لئے کیا۔ اور آج بھی انجینئرنگ، فزیکل سائنس میں استعمال ہونے والے زیادہ تر تکنیکی طور پر جدید طریقوں کی بنیاد ٹرگنومیٹری کا تصور ہے۔

اس باب میں ہم قائم مثلث اس کے حادہ زاویوں اور اضلاع کی کچھ نسبتوں کے بارے میں پڑھیں گے جو **زاویوں کی ٹرگنومیٹری نسبتیں** کہلاتی ہیں۔ ہم اپنے مطالعہ کو صرف حادہ زاویوں تک محدود رکھیں گے۔ حالانکہ ان نسبتوں کی توسیع دوسرے زاویوں تک بھی ہو سکتی ہے۔ ہم $90°$ اور $0°$ کی پیمائش کے زاویوں کی ٹرگنومیٹری نسبتوں کی تعریف بھی بیان کریں گے ہم کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنومیٹری نسبتیں معلوم کریں گے اور ان نسبتوں پر مبنی کچھ تماثلات معلوم کریں گے جن کو **ٹرگنومیٹری تماثلات** کہتے ہیں۔

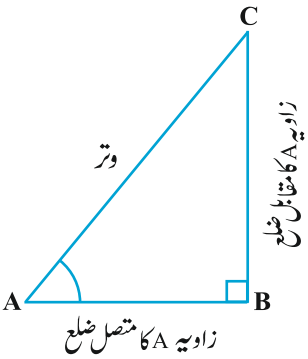
8.2 ٹرگنومیٹرک نسبتیں

سیکشن 8.1 میں آپ نے مختلف صورت حال میں تصور کئے گئے قائم مثلثوں کو دیکھا۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

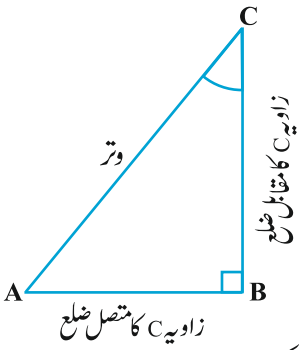
آیئے ایک قائم مثلث ABC لیجیے جیسا کہ شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔

یہاں ∠ CAB (یا مختصراً ∠A) ایک حادہ زاویہ ہے۔ زاویہ A کی مناسبت سے ضلع BC کا مقام نوٹ کیجئے۔ یہ ∠A کے مقابل ہے ہم اس کو A کے مقابل ضلع کہتے ہیں۔ AC قائم مثلث کا وتر ہے۔ اور ضلع AB، کا ایک بازو ہے۔ اس لئے ہم اس کو ∠A کا متصل ضلع کہتے ہیں۔



شکل 8.4

نوٹ کیجیے کہ اضلاع کا مقام تبدیل ہو جاتا ہے جب ∠A کی جگہ ∠C پر غور کرتے ہیں (شکل 8.5)



شکل 8.5

آپ اپنے سابقہ کلاسوں میں نسبت کے تصور کے بارے میں پڑھا ہے۔ اب ہم مخصوص نسبتوں جن میں قائم زاویہ مثلث کے اضلاع ملوث ہوں، کی تعریف بیان کریں گے اور ان کو ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا نام دیں گے۔

ٹرگنومیٹرک کی نسبتیں ایک قائم مثلث ABC (شکل 8.4 دیکھئے) کے زاویہ ∠A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں مندرجہ میں معرف ہیں۔

$$\text{sine کا } \angle A = \frac{\angle A \text{ کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{cosine کا } \angle A = \frac{\angle A \text{ کے متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tangent کا } \angle A = \frac{\angle A \text{ کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{cosecant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Sine کا } \angle A} = \frac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کے مقابل ضلع}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{secant کا } \angle A = \frac{1}{\text{Cosine کا } \angle A} = \frac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کے متصل ضلع}} = \frac{AC}{AB}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\text{cotangent کا } \angle A = \frac{1}{\text{Tangent کا } \angle A} = \frac{\text{} \angle A \text{ کا متصل ضلع}}{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}} = \frac{AB}{BC}$$

نسبتیں جو اوپر معروف کی گئی ہیں ان کی مختصر بالترتیب شکل ہے sin A, cos A, tan A, cosec A, secA اور Cot A

نوٹ کیجئے کہ نسبتیں **Sec A, CosecA** اور **cot A** بالترتیب Cos A, Sin A اور tan A کی مقلوب نسبتیں ہیں۔

مزید مشاہدہ کیجئے۔

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ اور } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

اس طرح سے قائم زاوی مثلث میں ایک حادہ زاویہ کی **ٹرگنومیٹرک نسبتیں** زاویہ اور اس کے اضلاع کے درمیان ایک تعلق کو ظاہر کرتی ہیں۔

آپ قائم زاوی مثلث میں زاویہ C کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف بیان کرنے کی کوشش کیوں نہیں کرتے ؟ (شکل 8.5 دیکھیے)

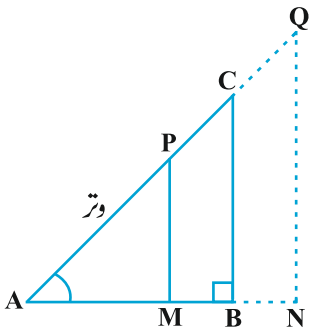


آریہ بھٹ
A.D. 476 – 550

جس طریقہ سے 'sine' کا استعمال اب ہم کرتے ہیں سب سے اس کا اسی طریقہ سے استعمال آریہ بھٹ کی تصنیف اریہ بھٹیم میں 500 عیسوی میں کیا گیا ہے۔ اریہ بھٹ نے نصف وتر کے لئے لفظ اردھا۔ جیا استعمال کیا ہے جو آگے چل کر مختصراً جیا اور جیوا ہو گیا جب آریہ بھٹیم کا ترجمہ عربی میں ہوا تو جیوا کا جیوا ہی ترجمہ کیا گیا۔ جب عربی کے ترجمہ کو لاطینی زبان میں ترجمہ کیا گیا تو جیوا کو sine کہا گیا۔ اور جلد ہی sinus، sine کے طور پر استعمال ہونے لگا۔ اور یوروپ میں ہر جگہ ریاضی کی کتابوں میں sine ہی استعمال ہونے لگا، انگلینڈ کے ایک ماہر فلکیات کے پروفیسر (Edmund Gunter)(1581-1626) نے سب سے پہلے اس کی مختصر شکل sin کو استعمال کیا۔

ارکان cosine اور tangent کی ابتدا بہت میں ہوئی، تمتی زاویہ کا sine معلوم کرنے کے سلسلہ میں cosin تفاعل کا وجود ہوا۔ اریہ بھٹ نے اسے kotijya کہا اور Edmund نے اسے cosinus کا نام دیا۔ 1674 میں سب سے پہلے انگریز ریاضی داں سرجان موری (Sir Jonas Moore) اس کو اس کی مختصر ترین شکل 'cos' میں استعمال کیا۔

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 8.6

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ علامت sinA، زاویہ A کے sine کی مختصر شکل ہے۔ sin کا A سے علیحدہ کوئی مطلب نہیں ہے۔ Sin SinA اور A کا حاصل ضرب نہیں ہے اسی طرح Cos A cos, اور A کا حاصل ضرب نہیں ہے۔ یہی ترجمانی باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے لئے ہے۔

اب اگر ہم ایک قائم مثلث کے وتر AC پر ایک نقطہ P لیں یا AC کو بڑھانے پر اس پر نقطہ Q لیں اور PM, AB پر اور QN بڑھتے ہوئے AB پر عمود ڈالیں (شکل 8.6 دیکھیں) تو ΔPAM میں ∠A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں کس طرح مختلف ہوں گی۔ ΔCAB میں ∠A کی یا ΔQAN میں ∠A کی نسبتوں سے؟

اس کا جواب دینے کے لئے سب سے پہلے ان مثلثوں کو دیکھئے، کیا ΔPAM، ΔCAB کے مشابہ ہے؟ یاد کیجیے آپ نے باب 6 میں AA مشابہت کی شرط کے بارے میں پڑھا تھا۔ آپ دیکھیں گے کہ مثلث PAM اور CAB مشابہ ہیں۔ اس لئے مشابہ مثلثوں کی خصوصیت کے مطابق، مثلثوں کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے۔

اس لئے ہمارے پاس ہے۔ $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$.

اس سے ہمیں ملتا ہے $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$

اسی طرح سے $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ اور یہ سلسلہ جاری رہتا ہے۔

اس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ΔPAM میں زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں مثلث ΔCAB میں زاویہ A کی نسبتوں سے مختلف نہیں ہیں۔

اسی طرح سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ **sin A کی قدر (اور دوسری ٹرگنومیٹری نسبتیں بھی) ΔQAN میں بھی یکساں ہیں۔ اپنے مشاہدہ سے یہ واضح ہو گیا کہ مثلث کے زاویہ (حادہ) کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر اس کے اضلاع کی لمبائیوں کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتیں۔ اگر زاویہ وہی ہے۔**

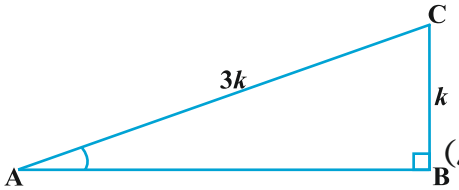
نوٹ: اپنی آسانی کے لئے آپ $\sin^2 A$، $\cos^2 A$ کی جگہ $(\sin A)^2$، $(\cos A)^2$ وغیرہ لکھ سکتے ہیں لیکن

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$\cos ecA = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (کیونکہ یہ sine inverse A کہلاتا ہے) $\sin^{-1} A$ کا مختلف مفہوم ہے جس کو ہم آئندہ کلاسوں میں پڑھیں گے، یہی بات باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے لئے درست ہے

کچھ مرتبہ زاویے کو ظاہر کرنے کے لئے گریک حرف 'q' ٹیٹا کا استعمال کرتے ہیں۔ ہم حادہ زاویہ کی چھ ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف کی۔ اگر ہمیں ان میں سے ایک کا علم ہو تو کیا ہم دوسری نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں؟ آیئے دیکھتے ہیں۔

اگر ایک قائم مثلث ABC میں $\sin A = \frac{1}{3}$، تب اس کا مطلب ہے $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ یعنی مثلث A B C کے اضلاع BC اور A C کی پیمائش 1=3 کی نسبت میں ہوں گے (شکل 8.7 دیکھئے)



شکل 8.7

BC، k کے برابر ہو تو AC، $3k$ ہوگا، جہاں k کوئی مثبت عدد ہے۔

زاویہ A کی دوسری ٹرگنومیٹرک نسبت معلوم کرنے کے لئے

لئے ہمیں DABC کے تیسرے ضلع AB کی لمبائی معلوم کرنی ہوگی۔ کیا آپ کو فیثا غورث کا مسئلہ یاد ہے؟ آیئے اس کا استعمال کر کے مطلوبہ AB کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

$$AB^2 \quad AC^2 - BC^2 \quad (3k)^2 - (k)^2 \quad 8k^2 \quad (2\sqrt{2}\,k)^2$$

$$AB = = 2\sqrt{2}\,k$$

$$(AB \neq -2\sqrt{2}\,k \text{ ? کیوں}) \quad AB = 2\sqrt{2}\,k$$

اب
$$\cos A - \frac{AB}{AC} - \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

اسی طرح سے آپ زاویہ A کی دوسری ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

ریمارک: کیونکہ ایک قائم مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے اس لئے $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے (یا مخصوص حالت میں 1 کے برابر)

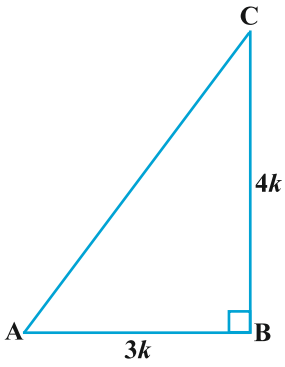
آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 1: $\tan A = \frac{4}{3}$ دیا ہوا ہے۔ زاویہ A کی باقی ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے ایک قائم زاوی مثلث ABC بنایئے (دیکھیے شکل 8.8)

اب ہم جانتے ہیں کہ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



شکل 8.8

اس لئے اگر $BC = 4k$ تب $AB = 3k$ جہاں k ایک مثبت عدد ہے۔

اب فیثاغورث کے مسئلے کے رو سے

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

$$AC = 5k$$

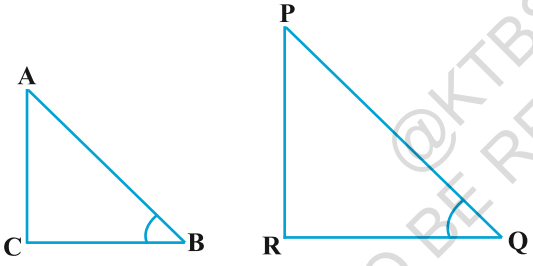
اب ہم باقی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو ان کی تعریف استعمال کر کے لکھ سکتے ہیں۔

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

اس لئے $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$، $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$ اور $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$

مثال 2: اگر $\angle B$ اور $\angle Q$ حادہ زاویہ ہیں جب کہ $\sin B = \sin Q$ تب ثابت کیجئے کہ $\angle B = \angle Q$۔



شکل 8.9

حل: دو قائم مثلثیں ABC اور PQR پر غور کریں

جہاں $\sin B = \sin Q$ (شکل 8.9 دیکھیے)

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

اور

$$\sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

تب

$$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

اس لئے

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \qquad (1)$$

اب فیثاغورث مسئلے کو استعمال کرنے پر،

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اور $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

اس لئے k $$= \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{BC}{QR}$$ (2)

(1)اور(2)سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

تب مسئلہ 6.4 کو استعمال کرنے پر $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ اور اس لئے $\angle B = \angle Q$

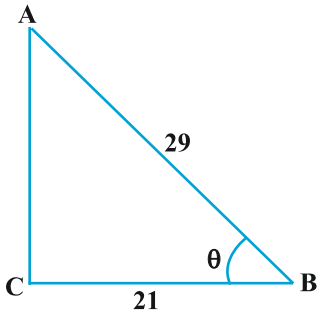
مثال 3: مثلث ACB پر غور کیجیے جو C پر قائم ہے جس میں $AB = 29 \text{units}$

$BC = 21 \text{units}$، اور $\angle ABC = \theta$

(شکل 8.10 دیکھئے)۔ قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



شکل 8.10

حل: ΔABC میں

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{units}$$

اس لئے $$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}.$$

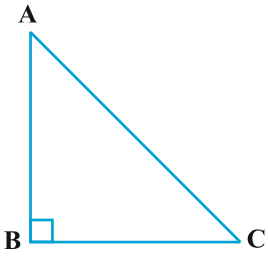
اب (i) $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400 + 441}{841} = 1,$$

اور (ii) $$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$$

مثال 4: ایک قائم مثلث ABC جو B زاویہ پر قائم ہے، میں اگر $\tan A = 1$ تب تصدیق کیجئے کہ $2 \sin A \cos A = 1$

حل: ΔABC میں $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (شکل 8.11 دیکھیے)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 8.11

یعنی $BC = AB$

لہٰذا، $AB = BC = K$ جہاں K ایک مثبت عدد ہے۔

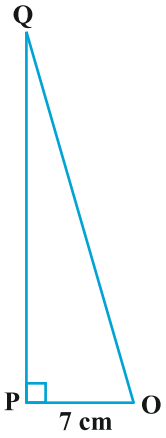
اب $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

اس لئے $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے $2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, جو کے مطلوبہ قدر ہے

مثال 5: $\triangle OPQ$ میں جو P پر قائم زاویہ ہے $OP = 7cm$ اور $OQ - PQ = 1cm$ (شکل 8.12 دیکھئے)۔ $\sin Q$ اور $\cos Q$ کی قدر معلوم کیجیے۔



شکل 8.12

حل: $\triangle OPQ$ میں

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

یعنی $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (کیوں)

یعنی $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

یعنی $1 + 2PQ = 7^2$ (کیوں)

یعنی $PQ = 24cm$ اور $OQ = 1 + PQ = 25$ cm

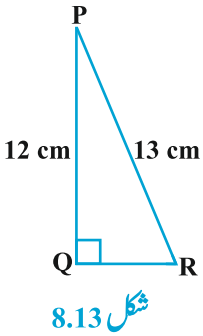
اس لئے $\cos Q = \frac{24}{25}$ اور $\sin Q = \frac{7}{25}$

مشق 8.1

1۔ قائم ΔABC میں جو B زاویہ پر قائم ہے۔ $AB = 24cm$، $BC = 7cm$ معلوم کیجیے۔

(i) $\sin A, \cos A$

(ii) $\sin C, \cos C$



شکل 8.13

2۔ شکل 8.13 میں $\tan P - \cot R$ معلوم کیجیے۔

3۔ اگر $\sin A = \frac{3}{4}$ تو $\cos A$ اور $\tan A$ کی قدر معلوم کیجیے۔

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

4۔ $15\cot A = 8$ دیا ہوا ہے، $\sin A$ اور $\sec A$ معلوم کیجیے

5۔ $\sec\theta = \frac{13}{12}$ دیا ہوا ہے، باقی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کیجیے۔

6۔ اگر $\angle A$ اور $\angle B$ حادہ زاویہ ہیں جبکہ $\cos A = \cos B$ تب دکھایئے کہ $\angle A = \angle B$

7۔ اگر $\cot\theta = \frac{7}{8}$، قدر معلوم کیجیے: (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$، (ii) $\cot^2\theta$

8۔ اگر $3\cot A = 4$ جانچ کیجئے کہ $\cos^2 A - \sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ہے یا نہیں۔

9۔ مثلث ABC جو B پر قائم ہے، میں اگر $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$، $\angle B = 90°$، تو قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10۔ ΔPQR جو Q پر قائم زاویہ ہے، میں $PR+QR=25cm$ اور $PQ=5cm$ تو $\sin P, \cos P$ اور $\tan P$ کی قدر معلوم کیجیے۔

11۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) $\tan A$ کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے۔

(ii) زاویہ A کی قدر کے لئے $\sec A = \frac{12}{5}$ ہے۔

(iii) $\cos A$، زاویہ A کے cosecant A کی مختصر شکل ہے

(iv) $\cot A$، $\cot$ اور A کا حاصل ضرب ہے۔

(v) کسی زاویہ θ کے لئے $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ہوتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

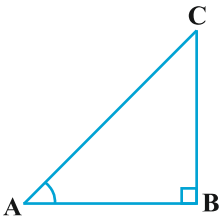
8.3 کچھ مخصوص زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

جیومیٹری میں آپ زاویوں $30°$، $45°$، $60°$ اور $90°$ کی تشکیل سے آپ پہلے ہی واقف ہیں۔ اس سیکشن میں آپ ان تمام زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر معلوم کریں گے اس کے علاوہ $0°$ کی بھی

$45°$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

ΔABC جو B پر قائم ہے۔ اگر ایک زاویہ $45°$ ہے تب دوسرا زاویہ بھی $45°$ کا ہوگا یعنی $\angle A = \angle C = 45°$ (شکل 8.14 دیکھئے)

اس لئے $BC = AB$ (کیوں؟)



شکل 8.14

اب فرض کیجیے $BC = AB = a$

تب فیثاغورث کے مسلہ کی رو سے $AC^2 - AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

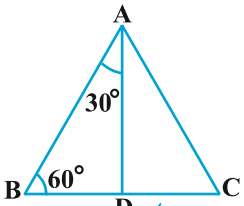
اوراس لئے $AC = a\sqrt{2}$

ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی تعریف کو استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے:

$$\sin 45° = \frac{\text{زاویہ } 45° \text{ کے مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{زاویہ } 45° \text{ کا متصل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{زاویہ } 45° \text{ کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ } 45° \text{ کا متصل ضلع}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$



شکل 8.15

مزید $\operatorname{cosec} 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$

30° اور 60° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

آیئے اب 30° اور 60° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کرتے ہیں۔ ایک مساوی ضلعی مثلث ABC پر غور کیجئے۔ کیونکہ اس کا ہر ایک زاویہ 60° کا ہے اس لئے، $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

ضلع BC پر A سے عمود AD کھینچئے (شکل 8.15 دیکھیے)

اب $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (کیوں؟)

اس لئے $BD = DC$

اور $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

ΔABD ایک قائم مثلث ہے جو D پر قائم ہے جس میں $\angle BAD = 30°$ اور $\angle ABD = 60°$ (شکل 8.15 دیکھئے)

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ ٹرگنومیٹرک نسبتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ اس لئے اب فرض کیجئے کہ $AB = 2a$۔

تب $BD = \frac{1}{2}BC = a$

اور $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $AD = a\sqrt{3}$

اب ہمارے پاس ہے:

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مزید $\operatorname{cosec} 30^\circ \quad \frac{1}{\sin 30^\circ} \quad 2, \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

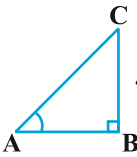
$$\cot 30^\circ - \frac{1}{\tan 30^\circ} - \sqrt{3}$$

اسی طرح سے $\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3},$

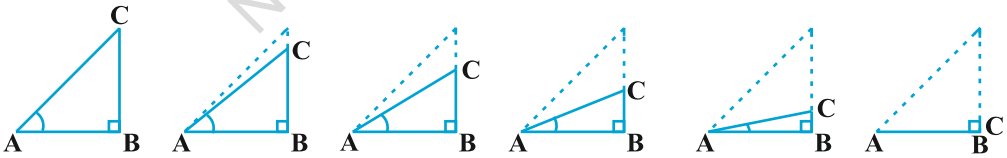
$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2$ اور $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0°اور 90° کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

آیئے اب دیکھتے ہیں کہ کسی قائم مثلث ABC میں زاویہ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں پر کیا اثر پڑتا ہے جب ان کو چھوٹے سے چھوٹا کیا جائے (شکل 8.16) جب تک یہ صفر نہ ہو جائیں۔ کیونکہ $\angle A$ چھوٹے سے چھوٹا ہو رہا ہے اس لئے BC کی لمبائی گھٹے گی۔ اور نقطہ C، نقطہ B کی نزدیک ہوگا، اور آخر میں جب $\angle A$ 0° کے بہت قریب ہو جائے گا۔ تو AC تقریباً AB کے برابر ہو جائے گا۔ (شکل 8.17 دیکھئے)



شکل 8.16



شکل 8.17

جب $\angle A$ 0° کے کافی نزدیک ہو تو BC، 0 کے نزدیک ہو جائے گا اس لئے $\sin A = \frac{BC}{AC}$ کی قدر 0 کے بہت قریب ہو جائے گی۔ مزید جب $\angle A$، 0° کے نزدیک ہو تو AC تقریباً AB کے برابر ہوگا اور اس لئے $\cos A = \frac{AB}{AC}$ کی قدر 1

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

کے کافی نزدیک ہوگی۔

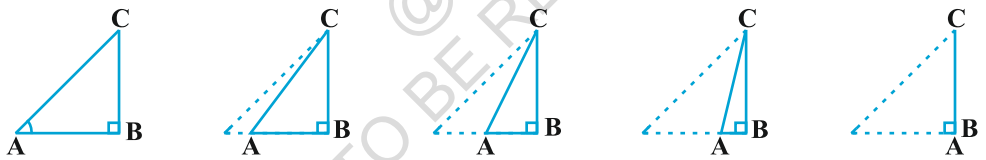
اس سے ہمیں مدد ملتی ہے کہ ہم کس طرح $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدروں کی تعریف بیان کریں جب $A = 0°$ ہم تعریف کرتے ہیں $\sin 0° = 0$ اور $\cos 0° = 1$

ان کو استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے:

$$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0, \cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$$ (جو معرف نہیں ہیں کیوں؟)

$$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1 \text{ اور } \operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$$ (جو معرف نہیں ہیں کیوں؟)

اب دیکھئے کہ $\angle A$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا کیا ہوتا ہے جب یہ زاویہ ΔABC میں بڑے سے بڑا کر دیا جاتا ہے جب تک کہ یہ $90°$ کے برابر نہ ہو جائے۔ جب $\angle A$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے۔ $\angle C$ اتنا ہی چھوٹے سے چھوٹا ہو جاتا ہے۔ اس لئے ایسی حالت میں ضلع AB کی لمبائی گھٹا دیتی ہے۔ نقطہ A، نقطہ B کے نزدیک آتا رہتا ہے۔ اور آخر میں $\angle A$ جب $90°$ کے بہت



شکل 8.18

نزدیک ہو جاتا ہے تو $\angle C$، $0°$ کے نزدیک ہو جاتا ہے۔ اور ضلع AC تقریباً ضلع BC پر منطبق ہو جاتا ہے۔ (شکل 8.18 دیکھئے)۔

جب $\angle C$، $0°$ کے کافی نزدیک ہو تو $\angle A$ $90°$ کے کافی نزدیک ہوگا۔ ضلع AC تقریباً BC کے برابر ہو جائے گی اور اس لئے $\sin A$، 1 کے کافی نزدیک ہو جائے گا۔ جب $\angle A$، $90°$ کے بہت نزدیک ہو تو $\angle C$، $0°$ کے بہت نزدیک ہوگا، اور ضلع AB تقریباً صفر ہو جائے گا۔ اس لئے $\cos A$ صفر کے بہت نزدیک ہوگا۔

اس لئے ہم تعریف بیان کرتے ہیں: **$\sin 90° = 1$ اور $\cos 90° = 0$**

آپ اب $90°$ کی باقی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو کیوں نہیں معلوم کرتے؟

اب ہم حوالہ کے لئے جدول 8.1 میں $0°, 30°, 45°, 60°$ اور $90°$ کی تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر دیتے ہیں۔

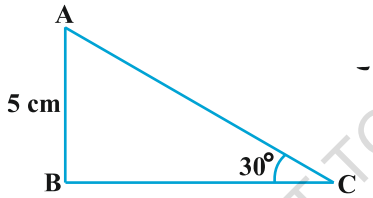
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جدول 8.1

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	معرف نہیں
cosec A	معرف نہیں	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	معرف نہیں
cot A	معرف نہیں	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ریمارک: مذکورہ بالا جدول سے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ جب $\angle A$ 0° سے 90° کی طرف بڑھتا ہے تب 0° sin A سے 1 کی طرف بڑھتا ہے اور 1 cos A سے 0 کی طرف گھٹتا ہے۔

آیئے اوپر دی گئی قدروں کے استعمال کی وضاحت کچھ مثالوں سے کرتے ہیں۔



شکل 8.19

مثال 6: ΔABC جو B زاویے پر قائم ہے، میں $\angle ACB = 30^\circ$ اور $AB = 5cm$ (شکل 8.19 دیکھئے)۔ اضلاع BC اور AC کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

حل: ضلع BC کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہم اس ٹرگنومیٹرک نسبت کو لیں گے۔ جس میں BC اور دیا ہوا ضلع AB شامل ہو۔ کیونکہ BC زاویہ کا متصل ضلع ہے اور AB، زاویہ C کا مقابل ضلع ہے، اس لئے

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

یعنی $$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

جس سے ہمیں ملتا ہے $$BC = 5\sqrt{3}cm$$

ضلع AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لئے ہم غور کرتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \quad (\text{کیوں؟})$$

یعنی $$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 10\text{cm}$$

نوٹ کیجئے کہ ہم متبادل طریقہ کے طور پر ہم مذکورہ بالا مثال میں تیسرا ضلع معلوم کرنے کے لئے فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کر سکتے تھے،

یعنی $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10\text{cm}$$

مثال 7: قائم PQR Δ جو Q پر قائم ہے، میں (شکل 8.20 دیکھیے) $PQ = 3\text{cm}$ اور $PR = 6\text{ cm}$ $\angle QPR$ اور $\angle PRQ$ تو معلوم کیجئے

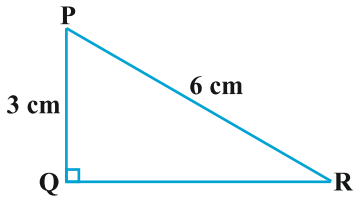
حل: دیا ہوا ہے $PQ = 3\text{cm}$ اور $PR = 6\text{cm}$

$$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

یا $$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

اس لئے $$\angle PRQ = 30^\circ$$

اس لئے $$\angle QPR = 60^\circ \quad (\text{کیوں؟})$$



شکل 8.20

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ قائم مثلث کے کسی دوسرے حصہ (یا تو حادہ زاویہ یا کوئی ضلع) کا ایک ضلع معلوم ہو تو مثلث کے باقی اضلاع اور زاویہ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 8: اگر $\sin(A-B) = \frac{1}{2}, \cos(A+B) = \frac{1}{2}, 0^\circ < A+B \le 90^\circ, A > B$, تو A اور B معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$ اس لئے $A - B = 30^\circ$ (کیوں؟) (1)

مزید کیونکہ $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$ اس لئے $A + B = 60^\circ$ (کیوں؟) (2)

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $A = 45^\circ$ اور $B = 15^\circ$

مشق 8.2

1۔ مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ (ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2۔ صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} =$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ ، A کی کس قیمت پر صحیح ہو گا۔

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} =$

a) $\cos 60^\circ$

b) $\sin 60^\circ$

c) $\tan 60^\circ$

d) $\sin 30^\circ$

3۔ اگر $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ اور $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $A>B$ $0^\circ < A+B \le 90^\circ$ تو A اور B معلوم کیجئے۔

4۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل صحیح ہیں یا غلط۔ آیئے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$

(ii) جیسے θ بڑھتا ہے $\sin\theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے۔

(iii) جیسے θ بڑھتا ہے $\cos\theta$ کی قدر بھی بڑھتی ہے۔

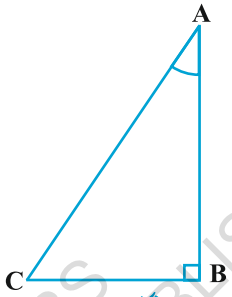
(iv) θ کی تمام قدروں کے لئے $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0^\circ$ کے لئے $\cot A$ معرف نہیں ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.4 ٹرگنومیٹرک کے تماثلات

آپ یاد کیجئے کہ ایک مساوات تماثلہ کہلاتی ہے اگر وہ اس میں موجود متغیر کی تمام قدروں کے لئے درست ہو اسی طرح سے مساوات جس میں ٹرگنومیٹرک نسبتیں شامل ہوتی ہیں **ٹرگنومیٹرک** تماثل کہلاتی ہے اگر اس میں ملوث تمام زاویوں کے لئے درست ہو۔



شکل 8.21

اس سیکشن میں ہم ایک ٹرگنومیٹری کا تماثل ثابت کریں گے اور اس کا استعمال باقی دوسری مفید ٹرگنومیٹری کے تماثلات کو ثابت کرنے میں کریں گے۔

ΔABC میں، جو B پر قائم ہے (شکل 8.21 دیکھئے)

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

(1) کے ہر رکن کو AC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے،

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

یعنی $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

یعنی $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

یعنی $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$

یہ A کی تمام قدروں کے لئے درست ہے جب کہ $0° \le A \le 90°$، اس لئے یہ ٹرگنومیٹرک تماثل ہے۔

آیئے (1) کو دونوں طرف AB^2 سے تقسیم کریں، ہمیں ملتا ہے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

یا $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

یعنی $$\mathbf{1+\tan^2 A=\sec^2 A} \qquad (3)$$

کیا یہ مساوات $A = 0°$ کے لئے درست ہے؟ ہاں، یہ ہے $A = 90°$ کے بارے کیا خیال ہے۔ہم جانتے ہیں کہ $A=90°$ کے لئے A اور A معرف نہیں ہیں اس لئے (3) درست ہے تمام A کے لئے $0° \le A < 90°$

آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم (1) سے BC^2 تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

یعنی $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{BC}{BC}\right)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

یعنی $$\mathbf{\cot^2 A+1=\operatorname{cosec}^2 A} \qquad (4)$$

نوٹ کیجئے کہ $A = 0°$ کے لئے cosec A اور cot A معرف نہیں ہیں اس لئے (4) تمام A کے درست ہے جب کہ $0° < A \le 90°$

ان تماثلات کا استعمال کر کے ہم ہر ٹرگنومیٹرک نسبت کو دوسری نسبت کی شکل میں بدل سکتے ہیں یعنی اگر کوئی سی نسبت ایک نسبت آپ کو معلوم ہے تو ہم دوسری ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ ہم ان تماثلات کو استعمال کر کے ایسا کس طرح کر سکتے ہیں۔فرض کیجئے ہم جانتے ہیں کہ

$\cot A = \sqrt{3}$ تب $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

کیونکہ $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\sec^2 A = 1+\tan^2 A = 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$

دوبارہ $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ اس لئے $\operatorname{cosec} A = 2$

مثال 9 : نسبتوں $\cos A$، $\tan A$ اور $\sec A$ کو $\sin A$ کی شکل میں لکھیے۔

حل : کیونکہ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ اس لئے

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, i.e., $\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A}$

اس سے ہمیں ملتا ہے $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$ (کیوں؟)

کیونکہ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

اور $\sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

مثال 10: ثابت کیجیے کہ $\sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$۔

حل:

$$\text{LHS} = \sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{RHS}$$

مثال 11: ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

حل:

$$\text{LHS} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$= \frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{RHS}$$

مثال 12: ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$، تماثل $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ کو استعمال کیجیے۔

حل: کیونکہ ہمیں وہ تماثل استعمال کرنا ہے جس میں $\sec\theta$ اور $\tan\theta$ شامل ہیں۔اس لئے پہلے ہم LHS کو (اس تماثل کو جس کو ہمیں ثابت کرنا ہے) $\sec\theta$ اور $\tan\theta$ کی شکل میں بدلیں گے، ایسا کرنے کے لئے ہم شمار کنندہ اور نسب نما کو $\cos\theta$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

سے تقسیم کریں گے۔

$$\text{LHS} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

جو کے مطلوبہ تماثل کی RHS ہے جس کو ہمیں ثابت کرنا تھا۔

مشق 8.3

1۔ ٹرگنومیٹری نسبتیں $\sin A$، $\sec A$ اور $\tan A$ کو $\cot A$ کی شکل میں لکھیے۔

2۔ $\angle A$ کی $\sec A$ کی شکل میں تمام ٹرگنومیٹرک نسبتوں کو لکھیے۔

3۔ صحیح جواب کو چنئے اور اپنے انتخاب کا جواز پیش کیجیے۔

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A =$

(A) 1 (B)9 (C)8 (D)0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

(A) 0 (B)1 (C)2 (D)–1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) sec A (B)sin A (C)cosec A (D)cos A

@CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1-\cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

4۔ مندرجہ ذیل تماثلات کو ثابت کیجیے، اس میں ملوث تمام زاویہ حادہ ہیں جن کے لئے عبارتیں معرف ہیں۔

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 \quad \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ (ii) $\frac{\cos A}{1-\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} \quad \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

[اشارہ: عبارت کو $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی شکل میں لکھیے]

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ [اشارہ: LHS اور RHS کو علیحدہ علیحدہ مختصر کیجیے]

(v) $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A - \sin A - 1} = \text{cosec}\,A + \cot A$

تماثل $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ کو استعمال کر ثابت کیجیے۔

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A - \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A - \sec A)^2 = 7 - \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[اشارہ: LHS اور RHS کو علیحدہ علیحدہ مختصر کیجیے]

