



Government of Karnataka

गणित MATHEMATICS



नौवीं कक्षा
Ninth Standard

भाग - 2



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Karnataka Textbook Society (R.)

6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru - 560 003

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer*, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT*, Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT*, S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT*, Kendriya Vidyalaya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT*, JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master*, Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT*, K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT*, K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT*, Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT*, JNV, Neriya Mangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT*,

CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT*, D.M. School, RIE, Bhopal;

V. Madhavi, *TGT*, Sanskriti School, Chanakya Puri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT*, JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge*, Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator*, Naresh Kumar; *Copy Editor*, Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader*, Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

विषय सूची

7. त्रिभुज	01
7.1 भूमिका	01
7.2 त्रिभुजों की सर्वांगसमता	01
7.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ	04
7.4 एक त्रिभुज के कुछ गुण	14
7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ	19
7.6 सारांश	24
8. चतुर्भुज	25
8.1 समांतर चतुर्भुज के गुण	25
8.2 मध्य-बिंदु प्रमेय	34
8.3 सारांश	38
9. वृत्त	39
9.1 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण	39
9.2 केन्द्र से जीवा पर लम्ब	41
9.3 समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ	42
9.4 एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण	46
9.5 चक्रीय चतुर्भुज	49
9.6 सारांश	54
10. हीरोन का सूत्र	55
10.1 त्रिभुज का क्षेत्रफल - हीरोन के सूत्र द्वारा	55
10.2 सारांश	60

11. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	61
11.1 एक लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल	61
11.2 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल	66
11.3 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन	70
11.4 गोले का आयतन	74
11.5 सारांश	77
12. सांख्यिकी	78
12.1 आंकड़ों का आलेखीय निरूपण	78
12.2 सारांश	94
परिशिष्ट 2 – गणितीय निदर्शन का परिचय	95
A2.1 भूमिका	95
A2.2 शब्द समस्याओं का पुनर्विलोकन	96
A2.3 कुछ गणितीय निदर्श	101
A2.4 निदर्शन प्रक्रम, इसके लाभ और इसकी सीमाएँ	109
A2.5 सारांश	114
उत्तर/संकेत	115 124



0963CH07

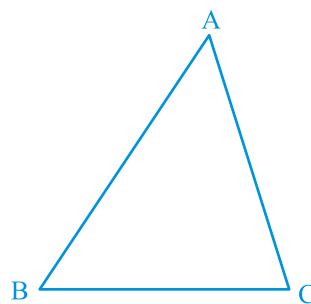
अध्याय 7

त्रिभुज

7.1 भूमिका

आप पिछली कक्षाओं में, त्रिभुजों और उनके विभिन्न गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आप जानते हैं कि तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाई गई एक बंद आकृति (closed figure) एक त्रिभुज (triangle) कहलाती है ('त्रि' का अर्थ है 'तीन')। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। उदाहरणार्थ, आकृति 7.1 में दिए त्रिभुज ABC, जिसे ΔABC से व्यक्त करते हैं, की तीन भुजाएँ AB, BC और CA हैं, $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ इसके तीन कोण हैं तथा A, B और C इसके तीन शीर्ष हैं।

अध्याय 6 में, आप त्रिभुजों के कुछ गुणों का भी अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता (congruence), सर्वांगसमता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणों और त्रिभुजों में असमिकाओं (inequalities) के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे। आप पिछली कक्षाओं के इन गुणों में से अधिकतर गुणों की सत्यता की जाँच क्रियाकलापों द्वारा कर चुके हैं। यहाँ हम इनमें से कुछ गुणों को सिद्ध भी करेंगे।



आकृति 7.1

7.2 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

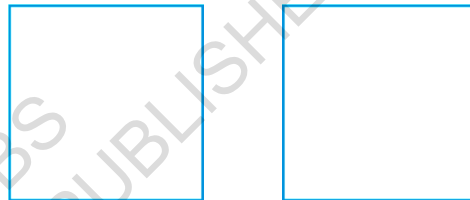
आपने यह अवश्य ही देखा होगा कि आपकी फोटो की एक ही साइज की दो प्रतियाँ सर्वसम (identical) होती हैं। इसी प्रकार, एक ही माप की दो चूड़ियाँ और एक ही बैंक द्वारा जारी किए गए दो एटीएम (ATM) कार्ड सर्वसम होते हैं। आपने देखा होगा कि यदि एक ही वर्ष

में ढले (बने) दो एक रूप के सिक्कों में से एक को दूसरे पर रखें, तो वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं।

क्या आपको याद है कि ऐसी आकृतियों को कैसी आकृतियाँ कहते हैं? निःसंदेह ये **सर्वांगसम आकृतियाँ (congruent figures)** कहलाती हैं ('सर्वांगसम' का अर्थ है 'सभी प्रकार से बराबर', अर्थात् वे आकृतियाँ जिनके समान आकार और समान माप हैं)।

अब एक ही त्रिज्या के दो वृत्त खींचिए और एक को दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? ये एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और हम इन्हें **सर्वांगसम वृत्त** कहते हैं।

इसी क्रियाकलाप की एक ही माप की भुजाओं वाले दो वर्गों को खींच कर और फिर एक वर्ग को दूसरे वर्ग पर रखकर (देखिए आकृति 7.2) अथवा बराबर भुजाओं वाले दो समबाहु त्रिभुजों को एक दूसरे पर रखकर, पुनरावृत्ति कीजिए। आप देखेंगे कि वर्ग सर्वांगसम हैं और समबाहु त्रिभुज भी सर्वांगसम हैं।



आकृति 7.2

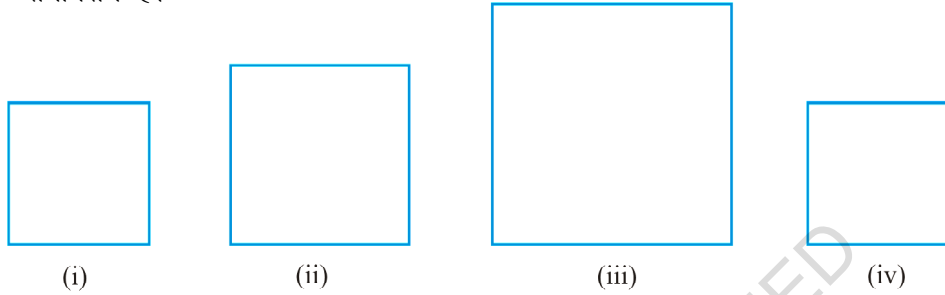
आप सोच सकते हैं कि हम सर्वांगसमता का अध्ययन क्यों कर रहे हैं। आपने अपने रेफ्रीजरेटर में बर्फ की ट्रे (ice tray) अवश्य ही देखी होगी। ध्यान दीजिए कि बर्फ जमाने के लिए बने सभी खाँचे सर्वांगसम हैं। ट्रे में (खाँचों के लिए प्रयोग किए गए साँचों की गहराइयाँ भी सर्वांगसम होती हैं (ये सभी आयताकार या सभी वृत्ताकार या सभी त्रिभुजाकार हो सकते हैं)। अतः, जब भी सर्वसम (एक जैसी) वस्तुएँ बनानी होती हैं, तो साँचे बनाने के लिए सर्वांगसमता की संकल्पना का प्रयोग किया जाता है।

कभी-कभी आपको अपने पेन के रिफिल (refill) बदलने में भी कठिनाई हो सकती है, यदि नया रिफिल आपके पेन के साइज का न हो। स्पष्टतः रिफिल तभी पेन में लग पाएगा, जबकि पुरानी रिफिल और नया रिफिल सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार, आप दैनिक जीवन की स्थितियों में ऐसे अनेक उदाहरण ज्ञात कर सकते हैं, जहाँ वस्तुओं की सर्वांगसमता का उपयोग होता है।

क्या आप सर्वांगसम आकृतियों के कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं?

अब, निम्न में से कौन-कौन सी आकृतियाँ आकृति 7.3(i) में दिए वर्ग के सर्वांगसम नहीं हैं?

आकृति 7.3 (ii) और आकृति 7.3 (iii) में दिए बड़े वर्ग स्पष्टतः आकृति 7.3 (i) के वर्ग के सर्वांगसम नहीं हैं। परन्तु आकृति 7.3 (iv) में दिया हुआ वर्ग आकृति 7.3 (i) में दिए वर्ग के सर्वांगसम है।

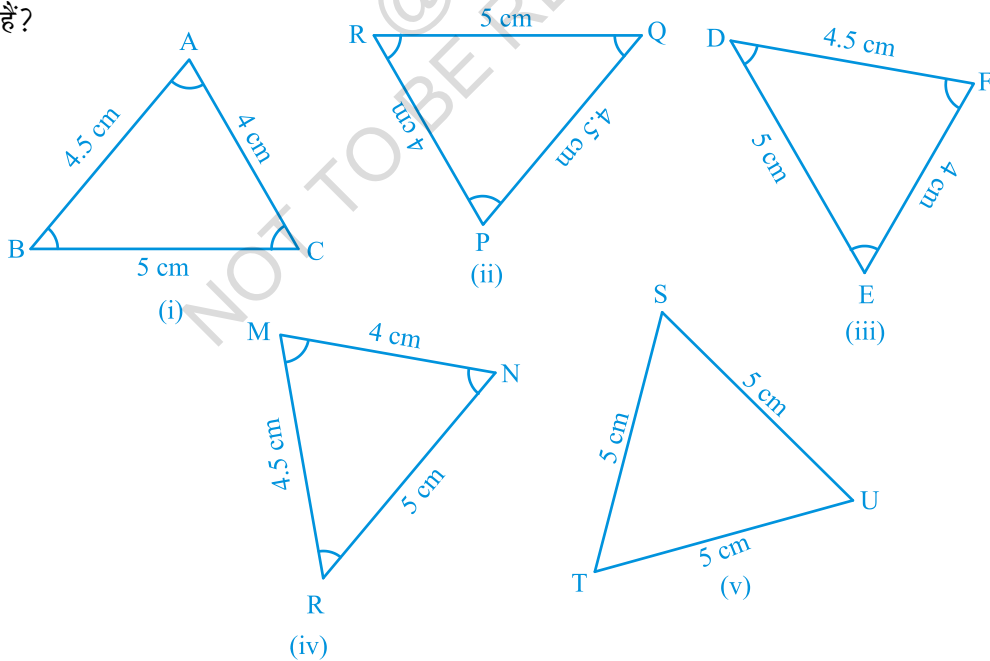


आकृति 7.3

आइए अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की चर्चा करें।

आप पहले से यह जानते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ और कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और कोणों के बराबर हों।

अब, निम्न में से कौन-कौन से त्रिभुज आकृति 7.4 (i) में दिए त्रिभुज ABC के सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.4

आकृति 7.4 (ii) से आकृति 7.4 (v) तक के प्रत्येक त्रिभुज को काट कर उसे पलट कर ΔABC पर रखने का प्रयत्न कीजिए। देखिए कि आकृतियों 7.4 (ii), (iii) और (iv) में दिए त्रिभुज ΔABC के सर्वांगसम हैं, जबकि 7.4 (v) का ΔTSU , ΔABC के सर्वांगसम नहीं है।

यदि ΔPQR , ΔABC के सर्वांगसम है, तो हम $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ लिखते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ हो, तो ΔPQR की भुजाएँ ΔABC की संगत बराबर भुजाओं पर पड़ेंगी और ऐसा ही कोणों के लिए भी होगा।

अर्थात् भुजा PQ भुजा AB को ढकती है, भुजा QR भुजा BC को ढकती है और भुजा RP भुजा CA को ढकती है; कोण P कोण A को ढकता है, कोण Q कोण B को ढकता है और कोण R कोण C को ढकता है। साथ ही, दोनों त्रिभुजों के शीर्षों में एक-एक संगतता (one-one correspondence) है। अर्थात् शीर्ष P शीर्ष A के संगत है, शीर्ष Q शीर्ष B के संगत है और शीर्ष R शीर्ष C के संगत है। इसे निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$$

ध्यान दीजिए कि इस संगतता के अंतर्गत, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ है। परन्तु इसे $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

इसी प्रकार, आकृति 7.4 (iii) के लिए,

$$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC \text{ और } EF \leftrightarrow CA$$

तथा $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ और $E \leftrightarrow C$ है।

इसलिए, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ लिखना सही है, परन्तु $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

आकृति 7.4 (iv) के त्रिभुज और ΔABC के बीच संगतता लिखिए।

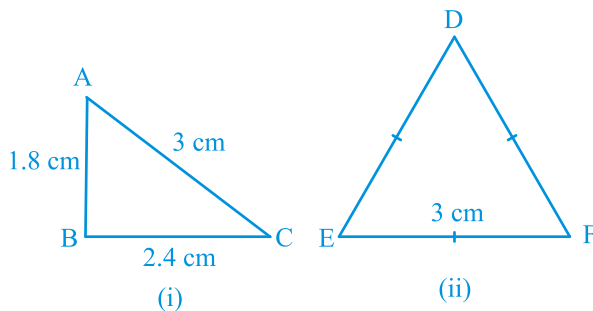
अतः, त्रिभुजों की सर्वांगसमता को सांकेतिक रूप में लिखने के लिए, उनके शीर्षों की संगतता को सही प्रकार से लिखना आवश्यक है।

ध्यान दीजिए कि **सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत भाग बराबर होते हैं** और 'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों के लिए' हम संक्षेप में 'CPCT' लिखते हैं।

7.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ

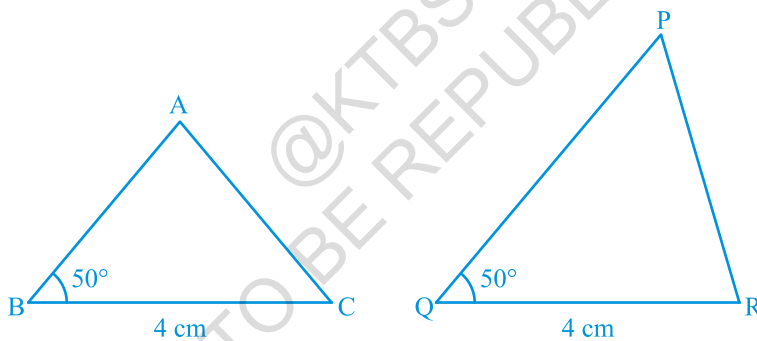
पिछली कक्षाओं में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए चार कसौटियाँ (criteria) या नियम (rules) पढ़ चुके हैं। आइए इनका पुनर्विलोकन करें।

एक भुजा 3 cm लेकर दो त्रिभुज खींचिए (देखिए आकृति 7.5)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं? ध्यान दीजिए कि ये त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।



आकृति 7.5

अब दो त्रिभुज खींचिए जिनमें एक भुजा 4 cm है और एक कोण 50° है (देखिए आकृति 7.6)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.6

देखिए कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

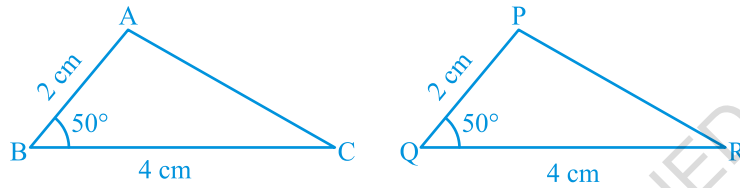
इस क्रियाकलाप को त्रिभुजों के कुछ और युग्म खींच कर दोहराइए।

अतः, भुजाओं के एक युग्म की समता अथवा भुजाओं के एक युग्म और कोणों के एक युग्म की समता हमें सर्वांगसम त्रिभुज देने के लिए पर्याप्त नहीं है।

उस स्थिति में क्या होगा जब बराबर कोणों की भुजाओं का अन्य युग्म भी बराबर हो जाए?

आकृति 7.7 में $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ और साथ ही $AB = PQ$ है। अब आप $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ की सर्वांगसमता के बारे में क्या कह सकते हैं?

पिछली कक्षाओं से याद कीजिए कि इस स्थिति में, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। आप इसका सत्यापन, $\triangle ABC$ को काट कर और उसे $\triangle PQR$ पर रख कर कर सकते हैं। इस क्रियाकलाप को त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराएँ। क्या आप देखते हैं कि दो भुजाओं और अंतर्गत कोण की समता त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त है? हाँ, यह पर्याप्त है।



आकृति 7.7

यह त्रिभुजों की सर्वांगसमता की पहली कसौटी (criterion) है।

अभिगृहीत 7.1 (SAS सर्वांगसमता नियम) : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।

इस परिणाम को इससे पहले ज्ञात परिणामों की सहायता से सिद्ध नहीं किया जा सकता है और इसीलिए इसे एक अभिगृहीत के रूप में सत्य मान लिया गया है (देखिए परिशिष्ट 1)।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : आकृति 7.8 में $OA = OB$ और $OD = OC$ है। दर्शाइए कि

(i) $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ और (ii) $AD \parallel BC$ है।

हल : (i) $\triangle AOD$ और $\triangle BOC$ में,

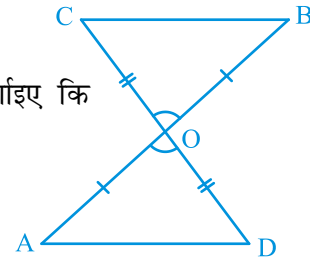
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array} \right\} \text{ (दिया है)}$$

साथ ही, क्योंकि $\angle AOD$ और $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म है, अतः

$$\angle AOD = \angle BOC$$

इसलिए,

$$\triangle AOD \cong \triangle BOC \quad (\text{SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा})$$



आकृति 7.8

(ii) सर्वांगसम त्रिभुजों AOD और BOC में, अन्य संगत भाग भी बराबर होंगे।

अतः, $\angle OAD = \angle OBC$ है। परन्तु ये रेखाखंडों AD और BC के लिए एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं।

अतः, $AD \parallel BC$ है।

उदाहरण 2 : AB एक रेखाखंड है और रेखा l इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि l पर स्थित P कोई बिंदु है, तो दर्शाइए कि P बिंदुओं A और B से समदूरस्थ (equidistant) है।

हल : $l \perp AB$ है और AB के मध्य-बिंदु C से होकर जाती है (देखिए आकृति 7.9)। आपको दर्शाना है कि $PA = PB$ है। इसके लिए $\triangle PCA$ और $\triangle PCB$ पर विचार कीजिए। हमें प्राप्त है :

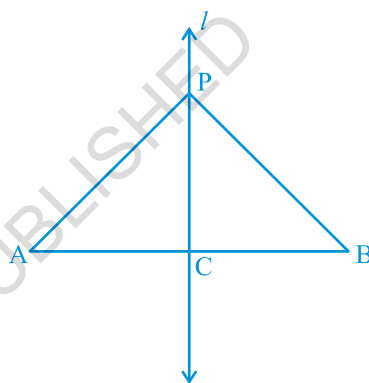
$$AC = BC \quad (C, AB \text{ का मध्य-बिंदु है})$$

$$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ \quad (\text{दिया है})$$

$$PC = PC \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

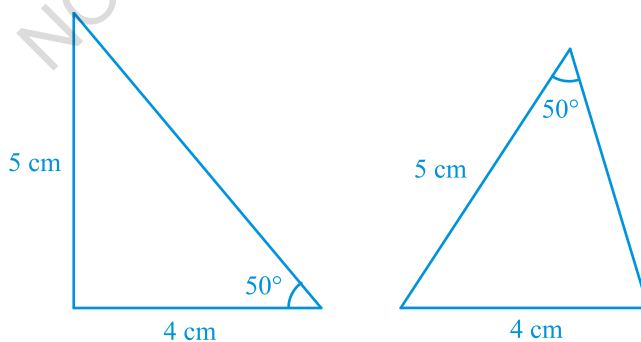
अतः, $\triangle PCA \cong \triangle PCB$ (SAS नियम)

इसलिए, $PA = PB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)



आकृति 7.9

आइए अब दो त्रिभुजों की रचना करें जिनकी दो भुजाएँ 4 cm और 5 cm हैं और एक कोण 50° है तथा साथ ही यह कोण बराबर भुजाओं के बीच अंतर्गत कोण नहीं है (देखिए आकृति 7.10)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



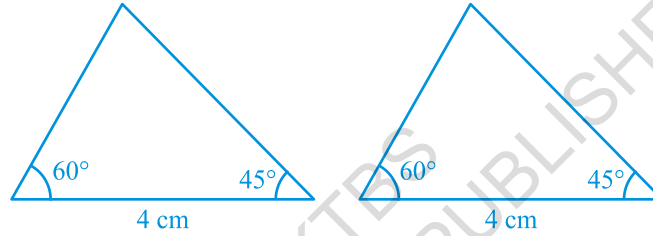
आकृति 7.10

ध्यान दीजिए कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

त्रिभुजों के कुछ अन्य युग्म लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए यह आवश्यक है कि बराबर कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत कोण हो।

अतः, SAS नियम तो सत्य है, परन्तु ASS या SSA नियम सत्य नहीं है।

अब, ऐसे दो त्रिभुजों की रचना करने का प्रयत्न करिए, जिनमें दो कोण 60° और 45° हों तथा इन कोणों की अंतर्गत भुजा 4 cm हो (देखिए आकृति 7.11)।



आकृति 7.11

इन दोनों त्रिभुजों को काटिए और एक त्रिभुज को दूसरे के ऊपर रखिए। आप क्या देखते हैं? देखिए कि एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। कुछ और त्रिभुजों को लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देखेंगे कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा की समता पर्याप्त है।

यह परिणाम **कोण-भुजा-कोण** (Angle-Side-Angle) कसौटी है और इसे **ASA सर्वांगसमता कसौटी** लिखा जाता है। आप पिछली कक्षाओं में, इसकी सत्यता की जाँच कर चुके हैं। आइए इस परिणाम को सिद्ध करें।

चूँकि इस परिणाम को सिद्ध किया जा सकता है, इसलिए इसे एक **प्रमेय (theorem)** कहा जाता है। इसे सिद्ध करने के लिए, हम SAS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करेंगे।

प्रमेय 7.1 (ASA सर्वांगसमता नियम) : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों।

उपपत्ति : हमें दो त्रिभुज ABC और DEF दिए हैं, जिनमें $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और $BC = EF$ है। हमें $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ सिद्ध करना है।

दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए देखिए कि यहाँ तीन स्थितियाँ संभव हैं।

स्थिति (i) : मान लीजिए $AB = DE$ है (देखिए आकृति 7.12)।

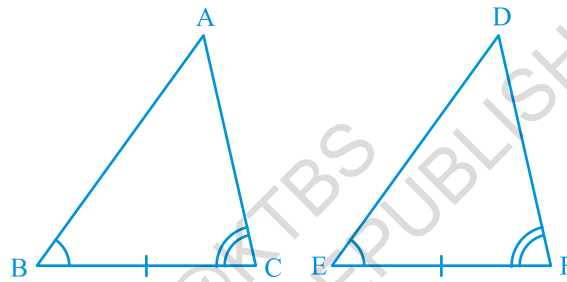
अब आप क्या देखते हैं? आप देख सकते हैं कि

$$AB = DE \quad (\text{कल्पना की है})$$

$$\angle B = \angle E \quad (\text{दिया है})$$

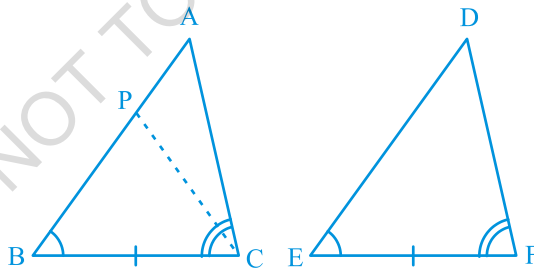
$$BC = EF \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{अतः,} \quad \triangle ABC \cong \triangle DEF \quad (\text{SAS नियम द्वारा})$$



आकृति 7.12

स्थिति (ii) : मान लीजिए, यदि संभव है तो, $AB > DE$ है। इसलिए, हम AB पर एक बिंदु P ऐसा ले सकते हैं कि $PB = DE$ हो (देखिए आकृति 7.13)।



आकृति 7.13

अब $\triangle PBC$ और $\triangle DEF$ में,

$$PB = DE \quad (\text{रचना से})$$

$$\angle B = \angle E \quad (\text{दिया है})$$

$$BC = EF \quad (\text{दिया है})$$

अतः, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\triangle PBC \cong \triangle DEF \quad (\text{SAS सर्वांगसमता अभिगृहीत द्वारा})$$

चूँकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए इनके संगत भाग बराबर होने चाहिए।

$$\text{अतः,} \quad \angle PCB = \angle DFE$$

परन्तु हमें दिया है कि

$$\angle ACB = \angle DFE$$

$$\text{अतः,} \quad \angle ACB = \angle PCB$$

परन्तु क्या यह संभव है?