(x) $\left(\frac{1-\tan^2 A}{1-\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ ایک قائم مثلث ABC جو B پر قائم ہے، میں

$\sin A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{وتر}}$ $\cos A = \frac{\text{زاویہ A کا متصل ضلع}}{\text{وتر}}$ $\tan A = \frac{\text{زاویہ A کا مقابل ضلع}}{\text{زاویہ A کا متصل ضلع}}$

2۔ $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}; \sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3۔ اگر کبھی حادہ زاویہ کی ایک ٹرگنومیٹرک نسبت معلوم ہے تو ہم باقی نسبتیں آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

4۔ زاویہ $0°، 30°، 45°، 60°، 90°$ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں

5۔ $\sin A$ اور $\cos A$ کی قدر 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتی جب کہ $\sec A$ یا $\text{cosec } A$ کی قدر ہمیشہ 1 کے برابر یا اس سے زیادہ نہیں ہے۔

6۔ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$0° \le A < 90°, \sec^2 A - \tan^2 A = 1$ کے لئے

$0° < A \le 90°, \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ کے لئے

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

5013CH09

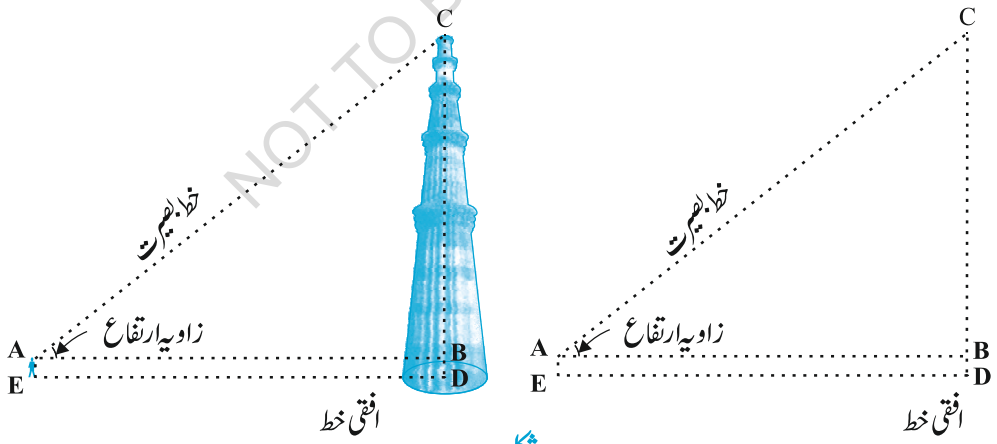
9 ٹرگنومیٹری کے کچھ استعمال
(SOME APPLICATIONS OF TRIGONOMETRY)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9.1 بلندیاں اور فاصلہ

اس باب میں ہم دیکھیں گے کہ ٹرگنومیٹری کس طرح سے مختلف اشیاء کی بلندیاں اور فاصلہ بغیر پیمائش کئے ہوئے معلوم کرنے میں استعمال ہوتی ہے۔

آیئے پچھلے باب کی شکل 8.1 پر غور کیجیے جو کہ شکل 9.1 میں دوبارہ بنائی گئی ہے۔



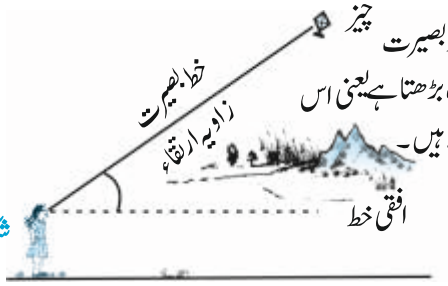
شکل 9.1

اس شکل میں خط AC جو طالب علم کی آنکھ سے مینار کی چوٹی تک کھینچا گیا ہے۔ **خطِ بصیرت** کہلاتا ہے۔ طالب علم مینار کی چوٹی کو دیکھ رہا ہے۔ خطِ بصیرت سے افقی خط پر بنا زاویہ BAC ہے طالب علم کی آنکھ سے مینار کی چوٹی کا **زاویہ ارتفاع** کہلاتا ہے۔

اس طرح سے **خطِ بصیرت** وہ ہے جو کسی مشاہد کی آنکھ سے کسی شے جس کو مشاہد دیکھ رہا ہے، تک کھینچا جاتا ہے۔ دیکھے جانے والے نقطہ کا **زاویہ ارتفاع** وہ زاویہ ہے جو خطِ بصیرت، اُفقی خط سے بناتا ہے جب کہ بصیرت کا نقطہ افقی سطح کے اوپر ہوتا ہے یعنی ایسی حالت جب ہم کسی چیز کو دیکھنے کے لئے اوپر کی طرف دیکھتے ہیں۔ اب شکل 8.2 میں دی گئی صورت حال پر غور کیجئے۔ بالکنی میں بیٹھی ہوئی ایک لڑکی سڑک کے دوسری طرف موجود ایک مندر کی سیڑھیوں پر رکھے ایک پھولوں کے گملہ کو دیکھ رہی ہے۔ اس حالت میں خطِ بصیرت افقی سطح سے نیچے ہے۔ اس حالت میں ۔

خط بصیرت سے افقی خط پر بنے زاویہ جھکاؤ ہے۔

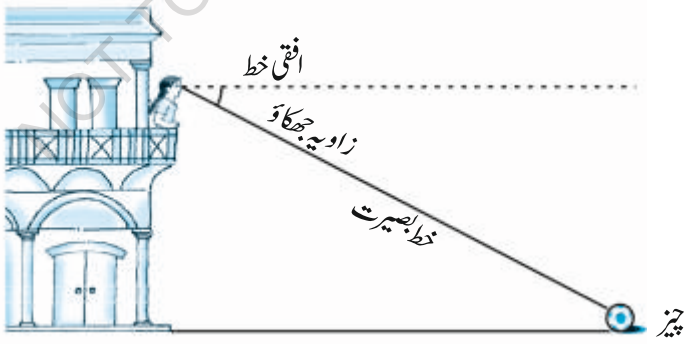
کسی شے کا زاویہ جھکاؤ، جس کو دیکھنا ہے، وہ زاویہ ہے جو خط بصیرت افقی خط کے ساتھ بناتا ہے جب یہ افقی سطح کے نیچے کی طرف بڑھتا ہے یعنی اس حالت میں کسی شے کو دیکھنے کے لئے ہم اپنے سر کو جھکاتے ہیں۔ جب کہ وہ نقطہ افقی خط کے نیچے ہو یعنی ایسی حالت جس میں ہمیں کسی چیز کو دیکھنے کے لئے اپنی گردن کو نیچے کی طرف جھکانا پڑتا ہے (شکل 9.3 دیکھیے)



شکل 9.2

اب آپ شکل 9.3 میں آسانی سے خطِ بصیرت اور اس سے بنے زاویہ کی شناخت کر سکتے ہیں، کیا یہ زاویہ جھکاؤ ہے یا زاویہ ارتفاع؟

آیئے دوبارہ شکل 9.1 پر غور کرتے ہیں۔ اگر بغیر پیمائش کئے ہوئے آپ کو مینار CD کی اونچائی معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ تب آپ کو کن کن چیزوں کی ضرورت ہوگی؟ آپ کو مندرجہ ذیل چیزوں کی ضرورت ہوگی۔



شکل 9.3

(i) طالب علم مینار کے پائے سے جس فاصلہ پر کھڑا ہے یعنی DE (ii) مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ∠ BAC

(iii) طالب علم کی height (اونچائی) AE

یہ فرض کرتے ہوئے اوپر دی گئی تینوں باتیں معلوم ہیں۔ آپ مینار کی اونچائی کس طرح معلوم کریں گے؟

شکل میں CD = CB + BD یہاں BD = AE جو کے طالب علم کی اونچائی ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

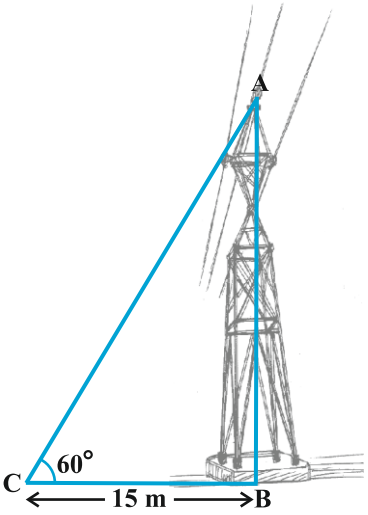
BC معلوم کرنے کے لئے ہم ∠ BAC یا ∠ A کی ٹرگنومیٹرک نسبتوں کا استعمال کریں گے۔

مثلث ABC میں ضلع BC، ∠A کے مقابل ضلع ہے۔ اب کون سی ٹرگنومیٹرک نسبت ہم استعمال کر سکتے ہیں؟ ان میں سے کون سی ایسی نسبت ہے جس کی دو قدریں ہمیں معلوم ہیں اور ایک کو ہمیں معلوم کرنا ہے؟ ایسی نسبتیں یا تو $\tan A$ ہیں یا $\cot A$ کیونکہ ان نسبتوں میں AB اور BC ملوث ہیں۔

اس لئے $\tan A = \frac{BC}{AB}$، یا $\cot A = \frac{AB}{BC}$ جس کو حل کرنے پر، ہمیں BC ملتا ہے۔

AE کو BC میں جمع کرنے پر آپ کو مینار کی اونچائی مل جائے گی۔

اوپر بحث کئے گئے عمل کو تشریح ہم کچھ مثالوں کو حل کر کے کرتے ہیں۔



شکل 9.4

مثال 1: ایک ٹاور انتصابی طور پر گراؤنڈ پر کھڑا ہے۔ گراؤنڈ پر کسی نقطہ سے جو ٹاور کے پایہ سے 15m کے فاصلہ پر ہے ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 60° ہے۔ ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے ہم اس مسئلہ کو ظاہر کرنے کے لئے ایک سادہ سا ڈائی گرام بناتے ہیں (شکل 9.4 دیکھئے) یہاں AB ٹاور کو ظاہر کرتا ہے۔ CB ٹاور سے اس نقطے کا فاصلہ ہے اور ∠ACB زاویہ ارتفاع، ہمیں ٹاور کی اونچائی یعنی AB معلوم کرنی ہے۔ مزید ACB ایک مثلث ہے جو B پر قائم ہے۔ اس مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہم $\tan 60^\circ$ (یا $\cot 60^\circ$) کا انتخاب کریں گے، کیوں کہ اس میں AB اور BC موجود ہیں۔

اب $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

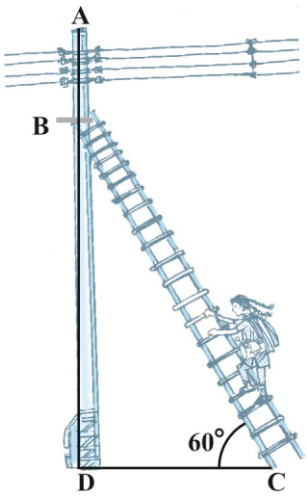
یعنی $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

یعنی $AB = 15\sqrt{3}$

اس طرح سے ٹاور کی اونچائی $15\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

مثال 2: ایک الیکٹرانک مشین کو 5 میٹر اونچے بجلی کے ایک کھمبے میں ہوئی کسی خرابی کو دور کرنا ہے اس کام کو انجام دینے کے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 9.5

لئے اس کو کھمبے کے اوپری حصہ 1.3m نیچے پہونچتا ہے (شکل 9.5 دیکھیے) اس سیڑھی کی لمبائی کیا ہونی چاہیے جو افقی خط سے 60° کا زاویہ بنائے ہوئے اسے مطلوبہ مقام تک پہونچادے۔ مزید یہ بھی معلوم کیجئے کہ وہ کھمبے کے پایہ سے سیڑھی کا پایہ کتنی دوری پر رکھے ($\sqrt{3} = 1.73$ لے سکتے ہیں۔)

حل: شکل 9.5 میں الیکٹریشن کو کھمبے AD کے نقطہ B پر پہونچا ہے۔

اس لئے $BD = AD - AB = (5 - 1.3)\text{m} = 3.7\text{m}$

یہاں BC سیڑھی کو ظاہر کرتا ہے، ہمیں اس کی لمبائی معلوم کرنی ہے یعنی قائم مثلث BDC کا وتر۔

اب کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ کون سی ٹرگنومیٹرک نسبت پر غور کیا جائے؟

یہ $\sin 60^\circ$ ہونا چاہیے۔

اس لئے $\dfrac{BD}{BC} = \sin 60^\circ$ یا $\dfrac{3.7}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

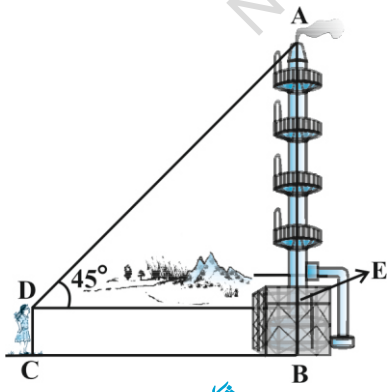
اس لئے تقریباً $BC = \dfrac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28\text{m}$

یعنی سیڑھی کی لمبائی 4.28m ہے۔

اب $\dfrac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

یعنی $DC = \dfrac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14\text{m}$ (تقریباً)

اس لئے وہ سیڑھی کے پائے کو کھمبے سے 2.14 میٹر کے فاصلہ پر رکھے۔



شکل 9.6

مثال 3: 1.5 میٹر اونچائی میٹر ایک ایک چمنی ہے 28.5 میٹر کے فاصلہ پر ہے اس کی آنکھ سے چمنی کے اوپری حصہ کا زاویہ ارتفاع 45° ہے۔ چمنی کی اونچائی معلوم کیجیے؟

حل: یہاں AB ایک چمنی ہے، CD مشاہد اور $\angle ADE$ زاویہ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ارتفاع (شکل 9.6 دیکھیے) یہاں ADE مثلث، $\angle E = 90°$ اور ہمیں چمنی کی اونچائی معلوم کرنے کی ہے۔

$$AB = AE + BE = AE + 1.5$$

اور $DE = CB = 28.5$ میٹر

AE معلوم کرنے کے لئے ہم ایسی ٹرگنومیٹرک نسبت کو انتخاب کرتے ہیں جس میں AE اور DE دونوں شامل ہوں۔ آیئے زاویہ ارتفاع کے tangent کو انتخاب کرتے ہیں۔

اب $\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$

یعنی $1 = \frac{AE}{28.5}$

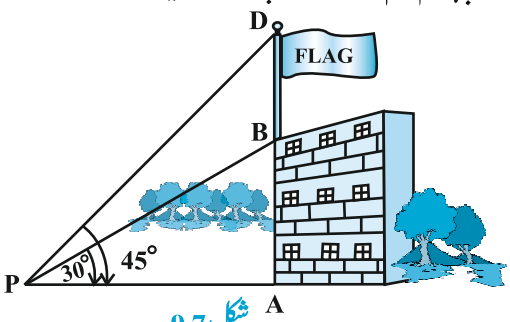
اس لئے $AE = 28.5$

اس لئے چمنی کی اونچائی میٹر $30 =$ میٹر $(28.5 + 1.5) = (AB)$ ہے۔

مثال 4: زمین پر ایک نقطے P سے 10 میٹر اونچی ایک عمارت کا زاویہ ارتفاع 30° ہے عمارت کی چھت پر جھنڈے کا ایک پول لگایا گیا۔ جھنڈے کے پول کے اوپری سرے کا نقطہ P سے زاویہ ارتفاع 45° ہے جھنڈے کے پول کی اونچائی اور عمارت کا نقطہ P سے فاصلہ معلوم کیجئے (آپ $\sqrt{3} = 1.732$ لے سکتے ہیں)۔

حل: شکل 9.7 میں AB عمارت کی اونچائی، BD جھنڈے کے پول کی اونچائی کو ظاہر کرتا ہے۔ اور P زمین پر دیا گیا نقطہ ہے۔ نوٹ کیجئے کہ یہاں دو قائم مثلث ہیں PAB اور PAD جس میں جھنڈے کے پول کی اونچائی معلوم کرنی ہے یعنی DB اور عمارت کا نقطہ P سے فاصلہ بھی معلوم کرنا ہے یعنی PA۔

کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ عمارت کی اونچائی AB ہے اس لئے پہلے ہم قائم مثلث PAB پر غور کرتے ہیں۔



شکل 9.7

ہمارے پاس ہے $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$

یعنی $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

اس لئے $AP = 10\sqrt{3}$

یعنی P سے عمارت کا فاصلہ $10\sqrt{3}\text{m} = 17.32\text{m}$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مزید آیئے فرض کرتے ہیں DB = xm تب AD = (10 + x)m

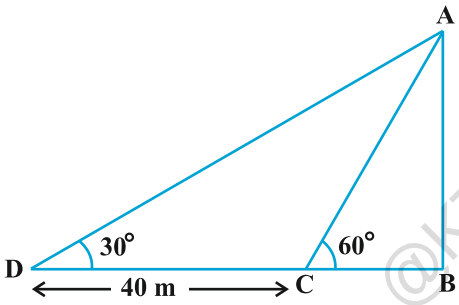
اب قائم Δ PAD میں $\tan 45 = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

اس لئے $1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

یعنی $x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) = 7.32\text{m}$

اس لئے جھنڈے کے پول کی اونچائی 7.32 میٹر ہے۔

مثال 5: ایک مسطح زمین پر کھڑے ایک ٹاور کی پرچھائی 40 میٹر لمبی ہو جاتی ہے جب سورج کا ارتفاع 60° سے 30° ہو جاتا ہے۔ ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔



شکل 9.8

حل: شکل 9.8 میں AB ٹاور کو اور BC ٹاور کی پرچھائی کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے جب سورج کا ارتفاع 60° ہوتا ہے یعنی پرچھائی کی نوک سے ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 60° ہے اور DB پرچھائی وہ لمبائی ہے جب زاویہ ارتفاع 30° ہے۔

اب مان لیجئے AB = 'h' m اور BC = 'x' m ہے سوال کے مطابق DB، BC سے 40 میٹر لمبا ہے۔

اس لئے DB = (40 + x)m

اب ہمارے پاس دو قائم مثلث ABC اور ABD ہیں۔

Δ ABC میں $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

یا $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

Δ ABC میں $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

یعنی $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 40}$ (2)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

شکل(1) سے ہمارے پاس ہے $h = x\sqrt{3}$

اس قدر کو(2) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40$

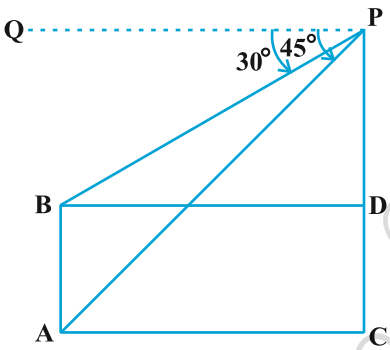
یعنی $3x = x + 40$

یعنی $x = 20$

اس لئے $h = 20\sqrt{3}$

اس لئے ٹاور کی اونچائی $20\sqrt{3}$m ہے۔

مثال 6: 8 میٹر اونچی ایک عمارت کی چھت اور پایہ کا ایک کثیر منزلہ عمارت سے زاویہ جھکاؤ بالترتیب $30°$ اور $45°$ ہے کثیر منزلہ عمارت کی اونچائی اور دونوں عمارتوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔



شکل 9.9

حل: شکل 9.9 میں PC کثیر منزلہ عمارت کو AB، 8 میٹر اونچی عمارت کو ظاہر کرتا ہے ہماری دلچسپی کثیر منزلہ عمارت کی اونچائی معلوم کرنی ہے یعنی PC کی اور دونوں عمارتوں کے درمیان فاصلہ یعنی AC معلوم کرنا ہے۔ شکل کو 1 محور سے دیکھیے۔ مشاہدہ کیجیے کہ PB ایک قاطع ہے جو متوازی خطوط PQ اور BD کو قطع کرتا ہے اس لئے $\angle QPB$ اور $\angle PBD$ متبادل زاویہ ہیں اور اس لئے مساوی ہیں اس لئے $\angle PBD = 30°$ اسی طرح $\angle PAC = 45°$ قائم مثلث PBD،

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ یا } BD = PD\sqrt{3}$$

قائم مثلث PAC میں

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

یعنی $PC = AC$

مزید $PC = PD + DC$ اس لئے $PD + DC = AC$

کیونکہ $AC = BD$ اور 8 میٹر $= AB = DC$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (کیوں؟)

@KBSE NOT TO BE REPUBLISHED

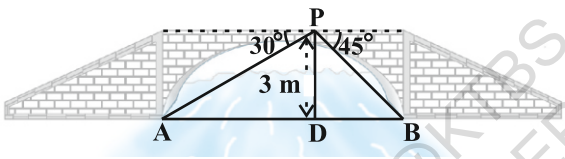
اس سے حاصل ہوتا ہے $PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)\text{m}.$

اس لئے کثیر منزلہ عمارت کی اونچائی $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}\text{m} = 4(3+\sqrt{3})\text{m}$

اور دونوں عمارتوں کے درمیان فاصلہ $4(3+\sqrt{3})\text{m}.$

مثال 7: دریا کے اوپر سے پل پر ایک نقطہ سے دریا کے دو کناروں کا زاویہ جھکاؤ بالترتیب $30°$ اور $45°$ ہے۔ اگر پل کی کناروں سے اونچائی 3 میٹر ہے تو دریا کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: شکل 9.10 میں A اور B دریا کے مقابل کناروں پر موجود نقطوں کو ظاہر کرتے ہیں اس لئے AB دریا کی چوڑائی ہے۔ P پل کے اوپر 3 میٹر کی اونچائی پر ایک نقطہ ہے یعنی 3 میٹر = DP ہماری دلچسپی دریا کی چوڑائی معلوم کرنے میں ہے جو کہ مثلث APB کے ضلع AB کی لمبائی ہے۔



شکل 9.10

اب $AB = AD + DB$

قائم مثلث APD میں $\angle A = 30°$

اس لئے $\tan 30° = \frac{PD}{AD}$

یعنی $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ یا $AD = 3\sqrt{3}\text{m}$

مزید قائم مثلث PBD میں $\angle B = 45°$، اس لئے $BD = PD = 3\text{m}$۔

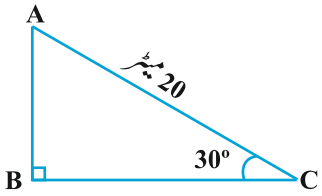
اب $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3}\text{ m} = 3(1+\sqrt{3})\text{ m}$

اس لئے دریا کی چوڑائی $3(\sqrt{3}+1)$ میٹر ہے۔

@KBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 9.1

1۔ سرکس کا ایک آرٹسٹ 20 میٹر لمبی ایک رسّی پر چڑھ گیا ہے جو کہ ایک انتصابی پول کے اوپری سرے اور نیچے گراؤنڈ سے اس طرح بندھی ہے کہ جس میں کوئی جھول نہیں ہے۔ پول کی اونچائی معلوم کیجیے اگر رسّی کے ذریعے زمین پر بنا زاویہ 30° ہے (شکل 9.11 دیکھئے)



شکل 9.11

2۔ طوفان کی وجہ سے ایک درخت ٹوٹ گیا اور اس کا ٹوٹا ہوا حصہ اس طرح جھکا کے اس کا اوپری حصہ زمین سے چھوکر 30° کا زاویہ بناتا ہے۔ درخت کے نچلے حصہ سے اس نقطہ کا فاصلہ جہاں درخت کا اوپری حصہ جو زمین کو چھوتا ہے۔ وہ 8 میٹر ہے تو درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔

3۔ ایک کنٹریکٹر نے بچوں کے لئے ایک پارک میں دو سلائڈروں کے لگانے کا منصوبہ بنایا۔ 5 سال سے کم عمر کے بچوں کے لئے اس نے اس سلائڈر کو فوقیت دی جس کی اونچائی 1.5m اونچی ہے اور وہ زمین سے 30° کا زاویہ بناتی ہے جب کہ بڑے بچوں کے لئے 3m اونچی ایک سیڑھی والی سلائڈر چاہتی ہے جو زمین سے 60° کا زاویہ بناتی ہے۔ دونوں سلائڈروں کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4۔ زمین پر ایک نقطہ، جو ٹاور کے پایہ سے 30m کے فاصلہ پر ہے، زمین سے ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 30° ہے۔ ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

5۔ ایک پتنگ زمین سے 60 میٹر اونچائی پر اڑ رہی ہے۔ پتنگ سے جڑی ڈور عارضی طور پر زمین پر ایک نقطہ سے باندھ دی گئی ہے ڈور کا زمین پر جھکاؤ 60° ہے ڈور کی لمبائی معلوم کیجئے۔ یہ مانتے ہوئے کہ ڈور میں کوئی جھول نہیں ہے۔

6۔ 1.5 میٹر اونچائی کا ایک لڑکا 30 میٹر اونچی ایک عمارت سے کچھ فاصلے پر کھڑا ہے۔ جیسے جیسے وہ عمارت کی طرف بڑھتا ہے اس کی آنکھ کا عمارت کی چھت سے زاویہ ارتفاع 30° سے بڑھ کر 60° ہو جاتا ہے۔ اس کے ذریعے عمارت تک طے کیا گیا فاصلہ معلوم کیجیے۔

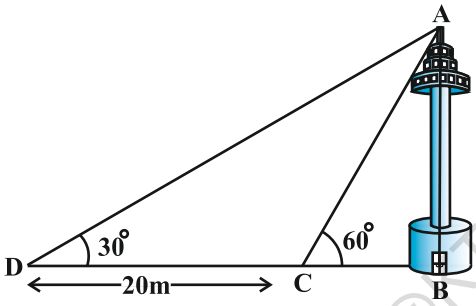
7۔ زمین پر موجود ایک نقطہ سے 20 میٹر اونچی ایک عمارت کے اوپر لگے نشریات کے ایک ٹاور کے نچلے سرے اور اوپری سرے کا زاویہ ارتفاع بالترتیب 45° اور 60° ہے۔ ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

8۔ 1.6 میٹر اونچا ایک مجسمہ ایک پایے کی اوپری چوٹی پر کھڑا ہے۔ زمین پر موجود ایک نقطہ سے مجسمہ کے اوپری سرے کا زاویہ ارتفاع 60° اور اس نقطہ سے پایہ کے اوپری سے کا زاویہ ارتفاع 45° ہے پایہ کی اونچائی معلوم کیجیے۔

9۔ ایک عمارت کی چھت کا ایک ٹاور کے پایہ سے زاویہ ارتفاع 30° ہے اور عمارت کے پایہ سے ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 60° ہے۔ اگر ٹاور کی اونچائی 50 میٹر ہو تو عمارت کی اونچائی معلوم کیجیے۔

10۔ مساوی اونچائیوں والے دو پول ایک سڑک کے دونوں طرف کھڑے ہیں، جو 80 میٹر چوڑی ہے، سڑک کے بیچ و بیچ میں ایک نقطہ سے دونوں پول کا زاویہ ارتفاع 60° اور 30° ہے دونوں پول کی اونچائی اور اس نقطہ کا پول سے فاصلہ معلوم کیجیے۔



شکل 9.12

11۔ T.V. کا ایک ٹاور ایک نہر کے کنارے پر کھڑا ہے۔ دوسرے کنارے پر ایک نقطہ جو ٹاور کے بالکل مخالف سمت میں ہے ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 60° ہے اس نقطہ اور ٹاور کے پایہ کو ملانے والے خط پر ایک اور نقطہ جو پہلے نقطہ سے 20 میٹر کے فاصلہ پر ہے۔ ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 30° ہے (شکل 9.12 دیکھئے) ٹاور کی اونچائی اور نہر کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

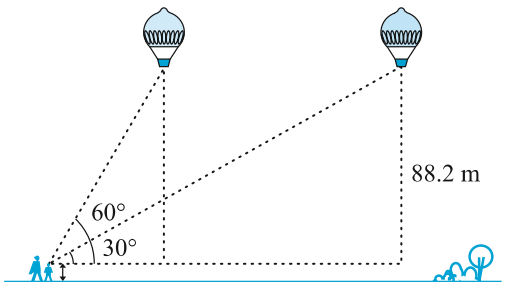
12۔ 7 میٹر اونچی ایک عمارت سے ایک کیبل ٹاور کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع 60° اور اس کے پایہ کا زاویہ جھکاؤ 45° ہے۔ ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

13۔ سمندر سے 75 میٹر اونچائی پر واقع ایک لائٹ ہاؤس کی چھت سے دو پانی کے جہازوں کا زاویہ جھکاؤ بالترتیب 30° اور 45° ہے۔ اگر ایک جہاز بالکل دوسرے جہاز کے پیچھے ہے اور دونوں لائٹ ہاؤس کے ایک ہی طرف ہیں تو دونوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

14۔ 1.2 میٹر اونچی ایک لڑکی اڑتا ہوا غبارہ دیکھا جو ہوا کے ساتھ افقی طور پر ایک خط میں حرکت کر رہا ہے اور زمین سے 88.2 میٹر کی اونچائی پر ہے، کسی لمحہ اس غبارہ کا لڑکی کی آنکھ سے زاویہ ارتفاع 60° ہے اور کچھ وقت بعد زاویہ ارتفاع

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

گھٹ کر 30° کا ہو جاتا ہے (شکل 9.13 دیکھئے) وقفہ کے دوران غبارہ کے ذریعے طے کیا گیا فاصلہ معلوم کیجیے۔



شکل 9.13

15۔ ایک قومی شاہراہ سیدھا ایک ٹاور پر جا کر ختم ہوتی ہے ٹاور کی چوٹی پر کھڑا ہوا ایک شخص 30° کے زاویہ جھکاؤ پر ایک کار کا مشاہدہ کرتا ہے جو یکساں رفتار سے اس ٹاور کی طرف بڑھتی چلی آ رہی ہے، چھ سیکنڈ کے بعد کار کا زاویہ جھکاؤ 60° ہو جاتا ہے۔ اس نقطہ سے ٹاور کے پایہ تک پہنچنے میں کار کے ذریعے لیا گیا وقت معلوم کیجیے۔

9.2 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ (i) **خط بصیرت** وہ خط ہے جو مشاہد کی آنکھ سے اس کے ذریعے دیکھے جانے والی شے کے درمیان کھینچا جاتا ہے۔

(ii) زاویہ ارتفاع کسی شے کا جس کو دیکھنا ہے وہ زاویہ ہے جو خط بصیرت افقی خط کے ساتھ بناتا ہے جب یہ افقی سطح کے اوپر کی طرف ہوتا ہے یعنی اسے جب ہم کسی چیز کو دیکھنے کے لئے اپنے سر کو اوپر کی طرف اٹھاتے ہیں۔

(iii) کسی شے کا **زاویہ جھکاؤ**، جس کو دیکھنا ہے، وہ زاویہ ہے جو خط بصیرت افقی خط کے ساتھ بناتا ہے جب یہ افقی سطح کے نیچے کی طرف بڑھتا ہے یعنی اس حالت میں کسی شے کو دیکھنے کے لئے ہم اپنے سر کو جھکاتے ہیں۔

2۔ کسی شے کی اونچائی اور لمبائی یا وہ بہت دوری پر موجود اشیا کے درمیان فاصلوں کو ٹرگنومیٹرک نسبتوں کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

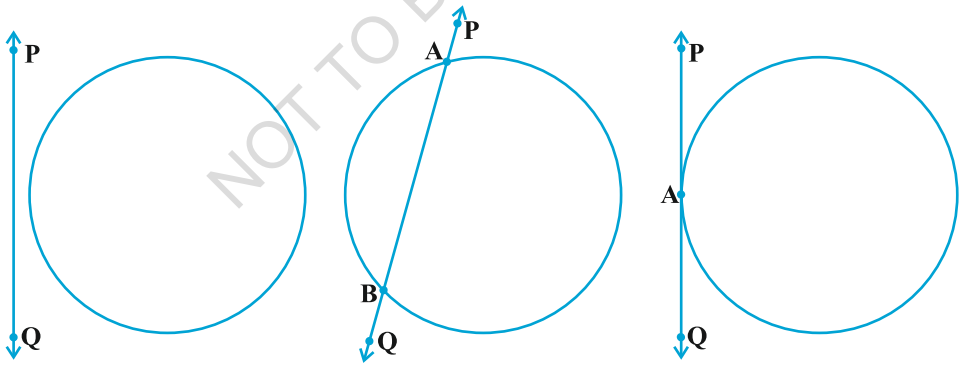
5013CH10

10 دائرے (CIRCLES)

10.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ دائرہ مستوی میں ایسے نقاط کا مجموعہ ہے جو ایک متعین نقطہ (مرکز) سے مستقل فاصلہ (نصف قطر) پر واقع ہوں۔ آپ نے بہت سے ارکان جو دائرہ سے متعلق ہیں۔ ان کے بارے میں بھی پڑھا ہے جیسے دائرہ کا وتر، قطع اور سیکٹر وغیرہ۔ آیئے ایسی مختلف صورت حال پر غور کرتے ہیں جو جب پیدا ہوتی ہیں جب مستوی میں ایک دائرہ اور ایک خط دیا ہوا ہو۔

اس لئے آیئے ایک دائرہ اور ایک خط PQ پر غور کرتے ہیں۔ شکل 10.1 جو ذیل میں دی گئی ہے، میں تین باتیں ممکن ہیں۔



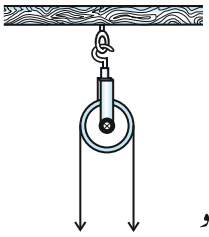
(i) (ii) (iii)

شکل 10.1

شکل 10.1 (i) میں خط PQ اور دائرہ میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہے۔ اس حالت میں PQ دائرہ کے تعلق سے **غیر قاطع خط** کہلاتا ہے۔ شکل 10.1 (ii) میں خط PQ اور دائرہ میں دو مشترک نقطہ A اور B ہیں۔ اس حالت میں ہم خط PQ کو **دائرہ کا قاطع**

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(Secant) کہتے ہیں۔ شکل 10.1 (iii) میں صرف ایک نقطہ A ہے جو خط اور دائرہ میں مشترک ہے۔ اس حالت میں **خط دائرہ کا مماس** (tangent) کہلاتا ہے۔



شکل 10.2

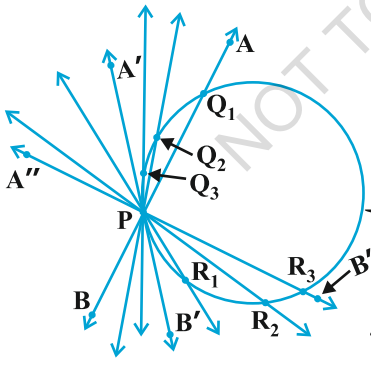
آپ نے کنویں کے اوپر لگی ہوئی ایک چرخی ضرور دیکھی ہوگی جس کا استعمال ہم کنویں سے پانی نکالنے میں کرتے ہیں شکل 10.2 کو دیکھئے۔ یہاں رسی جو چرخی کے دونوں طرف ہوتی ہے، کو ایک شعاع مانا جائے تو یہ دائرہ کے مماس کی طرح ہے اگر چرخی دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔

کیا دائرہ کے تعلق سے خط کا، اوپر دئے گئے مقاموں کے علاوہ بھی کوئی مقام ہوسکتا ہے؟ آپ دیکھ سکتے ہیں کے دائرہ مناسبت سے خط کوئی بھی مقام نہیں ہوسکتا ہے۔ اس باب میں ہم مماس کے وجود اور اس کی کچھ خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔

10.2 دائرہ کا مماس

پچھلے سیکشن میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ **دائرے کا مماس وہ خط ہے جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر قطع (یا چھوتا ہے) کرتا ہے۔** دائرہ کے کئی نقطہ پر مماس کو سمجھنے کے لئے آیئے کچھ سرگرمیاں کرتے ہیں۔

سرگرمی 1: ایک دائرہ کی شکل کا تار لیجئے اور اسکے ایک نقطہ P پر ایک سیدھا تار AB اس طرح جوڑیں کہ یہ مستوی میں نقطہ P کے اردگرد گردش کرے۔ اس پورے سسٹم کو آہستہ سے میز پر رکھیں اور تار AB کو P کے اردگرد گھمائیں۔ اس طرح سے ہمیں سیدھے تار AB کے مختلف مقام حاصل ہوں گے (شکل 10.3(i) دیکھیے)



(i)

شکل 10.2

مختلف حالتوں میں تار دائری تار کو P اور دوسرے نقاط Q_1 یا Q_2 یا Q_3 وغیرہ پر قطع کرتا ہے۔ ان میں سے ایک حالت آپ دیکھیں گے کہ یہ دائرہ کو صرف ایک جگہ قطع کرتا ہے یعنی P پر (AB کی A'B' مقام دیکھئے)۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ دائرہ کے ایک نقطہ P پر مماس کا وجود ہے اس کو مزید گھمانے پر آپ یہ مشاہدہ کریں گے کہ تمام مقاموں میں AB دائرہ کو P کے علاوہ اور دوسرے نقطوں پر بھی قطع کرتا ہے جیسے R_1 یا R_2 یا R_3 وغیرہ۔

اس لئے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ دائرہ کے ایک نقطہ پر ایک ہی مماس ہوتا ہے۔

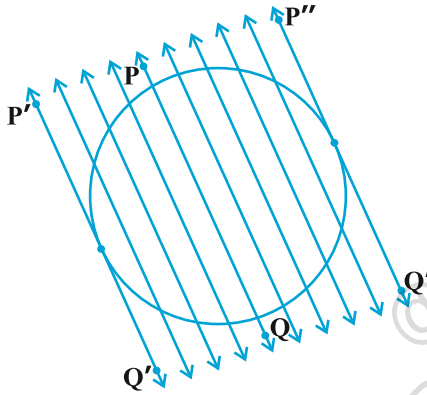
مندرجہ بالا سرگرمی کرتے وقت آپ نے یہ مشاہدہ کیا ہوگا جیسے جیسے AB، A'B' کی طرف حرکت کرتا ہے۔ خط AB اور دائرہ کا

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشترک نقطہ Q_1 آہستہ آہستہ مشترک نقطہ P کے قریب تر ہوتا جاتا ہے اور آخر میں یہ P پر منطبق ہو جاتا ہے۔ آخر کار A" B" کا مقام A' B' میں نقطہ P پر منطبق ہوتا ہے۔ مزید نوٹ کیجیے کہ کیا ہوگا اگر AB کو P کے گرد دائیں طرف گھمایا جائے؟ مشترک نقطہ R_3 آہستہ آہستہ P کے قریب ہوتا رہتا ہے اور آخر میں P پر منطبق ہو جاتا ہے، اس لئے ہم کیا دیکھتے ہیں۔

دائرہ کا مماس دائرہ کے قاطع کی ایک مخصوص شکل ہے جب اس کے نظیری وتر کے دوسرے کے نقطے منطبق ہو جاتے ہیں۔

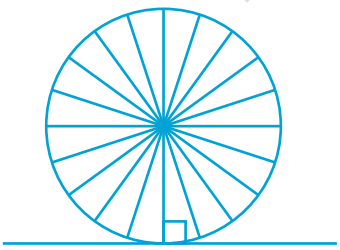
سرگرمی 2: ایک پیپر پر ایک دائرہ اور اس کا ایک قاطع PQ بنائیے اس کے دونوں طرف اس کے متوازی خطوط بنائیے۔ آپ دیکھیں گے کہ کچھ اقدام کے بعد ان خطوط سے کاٹے گئے وتروں کی لمبائی آہستہ آہستہ کم ہوتی جاتی ہے یعنی خط کے دائرہ ہر دو نقطہ تقاطع، نزدیک اور نزدیک آتے جا رہے ہیں (شکل 10.3(ii) دیکھئے) ایک حالت میں یہ قاطع کے ایک طرف صفر ہو جاتی ہے اور دوسری حالت میں قاطع کے دوسری طرف یہ صفر ہو جاتی ہے شکل 10.3 (ii)) میں قاطع P'Q' اور P"Q" حالتوں کو دیکھئے شکل 10.3 (ii) یہ دائرہ کے مماس ہیں جو قاطع PQ کے متوازی ہیں۔ اس سے آپ کو یہ بھی پتہ چلتا ہے کہ ایک دئے ہوئے قاطع کے دو سے زیادہ متوازی مماس نہیں ہو سکتے۔



(ii)
شکل 10.3

اس مشغلہ سے بھی یہی پتہ چلتا ہے کے مماس وہ قاطع ہے جب اس کے نظیری وتر کے دوسرے کے نقطے منطبق ہو جائیں جیسا کہ پہلی سرگرمی میں ہوا تھا۔

دائرہ اور مماس کا مشترک نقطہ **نقطۂ مماس** کہلاتا ہے (شکل 10.1(iii) میں نقطہ A) اور مماس دائرہ کو اس مشترک نقطہ پر **چھوتا** ہے۔


شکل 10.4

اب اپنے اردگرد نواح میں دیکھئے۔ کیا آپ نے ایک سائیکل اور بیل گاڑی کے پہیہ کو گھومتے ہوئے دیکھا ہے اب آپ اس پہیہ کو دیکھئے جب یہ زمین پر حرکت کرتا ہے۔ کیا آپ کو کہیں کوئی مماس نظر آتا ہے؟ (شکل 10.4 دیکھئے) درحقیقت پہیہ ایک خط کے ہمراہ حرکت کرتا ہے جو کے اس دائرہ کا مماس جس کو پہیہ ظاہر کرتا ہے۔ یہ بھی نوٹ کیجئے کے تمام حالتوں میں نصف قطر گراؤنڈ کے نقطہ مماس (tangent) پر عمود ہوتا ہے۔ اب ہم مماس

*لفظ tangent ایک لاطینی لفظ tangere سے اخذ کیا گیا ہے جس کا مطلب ہوتا ہے چھونا اور جس کا تعارف ایک ڈینش ریاضی داں Thomas Fineke نے 1583 میں دیا۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

کی اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔

مسئلہ 10.1: دائرہ کا نصف قطر اس کے مماس کے نقطہ مماس پر عمود ہوتا ہے ۔

ثبوت: ہمیں O مرکز کا ایک دائرہ اور اس کے نقطہ P پر ایک مماس XY دیا ہوا ہے۔ ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ OP، XY پر عمود ہے۔

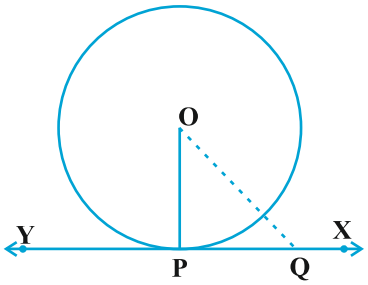
XY پر P کے علاوہ کوئی نقطہ Q لیجئے اور OQ کو ملا دیجئے (شکل 10.5 دیکھیے)

نقطہ Q دائرہ کے باہر میں ہونا چاہیے (کیوں؟) نوٹ کیجئے کہ

اگر Q دائرہ کے اندر ہوگا تو XY ایک قاطع بن جائے گا دائرہ کا مماس نہیں رہے گا۔ اس لئے OR، نصف قطر OP سے بڑا ہے،

$$OQ > OP$$

کیونکہ یہ XY پر موجود ہر ایک نقطہ سوائے P ، کے لئے درست ہے ۔ اس لئے OP، O سے XY پر کھینچے جانے والے تمام قاطع میں سب سے چھوٹا ہے ۔ اس لئے OP، XY پر عمود ہے



شکل 10.5

@KSEBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ریمارک:

1۔ مذکورہ بالا مسئلہ مسئلے آپ یہ نتیجہ بھی اخذ کر سکتے ہیں کہ دائرہ کے کسی نقطہ پر صرف اور صرف ایک ہی خطِ مماس ہوتا ہے۔

2۔ نقطہ مماس سے گذرتا ہوا خط جس میں نصف قطر شامل ہوتا ہے، کبھی کبھی دائرہ کا اس نقطہ پر 'عماد' (Normal) بھی کہلاتا ہے۔

مشق 10.1

1۔ ایک دائرہ کے کتنے مماس ہوتے ہیں؟

2۔ خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) دائرہ کا مماس دائرہ کو _____ نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

(ii) ایک خط جو دائرہ کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے _____ کہلاتا ہے۔

(iii) ایک دائرہ میں زیادہ سے زیادہ _____ متوازی مماس ہو سکتے ہیں۔

(iv) دائرہ کے مماس اور دائرہ کا مشترک نقطہ ——— کہلاتا ہے۔

3۔ 5cm نصف قطر والے دائرہ کے نقطہ P پر مماس PQ، مرکز O سے گذرتے ہوئے ایک خط سے نقطہ Q پر ملتا ہے جبکہ PQ، OQ =12cm کی لمبائی ہے۔

$\sqrt{119}$ cm (D) 8.5cm (C) 13cm (B) 12cm (A)

4۔ ایک دائرہ اور دو خطوط بنایئے جو ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہوں جن میں ایک مماس اور دوسرا دائرہ کا قاطع ہو۔

10.3 دائرہ پر ایک نقطہ سے مماسوں کی تعداد

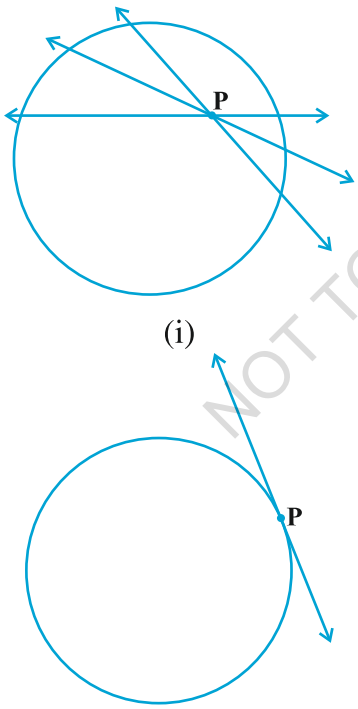
دائرہ کے ایک نقطہ سے کھینچے جانے والے مماسوں کی تعداد کے بارے میں جاننے کے لئے آیئے مندرجہ ذیل سرگرمی کرتے ہیں۔

@KTLS
NOT TO BE REPUBLISHED

سرگرمی 3: پیپر پر ایک دائرہ بنایئے۔ اس کے اندرون میں ایک نقطہ P لیجئے۔ کیا آپ اس نقطہ سے دائرہ کا مماس کھینچ سکتے ہیں؟ آپ دیکھیں گے کہ اس نقطے سے گذرنے والا ہر خط دائرہ کو دو نقطوں پر قطع کرے گا۔ اس لئے یہ ممکن نہیں کہ دائرہ کے اندرون میں کسی نقطہ سے دائرہ پر مماس کھینچا جا سکے۔ [شکل 10.6(i)]

آگے اب دائرہ پر ایک نقطہ P لیجئے۔ آپ پہلے ہی مشاہدہ کر چکے ہیں کہ ایسے نقطہ سے صرف اور صرف ایک مماس دائرہ پر کھینچا جا سکتا ہے [شکل 10.6(ii) دیکھیے]

اور آخر میں دائرہ کے باہر ایک نقطہ P لیجئے اور یہاں سے دائرہ پر مماس بنایئے آپ مشاہدہ کریں گے کہ دائرہ پر صرف دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں [شکل 10.6 (iii) دیکھیے]



شکل 10.6

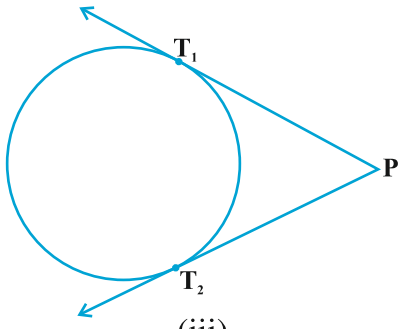
ان حقیقتوں کا خلاصہ ہم ذیل میں کرتے ہیں۔

حالت 1: دائرہ کے اندر موجود کسی نقطہ سے دائرہ پر کوئی مماس نہیں

کھینچا جاسکتا ہے۔

حالت 2: دائرہ پر موجود کسی نقطہ سے ایک اور صرف ایک مماس کھینچا جاسکتا ہے۔

حالت 3: دائرہ کے باہر کسی نقطہ سے دائرہ پر 2 اور صرف 2 مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔



(iii)

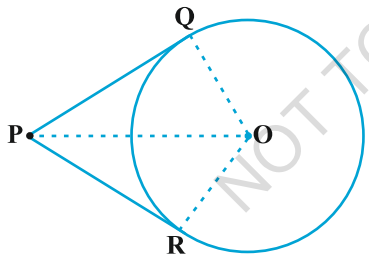
شکل 10.6

شکل (iii) 10.6 میں T_1 اور T_2 مماس PT_1 اور PT_2 کے بالترتیب نقطہ مماس ہیں۔

دائرہ کے کسی باہری نقطہ P سے مماس کی لمبائی، نقطہ P سے نقطہ مماس کے فاصلہ کو **مماس کی لمبائی** کہتے ہیں۔

نوٹ کیجئے کہ شکل 10.6(iii) PT_1 اور PT_2 دائرہ پر نقطہ P سے کھینچے گئے مماسوں کی لمبائی ہے۔ لمبائیوں PT_1 اور PT_2 کی ایک مشترک خصوصیت ہے۔ کیا آپ اس کو معلوم کرسکتے ہیں؟ PT_1 اور PT_2 کی پیائش کیجئے، کیا یہ مساوی ہیں؟ درحقیقت یہ ہمیشہ برابر ہوتی ہیں۔ آیئے اس حقیقت کا ثبوت ہم مندرجہ ذیل مسئلے میں دیتے ہیں۔

مسئلہ 10.2: دائرہ کے کسی باہری نقطہ سے کھینچے جانے والے مماسوں کی لمبائیاں برابر ہوتی ہیں۔



شکل 10.7

ثبوت: ہمیں مرکز O کا ایک دائرہ دیا ہوا ہے۔ نقطہ P دائرہ کے باہر ہے اور P سے دائرہ پر دو مماس PQ اور PR ہیں۔ (شکل 10.7 دیکھیے) ہمیں ثابت کرنا ہے کہ PQ = PR

اس کے لئے ہم OP، OQ اور OR کو ملاتے ہیں تب ∠OQP اور ∠ORP قائم زاویے ہیں کیونکہ یہ نصف قطر اور مماسوں کے درمیان کے زاویہ ہیں، اور مسئلہ 10.1 کی رو سے یہ قائمہ زاویہ ہیں

اب قائم مثلثوں OQP اور ORP میں

OQ = OR (ایک ہی دائرہ کے نصف قطر)

OP = OP (مشترک ضلع)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (RHS)

اس سے حاصل ہوتا ہے $PQ = PR$ (CPCT)

ریمارک:

1۔اس مسئلہ کو ہم فیثاغورث کے مسئلہ کا استعمال کر کے بھی ثابت کر سکتے ہیں، جو مندرجہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

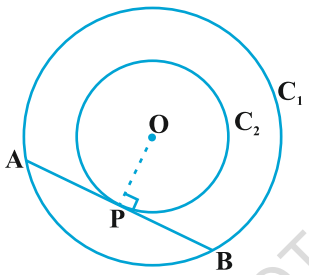
$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ ($OQ = OR$ کیونکہ)

جس سے ہمیں ملتا ہے $PQ = PR$

2۔یہ بھی نوٹ کیجئے کہ $\angle OPQ = \angle OPR$ اس لئے OP، $\angle QPR$ کا زاویائی ناصف ہے یعنی مرکز دو مماسوں کے درمیان بنے زاویہ کے ناصف پر واقع ہے۔

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: دو ہم مرکز دائروں میں ثابت کیجیے کہ بڑے دائرہ کا وتر جو چھوٹے دائرہ کو ایک نقطہ پر چھوتا ہے اس نقطہ پر اس کی تنصیف ہوتی ہے۔



شکل 10.8

حل: ہمیں دو ہم مرکزی زاویہ دئے ہوئے ہیں جو C_1 اور C_2 ہیں اور جن کا مرکز O ہے بڑے دائرہ C_1 کا وتر AB جو چھوٹے دائرہ C_2 کو نقطہ P پر چھوتا ہے (شکل 10.8 دیکھیے) ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $AP = BP$۔

آیئے OP کو ملائیں تب AB، C_2 کے نقطہ P پر مماس ہے اور OP اس کا نصف قطر اس لئے مسئلہ 10.1 کی رو سے

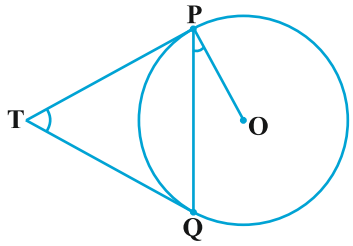
$OP \perp AB$

اب AB دائرہ C_1 کا وتر ہے اور $OP \perp AB$، اس لئے OP، وتر AB کا ناصف ہے، کیونکہ دائرہ کے مرکز سے وتر پر ڈالا جانے والا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

یعنی $AP = BP$

مثال 2: ایک باہری نقطہ T سے مرکز O والے ایک دائرہ پر دو مماس TP اور TQ کھینچے گئے ثابت کیجیے کہ $\angle PTQ = 2\angle OPQ$۔

@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 10.9

حل: ہمیں ایک دائرہ دیا ہوا ہے جس کا مرکز O ہے ایک باہری نقطہ T اور دائرہ پر اس نقطے سے کھینچے گئے دو مماس TP اور TQ جہاں P اور Q نقطہ مماس ہیں (شکل 10.9 دیکھیے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\angle PTQ = 2\angle OPQ$$

مان لیجئے $\angle PTQ = \theta$

اب مسئلہ 10.2 کے مطابق $TP = TQ$ اس لئے TPQ ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

اس لئے $$\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$$

مزید مسئلہ 10.1 کی رو سے $\angle OPT = 90°$

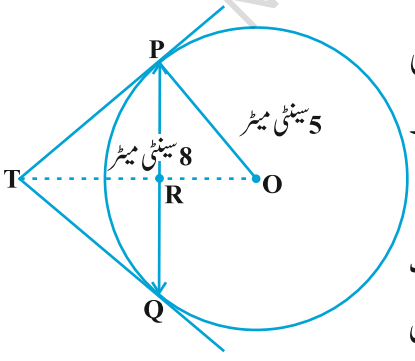
اس لئے $$\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

لہٰذا، $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 3: 5cm نصف قطر والے ایک دائرہ کے ایک وتر PQ کی لمبائی 8 cm ہے P اور Q پر بنے مماس نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔ (شکل 10.10 دیکھئے) TP کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 10.10

حل: OT کو ملایئے۔ مان لیجیے یہ PQ کو نقطہ R پر قطع کرتا ہے تب ΔTPQ مساوی الساقین ہے اور TO، زاویہ $\angle PTQ$ کا ناصف ہے۔ اس لئے $OT \perp PQ$ اور اس لئے OT، PQ کی تنصیف کرے گا جس سے

PR = RQ = 4cm حاصل ہوگا۔

مزید $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm $= 3$cm

اب $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$

اس لئے $\angle RPO = \angle PTR$

اس لئے قائم مثلث TRP قائم مثلث PRO کے مشابہ ہیں، (مشابہت کی AA شرط کے مطابق۔)

اس سے ہمیں ملتا ہے۔ $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}, \text{i.e.,} \frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ یا $TP = \frac{20}{3}$ cm

نوٹ: TP کو ہم فیثا غورث کے مسئلہ کو استعمال کر کے بھی معلوم کر سکتے ہیں، جو ذیل میں۔

مان لیجئے $TP = x$ اور $TR = y$ تب

(1) (قائم Δ PRT لینے پر) $x^2 = y^2 + 16$

(2) (قائم مثلث OPT میں) $x^2 + 5^2 = (y+3)^2$

(1) کو (2) میں سے گھٹانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$25 = 6y - 7$ یا $y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

اس لئے $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16+9) = \frac{16 \times 25}{9}$

یا $x = \frac{20}{3}$ cm

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 10.2

سوال نمبر 1 سے 3 میں صحیح جواب انتخاب کیجئے اور جواز پیش کیجیے۔

1۔ ایک نقطہ Q سے، دائرہ کے مماس کی لمبائی 24 سینٹی میٹر ہے۔ اور مرکز سے Q کا فاصلہ 25 سینٹی میٹر ہے دائرہ کا نصف قطر ہے۔

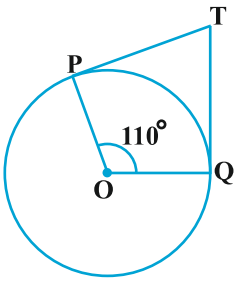
(A) 7 سینٹی میٹر (B) 12 سینٹی میٹر

(C) 15 سینٹی میٹر (D) 24.5 سینٹی میٹر

2۔ شکل 10.11 میں اگر TP اور TQ دائرہ جس کا مرکز O ہے، کے جزومماس ہیں، جب کہ $\angle POQ = 110°$ تب $\angle PTQ$ برابر ہے۔

(A) 60° (B) 70°

(C) 80° (D) 90°



شکل 10.11

3۔ اگر ایک نقطہ P سے دائرہ جس کا مرکز O ہے، پر دو مماس PA اور PB اس طرح ہیں کہ ایک دوسرے کے ساتھ $80°$ کا زاویہ بناتے ہیں تب $\angle POA$ برابر ہے

(A) 50° (B) 60°

(C) 70° (D) 80°

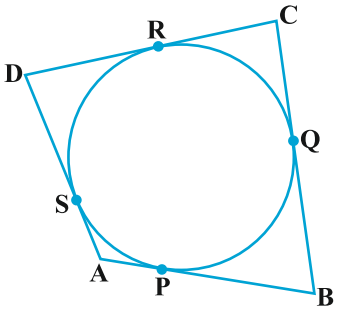
4۔ ثابت کیجئے کہ دائرہ کے قطر کے سرے کے نقطوں پر بنے دو مماس متوازی ہیں۔

5۔ ثابت کیجئے کہ دائرہ کے مماس کے نقطہ مماس پر ڈالا جانے والا عمود مرکز سے گذرتا ہے۔

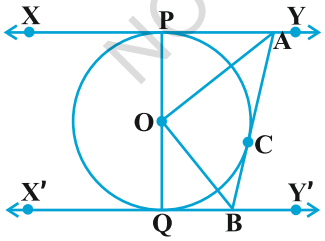
6۔ دائرہ کے مرکز سے 5 سینٹی میٹر فاصلہ پر موجود نقطہ A سے مماس کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہے۔ دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

7۔ دو ہم مرکزی دائرہ ہیں جن کے نصف قطر 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہیں بڑے دائرہ کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے جو چھوٹے دائرہ کو چھوتا ہے۔

8۔ ایک چار ضلعی ABCD اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کا ہر ضلع اس کے اندر موجود دائرہ کو چھو کر گذرتا ہے (شکل 10.12 دیکھئے) ثابت کیجئے کہ $AB+CD=AD+BC$



شکل 10.12



شکل 10.13

9۔ شکل 10.13 میں XY اور X'Y'، مرکز O والے ایک دائرہ کے دو متوازی مماس ہیں ایک دوسرا مماس AB جس کا نقطہ

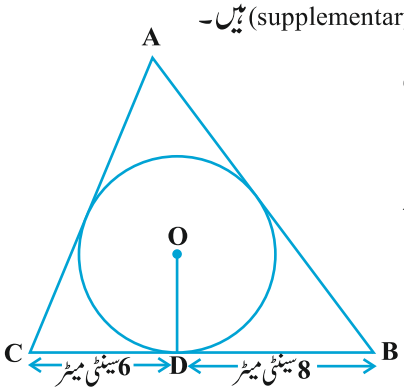
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

مماس C ہے XY کو A پر اور X'Y' کو B پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\angle AOB = 90°$

10۔ ثابت کیجیے کہ دائرہ کے باہری نقطہ سے اس پر کھینچے جانے والے مماسوں کے درمیان بنا زاویہ اور ان کے نقطہ مماس کو مرکز سے ملانے والے قطع خط کے ذریعے مرکز پر بنے زاویے تمتی (supplementary) ہیں۔

11۔ ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع جس کے اندر ایک دائرہ اس طرح ہے کہ اس کا ہر ضلع اس کو چھو کر گذرتا ہے، معین ہے۔

12۔ 4 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک داخلی دائرہ جو ایک ΔABC کے اندر اس طرح ہے کہ قطعات خط BD اور DC جو نقطہ مماس D کے ذریعے BC پر اس طرح بنے ہیں کہ ان کی لمبائیاں بالترتیب 8 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہیں (شکل 10.14 دیکھیے) اضلاع AB اور AC معلوم کیجیے۔



شکل 10.14

13۔ ثابت کیجیے کہ ایک چار ضلعی کے مقابل اضلاع، اس کے اندر موجود دائرہ کے مرکز پر تمتی زاویہ بناتے ہیں۔

10.4 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ دائرہ کے مماس کے معنی اور مفہوم

2۔ دائرہ کا نصف قطر دائرہ کے مماس کے نقطہ مماس پر عمود ہوتا ہے۔

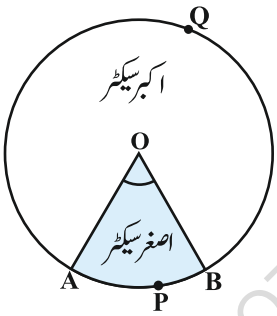
3۔ دائرہ کے باہری نقطے سے اس پر کھینچے گئے مماسوں کی لمبائیاں برابر ہوتی ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11 دائروں سے متعلق رقبہ (AREAS RELATED TO CIRCLES)

11.1 دائرہ کا سیکٹر (Sector of a Circle) اور قطعہ دائرہ (Segment of a Circle)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

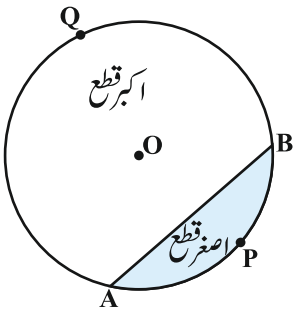


شکل 11.1

اپنی پچھلی کلاسوں میں آپ دائرہ کے سیکٹر اور قطع سے پہلے ہی واقف ہو چکے ہیں یاد کیجئے کہ دائری خطہ کا وہ حصہ جو اس کے دو نصف قطر اور نظیری قوس سے گھرا ہوا ہو دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے اور دائرہ خطہ کا وہ حصہ جو وتر اور اس کے نظیری قوس سے گھرا ہوا ہو دائرہ کا **قطع** کہلاتا ہے۔ اس طرح سے شکل 11.1 میں شیڈ کیا گیا خطہ OAPB، مرکز 'O' والے دائرہ کا سیکٹر ہے۔ $\angle AOB$ **سیکٹر کا زاویہ** کہلاتا ہے۔ نوٹ کیجئے کہ اس شکل میں غیر سایہ دار خطہ OAQB بھی دائرہ کا سیکٹر ہے واضح وجوہات کی وجہ سے OAPB چھوٹا سیکٹر اور OAQB بڑا سیکٹر کہلاتا ہے۔ آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ بڑا سیکٹر کا زاویہ $360° - \angle AOB$ ہے۔

اب شکل 11.2 دیکھتے ہیں جس میں AB، مرکز 'O' والے دائرہ کا وتر ہے۔ اس لیے شیڈ کیا گیا حصہ APB قطعۂ دائرہ

(Segment of a Circle) ہے۔ آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں کہ غیر سایہ دار حصہ AQB دائرہ APB اصغر قطع کا دوسرا قطع ہے۔ واضح وجوہات کی بنا پر AQB اکبر قطع کہلاتا ہے۔

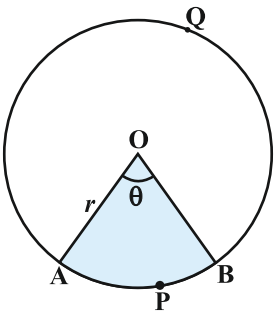


شکل 11.2

ریمارک: جب ہم سیکٹر اور قطع لکھتے ہیں اس سے ہماری مراد بالترتیب اصغر سیکٹر اور اصغر قطع ہوتی ہے جب تک کہ اس کے برعکس نہ بیان کیا گیا ہو۔

اب اس معلومات کے ساتھ آیئے ان کے رقبہ معلوم کرنے کے لئے کچھ رشتہ (یا فارمولہ) معلوم کرتے ہیں ۔

مان لیجئے OAPB اس دائرہ کا سیکٹر ہے جس کا مرکز 'O' اور نصف قطر r ہے۔ (شکل 11.3 دیکھیے) مان لیجیے ∠AOB کی ڈگری پیمائش θ ہے۔



شکل 11.3

آپ جانتے ہیں کہ دائرہ کا رقبہ (درحقیقت دائری خطہ یا طبق) πr^2 ہوتا ہے

ایک طریقہ سے ہم اس دائری خطہ کو ایک سیکٹر مان سکتے ہیں جس کا مرکز O پر زاویہ 360° (یعنی ڈگری پیمائش 360° ہے) اب اکائی کے قاعدہ کا استعمال کرتے ہوئے ہم سیکٹر OAPB کے رقبہ تک ذیل میں دیے گئے طریقہ سے پہنچتے ہیں۔

جب زاویہ کے مرکز پر ڈگری پیمائش 360° ہے تو اس سیکٹر کا رقبہ $= \pi r^2$

جب زاویہ کی مرکز پر ڈگری پیمائش 1 ہو تو سیکٹر کا رقبہ ہے ۔ $= \frac{\pi r^2}{360^\circ}$

اس لئے زاویہ کے مرکز پر ڈگری پیمائش θ ہو تو سیکٹر کا رقبہ $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{0}{360} \times \pi r^2$

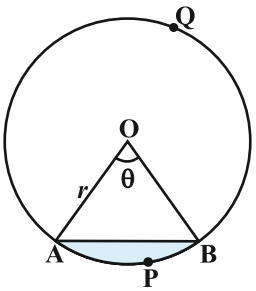
اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل رشتہ (فارمولہ) حاصل ہوتا ہے۔ جس سے ہم سیکٹر کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

زاویہ کے سیکٹر کا رقبہ $\theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

جہاں r دائرہ کا نصف قطر اور θ، ڈگری میں سیکٹر کا زاویہ

اب قدرتی طور پر یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم اس سیکٹر کے نظیری

NOT TO BE REPUBLISHED @KBS



شکل 11.4

قوس APB کی لمبائی معلوم کر سکتے ہیں؟ ہاں، دائرہ کی مکمل لمبائی ($360°$ کے زاویہ کی) کو $2\pi r$ لے کر دوبارہ r اکائی کے قاعدہ کا استعمال کر کے ہمیں مطلوبہ قوس APB کی لمبائی حاصل کر سکتے ہیں جو ہے

$$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

اس لئے **زاویہ θ کے سیکٹر کے قوس کی لمبائی** $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

آیئے اب مرکز 'O' اور نصف قطر r والے دائرہ کے قطع APB کے رقبہ پر غور کرتے ہیں۔ شکل 11.4 پر غور کیجیے۔ آپ دیکھتے ہیں کہ

ΔOAB کا رقبہ – سیکٹر OAPB کا رقبہ = قطع APB کا رقبہ

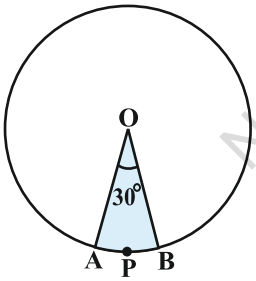
ΔAOB کا رقبہ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

نوٹ: شکل 11.3 اور 11.4 میں بالترتیب آپ شاید معلوم کر سکتے ہیں کہ

بڑا سیکٹر OAQB کا رقبہ = چھوٹا سیکٹر OAPB کا رقبہ – πr^2

اور بڑا قطع AQB کا رقبہ = چھوٹا قطع APB کا رقبہ – πr^2

آیئے ان تصورات کو سمجھنے کے لئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔



شکل 11.5

مثال 1: دائرہ کا سیکٹر کا رقبہ معلوم کیجیے جس کا نصف قطر 4 سینٹی میٹر اور زاویہ $30°$ ہے۔ مزید اس کے نظیری اکبر سیکٹر کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$ لیجئے)

حل: دیا ہوا سیکٹر OAPB ہے (شکل 11.5 دیکھیے)

$$\text{سیکٹر کا رقبہ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2 \text{ (تقریباً)}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اصغر سیکٹر OAPB کا رقبہ $= \pi r^2$ – دیئے ہوئے بڑے سیکٹر کا رقبہ

$= (3.14 \times 16 - 4.19)\text{cm}^2$

$=$ مربع سینٹی میٹر 46.05

$=$ (تقریباً) مربع سینٹی میٹر 46.1

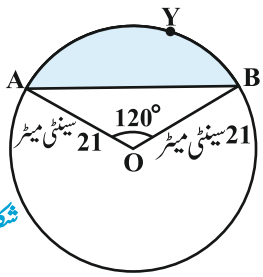
متبادل طور پر بڑے سیکٹر کا رقبہ $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

مربع سینٹی میٹر $= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16$ –

مربع سینٹی میٹر $= 46.05$ مربع سینٹی میٹر $\frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$ –

$= 46.1\text{cm}^2$ (تقریباً)

مثال 2: شکل 11.6 میں دکھائے گئے قطع AYB کا رقبہ معلوم کیجیے اگر دائرہ کا نصف قطر 21 سینٹی میٹر اور $\angle AOB = 120°$ (π – $\frac{22}{7}$ لیجیے)



شکل 11.6

حل: ΔOAB کا رقبہ – سیکٹر OAYB کا رقبہ = قطع AYB کا رقبہ ← (1)

اب مربع سینٹی میٹر 462 = مربع سینٹی میٹر $\frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ – سیکٹر OAYB کا رقبہ ← (2)

ΔOAB کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے $OM \perp AB$ کیجئے جیسا کہ شکل 11.7 میں دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ $OA = OB$،

اس لئے $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ متماثلت سے RHS

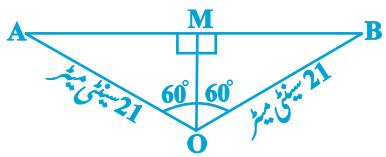
اس لئے A, M, B کا وسطی نقطہ ہے اور $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