यह तभी संभव है, जब P बिंदु A के साथ संपाती हो।

$$\text{या} \quad BA = ED$$

$$\text{अतः,} \quad \triangle ABC \cong \triangle DEF \quad (\text{SAS अभिगृहीत द्वारा})$$

स्थिति (iii) : यदि $AB < DE$ हो, तो हम DE पर एक बिंदु M इस प्रकार ले सकते हैं कि $ME = AB$ हो। अब स्थिति (ii) वाले तर्कण को दोहराते हुए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $AB = DE$ है और इसीलिए $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ है।

अब मान लीजिए कि दो त्रिभुजों में दो कोणों के युग्म और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हैं, परन्तु ये भुजाएँ बराबर कोणों के युग्मों की अंतर्गत भुजाएँ नहीं हैं। क्या ये त्रिभुज अभी भी सर्वांगसम हैं? आप देखेंगे कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

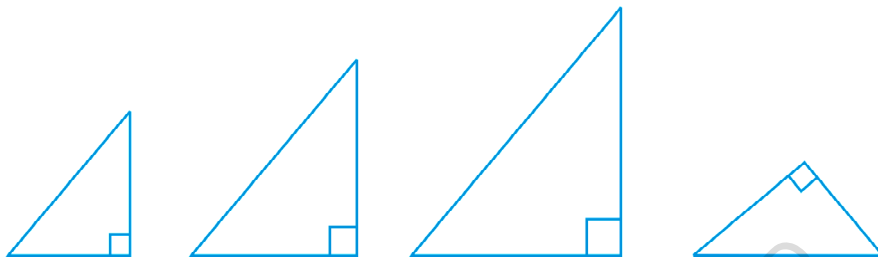
आप जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अतः त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म बराबर होने पर उनके तीसरे कोण भी बराबर होंगे ($180^\circ -$ दोनों बराबर कोणों का योग)।

अतः, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि इन त्रिभुजों के दो कोणों के युग्म बराबर हों और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। हम इसे **AAS सर्वांगसमता नियम** कह सकते हैं।

आइए अब निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

40°, 50° और 90° वाले कुछ त्रिभुज खींचिए।

आप ऐसे कितने त्रिभुज खींच सकते हैं? वास्तव में, भुजाओं की विभिन्न लंबाइयाँ लेकर हम ऐसे जितने चाहे उतने त्रिभुज खींच सकते हैं (देखिए आकृति 7.14)।



आकृति 7.14

देखिए कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं।

अतः, तीन कोणों की समता त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त नहीं है। इसलिए, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, तीन बराबर भागों में से एक बराबर भाग भुजा अवश्य होना चाहिए।

आइए अब कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : रेखाखंड AB एक अन्य रेखाखंड CD के समांतर है और O रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है (देखिए आकृति 7.15)। दर्शाइए कि (i) $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (ii) O रेखाखंड BC का भी मध्य-बिंदु है।

हल : (i) $\triangle AOB$ और $\triangle DOC$ पर विचार कीजिए।

$$\angle ABO = \angle DCO \quad (\text{एकांतर कोण और तिर्यक रेखा BC के साथ } AB \parallel CD)$$

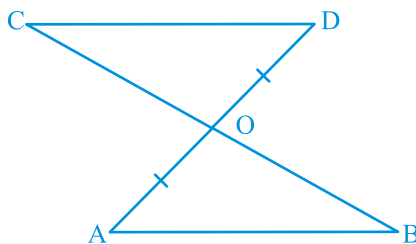
$$\angle AOB = \angle DOC \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

$$OA = OD \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{अतः, } \triangle AOB \cong \triangle DOC \quad (\text{AAS नियम})$$

$$(ii) \quad OB = OC \quad (\text{CPCT})$$

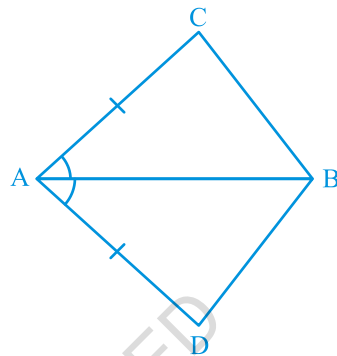
अर्थात् O, रेखाखंड BC का भी मध्य-बिंदु है।



आकृति 7.15

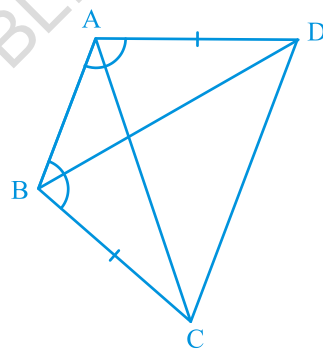
प्रश्नावली 7.1

1. चतुर्भुज ACBD में, $AC = AD$ है और AB कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति 7.16)। दर्शाइए कि $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ है। BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



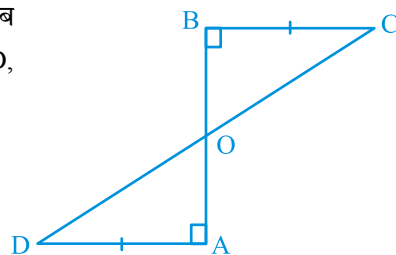
आकृति 7.16

2. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है (देखिए आकृति 7.17)। सिद्ध कीजिए कि
- $\triangle ABD \cong \triangle BAC$
 - $BD = AC$
 - $\angle ABD = \angle BAC$



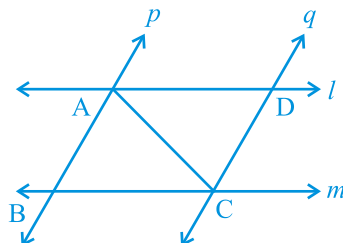
आकृति 7.17

3. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिए आकृति 7.18)। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



आकृति 7.18

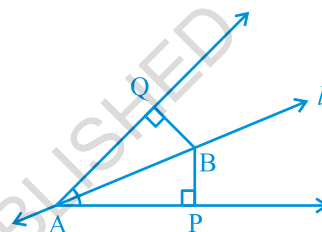
4. l और m दो समांतर रेखाएँ हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है (देखिए आकृति 7.19)। दर्शाइए कि $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ है।



आकृति 7.19

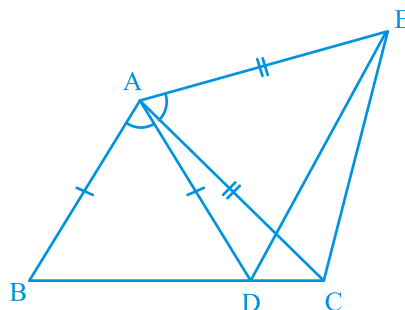
5. रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिए आकृति 7.20)। दर्शाइए कि

- (i) $\triangle APB \cong \triangle AQB$
(ii) $BP = BQ$ है, अर्थात् बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



आकृति 7.20

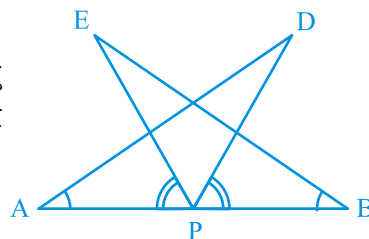
6. आकृति 7.21 में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।



आकृति 7.21

7. AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है। D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ है। (देखिए आकृति 7.22)। दर्शाइए कि

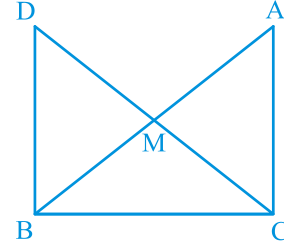
- (i) $\triangle DAP \cong \triangle EBP$
(ii) $AD = BE$



आकृति 7.22

8. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य-बिंदु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $DM = CM$ है। बिंदु D को बिंदु B से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति 7.23)। दर्शाइए कि

- $\triangle AMC \cong \triangle BMD$
- $\angle DBC$ एक समकोण है
- $\triangle DBC \cong \triangle ACB$
- $CM = \frac{1}{2} AB$



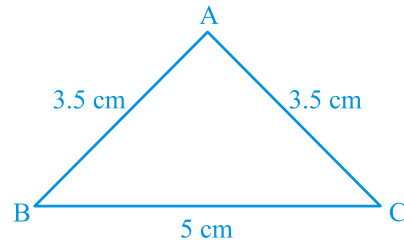
आकृति 7.23

7.4 एक त्रिभुज के कुछ गुण

पिछले अनुच्छेद में, आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता की दो कसौटियों का अध्ययन किया है। आइए इन परिणामों का एक ऐसे त्रिभुज के कुछ गुणों का अध्ययन करने में प्रयोग करें जिसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं।

नीचे दिया गया क्रियाकलाप कीजिए:

एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों। मान लीजिए दो भुजाएँ 3.5 cm लंबाई की हैं और एक भुजा 5 cm लंबाई की है (देखिए आकृति 7.24)। आप पिछली कक्षाओं में, ऐसी रचनाएँ कर चुके हैं।



आकृति 7.24

क्या आपको याद है कि इस त्रिभुज को क्या कहते हैं?

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों **समद्विबाहु त्रिभुज (isosceles triangle)** कहलाता है। अतः, आकृति 7.24 का $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।

अब $\angle B$ और $\angle C$ को मापिए। आप क्या देखते हैं?

विभिन्न भुजाओं वाले अन्य समद्विबाहु त्रिभुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देख सकते हैं कि ऐसे प्रत्येक त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख (सामने के) कोण बराबर हैं।

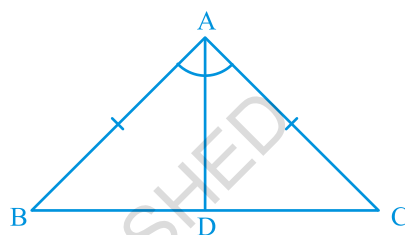
यह एक अति महत्वपूर्ण परिणाम है और प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के लिए सत्य है। इसे नीचे दशाई विधि के अनुसार सिद्ध किया जा सकता है:

प्रमेय 7.2 : एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

इस परिणाम को कई विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। इनमें से एक उपपत्ति नीचे दी जा रही है।

उपपत्ति : हमें एक समद्विबाहु $\triangle ABC$ दिया है, जिसमें $AB = AC$ है। हमें $\angle B = \angle C$ सिद्ध करना है।

आइए $\angle A$ का समद्विभाजक खींचें। मान लीजिए यह BC से D पर मिलता है (देखिए आकृति 7.25)।



आकृति 7.25

अब, $\triangle BAD$ और $\triangle CAD$ में,

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{रचना से})$$

$$AD = AD \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः,} \quad \triangle BAD \cong \triangle CAD \quad (\text{SAS नियम द्वारा})$$

$$\text{इसलिए,} \quad \angle ABD = \angle ACD \quad (\text{CPCT})$$

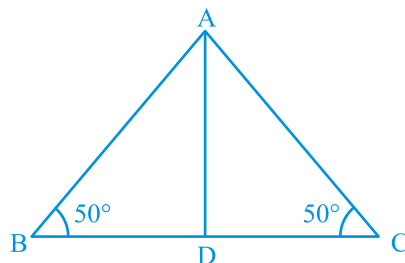
$$\text{अर्थात्} \quad \angle B = \angle C$$

क्या इसका विलोम भी सत्य है? अर्थात्

यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों, तो क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी?

नीचे दिया क्रियाकलाप कीजिए :

एक $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसमें BC किसी भी लंबाई वाली एक भुजा है और $\angle B = \angle C = 50^\circ$ है। $\angle A$ का समद्विभाजक खींचिए और मान लीजिए कि यह BC को D पर प्रतिच्छेद करता है (देखिए आकृति 7.26)।



आकृति 7.26

त्रिभुज ABC को कागज में से काट लीजिए और इसे AD के अनुदिश मोड़िए ताकि शीर्ष C शीर्ष B पर गिरे (पड़े)।

AC और AB के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

देखिए कि AC, AB को पूर्णतया ढक लेती है।

अतः, $AC = AB$

इसी क्रियाकलाप को ऐसे ही कुछ अन्य त्रिभुज लेकर दोहराइए। प्रत्येक बार आप देखेंगे कि एक त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं। अतः, हम निम्न प्रमेय प्राप्त करते हैं :

प्रमेय 7.3 : किसी त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

यह प्रमेय 7.2 का विलोम है।

आप इस प्रमेय को ASA सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं।

आइए इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : $\triangle ABC$ में, $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है (देखिए आकृति 7.27)। दर्शाइए कि $AB = AC$ है और $\triangle ABC$ समद्विबाहु है।

हल : $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में,

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{दिया है})$$

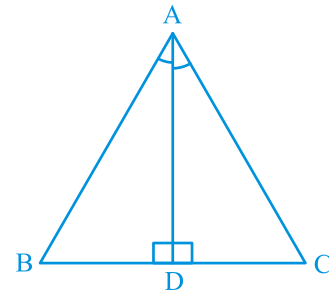
$$AD = AD \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{अतः, } \triangle ABD \cong \triangle ACD \quad (\text{ASA नियम})$$

$$\text{इसलिए, } AB = AC \quad (\text{CPCT})$$

इसी कारण $\triangle ABC$ समद्विबाहु है।



आकृति 7.27

उदाहरण 5 : E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 7.28)। दर्शाइए कि $BF = CE$ है।

हल : $\triangle ABF$ और $\triangle ACE$ में,

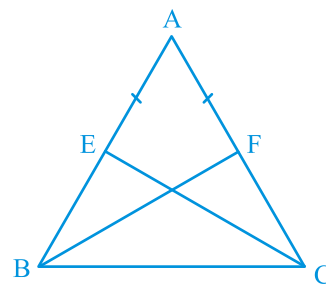
$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle A = \angle A \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$AF = AE \quad (\text{बराबर भुजाओं के आधे})$$

$$\text{अतः, } \triangle ABF \cong \triangle ACE \quad (\text{SAS नियम})$$

$$\text{इसलिए, } BF = CE \quad (\text{CPCT})$$



आकृति 7.28

उदाहरण 6 : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें $AB = AC$ है, की भुजा BC पर दो बिंदु D और E इस प्रकार हैं कि $BE = CD$ है (देखिए आकृति 7.29)। दर्शाइए कि $AD = AE$ है।

हल : $\triangle ABD$ और $\triangle ACE$ में,

$$AB = AC \quad (\text{दिया है}) \quad (1)$$

$$\angle B = \angle C \quad (2)$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

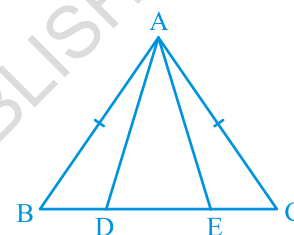
$$\text{साथ ही, } BE = CD \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{इसलिए, } BE - DE = CD - DE$$

$$\text{अर्थात्, } BD = CE \quad (3)$$

$$\text{अतः, } \triangle ABD \cong \triangle ACE \quad [(1), (2), (3) \text{ और SAS नियम द्वारा}]$$

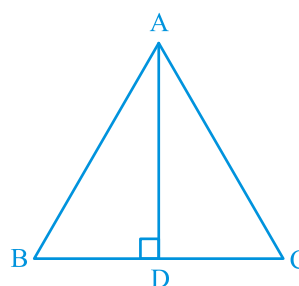
$$\text{इससे प्राप्त होता है: } AD = AE \quad (\text{CPCT})$$



आकृति 7.29

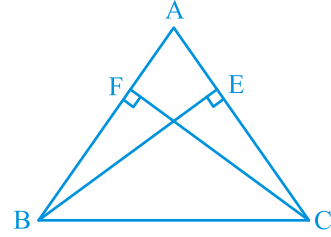
प्रश्नावली 7.2

- एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें $AB = AC$ है, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। A और O को जोड़िए। दर्शाइए कि
(i) $OB = OC$
(ii) AO कोण A को समद्विभाजित करता है
- $\triangle ABC$ में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 7.30)। दर्शाइए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।



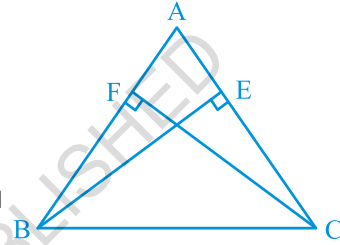
आकृति 7.30

3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्षलम्ब BE और CF खींचे गए हैं (देखिए आकृति 7.31)। दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।



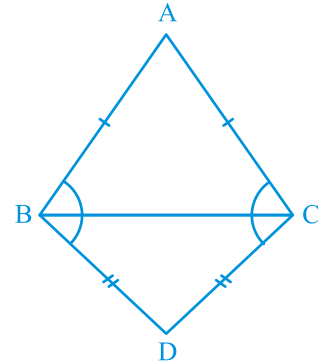
आकृति 7.31

4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति 7.32)। दर्शाइए कि
- $\triangle ABE \cong \triangle ACF$
 - $AB = AC$, अर्थात् $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



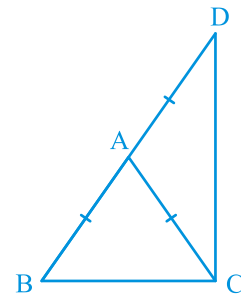
आकृति 7.32

5. ABC और DBC समान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति 7.33)। दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।



आकृति 7.33

6. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। भुजा BA बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि $AD = AB$ है (देखिए आकृति 7.34)। दर्शाइए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



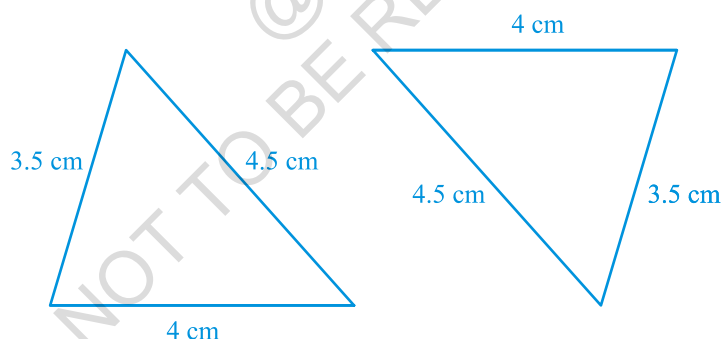
आकृति 7.34

7. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$ है। $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।
8. दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है।

7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ

आप इस अध्याय में, पहले यह देख चुके हैं कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों के दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर होने पर दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है। आप सोच सकते हैं कि संभवतः एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं के दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर होने पर त्रिभुज सर्वांगसम हो जाएँ। आप यह पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि ऐसी स्थिति में त्रिभुज निःसंदेह सर्वांगसम होते हैं।

इस धारणा को निश्चित करने के लिए, 4cm, 3.5cm और 4.5cm के दो त्रिभुज खींचिए (देखिए आकृति 7.35)। इन्हें काटकर, एक दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? यदि बराबर भुजाओं को एक दूसरे पर रखा जाए। ये एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं अतः, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति 7.35

इस क्रियाकलाप को कुछ अन्य त्रिभुज खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, हम सर्वांगसमता के एक और नियम पर पहुँच जाते हैं:

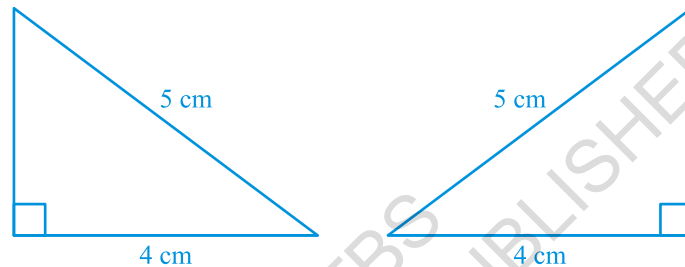
प्रमेय 7.4 (SSS सर्वांगसमता नियम) : यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एक अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

एक उपयुक्त रचना करके, इस प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है।

आप SAS सर्वांगसमता नियम में पहले ही देख चुके हैं कि बराबर कोणों के युग्म संगत बराबर भुजाओं के युग्मों के बीच में (अंतर्गत) होने चाहिए और यदि ऐसा नहीं हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं भी हो सकते हैं।

इस क्रियाकलाप को कीजिए :

दो समकोण त्रिभुज ऐसे खींचिए जिनमें प्रत्येक का कर्ण 5 सेमी और एक भुजा 4 cm की हो (देखिए आकृति 7.36)।



आकृति 7.36

इन्हें काटिए और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिए कि इनकी बराबर भुजाएँ एक दूसरे पर आएँ। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइए। आप क्या देखते हैं?

आप देखते हैं कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और इसीलिए ये सर्वांगसम हैं। यही क्रियाकलाप समकोण त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे, यदि उनके कर्ण बराबर हों और भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। आप इस तथ्य की जाँच पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में समकोण अंतर्गत कोण **नहीं** है।

इस प्रकार, आप निम्नलिखित सर्वांगसमता नियम पर पहुँच गए हैं:

प्रमेय 7.5 (RHS सर्वांगसमता नियम) : यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

ध्यान दीजिए कि यहाँ RHS **समकोण (Right angle) - कर्ण (Hypotenuse) - भुजा (Side)** को दर्शाता है।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : AB एक रेखाखंड है तथा बिंदु P और Q इस रेखाखंड AB के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक A और B से समदूरस्थ है (देखिए आकृति 7.37)। दर्शाइए कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

हल : आपको $PA = PB$ और $QA = QB$ दिया हुआ है। आपको दर्शाना है कि $PQ \perp AB$ है और PQ रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है। मान लीजिए रेखा PQ रेखाखंड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। क्या आप इस आकृति में दो सर्वांगसम त्रिभुजों को देख सकते हैं?

आइए $\triangle PAQ$ और $\triangle PBQ$ लें।

इन त्रिभुजों में,

$$AP = BP \quad (\text{दिया है})$$

$$AQ = BQ \quad (\text{दिया है})$$

$$PQ = PQ \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः,} \quad \triangle PAQ \cong \triangle PBQ \quad (\text{SSS नियम})$$

$$\text{इसलिए,} \quad \angle APQ = \angle BPQ \quad (\text{CPCT})$$

अब $\triangle PAC$ और $\triangle PBC$ को लीजिए। आपको प्राप्त है :

$$AP = BP \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle APC = \angle BPC \quad (\angle APQ = \angle BPQ \text{ ऊपर सिद्ध किया है})$$

$$PC = PC \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः,} \quad \triangle PAC \cong \triangle PBC \quad (\text{SAS नियम})$$

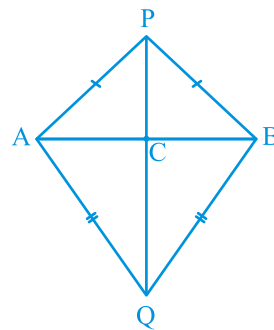
$$\text{इसलिए,} \quad AC = BC \quad (\text{CPCT}) \quad (1)$$

$$\text{और} \quad \angle ACP = \angle BCP \quad (\text{CPCT})$$

$$\text{साथ ही,} \quad \angle ACP + \angle BCP = 180^\circ \quad (\text{रैखिक युग्म})$$

$$\text{इसलिए,} \quad 2\angle ACP = 180^\circ$$

$$\text{या,} \quad \angle ACP = 90^\circ \quad (2)$$



आकृति 7.37

(1) और (2) से, आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

[ध्यान दीजिए कि $\triangle PAQ$ और $\triangle PBQ$ की सर्वांगसमता दर्शाए बिना, आप यह नहीं दिखा सकते कि $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ है, यद्यपि $AP = BP$ (दिया है), $PC = PC$ (उभयनिष्ठ) और $\angle PAC = \angle PBC$ ($\triangle APB$ में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) है। यह इस कारण है कि इनसे हमें SSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए सदैव मान्य नहीं है। साथ ही, कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत नहीं है।]

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : बिंदु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं l और m से समदूरस्थ एक बिंदु P है (देखिए आकृति 7.38)। दर्शाइए कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

हल : आपको दिया है कि रेखाएँ l और m परस्पर A पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए $PB \perp l$ और $PC \perp m$ है। यह दिया है कि $PB = PC$ है।

आपको दर्शाना है कि $\angle PAB = \angle PAC$ है।

अब, $\triangle PAB$ और $\triangle PAC$ में,

$$PB = PC \quad (\text{दिया है})$$

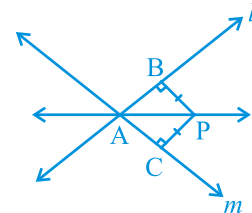
$$\angle PBA = \angle PCA = 90^\circ \quad (\text{दिया है})$$

$$PA = PA \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः, } \triangle PAB \cong \triangle PAC \quad (\text{RHS नियम})$$

$$\text{इसलिए, } \angle PAB = \angle PAC \quad (\text{CPCT})$$

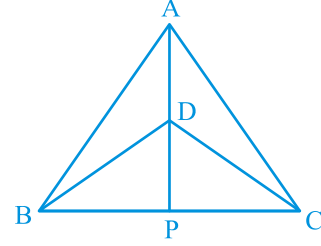
ध्यान दीजिए कि यह परिणाम प्रश्नावली 7.1 के प्रश्न 5 में सिद्ध किए गए परिणाम का विलोम है।



आकृति 7.38

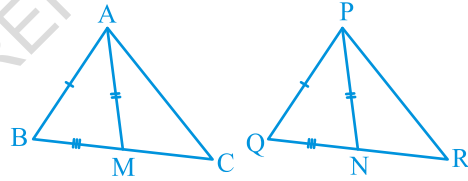
प्रश्नावली 7.3

1. $\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति 7.39)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि



आकृति 7.39

- (i) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
 (ii) $\triangle ABP \cong \triangle ACP$
 (iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।
 (iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।
2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें $AB = AC$ है। दर्शाइए कि
 (i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है। (ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।
3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति 7.40)। दर्शाइए कि
- (i) $\triangle ABM \cong \triangle PQN$
 (ii) $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। $AP \perp BC$ खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है।



आकृति 7.40

7.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।
2. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
3. समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।
4. यदि त्रिभुज ABC और PQR संगतता $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$, के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ लिखते हैं।
5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS सर्वांगसमता नियम)।
6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (ASA सर्वांगसमता नियम)।
7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (AAS सर्वांगसमता नियम)।
8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
10. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।
11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SSS सर्वांगसमता नियम)।
12. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS सर्वांगसमता नियम)।



0963CH08

अध्याय 8

चतुर्भुज

8.1 समांतर चतुर्भुज के गुण

आप कक्षा आठ में चतुर्भुजों और उनके प्रकारों का अध्ययन कर चुके हैं। एक चतुर्भुज चार भुजाएँ, चार कोण और चार शीर्ष हैं। एक समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हैं।
आइए एक क्रियाकलाप करें।

कागज पर एक समांतर चतुर्भुज खींच कर उसे काट लीजिए। अब इसे विकर्ण के अनुदिश काट लीजिए (देखिए आकृति 8.1)। आप दो त्रिभुज प्राप्त करते हैं। इन त्रिभुजों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

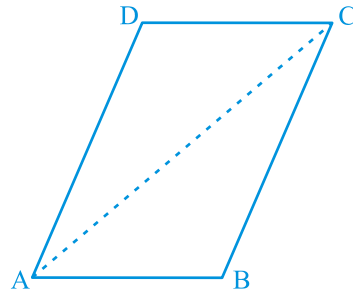
एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर रखिए। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुज को घुमाइए भी। आप क्या देखते हैं?

देखिए कि दोनों त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम हैं।

कुछ और समांतर चतुर्भुज खींच कर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। प्रत्येक बार आप पाएँगे कि समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

अब आइए इस परिणाम को सिद्ध करें।

प्रमेय 8.1 : किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।



आकृति 8.1

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण है (देखिए आकृति 8.2)। देखिए कि विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है। हमें सिद्ध करना है कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

ΔABC और ΔCDA के लिए ध्यान दीजिए कि $BC \parallel AD$ है और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, $\angle BCA = \angle DAC$ (एकांतर कोणों का युग्म)

साथ ही, $AB \parallel DC$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, $\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोणों का युग्म)

और $AC = CA$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA नियम)

अर्थात् विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है।

अब समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं को मापिए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि $AB = DC$ और $AD = BC$ है।

यह समांतर चतुर्भुज का एक अन्य गुण है, जिसे नीचे दिया जा रहा है :

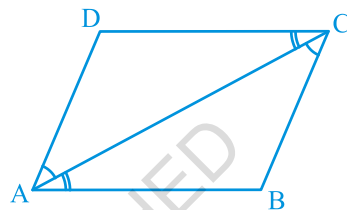
प्रमेय 8.2 : एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

आप पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है। अतः, आप इनके संगत भागों, मान लीजिए भुजाओं, के बारे में क्या कह सकते हैं? ये बराबर हैं।

इसलिए, $AB = DC$ और $AD = BC$ है।

अब इस परिणाम का विलोम क्या है? आप जानते हैं कि जो प्रमेय (किसी कथन) में दिया हो, तो उसके विलोम में उसे सिद्ध करना होता है और जो प्रमेय में दिया गया है उसे विलोम में दिया हुआ माना जाता है। ध्यान दीजिए कि प्रमेय 8.2 को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

यदि एक चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है, तो उसकी सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है। इसलिए, इसका विलोम निम्न होगा :



आकृति 8.2

प्रमेय 8.3 : यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

क्या आप इसके कारण दे सकते हैं?

मान लीजिए चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB और CD बराबर हैं और साथ ही $AD = BC$ है (देखिए आकृति 8.3)। विकर्ण AC खींचिए।

स्पष्टतः, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (क्यों?)

अतः, $\angle BAC = \angle DCA$

और $\angle BCA = \angle DAC$ (क्यों?)

क्या अब आप कह सकते हैं कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है? (क्यों?)

आपने अभी देखा है कि एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है और विलोमतः यदि किसी चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है। क्या हम यही परिणाम सम्मुख कोणों के युग्मों के बारे में भी निकाल सकते हैं?

एक समांतर चतुर्भुज खींचिए और उसके कोणों को मापिए। आप क्या देखते हैं?

सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर है।

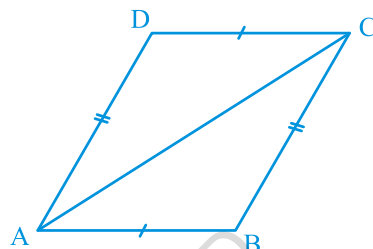
इसे कुछ और समांतर चतुर्भुज लेकर दोहराइए। इससे हम एक अन्य परिणाम पर पहुँचते हैं, जो निम्न है :

प्रमेय 8.4 : एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अब, क्या इस परिणाम का विलोम भी सत्य है? हाँ, ऐसा ही है। चतुर्भुज के कोण योग गुण और तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करके, हम देख सकते हैं कि उपरोक्त का विलोम भी सत्य है। इस प्रकार, हमें निम्न प्रमेय प्राप्त होती है:

प्रमेय 8.5 : यदि एक चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

समांतर चतुर्भुज का एक गुण और भी है। आइए इसका अध्ययन करें। एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए और उसके दोनों विकर्ण AC और BD खींचिए, जो परस्पर O पर



आकृति 8.3

प्रतिच्छेद करते हैं (देखिए आकृति 8.4)।

OA, OB, OC और OD की लम्बाइयाँ मापिए।

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि

$$OA = OC \quad \text{और} \quad OB = OD$$

है। अर्थात् O दोनों विकर्णों का मध्य-बिंदु है।

कुछ और समांतर चतुर्भुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

प्रत्येक बार, आप प्राप्त करेंगे कि O दोनों विकर्णों का मध्य-बिंदु है।

इस प्रकार, हम निम्न प्रमेय प्राप्त करते हैं :

प्रमेय 8.6 : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को (परस्पर) समद्विभाजित करते हैं।

अब, यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो क्या होगा? क्या यह एक समांतर चतुर्भुज होगा? वास्तव में, यह सत्य है।

यह प्रमेय 8.6 के परिणाम का विलोम है। इसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.7 : यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।

आप इस परिणाम के लिए तर्क निम्न प्रकार दे सकते हैं :

ध्यान दीजिए कि आकृति 8.5 में, यह दिया है कि $OA = OC$ और $OB = OD$ है।

अतः, $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (क्यों?)

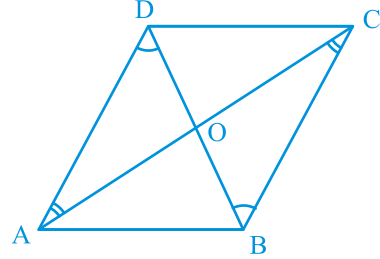
इसलिए, $\angle ABO = \angle CDO$ (क्यों?)

इससे हमें $AB \parallel CD$ प्राप्त होता है।

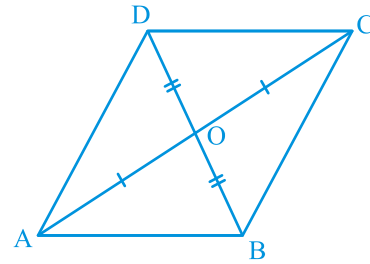
इसी प्रकार, $BC \parallel AD$ है।

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।



आकृति 8.4



आकृति 8.5

उदाहरण 1 : दर्शाइए कि एक आयत का प्रत्येक कोण एक समकोण होता है।

हल : याद कीजिए कि एक आयत क्या होता है।

एक आयत वह समांतर चतुर्भुज होता है जिसका एक कोण समकोण हो।

मान लीजिए ABCD एक आयत है, जिसमें $\angle A = 90^\circ$ है।

हमें दर्शाना है कि $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ है।

AD $\parallel$ BC और AB एक तिर्यक रेखा है (देखिए आकृति 8.6)।

इसलिए, $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण)

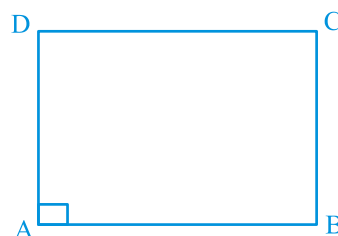
परन्तु, $\angle A = 90^\circ$ है।

इसलिए, $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

अब $\angle C = \angle A$ और $\angle D = \angle B$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle C = 90^\circ$ और $\angle D = 90^\circ$

अतः, आयत का प्रत्येक कोण 90° है।



आकृति 8.6

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

हल : समचतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए (देखिए आकृति 8.7)।

आप जानते हैं कि $AB = BC = CD = DA$ (क्यों?)

अब, $\triangle AOD$ और $\triangle COD$ में,

$OA = OC$ (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

$OD = OD$ (उभयनिष्ठ)

$AD = CD$ (दिया है)

अतः, $\triangle AOD \cong \triangle COD$ (SSS सर्वांगसमता नियम)

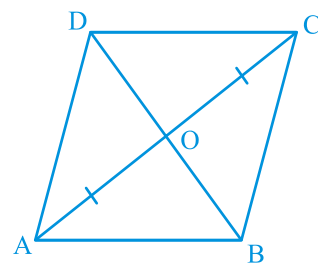
इसलिए, $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

परन्तु, $\angle AOD + \angle COD = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle AOD = 180^\circ$

या, $\angle AOD = 90^\circ$

अतः, समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं।



आकृति 8.7

उदाहरण 3 : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। AD बहिष्कोण PAC को समद्विभाजित करता है और $CD \parallel BA$ है (देखिए आकृति 8.8)। दर्शाइए कि

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ और (ii) ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : (i) ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। (दिया है)

इसलिए, $\angle ABC = \angle ACB$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

साथ ही, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$

(त्रिभुज का बहिष्कोण)

या, $\angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

अब, AD कोण PAC को समद्विभाजित करती है।

इसलिए, $\angle PAC = 2\angle DAC$ (2)

अतः,

$$2\angle DAC = 2\angle ACB \quad [(1) \text{ और } (2) \text{ से}]$$

या, $\angle DAC = \angle ACB$

(ii) अब ये दोनों बराबर कोण वे एकांतर कोण हैं जो रेखाखंडों BC और AD को तिर्यक रेखा AC द्वारा प्रतिच्छेद करने से बनते हैं।

इसलिए, $BC \parallel AD$

साथ ही, $BA \parallel CD$ है।

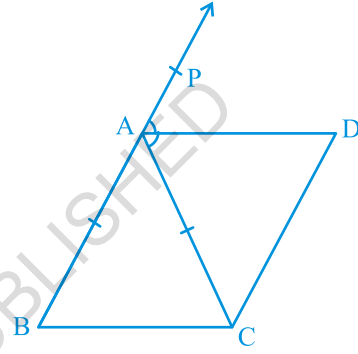
इस प्रकार, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हैं।

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

उदाहरण 4 : दो समांतर रेखाओं l और m को एक तिर्यक रेखा p प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 8.9)। दर्शाइए कि अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज एक आयत है।

हल : यह दिया है कि $l \parallel m$ है और तिर्यक रेखा p इन्हें क्रमशः बिंदुओं A और C पर प्रतिच्छेद करती है।

$\angle PAC$ और $\angle ACQ$ के समद्विभाजक B पर प्रतिच्छेद करते हैं और $\angle ACR$ और $\angle SAC$ के समद्विभाजक D पर प्रतिच्छेद करते हैं।



आकृति 8.8

हमें दर्शाना है कि चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

अब, $\angle PAC = \angle ACR$

($l \parallel m$ और तिर्यक रेखा p से बने एकांतर कोण)

इसलिए, $\frac{1}{2} \angle PAC = \frac{1}{2} \angle ACR$

अर्थात्, $\angle BAC = \angle ACD$

ये बराबर कोण रेखाओं AB और DC के तिर्यक रेखा AC द्वारा प्रतिच्छेदित करने से बनते हैं और ये एकांतर कोण हैं।

इसलिए, $AB \parallel DC$

इसी प्रकार, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ और $\angle CAD$ लेने पर)

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

साथ ही, $\angle PAC + \angle CAS = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

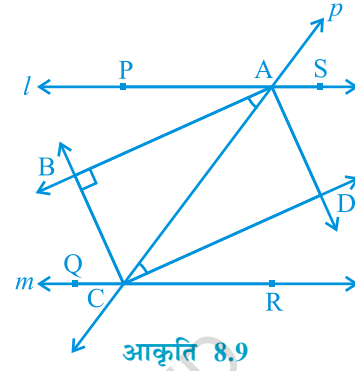
इसलिए, $\frac{1}{2} \angle PAC + \frac{1}{2} \angle CAS = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

या, $\angle BAC + \angle CAD = 90^\circ$

या, $\angle BAD = 90^\circ$

इसलिए, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण है।

अतः ABCD एक आयत है।



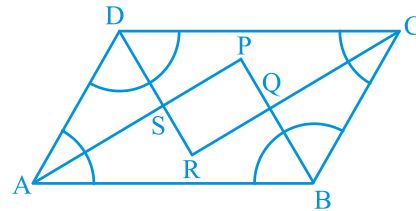
आकृति 8.9

उदाहरण 5 : दर्शाइए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

हल : मान लीजिए P, Q, R और S क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD के $\angle A$ और $\angle B$, $\angle B$ और $\angle C$, $\angle C$ और $\angle D$ तथा $\angle D$ और $\angle A$ के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.10)।

$\triangle ASD$ में आप क्या देख सकते हैं?

चूँकि DS कोण D को और AS कोण A को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए



आकृति 8.10

$$\begin{aligned}
 \angle DAS + \angle ADS &= \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle D \\
 &= \frac{1}{2} (\angle A + \angle D) \\
 &= \frac{1}{2} \times 180^\circ
 \end{aligned}$$

($\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण हैं)
 $= 90^\circ$

साथ ही, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

या, $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

या, $\angle DSA = 90^\circ$

अतः, $\angle PSR = 90^\circ$ ($\angle DSA$ का शीर्षाभिमुख कोण)

इसी प्रकार, यह दर्शाया जा सकता है कि $\angle APB = 90^\circ$ या $\angle SPQ = 90^\circ$ (जैसा कि $\angle DSA$ के लिए किया था)। इसी प्रकार, $\angle PQR = 90^\circ$ और $\angle SRQ = 90^\circ$ है।

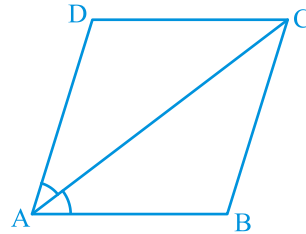
इसलिए, PQRS एक ऐसा चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण हैं।

क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक आयत है? आइए इसकी जाँच करें। हम दर्शा चुके हैं कि $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ और $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^\circ$ है, अर्थात् सम्मुख कोणों के दोनों युग्म बराबर हैं।

अतः PQRS एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें एक कोण (वास्तव में सभी कोण) समकोण हैं। इसलिए, PQRS एक आयत है।

प्रश्नावली 8.1

- यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।
- दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति 8.11)। दर्शाइए कि
 - यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।
 - ABCD एक समचतुर्भुज है।

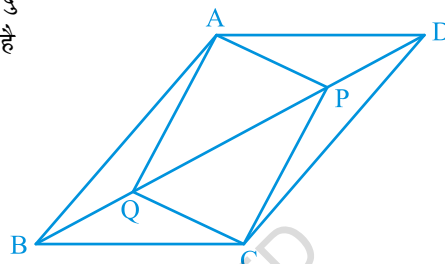


आकृति 8.11

4. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि (i) ABCD एक वर्ग है (ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है

5. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि $DP = BQ$ है (देखिए आकृति 8.12)। दर्शाइए कि

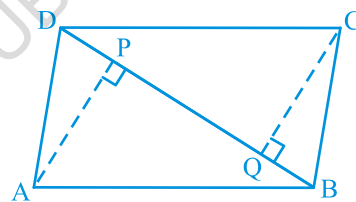
- (i) $\triangle APD \cong \triangle CQB$
- (ii) $AP = CQ$
- (iii) $\triangle AQB \cong \triangle CPD$
- (iv) $AQ = CP$
- (v) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।



आकृति 8.12

6. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं (देखिए आकृति 8.13)। दर्शाइए कि

- (i) $\triangle APB \cong \triangle CQD$
- (ii) $AP = CQ$

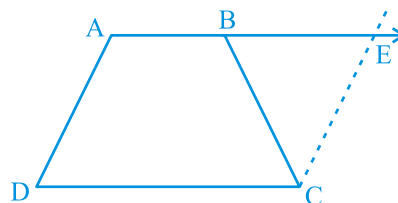


आकृति 8.13

7. ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है (देखिए आकृति 8.14)। दर्शाइए कि

- (i) $\angle A = \angle B$
- (ii) $\angle C = \angle D$
- (iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$
- (iv) विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD है।

[संकेत: AB को बढ़ाइए और C से होकर DA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ी हुई भुजा AB को E पर प्रतिच्छेद करे।]



आकृति 8.14

8.2 मध्य-बिंदु प्रमेय

आप एक त्रिभुज और एक चतुर्भुज के अनेक गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। आइए त्रिभुज के एक अन्य गुण का अध्ययन करें, जो एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से संबंधित है। इसके लिए, निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए :

एक त्रिभुज ABC खींचिए और उसकी दो भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु E और F अंकित कीजिए। E और F को मिलाइए (देखिए आकृति 8.15)।

EF और BC को मापिए। साथ ही, $\angle AEF$ और $\angle ABC$ को भी मापिए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि

$$EF = \frac{1}{2} BC \text{ और } \angle AEF = \angle ABC$$

है। अतः, $EF \parallel BC$ है।

कुछ अन्य त्रिभुज लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

इस प्रकार, आप सरलता से निम्न प्रमेय पर पहुँच सकते हैं:

प्रमेय 8.8 : किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है।

आप इस प्रमेय को निम्नलिखित संकेत की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं।

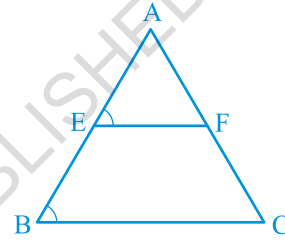
आकृति 8.16 को देखिए, जिसमें E और F क्रमशः $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं तथा $CD \parallel BA$ है।

$$\triangle AEF \cong \triangle CDF \quad (\text{ASA नियम})$$

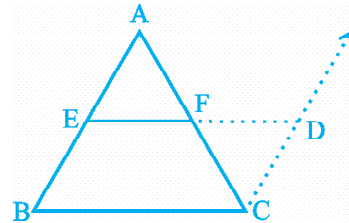
इसलिए, $EF = DF$ और $BE = AE = DC$ (क्यों?)

अतः, BCDE एक समांतर चतुर्भुज है। (क्यों?)

इससे $EF \parallel BC$ प्राप्त होता है।



आकृति 8.15



आकृति 8.16

ध्यान दीजिए कि $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$ है।

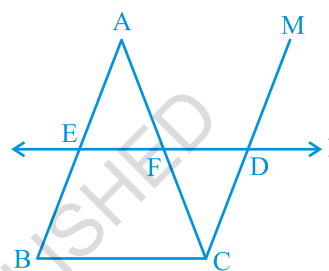
क्या आप प्रमेय 8.8 का विलोम लिख सकते हैं? क्या यह विलोम सत्य है?

आप देखेंगे कि ऊपर दिए गए प्रमेय का विलोम भी सत्य है। इसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.9 : किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

आकृति 8.17 में देखिए कि भुजा AB का मध्य-बिंदु E है और E से होकर जाने वाली रेखा l भुजा BC के समांतर है। साथ ही, $CM \parallel BA$ है।

$\triangle AEF$ और $\triangle CDF$ की सर्वांगसमता का प्रयोग करके, $AF = CF$ सिद्ध कीजिए।



आकृति 8.17

उदाहरण 6 : $\triangle ABC$ में, D, E और F क्रमशः भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.18)। दर्शाइए कि बिन्दुओं D, E और F को मिलाने पर $\triangle ABC$ चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है।

हल : चूँकि D और E क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य-बिंदु हैं, इसलिए प्रमेय 8.9 द्वारा

$$DE \parallel AC$$

इसी प्रकार, $DF \parallel BC$ और $EF \parallel AB$ है।

इसलिए, ADEF, BDFE और DFCE में से प्रत्येक एक समांतर चतुर्भुज है।

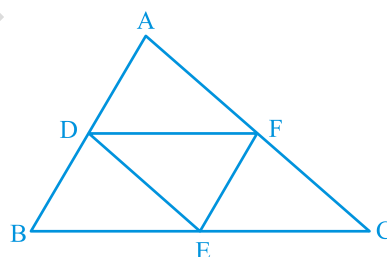
अब, DE समांतर चतुर्भुज BDFE का एक विकर्ण है।

इसलिए, $\triangle BDE \cong \triangle FED$

इसी प्रकार, $\triangle DAF \cong \triangle FED$

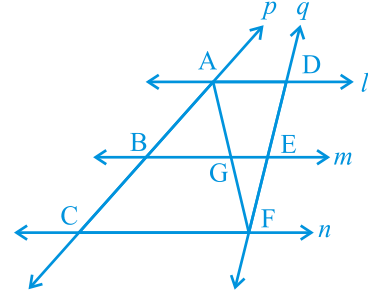
और $\triangle EFC \cong \triangle FED$

अतः, चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति 8.18

उदाहरण 7 : l, m और n तीन समांतर रेखाएँ हैं, जो तिर्यक रेखाओं p और q द्वारा इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि l, m और n रेखा p पर समान अंतः खंड AB और BC काटती हैं (देखिए आकृति 8.19)। दर्शाइए कि l, m और n रेखा q पर भी समान अंतः खंड DE और EF काटती हैं।



आकृति 8.19

हल : हमें $AB = BC$ दिया है और हमें $DE = EF$ सिद्ध करना है।

आइए A को F से मिलाएँ और इससे AF रेखा m को G पर प्रतिच्छेद करती है।

समलंब $ACFD$ दो त्रिभुजों ACF और AFD में विभाजित हो जाता है।

ΔACF में यह दिया है कि B , भुजा AC का मध्य-बिंदु है। ($AB = BC$)

साथ ही, $BG \parallel CF$ (चूँकि $m \parallel n$ है)

अतः, G भुजा AF का मध्य-बिंदु है। (प्रमेय 8.9 द्वारा)

अब, ΔAFD में भी हम इसी तर्क का प्रयोग कर सकते हैं। क्योंकि G भुजा AF का मध्य-बिंदु है और $GE \parallel AD$ है, इसलिए प्रमेय 8.9 से E भुजा DF का मध्य-बिंदु है।

अर्थात् $DE = EF$ है।

दूसरे शब्दों में, l, m और n तिर्यक रेखा q पर भी बराबर अंतः खंड काटती हैं।

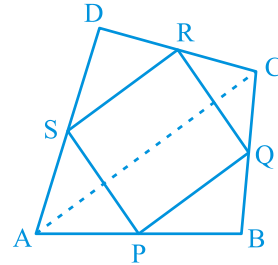
प्रश्नावली 8.2

1. $ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.20)। AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि

(i) $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ है।

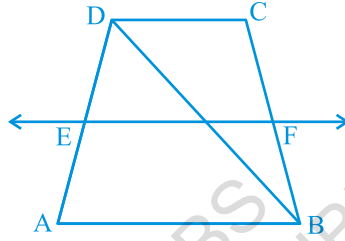
(ii) $PQ = SR$ है।

(iii) $PQRS$ एक समांतर चतुर्भुज है।



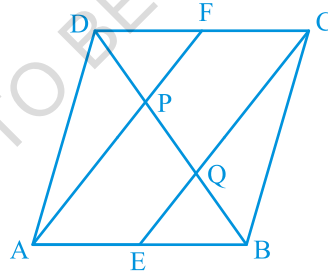
आकृति 8.20

2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।
3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।
4. ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 8.21)। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



आकृति 8.21

5. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.22)। दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।



आकृति 8.22

6. ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खींची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि
 - (i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है।
 - (ii) $MD \perp AC$ है।
 - (iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ है।

8.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
2. एक समांतर चतुर्भुज में,
 - (i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
 - (ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
 - (iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
3. आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।
4. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।
5. वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।
6. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है और उसका आधा होता है।
7. किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।



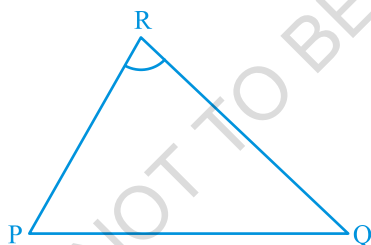
0963CH10

अध्याय 9

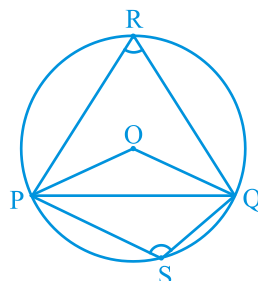
वृत्त

9.1 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण

एक रेखाखंड PQ तथा एक बिन्दु R, जो रेखा PQ पर स्थित न हो, लीजिए। PR तथा QR को मिलाइए (देखिए आकृति 9.1)। तब कोण PRQ, रेखाखंड PQ द्वारा बिन्दु R पर अंतरित कोण कहलाता है। आकृति 9.2 में कोण POQ, PRQ तथा PSQ क्या कहलाते हैं? $\angle POQ$ जीवा PQ द्वारा केन्द्र O पर अंतरित कोण है, $\angle PRQ$ तथा $\angle PSQ$ क्रमशः PQ द्वारा दीर्घ चाप PQ तथा लघु चाप PQ पर स्थित बिन्दुओं R और S पर अंतरित कोण हैं।



आकृति 9.1



आकृति 9.2

आइए हम जीवा की माप तथा उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण में संबंध की जाँच करें। आप एक वृत्त में विभिन्न जीवाएँ खींचकर तथा उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों को बनाकर देख सकते हैं कि जीवा यदि बड़ी होगी, तो उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी बड़ा होगा। क्या होगा यदि आप दो बराबर जीवाएँ लेंगे? क्या केन्द्र पर अंतरित कोण समान होंगे या नहीं?

एक वृत्त की दो या अधिक बराबर जीवाएँ खींचिए तथा केन्द्र पर उनके द्वारा अंतरित कोणों को मापिए (देखिए आकृति 9.3)। आप पाएँगे कि उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हैं। आइए इस तथ्य की हम उपपत्ति दें।

प्रमेय 9.1 : वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

उपपत्ति : आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं (देखिए आकृति 9.4) तथा आप सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$ है।

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

$$OA = OC \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

$$OB = OD \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

$$AB = CD \quad (\text{दिया है})$$

अतः,

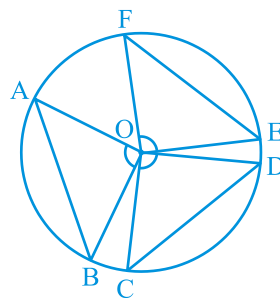
$$\triangle AOB \cong \triangle COD \quad (\text{SSS नियम}) \quad \text{आकृति 9.4}$$

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

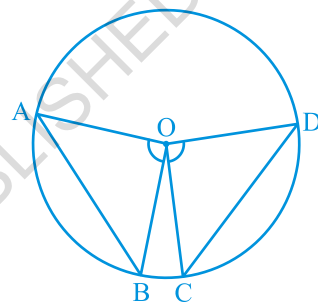
टिप्पणी : सुविधा के लिए 'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग' के स्थान पर संक्षेप में CPCT का प्रयोग किया जाएगा, क्योंकि जैसा कि आप देखेंगे कि इसका हम बहुधा प्रयोग करते हैं।

अब यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करें, तो उन जीवाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या वे बराबर हैं अथवा नहीं? आइए हम इसकी निम्न क्रियाकलाप द्वारा जाँच करें।

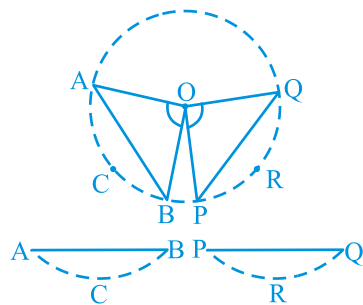
एक अक्स कागज़ (tracing paper) लीजिए और इस पर एक वृत्त खींचिए। इसे वृत्त के अनुदिश काटकर एक चकती (disc) प्राप्त कीजिए। इसके केन्द्र O पर एक कोण AOB बनाइए, जहाँ A, B वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। केन्द्र पर, एक दूसरा कोण POQ कोण AOB के बराबर बनाइए। चकती को इन कोणों के सिरों को मिलाने वाली जीवाओं के अनुदिश काटें (देखिए आकृति 9.5)। आप



आकृति 9.3



आकृति 9.4



आकृति 9.5

दो वृत्तखंड ACB तथा PRQ प्राप्त करेंगे। यदि आप एक को दूसरे के ऊपर रखेंगे, तो आप क्या अनुभव करेंगे? वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे, अर्थात् वे सर्वांगसम होंगे। इसलिए $AB = PQ$ है।

यद्यपि आपने इसे एक विशेष दशा में ही देखा है, इसे आप अन्य समान कोणों के लिए दोहराएँ। निम्न प्रमेय के कारण सभी जीवाएँ बराबर होंगी:

प्रमेय 9.2 : यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।

उपर्युक्त प्रमेय, प्रमेय 9.1 का विलोम है। ध्यान दीजिए कि आकृति 9.4 में यदि आप $\angle AOB = \angle COD$ लें, तो

$$\triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (क्यों?)}$$

क्या अब आप देख सकते हैं कि $AB = CD$ है?

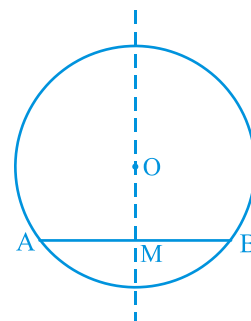
प्रश्नावली 9.1

1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

9.2 केन्द्र से जीवा पर लम्ब

क्रियाकलाप : एक अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। माना इसका केन्द्र O है। एक जीवा AB खींचिए। कागज को O से जाने वाली एक रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि जीवा का एक भाग दूसरे भाग पर पड़े। मान लीजिए कि मोड़ का निशान AB को M पर काटता है। तब $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ अथवा OM, AB पर लम्ब है (देखिए आकृति 9.6)। क्या बिन्दु B, A के संपाती होता है?

हाँ, यह होगा। इसलिए $MA = MB$ है।



आकृति 9.6

OA और OB को मिलाकर तथा समकोण त्रिभुजों OMA और OMB को सर्वांगसम सिद्ध कर इसकी उपपत्ति स्वयं दीजिए। यह उदाहरण निम्न परिणाम का विशेष दृष्टान्त है:

प्रमेय 9.3 : एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

इस प्रमेय का विलोम क्या है? इसको लिखने के लिए, सर्वप्रथम हमें स्पष्ट होना है कि प्रमेय 9.3 में क्या दिया गया है और क्या सिद्ध करना है। दिया है कि केन्द्र से जीवा पर लम्ब खींचा गया है और सिद्ध करना है कि वह जीवा को समद्विभाजित करता है। अतः विलोम में परिकल्पना है 'यदि एक केन्द्र से जाने वाली रेखा वृत्त की एक जीवा को समद्विभाजित करे' और सिद्ध करना है 'रेखा जीवा पर लम्ब है'। इस प्रकार, विलोम है :

प्रमेय 9.4 : एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

क्या यह सत्य है? इसको कुछ स्थितियों में प्रयत्न करके देखिए। आप देखेंगे कि यह इन सभी स्थितियों में सत्य है। निम्न अभ्यास करके देखिए कि क्या यह कथन व्यापक रूप में सत्य है। हम इसके कुछ कथन देंगे और आप इनके कारण दीजिए।

मान लीजिए कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की AB एक जीवा है और O को AB के मध्य-बिन्दु M से मिलाया गया है। आपको सिद्ध करना है कि $OM \perp AB$ है। OA और OB को मिलाइए (देखिए आकृति 9.7)। त्रिभुजों OAM तथा OBM में,

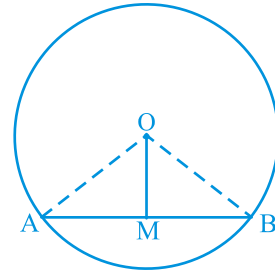
$$OA = OB \quad (\text{क्यों?})$$

$$AM = BM \quad (\text{क्यों?})$$

$$OM = OM \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः,} \quad \triangle OAM \cong \triangle OBM \quad (\text{क्यों?})$$

$$\text{इससे प्राप्त होता है:} \quad \angle OMA = \angle OMB = 90^\circ \quad (\text{क्यों?})$$



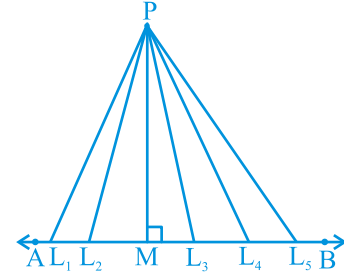
आकृति 9.7

9.3 समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ

मान लीजिए AB एक रेखा है और P कोई बिन्दु है। क्योंकि एक रेखा पर असंख्य बिन्दु होते हैं, इसलिए यदि आप इन सभी को P से मिलाएँ तो आपको असंख्य रेखाखंड $PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4$, आदि मिलेंगे। इनमें से कौन सी बिन्दु P से AB की दूरी है? आप थोड़ा

सोचकर इसका उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। इन रेखाखंडों, में से P से AB पर लम्ब रेखाखंड अर्थात् आकृति 9.8 में PM सबसे छोटा होगा। गणित में इस सबसे छोटी लम्बाई PM को **P से AB की दूरी** के रूप में परिभाषित करते हैं। अतः, आप कह सकते हैं कि :

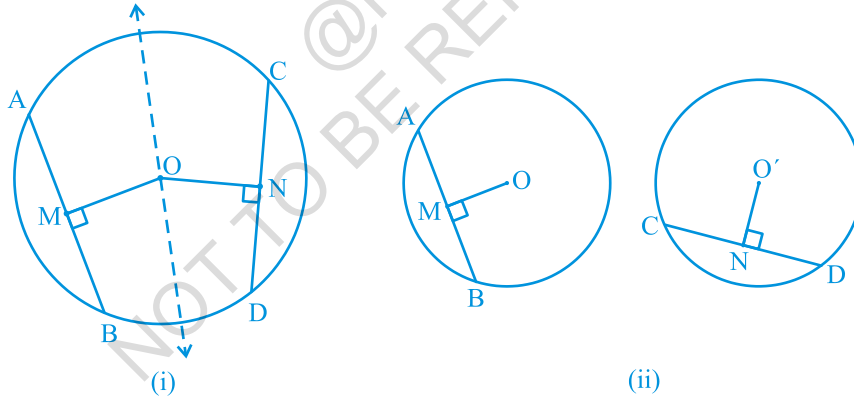
एक बिन्दु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिन्दु से दूरी होती है।



आकृति 9.8

ध्यान दीजिए कि यदि बिन्दु रेखा पर स्थित है, तो रेखा की इससे दूरी शून्य है।

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ हो सकती हैं। आप एक वृत्त में जीवाएँ खींचकर जाँच कर सकते हैं कि लंबी जीवा, छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है। इसकी आप विभिन्न लम्बाई की कई जीवाएँ की खींचकर तथा उनकी केन्द्र से दूरियाँ मापकर जाँच कर सकते हैं। व्यास, जो वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है, की केन्द्र से क्या दूरी है? क्योंकि केन्द्र इस पर स्थित है, अतः इसकी दूरी शून्य है। क्या आप सोचते हैं कि जीवा की लम्बाई और उसकी केन्द्र से दूरी में कोई संबंध है? आइए देखें कि क्या ऐसा है।



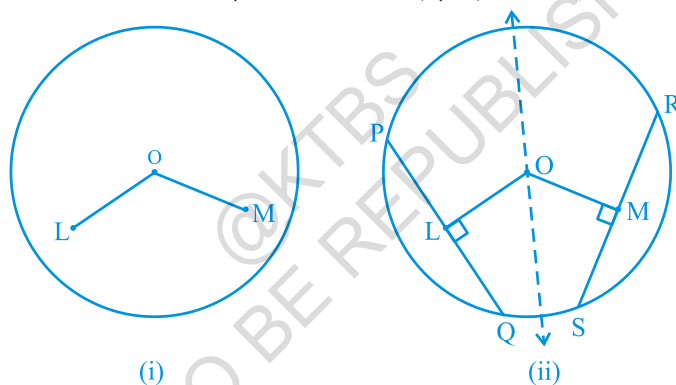
आकृति 9.9

क्रियाकलाप : किसी त्रिज्या का अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। इसकी दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD खींचिए तथा इन पर केन्द्र O से लम्ब OM तथा ON भी बनाइए। आकृति को इस प्रकार मोड़िए कि D, B पर तथा C, A पर पड़े [देखिए आकृति 9.9 (i)]। आप पाएँगे कि O मोड़ के निशान पर पड़ता है और N, M पर पड़ता है। अतः, $OM = ON$ है। इस क्रियाकलाप को केन्द्रों O तथा O' के सर्वांगसम वृत्त खींचकर और अलग-अलग बराबर जीवाएँ AB तथा CD लेकर दोहराएँ। उन पर लम्ब OM तथा O'N खींचिए [देखिए आकृति 9.9(ii)]। इनमें से एक वृत्ताकार चकती को काटकर दूसरे वृत्त पर इस प्रकार

रखें कि AB, CD को पूर्ण रूप से ढक ले। तब आप पाएँगे कि O, O' पर पड़ता है तथा M, N पर पड़ता है। इस प्रकार, आपने निम्न को सत्यापित किया है:

प्रमेय 9.5 : एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।

अब यह देखा जाए कि क्या इसका विलोम सत्य है अथवा नहीं। इसके लिए केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। केन्द्र O से वृत्त के भीतर रहने वाले दो बराबर लम्बाई के रेखाखंड OL तथा OM खींचिए [देखिए आकृति 9.10 (i)]। अब क्रमशः दो जीवाएँ PQ और RS खींचिए जो OL और OM पर लम्ब हों [देखिए आकृति 9.10(ii)]। PQ और RS की लम्बाइयाँ मापिए। क्या ये असमान हैं? नहीं, दोनों बराबर हैं। क्रियाकलाप को और अधिक समान रेखाखंडों तथा उन पर लम्ब जीवाएँ खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, प्रमेय 9.5 का विलोम



आकृति 9.10

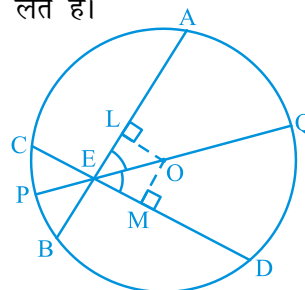
सत्यापित हो जाता है, जिसका कथन नीचे दिया गया है:

प्रमेय 9.6 : एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लम्बाई में समान होती हैं।

अब हम उपर्युक्त परिणामों पर आधारित एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : यदि एक वृत्त की दो प्रतिच्छेदी जीवाएँ प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले व्यास से समान कोण बनाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ बराबर हैं।

हल : दिया है कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। E से जाने वाला PQ एक ऐसा व्यास है कि $\angle AEQ = \angle DEQ$ है (देखिए आकृति 9.11)।



आकृति 9.11

आपको सिद्ध करना है कि $AB = CD$ है। जीवाओं AB और CD पर क्रमशः OL तथा OM लम्ब खींचिए। अब,

$$\begin{aligned}\angle LOE &= 180^\circ - 90^\circ - \angle LEO = 90^\circ - \angle LEO \quad (\text{त्रिभुज के कोणों के योग का गुण}) \\ &= 90^\circ - \angle AEQ = 90^\circ - \angle DEQ \\ &= 90^\circ - \angle MEO = \angle MOE\end{aligned}$$

त्रिभुजों OLE तथा OME में,

$$\angle LEO = \angle MEO \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle LOE = \angle MOE \quad (\text{ऊपर सिद्ध किया है})$$

$$EO = EO \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

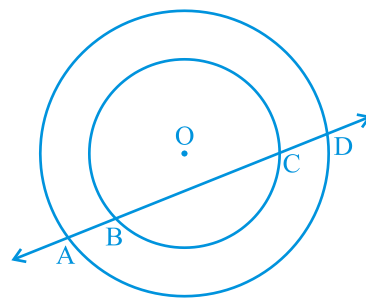
$$\text{अतः,} \quad \triangle OLE \cong \triangle OME \quad (\text{क्यों?})$$

$$\text{इससे प्राप्त होता है:} \quad OL = OM \quad (\text{CPCT})$$

$$\text{इसलिए,} \quad AB = CD \quad (\text{क्यों?})$$

प्रश्नावली 9.2

1. 5 cm तथा 3 cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।
3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।
4. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त) को, जिनका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए $AB = CD$ है (देखिए आकृति 9.12)।
5. एक पार्क में बने 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 m हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?



आकृति 9.12

6. 20 m त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

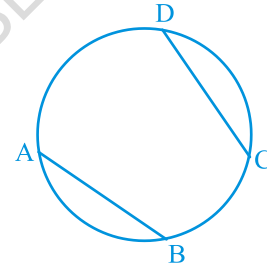
9.4 एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

आपने देखा है कि एक जीवा के अंत बिन्दु (व्यास के अतिरिक्त) वृत्त को दो चापों में एक (दीर्घ तथा दूसरा लघु) विभाजित करते हैं। यदि आप बराबर जीवाएँ लें, तो आप उन चापों की मापों के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या एक जीवा द्वारा बना चाप दूसरी जीवा के द्वारा बने चाप के बराबर है? वास्तव में, ये बराबर लम्बाई से भी कुछ अधिक है। यह इस अर्थ में, कि यदि एक चाप को दूसरे चाप के ऊपर रखा जाए, तो बिना ऐंटे या मोड़े वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे।

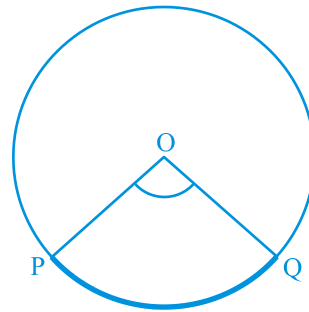
इस तथ्य को आप जीवा CD के संगत चाप को वृत्त से CD के अनुदिश काटकर तथा उसे बराबर जीवा AB के संगत चाप पर रखकर सत्यापित कर सकते हैं। आप पाएँगे कि चाप CD, चाप AB को पूर्णरूप से ढक लेता है (देखिए आकृति 9.13)। यह दर्शाता है कि बराबर जीवाएँ सर्वांगसम चाप बनाती हैं तथा विलोमतः सर्वांगसम चाप वृत्त की बराबर जीवाएँ बनाते हैं। इसका निम्न प्रकार से कथन दे सकते हैं:

यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि लघु चाप कोण को अंतरित करता है और दीर्घ चाप संगत प्रतिवर्ती कोण अंतरित करता है। अतः आकृति 9.14 में, लघु चाप PQ द्वारा O पर अंतरित कोण POQ है तथा दीर्घ चाप PQ द्वारा O पर अंतरित संगत प्रतिवर्ती कोण POQ है।



आकृति 9.13



आकृति 9.14

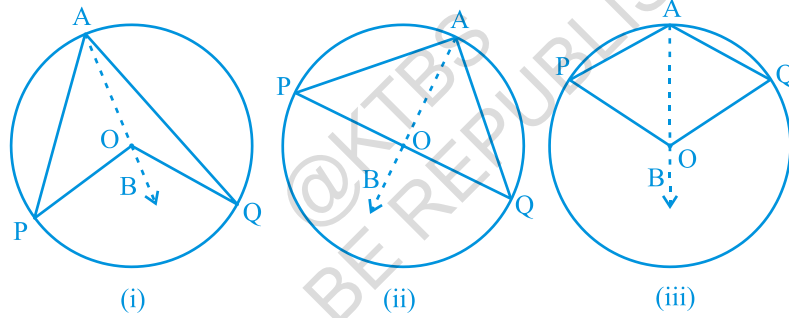
उपरोक्त गुण एवं प्रमेय 9.1 के संदर्भ में निम्न परिणाम सत्य है :

किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

अतः, किसी वृत्त की जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण संगत (लघु) चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण के बराबर होता है। निम्न प्रमेय एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण तथा वृत्त के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण में संबंध देती है।

प्रमेय 9.7 : एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

उपपत्ति : एक वृत्त का चाप PQ दिया है, जो केन्द्र O पर $\angle POQ$ तथा वृत्त के शेष भाग के एक बिन्दु A पर $\angle PAQ$ अंतरित करता है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ है।



आकृति 9.15

आकृति 9.15 में दी गई तीन विभिन्न स्थितियों पर विचार कीजिए।

(i) में चाप PQ लघु है, (ii) में चाप PQ अर्धवृत्त है तथा (iii) में चाप PQ दीर्घ है।

आइए हम AO को मिलाकर एक बिन्दु B तक बढ़ाएँ।

सभी स्थितियों में,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

(क्योंकि त्रिभुज का बहिष्कोण उसके दो अभिमुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।)

साथ ही $\triangle OAQ$ में,

$$OA = OQ \quad (\text{एक वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

अतः,

$$\angle OAQ = \angle AQO \quad (\text{प्रमेय 7.2})$$

इससे प्राप्त होता है: $\angle BOQ = 2 \angle OAQ$ (1)

इसी प्रकार, $\angle BOP = 2 \angle OAP$ (2)

(1) और (2) से, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

अर्थात्, $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ (3)

स्थिति (iii) के लिए, जहाँ PQ दीर्घ चाप है, (3) के स्थान पर

प्रतिवर्ती कोण $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ होगा।

टिप्पणी : मान लीजिए कि उपर्युक्त आकृतियों में हम P और Q को मिलाकर जीवा PQ बनाते हैं। तब, $\angle PAQ$ को वृत्तखंड PAQP में बना कोण भी कहते हैं।

प्रमेय 9.7 में वृत्त के शेष भाग पर कोई भी बिन्दु A हो सकता है। इसलिए यदि आप वृत्त के शेष भाग पर एक और बिन्दु C लें (देखिए आकृति 9.16), तो आप पाएँगे:

$$\angle POQ = 2 \angle PCQ = 2 \angle PAQ$$

अतः, $\angle PCQ = \angle PAQ$

यह निम्न को सिद्ध करता है :

प्रमेय 9.8 : एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।

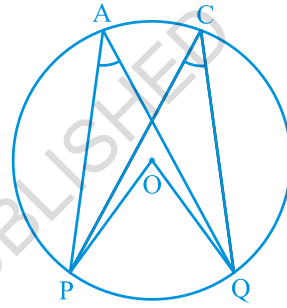
आइए अब प्रमेय 9.8 की स्थिति (ii) की अलग से विवेचना करें। यहाँ $\angle PAQ$ उस वृत्तखंड में एक कोण है जो अर्धवृत्त है। साथ ही, $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ है। यदि आप कोई और बिन्दु C अर्धवृत्त पर लें, तो भी आप पाते हैं कि

$$\angle PCQ = 90^\circ$$

इस प्रकार, आप वृत्त का एक और गुण पाते हैं जो निम्न है:

अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

प्रमेय 9.8 का विलोम भी सत्य है, जिसका इस प्रकार कथन दिया जा सकता है:



आकृति 9.16

प्रमेय 9.9 : यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात् वे चक्रीय होते हैं)।

आप इस कथन की सत्यता निम्न प्रकार से देख सकते हैं :

आकृति 9.17 में AB एक रेखाखंड है, जो दो बिन्दुओं C और D पर समान कोण अंतरित करता है। अर्थात्

$$\angle ACB = \angle ADB$$

यह दर्शाने के लिए कि बिन्दु A, B, C और D एक वृत्त पर स्थित हैं, बिन्दुओं A, C और B से जाने वाला एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए कि वह D से होकर नहीं जाता है। तब, वह AD (अथवा बढ़ी हुई AD) को एक बिन्दु E (अथवा E') पर काटेगा।

यदि बिन्दु A, C, E और B एक वृत्त पर स्थित हैं, तो

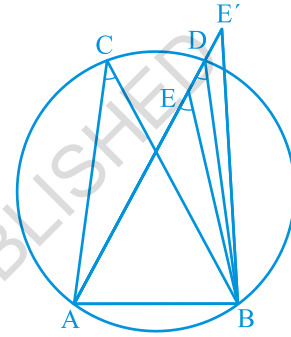
$$\angle ACB = \angle AEB \quad (\text{क्यों?})$$

परन्तु दिया है कि $\angle ACB = \angle ADB$

अतः, $\angle AEB = \angle ADB$

यह तब तक संभव नहीं है जब तक E, D के संपाती न हो। (क्यों?)

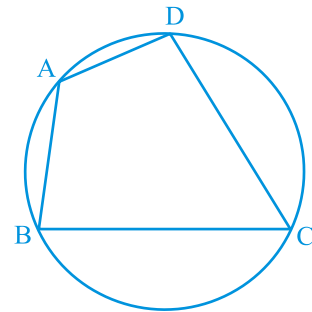
इसी प्रकार, E' भी D के संपाती होना चाहिए।



आकृति 9.17

9.5 चक्रीय चतुर्भुज

एक चतुर्भुज ABCD चक्रीय कहलाता है, यदि इसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं (देखिए आकृति 9.18)। इन चतुर्भुजों में आप एक विशेष गुण पाएँगे। अलग-अलग भुजाओं वाले कई चक्रीय चतुर्भुज खींचिए और प्रत्येक का नाम ABCD रखिए (इसको विभिन्न त्रिज्याओं के कई वृत्त खींचकर तथा प्रत्येक पर चार बिन्दु लेकर किया जा सकता है)। सम्मुख कोणों को मापिए और आप अपने प्रेक्षण आगे दी गई सारणी में लिखिए :



आकृति 9.18

चतुर्भुज की क्रम संख्या	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

इस सारणी से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

यदि मापने में कोई त्रुटि न हुई हो, तो यह निम्न को सत्यापित करता है:

प्रमेय 9.10 : चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।

वास्तव में इस प्रमेय का विलोम, जिसका कथन निम्न प्रकार से है, भी सत्य है:

प्रमेय 9.11 : यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग 180° हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।

इस प्रमेय की सत्यता आप प्रमेय 9.9 में दी गई विधि की तरह से जाँच सकते हैं।

उदाहरण 2 : आकृति 9.19 में, AB वृत्त का एक व्यास है और CD त्रिज्या के बराबर एक जीवा है। AC और BD बढ़ाए जाने पर एक बिन्दु E पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEB = 60^\circ$ है।

हल : OC, OD और BC को मिलाइए।

त्रिभुज ODC एक समबाहु त्रिभुज है। (क्यों?)

अतः, $\angle COD = 60^\circ$

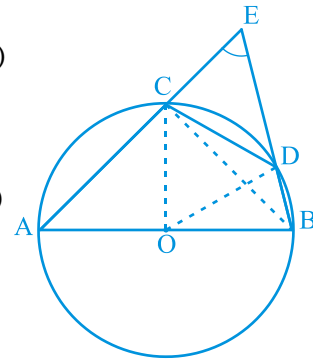
अब, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (प्रमेय 10.8)

इससे प्राप्त होता है: $\angle CBD = 30^\circ$

पुनः, $\angle ACB = 90^\circ$ (क्यों?)

इसलिए, $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

जिससे $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, अर्थात् $\angle AEB = 60^\circ$ प्राप्त होता है।



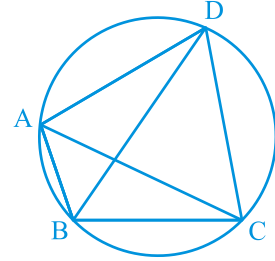
आकृति 9.19

उदाहरण 3 : आकृति 9.20 में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AC और BD विकर्ण हैं। यदि $\angle DBC = 55^\circ$ तथा $\angle BAC = 45^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (एक वृत्तखंड के कोण)
अतः, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$
 $= 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

परन्तु, $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$



आकृति 9.20

उदाहरण 4 : दो वृत्त दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। AD और AC दोनों वृत्तों के व्यास हैं (देखिए आकृति 9.21)। सिद्ध कीजिए कि B रेखाखंड DC पर स्थित है।

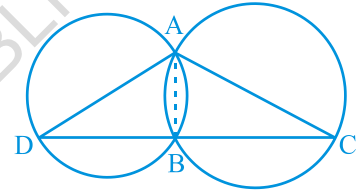
हल : AB को मिलाइए। अब,

$$\angle ABD = 90^\circ \text{ (अर्धवृत्त का कोण)}$$

$$\angle ABC = 90^\circ \text{ (अर्धवृत्त का कोण)}$$

इसलिए, $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

अतः, DBC एक रेखा है। अर्थात् B रेखाखंड DC पर स्थित है।



आकृति 9.21

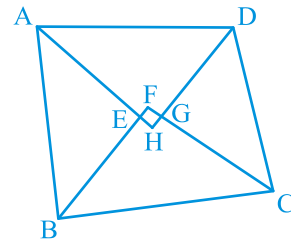
उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज (यदि संभव हो) चक्रीय होता है।

हल : आकृति 9.22 में, ABCD एक चतुर्भुज है जिसके अंतःकोणों A, B, C और D के क्रमशः कोण समद्विभाजक AH, BF, CF और DH एक चतुर्भुज EFGH बनाते हैं।

अब, $\angle FEH = \angle AEB = 180^\circ - \angle EAB - \angle EBA$ (क्यों?)

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B)$$

तथा $\angle FGH = \angle CGD = 180^\circ - \angle GCD - \angle GDC$ (क्यों?)



आकृति 9.22

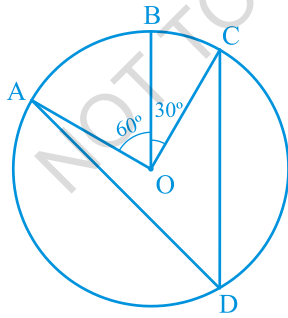
$$= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle C + \angle D)$$

$$\begin{aligned} \text{अतः, } \angle FEH + \angle FGH &= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B) + 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle C + \angle D) \\ &= 360^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ - \frac{1}{2} \times 360^\circ \\ &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

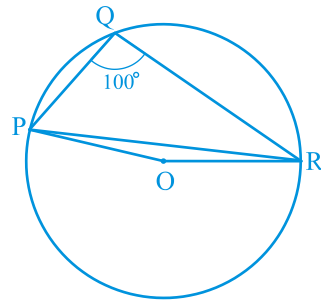
इसलिए, प्रमेय 9.11 से चतुर्भुज EFGH चक्रीय है।

प्रश्नावली 9.3

1. आकृति 9.23 में, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30^\circ$ तथा $\angle AOB = 60^\circ$ है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है, तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।
2. किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।
3. आकृति 9.24 में, $\angle PQR = 100^\circ$ है, जहाँ P, Q तथा R, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।

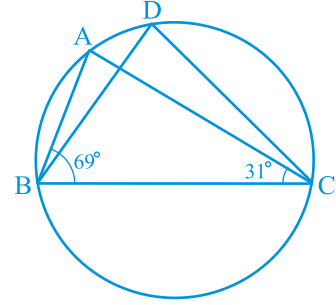


आकृति 9.23



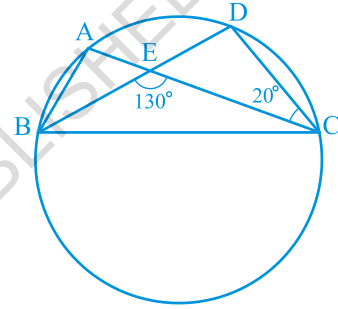
आकृति 9.24

4. आकृति 9.25 में, $\angle ABC = 69^\circ$ और $\angle ACB = 31^\circ$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।



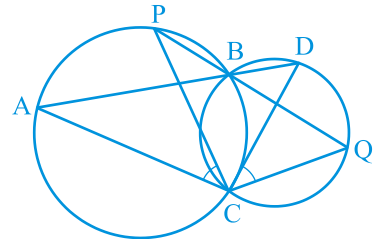
आकृति 9.25

5. आकृति 9.26 में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130^\circ$ तथा $\angle ECD = 20^\circ$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.26

6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70^\circ$ और $\angle BAC = 30^\circ$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुनः यदि $AB = BC$ हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।
7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।
8. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।
9. दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृत्तों को A, D और P, Q पर क्रमशः प्रतिच्छेद करते हुए खींचे गए हैं (देखिए आकृति 9.27)। सिद्ध कीजिए कि $\angle ACP = \angle QCD$ है।



आकृति 9.27

10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।
11. उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ है।
12. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज आयत होता है।

9.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिन्दुओं का अध्ययन किया है :

1. एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।
2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
3. यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।
4. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।
5. केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।
6. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।
7. एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगसम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएँ बराबर होती हैं।
8. यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमतः यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।
9. किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।
10. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
11. एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।
12. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।
13. यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।
14. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।
15. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180° हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।



0963CH12

अध्याय 10

हीरोन का सूत्र

10.1 त्रिभुज का क्षेत्रफल - हीरोन के सूत्र द्वारा

हीरोन का जन्म संभवतः मिस्र में अलेक्जेंड्रिया नामक स्थान पर हुआ। उन्होंने अनुप्रायोगिक गणित (applied mathematics) पर कार्य किया। उनका गणितीय और भौतिकीय विषयों पर कार्य इतना अधिक और विभिन्न प्रकार का था कि उन्हें इन क्षेत्रों का एक विश्वकोण संबंधी (encyclopedia) लेखक समझा जाता था। उनका ज्यामितीय कार्य मुख्यतः मेन्सुरेशन (क्षेत्रमिति) की समस्याओं से संबंधित था। यह कार्य तीन पुस्तकों में लिखा गया है। पुस्तक 1 में, वर्गों, आयतों, त्रिभुजों, समलंबों, अनेक प्रकार के विशिष्ट चतुर्भुजों, सम बहुभुजों, वृत्तों के क्षेत्रफलों, बेलनों, शंकुओं, गोलों, इत्यादि के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का वर्णन है। इसी पुस्तक में, हीरोन ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं के पदों में उसके क्षेत्रफल का प्रसिद्ध (या सुपरिचित) सूत्र प्रतिपादित किया है।



हीरोन

(10 सा०यू०पू०-75 सा०यू०पू०)

आकृति 10.1

हीरोन के इस सूत्र को हीरो का सूत्र (Hero's formula) भी कहा जाता है। इसे नीचे दिया जा रहा है:

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जहाँ a , b और c त्रिभुज की भुजाएँ हैं तथा

$$s = \text{त्रिभुज का अर्धपरिमाण (semi-perimeter)} = \frac{a + b + c}{2} \text{ है।}$$

यह सूत्र उस स्थिति में सहायक होता है, जब त्रिभुज की ऊँचाई सरलता से ज्ञात न हो सकती हो। आइए ऊपर बताए गए त्रिभुजाकार पार्क ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, इस सूत्र का प्रयोग करें (देखिए आकृति 10.2)।

आइए $a = 40 \text{ m}$, $b = 24 \text{ m}$, $c = 32 \text{ m}$ लें ताकि हमें

$$s = \frac{40 + 24 + 32}{2} \text{ m} = 48 \text{ m}$$

प्राप्त होगा।

$$\text{अब, } s - a = (48 - 40) \text{ m} = 8 \text{ m},$$

$$s - b = (48 - 24) \text{ m} = 24 \text{ m},$$

$$\text{और } s - c = (48 - 32) \text{ m} = 16 \text{ m}$$

हैं।

$$\begin{aligned} \text{अतः, पार्क ABC का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