مان لیجیے $OM = x$ cm

اس لئے ΔOMA سے $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$

یا $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

یا $x = \frac{21}{2}$



شکل 11.7

@KPBS
NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے سینٹی میٹر $OM = \frac{21}{2}$

مزید $\frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اس لئے سینٹی میٹر $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$

اس لئے سینٹی میٹر $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}\ cm = 21\sqrt{3}$

اس لئے مربع سینٹی میٹر ΔOAB کا رقبہ $\frac{1}{2} AB \times OM$ $\frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}\ cm^2$ ⟵ (3)

[(1)، (2) اور (3) سے] اس لئے مربع سینٹی میٹر قطع AYB کا رقبہ $-\left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$

مربع سینٹی میٹر $= \frac{21}{4}(88 \quad 21\sqrt{3})$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 11.1

(جب تک کچھ اور نہ دیا جائے، π کے لئے $\frac{22}{7}$ استعمال کیجیے۔)

1۔ دائرے کے سیکٹر کا رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کا نصف قطر 6 سینٹی میٹر ہو اور سیکٹر کا زاویہ $60°$ ہو۔

2۔ دائرہ کے ربع کا رقبہ معلوم کیجیے جس کا محیط 22 سینٹی میٹر ہے۔

3۔ ایک گھڑی کی منٹ کی سوئی کی لمبائی 14 سینٹی میٹر ہے۔ 5 منٹ میں اس سوئی کے ذریعہ طے کیا گیا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ 10cm نصف قطر کے ایک دائرہ کا وتر مرکز پر یہ قائم زاویہ بناتا ہے۔ اس کے نظیری ان کے (i) چھوٹا قطع (ii) بڑا سیکٹر کا رقبہ معلوم کیجیے۔

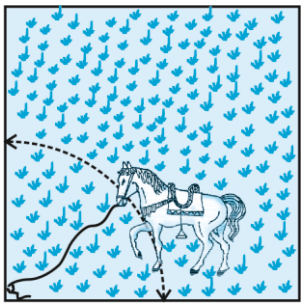
5۔ 21 سینٹی میٹر نصف قطر والے دائرہ میں ایک قوس مرکز پر $60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔ معلوم کیجیے۔

(i) قوس کی لمبائی (ii) قوس کے ذریعے بنے سیکٹر کا رقبہ (iii) نظیری وتر سے بنے قطع کا رقبہ۔

6۔ 15 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ مرکز پر $60°$ کا ایک زاویہ بناتا ہے، دائرہ کے نظیری چھوٹے اور بڑے قطع کا رقبہ معلوم کیجیے۔
($\pi = 3.14$ استعمال کیجیے اور $\sqrt{3} = 1.73$)

7۔ 12 cm نصف قطر کا ایک دائرہ کا ایک وتر مرکز پر $120°$ کا زاویہ بناتا ہے دائرہ کے نظیری قطع کا رقبہ معلوم کیجیے۔
($\pi = 3.14$ اور $\sqrt{3} = 1.73$ لیجئے)

8۔ گھاس کے ایک مربع نما میدان کے ایک کونے میں ایک گھوڑا 5m لمبی رسّی سے بندھا ہوا ہے (شکل 11.8 دیکھئے) اگر (i) میدان کا ضلع 15 سینٹی میٹر ہو تو میدان کا وہ رقبہ معلوم کیجیے جہاں گھوڑا گھاس چر سکتا ہے۔
(ii) اگر اس کی رسی 5m کے بجائے 10m مسر کر دی جاتی تو کتنے زیادہ رقبہ پر گھاس چر سکے گا۔



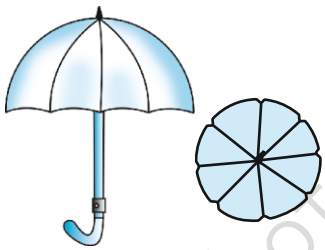
شکل 11.8

9۔ ایک بروچ 35 ملی میٹر قطر والے دائرے کی شکل کے ایک چاندی کے تار سے بنایا گیا ہے۔ اس تار کا استعمال 5 قطروں کے بنانے میں بھی ہوا ہے جو دائرہ کو 10 مساوی سیکٹروں میں تقسیم کرتے ہیں جیسا کہ شکل 11.9 میں دکھایا گیا ہے۔ معلوم کیجیے:
(i) چاندی کے تار کی کل کتنی لمبائی درکار ہے اور
(ii) بروچ کے ہر ایک سیکٹر کا رقبہ۔



شکل 11.9

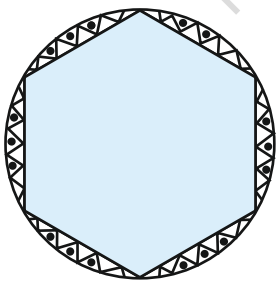
10۔ ایک چھتری میں مساوی فاصلوں پر 8 تیلیاں لگی ہوئی ہیں۔ (شکل 11.10 دیکھئے) یہ فرض کرتے ہوئے کہ چھتری 45 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک ہموار دائرہ ہو تو دو لگا تار تیلیوں کے درمیان کا رقبہ معلوم کیجیے۔



شکل 11.10

11۔ ایک کار کے دو وائپر ہیں جو ایک دوسرے کو کبھی نہیں چھوتے۔ ہر وائپر کا بلیڈ 25 سینٹی میٹر لمبا ہے اور وہ 115° کے زاویہ پر صفائی کرتا ہے۔ بلیڈ کے ہر بار گھومنے میں کتنا رقبہ صاف ہوتا ہے۔

12۔ پانی کے نیچے ایک چٹان کی موجودگی سے جہاز کو متنبہ کرنے کے لئے ایک روشنی کے مینار نے 80° کے سیکٹر زاویہ پر 16.5 کلومیٹر کے فاصلہ تک لال رنگ کی روشنی پھیلائی۔ سمندر کا وہ رقبہ معلوم کیجئے جہاں پر جانے کے لئے پانی کے جہاز کو تنبیہ کی گئی تھی۔ ($\pi=3.14$ استعمال کیجیے)



شکل 11.11

13۔ ایک گول میز پوش میں 6 مساوی ڈیزائن بنے ہوئے ہیں جب کہ شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر میز پوش کا نصف قطر

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

28cm ہو تو مربع سینٹی میٹر 0.35 ₹ کی شرح سے اس پر ڈیزائن بنانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

($\sqrt{3}$ =1.7 استعمال کیجیے)۔

14۔ مندرجہ ذیل میں صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

R نصف قطر والے ایک دائرہ کے سیکٹر کا زاویہ P (ڈگری میں) ہے سیکٹر کا رقبہ

(A) $\frac{P}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{P}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{P}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

11.2 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ ایک دائرہ کے سیکٹر کے قوس کی لمبائی جس کا نصف قطر r اور زاویہ کی ڈگری پیمائش θ ہے

$$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

2۔ ایک دائرہ کے سیکٹر کا رقبہ جس کا نصف قطر r اور ڈگری پیمائش θ ہوا ہے $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$۔

3۔ دائرہ کے قطع کا رقبہ = نظیری مثلث کا رقبہ – نظیری سیکٹر کا رقبہ

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

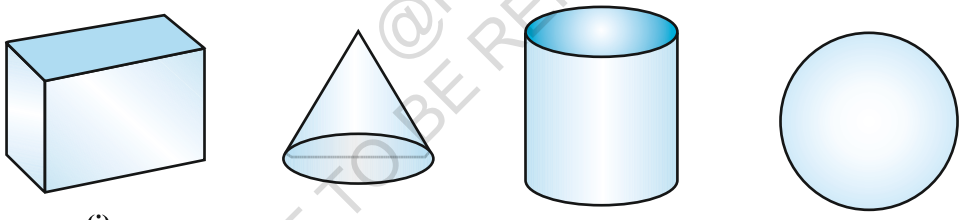
5013CH13

12 سطحی رقبہ اور حجم (SURFACE AREAS AND VOLUMES)

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

12.1 تعارف

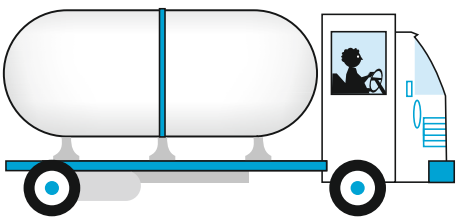
نویں جماعت میں آپ کچھ ٹھوس جیسے، مکعب نما، مخروط، استوانہ اور کرّہ (شکل 12.1 دیکھئے) سے واقف ہو چکے ہیں آپ یہ بھی سیکھ چکے ہیں کہ ان کے رقبہ اور حجم کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔



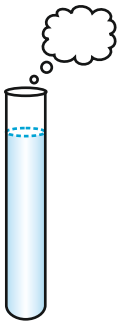
شکل 12.1

روزمرّہ کی زندگی میں ہمارا واسطہ بہت سی ایسی ٹھوس اشیا سے پڑتا ہے جو دو یا دو سے زیادہ بنیادی ٹھوس اشیا سے مل کر بنے ہوئے ہیں جیسے اوپر دکھائے گئے ہیں۔

آپ نے ایک ٹرک ضرور دیکھا ہوگا جس کے پیچھے مضروف جڑا ہوا ہوتا ہے۔ (شکل 12.2 دیکھئے) جو اس میں تیل یا پانی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتا ہے۔ کیا اس کی شکل مذکورہ بالا چار بنیادی ٹھوس اشیا کی شکل میں سے ایک ہے؟ اب اندازہ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جس کے سرے نصف کرّوی ہیں۔



شکل 12.2



شکل 12.3

12.3

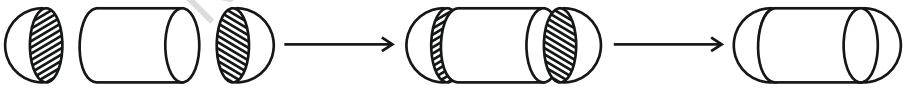
کبھی آپ نے ایسی شے دیکھی ہوگی جیسے شکل 12.3 میں دکھائی گئی ہے۔ کیا آپ اس کا نام بتا سکتے ہیں؟ ایک ٹیسٹ ٹیوب ہے! آپ اس کو اپنی سائنس کی لیبارٹری میں استعمال کرتے ہیں۔ یہ ٹیوب بھی استوانہ اور نصف کرہ کے اتحاد کا نتیجہ ہے۔ اسی طرح سے سفر کرتے ہوئے آپ نے بہت سی ایسی عمارتیں اور تاریخی یادگاریں دیکھی ہوں گی جو مذکورہ بالا بنیادی ٹھوس شکلوں سے مل کر بنی ہوتی ہیں۔

اگر کسی وجہ سے آپ کو ان کا حجم یا سطحی رقبہ معلوم کرنا ہو یا گنجائش معلوم کرنی ہو تو یہ آپ کیسے کریں گے؟ ہم ان کی درجہ بندی پہلے سے پڑھے گئے کسی ٹھوس کے ساتھ نہیں کر سکتے۔

اس باب میں آپ پڑھیں گے کہ تمام شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔

12.2 ٹھوسوں کے اجماع (Combination) کے سطحی رقبہ

آیئے شکل 12.2 میں دکھائے گئے مضروف پر غور کرتے ہیں۔ ایسے ٹھوسوں کا سطحی رقبہ ہم کیسے معلوم کرتے ہیں؟ جب جب ہمارے سامنے ایسا کوئی نیا مسئلہ آتا ہے ہم اس کو پہلے چھوٹے چھوٹے ایسے مسئلے میں توڑ لیتے ہیں جن کو ہم پہلے ہی حل کر چکے ہیں۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ٹھوس ایک ایسا استوانہ ہے جس کے سرے نصف کروی شکل کے ہیں۔ جب ہم اس کے تمام ٹکڑوں کو ملا کر رکھیں تو یہ ایسا ہی نظر آئے گا جیسا کہ شکل 12.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 12.4

اگر ہم نئے بنے ہوئے ٹھوس کی سطح پر غور کرتے ہیں ہمیں صرف دو نصف کروں کی خمیدہ سطح اور استوانہ کی خمیدہ سطح نظر آتی ہے۔ اس لئے نئے ٹھوس کا کل سطحی رقبہ ہر انفرادی حصہ کی خمیدہ سطح کے رقبوں حاصل جمع ہے۔ اس سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\begin{pmatrix}\text{نئے ٹھوس}\\ \text{کا کل سطحی رقبہ}\\ \text{TSA}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{دوسرے نصف}\\ \text{کرہ کا خمیدہ سطح}\\ \text{کا رقبہ CSA}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{استوانہ کا}\\ \text{خمیدہ سطح}\\ \text{کا رقبہ CSA}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{پہلے نصف کرہ}\\ \text{کا خمیدہ سطح کا}\\ \text{رقبہ CSA}\end{pmatrix}$$

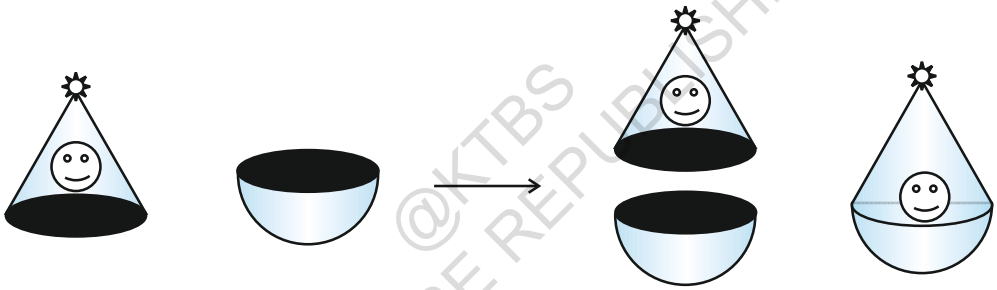
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

جہاں TSA اور CSA بالترتیب کل سطحی رقبہ اور خمیدہ سطح کے رقبہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے ہم ایک دوسری صورت حال پر غور کرتے ہیں۔فرض کیجئے کہ ہم ایک مخروط اور ایک نصف کرّہ کو ایک ساتھ رکھ کر ایک کھلونا بناتے ہیں اب ہمیں کون کون سے قدم اٹھانے ہوں گے۔

پہلے ہم ایک مخروط اور نصف کرہ کو لیتے ہیں اور ان سطح رخوں کو ایک ساتھ رکھیں گے۔یقیناً ایسا کرنے کے لئے ہمیں مخروط کے ساتھ کا نصف قطر، نصف کرہ کے نصف قطر کے برابر لیا ہوگا تا کہ کھلونہ کی سطح مسطح ہو۔اس لئے اس میں استعمال ہوئے اقدامات شکل 12.5 میں دکھائے گئے ہیں۔

اپنی اس کوشش کے بعد ہمیں ایک خوبصورت کھلونہ ملتا ہے جس کا نچلہ حصہ گول ہے۔اب ہم اگر یہ معلوم کرنا چاہتے ہوں



شکل 12.5

گے اس کے چاروں طرف رنگ کرانے کا خرچ کتنا ہوگا۔تو ہمیں کیا جاننے کی ضرورت ہے؟ ہمیں کھلونہ کے سطحی رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو کہ نصف کرہ کا CSA اور مخروط کا CSA ہے۔

اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں۔

کھلونہ کا TSA = نصف کرہ کا CSA + مخروط کا CSA

آیئے اب کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 1: رشید کو اس کے یوم پیدائش پر ایک لٹّو تحفہ میں ملا۔اتفاقاً اس پر رنگ نہیں ہوا تھا۔ وہ اپنے مومیا رنگوں سے اس کو رنگنا چاہتا ہو۔لٹّو ایک ایسے مخروط کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ نصف کروی شکل کا ہے۔(شکل 12.6 دیکھئے)۔ مکمل لٹو کی اونچائی 5cm اور اس کا نصف قطر 3.5cm ہے۔وہ رقبہ معلوم کیجئے جس پر اس کو رنگ کرنا ہے۔($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

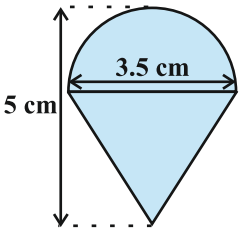
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل: لٹو بالکل اس ہی شکل کا ہے جیسا ہم شکل 12.5 میں دیکھ چکے ہیں۔ تو ہم اسی نتیجہ کو استعمال کر سکتے ہیں جو ہم نے اوپر اخذ کیا تھا۔ یعنی

لٹو کا TSA = نصف کرّہ کا CSA + مخروط کا CSA

اب نصف کرہ کا $\text{CSA} = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)\ \text{cm}^2$



شکل 12.6

مزید نصف کروی حصہ کی اونچائی (نصف قطر) = لٹو کی اونچائی − مخروط کی اونچائی ہے

$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right)\text{cm} = 3.25\ \text{cm}$

اس لئے مخروط کی ترچھی اونچائی $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}\ \text{cm} = 3.7\ \text{cm}$ تقریباً

اس لئے مخروط کا $\text{CSA} = \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)\ \text{cm}^2$

اس سے لٹو کا سطحی رقبہ معلوم ہوتا ہے۔

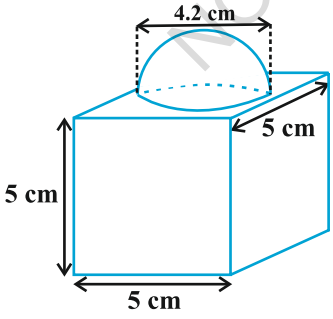
$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)\text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)\text{cm}^2$

تقریباً $= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7)\ \text{cm}^2$

$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7)\ \text{cm}^2 = 39.6\ \text{cm}^2$

آپ یہ بات نوٹ کر سکتے ہیں کہ لٹّو کا کل سطحی رقبہ مخروط اور نصف کرہ کے کل سطحی رقبہ کے حاصل جمع کے برابر نہیں ہے۔

مثال 2: ایک سجاوٹی بلاک جیسا کہ شکل 12.7 میں دکھا گیا ہے دو ٹھوسوں سے مل کر بنا ہے ایک مکعب اور ایک نصف کرہ، بلاک کا قاعدہ 5cm



شکل 12.7

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ضلع والا ایک مکعب ہے اور اس کے اوپر مقرّر ہوئے نصف کرہ کا قطر 4.2cm ہے۔ بلاک کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

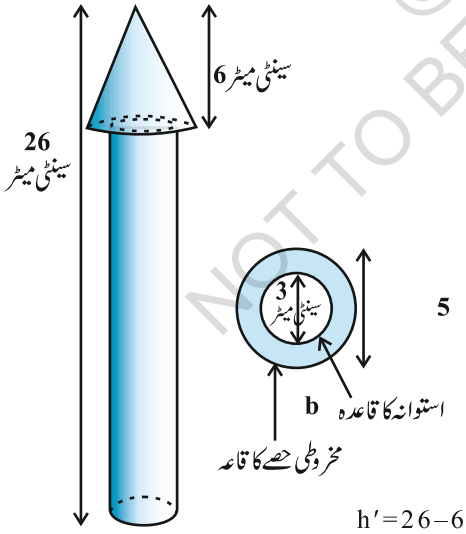
حل: مکعب کا TSA $= 6 \times (\text{ضلع})^2 = 6 \times 5 \times 5\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$

نوٹ کیجئے کہ مکعب کا وہ حصہ جہاں پر نصف کرہ جڑا ہوا ہے، سطحی رقبہ میں شامل نہیں ہوگا

بلاک کا سطحی رقبہ = [مکعب کا TSA] − [نصف کرہ کے قاعدہ کا رقبہ] + [نصف کرہ کا CSA]

$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2\ \text{cm}^2$$
$$= (150 + \pi r^2)\ \text{cm}^2$$
$$= 150\text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)\ \text{cm}^2$$
$$= (150 + 13.86)\ \text{cm}^2$$
$$= 163.86\ \text{cm}^2$$

مثال 3: ایک لکڑی کا بنا ہوا کھلونہ راکٹ ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ مخروطی ہے جیسا کہ شکل 12.8 میں دکھایا گیا ہے پورے راکٹ کی اونچائی 26 سینٹی میٹر ہے۔ جب کہ مخروطی حصہ کی اونچائی 6 سینٹی میٹر ہے مخروطی حصہ کے قاعدہ کا قطر 5 سینٹی میٹر ہے جب کہ استوانہ کے قاعدہ کا قطر 3 سینٹی میٹر ہے اگر مخروطی حصہ کو نارنگی رنگ کرنا ہے اور استوانی حصہ کو پیلا تو وہ رقبہ معلوم کیجئے جہاں یہ دونوں رنگ ہوتے ہیں۔



شکل 12.8

حل: مخروط کے نصف قطر کو r، ترچھی اونچائی کو l سے مخروط کی اونچائی کو h سے، استوانہ کے نصف قطر کو r' اور استوانہ کی اونچائی کو h' سے ظاہر کیجیے۔

تب $h' = 26 - 6 = 20\ \text{cm}$ ، $r' = 1.5\ \text{cm}$ $h = 6\ \text{cm}$, $r = 2.5\ \text{cm}$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2}\ \text{cm} = 6.5\text{cm}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہاں مخروطی حصہ کا دائری قاعدہ ہے جو استوانہ پر رکھا ہوا ہے۔ لیکن مخروط کا قاعدہ استوانہ کے قاعدہ سے بڑا ہے۔ اس لئے مخروط کے قاعدہ کا کچھ حصہ ہی رنگ کرنا ہے۔

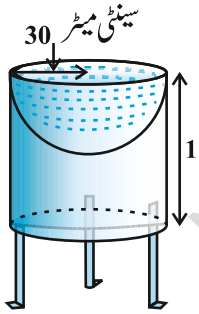
استوانہ کے قاعدہ کا رقبہ – مخروط کے قاعدہ کا رقبہ + مخروط کا CSA = جہاں نارنگی رنگ ہونا ہے وہ رقبہ

$$= \pi rl + \pi r^2 \times \pi (r')^2$$
$$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]\ cm^2$$
$$= \pi[20.25]\ cm^2 = 3.14 \times 20.25\ cm^2$$
$$= 63.585\ cm^2$$

استوانہ کے ایک قاعدہ کا رقبہ + استوانہ کا CSA = وہ رقبہ جہاں پیلا رنگ ہونا ہے

$$= 2\pi r' h' + \pi (r')^2$$
$$= \pi r' (2h' + r')$$
$$= (3.14 \times 1.5)(2 \times 20 + 1.5) \text{ مربع سینٹی میٹر}$$
$$= 4.71 \times 41.5\ cm^2$$
$$= 195.465\ cm^2$$

مثال 4: میانک نے اپنے باغ کے لئے ایک ایسا چڑیوں کے نہانے کا تالاب بنایا جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے ایک سرے پر نصف کروی ڈھال ہے۔ (شکل 12.9 دیکھئے) استوانہ کی اونچائی 1.45m ہے اور اس کا نصف قطر 30cm ہے۔ چڑیوں کے نہانے کا تالاب کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)



شکل 12.9

حل: مان لیجئے استوانہ کی اونچائی 'h' اور استوانہ اور نصف کرہ کا مشترک نصف قطر r ہے تب

چڑیوں کے نہانے کا تالاب کا کل سطحی رقبہ TSA = استوانہ کا CSA + نصف کرہ کا CSA

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30)\ cm^2$$
$$= 33000\ cm^2 = 3.3\ cm^2$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 12.1

جب تک کچھ اور نہ دیا جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے

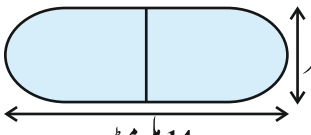
1۔ دو مکعب جن میں ہر ایک کا حجم $64cm^3$ ہے، سروں سے ملا دئے گئے ہیں۔ نتیجہ میں ملے مکعب نما کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

2۔ ایک برتن ایک کھوکھلے نصف کرہ کی شکل کا ہے جس کے اوپر ایک کھوکھلا استوانہ رکھا ہوا ہے۔ نصف کرہ کا قطر 14 سینٹی میٹر اور پورے برتن کی اونچائی 13 سینٹی میٹر ہے۔ برتن کی اندرونی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

3۔ ایک کھلونہ مخروط کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ نصف کروی ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو مخروط کا ہے۔ اگر مخروط کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر ہو اور کھلونہ کی کل اونچائی 15.5 سینٹی میٹر ہو تو کھلونہ کی کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ 7 سینٹی میٹر ضلع والے ایک مکعبی بلاک کا اوپری حصہ نصف کروی شکل ہے۔ نصف کرہ کا بڑے قطر کیا ہو سکتا ہے؟ ٹھوس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

5۔ ایک مکعبی لکڑی کے بلاک کے ایک سطح میں سے ایک نصف کروی ڈھال کاٹ لیا گیا ہے۔ اگر نصف کرہ کا قطر 'l' مکعب کے ضلع کے برابر ہو تو بقیہ ٹھوس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

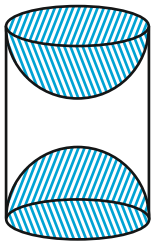


شکل 12.10

6۔ دوائی کا ایک کیپسول ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جن کے دونوں سرے نصف کروی شکل کے ہیں۔ (شکل 12.10 دیکھئے) مکمل کیپسول کی لمبائی 14 ملی میٹر ہے اور کیپسول کا قطر 5 ملی میٹر تو اس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

7۔ ایک ٹینٹ استوانہ کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ مخروطی ہے۔ اگر استوانہ والے حصہ کی اونچائی اور قطر بالترتیب 2.1m اور 4m ہے اور مخروطی حصہ کی ترچھی اونچائی 2.8m ہے تو ٹینٹ کو بنانے میں استعمال ہونے والے کینوس کا رقبہ معلوم کیجیے اور ₹500 فی مربع میٹر کی شرح سے کینوس کا خرچ بھی معلوم کیجیے۔

(نوٹ کیجیے کہ ٹینٹ کے قاعدہ پر کینوس نہیں لگا ہوتا)


شکل 12.11

8۔ ایک ٹھوس استوانہ جس کی اونچائی 2.4cm اور قطر 1.4cm ہے میٹر میں سے اس اونچائی اور قطر کا ایک مخروطی خلا نکالا گیا ہے۔

@TBS NOT TO BE REPUBLISHED

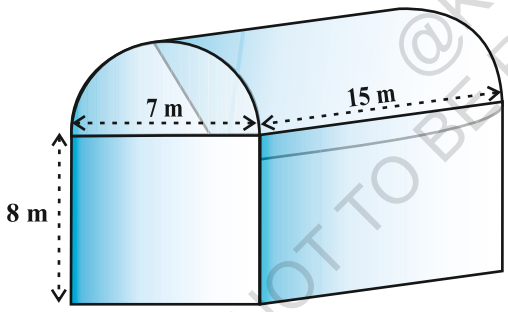
بقیہ ٹھوس کا کل سطحی رقبہ نزدیکی مربع سینٹی میٹر میں معلوم کیجیے۔

9۔ لکڑی کی ایک شے ٹھوس استوانہ کے سروں میں نصف کرے نکال کر بنائی گئی ہے جیسا کہ شکل 12.11 میں دکھایا گیا۔ اگر استوانہ کی اونچائی 10cm اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر۔ تو اس شے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

12.3 ٹھوس اشیا کے اجماع کا حجم

پچھلے سیکشن میں ہم نے یہ بحث کی کہ دو بنیادی ٹھوس اشیا کے اجماع سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ کیسے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہاں ہم دیکھیں گے کہ ان کا حجم کیسے معلوم کیا جائے گا۔ یہ بات نوٹ کی ہوگی کہ سطحی رقبہ معلوم کرتے وقت ہم نے دونوں ٹھوس اشیاء کے سطحی رقبہ کو جمع نہیں کیا تھا۔ کیونکہ ان کو ملاتے وقت سطحی رقبہ کا کچھ حصہ غائب ہو گیا تھا۔ لیکن جب ہم ان کا حجم معلوم کریں گے تو ایسا نہیں ہوگا۔ دو بنیادی ٹھوس اشیا کو ملا کر بنے ٹھوس کا حجم اصل ان دونوں کا ٹھوس اشیا کے حجم کے حاصل جمع کے برابر ہوگا۔ جیسے کہ ہم مندرجہ ذیل مثال میں دیکھتے ہیں۔

مثال 5: شانتا ایک انڈسٹری چلاتی ہے جو ایک ایسے شیڈ کے اندر ہے جس کی شکل ایک ایسے مکعب نما کی ہے۔ جس کا اوپری حصہ نصف استوانہ شکل ہے (شکل 12.12 دیکھئے)۔ اگر شیڈ کے قاعدہ کے ابعاد $7m \times 15m$ ہیں اور مکعب نما والے حصہ کی اونچائی $8m$ ہے۔ تو اس شیڈ میں جتنی ہوا ہو سکتی ہے اس کا حجم معلوم کیجئے۔ مزید فرض کیجئے اس شیڈ کے اندر لگی مشینری 300 مکعب میٹر جگہ گھیرتی ہے اور وہاں 20 کارکن ہیں اور ان میں سے ہر شخص 0.08 مکعب میٹر جگہ گھیرتا ہے تب شیڈ میں کتنی ہوا ہوگی؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے)



شکل 12.12

حل: شیڈ کے اندر ہوا کا حجم (جب وہاں کوئی ملازم اور مشینری نہ ہو) مکعب نما کے اندر موجود ہوا اور نصف استوانہ میں موجود ہوا کا حاصل جمع ہے۔

اب مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب $15m$، $7m$ اور $8\ m$ ہے۔ مزید نصف استوانہ کا قطر $7m$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

سینٹی میٹر ہے۔اوراس کی اونچائی 15m۔

مطلوبہ حجم = کعب نما کا حجم + $\frac{1}{2}$ × استوانہ کا حجم

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] m^3 = \text{مکعب میٹر } 1128.75$$

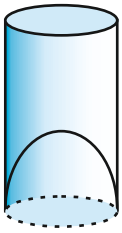
آگے مشینری کے ذریعے گھیری گئی کل جگہ $= 300\ m^3$

20 ملازموں کے ذریعے گھیری گئی کل جگہ $= 20 \times 0.08\ m^3 = 1.6 m^3$

اس لئے ہوا کا حجم جب وہاں مشینری اور ملازم ہوں

$$1128.75 - (300.00 + 1.60) - 827.15 m^3$$

مثال 6: ایک جوس فروش اپنے گاہکوں کو شکل 12.13 میں دکھائے گئے گلاسوں میں جوس دیتا ہے۔استوانہ گلاس کا اندرونی قطر 5 سینٹی میٹر ہے۔ لیکن گلاس کے نچلے حصہ میں نصف کروی شکل میں اٹھا ہوا ہے۔جس کی وجہ سے گلاس کی گنجائش کم ہو جاتی ہے۔اگر گلاس کی اونچائی 10 سینٹی میٹر تھی تو اس کی بہ ظاہری اور اصل گنجائش معلوم کیجئے۔($\pi = 3.14$ لیجیے)



شکل 12.13

حل: کیونکہ گلاس کا اندرونی قطر $= 5$ سینٹی میٹر اور اونچائی 10 سینٹی میٹر

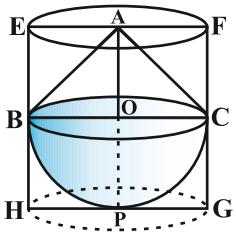
تو بہ ظاہر گلاس کی گنجائش $= \pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10\ cm^3 = \text{مکعب سینٹی میٹر } 196.25$$

لیکن گلاس کی اصل گنجائش کم ہوگی کیونکہ اس کے قاعدہ میں ایک نصف کرہ اٹھا ہوا ہے

یعنی کم ہوگی گنجائش $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$

$$= 32.71\ cm^3$$



شکل 12.14

نصف کرہ کا حجم – گلاس کی بہ ظاہری گنجائش = گلاس کی اصل گنجائش

$$= (196.25 - 32.71)\ cm^3 = 163.54\ cm^3$$

مثال 7: ایک ٹھوس کھلونا کی شکل کا ہے جس کا نچلا حصہ نصف کروی شکل کا

@ITBS NOT TO BE REPUBLISHED

ہے۔مخروط کی اونچائی 2cm ہے اور قاعدہ کا قطر 4cm ہے۔کھلونا کا حجم معلوم کیجئے اگر ایک قائم دائری کا استوانہ اس کھلونے کو محصور کرتا ہے۔کھلونا اور استوانہ کے حجم کا فرق معلوم کیجیے۔($\pi=3.14$ لیجیے)

حل: مان لیجئے BPC ایک نصف کرہ ہے اور ABC ایک مخروط جو نصف کرہ کے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔(12.14 دیکھئے)

$$\text{نصف کرہ BO (اور مخروط) کا نصف قطر} = \frac{1}{2} \times 4\,\text{cm} = 2\text{cm}$$

$$\text{اس لیے کھلونا کا حجم} = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] \text{مکعب سینٹی میٹر} = 25.12 \text{ مکعب سینٹی میٹر}$$

اب مان لیجئے قائم دائری استوانہ EFGH دیے ہوئے ٹھوس کو محصور کرتا ہے۔تو قائم داری استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

$$= HP = BO = 2\text{cm}$$

$EH = AO + OP = (2+2) = 4\text{cm}$ سینٹی میٹر اس کی اونچائی ہے۔

اس لیے کھلونا کا حجم = قائم دائری استوانہ کا حجم − مطلوبہ حجم ہے

$$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) \text{ مکعب سینٹی میٹر} = 25.12 \text{ مکعب سینٹی میٹر}$$

اس طرح سے مطلوبہ حجموں میں فرق $= 25.12\text{cm}^3$

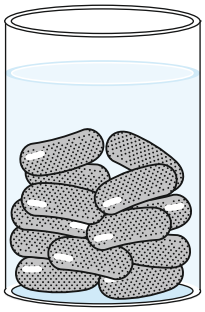
مشق 12.2

جب تک کچھ اور نہ دیا جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجئے۔

1۔ ایک ٹھوس ایسے مخروط کی شکل کا ہے جو نصف کرہ پر کھڑا ہے۔دونوں کے نصف قطر 1 سینٹی میٹر کے برابر ہے۔اور مخروط کی اونچائی اس کے نصف قطر کے برابر ہے۔ π کی شکل میں ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

2۔ انجینئرنگ کے ایک طالب علم راحیل سے ایک ایسا ماڈل بنانے کو کہا گیا جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے دونوں سروں پر المونیم کی پتلی شیٹ کے مخروط جڑے ہوتے ہیں۔اس ماڈل کا قطر 3 سینٹی میٹر اور لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے۔اگر ہر ایک مخروط کی اونچائی 2 سینٹی میٹر ہے۔تو راحیل کے ذریعے بنے اس ماڈل میں ہوا کا حجم معلوم کیجئے (یہ مانتے ہوئے کہ ماڈل کی اندرونی اور باہری ابعاد تقریباً یکساں ہیں)۔

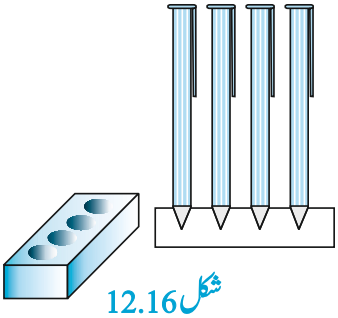
© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED



شکل 12.15

3۔ ایک گلاب جامن میں اس کے حجم کا 30% چینی کا شیرہ ہوتا ہے۔ معلوم کیجیے کہ 45 گلاب جامن میں تقریباً کتنا شیرہ ہوگا۔ جب کہ اس میں ہر ایک کی شکل ایک استوانہ جن کے سرے نصف کرہ شکل کے ہیں، کی شکل کی جس کی لمبائی 5 سینٹی میٹر اور قطر 2.8 سینٹی میٹر شکل 12.15 دیکھیے)۔

4۔ ایک لکڑی کا پین اسٹینڈ مکعب نما کی شکل کا ہے جس میں مخروطی شکل کے 4 خول ہیں جو پینوں کی گرفت کرتے ہیں۔ مکعب نما کے ابعاد سینٹی $15cm \times 10cm \times 3.5cm$ ہیں اور ہر ایک خول (سوراخ) کا نصف قطر 0.5 سینٹی میٹر اور گہرائی 1.4 سینٹی میٹر ہے۔ پورے اسٹینڈ میں لگی ہوئی لکڑی کا حجم معلوم کیجیے۔ (شکل 12.16 دیکھیے)۔



شکل 12.16

5۔ ایک برتن الٹے مخروط کی طرح ہے۔ اس کی اونچائی 8 سینٹی میٹر اور اوپر Top کا نصف قطر، جو کھلا ہوا ہے، 5 سینٹی میٹر ہے۔ یہ کنارے تک پانی سے بھرا ہوا ہے۔ جب سیسہ کی گولیاں جو کرہ کی شکل کی ہیں جس میں ہر ایک کا نصف قطر 0.5 سینٹی میٹر ہے۔ برتن میں ڈالی جاتی ہیں تو ایک چوتھائی پانی بہہ جاتا ہے۔ اس میں ڈالی گئی سیسہ کی گولیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

6۔ ایک ٹھوس لوہے کا کھمبا 220cm اونچائی تک ایک استوانہ کی شکل کا ہے جس کے قاعدہ قطر کا 24 سینٹی میٹر ہے۔ اس اوپر ایک اور استوانہ رکھا ہوا ہے جس کی اونچائی 60 سینٹی میٹر اور نصف قطر 8 سینٹی میٹر ہے۔ کھمبے کی کمیت معلوم کیجیے۔ اگر مکعب سینٹی میٹر 1 لوہے کی تقریباً کمیت 8 گرام ہے۔ ($\pi=3.14$ لیجیے)

7۔ ایک ٹھوس جس میں 120 سینٹی میٹر اونچائی کا ایک قائم دائری مخروط ہے جس کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر ہے جو 60 سینٹی میٹر نصف قطر والے ایک کرہ پر کھڑا ہے۔ کو قائم زاویہ پر ایک قام دائری استوانہ، جو پانی سے بھرا ہوا، میں اس طرح رکھا جاتا ہے کہ یہ اس کے نچلے حصہ کو چھوتا ہے۔ استوانہ میں بقیہ پانی کا حجم معلوم کیجیے۔ اگر استوانہ کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر اور اونچائی 180 سینٹی میٹر ہو۔

8۔ ایک کروی شیشے کے برتن کی گردن استوانہ کی شکل کی ہے۔ جس لمبائی 8 سینٹی میٹر اور قطر 2 سینٹی میٹر ہے۔ کروی حصہ کا قطر 8.5 سینٹی میٹر ہے۔ اس میں جتنا پانی آ سکتا اس کی پیائش کر کے ایک بچہ اس کا حجم 345 مکعب سینٹی میٹر بتاتا ہے جانچ کیجیے

12.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا

1۔ دو بنیادی ٹھوسوں جیسے، مکعب نما، مخروط، اسطوانہ، کرہ اور نصف کرہ سے ملا کر بنی نئی اشیا کا رقبہ معلوم کرنا۔

2۔ دو بنیادی ٹھوسوں، مکعب نما، مخروط، استوانی کرہ، نصف کرہ سے ملا کر بنے ٹھوسوں کا حجم معلوم کرنا۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

5013CH14

13 شماریات (STATISTICS)

13.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ نے اعداد شمار کی غیر مرتب تعددی بٹاؤ میں درجہ بندی کرنا سیکھا آپ نے اعداد و شمار کا مختلف گراف جیسے ہسٹوگرام (جس میں متغیر چوڑائی والے بھی شامل بارگراف تعدد کثیر ضلعی کا تصویری اظہار بھی سیکھا بلکہ آپ ایک قدم آگے بڑھ گئے کیونکہ آپ نے غیر مرتب اعداد شمار کے عددی اظہار کا مطالعہ بھی کیا جسے مرکزی رجحان کی پیمائش کہتے ہیں جیسے درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ۔ اس باب میں ہم ان تین پیمائشوں کی توسیع غیر مرتب اعداد شمار سے مرتب اعداد اور شمار تک کریں گے ہم مجموعی تعدد (cumulative frequency)، مجموعی تعدی بٹاؤ اور مجموعی تعددی منحنی جسے اوجائیو (Ogives) بھی کہتے ہیں، کو کس طرح بنایا جاتا ہے، کے تصور کا مطالعہ کریں گے۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

13.2 مرتب اعداد شمار کا درمیانہ

مشاہدات کا درمیانہ (یا اوسط) جیسا کہ ہم جانتے ہیں، تمام مشاہدات کے حاصل جمع کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ یاد کیجیے آپ نے نویں کلاس میں بڑھا تھا اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مشاہدات ہیں اور $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ان کے متعلقہ تعدد ہیں۔ اب درمیانہ مشاہدہ x_1، f_1 بار x_2، f_2 بار واقع ہوتا ہے۔

اب مشاہدات کا حاصل جمع $= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n$ اور مشاہدات کی تعداد $= f_1 + f_2 \ldots + f_n$

اس لئے دئے ہوئے اعداد و شمار کا درمیانہ ہے

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots\cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n}$$

یاد کیجئے ہم یونانی علامت Σ (سگما) کا استعمال کر کے اس کو مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

جس کو مزید مختصر کرنے پر لکھا جاتا ہے۔ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ ، یہ بات ظاہر کہ i، 1 سے n تک کی قدر دیتا ہے۔

آیئے اس فارمولہ کو مندرجہ ذیل مثال میں درمیانہ معلوم کرنے میں کرتے ہیں۔

مثال 1: ایک اسکول کی دسویں کلاس کے 30 طلباء کے ذریعے حاصل کردہ ریاضی میں 100 نمبروں میں سے حاصل کردہ نمبر مندرجہ ذیل جدول میں دیئے گئے ہیں۔ طلبا کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

حاصل کردہ نمبر (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
طلباء کی تعداد (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

حل: یاد کیجیے کہ درمیانہ نمبر معلوم کرنے کے لئے ہمیں ہر ایک x_i کا اس کے نظیری f_i سے حاصل ضرب درکار ہے۔ آیئے پہلے اس کو کالموں میں رکھتے ہیں جیسا شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 13.1

حاصل کردہ نمبر x_i	طلباء کی تعداد (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
کل	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

اب $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

اس لئے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ ہے = 59.3

روزمرّہ کی زندگی کی صورت حال میں زیادہ تر یہ ہوتا ہے کہ اعداد وشمار عام طور پر اتنے زیادہ ہوتے ہیں کہ ان کے معنی خیز مطالعہ کے لئے ان کو مرتب اعداد وشمار میں یکجا کیا جائے۔ اس لئے ہمیں غیر مرتب اعداد وشمار کو مرتب اعداد وشمار میں بدلنے کی ضرورت ہے اور ایک ایسا طریقہ معلوم کریں جس سے ان کا درمیانہ معلوم کیا جا سکے۔

آیئے مثال 1 میں دیئے گئے غیر مرتب اعداد وشمار 15 کو چوڑائی والے کلاس وقفہ لے کر مرتب اعداد وشمار میں تبدیل کرتے ہیں۔ یاد کیجئے کہ ہر کلاس وقفہ کا تعدد لکھتے وقت، طلبا جو بالائی کلاس حد میں آئے۔ ان کو اگلی کلاس میں شامل کرتے ہیں مثال کے طور پر 4 طلبا جنہوں نے 40 نمبر حاصل کئے ہیں ان کو کلاس وقفہ 40-55 میں شامل کریں گے۔ 25-40 میں نہیں۔ اس بات کو ذہن میں رکھتے ہوئے آیئے مرتب تعددی بناوٹ جدول بناتے ہیں (جدول 13.2 دیکھیے)

جدول 13.2

کلاس وقفہ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
طلباء کی تعداد	2	3	7	6	6	6

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اب ہمیں ہر کلاس وقفہ کے لئے ایک ایسا نقطہ چاہیے جو پوری کلاس کی نمائندگی کرے۔ ایسا مانا جاتا ہے **ہر کلاس وقفہ کی تعداد اس کے وسطی نقطہ کے اردگرد مرکوز ہوتی ہے۔** اس لئے ہر کلاس وقفہ کا وسطی نقطہ (کلاس مارک) اس کلاس میں آنے والے مشاہدات کی نمائندگی کے لئے چنا جاتا ہے۔ یاد کیجئے کہ ہم کسی کلاس کا وسطی نقطہ (یا کلاس مارک) اس کی بالائی اور زیریں حد کی اوسط معلوم کر کے نکالتے ہیں: یعنی

$$\text{کلاس مارک} = \frac{\text{زیریں حد} + \text{بالائی حد}}{2}$$

جیسے جدول 13.2 میں کلاس 10-25 کے کلاس مارک $\frac{10+25}{2}$ یعنی 17.5 ہیں

اسی طرح سے ہم باقی کلاس وقفوں کے کلاس مارکس آسانی سے نکال سکتے ہیں۔ ان مارکس کو ہم x_i تصور کرتے ہیں اب عمومی طور پر iویں کلاس وقفہ کے لئے تعدد f_i ہے اور اس کا نظیری کلاس مارک x_i ہے۔ اب ہم اسی طریقہ سے درمیانہ معلوم کریں گے جیسا کہ مثال 1 میں کیا گیا ہے۔

جدول 13.3

کلاس وقفہ	طلبا کی تعداد (f_i)	کلاس مارک (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35-0
25-40	3	32.5	97-5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.5
70-05	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
کل	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

آخری کالم میں ملا قدروں کا حل جمع ہمیں $\Sigma f_i x_i$ دیتا ہے اس لئے دئے ہوئے اعداد و شمار کا درمیانہ $\bar{x}$ ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

درمیانہ معلوم کرنے کے اس نئے طریقہ کو **راست طریقہ** کہتے ہیں۔

درمیانہ معلوم کرنے کا ہم نے یہ مشاہدہ کیا جدول 13.1 اور 13.3 میں ایک ہی اعداد و شمار کو استعمال کیا گیا اور درمیانہ معلوم کرنے کا ایک ہی فارمولہ لگایا گیا لیکن نتیجہ مختلف آیا۔ کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ایسا کیوں ہوا، اور ان میں سے کون سا طریقہ زیادہ صحیح ہے؟ دو قدروں میں یہ فرق جدول 13.3 میں لئے گئے وسطی کی وجہ سے ہے، 59.3 صحیح درمیانہ ہے جب کہ 2 تقریبی۔

کبھی جب x_i اور f_i کے عددی قدر بہت بڑی ہوتی ہے تب x_i اور f_i کا حاصل ضرب معلوم کرنا کافی مشکل اور پیچیدہ ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت حال کے لئے کوئی ایسا طریقہ سوچئے جس سے تحسیبات میں کافی آسانی ہو جائے۔

f_i کے ساتھ کچھ بھی نہیں کر سکتے لیکن ہم x_i کو ایک چھوٹے عدد میں بدل سکتے ہیں۔ تاکہ تحسیبات مختصر اور آسان ہو جائیں۔ آپ ایسا کیسے کریں۔ ایک متعین عدد کو x_i میں سے گھٹانے کے بارے میں آپ کا خیال ہے؟ آیئے اس طریقہ کو استعمال کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

سب سے پہلا قدم یہ ہے کہ x_i, s میں ایک **درمیانہ فرض کیجئے** اور اس کو 'a' سے ظاہر کیجئے۔ اپنے تحسیبات کو مزید آسان بنانے کے لئے ہم وہ فرض کرتے ہیں جو $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کے وسط میں ہے اس لئے ہم $a=47.5$ یا $a=62.5$ چن سکتے ہیں، آیئے $a=47.5$ چنیے

اگلے مرحلہ 'a' اور ہر ایک x: کے درمیانی فرق d: معلوم کیجئے یعنی x: سے a کا **انحراف** معلوم کیجئے۔

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

بہتر اقدام f_i اور d_i کا حاصل ضرب معلوم کرنا ہے اور تمام $f_i d_i$ کا حاصل جمع معلوم کرنے سے یہ تحسیب مندرجہ ذیل جدول 13.4 میں دکھائی گئی ہے۔

جدول 13.4

کلاس وقفہ	طلبا کی تعداد (f_i)	کلاس مارکس (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	–30	–60
25-40	3	32.5	–15	–45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
کل	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

اس لئے جدول 13.4 سے انحرافوں کا درمیانہ $\bar{d} - \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

اب $\bar{d}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان تعلق کو معلوم کیجیے۔

کیونکہ d_i حاصل کرنے کے لئے ہم، (a) کو ہر ایک x کو گھٹانے اس لئے درمیانہ $\bar{x}$ حاصل کرنے کے لئے ہمیں $\bar{d}$ میں a کو جمع کرنے کی ضرورت ہے۔ اس کو ریاضیاتی طور پر ہم لکھتے ہیں۔

انحراف کا درمیانہ $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

اس لئے $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$- \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$- x - a \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

اس لئے $= \bar{x} - a$

$$\bar{x} = a + \bar{d}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یعنی $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

a، $\Sigma f_i d_i$ اور Σf_i کی قدریں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

اس لئے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ 62 ہے۔

اوپر جس طریقہ پر بحث کی گئی ہے اسے **فرض کئے گئے درمیانہ کا طریقہ** کہتے ہیں۔

سرگرمی 1: جدول 13.3 سے x_i (یعنی 17.5, 32.5 اور اسی طرح آگے بھی) کو a کے طور پر لے کر درمیانہ معلوم کیجیے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ آپ دیکھتے ہیں کہ ہر ایک حالت میں نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے یعنی 62۔ (کیوں)

اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ درمیانہ کی قدر a کے انتخاب پر منحصر نہیں ہے۔

جدول 13.4 میں مشاہدہ کیجیے 4 ویں کالم کی تمام قدریں 15 کے اضعاف ہیں۔ اس لئے اگر کالم۔ 4 کے تمام قدروں کو ہم 15 سے تقسیم کریں تو ہمیں بہت سے چھوٹے عدد ملیں گے جن کو f_i سے ضرب کرنا ہوگا۔

(یہاں 15 ہر ایک کلاس کا سائز ہے)

اس لئے مان لیجئے $u_i = \frac{x_i - a}{h}$، جہاں فرض کیا گیا درمیانہ a اور h کلاس کا سائز ہے۔ اب ہم اس طرح سے معلوم کریں اور $\Sigma f_i u_i$ پھر (h=15 لے کر۔ آیئے جدول 13.5 بناتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جدول 13.5

کلاس وقفہ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	–30	–2	–4
25-40	3	32·5	–15	–1	–3
40-55	7	47·5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77·5	30	2	12
85-100	6	92·5	45	3	18
کل	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

مان لیجئے $\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

یہاں، دوبارہ، آئے $\bar{x}$ اور $\bar{u}$ کے درمیان تعلق معلوم کرتے ہیں۔

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

اس لئے $h\bar{u} = \bar{x} - a$

$\bar{x} = a + h\bar{u}$

یعنی $\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

اب جدول 13.5 سے قدریں h، a، اور $\Sigma f_i u_i$، Σf_i رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

اس طرح سے طالب علم کے ذریعے حاصل کردہ نمبروں کا درمیانہ 62 ہے

اوپر بحث کیا گیا طریقہ **حرکت انحراف طریقہ** کہلاتا ہے

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

- حرکت انحراف استعمال کرنے میں آسان ہوگا اگر d_i میں کوئی مشترک جزو ضربی ہوں
- تینوں طریقوں سے نکالا گیا درمیانہ ایک ہی ہے
- فرض کیا گیا درمیانہ اور حرکت انحراف طریقہ، راست طریقہ کی مختصر شکل ہے۔
- فارمولہ $\bar{x} = a + h\bar{u}$ پھر بھی صحیح ہے اور استعمال ہوگا اگر a اور h ایسے دئے ہوئے نہیں ہوں جیسے اوپر دئے گئے ہیں لیکن کوئی غیر صفر اعداد ہوں جبکہ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

آیئے ان طریقوں کو دوسری مثالوں میں حل کرتے ہیں

@KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

مثال 2: نیچے دئے گئے جدول میں ہندوستان کے مختلف صوبوں اور مرکز کے زیر انتظام علامتوں کے دیہاتی علاقوں کے پرائمری اسکول کی خاتون ٹیچر کا فی صد بٹاؤ دیا ہوا ہے۔ خاتون ٹیچرس کا درمیانہ فیصد مذکورہ بالا تینوں طریقوں سے معلوم کیجیے۔

خاتون ٹیچر کا فی صد	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
صوبوں/U.T کی تعداد	6	11	7	4	4	2	1

(ذرائع: این سی ای آر ٹی کے ذریعے کئے گئے ساتواں کل ہند اسکولی تعلیم سے متعلق سروے کے مطابق)

حل: لیجئے اس لئے پہلے ہر ایک لاس کے کلاس مارکس x_i معلوم کرتے ہیں۔ اور ان کو کالموں میں رکھتے ہیں (دیکھیے جدول 13.6)

جدول 13.6

خاتون ٹیچرس کا فی صد	صوبوں کی تعداد	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

یہاں ہم $a = 50$، $h = 10$، لیتے ہیں تب $d_i = x_i - 50$ اور $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

اب ہم d_i اور u_i معلوم کریں گے اور ان کو جدول 13.7 میں رکھیں گے

جدول 13.7

خاتون ٹیچرس کا فی صد	صوبوں/UT کی تعداد (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15-25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25-35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35-45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
کل	35				1390	–360	–36

اوپر دیے گئے جدول سے ہمیں ملتا ہے $\Sigma f_i x_i = 1390$ ، $\Sigma f_i = 35$ ، $\Sigma f_i d_i = -360$ ، $\Sigma f_i (f_i u_i) = -36$

راست طریقہ کو استعمال کرنے پر $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

درمیانی طریقہ سے $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$

حرکت انحراف طریقہ اپنانے پر $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

$$= 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10$$

$$= 39.71$$

اس لئے دیہاتی علاقوں کے پرائمری اسکول کے خاتون ٹیچرس کا فیصد درمیانہ 39.71 ہے۔

ریمارک: تینوں طریقوں سے نتیجہ ایک ہی آیا۔ اس لئے استعمال کئے گئے طریقہ کے انتخاب x_i اور f_i کی عددی قدروں پر ہوتا ہے اگر x_i اور f_i کافی چھوٹے ہیں تب راست طریقہ کافی مناسب ہے۔ اگر x_i اور f_i عددی طور پر کافی بڑے ہیں تب ہم درمیانہ یا حرکت انحراف طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔ اگر کلاس کے سائز غیر مساوی ہیں تب بھی ہم حرکت انحراف کا طریقہ استعمال کریں گے اس کے لئے ہم h کو d_i ایک مناسب قاسم کے طور پر لیا ہوگا۔

مثال 3: مندرجہ ذیل بٹاؤ ایک دن کی کرکٹ میں بولروں کے ذریعے لئے گئے وکٹوں کی تعداد کو دکھاتا ہے مناسب طریقہ کو

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

استعمال کر کے وکٹوں کی تعداد کا درمیانہ معلوم کیجیے۔ درمیانہ ہمیں کس بات کا پتہ دیتا ہے؟

وکٹوں کی تعداد	20-60	60-100	100-150	150-250	25-350	350-450
بولروں کی تعداد	7	5	16	12	2	3

حل : یہاں کلاس کا سائز بدلتا ہے اور x_i بڑے ہیں، اس لئے ہم حرکت انحراف طریقہ کو استعمال کریں گے جس میں $a = 200$ اور $h = 20$ لے کر تب ہمیں جدول 13.8 کے اعداد و شمار ملیں گے۔

جدول 13.8

لی گئی وکٹ کی تعداد	بولروں کی تعداد (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20-60	7	40	–160	–8	–56
60-100	5	80	–120	–6	–30
100-150	16	125	–75	–3.75	–60
150-250	12	200	0	0	0
250-350	2	300	100	5	10
350-450	3	400	200	10	30
کل	**45**				**–106**

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $u = \frac{-106}{45}$ اس لئے $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ اوسطاً 45 بولروں کے ذریعے ایک دن کی کرکٹ میں لی گئی وکٹوں کی تعداد 152.89 ہے۔

اسے ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح ہم اس سیکشن میں پڑھے گئے تصورات کا اچھی طرح استعمال کریں گے۔

سرگرمی 2: اپنی کلاس کے طلباء کو 3 گروپوں میں بانٹئے اور ہر ایک گروپ سے مندرجہ ذیل عملی کام کرنے کے لئے کہیں

1۔ آپ کے اسکول کے ذریعے لئے گئے ریاضی کے امتحان میں تمام طلباء کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کو جمع کیجیے۔ حاصل اعداد و شمار کا مرتب تعدد بٹاؤ جدول بتائیے۔

2۔ اپنے شہر میں 30 دن کے دوران لئے گئے درجہ حرارت کے ریکارڈ کو جمع کیجئے۔ ان اعداد و شمار کو مرتب تعدد جدول میں

دکھایئے۔

3۔ اپنی کلاس کے تمام طلبا کی اونچائی سینٹی میٹر میں ناپئے اور اس اعداد و شمار کا مرتب تعدد بٹاؤ جدول بنایئے۔ جب تینوں گروپ اعداد و شمار کو اکٹھا کریں اور مرتب بٹاؤ جدول بنائیں ان کا اعداد و شمار کا درمیانہ معلوم کریں مناسب طریقے کا استعمال کریں۔

مشق 13.1

1۔ طلباء کے ایک گروپ ماحول سے آگاہی کے پروگرام کے ایک جز کی حیثیت سے ایک سروے کیا۔ جس میں انہوں نے علاقہ کے 20 گھروں میں لگے ہوئے پودوں کی تعداد سے متعلق اعداد و شمار کو اکٹھا کیا، ایک مکان میں لگے پودوں کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

پودوں کی تعداد	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
مکانوں کی تعداد	1	2	1	5	6	2	3

2۔ ایک فیکٹری کے 50 ملازموں کو روز ملنے والی اجرت کے مندرجہ ذیل بٹاؤ پر غور کیجئے۔

روزانہ ملنے والی اجرت (روپیوں میں)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
ملازموں کی تعداد	12	14	8	6	10

3۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ کسی علاقہ کے بچوں کو ملنے والے روزانہ کے جیب خرچ کو دیکھا گیا ہے درمیانہ روزانہ کا خرچ 18 روپے ہے گمشدہ تعدد f معلوم کیجیے۔

روزانہ جیب خرچ روپیوں میں	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
بچوں کی تعداد	7	6	9	13	f	5	4

4۔ ایک اسپتال میں ایک ڈاکٹر نے 30 عورتوں کی دل کی دھڑکن فی منٹ ریکارڈ کی اور ان کا خلاصہ ذیل کے جدول میں کیا گیا ہے۔ ان عورتوں کی فی منٹ دل کی دھڑکن کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

فی منٹ دل کی دھڑکن	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
عورتوں کی تعداد	2	4	3	8	7	4	2

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5۔ ایک پھٹکر مارکیٹ میں پھل فروش پیکنگ بوکس میں رکھے ہوئے آموں کے بیچتے ہیں ان بکسوں میں آموں کی تعداد مختلف ہوتی ہے۔ مندرجہ ذیل میں آموں کا بکسوں کی تعداد کے مطابق بٹاؤ دیا ہوا ہے۔

آموں کی تعداد	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
بکسوں کی تعداد	15	110	135	115	25

6۔ مندرجہ ذیل جدول ایک علاقہ کے 25 گھروں کا کھانے پر ہوروزانہ کا خرچ دیکھا گیا ہے۔

روزخرچ (روپیوں میں)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
گھروں کی تعداد	4	5	12	2	2

کھانے پر ہونے والے روزانہ کے خرچ کا درمیانہ معلوم کیجیے، اس کے لئے آپ کوئی بھی مناسب طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

7۔ ہوا میں SO_2 کا ارتکاز (concentration) معلوم کیجیے (ppm) ایک شہر کے 30 علاقوں سے اکٹھے کئے گئے اعداد و شمار نیچے دئے گئے ہیں۔

SO_2 کا ارتکاز (in PPm)	تعداد
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

ہوا میں SO_2 کا درمیانہ ارتکاز معلوم کیجیے۔

8۔ ایک کلاس ٹیچر کے پاس مندرجہ ذیل 40 طلبا کا پورے سال کا غیر حاضری کا ریکارڈ ہے۔ طلبا جتنے دن غیر حاضر رہیں۔ اس کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

دنوں کی تعداد	0-6	6-10	10-14	14-20	20-28	28-38	38-40
طلباء کی تعداد	11	10	7	4	4	3	1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9۔ ذیل میں 35 شہروں کی خواندگی (فی صد میں) کی شرح دی گئی ہے۔خواندگی کی درمیانہ شرح معلوم کیجیے۔

(%میں) خواندگی کی شرح	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
شہروں کی تعداد	3	10	11	8	3

13.3 مرتب اعداد و شمار کا موڈ

یاد کیجئے آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ تمام مشاہدات کے درمیان جو مشاہدہ سب سے زیادہ مرتبہ آتا ہے یا جس مشاہدہ کی قدر کا تعدد سب سے زیادہ ہو، موڈ کہلاتا ہے۔مزید ہم نے غیر مرتب اعداد و شمار کا موڈ معلوم کرنے کا طریقہ بھی سیکھا۔ یہاں ہم (مرتب) اعداد و شمار کا موڈ معلوم کرنا سیکھیں گے۔ یہ ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ قدروں کا تعداد اعظم ہو۔ایسی صورت حال میں اعداد و شمار (multimodal) کثیر موڈ والے کہلاتے ہیں۔حالانکہ مرتب اعداد و شمار میں بھی کثیر موڈ ہو سکتے ہیں۔لیکن اس سیکشن میں ہم اپنا مطالعہ صرف واحد موڈ تک ہی محدود رکھیں گے۔

آیئے یاد کرتے ہیں کہ ہم نے غیر مرتب اعداد شمار کا موڈ کس طرح معلوم کیا تھا مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

مثال 4: ایک بولر کے ذریعے 10 میچوں میں لئے جانے والے وکٹوں کی تعداد ذیل میں دی گئی۔

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

اعداد و شمار کا موڈ معلوم کیجئے۔

حل : آیئے دئے گئے اعداد و شمار کا تعدد بٹاؤ جدول بناتے ہیں۔

وکٹوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5	6
میچوں کی تعداد	1	1	3	2	1	1	1

صاف ظاہر ہے، 2، وکٹوں کی وہ تعداد ہے جو بولر نے سب سے زیادہ لی ہیں (یعنی 3) اس لئے ان اعداد شمار کا موڈ 2 ہے۔

مرتب تعدد بٹاؤ میں یہ ممکن نہیں کہ اب صرف تعدد کو دیکھ کر ہی موڈ میں بانٹ دیں، یہاں ہم پہلے اس کلاس کو تلاش کریں جس کا تعدد سب سے زیادہ ہے، جو **موڈل کلاس** کہلاتی ہے۔ یہ موڈ اس موڈل کلاس میں کہیں ہوگا اور اس کو ہم مندرجہ ذیل فارمولہ سے معلوم کریں گے۔

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں l = موڈل کلاس کی نچلی حد

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

h = کلاس وقفہ کا سائز (یہ مانتے ہوئے کہ تمام کلاس وقفوں کے سائز یکساں ہیں)

f_1 = موڈل کلاس کا تعدد ،

f_0 = موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد

f_2 = موڈل کلاس کے بعد کا تعدد

اس فارمولہ کے استعمال کی وضاحت کے لیے آیئے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 5: ایک طلباء کے گروہ نے ایک رہائش گاہ کے 20 کنبوں پر سروے کیا۔ اس کے مطابق ایک کنبے کے ممبروں کی تعداد درج ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔

کنبہ کا سائز	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
کنبوں کی تعداد	7	8	2	2	1

اس مفروضہ کے لئے موڈ معلوم کیجئے۔

حل: یہاں اعظم تعدد 8 ہے۔ اور اس کی نظیری کلاس 5–3 ہے اس لئے موڈل کلاس 5–3 ہے۔

اب

موڈل کلاس = 5–3 موڈل کلاس کی نچلی حد $(l) = 3$ کلاس کا سائز $(h) = 2$

موڈل کلاس کا تعدد $f_1 = 8$ موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد $f_0 = 7$

موڈل کلاس کے بعد کا تعدد $= 2$

اس لیے اب ان قدروں کو فارمولہ میں رکھتے ہیں

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

$$= 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

اس طرح سے مذکورہ بالا اعداد و شمار کا موڈ 3.28 ہے۔

مثال 6: ریاضی کے ایک امتحان میں 30 طلباء کے ذریعے حاصل کردہ نمبروں کا بٹاؤ مثال 1 کے جدول 13.3 میں دیا گیا ہے۔ اس اعداد و شمار کا موڈ معلوم کیجیے۔ درمیانہ اور موڈ کا موازنہ کریں اور ان کی ترجمانی کریں۔

حل: مثال 1 کے جدول 13.3 میں کیونکہ طلباء کی اعظم تعداد (یعنی 7) کے نمبر وقفہ (55–40) میں ہیں۔ اس لیے موڈل کلاس 40–55

اس لئے موڈل کلاس کی نچلی (زیریں) حد $= 40$

کلاس کا سائز $(h) = 15$،

موڈل کلاس کا تعدد $f_1 = 7$

موڈل کلاس سے پہلے کا تعدد $f_0 = 3$ ،

موڈل کلاس کے بعد کا تعد $f_2 = 6$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اب فارمولہ استعمال کرنے پر

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{موڈ} = 40 + \left(\frac{7-3}{14-3-6}\right) \times 15 = 52$

اس لیے نمبروں کا موڈ 52 ہے۔

اب، مثال 1 سے آپ کو معلوم ہے کہ اس کا درمیانہ 62 ہے، اس طرح سے زیادہ تر طلباء نے 52 نمبر حاصل کیے اور ایک طالب علم نے اوسطاً 62 نمبر حاصل کیے ہیں۔

ریمارک:

1۔ مثال 6 میں موڈ درمیانہ سے کم ہے، لیکن کچھ اور سوالوں میں یہ درمیانہ سے زیادہ یا اس کے برابر بھی ہوسکتا ہے۔

2۔ یہ صورت حال کے تقاضے پر منحصر ہے کہ ہم طلبا کے ذریعے حاصل کئے گئے نمبروں کا اوسط معلوم کریں یا زیادہ طلبا کے ذریعے خاص نمبروں کا اوسط معلوم کریں۔ پہلی صورت حال میں درمیان مطلوب ہے جب کہ دوسری صورت حال میں موڈ۔

سرگرمی 3: مشغلہ 2 میں آپ نے جو گروپ بنائے تھے اسے انہیں گروپ پر غور کیجئے۔ اور ان کو وہی کام دیجئے جو آپ نے مشغلہ میں دیئے تھے۔ ہر ایک گروپ سے اعداد و شمار کا موڈ معلوم کرنے کے لیے کہیے وہ اس کا موازنہ درمیانہ سے کریں اور دونوں کے مفہوم کی ترجمانی بھی کریں۔

ریمارک: غیر مساوی کلاس سائز کے مرتب اعداد کا موڈ بھی آپ معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ہم اس باب میں اس پر بحث نہیں کر رہے ہیں۔

مشق 13.2

1۔ مندرجہ ذیل جدول میں ایک سال کے دوران کی ہسپتال میں داخل ہونے والے مریضوں کی کسی عمریں دی ہوئی ہیں۔

عمر (سالوں میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	5

اوپر دئے گئے اعداد و شمار کا موڈ اور درمیانہ معلوم کیجیے اور مرکزی رجحان کی دو پیمائشوں کی ترجمان اور موازنہ کیجیے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2۔ مندرجہ ذیل اعداد وشمار 225 بجلی کے آلات کی زندگی کا وقت (گھنٹوں میں) کے سلسلہ میں اطلاعات کو ظاہر کرتے ہیں۔ آلات کا موڈل عمر کی مدت معلوم کیجیے۔

(گھنٹوں میں) زندگی کا وقت	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
تعداد	10	35	52	61	38	29

3۔مندرجہ ذیل اعداد وشمار کا بٹاؤ ایک گاؤں کے 200 کنبوں کے گھر کا کل ماہانہ خرچ دیا ہوا ہے کنبوں کا موڈل ماہانہ خرچ معلوم کیجئے اوران کا درمیانہ ماہانہ خرچ بھی معلوم کیجیے۔

کنبوں کی تعداد	خرچ (روپیوں میں)
24	1000 - 1500
40	1500 - 2000
33	2000 - 2500
28	2500 - 3000
30	3000 - 3500
22	3500 - 4000
16	4000 - 4500
7	4500 - 5000

4۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ ہندوستان کے ہائرسیکنڈری اسکولوں میں صوبوں کے حساب سے استاد طلب علم مثبت دی ہوئی ہے ان اعداد وشمار کا درمیانہ اور موڈ معلوم کیجئے اور دونوں پیمائشوں کی ترجمانی کیجیے۔

صوبوں/UT	طلباء کی تعداد فی استاد
3	15 - 20
8	20 - 25
9	25 - 30
10	30 - 35
3	35 - 40
0	40 - 45
0	45 - 50
2	50 - 55

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. مندرجہ ذیل بٹاؤ بین الاقوامی کرکٹ میچوں میں دنیا کے چوٹی کے بلے بازوں کے ذریعے اسکور کئے گئے رنوں کی تعداد کو دکھایا ان اعداد و شمار کا موڈ معلوم کیجیے۔

بلے بازوں کی تعداد	اسکور کئے گئے رن
4	3000 - 4000
18	4000 - 5000
9	5000 - 6000
7	6000 - 7000
6	7000 - 8000
3	8000 - 9000
1	9000 - 10000
1	10000 - 11000

6۔ 3 منٹ کے 100 وقفوں میں ایک طالب علم نے سڑک کے کسی ایک مقام پر گذرنے والی کاروں کی تعداد کو نوٹ کیا اور اس کا خلاصہ مندرجہ ذیل جدول میں کیا، ان اعداد و شمار کا موڈ معلوم کیجیے۔

کاروں کی تعداد	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
تعدد	7	14	13	12	20	11	15	8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.4 مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ

جیسا کہ آپ نویں کلاس میں پڑھ چکے ہیں کہ وسطانیہ مرکزی رجحان کی وہ پیمائش ہے۔ جو اس کی اعداد و شمار میں موجود مشاہدات، بیچ کے مشاہدہ کو ظاہر کرتا ہے۔ یاد کیجئے غیر مرتب اعداد و شمار کا مطالعہ معلوم کرنے کے لئے پہلے ہم مشاہدات کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں رکھتے ہیں۔ اور پھر اگر n طاق ہوتا ہے۔ تو $\left(\frac{n+1}{2}\right)$th مشاہدات درمیانہ اور اگر n جفت ہو تو $\left(\frac{n}{2}\right)$th، $\left(\frac{n}{2}+1\right)$th مشاہدہ کا اوسط

100 طالب علموں کے ایک ٹسٹ میں 50 میں حاصل کئے گئے نمبر دکھائے گئے ہیں ہمیں اس مفروضہ کا وسطانیہ معلوم کرنا ہو تو

حاصل کردہ نمبر	20	29	28	33	42	38	43	25
طلبا کی تعداد	6	28	24	15	2	4	1	20

پہلے ہم نمبروں بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں اور مندرجہ ذیل تعددی جدول بناتے ہیں۔

جدول 13.9

حاصل کردہ نمبر	طلبا کی تعداد
6	20
20	25
24	28
28	29
15	33
4	38
2	42
1	43
100	کل

یہاں n=100 جو جفت ہے، اس لئے وسطانیہ $\left(\frac{n}{2}\right)th$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$th مشاہدہ کا اوسط ہوگا یعنی 50^{th} ویں اور 51^{th} ویں اور مشاہدہ ان مشاہدوں کو معلوم کرنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل طریقوں سے آگے بڑھتے ہیں۔

جدول 13.10

طلبا کی تعداد	حاصل کردہ اعداد
6	20
6 + 20 = 26	25 تک
26 + 24 = 50	28 تک
50 + 28 = 78	29 تک
78 + 15 = 93	33 تک
93 + 4 = 97	38 تک
97 + 2 = 99	42 تک
99 + 1 = 100	43 تک

اب اس اطلاع کو تعدد جدول میں دکھانے کے لئے ہم ایک اور کالم اس میں جوڑتے ہیں جسے **مجموعی تعدد کالم** کہتے ہیں۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جدول 13.11

حاصل کردہ نمبر	طلباء کی تعداد	مجموعی تعدد
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ 50th مشاہدہ 28 (کیوں؟) 51st مشاہد 29 ہے۔

اس لئے وسطانیہ $= \frac{28 + 29}{2} = 28.5$

ریمارک: جدول 13.11 کا حصہ جس میں کالم 1 اور 3 ہیں۔ **مجموعی تعدد جدول** کہلاتا ہے۔ نمبروں کا وسطانیہ 28.5 سے پتہ چلتا ہے کہ 50% طلبا کے نمبر 28.5 سے کم اور 50% طلبا کے نمبر 28.5 سے زیادہ ہیں۔

آیئے اب دیکھتے ہیں کہ مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

آیئے اب کسی امتحان میں 53 طلبا کے ذریعے 100 نمبروں میں حاصل کردہ نمبروں کے مرتب تعددی بٹاؤ پر غور کرتے ہیں جو ذیل میں دیا ہوا ہے۔

جدول 13.12

نمبر	طلباء کی تعداد
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس جدول کو دیکھ کر مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے

کتنے طلبا نے 10 سے کم نمبر حاصل کئے؟ اس کا جواب واضح ہے کہ 5 ہے۔ کتنے طلباء نے 20 نمبروں سے کم نمبر حاصل کئے ان طلبا کی تعداد میں جنہوں نے 20 سے کم نمبر حاصل کئے ہیں وہ طلبا بھی شامل ہیں جنہوں 10-0 کے درمیان حاصل کئے ہیں۔

اور وہ طلبا بھی جنہوں نے 20-10 کے درمیان نمبر حاصل کئے ہیں اس لئے طلباء جنہوں نے 20 سے کم نمبر حاصل کئے ہیں اس کی تعداد ہے 3+5 یعنی 8 اس لئے ہم کہتے ہیں کہ کلاس 20 – 10 کا مجموعی تعدد 8 ہے۔

اسی طرح سے ہم دوسری کلاسوں کی مجموعی تعدد بھی معلوم کر سکتے ہیں یعنی ان طلبا کی تعداد جن کے نمبر 30 سے کم 40 سے کم 100 سے کم۔ ہم ان کو جدول 13.13 میں دیکھیں گے۔

جدول 13.13

طلباء کی تعداد	حاصل کردہ نمبر
5	10 سے کم
5 + 3 = 8	20 سے کم
8 + 4 = 12	30 سے کم
12 + 3 = 15	40 سے کم
15 + 3 = 18	50 سے کم
18 + 4 = 22	60 سے کم
22 + 7 = 29	70 سے کم
29 + 9 = 38	80 سے کم
38 + 7 = 45	90 سے کم
45 + 8 = 53	100 سے کم

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مذکورہ بٹاؤ (**سے کم**) **مجموعی تعدد بٹاؤ** کہلاتا ہے۔ یہاں 10, 20, 30,...100 ترتیب وار کلاسوں کی بالائی حدود ہیں۔

ہم اسی طرح سے ان طلباء کی تعداد کا جدول بنا سکتے ہیں جنہوں نے 0 سے زیادہ یا برابر، 10 سے زیادہ یا برابر 20 سے زیادہ یا برابر نمبر حاصل کئے ہوں جدول 13.12 سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ تمام 53 طلباء نے 0 سے زیادہ یا برابر نمبر حاصل کئے ہیں۔ کیونکہ ایسے 5 طلباء نے 10 یا 10 سے زیادہ نمبر حاصل کئے ہیں۔ یعنی 48=5-53 طلباء نے ۱۰ سے مساوی یا زیادہ نمبر حاصل کئے ہیں۔

اسی طرح سے جاری رکھتے ہیں ہمیں ان طلباء کی تعداد معلوم ہو جائے گی جنہوں نے 20 یا 20 سے زیادہ نمبر حاصل کئے ہیں یعنی 3 – 48 = 45 طلباء اور 30 سے یا 30 سے زیادہ 4 – 45 = 41 طلباء اور آگے

تک جیسا کہ جدول 13.14 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 13.14

حاصل کردہ نمبر	طلباء کی تعداد (مجموعی تعدد)
0 کے برابر یا زیادہ	53
10 کے برابر یا زیادہ	53 – 5 = 48
20 کے برابر یا زیادہ	48 – 3 = 45
30 کے برابر یا زیادہ	45 – 4 = 41
40 کے برابر یا زیادہ	41 – 3 = 38
50 کے برابر یا زیادہ	38 – 3 = 35
60 کے برابر یا زیادہ	35 – 4 = 31
70 کے برابر یا زیادہ	31 – 7 = 24
80 کے برابر یا زیادہ	24 – 9 = 15
90 کے برابر یا زیادہ	15 – 7 = 8

مندرجہ بالا جدول **زیادہ قسم کا مجموعی تعدد جدول** کہلاتا ہے۔ یہاں 0, 10, 20, ...90 مناظر کلاس وقفوں کے نچلی (زیریں) حد کہلاتی ہے۔ اس لئے مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ معلوم کرنے کے اس میں سے کسی ایک مجموعی تعدد جدول کا استعمال کر سکتے ہیں۔

آیئے جدول 13.12 اور 13.13 جدول کو ملا کر جدول 13.15 جدول حاصل کرتے ہیں جو ذیل میں دی گئی ہے۔

جدول 13.15

نمبر	طلباء کی تعداد (f)	مجموعی تعدد (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اب مرتب اعداد وشمار میں ہم مجموعی تعدد کو دیکھ کر وسطی مشاہدہ نہیں معلوم کر سکتے کیونکہ وسطی قدر کلاس وقفہ میں کہیں ہوگی۔ اس لئے یہ ضروری ہے کہ یہ قدر اس کلاس کے اندر تلاش کی جائے جو تعددی بٹاؤ کو دو نصف میں تقسیم کر دے۔ لیکن یہ کلاس کون سی ہوگی؟

اس کلاس کو معلوم کرنے کے لئے ہم تمام کلاسوں کا مجموعی تعدد معلوم کرتے ہیں اور $\frac{n}{2}$۔

اور پھر ہم وہ کلاس تلاش کرتے ہیں جس کا مجموعی تعدد $\frac{n}{2}$ (اور اسے نزدیک سے بڑا ہو۔)

اس کو **وسطانیہ کلاس** کہتے ہیں اوپر دئے گئے بٹاؤ میں n=53، اس لئے $\frac{n}{2}$ =26.5 اب

60-70 وہ کلاس ہے جس کا مجموعی تعدد 29 ہے جو $\frac{n}{2}$ سے بڑا (اور نزدیک) ہے یعنی 26.5۔

اس لئے 60-70 وسطانیہ کلاس ہے

وسطانیہ کلاس معلوم کرنے کے بعد ہم وسطانیہ معلوم کرنے کے لئے مندرجہ ذیل فارمولہ کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h \text{، جہاں}$$

l = وسطانیہ کلاس کی نچلی حد

n = مشاہدات کی تعداد

cf = وسطانیہ کلاس کی پچھلی تعداد

f = وسطانیہ کلاس کی تعداد

h = کلاس سائز (یہ مانتے ہوئے کہ کلاس سائز یکساں ہو)

$\frac{n}{2} = 26.5$، $l = 60$، $\text{cf} = 22$، $f = 7$، $h = 10$ فارمولہ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{وسطانیہ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7} = 66.4$$

اس طرح سے تقریباً آدھے طلباء نے 66.4 سے زیادہ نمبر حاصل کئے۔

مثال 7: ایک اسکول کی X̲ کلاس کی 51 طالبات کی اونچائی (سینٹی میٹر میں) سے متعلق سروے کیا اور مندرجہ ذیل اعداد وشمار

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حاصل کئے گئے۔

لڑکیوں کی تعداد	اونچائی (cm میں)
4	140 سے کم
11	145 سے کم
29	150 سے کم
40	155 سے کم
46	160 سے کم
51	165 سے کم

وسطانیہ اونچائی معلوم کیجیے۔

حل: وسطانیہ اونچائی معلوم کرنے کے لئے ہمیں کلاس وقفہ اور ان کا نظیری تعدد معلوم کرنے میں دیا ہوا تعددی بٹاؤ کم سے کم کا ہے، 140, 145, 150, ...165 سے، نظیری کلاس وقفوں کی بالائی حدیں ہیں۔ اس لئے کلاس 140 سے کم ہے:

140-145, 145-150, ...,160-165 مشاہدہ کیجئے کہ دئے ہوئے بٹاؤ سے ہم پاتے کہ 4 لڑکیاں ایسی ہیں جن کی اونچائی 140 سے کم ہے یعنی 140 سے کم کے کلاس وقفوں کا تعدد 4 ہے۔ 11 لڑکیاں ایسی ہیں جن کی اونچائی 145 سے کم ہے اور 4 ایسی ہیں جن کی 140 سے کم ہے اس لئے ان لڑکیوں کی تعداد اونچائی وقفہ 140-145 ہے۔(4-11) یعنی 7 اسی طرح سے 145-150 کا تعدد (11-29) یعنی 18 ہے اور 150-155 کا تعدد (29-40) یعنی 11 ہے اور آگے تک۔ اس لئے ہمارا تعددی بٹاؤ جدول مجموعی تعدد کے ساتھ ہوگا۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

جدول 13.16

کلاس وقفہ	تعدد	مجموعی تعدد
140 سے کم	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

اب n=51، اس لئے $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ = یہ مشاہدہ (145-150) کے درمیان واقع ہے

تب l (نچلی حد) =145

cf (145-150 سے پہلے کی کلاس کا مجموعی تعدد) =11

f (وسطانیہ کلاس 145-150 کا تعدد) =18

h (کلاس کا سائز) =5

فارمولہ استعمال کرنے پر $\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$

$$\text{وسطانیہ} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

اس لئے لڑکیوں کی وسطانیہ اونچائی 149.03 سینٹی میٹر ہے۔

اس کا مطلب ہے کہ 50% لڑکیوں کی اونچائی اس اونچائی سے کم اور 50% کی اس اونچائی سے زیادہ ہے۔

مثال 8: مندرجہ ذیل اعداد و شمار کا وسطانیہ 525 ہے، x اور y کی قدر معلوم کیجئے اگر کل تعدد 100 ہے۔

کلاس وقفہ	تعدد
0-100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

حل:

کلاس کے وقفہ	تعدد	مجموعی تعدد
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

یہ دیا ہوا ہے کہ $n = 100$، اس لئے $76 + x + y = 100$ یعنی $x + y = 24$ (1)

وسطانیہ 525 ہے جو 500 - 600 کے درمیان ہے۔ اس لئے $l = 500$، $h = 100$، $f = 20$، $cf = 36 + x$،

فارمولہ کو استعمال کرنے پر، $\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h$,

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20} \right) \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

اس لئے (1) ہمیں ملتا ہے $9 + y = 24$

یعنی $y = 15$

اب آپ نے تینوں مرکزی رجحان کے پیمائشوں کے بارے میں پڑھ لیا۔ آیئے اب بحث کرتے ہیں کہ **کون سی پیمائش کسی خاص ضرورت کے لئے سب سے بہتر ہے۔**

درمیانہ سب سے زیادہ استعمال ہونے والی مرکزی رجحان کی پیمائش ہے کیونکہ اس میں ہم تمام مشاہدات کو شامل کرتے ہیں اور یہ سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدہ کے درمیان ہوتا ہے۔ یہ ہمیں دو یا دو سے زیادہ بٹاؤ کا موازنہ کرنے میں بھی مدد دیتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی خاص امتحان میں مختلف اسکولوں میں طلباء کے نتائج کا موازنہ کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ کس اسکول کی کارکردگی سب سے بہتر ہے۔

جب کہ اعداد و شمار کی انتہائی قدریں (سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی) درمیانہ پر اثر انداز ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر کم یا زیادہ تعدد کی کلاسوں کا درمیانہ اعداد و شمار کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔ لیکن اگر ایک کلاس کا تعدد مان لیجیے 2 ہے اور 5 دوسری کلاسوں کا تعدد 20 ,25 ,20 ,21 ,18 تب درمیانہ اعداد و شمار کی صحیح عکاسی نہیں کرے گا۔

ایسے مسئلوں میں جہاں انفرادی مشاہدات کی کوئی اہمیت نہیں ہوتی اور ہمیں ایک اشارتی مشاہدہ معلوم کرنا ہوتا ہے، ایسی حالت میں وسطانیہ سب سے زیادہ مناسب معلوم ہوتا ہے مثال کے طور پر ملک کے ملازمین کا اوسط اجرات ملازمین کے ذریعے مخصوص پیداوار کی شرح وغیرہ معلوم کرا جرت وغیرہ۔ یہ ایسی صورت حال ہیں جہاں انتہائی قدریں ہوتی ہیں اس لئے ان حالتوں کے درمیانہ کے بجائے وسطانیہ بہتر مرکزی رجحان کی پیمائش ہے۔

ایسی صورتِ حال جس میں بہت ہی اہم چیز ہے یا ایسی چیزیں جن کی تکرار ہوتی ہو، کو معلوم کرنا مقصد ہو اس کے لئے موڈ بہتر پیمائش ہے مثال کے طور پر سب سے زیادہ دیکھے جانے والا T. V. کا پروگرام، کوئی ایسی شے جس کی مارکیٹ میں سب سے زیادہ مانگ ہو یا زیادہ تر لوگوں کے ذریعہ استعمال کئے جانے والے رنگ کی گاڑی وغیرہ۔

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

ریمارک:

1. مرکزی رجحان کی پیمائشوں میں ایک علمی تعلق ہے۔

   درمیانہ 2 + موڈ = 3 وسطانیہ

2. مرتب اعداد و شمار کے غیر مساوی کلاس سائزوں کا وسطانیہ بھی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہاں ہم اس کے بارے میں نہیں پڑھیں گے۔

مشق 13.3

1۔ مندرجہ ذیل تعددی بٹاؤ ایک علاقہ کے 68 لوگوں کا بجلی کا ماہانہ خرچ دیا ہوا ہے۔ ان اعداد شمار کا درمیانہ، وسطانیہ اور موڈ معلوم کیجیے اور ان کا موازنہ کیجیے گا۔

لوگوں کی تعداد	ماہانا خرچ
4	65 - 85
5	85 - 105
13	105 - 125
20	125 - 145
14	145 - 165
8	165 - 185
4	185 - 205

2۔ اگر مندرجہ ذیل بٹاؤ کا وسطانیہ 28.5 ہے x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔

تعدد	کلاس وقفہ
5	0-10
x	10-20
20	20-30
15	30-40
y	40-50
5	50-60
60	کل

3۔ ایک LIC ایجنٹ نے 100 پالیسی رکھنے والے لوگوں کی عمروں کے بٹاؤ کے اعداد و شمار مندرجہ ذیل دیئے ہیں۔ وسطانیہ عمر معلوم کیجئے جب کہ پالیسی صرف ان لوگوں کو دی جاتی ہے جن کی عمر 18 سال سے 60 سال کے درمیان ہو۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

عمر (سالوں میں)	پولیسی رکھنے والوں کی تعداد
20 سے کم	2
25 سے کم	6
30 سے کم	24
35 سے کم	45
40 سے کم	78
45 سے کم	89
50 سے کم	92
55 سے کم	98
60 سے کم	100

4۔ ایک پودے کی 40 پتیوں کی لمبائیاں نزدیکی ملی میٹر تک پیمائش کی گئیں ہیں اور حاصل کردہ اعداد و شمار کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے۔

لمبائی (ملی میٹر میں)	پتیوں کی تعداد
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-172	4
172-180	2

پتیوں کی وسطانیہ لمبائی معلوم کیجیے (اشارہ: وسطانیہ معلوم کرنے کے لئے اعداد و شمار کو مسلسل کلاسوں میں تبدیل کیجیے۔ کیونکہ فارمولہ مسلسل کلاسوں کے لئے۔ کلاس میں اس طرح سے بدل کر ہو جائیں گے۔ - 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5 -

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5۔ مندرجہ ذیل بٹاؤ جدول 400 نبیان لیمپوں کے عمر کی مدت کار (زندگی کا وقت) کو دکھاتا ہے۔ لیمپ کی وسطانیہ عمر کی مدت کار معلوم کیجیے۔

لیمپوں کی تعداد	Lifetime (گھنٹوں میں)
14	1500 - 2000
56	2000 - 2500
60	2500 - 3000
86	3000 - 3500
74	3500 - 4000
62	4000 - 4500
48	4500 - 5000

6۔ ایک ٹیلیفون مقامی ڈائریکٹری 100 سرخاندانی چنے گئے۔ ہر سرنیم میں موجود انگریزی کے حروف کی تعداد کا تعددی بٹاؤ ذیل میں دیا گیا ہے۔

حروف کی تعداد	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
(Surname) کی تعداد	6	30	40	16	4	4

خاندانی کے حروف کا وسطانیہ معلوم کیجیے، سرنیم کے حروف کی تعداد کا درمیانہ بھی معلوم کیجئے؟ سرنیم کا موڈل سائز بھی معلوم کیجئے۔

7۔ مندرجہ مندرجہ بٹاؤ ایک کلاس کے ایک 30 طلباء کے اوزان کا دکھاتا ہے، طلباء کا وسطانیہ وزن معلوم کیجیے۔

وزن (کلوگرام)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
طلباء کی تعداد	2	3	8	6	6	3	2

@PSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ مرتب اعداد و شمار کا درمیانہ معلوم کیا جا سکتا ہے

(i) راست طریقہ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) درمیانہ کا طریقہ $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) حرکت انحراف کا طریقہ $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

اس مفروضہ کے ساتھ کہ کسی کلاس کا تعدد اس کے وسطی نقطہ کے گرد مرکوز ہے۔ جو کلاس مارک کہلاتا ہے۔

2۔ مرتب اعداد و شمار کا موڈ مندرجہ ذیل فارمولہ کو استعمال کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{موڈ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں علامتیں، عام مفہوم میں ہیں

3۔ کسی کلاس کا مجموعی تعدد وہ تعدد ہے جو تمام کلاسوں کے تعدد کو ان کے پچھلے تعدد میں جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

4۔ مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ مندرجہ ذیل فارمولہ استعمال کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$$

قارئین کے لئے نوٹ

مرتب اعداد و شمار کا وسطانیہ اور موڈ معلوم کرنے کے لئے یہ ضروری ہے کہ فارمولہ استعمال کرنے سے پہلے یہ یقینی کر لیا جائے کہ کلاس وقفہ مسلسل ہوں۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED



14 احتمال (PROBABILITY)

نظریہ احتمال اور نظریہ اغلاط دونوں ہی اب ان مسائل کے ایک بڑے مجموعے کی تشکیل کرتے ہیں جو نہ صرف ریاضی کی دلچسپی کا خاص موضوع ہیں بلکہ عمل اعتبار سے بھی غیرمعمولی ریاضیاتی اہمیت کے حامل ہے ۔

آر۔ایس۔ووڈوارڈ (R.S.Woodward)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

14.1 احتمال: ایک نظریاتی طریقہ کار

آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

مان لیجئے ایک سکہ کو بلا منصوبہ اچھالا گیا

جب ہم کسی سکہ کے بارے میں بات کرتے ہیں ہم یہ مان کے چلتے ہیں کہ یہ فیر ہوگا یعنی ایسی کوئی وجہ نہیں ہوگی یہ صرف ہیڈ میں آئے یا ٹیل میں آئے ۔سکہ کی اس خاصیت کو ہم غیر جانب دارانہ (unbaised) کہتے ہیں جبکہ بلا منصوبہ اچھالنا سے مراد ہے کہ سکہ آزادانہ طور پر بغیر کسی مداخلت کے زمین پر گرے۔

ہم پہلے جانتے ہیں کہ سکہ صرف دو ممکنہ طریقوں سے زمین پر آئے گا یا ہیڈ کی طرف یا ٹیل کا (ہم اس امکان کو خارج کرتے ہیں کہ یہ اپنے کنارے پر کھڑا گرے، جو کے ممکن ہوسکتا ہے) اگر سکہ کسی ریت پر گرے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ہر ایک نتائج ہیڈ یا ٹیل کے واقع ہونے کے برابر ہیں ہم اس کو کہتے ہیں کہ نتائج ہیڈ یا ٹیل مساوی امکانی ہیں۔

مساوی امکانی نتائج کی ایک اور مثال مان لیجیے ہم ایک پانسہ کو پھینکتے ہیں۔ پانسہ سے ہماری مراد انصاف پر مبنی ہمیشہ ایک پانسہ ہوتا ہے۔ ممکنہ نتائج کتنے ہیں؟ یہ ہیں 1, 2, 3, 4, 5,6 ہر نمبر کے آنے کا احتمال یکساں ہے۔ اس لئے ایک پانسہ کو پھینکنے پر مساوی امکان نتائج ہیں 1,2,3,4,5 اور 6

کیا ہر ایک تجربہ کے نتائج مساوی امکانی ہوتے ہیں؟ آیئے دیکھتے ہیں۔

مان لیجئے ایک بیگ میں 4 لال اور 1 نیلی گیند ہے اور آپ بیگ میں دیکھے بغیر ایک گیند نکالتے ہیں نتائج کیا ہیں۔ کیا لال گیند اور نیلی گیند کے آنے کے نتائج مساوی امکانی ہیں؟ کیونکہ بیگ میں 4 لال گیندیں ہیں اور 1 لال گیند اس لئے اب اس بات سے اتفاق کریں گے کہ لال گیند کے آنے کے امکان نیلی گیند کے مقابلہ میں زیادہ ہیں۔ اس لئے (لال گیند یا نیل گیند) کے نتائج مساوی امکان نہیں ہیں جب کہ کسی بھی رنگ کی گیند آنے کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔ اس لئے یہ ضروری نہیں کہ تمام تجربوں کے نتائج مساوی امکانی ہوں۔

لیکن اس باب میں صرف ان **تجربات پر بحث کریں گے جس کے نتائج مساوی امکانی ہوں**

نویں کلاس میں ہم نے کسی E وقوعہ کا تجرباتی یا علمی احتمال P(E) کو ہم نے اس طرح معرف کیا تھا۔

$$P(E) = \frac{\text{کوشش (trial) کی وہ تعداد جس میں وقوعہ واقع ہوتا ہے}}{\text{کوششوں (trials) کی کل تعداد}}$$

احتمال کی علمی ترجمان کا استعمال ہر ایک ایسے وقوعہ کے لئے کر سکتے ہیں جو کسی ایسے تجربہ سے منسلک ہو جس کی تکرار کثیر تعداد میں دہرائی جائے۔ بہت سی صورت حال میں کسی تجربہ کی تکرار کی کچھ پابندیاں ہیں، جیسے یا تو یہ کافی مہنگا ہو سکتا ہے یا اس صورت حال کے مطابق نہیں ہے لیکن یہ سکہ اچھالنے یا شے کو پھینکنے کے سلسلہ میں یہ بہت بہتر طور پر کام کرتا ہے لیکن سکی سٹیلائٹ کو () کرنے کے تجربہ جس سے اس کے launch کے وقت ناکام ہونے کا علمی احتمال کو دہرانہ یا زلزلہ کے عمل کو علمی احتمال معلوم کرنے کے لئے دہرانا کہ زلزلہ کے دوران کثیر منزلہ عمارتیں برباد ہوتی ہیں؟

ایسے تجربہ جن میں ہم کچھ مفروضات کے لئے ذہنی طور پر تیار ہوتے ہیں تجربہ کی تکرار سے بچا سکتا ہے۔ کیونکہ مفروضات درست طریقہ سے صحیح احتمال معلوم کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ مساوی امکانی نتائج کا مفروضہ (جو کے بہت سے تجربوں کے لئے Valid ہوتا ہے، جیسے اوپر دی گئی سکہ اور پاشے کی دو مثالیں) ایک ایسا مفروضہ ہے جس کی وجہ سے ہمیں کسی وقوعہ کے احتمال کی مندرجہ ذیل تعریف ملتی ہے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ایک وقوعہ E کی تھوریٹیکل احتمال (یا کلاسیکل احتمال) جسے P(E) لکھتے ہیں، معرف ہے

$$P(E)=\frac{\text{E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج}}$$

جہاں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ نتائج مساوی امکانی ہیں، ہم تھیوریٹکل احتمال کو مختصراً احتمال لکھیں گے۔

احتمال کی تعریف 1795 میں Pierre Simon Laplace نے کی



پیئر سے سائمن لیپلیس
(1749 – 1827)

احتمال کے نظریہ کی شروعات 16ویں صدی میں ہوئی جب ایک اطالوی ریاضی داں J.Cardan نے اس مضمون پر ایک کتاب لکھی، امکان کے کھیل پر کتاب، جب سے یہ (احتمال) وجود میں آیا، احتمال کے مطالعہ نے اپنے زمانے کے عظیم ریاضی دانوں James Bernoulli (1654–1705)، A. de Moivre (1667–1754) اور Pierre Simon Laplace ان میں کچھ ایسے نام ہیں جنھوں نے اس میدان میں بہت کچھ تعاون کیا۔ Laplace کی Theorie Analytique des Probabilités, 1812 احتمال کے نظریہ کے سلسلہ میں کسی ایک شخص کا سب سے عظیم تعاون سمجھا جاتا ہے۔ موجودہ سالوں میں احتمال کثرت سے استعمال، حیاتیات، معاشیات، جینیات، طبیعیات اور سماجیات میں ہوتا ہے۔

آیئے ان تجربات سے جڑے وقوعات کا احتمال معلوم کرتے ہیں، جو جن کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔

مثال 1: جب ایک سکہ کو ایک بار اچھالا جاتا ہے تو ہیڈ آنے کا احتمال معلوم کیجیے۔ ٹیل آنے کا احتمال بھی معلوم کیجئے۔

حل: سکہ کے اچھالنے کے تجربہ میں ممکنہ نتائج کی تعداد 2 ہے۔ ہیڈ H اور ٹیل T، مان لیجیے E، ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے۔ E کا وقوعہ ہے، E کے موافق نتائج (یعنی ہیڈ کا آنا) 1 ہے اس لئے

$$P(E)=P(\text{ہیڈ})=\frac{\text{E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}=\frac{1}{2}$$

اسی طرح سے F ٹیل کے آنے کی وقوعہ ہے؛ تب

$$P(F)=P(\text{ٹیل})=\frac{1}{2}\ (\text{کیوں؟})$$

مثال 2: ایک بیگ میں ایک لال گیند، ایک نیلی گیند اور ایک پیلی گیند ہے، تمام گیندیں ایک ہی سائز کی ہیں۔ کرتیکا اس بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک گیند باہر نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے۔ کہ اس

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(i) پیلی گیند نکالی (ii) لال گیند نکالی (iii) نیلی گیند نکالی

حل: کرتیکا نے بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک گیند نکالی ہے، تو اس لئے یہ مساوی امکانی ہے کہ کسی بھی رنگ کی گیند نکالی گئی ہو۔

مان لیجئے Y ایک وقوعہ ہے، پیلی گیند باہر نکالنے کا، B وقوعہ ہے نیلی گیند باہر نکالنے کا، R وقوعہ ہے لال بال نکالنے کا

اب ممکنہ نتائج کی تعداد = 3

(i) وقوعہ Y کے موافق نتائج = 1

اس لئے $P(Y) = \frac{1}{3}$

اسی طرح سے (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$ اور

ریمارک:

1۔ایک ایسا وقوعہ جس کا تجربہ میں صرف ایک نتائج ہو بنیادی وقوعہ کہلاتا ہے مثال 1 میں دونوں وقوعات E اور F بنیادی وقوعات میں ہے۔اسی طرح سے مثال 2 میں تمام وقوعات B, Y اور R بنیادی وقوعات ہیں

2۔مثال (1) میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ: $P(E) + P(F) = 1$

مثال 2 میں ہم نوٹ کرتے ہیں: $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

مشاہدہ کیجئے کہ **ایک تجربہ کے تمام بنیادی وقوعات کے احتمال کا حاصل جمع 1 ہوتا ہے** یہ عمومی طور پر بھی صحیح ہے۔

مثال 3: فرض کیجئے ہم ایک پانسہ کو ایک مرتبہ پھینکتے ہیں (i) 4 سے بڑے عدد آنے کا احتمال کیا ہے؟ (ii) 4 سے چھوٹے یا برابر کے عدد آنے کا احتمال کیا ہے؟

حل: (i) یہاں E، 4 سے بڑے عدد آنے کا وقوعہ ہے، ممکنہ نتائج کی تعداد ہے 1,2,3,4,5,6 اور E کے موافق نتائج ہیں 5 اور 6۔اس لئے E کے موافق نتائج کی تعداد ہے 2۔اس لئے

$$P(E) = P(\text{4 سے بڑے عدد}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) مان لیجیے F، 4 کے برابر یا چھوٹے عدد آنے کا وقوعہ ہے

ممکنہ نتائج = 6

@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

وقوعہ F کے موافق نتائج 1,2,3,4

اس لئے F کے موافق نتائج کی تعداد 4 ہے

اس لئے $P(F)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

کیا مذکورہ بالا مثال میں وقوعات E اور F بنیادی وقوعات ہیں؟ نہیں یہ نہیں ہیں کیونکہ F کے 2 نتائج ہیں اور F کے 4 نتائج ہیں۔

ریمارک: مثال (i) سے ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

$$P(E) + P(F)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

جہاں E، ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے اور F ٹیل آنے کا وقوعہ ہے مثال 3 کے (i) اور (ii) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$P(E) + P(F)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=1$$

جہاں E، 4>عدد آنے کا وقوعہ اور F، 4≤عدد آنے کا وقوعہ ہے۔

نوٹ کیجیے کہ ایسا عدد حاصل کرنا جو 4 سے بڑا نہیں ہے، ایسا ہی جیسے 4 سے چھوٹا یا اس کے برابر پر عدد حاصل کرنا اور اس کا برعکس بھی

اوپر (1) اور (2) میں E، F نہیں، کے جیسا نہیں ہے 9 ہاں یہ ٹھیک ہے ہم وقوعہ E نہیں ہے کو $\bar{E}$ سے ظاہر کرتے ہیں

اس لئے $P(E) + P(notE) = 1$

یعنی $P(E) + P(\bar{E})=1$ جس سے ہمیں ملتا ہے $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

عمومی طور پر یہ صحیح ہے کہ ایک وقوعہ E کے لئے

$$\mathbf{P(\bar{E}) = 1 - P(E)}$$

تب وقوعہ $\bar{E}$، جو notE کو ظاہر کرتا ہے وقوعہ E کا تتمہ کہلاتا ہے

ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ E اور $\bar{E}$ ایک دوسرے کے تتمی **وقوعات** میں complementary

آگے بڑھنے سے پہلے آیئے مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب معلوم کریں

(i) پانسہ کے ایک بار پھینکے جانے پر 8 عدد کے آنے کا احتمال کیا ہے؟

(ii) پانسہ کے ایک بار پھینکے جانے پر 7 سے کم عدد کے آنے کا احتمال کیا ہے؟

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے (i) کا جواب دیتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ پانسہ کو ایک بار پھینکنے پر صرف چھ ممکنہ نتائج ہیں۔ یہ نتائج ہیں 1,2,3,4,5 اور 6 کیونکہ پانسہ کے کسی رخ پر بھی 8 مارک نہیں ہے اس لئے 8 کے موافق کوئی بھی نتائج نہیں ہے یعنی ایسے نتائج کی تعداد صفر ہے، دوسرے لفظوں میں پانسے کے ایک بار پھینکے جانے پر 8 کا آنا ناممکن ہے۔

اس لئے $P(\text{8 آنے کا}) = \frac{0}{6} = 0$

یعنی ایسا وقوعہ کا احتمال جس کا واقع ہونا ناممکن ہے۔ صفر ہوتا ہے اور ایسا وقوعہ **ناممکن وقوعہ** کہلاتا ہے۔

آیئے (ii) کا جواب دیں

کیونکہ پانسہ کے ہر رخ پر 7 سے چھوٹا عدد مارک ہے۔ اس لئے پانسہ کے ایک بار پھینکے جانے پر یقینی ہے کہ 7 سے چھوٹا عدد آئے، اس لئے موافق نتائج کی تعداد وہی ہے جو تمام ممکنہ نتائج کی جو 6 ہے۔

اس لئے $P(E) = P(\text{7 سے چھوٹا عدد آنے کا}) = \frac{6}{6} = 1$

اس لئے ایسا وقوعہ کا احتمال جو یقینی ہو، 1 ہوتا ہے۔ اور ایسا وقوعہ **یقینی وقوعہ** کہلاتا ہے۔

نوٹ: احتمال P(E) کی تعریف سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ شمار کنندہ (وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد) ہمیشہ نسب نما (تمام ممکنہ نتائج کی تعداد) سے چھوٹا یا برابر ہوتا ہے۔

اس لئے $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$

آیئے اب تاش کے پتوں سے متعلق کچھ مثالیں لیتے ہیں، کیا آپ نے تاش کے پتوں کو دیکھا ہے؟ اس میں 52 پتہ ہوتے ہیں جو 4 قسم کے ہوتے ہیں (suit) ہر سوٹ کے 13 پتہ ہوتے ہیں۔ حکم (♠)، پان (♥)، اینٹ (♦) اور چڑی یا (♣) چڑی اور حکم کالے اور پان اور اینٹ لال رنگ کے ہوتے ہیں ہر ایک سوٹ میں 13 تاش ہوتے ہیں، اِکّا، بادشاہ، بیگم، غلام، 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 بادشاہ بیگم، غلام، face cards کہلاتے ہیں۔