हम यह भी देखते हैं कि $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ है। अतः, इस पार्क की भुजाएँ एक समकोण त्रिभुज बनाती हैं। सबसे बड़ी, अर्थात् BC, जिसकी लम्बाई 40 m है, इस त्रिभुज का कर्ण है तथा AB और AC के बीच का कोण 90° होगा।

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, सूत्र I से हम जाँच कर सकते हैं कि पार्क का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2 \\ &= 384 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

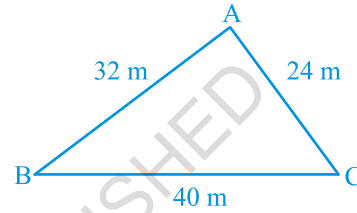
हम पाते हैं कि यह क्षेत्रफल वही है जो हमें हीरोन के सूत्र से प्राप्त हुआ था।

अब आप पहले चर्चित किए गए अन्य त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को हीरोन के सूत्र से ज्ञात करके जाँच कीजिए कि क्षेत्रफल पहले जैसे ही प्राप्त होते हैं। ये त्रिभुज हैं :

(i) 10 cm भुजा वाला समबाहु त्रिभुज

और (ii) असमान भुजा 8 cm और बराबर भुजाएँ 5 cm वाला समद्विबाहु त्रिभुज।

आप देखेंगे कि



आकृति 10.2

$$(i) \text{ के लिए, } s = \frac{10 + 10 + 10}{2} \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)} \text{ cm}^2 \\ &= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5} \text{ cm}^2 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ के लिए, } s = \frac{8 + 5 + 5}{2} \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)} \text{ cm}^2 \\ &= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4} \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 cm और 11 cm हैं और जिसका परिमाप 32 cm है (देखिए आकृति 10.3)।

हल : यहाँ, परिमाप = 32 cm, $a = 8$ cm और $b = 11$ cm है।

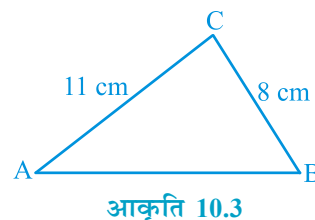
इसलिए, तीसरी भुजा $c = 32 \text{ cm} - (8 + 11) \text{ cm} = 13 \text{ cm}$

अब, $2s = 32$ है। इसलिए $s = 16$ cm,

$$s - a = (16 - 8) \text{ cm} = 8 \text{ cm},$$

$$s - b = (16 - 11) \text{ cm} = 5 \text{ cm},$$

$$s - c = (16 - 13) \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$



$$\begin{aligned} \text{इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{30} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 2 : एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 m, 80 m और 50 m हैं (देखिए आकृति 10.4)। एक मालिन धनिया को इसके चारों ओर एक बाड़ लगानी है और इसके अंदर घास उगानी है। उसे कितने क्षेत्रफल में घास उगानी है? एक ओर 3 m चौड़े एक फाटक के लिए स्थान छोड़ते हुए इसके चारों ओर ₹ 20 प्रति मीटर की दर से काँटेदार बाड़ लगाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

हल : पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :

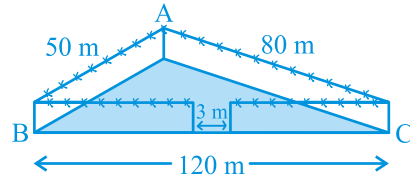
$$2s = 50 \text{ m} + 80 \text{ m} + 120 \text{ m} = 250 \text{ m}$$

अर्थात् $s = 125 \text{ m}$

इसलिए, $s - a = (125 - 120) \text{ m} = 5 \text{ m}$,

$$s - b = (125 - 80) \text{ m} = 45 \text{ m},$$

$$s - c = (125 - 50) \text{ m} = 75 \text{ m}$$



आकृति 10.4

$$\begin{aligned} \text{अतः, घास उगाने के लिए क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75} \text{ m}^2 \\ &= 375\sqrt{15} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

साथ ही, पार्क का परिमाण = $AB + BC + CA = 250 \text{ m}$

अतः, बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लम्बाई = $250 \text{ m} - 3 \text{ m}$ (फाटक के लिए)
 $= 247 \text{ m}$

इसलिए, बाड़ लगाने का व्यय = $\text{₹ } 20 \times 247 = \text{₹ } 4940$

उदाहरण 3 : एक त्रिभुजाकार भूखंड (plot) की भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 7 है और उसका परिमाण 300 m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए भुजाएँ (मीटरों में) $3x$, $5x$ और $7x$ हैं (देखिए आकृति 10.5)।

तब, हम जानते हैं कि $3x + 5x + 7x = 300$ (त्रिभुज का परिमाण)

इसलिए, $15x = 300$ है, जिससे $x = 20$ प्राप्त होता है।

इसलिए, त्रिभुज की भुजाएँ $3 \times 20 \text{ m}$, $5 \times 20 \text{ m}$ और $7 \times 20 \text{ m}$ हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60 m, 100 m और 140 m हैं।

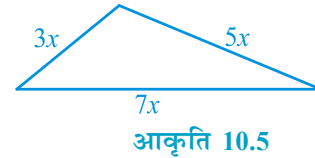
क्या आप अब (हीरोन का सूत्र प्रयोग करके) क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

अब, $s = \frac{60 + 100 + 140}{2} \text{ m} = 150 \text{ m}$

इसलिए, क्षेत्रफल = $\sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)} \text{ m}^2$

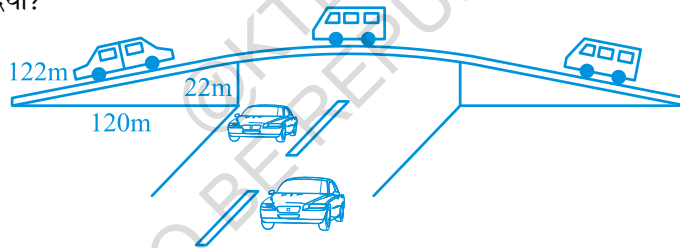
$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} \text{ m}^2$$

$$= 1500\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

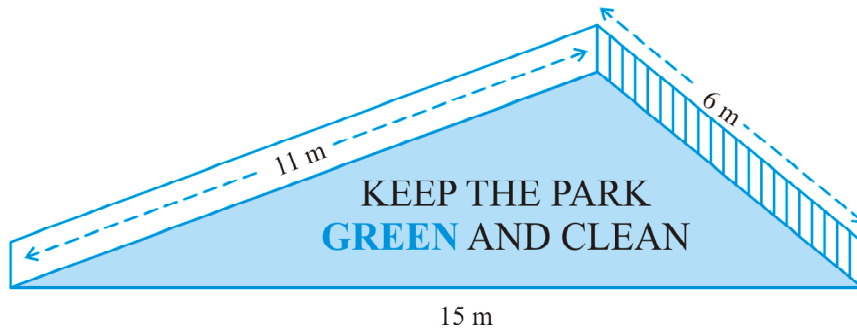


प्रश्नावली 10.1

1. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा 'a' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाण 180 cm है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?
2. किसी फ्लाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लंबाइयाँ 122 m, 22 m और 120 m हैं (देखिए आकृति 10.6)। इस विज्ञापन से प्रति वर्ष ₹5000 प्रति m^2 की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया?



3. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (side walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा-भरा और साफ रखिए" लिखा हुआ है (देखिए आकृति 10.7)। यदि इस दीवार की विमाएँ 15 m, 11 m और 6 m हैं, तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



4. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 cm और 10 cm हैं तथा उसका परिमाप 42 cm है।
5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540 cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और उसकी बराबर भुजाएँ 12 cm लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदु का अध्ययन किया है :

1. यदि त्रिभुज की भुजाएँ a , b और c हों, तो हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ होता है जहाँ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ है।}$$



0963CH13

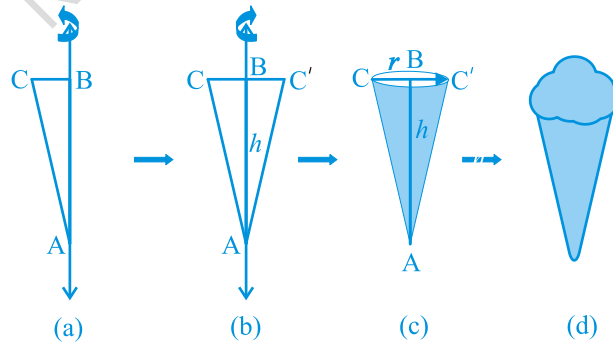
अध्याय 11

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

11.1 एक लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

अभी तक हम सर्वांगसम आकृतियों को एक के ऊपर एक रख कर ठोस जनित कर रहे थे। संयोग से इन आकृतियों को *प्रिज्म* (*prism*) कहते हैं। अब एक अन्य प्रकार के ठोसों को देखें जो प्रिज्म नहीं हैं। (इस प्रकार के ठोस पिरामिड (*pyramids*) कहलाते हैं।) आइए देखें कि इनको किस प्रकार जनित किया (बनाया) जाता है।

क्रियाकलाप : एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका कोण B समकोण हो, काट लीजिए। दोनों लंब भुजाओं में से किसी एक, मान लीजिए AB, के अनुदिश एक लंबी और मोटी डोरी चिपका दीजिए [देखिए आकृति 11.1(a)]। डोरी को दोनों हाथों से त्रिभुज के दोनों ओर से पकड़े हुए, त्रिभुज को डोरी के अनुदिश कई बार घुमाइए। आप क्या देखते हैं? जब त्रिभुज डोरी के अनुदिश घूम रहा है, तो जो वह आकृति बना रहा है, क्या आप उसे पहचानते हैं [देखिए आकृति 11.1(b)]? क्या आपको इस बात की याद दिलाती है कि इसी आकार के एक छोटे बर्तन (पात्र) में भरी आपने कभी आइसक्रीम खाई थी [देखिए आकृति 11.1 (c) और (d)]?



आकृति 11.1

यह आकृति एक लंब वृत्तीय शंकु (right circular cone) कहलाती है। आकृति 11.1(c) में बिन्दु A इस लम्ब वृत्तीय शंकु का शीर्ष (vertex) कहलाता है, AB इसकी ऊँचाई कहलाती है और BC आधार की त्रिज्या कहलाती है। AC इस शंकु की तिर्यक ऊँचाई (slant height) कहलाती है। यहाँ B वृत्तीय आधार का केंद्र (centre) है। शंकु की ऊँचाई, त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई को प्रायः क्रमशः h , r और l से व्यक्त किया जाता है।

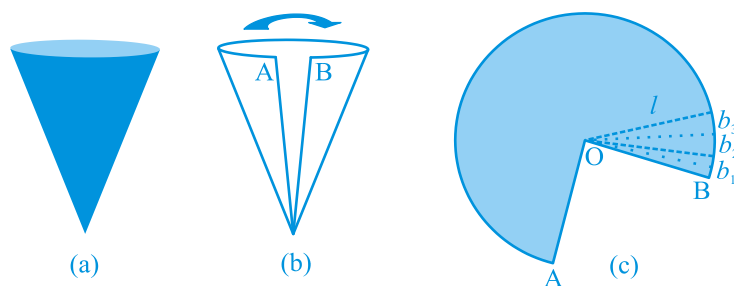
एक बार पुनः देखें कि किस प्रकार के शंकु को हम लंब वृत्तीय शंकु नहीं कह सकते हैं। आप आकृति

11.2 को देखिए। इनमें जो आप शंकु देख रहे हैं वे लंब वृत्तीय शंकु नहीं हैं। (a) में, शीर्ष को आधार के केंद्र से मिलाने वाली रेखा आधार पर लंब नहीं है और (b) में, आधार वृत्तीय नहीं है।

जैसा कि बेलन की स्थिति में था, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'शंकु' से हमारा तात्पर्य लंब वृत्तीय 'शंकु' से ही होगा।

क्रियाकलाप : (i) एक साफ बने हुए कागज के शंकु को उसके शीर्ष से जाने वाली किसी भुजा या किनारे के अनुदिश काटिए जिसमें कोई अतिव्यापिकता न हो तथा खोल कर देखिए कि किस आकार के कागज से शंकु का पृष्ठ बना था। (जिस भुजा या किनारे के अनुदिश आप शंकु को काटेंगे वह उसकी तिर्यक ऊँचाई होगी जिसे l से व्यक्त किया जाता है।) खोला हुआ कागज आपको एक गोल केक के भाग की तरह दिखाई देगा।

(ii) यदि आप उन भुजाओं, जिनके सिरों पर A और B अंकित हैं, को मोड़ कर मिला लें, तो आप देखेंगे कि आकृति 11.3 (c) का वक्रित भाग शंकु का वृत्तीय आधार बनाता है।



आकृति 11.3

(iii) यदि आकृति 11.3 (c) में दिए कागज को O से जाती हुई रेखाओं द्वारा सैकड़ों छोटे-छोटे टुकड़ों में विभाजित कर लिया जाए, तो ये कटे हुए भाग लगभग त्रिभुज के आकारों के हैं और इनमें से प्रत्येक की ऊँचाई शंकु की तिर्यक ऊँचाई l के बराबर है।

(iv) अब प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ प्रत्येक त्रिभुज का आधार $\times l$

अतः, पूरे कागज का क्षेत्रफल

= सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + \dots = \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \times l \times [\text{आकृति 11.3(c) की पूरी वक्रित परिसीमा की लंबाई}]$$

(चूँकि $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ मिलकर इस आकृति के वक्रित भाग को बनाते हैं)

परन्तु इस वक्रित भाग से शंकु का आधार बनता है।

साथ ही, इस आधार की परिधि $= 2\pi r$, जहाँ r आधार की त्रिज्या है।

इसलिए, **शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$

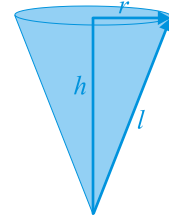
जहाँ r आधार की त्रिज्या है और l तिर्यक ऊँचाई हैं।

ध्यान दीजिए कि $l^2 = r^2 + h^2$ होता है, जिसे हम आकृति 11.4 से देख सकते हैं (पाइथागोरस प्रमेय से)। यहाँ h शंकु की ऊँचाई है।

अतः, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ होगा।

अब यदि शंकु के आधार को बंद रखा जाता है, तो ढकने के लिए r त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार कागज के टुकड़े की आवश्यकता और होगी। इसका क्षेत्रफल स्पष्टतः πr^2 है।

इसलिए, **शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$



आकृति 11.4

उदाहरण 1 : एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 7 cm है।

हल :

$$\begin{aligned} \text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \pi rl \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2 \\ &= 220 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 2 : एक शंकु की ऊँचाई 16 cm है और आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल : यहाँ, $h = 16$ cm और $r = 12$ cm है।

इसलिए, $l^2 = h^2 + r^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

अतः, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2$$

$$= 753.6 \text{ cm}^2$$

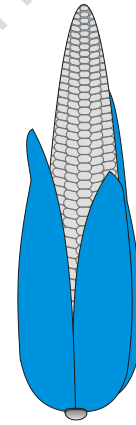
साथ ही, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ cm}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$$

$$= 1205.76 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 3 : एक भुट्टा कुछ-कुछ शंकु जैसे आकार का है (देखिए आकृति 11.5) जिसके सबसे चौड़े सिरे की त्रिज्या 2.1 cm है और इसकी लम्बाई (ऊँचाई) 20 cm है। यदि भुट्टे के प्रत्येक 1 cm^2 पृष्ठ पर औसतन चार दाने हों, तो ज्ञात कीजिए कि पूरे भुट्टे पर कुल कितने दाने होंगे?



आकृति 11.5

हल : चूँकि भुट्टे के दाने उसके वक्र पृष्ठ पर ही होते हैं, इसलिए हमें दानों की संख्या ज्ञात करने के लिए भुट्टे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करना होगा। यहाँ हमें शंकु की ऊँचाई दी है। इसलिए, हमें पहले शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात करनी पड़ेगी।

$$\text{अब, } l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2} \text{ cm}$$

$$= \sqrt{404.41} \text{ cm} = 20.11 \text{ cm}$$

अतः, भुट्टे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2 = 132.73 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

अतः 1 cm^2 क्षेत्रफल पर दानों की संख्या = 4

इसलिए, पूरे भुट्टे पर कुल दानों की संख्या = $132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (लगभग)

अतः, इस भुट्टे पर लगभग 531 दानें होंगे।

प्रश्नावली 11.1

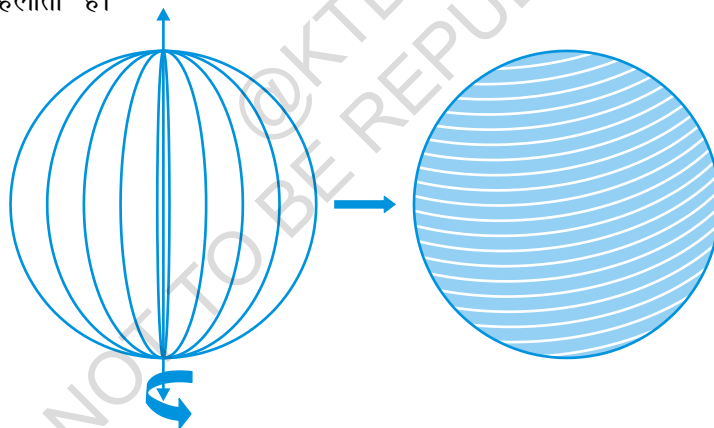
जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 m है और आधार का व्यास 24 m है।
3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 cm^2 है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। ज्ञात कीजिए :
(i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल
4. शंकु के आकार का एक तंबू 10 m ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। ज्ञात कीजिए :
(i) तंबू की तिर्यक ऊँचाई
(ii) तंबू में लगे केनवास (canvas) की लागत, यदि 1 m^2 केनवास की लागत 70 रुपये है।
5. 8 m ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 m वाले एक शंकु के आकार का तंबू बनाने में 3 m चौड़े तिरपाल की कितनी लंबाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 cm तिरपाल अतिरिक्त लगेगा। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)
6. शंकु के आधार की एक गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमशः 25 m और 14 m हैं। इसकी वक्र पृष्ठ पर ₹ 210 प्रति 100 m^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
7. एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 24 cm है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 cm है और ऊँचाई 1 m है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति m^2 है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।)

11.2 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक गोला (sphere) क्या होता है? क्या यह एक वृत्त की तरह ही है? क्या आप एक कागज पर वृत्त खींच सकते हैं? हाँ, आप खींच सकते हैं, क्योंकि यह एक बंद समतल आकृति है जिसका प्रत्येक बिंदु एक निश्चित बिंदु (जिसे वृत्त का केंद्र कहते हैं) से एक निश्चित दूरी पर रहता है (जिसे वृत्त की त्रिज्या कहते हैं)। अब यदि आप एक वृत्ताकार चकती (disc) के एक व्यास के अनुदिश एक डोरी चिपका दें और इसे वैसे ही घुमाएँ जैसे आपने पिछले अनुच्छेद में त्रिभुज को घुमाया था, तो आप एक नया ठोस देखेंगे (देखिए आकृति 11.6)। यह किस वस्तु से मिलता-जुलता लगता है? एक गेंद? हाँ, ऐसा ही है। यह एक **गोला** (sphere) कहलाता है।

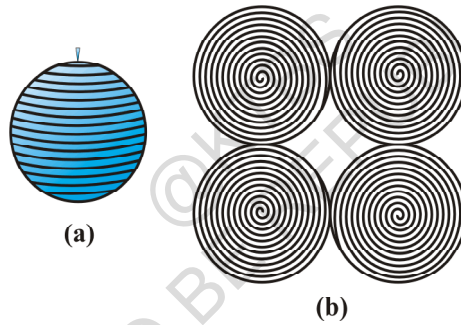


आकृति 11.6

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उस वृत्त के केंद्र का क्या होता है जिसे आपने घुमाया है। निःसंदेह, यह गोले का केंद्र भी हो जाता है। इस प्रकार, गोला एक त्रिविमीय आकृति (three dimensional figure) (ठोस आकृति) है, जो आकाश (स्पेस) (space) में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिल कर बनी है जो एक निश्चित बिंदु से (जो गोले का केन्द्र कहलाता है) से एक **अचर** या निश्चित दूरी पर होते हैं (जो गोले की **त्रिज्या** कहलाती है)।

टिप्पणी : गोला एक गेंद की पृष्ठ की तरह होता है। ठोस गोला उस ठोस के लिए प्रयोग होता है जिसका पृष्ठ एक गोला हो।

क्रियाकलाप : क्या आप कभी लट्टू के साथ खेले हैं या कभी आपने किसी व्यक्ति को लट्टू के साथ खेलते देखा है? आप यह जानते होंगे कि उस पर डोरी किस प्रकार लपेटी जाती है। अब आइए एक रबर की गेंद लें और उसके ऊपर एक कील लगा दें। कील की सहायता लेते हुए, गेंद पर डोरी लपेटना प्रारम्भ कर दीजिए। जब आप ऐसा कर रहे हों, तो डोरी को थामे रखने के लिए, बीच-बीच में पिन लगाते रहिए और डोरी लपेटना तब तक जारी रखिए जब तक कि पूरी गेंद पर डोरी न लिपट जाए [देखिए आकृति 11.7(a)]। डोरी पर प्रारम्भिक और अंतिम बिंदु अंकित कर लीजिए और धीरे-धीरे गेंद से डोरी को हटा लीजिए। अब अपने शिक्षक से गेंद का व्यास मापने के लिए सहायता देने के लिए कहिए। इससे आपको गेंद की त्रिज्या ज्ञात हो जाएगी। इसके बाद, कागज पर गेंद की त्रिज्या के बराबर चार वृत्त खींच लीजिए। अब जो डोरी आपने गेंद पर लपेटी थी उसी को एक-एक करके इन वृत्तों पर रखकर वृत्तों को भरिए [देखिए आकृति 11.7(b)]।



आकृति 11.7

इन सबसे आपको क्या प्राप्त होता है?

वह डोरी जिसने एक गोले के पृष्ठ को पूरा-पूरा ढक दिया था अब उसी गोले की त्रिज्या वाले चार वृत्तों के क्षेत्रों को भर रही है। इसका क्या अर्थ हुआ? इससे यह सुझाव मिलता है कि त्रिज्या r वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \text{त्रिज्या } r \text{ वाले चार वृत्तों का क्षेत्रफल} = 4 \times (\pi r^2)$$

इसलिए,

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4 \pi r^2$$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

गोले के पृष्ठ पर आप कितने फलक देखते हैं? केवल एक। यह वक्रिय है।

आइए एक ठोस गोला लें और इसे बीच से इसके केंद्र से जाते हुए एक तल द्वारा दो भागों में काट लें। गोले का क्या होता है? यह दो बराबर भागों में विभाजित हो गया है (देखिए आकृति 11.8)। प्रत्येक आधा भाग क्या कहलाता है यह एक **अर्धगोला (hemisphere)** कहलाता है (क्योंकि hemi का अर्थ आधा है)। अर्धगोले के पृष्ठ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इसके कितने फलक हैं?



आकृति 11.8

दो!, इनमें एक वक्रिय है और एक समतल फलक है (आधार)।

अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का आधा, अर्थात् $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ है।

अतः, **अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$**

जहाँ r उस गोले की त्रिज्या है जिसका अर्धगोला एक भाग है।

अब दोनों फलकों को लेने पर, इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + \pi r^2$ है।

अतः, **अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$**

उदाहरण 4 : 7 cm त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 7 cm त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5 : त्रिज्या 21 cm वाले एक अर्धगोले के लिए, ज्ञात कीजिए:

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल : (i) त्रिज्या 21 cm वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 6 : सर्कस का एक मोटरसाइकिल सवार जिस खोखले गोले के अंदर अपने करतब (खेल) दिखाता है उसका व्यास 7 m है। मोटरसाइकिल सवार के पास ये करतब दिखाने के लिए कितना क्षेत्रफल उपलब्ध है?

हल : गोले का व्यास = 7 m है। इसलिए त्रिज्या 3.5m हुई। अब, करतब दिखाने के लिए, मोटरसाइकिल सवार को उपलब्ध स्थान इस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है।

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$$

उदाहरण 7 : किसी भवन का ऊपरी भाग अर्धगोलाकार है और इस पर पेंट किया जाना है (देखिए आकृति 11.9)। यदि इस अर्धगोले के आधार की परिधि 17.6 m है, तो ₹5 प्रति 100 cm² की दर से इसे पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि केवल गोलाकार पृष्ठ पर ही पेंट होगा, इसलिए हमें अर्धगोले के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

अब, आधार की परिधि = 17.6 m है।

इसलिए, $2\pi r = 17.6$

$$\text{अर्थात्, } r = \frac{17.6 \times 7}{2 \times 22} \text{ m} = 2.8 \text{ m}$$

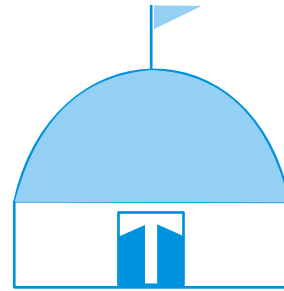
इसलिए, भवन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$$\begin{aligned} &= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2 \\ &= 49.28 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

अब, 100 cm² पेंटिंग की लागत = ₹5

इसलिए, 1 m² पेंटिंग की लागत = ₹500

अतः, 49.28 m² पेंटिंग की लागत = ₹500 × 49.28 = ₹24640

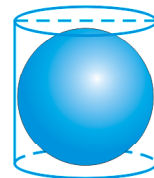


आकृति 11.9

प्रश्नावली 11.2

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

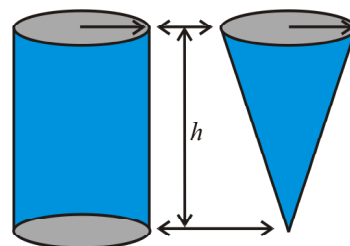
- निम्न त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm
- निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m
- 10 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)
- एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 cm से 14 cm हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- पीतल से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। ₹16 प्रति 100 cm² की दर से इसके आंतरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
- उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm² है।
- चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- एक अर्धगोलाकार कटोरा 0.25 cm मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- एक लंब वृत्तीय बेलन त्रिज्या r वाले एक गोले को पूर्णतया घेरे हुए है (देखिए आकृति 11.10)। ज्ञात कीजिए:
(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल
(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
(iii) ऊपर (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



आकृति 11.10

11.3 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

आकृति 11.11 में, आप देखते हैं कि इसमें एक ही आधार त्रिज्या वाले और एक ही ऊँचाई वाले बेलन और शंकु दिए हुए हैं।



आकृति 11.11

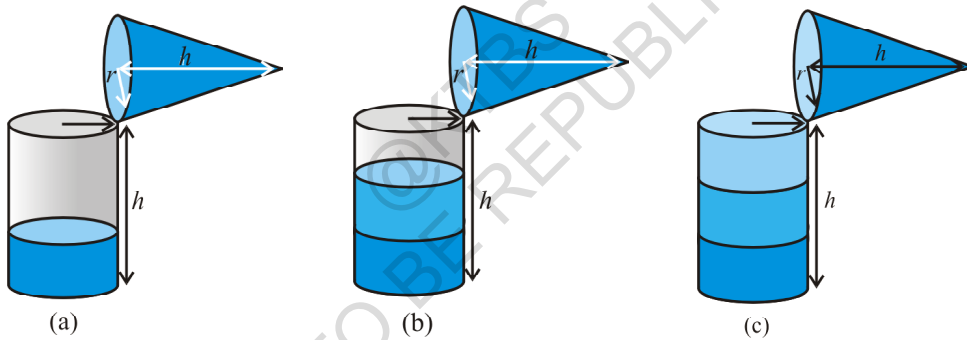
क्रियाकलाप : उपरोक्त आकृतियों की ही तरह, एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊँचाई वाला एक खोखला बेलन और एक खोखला शंकु बनाने का प्रयत्न कीजिए (देखिए आकृति 11.11)। फिर हम एक प्रयोग द्वारा यह ज्ञात करेंगे कि एक शंकु का आयतन क्या है।

आइए इस प्रयोग को प्रारम्भ करें।

शंकु को रेत से एक बार ऊपर तक भरिए और इस रेत को बेलन में डाल दीजिए। हम देखते हैं कि इससे बेलन का कुछ भाग भर गया है [देखिए आकृति 11.12 (a)]।

फिर हम दुबारा शंकु को रेत से भर कर बेलन में रेत को डाल देते हैं। हम देखते हैं कि बेलन अभी भी पूरा नहीं भरा है [देखिए आकृति 11.12(b)]।

अब शंकु को तीसरी बार रेत से भर कर बेलन में डालिए। हम देखते हैं कि बेलन पूरा रेत से भर गया है [देखिए आकृति 11.12(c)]।



आकृति 11.12

इस प्रयोग से, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि तीन शंकुओं का आयतन बेलन के आयतन के बराबर है। इसका अर्थ है कि यदि शंकु और बेलन की आधार त्रिज्या एक ही हो और ऊँचाई भी एक ही हो, तो शंकु का आयतन बेलन के आयतन का एक-तिहाई होता है।

अतः, **शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$**

जहाँ r आधार त्रिज्या है और h शंकु की ऊँचाई है।

उदाहरण 8 : किसी शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm और 28 cm हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : $l^2 = r^2 + h^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः, शंकु का आयतन} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3 \\ &= 7546 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

उदाहरण 9 : मोनिका के पास केनवास का एक टुकड़ा है जिसका क्षेत्रफल 551 m^2 है। वह इससे 7 m आधार त्रिज्या वाला एक शंकु का आपतन का तंबू बनवाती है। यह मानते हुए कि सिलाई और कटाई में लगभग 1 m^2 केनवास नष्ट हुआ होगा, इससे बनाए जाने वाले शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : केनवास का क्षेत्रफल $= 551 \text{ m}^2$ है और 1 m^2 केनवास सिलाई, इत्यादि में नष्ट हो जाता है।

$$\text{अतः, तंबू के लिए उपलब्ध केनवास} = (551 - 1) \text{ m}^2 = 550 \text{ m}^2$$

$$\text{इसलिए, तंबू का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 550 \text{ m}^2$$

$$\text{अब, तंबू के आधार की त्रिज्या} = 7 \text{ m}$$

ध्यान दीजिए कि तंबू की केवल वक्र पृष्ठ ही होती है (तंबू के फर्श को ढका नहीं जाता है)।

$$\text{अतः, तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 550 \text{ m}^2$$

$$\text{अर्थात्, } \pi r l = 550$$

$$\text{या, } \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$\text{या, } l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

$$\text{अब, } l^2 = r^2 + h^2$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, } h &= \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ m} = \sqrt{625 - 49} \text{ m} = \sqrt{576} \text{ m} \\ &= 24 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{अतः, तंबू का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3 = 1232 \text{ m}^3$$

प्रश्नावली 11.3

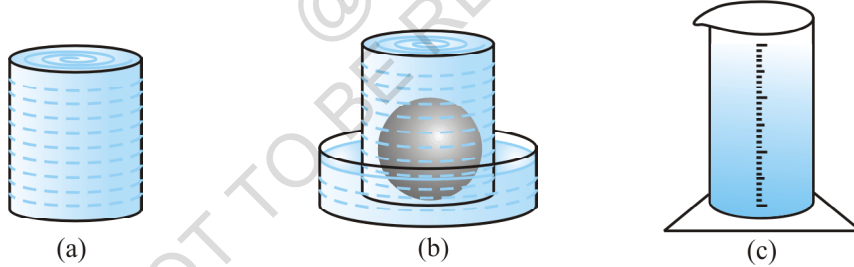
जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

- उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी
(i) त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 7 cm है। (ii) त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 12 cm है।
- शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है।
(ii) ऊँचाई 12 cm और तिर्यक ऊँचाई 13 cm है।
- एक शंकु की ऊँचाई 15 cm है। यदि इसका आयतन 1570 cm^3 है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)
- यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन $48 \pi \text{ cm}^3$ है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।
- ऊपरी व्यास 3.5 m वाले शंकु के आकार का एक गड्ढा 12 m गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटरों में कितनी है?
- एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm^3 है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए :
(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई
(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
- भुजाओं 5 cm, 12 cm और 13 cm वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 cm के परित घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।
- यदि प्रश्न 7 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 cm के परित घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्नों 7 और 8 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।
- गेहूँ की एक ढेरी 10.5 m व्यास और ऊँचाई 3 m वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए केनवास से ढका जाना है। वाँछित केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11.4 गोले का आयतन

आइए अब देखें कि एक गोले का आयतन कैसे मापा जाए। पहले विभिन्न त्रिज्याओं वाले दो या तीन गोले लीजिए। फिर एक बर्तन लीजिए, जिसके अंदर इन गोलों को (केवल एक बार में एक) रखा जा सके। साथ ही, एक बड़ी नाँद (trough) लीजिए जिसमें इस बर्तन को रखा जा सके। अब बर्तन को पूरा ऊपर तक पानी से भरिए [देखिए आकृति 11.13(a)]।

अब लिए गए गोलों में से एक को बर्तन में सावधानीपूर्वक डालिए। बर्तन में से कुछ पानी बाहर निकल कर उस नाँद में जाएगा जिसमें वह बर्तन रखा हुआ है [देखिए आकृति 11.13(b)]। अब नाँद में आए इस पानी को सावधानीपूर्वक एक नापने वाले बेलन [अर्थात् अशांकित बेलनाकार गिलास (graduated cylindrical jar)] में डालिए। मान लीजिए पानी में डुबाए गए गोले की त्रिज्या r है (आप गोले का व्यास माप कर उसकी त्रिज्या ज्ञात कर सकते हैं)। अब $\frac{4}{3}\pi r^3$ का मान निकालिए। क्या आप यह पाते हैं कि यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है?



आकृति 11.13

एक बार फिर इसी प्रक्रिया को एक अन्य माप का गोला लेकर दोहराइए। इस गोले की त्रिज्या R ज्ञात करके $\frac{4}{3}\pi R^3$ का मान निकालिए। एक बार फिर यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है। यह हमें क्या बताता है? हम जानते हैं कि गोले का आयतन उसके द्वारा हटाए गए पानी के आयतन के बराबर है। इस प्रयोग को बार-बार करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि एक गोले का आयतन गोले की त्रिज्या के घन का $\frac{4}{3}\pi$ गुना है। इससे हमें निम्न सुझाव प्राप्त होता है :

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

उच्चतर कक्षाओं में इसे सिद्ध भी किया जा सकता है। परन्तु इस समय तो हम इसे सत्य मान लेते हैं।

अब अर्धगोले के आयतन के बारे में आप क्या अनुमान लगा सकते हैं? हाँ, यह

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ का } \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ है।}$$

$$\text{अतः, अर्धगोले का आयतन} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

जहाँ r अर्धगोले की त्रिज्या है।

आइए इन सूत्रों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : 11.2 cm त्रिज्या वाले गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल :} \quad \text{वाँछित आयतन} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3 = 5887.32 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

उदाहरण 11 : एक शॉट-पुट (shot-put) 4.9 cm त्रिज्या वाला एक धातु का गोला है। यदि इस धातु का घनत्व (density) 7.8 ग्राम प्रति cm^3 है, तो शॉट-पुट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि शॉट-पुट (shot-put) धातु का एक ठोस गोला है तथा द्रव्यमान आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होता है, इसलिए पहले हमें शॉट-पुट का आयतन ज्ञात करना चाहिए।

$$\begin{aligned} \text{अब,} \quad \text{गोले का आयतन} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3 \\ &= 493 \text{ cm}^3 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

साथ ही, 1 cm^3 धातु का द्रव्यमान = 7.8 ग्राम

अतः, शॉट-पट्ट का द्रव्यमान = 7.8×493 ग्राम

$$= 3845.44 \text{ ग्राम} = 3.85 \text{ किलोग्राम (लगभग)}$$

उदाहरण 12 : एक अर्धगोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 cm है। इसके अंदर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कटोरे में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3 = 89.8 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

प्रश्नावली 11.4

जब अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

- उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है :
(i) 7 cm (ii) 0.63 m
- उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्न है :
(i) 28 cm (ii) 0.21 m
- धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति cm^3 है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।
- चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चंद्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?
- व्यास 10.5 cm वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?
- एक अर्धगोलाकार टंकी 1 cm मोटी एक लोहे की चादर (sheet) से बनी है। यदि इसकी आंतरिक त्रिज्या 1 m है, तो इस टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।
- उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

8. किसी भवन का गुंबद एक अर्धगोले के आकार का है। अंदर से, इसमें सफेदी कराने में ₹498.96 व्यय हुआ। यदि सफेदी कराने की दर ₹2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए:
 - (i) गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
 - (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन
9. लोहे के सत्ताइस ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S' है। ज्ञात कीजिए:
 - (i) नए गोले की त्रिज्या r'
 - (ii) S और S' का अनुपात
10. दवाई का एक कैप्सूल (capsule) 3.5 mm व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैप्सूल को भरने के लिए कितनी दवाई (mm^3 में) की आवश्यकता होगी?

11.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$
2. शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l + \pi r^2$, अर्थात् $\pi r (l + r)$
3. गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4 \pi r^2$
4. अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$
5. अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$
6. शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$
7. गोले का आयतन $= \frac{4}{3} \pi r^3$
8. अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3} \pi r^3$

[यहाँ अक्षरों l, b, h, a, r , इत्यादि का प्रयोग, अपने संदर्भ के अनुसार, सामान्य अर्थों में प्रयोग किया गया है।]



0963CH14

अध्याय 12

सांख्यिकी

12.1 आंकड़ों का आलेखीय निरूपण

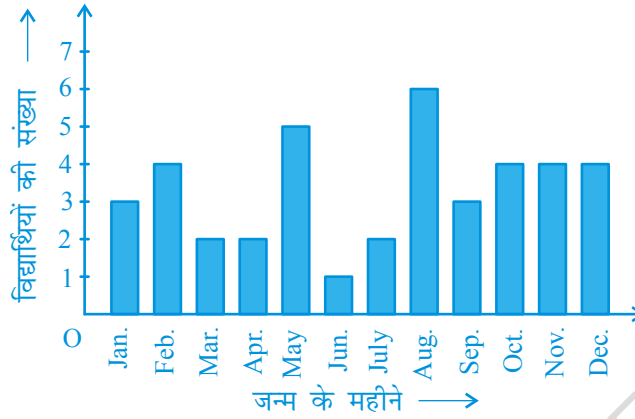
सारणियों से आंकड़ों का निरूपण करने के बारे में हम चर्चा कर चुके हैं। आइए अब हम आंकड़ों के अन्य निरूपण, अर्थात् आलेखीय निरूपण (graphical representation) की ओर अपना ध्यान केंद्रित करें। इस संबंध में एक कहावत यह रही है कि एक चित्र हजार शब्द से भी उत्तम होता है। प्रायः अलग-अलग मदों की तुलनाओं को आलेखों (graphs) की सहायता से अच्छी तरह से दर्शाया जाता है। तब वास्तविक आंकड़ों की तुलना में इस निरूपण को समझना अधिक सरल हो जाता है। इस अनुच्छेद में, हम निम्नलिखित आलेखीय निरूपणों का अध्ययन करेंगे।

- (A) दंड आलेख (Bar Graph)
- (B) एकसमान चौड़ाई और परिवर्ती चौड़ाइयों वाले आयतचित्र (Histograms)
- (C) बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygons)

(A) दंड आलेख

पिछली कक्षाओं में, आप दंड आलेख का अध्ययन कर चुके हैं और उन्हें बना भी चुके हैं। यहाँ हम कुछ अधिक औपचारिक दृष्टिकोण से इन पर चर्चा करेंगे। आपको याद होगा कि दंड आलेख आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x -अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दंड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर-बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y -अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दंडों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं।

उदाहरण 1 : नवीं कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आंकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गया:



आकृति 12.1

ऊपर दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- नवंबर के महीने में कितने विद्यार्थियों का जन्म हुआ?
- किस महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

हल : ध्यान दीजिए कि यहाँ चर 'जन्म दिन का महीना' है और चर का मान 'जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या' है।

- नवंबर के महीने में 4 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।
- अगस्त के महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इनका पुनर्विलोकन करें कि एक दंड आलेख किस प्रकार बनाया जाता है।

उदाहरण 2 : एक परिवार ने जिसकी मासिक आय ₹ 20000 है, विभिन्न मदों के अंतर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थी:

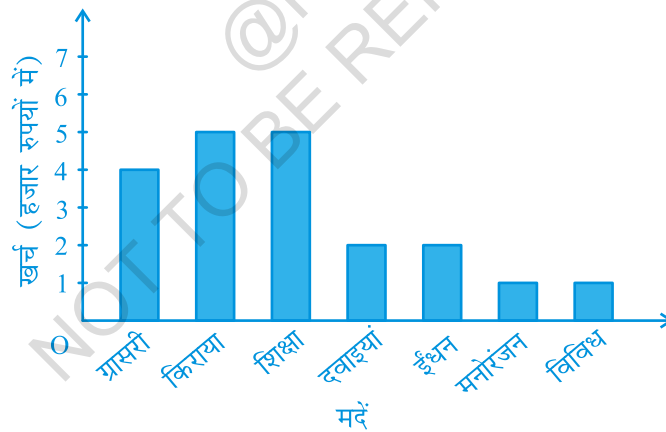
सारणी 12.1

मद	खर्च (हजार रुपयों में)
ग्रॉसरी (परचून का सामान)	4
किराया	5
बच्चों की शिक्षा	5
दवाइयाँ	2
ईंधन	2
मनोरंजन	1
विविध	1

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइए।

हल : हम इन आंकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि दूसरे स्तंभ में दिया गया मात्रक (unit) 'हजार रुपयों में' है। अतः, ग्राँसरी (परचून का सामान) के सामने लिखा अंक 4 का अर्थ ₹ 4000 है।

1. कोई भी पैमाना (scale) लेकर हम क्षैतिज अक्ष पर मदों (चर) को निरूपित करते हैं, क्योंकि यहाँ दंड की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता। परन्तु स्पष्टता के लिए हम सभी दंड समान चौड़ाई के लेते हैं और उनके बीच समान दूरी बनाए रखते हैं। मान लीजिए एक मद को एक सेंटीमीटर से निरूपित किया गया है।
2. हम खर्च (मूल्य) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। क्योंकि अधिकतम खर्च ₹ 5000 है, इसलिए हम पैमाना 1 मात्रक = ₹ 1000 ले सकते हैं।
3. अपने पहले मद अर्थात् ग्राँसरी को निरूपित करने के लिए, हम 1 मात्रक की चौड़ाई 4 मात्रक की ऊँचाई वाला एक आयताकार दंड बनाते हैं।
4. इसी प्रकार, दो क्रमागत दंडों के बीच 1 मात्रक का खाली स्थान छोड़कर अन्य मदों को निरूपित किया जाता है (देखिये आकृति 12.2)।



आकृति 12.2

यहाँ आप एक दृष्टि में ही आंकड़ों के सापेक्ष अभिलक्षणों को सरलता से देख सकते हैं। उदाहरण के लिए, आप यह सरलता से देख सकते हैं कि ग्राँसरी पर किया गया खर्च दवाइयों पर किए गए खर्च का दो गुना है। अतः, कुछ अर्थों में सारणी रूप की अपेक्षा यह आंकड़ों का एक उत्तम निरूपण है।

क्रियाकलाप 1 : अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को चार समूहों में बाँट दीजिए। प्रत्येक समूह को निम्न प्रकार के आंकड़ों में से एक प्रकार के आंकड़ों को संग्रह करने का काम दे दीजिए।

- अपनी कक्षा के 20 विद्यार्थियों की लंबाई।
- अपनी कक्षा में किसी एक महीने के प्रत्येक दिन अनुपस्थित रहे विद्यार्थियों की संख्या।
- आपके कक्षा मित्रों के परिवारों के सदस्यों की संख्या।
- आपके विद्यालय में या उसके आस-पास के 15 पौधों की लंबाईयाँ।

इन चार समूहों द्वारा प्राप्त आंकड़ों को उपयुक्त दंड आलेखों से निरूपित कीजिए।

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार संतत वर्ग अंतरालों की बारंबारता बंटन सारणी को आलेखीय रूप में निरूपित किया जाता है।

(B) आयतचित्र

यह संतत वर्ग अंतरालों के लिए प्रयुक्त दंड आलेख की भाँति निरूपण का एक रूप है। उदाहरण के लिए, बारंबारता बंटन सारणी 12.2 लीजिए, जिसमें एक कक्षा के 36 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं:

सारणी 12.2

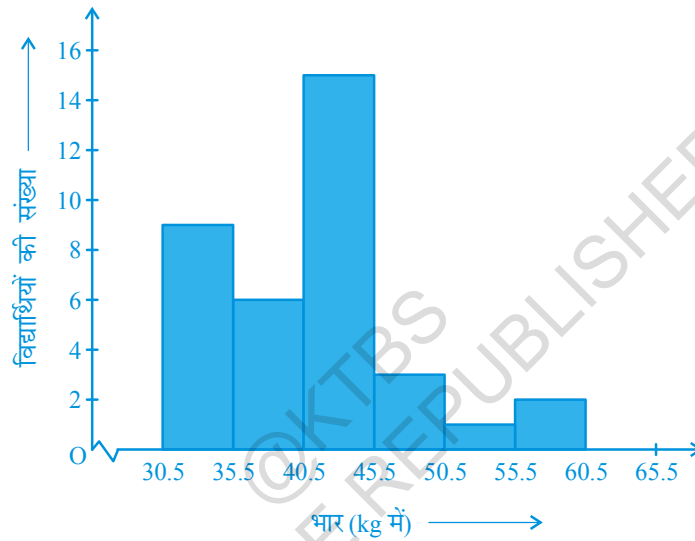
भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
कुल योग	36

आइए हम ऊपर दिए गए आंकड़ों को आलेखीय रूप में इस प्रकार निरूपित करें:

- हम एक उपयुक्त पैमाना लेकर भार को क्षैतिज अक्ष पर निरूपित करें। हम पैमाना 1 सेंटीमीटर = 5 kg ले सकते हैं। साथ ही, क्योंकि पहला वर्ग अंतराल 30.5 से प्रारंभ हो रहा है न कि शून्य से, इसलिए एक निकुंच (kink) का चिह्न बनाकर या अक्ष में एक विच्छेद दिखा कर, इसे हम आलेख पर दर्शा सकते हैं।
- हम एक उपयुक्त पैमाने के अनुसार विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। साथ ही, क्योंकि अधिकतम बारंबारता 15 है, इसलिए हमें एक ऐसे पैमाने का चयन करना होता है जिससे कि उसमें यह अधिकतम बारंबारता आ सके।

(iii) अब हम वर्ग अंतराल के अनुसार समान चौड़ाई और संगत वर्ग अंतरालों की बारंबारताओं को लंबाईयाँ मानकर आयत (या आयताकार दंड) बनाते हैं। उदाहरण के लिए, वर्ग अंतराल 30.5–35.5 का आयत 1 सेंटीमीटर की चौड़ाई और 4.5 सेंटीमीटर की लंबाई वाला आयत होगा।

(iv) इस प्रकार हमें जो आलेख प्राप्त होता है, उसे आकृति 12.3 में दिखाया गया है।



आकृति 12.3

ध्यान दीजिए कि क्योंकि क्रमागत आयतों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है, इसलिए परिणामी आलेख एक ठोस आकृति के समान दिखाई पड़ेगा। इस आलेख को *आयतचित्र* (histogram) कहा जाता है, जो कि संतत वर्गों वाले वर्गीकृत बारंबारता बंटन का एक आलेखीय निरूपण होता है। साथ ही, दंड आलेख के विपरीत, इसकी रचना में दंड की चौड़ाई की एक महत्वपूर्ण भूमिका होती है।

वास्तव में, यहाँ खड़े किए गए आयतों के क्षेत्रफल संगत बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। फिर भी, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाईयाँ समान हैं, इसलिए आयतों की लंबाईयाँ बारंबारताओं के समानुपाती होती हैं। यही कारण है कि हम लंबाईयाँ ऊपर (iii) के अनुसार ही लेते हैं।

अब, हम पीछे दिखाई गई स्थिति से अलग एक स्थिति लेते हैं।

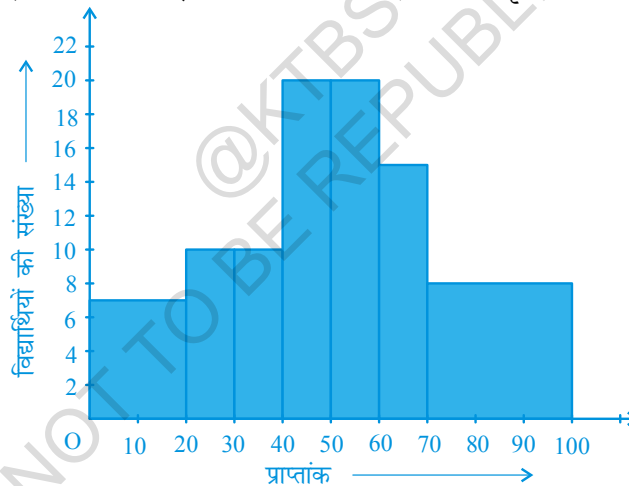
उदाहरण 3: एक अध्यापिका दो सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्रदर्शनों का विश्लेषण 100 अंक की गणित की परीक्षा लेकर करना चाहती है। उनके प्रदर्शनों को देखने पर वह यह पाती है कि केवल कुछ ही विद्यार्थियों के प्राप्तांक 20 से कम है और कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक 70 या उससे

अधिक हैं। अतः, उसने विद्यार्थियों को 0 - 20, 20 - 30, . . . , 60 - 70, 70 - 100 जैसे विभिन्न माप वाले अंतरालों में वर्गीकृत करने का निर्णय लिया। तब उसने निम्नलिखित सारणी बनाई।

सारणी 12.3

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - और उससे अधिक	8
कुल योग	90

किसी विद्यार्थी ने इस सारणी का एक आयतचित्र बनाया, जिसे आकृति 12.4 में दिखाया गया है।



आकृति 12.4

इस आलेखीय निरूपण की जाँच सावधानी से कीजिए। क्या आप समझते हैं कि यह आलेख आंकड़ों का सही-सही निरूपण करता है? इसका उत्तर है: नहीं। यह आलेख आंकड़ों का एक गलत चित्र प्रस्तुत कर रहा है। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं आयतों के क्षेत्रफल आयतचित्र की बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। पहले इस प्रकार के प्रश्न हमारे सामने नहीं उठे थे, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाइयाँ समान थीं। परन्तु, क्योंकि यहाँ आयतों की चौड़ाइयाँ बदल रही हैं, इसलिए ऊपर दिया गया आयतचित्र आंकड़ों का एक सही-सही चित्र प्रस्तुत नहीं करता। उदाहरण के लिए, यहाँ अंतराल 60-70 की तुलना में अंतराल 70-100 की बारंबारता अधिक है।

अतः, आयतों की लंबाइयों में कुछ परिवर्तन (modifications) करने की आवश्यकता होती है, जिससे कि क्षेत्रफल पुनः बारंबारताओं के समानुपाती हो जाए।

इसके लिए निम्नलिखित चरण लागू करने होते हैं :

1. न्यूनतम वर्ग चौड़ाई वाला एक वर्ग अंतराल लीजिए। ऊपर के उदाहरण में, न्यूनतम वर्ग चौड़ाई 10 है।
2. तब आयतों की लंबाइयों में इस प्रकार परिवर्तन कीजिए जिससे कि वह वर्ग चौड़ाई 10 के समानुपाती हो जाए।

उदाहरण के लिए, जब वर्ग चौड़ाई 20 होती है, तब आयत की लंबाई 7 होती है। अतः

जब वर्ग चौड़ाई 10 हो, तो आयत की लंबाई $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ होगी।

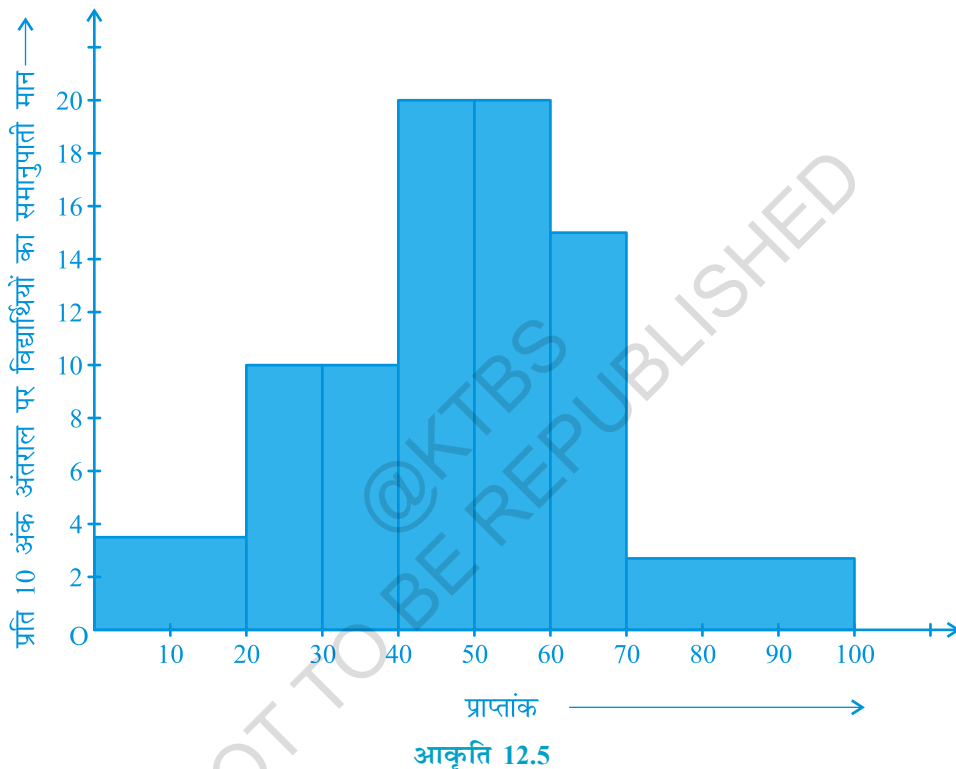
इस प्रक्रिया को लागू करते रहने पर, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 12.4

अंक	बारंबारता	वर्ग की चौड़ाई	आयत की लंबाई
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 -100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

क्योंकि हमने प्रत्येक स्थिति में 10 अंकों के अंतराल पर ये लंबाइयाँ परिकल्पित की हैं, इसलिए आप यह देख सकते हैं कि हम इन लंबाइयों को 'प्रति 10 अंक अंतराल पर विद्यार्थियों के समानुपाती मान' सकते हैं।