مثال 4: اچھی طرح پھینٹے گئے تاش کے 52 پتوں میں سے ایک کارڈ نکالا جاتا ہے احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ (Card)

(i) اکّا ہے

(ii) اکّا نہیں ہے

حل: اچھی طرح پھینٹنے کا مطلب ہے مساوی امکانی نتائج

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(i) تاش کی ایک گڈی میں 4 اکے ہوتے ہیں۔ مان لیجیے E، اکا آنے کا وقوعہ ہے

E کے موافق نتائج ہیں = 4

ممکنہ نتائج کی تعداد ہے = 52 (کیوں؟)

اس لئے $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) مان لیجیے F، نکالا گیا پتہ اکا نہیں ہے، آنے کا وقوعہ ہے

وقوعہ F کے موافق نتائج کی تعداد ہے = 52 – 4 = 48 (کیوں؟)

ممکنہ نتائج کی تعداد = 52

اس لئے $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

ریمارک: نوٹ کیجئے F وہی جو $\bar{E}$ ہے اس لئے ہم P(F) کی تحسیب اس طرح بھی کر سکتے ہیں

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

مثال 5: دو کھلاڑی، سنگیتا اور ریشما ایک ٹینس میچ کھیلتی ہیں۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ سنگیتا کے میچ جیتنے کا احتمال 0.62 ہے۔ ریشما کے جیتنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجئے S اور R بالترتیب سنگیتا کے جیتنے، ریشما کے جیتنے کے وقوعات ہیں

P(S) = 0.62 = سنگیتا کے جیتنے کا احتمال ہے۔ (دیا ہوا ہے)

P (R) = 1 – P(S) = ریشما کے جیتنے کا احتمال ہے

کیونکہ وقوعات S اور R تتمی ہیں۔

= 1 – 0.62 = 0.38

مثال 6: سویتا اور حمیدہ آپس میں دوست ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں کی یوم پیدائش (i) مختلف ہوگی (ii) ایک ہی ہوگی؟ (سالِ کبیسہ کو نظر انداز کرتے ہوئے)

حل: دونوں دوستوں میں سے ایک لڑکی، مان لیجیے سویتا کا یوم پیدائش سال کا کوئی سا بھی دن ہوسکتا ہے اور حمیدہ کا یوم پیدائش

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

365, دنوں میں سے کوئی سا بھی دن ہوسکتا ہے۔

ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ یہ 365 نتائج مساوی امکانی ہیں۔

(i) اگر حمیدہ کا یوم پیدائش سویتا سے مختلف ہے، تب اس کے یوم پیدائش کے موافق نتائج کی تعداد ہے۔ $365-1=364$

اس لئے P (حمیدہ کا یوم پیدائش سویتا کے یوم پیدائش سے مختلف ہے) $=\frac{364}{365}$

(ii) P (دونوں کے یوم پیدائش مختلف ہوں) $= 1 - P$ (حمیدہ اور سویتا کا ایک ہی یوم پیدائش ہو)

$= 1 - \frac{364}{365}$ [$P(\bar{E})=1-P(E)$ استعمال کرنے پر]

$= \frac{1}{365}$

مثال 7: ایک اسکول کی 10 ویں کلاس میں 40 طلباء ہیں جن میں 25 لڑکیاں اور 15 لڑکے ہیں، کلاس کے نمائندے کی حیثیت سے کلاس ٹیچر کو ان میں سے ایک کا انتخاب کرنا ہے۔ وہ ہر ایک طالب علم کا نام یکساں قسم کے کارڈس پر لکھتی ہے۔ پھر وہ ان کارڈس کو ایک تھیلہ میں رکھ کر اچھی طرح ہلا دیتی ہے پھر وہ اس تھیلہ میں سے ایک کارڈ باہر نکالتی ہے احتمال معلوم کیجیے کہ کارڈ پر لکھا ہوا نام (i) ایک لڑکی کا ہے؟ (ii) ایک لڑکے کا

حل: 40 طلباء ہیں اور صرف ایک کارڈ (جس پر نام لکھا ہوا ہے) کا انتخاب ہونا ہے۔

(i) تمام ممکنہ نتائج کی تعداد $= 40$

کارڈ جس پر لڑکی کا نام لکھا ہو اس کے موافق نتائج کی تعداد $= 25$ (کیوں؟)

اس لئے P (کارڈ جس پر لڑکا کا نام لکھا ہوا ہے اس کے آنے) $= P$ (لڑکی) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) کارڈ جس پر لڑکے کا نام لکھا ہوا سکے موافق نتائج کی تعداد $= 15$ (کیوں؟)

اس لئے P (کارڈ جس پر لڑکے کا نام لکھا ہوا) $= P$ (لڑکا) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

نوٹ: ہم P (لڑکا) کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

$$P(\text{لڑکا}) = 1 - P(\text{لڑکا نہیں}) = 1 - P(\text{لڑکی}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

مثال 8: ایک بیگ میں 3 نیلے، 2 سفید اور 4 لال کنچے (Marble) ہیں۔ اگر ایک کنچہ بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ یہ ہوگا۔

(i) سفید کنچہ؟ (ii) نیلا کنچہ؟ (iii) لال کنچہ

حل: تمام کنچوں کا نکالا جانا مساوی امکانی ہے کہنے کے بجائے یہ زیادہ آسان ہے کہ کہا جائے کہ کنچے بلا منصوبے نکالے گئے۔

ممکنہ نتائج کی تعداد $= 4 + 2 + 3 = 9$ (کیوں؟)

مان لیجئے W، کنچہ سفید ہے، آنے کا وقوعہ اور B نیلے کنچے کے آنے کا وقوعہ اور R کنچہ لال ہے۔ آنے کا وقوعہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) وقوعہ W کے موافق نتائج کی تعداد $= 2$

اس لئے $P(W) = \frac{2}{9}$

اسی طرح سے (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ اور (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

نوٹ کیجیے کہ $P(W) + P(B) + P(R) = 1$

مثال 9: ہر پریت دو مختلف سکہ ایک ساتھ اچھالتی ہے (مان لیجئے ایک ₹1 کا اور دوسرا ₹2 کا سکہ ہے) احتمال معلوم کیجیے کہ کم سے کم ایک ہیڈ آئے۔

حل: ہم ہیڈ کے لئے H اور ٹیل کے لئے T لکھتے ہیں جب دو سکہ ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں تو ممکنہ نتائج ہیں (H, H), (H,T), (T, H), (T, T) جو کے تمام مساوی امکانی ہیں، یہاں (H,H) کا مطلب ہے پہلے سکے پر ہیڈ (یعنی 1 روپئے کے سکہ پر) اور دوسرے سکہ پر ہیڈ (یعنی 2 روپیہ کے سکے پر) اسی طرح سے (H,T) کا مطلب ہے پہلے سکہ پر ہیڈ اور دوسرے پر ٹیل اور اسی طرح باقی سبھی۔

وقوعہ E کم سے کم ایک ہیڈ کے موافق نتائج ہیں (H, H), (H, T) اور (T,H) (کیوں؟)

اس لئے E کے موافق نتائج کی تعداد ہے جو 3 ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس لئے $P(E) = \frac{3}{4}$

یعنی ہر پریت کا کم سے کم ایک ہیڈ آنے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔

نوٹ: آپ P(E) ایسے بھی معلوم کر سکتے ہیں

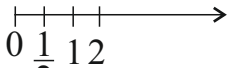
$P(E) = 1 \quad P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\quad (P(\overline{E}) = P(\text{ہیڈ نہیں}) = \frac{1}{4}$ کیونکہ)

کیا آپ نے مشاہدہ کیا، کہ اب تک جتنی بھی مثالیں ہم نے دیکھی: تمہیں ایک تجربہ کے نتائج متناہی ہیں؟ اگر نہیں تو جانچ کیجیے؟

بہت سے ایسے تجربات بھی ہیں جن میں نتائج دو دئے ہوئے نمبروں میں سے ایک ہوتا ہے۔ یا جس میں دائرہ یا مستطیل کے اندر کوئی نقطہ ہوتا ہے وغیرہ، کیا اب آپ تمام ممکنہ نتائج کی تعداد کو گن سکتے ہیں؟ جیسے کہ آپ جانتے ہیں۔ یہ ممکن نہیں کیونکہ دو دئے ہوئے اعداد کے درمیان لامحدود اعداد ہوتے ہیں اسی طرح دائرہ کے اندر لامحدود نقطے ہوتے ہیں۔ اس لئے اب تک آپ نے کلاسیکل احتمال کی جو تعریف پڑھی ہے وہ اس شکل میں استعمال نہیں ہوسکتی؟ تو پھر اس کا حل کیا ہے؟ اس کا جواب دینے کے لئے ہم مندرجہ مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 10: [امتحان کے لئے نہیں ہے۔] میوزیکل کرسی کے ایک کھیل میں، اس شخص کو، جو میوزک بجا رہا ہے یہ نصیحت کی جاتی ہے کہ وہ کھیل شروع کے دو منٹ کے اندر ہی اندر میوزک بجانا بند کر دے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ کھیل شروع ہونے کے بعد پہلے ہی آدھے منٹ میں میوزک رک جاتا ہے۔

حل: یہاں ممکنہ نتائج 0 اور 2 کے درمیانہ تمام اعداد ہیں، یہ عودی خط میں 0 اور 2 کے درمیانہ کا حصہ ہے (شکل 14.1 دیکھیے)



شکل 14.1

مان لیجئے E، میوزک پہلے آدھے منٹ میں رک جاتا ہے، کا وقوعہ ہے

اس لئے E کی موافقت میں نتائج، عودی خط 0 سے $\frac{1}{2}$ تک کے اعداد ہیں۔

0 سے 2 کا فاصلہ ہے 2، اور 0 سے $\frac{1}{2}$ تک ہے $\frac{1}{2}$۔

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

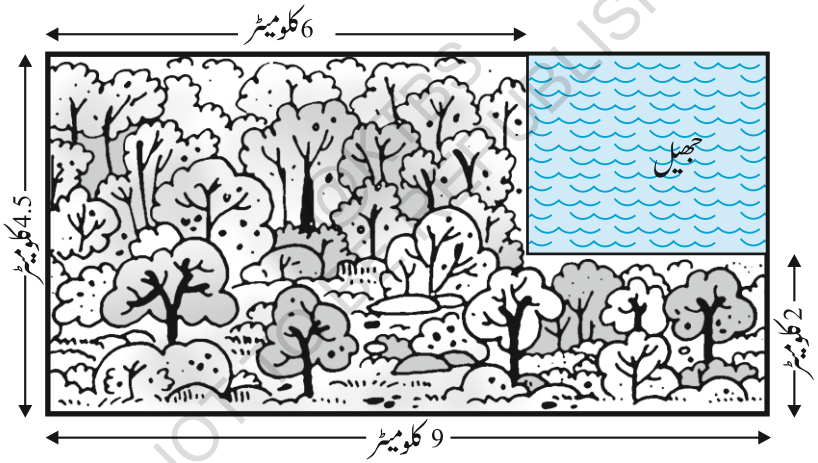
کیونکہ تمام نتائج مساوی امکانی ہیں، ہم بحث کر سکتے ہیں کہ کل فاصلہ 2 ہے اور وقوعہ E کے موافق فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

اس لئے $$P(E) = \frac{\text{وقوعہ E کے موافق فاصلہ}}{\text{کل فاصلہ جس میں نتائج واقع ہو سکتے ہیں}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

کیا اب ہم مثال 10 میں نکالے گئے احتمال کے رقبہ کی توسیع موافق رقبہ (علاقہ) کی نسبت کے طور پر کر سکتے ہیں؟

مثال 11*: یہ رپورٹ کیا گیا کہ ایک گم شدہ ہیلی کاپٹر شکل 14.2 میں دکھائے گئے ایک مستطیل خطہ میں کسی جگہ تباہ ہو گیا۔

احتمال معلوم کیجیے کہ یہ جھیل کے اندر تباہ ہوا ہے۔ شکل میں دکھائی گئی ہے۔



شکل 14.2

حل: ہیلی کاپٹر کے خطہ میں کسی جگہ بھی تباہ ہونا مساوی امکانی ہے۔

اس پورے خطہ کا رقبہ جہاں ہیلی کاپٹر تباہ ہو سکتا ہے۔ $= (4.5 \times 9\ \text{km}^2 = 40.5\text{km}^2$

جھیل کا رقبہ $= (2.5 \times 3)\ \text{km}^2 = 7.5\text{km}^2$

اس لئے $P(\text{ہیلی کاپٹر جھیل میں Crash ہوا}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

مثال 12: ایک کارٹن کے اندر 100 شرٹیں ہیں جن میں 88 شرٹیں اچھی ہیں، 8 شرٹوں میں معمولی نقص ہے اور 4 شرٹوں میں کوئی بڑا نقص ہے۔ جمی ایک ایسا تاجر ہے صرف اچھی ہی شرٹیں لینا پسند کرتا ہے لیکن ایک اور تاجر سجاتا صرف ان شرٹوں کو نہیں قبول کرتی جن میں کوئی بڑا نقص ہے۔ کارٹن میں سے بلامنصوبہ ایک شرٹ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) یہ شرٹ جمی کے لئے قابل قبول ہوگی؟

(ii) یہ سجاتا کو قابل قبول ہوگی؟

حل: 100 شرٹوں کے کارٹن میں ایک شرٹ بلامنصوبہ نکالی گئی ہے۔ اس لئے یہاں 100 مساوی امکانی نتائج ہیں۔

(i) جمی کے موافق (یعنی قابل قبول) نتائج کی تعداد = 88 (کیوں؟)

$$P(\text{جمی کے لئے قابل قبول شرٹ}) = \frac{88}{100} = 0.88 \text{ اس لئے}$$

(ii) سجاتا کے موافق نتائج کی تعداد $= 88 + 8 = 96$ (کیوں؟)

$$P(\text{سجاتا کے لئے قابل قبول شرٹ}) = \frac{96}{100} = 0.96 \text{ اس لئے}$$

مثال 13: دو پانسہ، ایک نیلا اور ایک سلیٹی ایک ہی وقت میں پھینکے گئے۔ تمام ممکنہ نتائج لکھیے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پانسوں کی اوپری سطح پر ظاہر ہونے والے دو اعداد کا حاصل جمع

(i) 8 ہوگا؟ (ii) 13 ہوگا؟ (iii) 12 کے برابر یا اس سے کم ہوگا؟

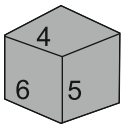
حل: جب نیلا پانسہ 1 دکھائے گا تو سلیٹی رنگ کا پانسہ ان اعداد 1,2,3,4,5 اور 6 میں سے ایک دکھا سکتا ہے۔ یہی بات جب بھی صحیح ہوگی جب نیلا پانسہ '5', '4', '3', '2' یا '6' دکھائیگا۔ اس تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج مندرجہ جدول میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر ایک مرتب کو جوڑے ہیں۔ پہلا عدد نیلے پانسے پر ظاہر ہونے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرے اعداد سلیٹی پانسہ پر ظاہر ہونے والے عدد کو۔

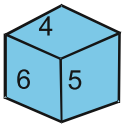
نوٹ کیجئے کہ جو مرتب جوڑا (1,4)، (4,1) سے مختلف (کیوں؟)

اس لئے ممکنہ نتائج کی تعداد ہے $= 6 \times 6 = 36$

(i) وقوعہ E دو اعداد کا حاصل جمع 8 ہے، کے موافق نتائج ہیں۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

شکل 14.3

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

یعنی E کے موافق نتائج کی تعداد $E = 5$

اس لئے $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) جیسا کہ آپ شکل 14.3 میں دیکھ رہے ہیں کہ ایک کوئی ممکنہ نتائج نہیں ہے جو وقوع F یعنی دو اعداد کا حاصل جمع 13 ہے کے موافق نہیں ہے اس لئے $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) جیسا کہ آپ شکل 14.3 میں دیکھ سکتے ہیں وقوعہ G دو اعداد کے حاصل جمع 12 سے کم یا برابر ہے ≤ 12 کے موافق نتائج ہیں 36

اس لئے $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

مشق 14.1

1۔ مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کیجیے:

(i) ایک وقوعہ E کا احتمال + وقوعہ 'notE' کا احتمال = _____۔

(ii) اس وقوعہ کا احتمال جو واقع نہیں ہوسکتا _____ ایسا وقوعہ _____ کہلاتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) اس وقوعہ کا احتمال جس کا واقع ہونا یقینی ہے _____ ایسا وقوعہ _____ کہلاتا ہے۔

(iv) ایک تجربہ میں تمام بنیادی وقوعات کے احتمال کا حاصل جمع _____ ہوتا ہے۔

(v) کسی وقوعہ کا احتمال _____ سے بڑا یا برابر ہوتا ہے اور _____ سے چھوٹا یا برابر ہوتا ہے۔

2۔ مندرجہ ذیل کون سے تجربات میں مساوی امکان نتائج ہیں؟ تشریح کیجیے۔

(i) ایک ڈرائیور کار کو اسٹارٹ کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ کار اسٹارٹ ہوگی یا نہیں ہوگی۔

(ii) ایک کھلاڑی باسکٹ بال کو باسکٹ میں ڈالنے کی کوشش کرتا ہے وہ باسکٹ میں ڈال پاتی ہے یا نہیں ڈال پاتی۔

(iii) صحیح - یا غلط کے ایک سوال کے جواب دینے کی کوشش کی گئی۔ جواب صحیح یا غلط ہے۔

(iv) ایک بچے کی پیدائش ہوتی ہے۔ یہ ایک لڑکا ہے یا لڑکی

3۔ ایک فٹ بال کے میچ میں یہ طے کرنے کے لئے کہ کس ٹیم کو شروع میں بال ملے گی ٹاس کرنا کیوں صحیح مانا جاتا ہے؟

4۔ مندرجہ ذیل سے کون سا جواب کسی وقوعہ کا احتمال نہیں ہوسکتا؟

$\frac{2}{3}$ (A) $\quad -1.5$ (B) $\quad 15\%$ (C) $\quad 0.7$ (D)

5۔ اگر $P(E) = 0.05$، 'notE' کا احتمال کیا ہے؟

6۔ ایک بیگ میں صرف لیموں کی مہک والی ٹوفیاں ہیں۔ مالینی بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک ٹافی نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے۔ اس

(i) سنترے کی مہک والی کینڈی نکالتی ہے؟

(ii) لیمو کی مہک والی کینڈی نکالی ہے؟

7۔ یہ دیا ہوا ہے کہ 3 طلباء کے ایک گروپ میں دو طلباء کا ایک ہی یوم پیدائش نہ ہونے کا احتمال 0.992 ہے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ دو طلباء کا ایک ہی یوم پیدائش ہوگا؟

8۔ ایک بیگ میں 3 لال گیندیں اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ بیگ میں سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ نکالی گئی گیند (i) لال؟ (ii) سفید ہے؟

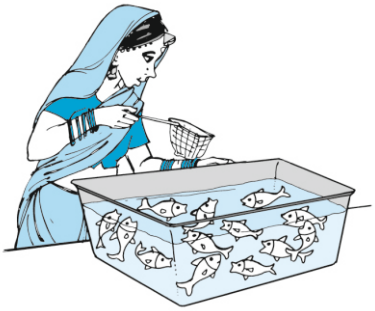
9۔ ایک بکس میں 5 لال، 8 سفید اور 4 ہرے کنچے ہیں۔ بکس میں سے ایک کنچہ بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ احتمال معلو کیجئے کہ نکالا جانے والا کنچہ (i) لال ہے؟ (ii) سفید ہے؟ (iii) ہرا نہیں ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10۔ ایک گولک میں سو، 50 پیسے کے سکے ہیں، ₹1 کے پچاس ₹2 کے بیس سکّے اور ₹5 کے 10 سکے ہیں۔ اگر گولک کو الٹ دیا جائے تو اس بات کا امکان مساوی ہیں کہ ان میں سے کوئی سکہ نیچے گرے گا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ سکہ (i) 50 پیسہ کا ہوگا؟

(ii) 5 روپیہ کا سکہ نہیں ہوگا۔

11۔ گوپی نے اپنے ایکوریئم کے لئے ایک دکان سے مچھلی خریدی دکاندار نے بلا منصوبہ ایک ٹینک سے جس میں 5، نر مچھلیاں 8 مادہ مچھلیاں ہیں (شکل 14.4 دیکھئے) ایک مچھلی نکالی احتمال معلوم کیجیے۔ نکالی گئی مچھلی نر ہے۔



شکل 14.4

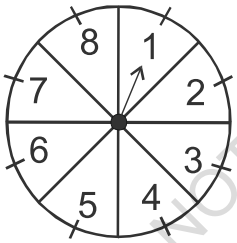
12۔ چانس کے ایک کھیل میں گھومتا ہوا ایک تیر ہوتا ہے جو رکنے کے بعد ایک عدد کی طرف نشاندہی کرتا ہے۔ وہ عدد 1,2,3,4,5,6,7,8 میں سے کوئی ایک ہوتا ہے (شکل 14.5 دیکھیے) اور یہ مساوی امکانی نتائج ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ نشاندہی کرے گا

(i) 8 کی طرف؟

(ii) ایک طاق عدد کی؟

(iii) 2 بڑے عدد کی طرف؟

(iv) 9 سے چھوٹے عدد کی طرف؟



شکل 14.5

13۔ ایک پانسہ کو ایک بار پھینکا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے

(i) ایک مفرد عدد آنے کا (ii) 2 اور 6 کے درمیانہ عدد آنے کا (iii) طاق عدد آنے کا

14۔ اچھی طرح پھینٹی گئی تاش کی 52 پتوں کی گڈی سے ایک پتہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ پتہ:

(i) لال رنگ کے بادشاہ کا (ii) ایک فیس کارڈ یعنی تصویر والا پتہ کا ہے (iii) ایک لال رنگ کی تصویر والا پتہ کارڈ کا

(iv) پان کے غلام کا (v) ایک حکم کے پتہ کا (vi) اینٹ کی بیگم کا

15۔ اینٹ کے پانچ پتے۔ ''10، غلام، بیگم بادشاہ اور اکا کو اچھی طرح پھینٹا گیا ان کے چہروں کو نیچے کی طرف کر کے پھر بلا

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

منصوبہ ایک پتہ نکالا گیا۔

(i) احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ بیگم ہے۔

(ii) اگر بیگم نکالی گئی تو اس کو ایک طرف رکھ دیجئے۔ اور پھر ایک دوسرا پتہ باقی پتیوں میں سے نکالئے۔ اور احتمال بتایئے کہ یہ پتہ (a) اکا ہے؟ (b) بیگم ہے؟

16۔ 12 خراب پین غلطی سے 32 اچھے پنوں میں مکس ہو گئے۔ پین کو صرف دیکھ کر اب اندازہ نہیں کر سکتے کہ یہ خراب ہے یا صحیح۔ ان پنوں میں سے ایک پین بلا منصوبہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ نکالا گیا پین صحیح ہے۔

17۔ (i) 20 بلبوں کے ایک ڈھیر میں 4 بلب خراب ہیں۔ اس ڈھیر میں سے بلا منصوبہ ایک بلب نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالا گیا بلب خراب ہے؟

(ii) فرض کیجئے ایک بلب نکالا گیا اور یہ خراب نہیں تھا اس لئے اس کو دوبارہ اس میں واپس نہیں رکھا گیا اب بقیہ بلبوں میں سے ایک اور بلب بلا منصوبہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ بلب خراب نہیں ہے؟

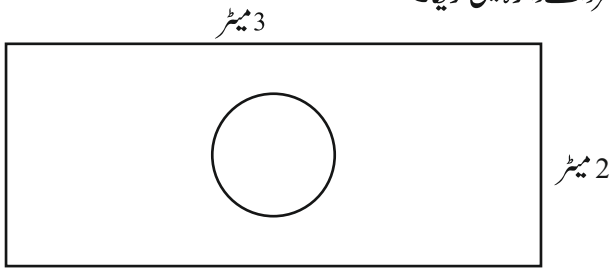
18۔ ایک ڈبّے میں 90 تختیاں ہیں جس پر 1 سے لے کر 90 تک کے نمبر لکھے ہوئے ہیں اگر ڈبّے میں سے ایک تختی بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے احتمال معلوم کیجیے کہ اس تختی پر (i) دو ہندسی عدد لکھا ہوگا (ii) ایک کامل مربع ہوگا (iii) 5 سے تقسیم ہونے والا عدد ہوگا۔

19۔ ایک بچہ کے پاس ایک پانسہ ہے جس کے چھ رخ پر مندرجہ ذیل حروف لکھے ہوئے ہیں۔

A	B	C	D	E	A

پانسہ کو ایک بار پھینکا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے (i) A کا؟ (ii) D کا؟

20*۔ فرض کیجئے آپ ایک پانسہ کو بلا منصوبہ شکل 14.6 میں دکھائے گئے ایک مستطیل خطہ میں پھینکتے ہیں احتمال معلوم کیجیے کہ یہ 1 میٹر قطر والے دائرہ میں گریگا۔



شکل 14.6

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

21۔ ایک ڈھیر میں 144 بال پین ہیں جن میں 20 پین خراب ہیں اور باقی اچھے ہیں۔ نوری پین تب ہی خریدے جب یہ اچا ہوگا۔ اگر خراب ہوگا تو یہ نہیں خریدے گی دکاندار ایک پین بغیر منصوبہ اٹھاتا ہے اور اس کو دے دیتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ۔

(i) وہ اس کو خریدے گی؟

(ii) وہ اس کو نہیں خریدے گی؟

22۔ مثال 13 کو دیکھئے (i) مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

وقوعہ دو پانسوں پر حاصل جمع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتمال	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ایک طالب علم بحث کرتا ہے کہ 11 ممکنہ نتائج میں 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12، اس لئے ان میں سے ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{11}$ ہے۔ کیا آپ اس دلیل سے اتفاق رکھتے ہیں؟

23۔ ایک کھیل میں ایک روپے کے سکہ کو 3 مرتبہ اچھالا جاتا ہے اور ہر مرتبہ اس کے نتائج کو نوٹ کیا جاتا ہے۔ حنیف جیتے گا اگر تمام ٹوس کا نتیجہ ایک ہی ہو یعنی تین ہیڈ یا تین ٹیل ہیں تو وہ ہار جائیگا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ حنیف کھیل ہارے گا۔

24۔ ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا گیا احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) کسی مرتبہ بھی 5 نہیں رہیگا (ii) 5 کم سے کم ایک مرتبہ آئے گا؟

[**اشارہ:** پانسہ کو دوبارہ چھالا جائے یا دو پانسوں کو ایک ساتھ اچھالا جائے ایک ہی تجزیہ کہلاتا ہے]

25۔ مندرجہ ذیل میں کون سی دلیلیں صحیح ہیں اور کون سی صحیح نہیں ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی بتایئے۔

(i) اگر دو سکوں کو ایک ساتھ اچھالا جائے تو تین ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ دو ہیڈ، دو ٹیل یا دونوں ایک ایک۔ اس لئے اس میں ہر ایک نتائج کے لئے احتمال ہے $\frac{1}{3}$۔

(ii) اگر ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے تو اس کے دو ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ ایک طاق عدد یا ایک جفت عدد اس لئے اگر ایک طاق عدد آنے کا احتمال ہے $\frac{1}{2}$۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

14.2 خلاصہ

اس باب میں مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1۔ ایک وقوعہ E کلاسیکل احتمال کو ہم P(E) لکھتے ہیں اور اس کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں۔

$$P(E)=\frac{\text{وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

جہاں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ تجربہ کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔

2۔ ایک یقینی وقوعہ کا احتمال 1 ہے۔

3۔ ایک ناممکنہ وقوعہ کا احتمال 0 ہے۔

4۔ ایک وقوعہ E کا احتمال ایک عدد P(E) ہے جب کہ

$$0 \le P(E) \le 1$$

5۔ ایک وقوعہ جس میں صرف ایک نتائج (بنیادی) وقوعہ کہلاتا ہے۔ کسی تجربہ کے تمام بنیادی وقوعات کے احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

6۔ کسی بھی وقوعہ E کے لئے $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ جہاں $\bar{E}$ 'not E' کو ظاہر کرتا ہے، E اور E' تتمی وقوعات کہلاتے ہیں۔

قارئین کے لئے نوٹ

کسی وقوعہ کے تجرباتی یا علمی احتمال کے بنیاد اس پر ہے جو اصل میں واقع ہوا ہے۔ جبکہ کسی وقوعہ کا تھیوریٹکل احتمال کچھ مفروضوں کی بنیاد پر یہ کوشش کرتا ہے کہ کیا ہوگا۔ جیسے جیسے کسی تجربہ میں (کوششیں) کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تجرباتی اور تھیوریٹکل احتمال تقریباً ایک سے ہوتے جاتے ہیں۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2 ضمیمہ A2: ریاضیاتی موڈلنگ (MATHEMATICAL MODELLING)

A2.1 تعارف (INTRODUCTION)

1. ایک جوان انسانی جسم میں تقریباً 1,50,00 کلومیٹر شریان اور نبض ہوتی ہیں جو خون لے کر چلتی ہے۔
2. انسانی دل 60 سیکنڈ میں جسم میں 5 سے 6 لیٹر خون پمپ کرتا ہے۔
3. سورج کی سطح پر درجۂ حرارت تقریباً 6,000°C ہوتا ہے۔

کیا آپ نے کبھی یہ سوچا ہے کہ ہمارے سائنس دانوں اور ریاضی دانوں نے کس طرح ان نتائج کا اندازہ لگایا ہوگا؟ کیا انہوں نے کسی جوان جسم میں سے شریان اور نبضوں کو کھینچ کر اس کی پیمائش کی ہوگی؟ کیا انہوں نے خون نکال کر یہ نتائج اخذ کئے۔ کیا انہوں نے تھرمامیٹر کے ساتھ سورج کا سفر کیا تھا اور اس کا درجۂ حرارت ناپا تھا۔ یقیناً نہیں، تو کس طرح سے ان کو یہ اعداد و شمار حاصل ہوئے؟

اس کا جواب **ریاضیاتی موڈلنگ** میں مضمر ہے، جس کا تعارف ہم نے کلاس IX میں دیا تھا۔ یاد کیجئے کہ ریاضیاتی موڈل کسی روزمرہ کی زندگی کی صورت حال کا ریاضیاتی بیان ہے مزید یاد کیجئے کہ ریاضیاتی موڈلنگ، کسی مسئلہ کے ریاضیاتی موڈل کی تخلیق اور اس کا استعمال مسئلہ کو حل کرنے اور اس کا تجزیہ کرنے کا علم ہے۔

اس لئے ریاضیاتی موڈلنگ میں ہم اصل زندگی کے مسئلہ کو لیتے اور اسکو معادل ریاضیاتی مسئلہ میں تبدیل کرتے ہیں اس ریاضیاتی مسئلے کو حل کرتے ہیں اور اس کو حل کی ترجمان اصل زندگی کی صورت حال میں کرتے ہیں۔ اور پھر یہ جانچ کرنا بہت اہم ہوتا ہے کہ جو حال حاصل ہوا ہے اس کا کوئی مطلب یا مفہوم بھی ہے یا نہیں دو مرحلہ موڈل کی validities سے کچھ مثالیں جہاں ریاضیاتی موڈلنگ کی بہت اہمیت ہیں۔

(i) کسی دریا کی چوڑائی اور گہرائی وہاں سے معلوم کرنا جہاں پہنچا نہ جا سکے۔

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) زمین اور دوسری سیاروں کی کمیت کا اندازہ لگانا۔

(iii) زمین اور دوسرے سیاروں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

(iv) کسی ملک میں مانسون کی آمد کی پیشن گوئی کرنا۔

(v) اسٹاک مارکیٹ کے رجحان کی پیشن گوئی کرنا۔

(vi) کسی شخص کے جسم میں موجود خون کے حجم کا اندازہ لگانا۔

(vii) کسی شہر کی 10 سال بعد کی آبادی کی پیشن گوئی کرنا۔

(viii) ایک درخت میں پتیوں کی تعداد کا اندازہ لگانا۔

(ix) شہر کے ماحول میں مختلف آلودگیوں کے PPm کا اندازہ لگانا۔

(x) ماحول میں آلودگیوں کے اثر کا اندازہ لگانا۔

(xi) سورج کی سطح پر درجہ حرارت کا اندازہ لگانا۔

اس باب میں ریاضیاتی موڈلنگ کے عمل پر نظر ثانی کریں گے اور اپنے اطراف کی دنیا کی مثالیں لے کر اس کی وضاحت کریں گے۔ سیکشن A2.2 میں ہم آپ کو موڈل بنانے کے تمام مراحل سے روشناس کرائیں گے۔ سیکشن A2.3 میں ہم مختلف قسم کی مثالوں کو حل کریں گے۔ سیکشن A 2.4 میں ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت کی وجہ پر غور کریں گے۔

یاد رکھنے کا ایک نقطہ یہ بھی کہ اس باب میں ہمارا مقصد آپ کو ایک اہم طریقہ سے روشناس کرانا ہے جس میں ریاضی روزمرّہ کے مسائل کو حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہے۔ لیکن اس کے لئے یہ ضروری ہے کہ آپ ریاضی کا علم کچھ اور سیکھیں تاکہ آپ ریاضیاتی موڈلنگ کی طاقت کو سراہ سکیں آئندہ کلاسوں میں آپ کو اس ذوق کی کچھ مثالیں ملیں گی۔

A2.2 ریاضیاتی موڈلنگ کے مراحل

نویں کلاس میں ہم نے موڈلنگ کے استعمال کی کچھ مثالوں پر غور کیا تھا کیا انہوں نے آپ کو اسے عمل میں ملوث اقدام کے سلسلہ میں کوئی بصیرت عطا کی تھی؟ آیئے تیزی سے ہم ریاضیاتی موڈلنگ کے خاص اقدام پر نظر ثانی کرتے ہیں۔

قدم 1: (مسئلہ کو سمجھنا): اصل مسئلہ کی تعریف بیان کیجئے اور اگر آپ ایک ٹیم کی شکل میں کام کر رہے ہیں تو اس مسئلہ پر بحث کیجئے جو آپ سمجھنا چاہتے ہیں۔ مفروضات بنا کر اس کو مختصر بناتے اور کچھ چیزوں کو نظر انداز کیجئے تاکہ مسئلہ قابل حل ہو جائے۔ مثال کے طور پر ہمارا مسئلہ ہے کہ کسی جھیل میں موجود مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگانا ہے۔ یہ ممکن ہی نہیں ہے کہ ہم ہر مچھلی کو پکڑ کر

© KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

گنیں۔ ہم نمونے کے طور پر کچھ مچھلیوں کو پکڑیں اور جھیل میں موجود مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگائیں۔

قدم 2: ریاضیاتی بیان اور تشکیل: مسئلہ کے مختلف پہلوؤں کو ریاضیاتی زبان میں بیان کریں اور ریاضیاتی زبان میں بیان کرنے کے سلسلہ میں کچھ طریقوں میں ملوث اہم نقاط ہیں۔

- متغیروں کی تعریف بیان کرنا
- مساواتیں اور نامساواتیں لکھنا
- اعداد و شمار اکٹھا کرنا اور ان کو جدول میں منظّم کرنا
- گراف بنانا
- احتمال معلوم کرنا