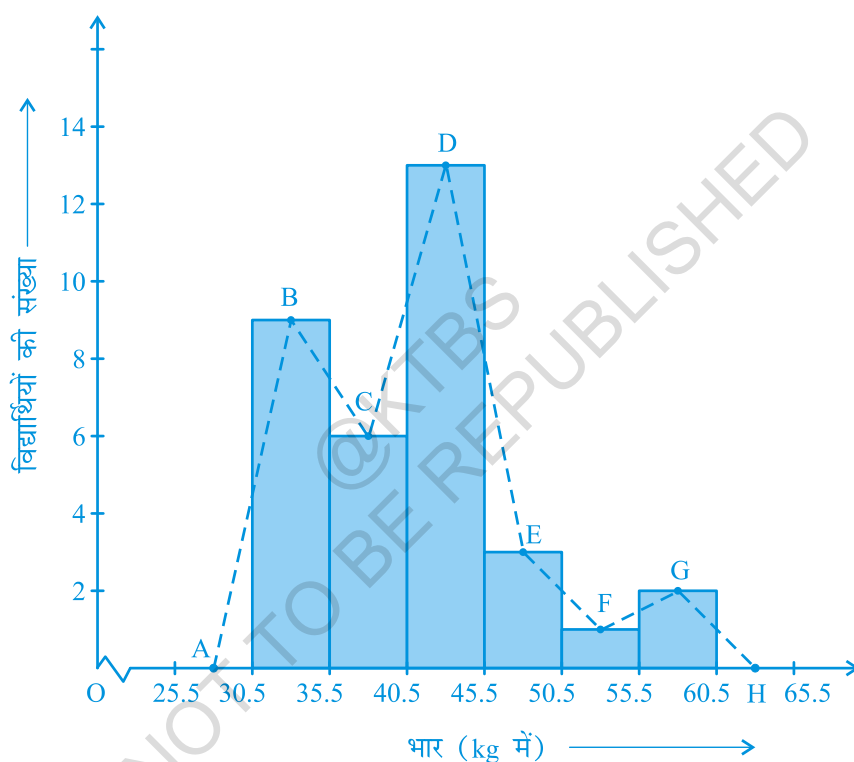
परिवर्ती चौड़ाई वाला सही आयतचित्र आकृति 12.5 में दिखाया गया है।



(C) बारंबारता बहुभुज

मात्रात्मक आंकड़ों (quantitative data) और उनकी बारंबारताओं को निरूपित करने की एक अन्य विधि भी है। वह है एक बहुभुज (polygon)। बहुभुज का अर्थ समझने के लिए, आइए हम आकृति 12.3 में निरूपित आयतचित्र लें। आइए हम इस आयतचित्र के संगत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को रेखाखंडों से जोड़ दें। आइए हम इन मध्य-बिंदुओं को B, C, D, E, F और G से प्रकट करें। जब इन मध्य-बिंदुओं को हम रेखाखंडों से जोड़ देते

हैं, तो हमें आकृति BCDEFG (देखिए आकृति 12.6) प्राप्त होती है। बहुभुज को पूरा करने के लिए यहाँ हम यह मान लेते हैं कि 30.5–35.5 के पहले और 55.5–60.5 के बाद शून्य बारंबारता वाले एक एक वर्ग अंतराल हैं और इनके मध्य-बिंदु क्रमशः A और H हैं। आकृति 12.3 में दर्शाए गए आंकड़ों का संगत बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH (frequency polygon) है। इसे हमने आकृति 12.6 में दर्शाया है।



आकृति 12.6

यद्यपि न्यूनतम वर्ग के पहले और उच्चतम वर्ग के बाद कोई वर्ग नहीं है, फिर भी शून्य बारंबारता वाले दो वर्ग अंतरालों को बढ़ा देने से बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है, जो आयतचित्र का क्षेत्रफल है। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है जो कि आयतचित्र का क्षेत्रफल है? (संकेत : सर्वांगसम त्रिभुजों वाले गुणों का प्रयोग कीजिए।)

अब प्रश्न यह उठता है कि जब प्रथम वर्ग अंतराल के पहले कोई वर्ग अंतराल नहीं होता, तब बहुभुज को हम कैसे पूरा करेंगे? आइए हम ऐसी ही एक स्थिति लें और देखें कि किस प्रकार हम बारंबारता बहुभुज बनाते हैं।

उदाहरण 4 : एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किए अंक सारणी 12.5 में दिए गए हैं :

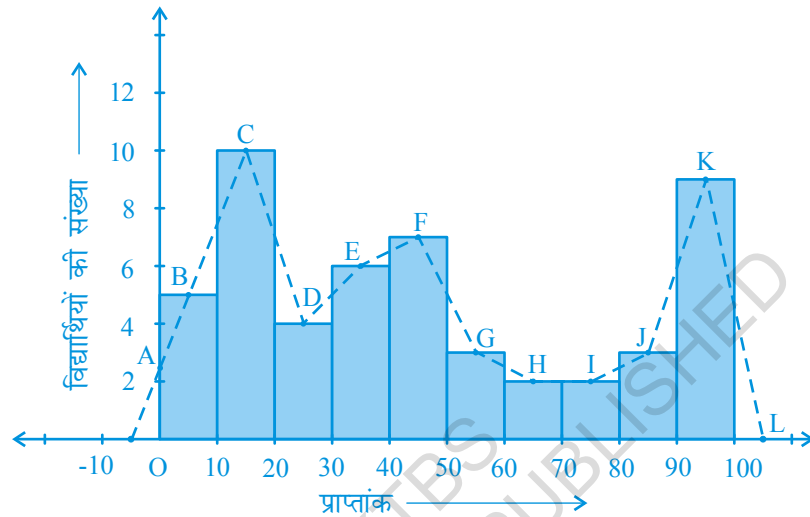
सारणी 12.5

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
कुल योग	51

इस बारंबारता बंटन सारणी के संगत बारंबारता बहुभुज बनाइए।

हल : आइए पहले हम इन आंकड़ों से एक आयतचित्र बनाएँ और आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रमशः B, C, D, E, F, G, H, I, J, K से प्रकट करें। यहाँ पहला वर्ग 0-10 है। अतः 0-10 से ठीक पहले का वर्ग ज्ञात करने के लिए, हम क्षैतिज अक्ष को ऋणात्मक दिशा में बढ़ाते हैं और काल्पनिक वर्ग अंतराल $(-10)-0$ का मध्य-बिंदु ज्ञात करते हैं। प्रथम अंत बिंदु (end point), अर्थात् B को क्षैतिज अक्ष की ऋणात्मक दिशा में शून्य बारंबारता वाले इस मध्य-बिंदु से मिला दिया जाता है। वह बिंदु जहाँ यह रेखाखंड ऊर्ध्वाधर अक्ष से मिलता है, उसे A से प्रकट करते हैं। मान लीजिए दिए हुए आंकड़ों के अंतिम वर्ग के ठीक

बाद वाले वर्ग का मध्य-बिंदु L है। तब OABCDEFGH IJKL वाँछित बारंबारता बहुभुज है, जिसे आकृति 12.7 में दिखाया गया है।



आकृति 12.7

आयतचित्र बनाए बिना ही बारंबारता बहुभुजों को स्वतंत्र रूप से भी बनाया जा सकता है। इसके लिए हमें आंकड़ों में प्रयुक्त वर्ग अंतरालों के मध्य-बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। वर्ग अंतरालों के इन मध्य-बिन्दुओं को **वर्ग-चिह्न (class-marks)** कहा जाता है।

किसी वर्ग अंतराल का वर्ग-चिह्न ज्ञात करने के लिए, हम उस वर्ग अंतराल की उपरि सीमा (upper limit) और निम्न सीमा (lower limit) का योग ज्ञात करते हैं और इस योग को 2 से भाग दे देते हैं। इस तरह,

$$\text{वर्ग-चिह्न} = \frac{\text{उपरि सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$$

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : एक नगर में निर्वाह खर्च सूचकांक (cost of living index) का अध्ययन करने के लिए निम्नलिखित साप्ताहिक प्रेक्षण किए गए :

सारणी 12.6

निर्वाह खर्च सूचकांक	सप्ताहों की संख्या
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
कुल योग	52

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक बारंबारता बहुभुज (आयतचित्र बनाए बिना) खींचिए।

हल : क्योंकि आयतचित्र बनाए बिना हम एक बारंबारता बहुभुज खींचना चाहते हैं, इसलिए आइए हम ऊपर दिए हुए वर्ग अंतरालों, अर्थात् 140 - 150, 150 - 160, ... के वर्ग-चिह्न ज्ञात करें।

वर्ग अंतराल 140 - 150 की उपरि सीमा = 150 और निम्न सीमा = 140 है।

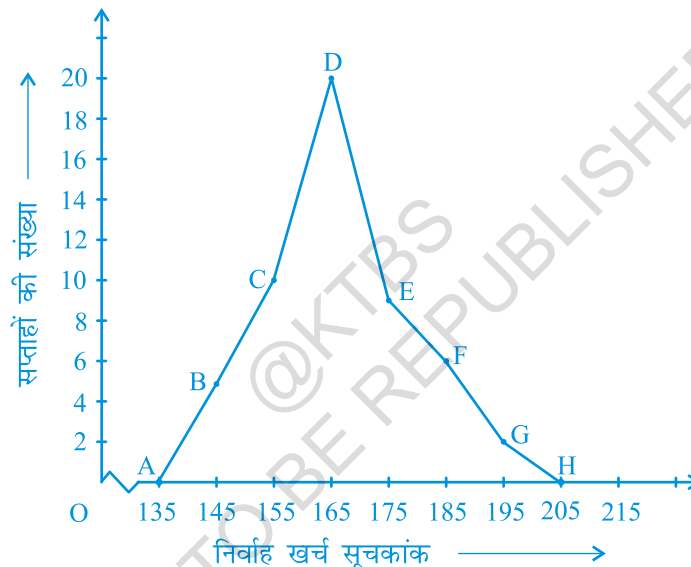
$$\text{अतः, वर्ग-चिह्न} = \frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145$$

इसी प्रकार, हम अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग-चिह्न ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त नई सारणी नीचे दिखाई गई है:

सारणी 12.7

वर्ग	वर्ग-चिह्न	बारंबारता
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
कुल योग		52

अब क्षैतिज अक्ष पर वर्ग-हचह आलेखित करके, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर बारंबारताएँ आलेखित करके और फिर बिन्दुओं B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) और G(195, 2) को आलेखित करके और उन्हें रेखाखंडों से मिलाकर हम बारंबारता बहुभुज खींच सकते हैं। हमें शून्य बारंबारता के साथ वर्ग 130-140 (जो निम्नतम वर्ग 140-150 के ठीक पहले है) के वर्ग चिह्न के संगत बिंदु A(135, 0) को और G(195, 2) के तुरन्त बाद में आने वाले बिंदु H(205, 0) को आलेखित करना भूलना नहीं चाहिए। इसलिए परिणामी बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH होगा (देखिए आकृति 12.8)।



आकृति 12.8

बारंबारता बहुभुज का प्रयोग तब किया जाता है जबकि आंकड़ें संतत और बहुत अधिक होते हैं। यह समान प्रकृति के दो अलग-अलग आंकड़ों की तुलना करने में, अर्थात् एक ही कक्षा के दो अलग-अलग सेक्शन के प्रदर्शनों की तुलना करने में अधिक उपयोगी होता है।

प्रश्नावली 12.1

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15-44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आंकड़े (% में) प्राप्त किए:

क्र. सं.	कारण	महिला मृत्यु दर(%)
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकारी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृदय वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

- (i) ऊपर दी गई सूचनाओं को आलेखीय रूप में निरूपित कीजिए।
- (ii) कौन-सी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?
- (iii) अपनी अध्यापिका की सहायता से ऐसे दो कारणों का पता लगाने का प्रयास कीजिए जिनकी ऊपर (ii) में मुख्य भूमिका रही हो।
2. भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आंकड़े नीचे दिए गए हैं:

क्षेत्र	प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या
अनुसूचित जाति	940
अनुसूचित जनजाति	970
गैर अनुसूचित जाति/जनजाति	920
पिछड़े जिले	950
गैर पिछड़े जिले	920
ग्रामीण	930
शहरी	910

- (i) ऊपर दी गई सूचनाओं को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।
- (ii) कक्षा में चर्चा करके, बताइए कि आप इस आलेख से कौन-कौन से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

3. एक राज्य के विधान सभा के चुनाव में विभिन्न राजनैतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए हैं :

राजनैतिक पार्टी	A	B	C	D	E	F
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

- (i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दंड आलेख खींचिए।
 (ii) किस राजनैतिक पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?
4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ एक मिलीमीटर तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आंकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है :

लंबाई (मिलीमीटर में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

- (i) दिए हुए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।
 (ii) क्या इन्हीं आंकड़ों को निरूपित करने वाला कोई अन्य उपयुक्त आलेख है?
 (iii) क्या यह सही निष्कर्ष है कि 153 मिलीमीटर लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या सबसे अधिक है? क्यों?
5. नीचे की सारणी में 400 नियाँन लैम्पों के जीवन काल दिए गए हैं :

जीवन काल (घंटों में)	लैम्पों की संख्या
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

- (i) एक आयतचित्र की सहायता से दी हुई सूचनाओं को निरूपित कीजिए।
 (ii) कितने लैम्पों के जीवन काल 700 घंटों से अधिक हैं?
6. नीचे की दो सारणियों में प्राप्त किए गए अंकों के अनुसार दो सेक्शनों के विद्यार्थियों का बंटन दिया गया है :

सेक्शन A		सेक्शन B	
अंक	बारंबारता	अंक	बारंबारता
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

दो बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निरूपित कीजिए। दोनों बहुभुजों का अध्ययन करके दोनों सेक्शनों के निष्पादनों की तुलना कीजिए।

7. एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा प्रथम 60 गेंदों में बनाए गए रन नीचे दिए गए हैं:

गेंदों की संख्या	टीम A	टीम B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों टीमों के आंकड़े निरूपित कीजिए।

(संकेत : पहले वर्ग अंतरालों को संतत बनाइए)

8. एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्गों के बच्चों की संख्या का एक यादृच्छिक सर्वेक्षण (random survey) करने पर निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए :

आयु (वर्षों में)	बच्चों की संख्या
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ऊपर दिए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

9. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surname) यदृच्छया लिए गए और उनसे अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारंबारता बंटन प्राप्त किया गया :

वर्णमाला के अक्षरों की संख्या	कुलनामों की संख्या
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

- (i) दी हुई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।
(ii) वह वर्ग अंतराल बताइए जिसमें अधिकतम संख्या में कुलनाम हैं।

12.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदु का अध्ययन किया है:

1. किस प्रकार आंकड़ों को आलेखों, आयतचित्रों तथा बारंबारता बहुभुजों द्वारा आलेखीय रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

गणितीय निदर्शन का परिचय

A2.1 भूमिका

आप प्रारंभिक कक्षाओं से ही, अपने वास्तविक जगत से जुड़ी समस्याएँ हल करते आए हैं। उदाहरण के लिए, आपने साधारण ब्याज के प्रश्न संबंधित सूत्र का प्रयोग करके हल किए हैं। यह सूत्र (या समीकरण) ब्याज और इससे संबंधित अन्य तीन राशियों अर्थात् मूलधन, ब्याज-दर और अवधि के बीच का एक संबंध है। यह सूत्र **गणितीय प्रतिरूप** या **निदर्श (mathematical model)** का एक उदाहरण है। **गणितीय निदर्श (प्रतिरूप)** एक गणितीय संबंध होता है जो वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति की व्याख्या करता है।

गणितीय निदर्शों का प्रयोग वास्तविक जीवन से जुड़ी अनेक स्थितियों का हल ज्ञात करने में किया जाता है, जैसे

- उपग्रह छोड़ना।
- मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।
- वाहनों से होने वाले प्रदूषण को नियंत्रित करना।
- बड़े शहरों में ट्रैफिक जाम को कम करना।

इस अध्याय में, हम आपको गणितीय निदर्श बनाने के प्रक्रम से, जिसे **गणितीय प्रतिरूपण** या **गणितीय निदर्शन (mathematical modelling)** कहा जाता है, परिचित कराएँगे। गणितीय निदर्शन में हम वास्तविक जीवन से जुड़ी एक समस्या लेते हैं और इसे एक तुल्य गणितीय समस्या के रूप में लिखते हैं। फिर हम गणितीय समस्या का हल करते हैं और इसके हल का निर्वचन (की व्याख्या) वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के पदों में करते हैं। इसके बाद, हम देखते हैं कि यह हल वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के संदर्भ में, किस सीमा तक मान्य है। अतः, गणितीय निदर्शन में लागू होने वाले चरण होते हैं: सूत्रण (*formulation*), हल (*solution*), निर्वचन (*व्याख्या*) (*interpretation*) और मान्यकरण (*validation*)।

सबसे पहले हम उस प्रक्रम को लेंगे जिसका प्रयोग आप अनुच्छेद A2.2 में शब्द-समस्याओं को हल करने में करेंगे। यहाँ हम कुछ शब्द-समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो आपके द्वारा पिछली कक्षाओं में हल की गई समस्याओं के समान हैं। बाद में चलकर आप यह देखेंगे कि जिन चरणों का प्रयोग आपने शब्द-समस्याओं को हल करने में किया है, उनमें से कुछ चरणों का प्रयोग गणितीय निदर्शन में भी किया जाता है।

अगले अनुच्छेद अर्थात् A2.3 में हम कुछ सरल निदर्शों (models) पर चर्चा करेंगे।

अनुच्छेद A2.4 में हम निदर्शन के समग्र प्रक्रम (overall process) उसके लाभ और उसकी कुछ सीमाओं पर चर्चा करेंगे।

A2.2 शब्द समस्याओं का पुनर्विलोकन

इस अनुच्छेद में, हम कुछ शब्द-समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो उन समस्याओं के समान हैं जिन्हें आप पिछली कक्षाओं में हल कर चुके हैं। आइए हम सबसे पहले अनुक्रमानुपाती विचरण से संबंधित एक समस्या लें।

उदाहरण 1 : मैंने अपनी कार से 432 km की दूरी तय की और इसमें 48 लीटर पेट्रोल लगा। मुझे अपनी कार से उस स्थान तक जाना है जो 180 km दूर है। इसके लिए मुझे कितने पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ हम इस समस्या को हल करने में प्रयुक्त चरणों का उल्लेख करेंगे।

चरण 1 : सूत्रण : हम जानते हैं कि हम जितनी अधिक दूरी तय करेंगे उतने ही अधिक पेट्रोल की आवश्यकता होती है, अर्थात् पेट्रोल की मात्रा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी।

432 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = 48 लीटर

180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = ?

गणितीय वर्णन : मान लीजिए

x = मेरे द्वारा तय की जाने वाली दूरी

y = मेरे लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा

y, x के अनुक्रमानुपाती है।

अतः,

$y = kx$, जहाँ k एक अचर है।

मैं, 48 लीटर पेट्रोल में 432 km की दूरी तय कर सकता हूँ।

अतः,

$y = 48, x = 432$

इसलिए,

$$k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{ll} \text{क्योंकि} & y = kx \text{ है,} \\ \text{इसलिए} & y = \frac{1}{9}x \end{array} \quad (1)$$

समीकरण (या सूत्र) (1) आवश्यक पेट्रोल की मात्रा और तय की गई दूरी के बीच का संबंध बताती है।

चरण 2 : हल : हमें 180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा ज्ञात करनी है। अतः हमें y का मान ज्ञात करना है, जबकि $x = 180$ है। समीकरण (1) में $x = 180$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

चरण 3 : निर्वचन (व्याख्या) : क्योंकि $y = 20$ है, इसलिए 180 km की दूरी तय करने के लिए हमें 20 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी।

क्या यह बात आपकी समझ में आई है या नहीं कि सभी स्थितियों में सूत्र (1) को लागू नहीं किया जा सकता? उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि 432 km वाला मार्ग पहाड़ों में होकर है और 180 km वाला मार्ग समतल मैदान में है। पहाड़ी मार्ग से तो कार में पेट्रोल की खपत कुछ तेज दर से होगी, परन्तु 180 km वाले मार्ग से कार में पेट्रोल की खपत इस दर से नहीं होगी, अपितु धीमी दर से होगी। अतः यह सूत्र तभी लागू होता है जबकि वे सभी स्थितियाँ जो उस दर को प्रभावित करती हैं जिससे दोनों यात्राओं में पेट्रोल की खपत दर समान हो। या, यदि स्थितियों में अंतर हो, तो कार के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा पर इस अंतर का प्रभाव बहुत कम होगा। केवल ऐसी स्थिति में ही पेट्रोल की खपत तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी। समस्या हल करते समय, हम इसे मान कर चलते हैं, अर्थात् इसे हम परिकल्पित कर लेते हैं।

उदाहरण 2 : मान लीजिए सुधीर ने 8% की साधारण वार्षिक ब्याज दर से ₹ 15000 निवेश किए हैं। निवेश से उसे जो धनराशि मिलती है उससे वह एक वाशिंग मशीन, जिसकी कीमत ₹ 19000 है, खरीदना चाहता है। बताइए कि वह कितनी अवधि के लिए ₹ 15000 निवेश करे जिससे कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए उसे पर्याप्त धनराशि प्राप्त हो जाए?

हल : चरण 1 : समस्या का सूत्रण : यहाँ हमें मूलधन और ब्याज-दर ज्ञात है। ब्याज वह धनराशि है जो कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक ₹ 15000 से अतिरिक्त धनराशि है। हमें वर्षों की संख्या ज्ञात करनी है।

$$\text{गणितीय वर्णन : साधारण ब्याज का सूत्र } I = \frac{Pnr}{100} \text{ है,}$$

जहाँ

$P = \text{मूलधन}$

n = वर्षों की संख्या

$r\%$ = ब्याज-दर

I = अर्जित ब्याज

यहाँ

मूलधन = ₹15000

सुधीर द्वारा वार्षिक मशीन खरीदने के लिए आवश्यक धन = ₹19000

अतः, अर्जित किया जाने वाला ब्याज = ₹19000 – 15000

= ₹4000

वर्षों की वह संख्या जिसमें ₹15000 की राशि जमा की गई है = n

8% की दर पर n वर्षों में ₹15000 पर ब्याज = I

तब,

$$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

अतः,

$$I = 1200n \quad (1)$$

उपरोक्त से वर्षों की संख्या और ब्याज के बीच का संबंध प्राप्त हो जाता है, जबकि 8% की वार्षिक दर पर ₹15000 निवेश किए गए हों।

हमें वह अवधि ज्ञात करना है जिसमें अर्जित ब्याज ₹4000 है। समीकरण (1) में $I = 4000$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$4000 = 1200n \quad (2)$$

चरण 2 : समस्या का हल : समीकरण (2) का हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि $n = 3\frac{1}{3}$ और एक वर्ष का तिहाई 4 महीने होते हैं, इसलिए 3 वर्ष और 4 महीने बाद सुधीर वार्षिक मशीन खरीद सकता है।

क्या आप उन परिकल्पनाओं का अनुमान लगा सकते हैं, जिन्हें आपको ऊपर के उदाहरण में करना है? हम यहाँ यह मान लेते हैं कि उस अवधि में भी ब्याज-दर वही बनी रहेगी जिसमें हम ब्याज परिकलित करते हैं, अन्यथा सूत्र $I = \frac{Pnr}{100}$ लागू नहीं होगा। हमने यह भी मान लिया है कि उस समय तक वार्षिक मशीन की कीमत में कोई वृद्धि नहीं होती, जब तक कि सुधीर आवश्यक धनराशि एकत्रित नहीं कर लेता।

उदाहरण 3 : एक मोटर-बोट एक नदी में ऊर्ध्वप्रवाह (upstream) जाकर, नदी के किनारे बसे दो नगरों के बीच की दूरी छः घंटे में तय करती है। यही दूरी वह अनुप्रवाह (downstream) पाँच घंटे में तय करती है। यदि धारा की चाल 2 km/h हो, तो शांत जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : चरण 1 : सूत्रण : हमें नदी की धारा की चाल और दो स्थानों के बीच की दूरी तय करने का समय ज्ञात है। हमें शांत जल में बोट की चाल ज्ञात करनी है।

गणितीय वर्णन : मान लीजिए बोट की चाल x km/h है, लिया गया समय t घंटा है और तय की दूरी y km/h है। तब,

$$y = tx \quad (1)$$

है। मान लीजिए दो स्थानों के बीच की दूरी d km है।

ऊर्ध्वप्रवाह जाने में बोट की वास्तविक चाल = बोट की चाल – धारा की चाल, क्योंकि बोट नदी के प्रवाह के विरुद्ध जा रही है।

अतः ऊर्ध्वप्रवाह में, बोट की चाल = $(x - 2)$ km/h

यदि यह ऊर्ध्वप्रवाह दो नगरों के बीच की दूरी तय करने में 6 घंटे लेती हो, तो समीकरण (1) से हमें यह प्राप्त होता है:

$$d = 6(x - 2) \quad (2)$$

अनुप्रवाह जाते समय बोट की चाल में नदी की चाल जोड़नी होती है।

अतः अनुप्रवाह में, बोट की चाल = $(x + 2)$ km/h

अनुप्रवाह इसी दूरी को तय करने में बोट 5 घंटा लेती है।

$$\text{अतः,} \quad d = 5(x + 2) \quad (3)$$

(2) और (3) से, हमें यह प्राप्त होता है:

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \quad (4)$$

चरण 2 : हल ज्ञात करना

समीकरण (4) को x में हल करने पर, हमें $x = 22$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : निर्वचन

क्योंकि $x = 22$ है, इसलिए शांत जल में मोटर-बोट की चाल 22 km/h होगी।

ऊपर के उदाहरण में, हम जानते हैं कि हर जगह नदी की चाल समान नहीं होती। किनारे के निकट यह धीरे प्रवाहित होती है और बीच धारा में तेज प्रवाहित होती है। बोट किनारे से चलना प्रारंभ करती है और नदी की बीच धारा की ओर जाती है। जब यह गंतव्य स्थान के निकट आ जाती है, तो इसकी चाल किनारे के निकट आते हुए कम होती जाती है। अतः बीच धारा में बोट की चाल और किनारे पर बोट की चाल में थोड़ा अंतर होता है। क्योंकि यह किनारे के निकट बहुत कम समय तक रहती

है, इसलिए नदी की चाल का यह अंतर केवल थोड़ी अवधि के लिए ही प्रभावित करता है। अतः नदी की चाल में हम इस अंतर की उपेक्षा कर सकते हैं। बोट की चाल में हुए थोड़े परिवर्तन की भी हम उपेक्षा कर सकते हैं। साथ ही, नदी की चाल के अतिरिक्त पानी (जल) और बोट की सतह के बीच का घर्षण भी बोट की वास्तविक चाल को प्रभावित करेगा। यहाँ भी हम यह मान लेते हैं कि यह प्रभाव बहुत कम है।

अतः यहाँ हम यह मान लेते हैं कि:

1. नदी की चाल और बोट की चाल पूरे समय अचर बनी रहती है।
2. बोट और पानी के बीच का घर्षण और वायु के कारण हो रहा घर्षण उपेक्षणीय है।

ऊपर की गई परिकल्पनाओं के आधार पर, हमने शांत जल में बोट की चाल ज्ञात की है।

जैसा कि ऊपर दी गई शब्द-समस्याओं में हमने देखा है कि एक शब्द-समस्या का हल करने में तीन चरण लागू होते हैं। ये चरण निम्नलिखित हैं :