مثال کے طور پر، ایک نمونہ لینے کے بعد، جیسا کہ قدم 1 میں بیان کیا گیا ہے، ہم کس طرح پوری آبادی کا اندازہ لگائیں گے؟ ہمیں نمونے کے طور پر لی گئیں مچھلیوں کو نشان زد کرنا ہوگا۔ اور اس جھیل میں باقی مچھلیوں کے ساتھ خلط ملط کرنے کے لئے آزاد کرنا ہوگا۔ اس کے بعد دوبارہ جھیل سے ایک اور نمونے لیجئے اور یہ دیکھئے کہ نئے نمونے، پچھلے نمونے میں نشان زد کی گئیں مچھلیاں شامل ہیں یا نہیں اور نسبت اور تناسب کو استعمال کر کے ہم کل آبادی کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر جھیل سے 20 مچھلیوں کا ایک نمونے لیجئے اور ان کو مارک کر دیجیے اور پھر ان کو پانی میں دوبارہ چھوڑ دیجئے۔ تاکہ وہ باقی مچھلیوں کے ساتھ خلط ملط ہو جائے۔ پھر ہم ایک دوسرا نمونے مان لیجیے (50 مچھلیوں) کا ملی جلی آبادی میں سے لیجئے اور دیکھئے اس میں کتنی مچھلیاں مارک والی ہیں۔ اس طرح سے ہم مارک کی گئی مچھلیوں کو یکساں طور پر مچھلیوں کے ساتھ پیش کرتے ہیں اور جو نمونے ہم لیتے ہیں وہ پوری آبادی کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔

قدم 3: (ریاضیاتی مسئلے کو حل کرنا): قدم 2 سے ملی ریاضیاتی مسئلہ کی مختصر شکل کو مختلف ریاضیاتی تکنیکوں کے استعمال سے حل کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر مان لیجئے مثال کے دوسرے نمونے میں 5 مچھلیوں کو نشان زد کیا گیا۔ اس طرح $\frac{5}{50}$ یعنی آبادی کا $\frac{1}{10}$ مارک کیا گیا، اگر یہ پوری آبادی کا typical تب آبادی کا $\frac{1}{10}$ ہے $= 20$

اس لئے کل آبادی $= 10 \times 20 = 200$ ہے۔

قدم 4: (حل کی ترجمانی): پچھلے قدم میں ملے حل کو اب اصل زندگی کی صورت حال کے پس منظر میں دیکھیے جو ہم نے قدم 1:

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

میں شروع کی تھی۔

مثال کے طور پر قدم 3 میں مسئلے کا حل مچھلیوں کی کل آبادی 200 دیتا ہے۔

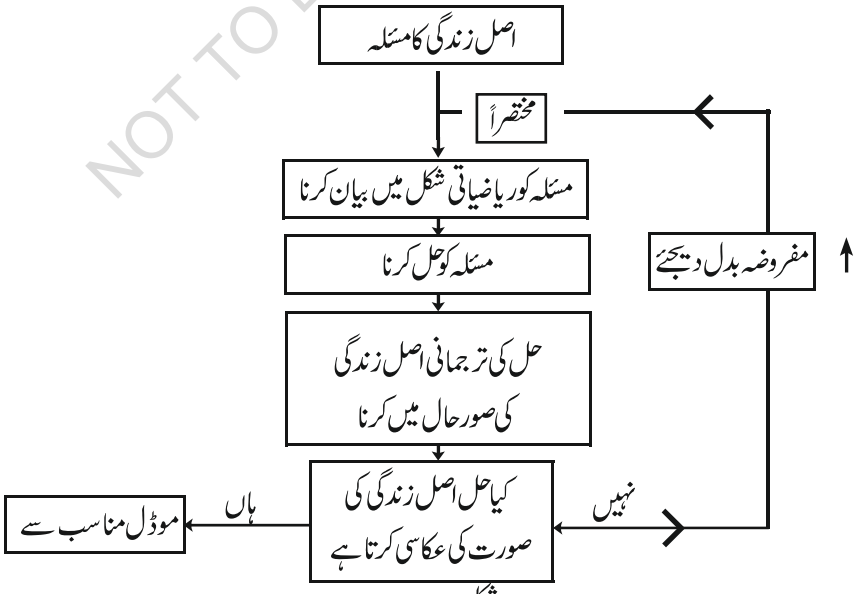
قدم 5: توسیق کنندہ موڈل (Validating the model)

ہم اپنے اصل مسئلے کی طرف واپس جاتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ جو نتیجہ آیا اس کا کچھ احساس بھی ہے یا اگر ایسا ہے تو ہم اس موڈل کو جب تک استعمال کرتے ہیں جب تک کہ نئی اطلاعات فراہم نہ ہو جائیں یا مفروضات بدل جائیں۔

کبھی کبھی مفروضات کے اختصار کی وجہ سے ہم اصل مسئلہ کا ضروری پہلو نظر انداز کر دیتے ہیں جب ہم اس کا ریاضیاتی بیان دیتے ہیں ایسی حالت میں حل حقیقت سے بہت دور ہوتا ہے اور اصل میں اس کا کوئی مطلب نہیں ہوتا۔ اگر ایسا ہو تو ہم قدم 1 میں لئے گئے مفروضہ پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ اور حقیقت سے نزدیک بنانے کے لئے اس کو تبدیل کرتے ہیں خاص طور سے کچھ ایسی چیزوں (factor) کو ان میں شامل کر کے جو پہلے شامل نہیں تھے۔

مثال کے طور پر قدم 3 میں ہمیں مچھلیوں کی پوری آبادی کا اندازہ حاصل ہوا ہے ضروری نہیں کہ یہ جھیل میں موجود مچھلیوں کی اصل تعداد ہو۔ ہم قدم 2 اور 3 کو کئی مرتبہ دہرا کر دیکھتے ہیں کہ یہ مچھلیوں کا صحیح اندازہ ہے یا نہیں اور پھر نتائج کا درمیانہ لیتے ہیں۔ یہ آبادی کا نزدیکی اندازہ ہوگا۔

ریاضیاتی موڈلنگ کے عمل کو دیکھنے کا ایک اور طریقہ شکل A2.1 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل A2.1

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

موڈل بنانے والے اختصار (حل کی اضافی کے لئے) اور درستگی کے درمیان توازن پر نظر رکھتے ہیں کیونکہ بہتر نتیجہ سے آپ پیشن گوئی کر سکتے ہیں کہ کیا ہوگا۔

یاد کیجئے کہ مسئلہ کو مختصر بنانے کے لئے ہم مختلف مفروضہ استعمال کرتے ہیں۔ جن سے ہمیں مختلف موڈل ملتے ہیں اس لئے کوئی بھی موڈل مکمل نہیں ہوتا۔ اچھے موڈل بھی ہوتے ہیں لیکن ان سے بہتر بھی بنائے جا سکتے ہیں۔

مشق A2.1

1. مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجیے

یہ مسئلہ 13 ویں صدی کے اوائل کا ہے جو Leonard Fibonacci نے اٹھایا تھا۔ اس نے پوچھا تھا کہ آپ کے پاس کل کتنے خرگوش ہوں گے اگر شروع میں آپ کے پاس صرف دو خرگوش ہوں اور تولید کے لئے ان کو چھوڑ دیں۔ فرض کیجئے خرگوشوں کا ایک جوڑا ہر مہینہ خرگوشوں کا ایک جوڑا پیدا کرتا ہے اور پیدا ہوئے خرگوش 2 مہینہ کی عمر میں اپنا پہلا بچہ پیدا کرتے ہیں۔ مہینہ در مہینہ خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد صفر اور پہلے مہینے کو چھوڑ کر پچھلے دو مہینے میں خرگوشوں کا حاصل جمع ہوتا ہے:

مہینہ	خرگوشوں کے جوڑے
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

NOT TO BE REPUBLISHED @KBS

16 مہینوں کے بعد ایک کے پاس تقریباً 1600 خرگوش ہوں گے۔
اس صورت حال کے ریاضیاتی موڈلنگ سے مختلف مراحل کو واضح طور پر بیان کیجیے۔

A2.3 کچھ وضاحتیں

آیئے اب ریاضیاتی موڈلنگ کی کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: (پانسوں کے ایک جوڑے کو پھینکنا): فرض کیجئے آپ کی ٹیچر آپ کو اندازے سے ایک کھیل کھلاتی ہیں۔ وہ پانسوں کا ایک جوڑا پھینکتی ہے۔ اس سے پہلے آپ کو ان پانسوں کے اوپر کے رخ پر آنے والے اعداد کے حاصل جمع کا اندازہ کرتا ہے ہر صحیح اندازے پر آپ کو دو پوائنٹ دیے جائیں گے۔ اور غلط اندازے پر آپ کو دو پوائنٹ کھونے پڑیں گے۔ کون سے اعداد کا اندازہ سب سے بہتر ہوگا۔

حل:

قدم 1: (مسئلے کو سمجھنا): آپ کو کچھ ایسے اعداد کا علم ہونا چاہئے جن کے آنے کے امکان زیادہ ہوں۔

قدم 2: (ریاضیاتی بیان): ریاضیاتی زبان میں مسئلے کا مطلب ہے پانسوں کے ذریعے دکھائے جانے والے اعداد کے ممکنہ حاصل جمع کا احتمال معلوم کریں۔

ہم صورت حال کو آسانی سے، پانسوں کے پھینکے جانے کو مندرجہ ذیل اعداد، کے 36 جوڑوں میں ایک کے بلا منصوبہ انتخاب کے طور پر، موڈل کر سکتے ہیں۔

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

ہر ایک جوڑے میں پہلا عدد پہلے پانسہ پر آنے والے عدد کو اور دوسرا عدد دوسرے پانسہ پر آنے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

قدم 3: (ریاضیاتی مسئلے کو حل کرنا): اوپر دئے گئے ہر ایک جوڑے کا حاصل جمع معلوم کرنے پر ہم ممکنہ حاصل جمع پاتے ہیں 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12 حاصل ہوتے ہیں ہمیں 36 جوڑوں کو مساوی امکانی مان کر ہر ایک کا احتمال معلوم کرنا ہے۔

ایسا ہم مندرجہ ذیل جدول میں کرتے ہیں۔

حاصل جمع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مشاہدہ کیجئے کہ حاصل جمع 7 کے آنے کا امکان $\frac{1}{6}$ ہے، جو باقی کسی اور عدد کے حاصل جمع کے طور پر آنے کا امکان بڑا ہے۔

قدم 4: (حل کی ترجمانی): کیونکہ حاصل جمع 7 آنے کا احتمال سب سے زیادہ ہے اس لئے آپ بار بار عدد 7 کا اندازہ کیجیے۔

قدم 5: (توسیق کنندہ موڈل): پانسوں کے ایک جوڑے کو کثیر تعداد میں پھینکیے۔ اور اس کا متعلقہ تعدد جدول بنائیے۔ متعلقہ تعدد کا ان کے نظیری احتمالوں سے موازنہ کیجئے۔ اگر یہ قریب قریب نہیں ہے تب ممکنہ طور پر پانسے جانب دار ہیں۔

تب ہم اس عدد کی جس کی طرف پانسے جانب دار ہیں، قدر معلوم کرنے کے لئے اعداد و شمار حاصل کرتے ہیں اگلی مثال کو حل کرنے سے پہلے آپ کو کچھ پس منظر معلوم ہونا ضروری ہے۔

بہت سے لوگوں کا یہ مشترک تجربہ ہے کہ جب آپ کو کچھ پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے جبکہ ان کے پاس ضروری کام کے لئے مناسب پیسے نہیں ہوتے۔ وہ روزمرّہ کے استعمال کی ضروری اشیا کو خریدنا ہو یا ایسے آرام کے لئے چیزوں کو خریدنے کے لئے پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ گاہکوں کو اس قابل بنانے کے لئے تو وہ محدود فنڈ میں اشیا جیسے اسکوٹر، فرج، T.V.، کاریں وغیرہ خرید سکیں۔ تاجر اکثر قسطوں میں ادائیگی سے متعارف کراتے ہیں۔

کبھی کبھی تاجر قسطوں کی اسکیم اس لئے نکالتے ہیں کہ یہ ان کی گاہکوں کو کچھ اشیا خریدنے پر رجھانے کی حکمت عمل ہوتی ہے۔

قسطوں کی اسکیم میں گاہک کو اشیا خریدتے وقت پوری رقم ادا کرنا ضروری نہیں ہوتا۔ وہ کچھ حصہ کو اشیا کو خریدتے وقت ادا کرتے ہیں اور باقی رقم قسطوں میں ادا کرتے ہیں جو ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی یا سالانہ ہوتی ہیں۔ بے شک خریدنے والے کو قسطوں کی اسکیم میں کچھ رقم زیادہ دینی پڑتی ہے کیونکہ تاجر ان سے پوری رقم بعد کی تاریخ میں لینے کے لئے کچھ سود لیتا ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

اس سے پہلے کہ ہم قسطوں کی اسکیم کو سمجھنے کے لئے کچھ مثالوں پر غور کریں آیئے اس تصور سے متعلق استعمال ہونے والی کچھ اصطلاحات کو سمجھ لیں۔

نقد قیمت: کسی شے کی نقد قیمت ہے جو ایک گاہک کو چیز کی پوری قیمت کے طور پر ادا کرنا ضروری ہوتی ہے۔ (C. D. P.) Cash Down Payment وہ رقم ہے جو گاہک کو کل قیمت کے ایک جز کے طور پر چیز خریدتے وقت پر ادا کرنی ہوتی ہے۔

ریمارک: اگر قسطوں کی اسکیم ایسی ہے کہ بقیہ ادائیگی چیز خریدنے کے بعد ایک سال کے اندر کی جائے تو تاخیر ادائیگی پر سود مفرد لیا جاتا ہے۔

> ماضی میں ادھار میں کی گئی چیزوں پر سود لینا اکثر برا سمجھا جاتا ہے اور خاص طور لمبے عرصہ تک منع تھا۔ سود کے خلاف قانون سے بچنے کے لئے لوگوں نے ایک طریقہ نکالا تھا چیز کو ایک کرنسی ادھار لیتے تھے اور دوسری کرنسی میں واپس کرتے، اس طرح سے سود کی شکل بدل دی جاتی تھی۔

آیئے اب اس سے متعلق ریاضیاتی موڈلنگ مسئلے کی طرف واپس آتے ہیں۔

مثال 2: جوہی ایک سائیکل خریدنا چاہتی ہے وہ مارکیٹ جاتی ہے اور یہ پاتی ہے کہ جو سائیکل وہ خریدنا چاہتی ہے اس کی قیمت 1800 روپے ہے۔ جوہی کے پاس 600 روپے ہیں۔ وہ دکاندار کو یہ بتاتی ہے کہ وہ اس کو نہیں خرید سکتی۔ دکاندار کو کچھ تحسیب کرنے کے بعد اسے ایک پیش کش کرتا ہے وہ جوہی سے کہتا ہے کہ وہ 600 روپے C.D.P. کے طور پر دے کر سائیکل لے سکتی ہے اور باقی رقم 610 روپیہ کی دو ماہانہ قسطوں میں ادا کر سکتی ہے جوہی کے پاس Option میں ایک تو یہ کہ دو قسطوں کی ایک اسکیم پر سائیکل خریدے اور دوسری یہ کہ وہ ایک بینک سے 10% سالانہ کی شرح سے سود مفرد لے کر سائیکل کو نقد خریدے۔ بتایئے کس طریقے سے اس کو معاشی طور پر فائدہ ہوگا۔

حل: (**مسئلہ کو سمجھنا**) جوہی کو یہ فیصلہ کرنا ہے کہ وہ دکاندار کی پیش کش کو قبول کرے یا اس کے لئے اس کو سود کی دو شرحوں پر غور کرنا ہے۔ ایک وہ سود جو قسطوں کی ایک اسکیم میں اس کو دینا ہے دوسری وہ جو بینک (یعنی 10%) اسے دینا ہے۔

قدم 2: (**ریاضیاتی**) اسکیم کو قبول کرنے یا رد کرنے کے سلسلہ میں اس کو دکاندار کے ذریعے ادا کئے گئے سود کا موازنہ بینک کے

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ذریعے لئے گئے سود سے کرنا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ پوری رقم ایک سال کے اندر ادا کرنی ہے تو سود مفرد ہی دینا ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ سائیکل کی نقد قیمت ہے = 1800 روپے

قسطوں کی اسکیم کے تحت CDP = 600 روپے

اس لئے بقیہ رقم جو قسطوں میں ادا کرنی وہ (600 - 1800) = ₹1200

مان لیجئے دکاندار r% سالانہ کی شرح سے سود لیتا ہے

ہر قسط کی رقم = ₹610

قسطوں کے ذریعے ادا کی گئی رقم 610 + 610 = ₹ 1220

قسطوں کی اسکیم میں دیا جانے والا سود 1200 - 1220 = ₹20 (1)

کیونکہ جوہی نے 1200 روپے کی رقم ایک مہینہ تک اپنے پاس رکھی اس لئے

مہینہ کی اصل زر = 1200 روپے

دوسرے مہینہ کا اصل زر (610 - 1200) = 590

دوسری قسط = ماہانہ قسط (610) = لیا گیا سود (20) + 190 دوسری اصل زر کی رقم

اس لئے ایک مہینہ کا کل اصل زر 590 + 1200 = 1790 روپے

اب $\text{سود} = \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

قدم 3: (مسئلے کو حل کرنے پر) (1) اور (2) سے

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \quad (\text{تقریباً})$$

قدم 4: (حل کی ترجمانی): قسطوں کی اسکیم میں لئے جانے والے سود کی شرح سے 13.14% بینک کے ذریعے لئے جانے والے سود کی شرح = 10%

اس لئے وہ بینک سے رقم لینے کو ترجیح دے گی جو کہ اس کے لئے فائدہ مند ہے

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

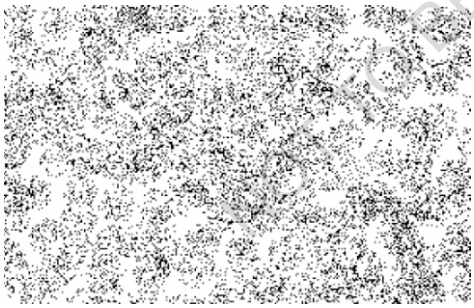
قدم 5: (**توسیق کنندہ موڈل**) اس مثال میں یہ مرحلہ زیادہ اہمیت کا حامل نہیں ہے کیونکہ یہاں اعداد متعین ہیں۔ لیکن اگر بینک سے رقم ادھار لیتے ہیں۔ بہت سی چیزیں جیسے اسٹیمپ پیپر کی کاسٹ وغیرہ جس کی وجہ سے سود کی شرح بڑھ جاتی ہو تو وہ ایسا نظریہ بدل بھی سکتی ہے۔

ریمارک: سود کی شرح کی موڈلنگ ابھی تک ابتدائی مرحلہ میں ہے اور توسیق مالیاتی مارکیٹ کے لئے ابھی بھی مسئلہ ہے۔ اگر قسطوں کو فکس کرنے کے لئے مختلف سود کی شرح لاگو ہوں تو سوسیق پھر ایک اہم مسئلہ بن جاتا ہے۔

مشق A2.2

مندرجہ ذیل پر ایک مسئلے کو حل کرنے کے لئے ریاضیاتی موڈلنگ کی مختلف مراحل کو دکھایئے۔

1. ایک ماہر علم الطیور ایک بڑے میدان میں طوطوں کی تعداد کا اندازہ لگانا چاہتا ہے۔ وہ ان میں سے کچھ کو پکڑنے کے لئے ایک جال کا استعمال کرتا ہے اور 32 طوطے پکڑ لیتا ہے جن پر وہ نشان لگا کر چھوڑ دیتا ہے۔ اس کے اگلے ہفتہ میں وہ اسی طرح سے جال میں 40 طوطے پکڑتا ہے جس میں 8 طوطوں پر نشان لگا ہوتا ہے
   (i) دوسری مرتبہ پکڑے گئے طوطوں پر نشان لگے طوطوں کی کسر کیا ہے؟
   (ii) میدان میں موجود کل طوطوں کی تعداد کا اندازہ لگایئے۔
2. متصل شکل ایک جنگل کی اونچائی سے لیا گیا ایک فوٹو گراف ہے جس میں ہر ڈاٹ ایک درخت کو ظاہر کرتا ہے۔ ماحولیاتی سرشماری کی وجہ سے آپ کا مقصد اس جنگل میں درختوں کی تعداد معلوم کرنا ہے۔



3. ایک T. V. کو 24000 روپے نقد یا 800 روپے C.D. P. کے طور پر خریدا جا سکتا ہے۔ باقی کی رقم 2800 روپے ماہانہ کی چھ قسطوں میں ادا کی جاتی ہے۔ علی مارکیٹ T. V خریدنے جاتا ہے اور اس کے پاس 800 روپے بھی ہیں۔ اب اس کے پاس کوئی بھی طریقہ اختیار کرنے کا حق ہے۔ ایک تو یہ کہ وہ قسطوں کی اسکیم کے تحت T.V خریدے یا کسی مالیات سوسائٹی سے قرض لے کر نقد T.V. خریدے۔ سوسائٹی 18% سالانہ کی شرح سے سود مفرد لیتی ہے۔ علی کے لئے کون سا طریقہ اختیار کرنا بہتر ہے۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

A2.4 ریاضیاتی موڈلنگ اتنی اہم کیوں ہے؟

جیسا کہ ہم مثالوں میں دے چکے ہیں۔ ریاضیاتی موڈلنگ Interdisciplinary مضمون ہے ریاضی داں اور دوسرے میدانوں کے ماہرین اپنے علم اور مہارت کو موجودہ پروڈکٹ کو بہتر بتانے اور دوسرے نئے بہترین پروڈکٹ بنانے یا کچھ مخصوص پروڈکٹ کی کوالٹی کی پیشن گوئی کرنے میں، تعاون کرتے ہیں۔

بے شک ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت کچھ مخصوص وجوہات ہیں لیکن ان میں زیادہ تر مندرجہ ذیل سے متعلق ہیں۔

- سمجھ حاصل کرنا: اگر ہمارے پاس ایک ایسا موڈل ہے جو اصل دنیاوی دلچسپی کے نظام کے ضروری طور طریقوں کی عکاسی کرتا ہے۔ ہم اس نظام کو موڈل کے تجزیہ کے ذریعہ بہتر طور پر سمجھ سکتے ہیں۔ مزید موڈل کی تشکیل کے عمل میں ہم ان چیزوں (factors) کو معلوم کرتے ہیں جن کی نظام میں بہت اہمیت ہوتی، اور نظام کے مختلف پہلو کس طرح سے ایک دوسرے سے متعلق ہیں۔
- پیشن گوئی کرنا یا بہروپ بھرنا (Simulate): اکثر ہماری یہ جاننے کی خواہش ہوتی ہے کہ اصل دنیاوی نظام مستقبل میں کیا کرے گا۔ لیکن نظام کے ساتھ براہ راست تجزیہ کرنا کافی مہنگا اور ناممکن ہے مثال کے طور پر موسم کی پیشین گوئی، میں انسانوں میں ادویات کے اثر کا مطالعہ کرنے میں اور ایک نیوکلیر ری ایکٹر کا مناسب ڈیزائن معلوم کرنا وغیرہ۔ مختلف قسم کی تنظیموں میں پیشین گوئی کی کافی اہمیت ہے کیونکہ مستقبل میں ہونے والے واقعات کی پیشین گوئی فیصلہ لینے کے عمل میں کافی کارآمد ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر مارکیٹ کے شعبوں میں مانگ کی صحیح پیشین گوئی سیل کی صحیح حکمت عملیاں بنانے میں مددگار ثابت ہوتی ہے۔

اسکول بورڈ کو کسی ڈسٹرکٹ میں اسکول جانے والے بچّوں کی تعداد میں اضافہ کی پیشن گوئی کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ یہ طے کیا جاسکے کہ کب اور کہاں نئے اسکول کھولے جاتے ہیں۔

زیادہ تر پیشین گوئی کرنے والے مستقل کے بارے میں پیشن گوئی کرنے کے لئے پرانے اعداد و شمار کا استعمال کرتے ہیں پہلے وہ اعداد و شمار کا تجزیہ کرتے ہیں تاکہ ان کو بیان کرنے والے پیٹرن (نمونہ) کی شناخت کی جاسکے۔ اور پھر ان اعداد و شمار اور پیٹرن کی توسیع مستقبل میں پیشین گوئی کرنے کے لئے کرتے ہیں۔ زیادہ تر پیشین گوئی کی تکنیک میں یہی بنیادی حکمت عملی استعمال ہوتی ہے۔ اور اس کی بنیاد اس مفروضہ پر ہوتی ہے کہ پیٹرن جس کی شناخت کی جا چکی ہے، مستقبل کے لئے بھی کارگر ہوگا۔

© KIBS NOT TO BE REPUBLISHED

- اندازہ لگانا : اکثر ہمیں بڑی قدروں کا اندازہ لگانا ہوتا ہے۔ آپ جنگل میں درختوں، جھیل میں مچھلیوں کی تعداد کی مثالیں دیکھ چکے ہیں۔ چناؤ سے پہلے زیادہ تر سیاسی پارٹیاں اپنے الیکشن جیتنے کے احتمال کی پیشن گوئی کرنا چاہتی ہیں۔ خاص طور پر وہ یہ جاننا چاہتی ہیں ان کے حلقہ کے کتنے لوگ ان کی پارٹی کو ووٹ دیں گے۔ اس پیشن گوئی کی بنیاد پر اپنے انتخابی مہم کی حکمت عملی تیار کرتی ہیں۔ آج کل رائے شماری کے بعد اندازہ کرنے کا کثرت سے استعمال یہ پیشن گوئی کرنے کے لئے ہوتا ہے کہ کون سی پارٹی سیٹ جیتے گی۔

مشق A2.3

1. پچھلے 5 سالوں کی اعداد و شمار کی بنیاد پر پیشن گوئی کی کوشش کیجیے کہ سال کے آخر میں آپ کے اسکول میں دسویں کلاس کے بورڈ کے امتحان میں ریاضی میں آنے والے نمبروں کی اوسط فی صد کیا ہوگی۔

A2.5 خلاصہ

اس ضمیمہ میں آپ نے مندرجہ ذیل نکات کا مطالعہ کیا۔

1. ریاضیاتی موڈل اصل زندگی کی صورت حال کا ریاضیاتی بیان (شکل) ہے۔ ریاضیاتی موڈلنگ کا کام ریاضیاتی موڈل بنانے کا عمل ہے۔ اس کو حل کرنا اور اس کا استعمال کر کے اصل زندگی کا مسئلہ کو سمجھنا۔
2. موڈلنگ میں ملوث بہت سے اقدام ہیں: مسئلہ کو سمجھنا، ریاضیاتی موڈل کی تشکیل، اس کو حل کرنا اصل زندگی کی صورت حال میں اس کی ترجمانی کرنا اور خصوصاً توسیق کنندہ موڈل۔
3. کچھ ریاضیاتی موڈل کی تخلیق۔
4. ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت۔

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin 0 = \frac{5}{13}, \cos 0 = \frac{12}{13}, \tan 0 = \frac{5}{12}, \cot 0 = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec} 0 = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8۔** ہاں

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11۔ (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) غلط

مشق 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43}{11}\frac{24\sqrt{3}}{}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $\angle A = 45°, \angle B = 15°$

4۔ (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

مشق 8.3

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 \quad \cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \sec A = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A \quad 1}}{\sec A}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

مشق 9.1

1. 10 میٹر **2.** $8\sqrt{3}$ میٹر **3.** 3 میٹر، $2\sqrt{3}$ میٹر **4.** $10\sqrt{3}$ میٹر **5.** $40\sqrt{3}$ میٹر **6.** $19\sqrt{3}$ میٹر

7. $20(\sqrt{3} - 1)$ میٹر **8.** $0.8(\sqrt{3} + 1)$ میٹر **9.** $16\frac{2}{3}$ میٹر **10.** $20\sqrt{3}$ میٹر، 20 میٹر، 60

11. $10\sqrt{3}$ میٹر، 10 میٹر **12.** $7(\sqrt{3} + 1)$ میٹر **13.** $(75\sqrt{3} - 1)$ میٹر **14.** $58\sqrt{3}$ m **15.** 3 سیکنڈ

©KBS NOT TO BE REPUBLISHED

مشق 10.1

1. لامحدود 2. (i) ایک (ii) قاطع (iii) دو (iv) نقطہ مماس 3. D

مشق 10.2

1. A 2.B 3.A 6.3cm 7.8cm
12 . AB =15cm, AC=13cm

مشق 11.1

1۔ $\frac{132}{7}$ مربع سینٹی میٹر 2۔ $\frac{77}{8}$ مربع سینٹی میٹر 3۔ $\frac{154}{3}$ مربع سینٹی میٹر
4۔ (i) 28.5 مربع سینٹی میٹر (ii) 235.5 مربع سینٹی میٹر
5۔ (i) 22 سینٹی میٹر (ii) 231 مربع سینٹی میٹر (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ مربع سینٹی میٹر
6۔ 20.4375 مربع سینٹی میٹر؛ 686.0625 مربع سینٹی میٹر 88.44.7 مربع سینٹی میٹر
8۔ (i) 19.625 مربع میٹر (ii) 58.875 مربع سینٹی میٹر 9۔ (i) 285 ملی میٹر (ii) $\frac{385}{4}$ مربع ملی میٹر
10۔ $\frac{22275}{28}$ مربع سینٹی میٹر 11۔ $\frac{158125}{126}$ مربع سینٹی میٹر 12۔ 189.97 کلومربع میٹر
13۔ 162.68 روپے 14. D

مشق 12.1

1۔ 160 مربع سینٹی میٹر 2۔ 572 مربع سینٹی میٹر 3۔ 214.5 مربع سینٹی میٹر 4۔ بڑا قطر=7cm، سطحی رقبہ $332.5m^2$
5۔ $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ 6۔ 220 مربع ملی میٹر 7۔ 22000 روپے، 44 مربع میٹر 8۔ 18 مربع سینٹی میٹر 9۔ 374 مربع سینٹی میٹر

مشق 12.2

1۔ π مکعب سینٹی میٹر
2۔ 66 مکعب سینٹی میٹر موڈل کے اندر حجم=اندر کی ہوا کا حجم (مخروط+استوانہ+مخروط) جہاں r مخروط اور استوانہ کا نقطہ قطر، h_1 مخروط اور h_2 استوانہ کی اونچائی کی، $\left(\frac{1}{3}\pi r^2h_1+\pi r^2h_2+\frac{1}{3}\pi r^2h_1\right)$
مطلوبہ حجم=$\frac{1}{3}\pi r^2(h_1-3h_2-h_1)$
3۔ 338 مکعب سینٹی میٹر 4۔ 523.53 مکعب سینٹی میٹر 5.100 6۔ 892.26 کلوگرام
7۔ 1.131 مکعب سینٹی میٹر تقریباً 8۔ صحیح نہیں ہے صحیح جواب ہے 346.51 مکعب سینٹی میٹر

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

مشق 13.1

1۔ 8.1 پودے: ہم نے راست طریقہ استعمال کیا ہے کیونکہ x_i اور f_i کی قدریں بہت چھوٹی ہیں۔

2. 545.20 روپے **3.** $f = 20$ **4.** 75.9 **5.** 57.19 **6.** 211 روپے
7. 0.099 ppm **8.** 12.48 دن **9.** 69.43 فیصد

مشق 13.2

1۔ موڈ= 36.8 سال، درمیانہ= 35.37 سال، اسپتال میں داخل ہونے والے مریضوں کی اعظم تعداد 36.8 سال
(تقریباً) جب کہ داخل ہونے والے مریضوں کی اوسط عمر 35.37 سال **2۔** 65.625 گھنٹے
3۔ موڈل ماہانہ خرچ= 1847.83 روپے، درمیانہ ماہانہ خرچ= 2662.5 روپے
4۔ موڈ: 30.6، درمیانہ= 29.2 زیادہ تر صوبہ UT میں طلبا اور اساتذہ کی نسبت 30.6 اور اوسط پر یہ نسبت 29.2 ہے۔
5۔ موڈ 4608.7 رن **6۔** 44.7 کاریں

مشق 13.3

1۔ وسطانیہ= 137 اکائیاں، درمیانہ= 137.05 اکائیاں، موڈ 135.76 اکائیاں اس حالت میں تینوں پیمائش تقریباً مساوی ہیں۔
2۔ $x = 8, y = 7$ **3۔** وسطانیہ عمر=35.76 سال **4۔** وسطانیہ لمبائی = 146.75 ملی میٹر **5۔** وسطانیہ عمر=3406.98 گھنٹے
6۔ وسطانیہ= 8.05، درمیانہ 8.32، موڈل سائز= 7.88، **7۔** وسطانیہ وزن = 56.67kg کلوگرام

مشق 14.1

1۔ (i) 1 (ii) 0، ناممکن وقوعہ (iii) 1، یقینی وقوعہ (iv) 1 (v) 0,1

2۔ تجربات (iii) اور (iv) کے مساوی امکانی نتائج ہیں۔

3۔ جب ہم ایک سکّہ کو اچھالتے ہیں تب نتائج ہیڈ اور ٹیل مساوی امکانی ہیں۔ اس لئے ایک انفرادی سکّہ کو اچھالنے پر ملا نتیجہ پوری طرح سے غیر یقینی ہے (جس کی پیشین گوئی نہیں کی جاسکتی)

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1 **7.** 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1 **13.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{3}{4}$ (b) 0 16. $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.**(i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.**(i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$ **22.** (i)

دونوں پانسوں پر حاصل جمع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) نہیں، 11 حاصل جمع مساوی امکانی نہیں ہیں۔

23۔ $\frac{3}{4}$؛ ممکنہ نتائج ہیں HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH. Here, THH یہاں THT کا مطلب ہے پہلے ٹاس میں ٹیل دوسرے ٹاس میں ہیڈ اور تیسرے ٹاس میں ہیڈ اور آگے تک

24۔ (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25۔ (i) غلط: ہم نتائج کی درجہ بندی کر سکتے ہیں لیکن پھر یہ مساوی امکانی نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ان میں سے ایک دو طریقوں سے آسکتا ہے۔ پہلے پر ہیڈ اور دوسرے پر ٹیل یا پہلے پر ٹیل یا دوسرے میں ہیڈ یہ دو ہیڈ (یا ٹیل) کے طور پر مساوی امکانی ہوں گے۔ (ii) صحیح: اس سوال میں لئے گئے دو مساوی امکانی ہیں۔

مشق A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2۔ ایک مربع سینٹی میٹر کا رقبہ لیجیے اور اس میں ڈاٹ گنئے۔ درختوں کی کل تعداد اس عدد اور رقبہ (مربع سینٹی میٹر میں) کے حاصل ضرب کے برابر ہوگی۔

3۔ قسطوں کی اسکیم میں سؤد کی شرح 17.74 فیصد ہے جو 18 فیصد سے کم ہے۔

مشق A2.3

1۔ طلبا اپنا جواب خود معلوم کر سکتے ہیں۔

@KTB NOT TO BE REPUBLISHED