1. **सूत्रण** : हम समस्या का विश्लेषण करते हैं और देखते हैं कि समस्या के हल में कौन-कौन से कारकों का अधिक प्रभाव है। ये **सुसंगत कारक (relevant factors)** कहलाते हैं। हमारे पहले उदाहरण में, सुसंगत कारक तय की गई दूरी और खपत किया गया पेट्रोल है। हमने मार्ग की अवस्था, चलाने की चाल जैसे अन्य कारकों की उपेक्षा कर ली है। अन्यथा समस्या इतनी कठिन हो जाएगी कि इसे हल करना अधिक कठिन हो जाएगा। जिन कारकों की हम उपेक्षा कर देते हैं, उन्हें **असंगत कारक (irrelevant factors)** कहा जाता है।

तब हम एक या अधिक गणितीय समीकरणों के रूप में समस्या की गणितीयतः व्याख्या करते हैं।

2. **हल** : कुछ उपयुक्त विधियों की सहायता से चरण 1 में प्राप्त गणितीय समीकरणों को हल करके, हम समस्या का हल ज्ञात करते हैं।
3. **निर्वचन** : हम देखते हैं कि चरण 2 में प्राप्त हल का अर्थ मूल शब्द-समस्या के संदर्भ में क्या है।

यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं। इन प्रश्नों के लिए ऊपर बताए गए तीन चरणों को लागू करके शब्द-समस्याओं को हल करने में जिन चरणों का प्रयोग किया जाता है, उन्हें आपने समझा है या नहीं। इसकी जाँच आप कर सकते हैं।

प्रश्नावली A 2.1

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में स्पष्ट रूप से बताइए कि ऊपर दिए गए चरणों 1, 2 और 3 को लागू करने में सुसंगत और असंगत कौन-कौन से कारक हैं।

1. मान लीजिए एक कंपनी को कुछ समय के लिए एक कंप्यूटर की आवश्यकता है। कंपनी या तो ₹ 2000 प्रति माह की दर से कंप्यूटर किराए पर ले सकती है या ₹ 25000 में एक

- कंप्यूटर खरीद सकती है। यदि कंपनी को लंबी अवधि तक कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो कंपनी को इतना किराया देना पड़ेगा कि इससे सस्ता तो यह होगा कि वह कंप्यूटर खरीद ले। इसके विपरीत, यदि कंपनी को थोड़े समय, अर्थात् केवल एक महीने के लिए ही कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो ऐसी स्थिति में किराए पर कंप्यूटर लेना अधिक सस्ता पड़ेगा। उन महीनों की संख्या बताइए जिसके बाद कंप्यूटर को खरीदना अधिक सस्ता पड़ेगा।
- मान लीजिए एक कार स्थान A से चलना प्रारंभ करती है और वह एक अन्य स्थान B की ओर 40 km/h की चाल से जाती है। उसी समय एक अन्य कार स्थान B से चलना प्रारंभ करती है और वह A की ओर 30 km/h की चाल से जाती है। यदि A और B के बीच की दूरी 100 km है, तो बताइए कि कितने समय बाद एक कार दूसरी कार से मिलेगी।
 - पृथ्वी से चंद्रमा लगभग 384000 km की दूरी पर है और पृथ्वी के प्रति परिक्रमा करने का पथ लगभग वृत्तीय है। यह मानकर कि चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा 24 घंटे में पूरा करता है, बताइए कि किस चाल से चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा करेगा। ($\pi = 3.14$ लीजिए)
 - एक परिवार उन महीनों में, जिनमें वह वाटर हीटर का प्रयोग नहीं करता, बिजली के लिए औसतन ₹ 1000 भुगतान करता है। जिन महीनों में वह वाटर हीटर का प्रयोग करता है, उन महीनों में बिजली का औसत बिल ₹ 1240 आता है। वाटर हीटर का प्रयोग करने की लागत ₹ 8 प्रति घंटा है। एक दिन में वाटर हीटर का प्रयोग जितने औसत घंटों के लिए किया जाता है उसे ज्ञात कीजिए।

A2.3 कुछ गणितीय निदर्श

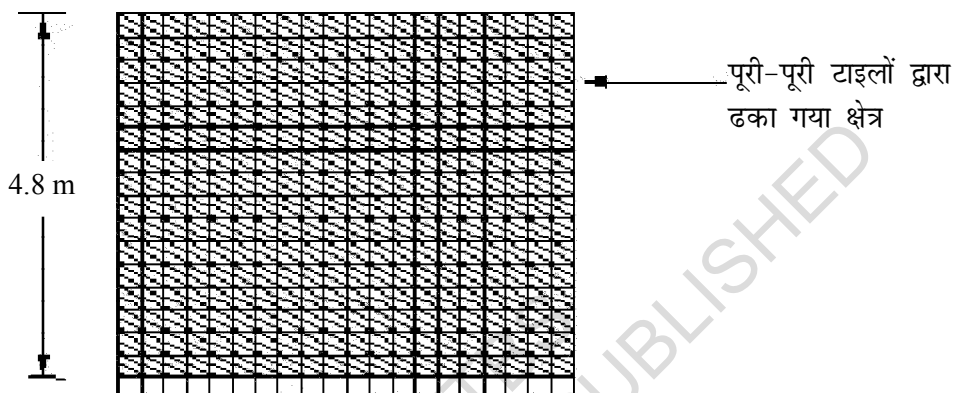
अभी तक अपनी चर्चा में हमने कोई नई बात नहीं कही है। इस अनुच्छेद में, हम पहले बताए गए चरणों में एक और चरण बढ़ा देंगे। इस चरण को **मान्यकरण (validation)** कहा जाता है। मान्यकरण का अर्थ क्या है? आइए हम देखें कि इसका अर्थ क्या है। वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में, हम उस निदर्श को स्वीकार नहीं कर सकते जिससे प्राप्त उत्तर वास्तविकता से मेल नहीं खाता हो। वास्तविकता के विरुद्ध उत्तर की जाँच करने और यदि आवश्यक हो तो, गणितीय वर्णन में आपरिवर्तन करने के इस प्रक्रम को **मान्यकरण** कहा जाता है।

यह निदर्शन का एक अति महत्वपूर्ण चरण है। इस अनुच्छेद में, हम आपको इस चरण से परिचित कराएँगे।

इस संदर्भ में आइए पहले हम एक उदाहरण लें, जहाँ हमें मान्यकरण के बाद अपने निदर्श का आपरिवर्तन (modification) करने की आवश्यकता नहीं होती।

उदाहरण 4 : मान लीजिए आपके पास 6 मीटर लंबा और 5 मीटर चौड़ा एक कमरा है। आप इस कमरे के फर्श पर 30 cm की भुजा वाली वर्गाकार मोजाइक टाइलों को लगवाना चाहते हैं। इसके लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी? एक गणितीय निदर्श बनाकर इसे हल कीजिए।

हल : सूत्रण : इस समस्या को हल करने के लिए, हमें कमरे का क्षेत्रफल और एक टाइल का क्षेत्रफल लेना होता है। टाइल की एक भुजा की लंबाई 0.3 मीटर है। क्योंकि कमरे की लंबाई 6 मीटर है, इसलिए कमरे की लंबाई के अनुदिश एक पंक्ति में $\frac{6}{0.3} = 20$ टाइलें लगाई जा सकती हैं (देखिए आकृति A2.1)।



आकृति A2.1

क्योंकि कमरे की चौड़ाई 5 मीटर है, और $\frac{5}{0.3} = 16.67$ है, अतः, एक स्तंभ में हम 16 टाइलें लगा सकते हैं। क्योंकि $16 \times 0.3 = 4.8$ है, इसलिए चौड़ाई के अनुदिश $5 - 4.8 = 0.2$ मीटर स्थान पर टाइलें नहीं लगी होंगी। इस भाग में (खाली स्थान में) साइज के अनुसार टाइलों को काटकर लगाना होगा। टाइल से बिना ढके फर्श की चौड़ाई 0.2 मीटर है, जो टाइल की लंबाई 0.3 m के आधे से अधिक है। अतः, हम एक टाइल को दो बराबर-बराबर आधे भागों में नहीं बाँट सकते और शेष भाग को ढकने के लिए दोनों आधे भागों का प्रयोग नहीं कर सकते।

गणितीय वर्णन:

आवश्यक टाइलों की कुल संख्या = (लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या $\times$ चौड़ाई में टाइलों की संख्या) + बिना ढके हुए क्षेत्र पर टाइलों की संख्या (1)

हल : जैसा कि हम ऊपर कह चुके हैं कि लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 20 है और चौड़ाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 16 है। अंतिम पंक्ति के लिए, हमें 20 और टाइलों की आवश्यकता होगी। इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$$

निर्वचन : फर्श पर लगाने के लिए 340 टाइलों की आवश्यकता होगी।

मान्यकरण : व्यावहारिक जीवन में आपका मिस्त्री आपसे कुछ और टाइल मांग सकता है, क्योंकि साइज के अनुसार काटते समय टाइलें टूट-फूट गई थीं। आपका मिस्त्री इस काम में कितना कुशल है उस पर ही टाइलों की संख्या निर्भर करेगी। परन्तु, इसके लिए समीकरण (1) का आपरिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं है। इससे हमें एक स्थूल अनुमान (rough estimate) मिल जाता है कि कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी। अतः, यहाँ हम रुक सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति लें।

उदाहरण 5 : वर्ष 2000 में संयुक्त राष्ट्र के 191 सदस्य देशों ने एक घोषणा पर हस्ताक्षर किए। अपनी घोषणा में ये सभी देश, वर्ष 2015 तक कुछ विकास लक्ष्य प्राप्त करने पर सहमत थे। इन लक्ष्यों को *मिलेनियम विकास लक्ष्य* कहा जाता है। इनमें से एक लक्ष्य लिंग समानता को बढ़ाना है। यह लक्ष्य प्राप्त कर लिया गया है कि नहीं, इसका एक सूचक प्राथमिक, माध्यमिक और तृतीयक (tertiary) शिक्षा में लड़कियों और लड़कों का अनुपात है। भारत में, जो कि घोषणा पर हस्ताक्षर करने वाला एक सदस्य देश है, इस अनुपात में वृद्धि हुई है। उन लड़कियों के प्रतिशत आंकड़े, जिन्होंने विद्यालय में प्रवेश लिया है, सारणी A 2.1 में दिए गए हैं।

सारणी A 2.1

वर्ष	नामांकन (% में)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

स्रोत : शैक्षिक आंकड़े, वेब पेज, शिक्षा विभाग भारत सरकार

* बताता है कि आंकड़े अनंतिम हैं।

इन आंकड़ों का प्रयोग करके, गणितीय रूप में वह दर बताइए जिस अनुपात पर प्राथमिक विद्यालयों में भर्ती की गई लड़कियों की संख्या बढ़ रही है। उस वर्ष का भी अनुमान लगाइए जबकि भर्ती की गई लड़कियों की संख्या 50% तक पहुँच जाएगी।

हल : आइए पहले हम इस समस्या को एक गणितीय समस्या में बदल दें।

चरण 1 : सूत्रण : सारणी A2.1 में वर्ष 1991-92, 1992-93 आदि के नामांकन दिए गए हैं। क्योंकि विद्यार्थी शैक्षिक वर्ष के प्रारंभ में प्रवेश लेते हैं, इसलिए हम वर्षों को 1991, 1992 आदि ले सकते हैं। आइए हम यह मान लें कि प्राथमिक विद्यालयों में प्रवेश लेने वाली लड़कियों के प्रतिशत में उसी दर से वृद्धि होती रहती है जैसा कि सारणी A2.1 में दिया गया है। अतः विशिष्ट वर्ष का महत्व नहीं है, अपितु वर्षों की संख्या का महत्व है (इसी प्रकार की स्थिति तब थी जबकि 8% की दर से तीन वर्षों के लिए ₹ 15000 का साधारण ब्याज ज्ञात किया था। यहाँ इस बात का कोई महत्व नहीं है कि तीन वर्ष की अवधि 1999 से 2003 है या 2001 से 2004 है (महत्वपूर्ण है वर्षों में ब्याज दर का होना)। यहाँ भी, हम यह देखेंगे कि 1991 के बाद नामांकन में किस प्रकार वृद्धि हुई है। ऐसा हम 1992 के बाद बीत गए वर्षों की संख्या और संगत नामांकन की तुलना द्वारा करेंगे। आइए हम 1991 को 0 वाँ वर्ष मान लें और 1992 के लिए 1 लिखें, क्योंकि 1991 के बाद 1992 तक 1 वर्ष निकल गया है। इसी प्रकार, 1993 के लिए 2, 1994 के लिए 3 आदि लिखेंगे। अतः, अब सारणी A2.1, सारणी A 2.2 के समान दिखाई पड़ेगी।

सारणी A2.2

वर्ष	नामांकन (% में)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

नामांकन में हुई वृद्धि नीचे सारणी में दी गई है:

सारणी A2.3

वर्ष	नामांकन (% में)	वृद्धि
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 से 1992 तक की एक वर्ष की अवधि में नामांकन 41.9% से बढ़कर 42.6% तक हो गया। अर्थात् नामांकन में 0.7% की वृद्धि हुई है। दूसरे वर्ष के अंत में, इसमें 0.1% की वृद्धि हुई है अर्थात् यह 42.6% से बढ़कर 42.7% हो गया है। ऊपर की सारणी से, हम वर्षों की संख्या और प्रतिशत में कोई निश्चित संबंध प्राप्त नहीं कर सकते। परन्तु वृद्धि अपरिवर्ती बनी रहती है। केवल पहले वर्ष में और दसवें वर्ष में अधिक वृद्धि हुई है। इन मानों का माध्य यह है:

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

आइए हम यह मान लें कि नामांकन में अपरिवर्ती रूप से (steadily) 0.22 प्रतिशत की दर से वृद्धि हो रही है।

गणितीय वर्णन : हमने यह मान लिया है कि नामांकन में 0.22% प्रति वर्ष की दर से अपरिवर्ती रूप से वृद्धि हो रही है।

अतः, पहले वर्ष में नामांकन प्रतिशत (EP) = $41.9 + 0.22$

दूसरे वर्ष में, EP = $41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तीसरे वर्ष में, EP = $41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

अतः, n वें वर्ष में नामांकन प्रतिशत = $41.9 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ है।

(1)

अब, हमें वर्षों की वह संख्या भी ज्ञात करनी है जिसमें नामांकन 50% पहुँच जाएगा। अतः हमें निम्नलिखित समीकरण से n का मान ज्ञात करना है:

$$50 = 41.9 + 0.22n \quad (2)$$

चरण 2 : हल : n के लिए (2) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि वर्षों की संख्या एक पूर्णांकीय मान है, इसलिए हम अगला उच्च पूर्णांक 37 लेंगे। अतः, $1991 + 37 = 2028$ में नामांकन प्रतिशत 50% हो जाएगा।

शब्द-समस्या को तो प्रायः हम यहीं तक हल करते हैं। लेकिन, चूँकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति पर अध्ययन कर रहे हैं, इसलिए हमें यह देखना होगा कि किस सीमा तक यह मान वास्तविक स्थिति से मेल खाता है।

चरण 4 : मान्यकरण : आइए हम यह देखें कि सूत्र (2) वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। आइए हम सूत्र (2) का प्रयोग करके ज्ञात वर्षों के मान ज्ञात करें और अंतर ज्ञात करके, ज्ञात मानों के साथ इनकी तुलना करें। सारणी A2.4 में ये मान दिए गए हैं।

सारणी A2.4

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) द्वारा दिए गए मान (% में)	अंतर (% में)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

जैसा कि आप देख सकते हैं कि सूत्र (2) द्वारा दिए गए कुछ मान वास्तविक मान से लगभग 0.3% से 0.5% तक कम हैं। इससे लगभग 3 से 5 वर्षों का अंतर आ सकता है, क्योंकि वास्तव में प्रति वर्ष वृद्धि 1% से 2% तक है। इतना अंतर स्वीकार्य हो सकता है और हम यहीं रुक सकते हैं। इस स्थिति में, हमारा गणितीय निदर्श (2) है।

मान लीजिए कि यह त्रुटि काफी बड़ी है और हमें इस निदर्श में सुधार लाना है। तब हमें चरण 1 पर पुनः लौटकर जाना होगा, पुनः सूत्रण करना होगा और समीकरण (1) को बदलना होगा। आइए हम इसे करें।

चरण 1 : पुनःसूत्रण : हम यहाँ भी यह मान लेंगे कि नामांकन प्रतिशत के मानों में अपरिवर्ती रूप से 0.22% की वृद्धि हो रही है। परन्तु यहाँ अब हम त्रुटि को कम करने के लिए एक संशुद्धि गुणक (correction factor) का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हम सभी त्रुटियों का माध्य ज्ञात करते हैं। माध्य यह है:

$$\frac{0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

हम त्रुटियों का माध्य लेते हैं और इस मान से अपने त्रुटि को संशुद्ध करते हैं।

संशोधित गणितीय वर्णन : आइए अब हम (1) में दिए गए नामांकन प्रतिशत के लिए अपने सूत्र में त्रुटियों का माध्य जोड़ दें। अतः, हमारा संशोधित सूत्र यह हो जाएगा:

$$n\text{वें वर्ष में प्रतिशत नामांकन} = 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n, \text{ जहाँ } n \geq 1 \quad (3)$$

हम अपने समीकरण (2) में भी उपयुक्तरूप से आपरिवर्तन करेंगे। n में हमारा नया समीकरण यह होगा:

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad (4)$$

चरण 2 : परिवर्तित हल : n के लिए समीकरण (4) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि $n = 36$ है, इसलिए वर्ष $1991 + 36 = 2027$ में प्राथमिक विद्यालयों में लड़कियों का नामांकन 50% तक पहुँच जाएगा।

चरण 4 : मान्यकरण : आइए हम पुनः सूत्र (4) की सहायता से प्राप्त मानों की तुलना वास्तविक मानों से करें। सारणी A2.5 में मानों की यह तुलना दी गई है।

सारणी A 2.5

वर्ष	नामांकन (% में)	(2) द्वारा दिए गए मान	मानों के बीच का अंतर	(4) द्वारा दिए गए मान	मानों के बीच का अंतर
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	-0.18

जैसा कि आप देख सकते हैं कि (2) से प्राप्त मानों की तुलना में (4) से प्राप्त अनेक मान वास्तविक मान के अधिक निकट हैं। इस स्थिति में त्रुटियों का माध्य 0 है।

हम अपने प्रक्रम को यहीं रोक देंगे। अतः, समीकरण (4) हमारा गणितीय वर्णन है जो कि वर्षों और कुल नामांकन में लड़कियों के प्रतिशत नामांकन के बीच का गणितीय संबंध स्थापित करता है। हमने एक गणितीय निदर्श का निर्माण किया है, जो वृद्धि की व्याख्या करता है।

वह प्रक्रम, जिसका हमने ऊपर की स्थिति में अनुसरण किया है, उसे गणितीय निदर्शन (mathematical modelling) कहा जाता है।

हमने उपलब्ध गणितीय साधनों से एक गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रयास किया है। उपलब्ध आंकड़ों से प्रागुक्तियाँ करने के उत्तम गणितीय साधन भी उपलब्ध हैं। परन्तु वे इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं। इस निदर्श को बनाने का हमारा उद्देश्य आपको निदर्शन प्रक्रम से परिचित कराना है, न कि इस चरण पर परिशुद्ध प्रागुक्तियाँ (accurate predictions) करना।

आप अभी तक की गई चर्चा को कितना समझ पाए हैं इसके लिए हम चाहेंगे कि आप वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ स्थितियों का निदर्शन करें। यहाँ आपके लिए एक प्रश्नावली दी जा रही है।

प्रश्नावली A 2.2

1. ओलंपिक खेलों में जबसे 400 मीटर की दौड़ शुरू हुई है तब से स्वर्ण पदक पाने वालों का समय नीचे की सारणी में दिया गया है। वर्षों और समयों से संबंधित एक गणितीय निदर्श बनाइए। इसका प्रयोग अगले ओलंपिक में लगने वाले समय का आकलन करने में कीजिए:

सारणी A 2.6

वर्ष	समय (सेकंडों में)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A 2.4 निदर्शन प्रक्रम, इसके लाभ और इसकी सीमाएँ

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के उन पहलुओं पर विचार करते हुए, जिन्हें हमने प्रस्तुत उदाहरणों में दिखाया है, अपनी चर्चा यहीं समाप्त करें। पिछले अनुच्छेदों की पृष्ठभूमि से, अब हम इस स्थिति में आ गए हैं कि हम निदर्शन में प्रयुक्त होने वाले चरणों का एक संक्षिप्त परिदृश्य दे सकें।

चरण 1 : सूत्रण : अनुच्छेद A 2.2 के उदाहरण 1 के सूत्रण चरण और A 2.3 में चर्चित निदर्श के सूत्रण चरण के बीच के अंतर की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा। उदाहरण 1 में सभी सूचनाएँ तुरंत उपयोगी रूप में हैं। परन्तु A 2.3 में दिए गए निदर्श में ऐसा नहीं है। साथ ही, एक गणितीय वर्णन प्राप्त करने में कुछ समय भी लगा था। हमने अपने पहले सूत्र की जाँच की है, जिसमें पाया कि यह उतना उत्तम नहीं है, जितना कि दूसरा था। व्यापक रूप में, यह प्रायः सत्य होता है। अर्थात् उस स्थिति में जबकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों का निदर्शन करने का प्रयास कर रहे होते हैं, इसमें प्रायः पहले निदर्श को संशोधित करने की आवश्यकता होती है। जब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी

समस्या हल कर रहे होते हैं, तो सूत्रण करने में काफी समय लग सकता है। उदाहरण के लिए, न्यूटन के तीन गति-नियम, जो कि गति के गणितीय वर्णन हैं, के कथन सरलता से दिए जा सकते हैं। परन्तु इन नियमों तक पहुँचने के लिए उसे काफी मात्रा में आंकड़ों का अध्ययन करना पड़ा था और उन कार्यों की ओर ध्यान देना पड़ा था जो कि उसके पूर्व के वैज्ञानिकों ने किए थे।

सूत्रण में निम्नलिखित तीन चरण लागू करने होते हैं:

- (i) **समस्या का कथन** : प्रायः समस्या का कथन स्थूल रूप से दिया जाता है। उदाहरण के लिए, हमारा स्थूल लक्ष्य तो यह सुनिश्चित करना है कि लड़कों और लड़कियों के नामांकन बराबर हैं। इसका अर्थ यह हो सकता है कि विद्यालय जाने वाले आयु के लड़कों की कुल संख्या का 50% और विद्यालय जाने वाली आयु की लड़कियों की कुल संख्या का 50% नामांकित होनी चाहिए। एक अन्य विधि यह है कि यह सुनिश्चित किया जाय कि विद्यालय जाने वाले बच्चों में से 50% लड़कियाँ हैं। हमने अपनी समस्या में दूसरे दृष्टिकोण को अपनाया है।
- (ii) **सुसंगत कारकों को पहचानना** : पहले यह निर्णय लीजिए कि हमारी समस्या में कौन-कौन सी राशियाँ और संबंध महत्वपूर्ण हैं और कौन-कौन महत्वपूर्ण नहीं हैं, जिनकी उपेक्षा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, प्राथमिक विद्यालयों में नामांकन संबंधी हमारी समस्या में पिछले वर्ष में नामांकित लड़कियों का प्रतिशत इस वर्ष नामांकित लड़कियों की संख्या को प्रभावित कर सकता है। ऐसा इसलिए है कि विद्यालय में जैसे-जैसे और लड़कियाँ नामांकित होती जाती हैं वैसे-वैसे उनके माता-पिता अनुभव करने लगेंगे कि वे अपनी लड़कियों को भी विद्यालय में भर्ती कराएं। परन्तु, हमने इस कारक की उपेक्षा कर दी है, क्योंकि एक निश्चित प्रतिशत से अधिक नामांकन हो जाने के बाद ही यह महत्वपूर्ण हो सकता है। साथ ही, इस कारक को बढ़ा देने के बाद निदर्श और अधिक जटिल हो सकता है।
- (iii) **गणितीय वर्णन** : आइए अब हम यह मान लें कि हमें यह स्पष्ट हो गया है कि समस्या क्या है और इसका कौन-सा पहलू अन्य पहलुओं से अधिक सुसंगत है। तब हमें एक समीकरण, एक आलेख या अन्य उपयुक्त गणितीय वर्णन के रूप में निहित पहलुओं के बीच का संबंध ज्ञात करना होता है। यदि यह एक समीकरण है, तो हमारे गणितीय समीकरण में प्रत्येक महत्वपूर्ण पहलू को एक चर से निरूपित करना चाहिए।

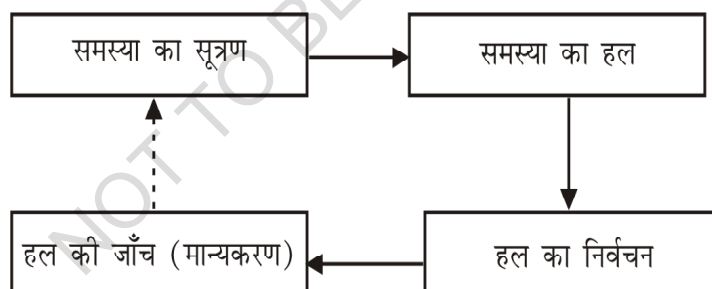
चरण 2 : हल ज्ञात करना : गणितीय सूत्रण से हल प्राप्त नहीं होता। हमें समस्या के इस गणितीय तुल्य को हल करना होता है। यही वह स्थल है जहाँ हमारा गणितीय ज्ञान उपयोगी सिद्ध होता है।

चरण 3 : हल का निर्वचन : गणितीय हल निदर्श के चरों के कुछ मान होते हैं। हमें वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या को पुनः लेना होगा और यह देखना होगा कि समस्या में इन मानों का क्या अर्थ है।

चरण 4 : हल का मान्यकरण : जैसा कि हमने A2.3 में यह देखा कि हल ज्ञात करने के बाद, हमें यह देखना होगा कि हल वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। यदि यह मेल खाता है, तो गणितीय निदर्श स्वीकार्य होता है। यदि गणितीय हल मेल नहीं खाता, तो हमें सूत्रण चरण पर पुनः आ जाएँ और हम अपने निदर्श में सुधार लाने का प्रयास करें।

प्रक्रम के इस चरण में शब्द-समस्याओं को हल करने और गणितीय निदर्शन के बीच एक बड़ा अंतर होता है। निदर्शन में यह एक अति महत्वपूर्ण चरण है जो कि शब्द-समस्याओं में नहीं होता है। हाँ, यह संभव है कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में हमें अपने उत्तर का मान्यकरण करने की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि समस्या सरल है और हमें सीधे सही हल प्राप्त हो जाता है। अनुच्छेद A2.3 में लिए गए निदर्श में ऐसा ही था।

हमने उस क्रम का संक्षिप्त विवरण दिया है जिसमें नीचे दी गई आकृति A2.2 में गणितीय निदर्शन के चरण लागू किए गए हैं। मान्यकरण चरण से सूत्रण चरण की ओर जाने को **बिंदुंकित तीर** से दिखाया गया है। ऐसा इसलिए किया गया है कि हो सकता है इस चरण को पुनः लागू करना आवश्यक न भी हो।



आकृति A2.2

अब, क्योंकि आपने गणितीय निदर्शन से संबंधित चरणों का अध्ययन कर लिया है, इसलिए आइए हम इसके कुछ पहलुओं पर चर्चा कर लें।

गणितीय निदर्शन का उद्देश्य वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के बारे में, उसे गणितीय समस्या में रूपांतरित करके कुछ उपयोगी सूचनाएँ प्राप्त करना है। यह विशेष रूप से तब उपयोगी होता है जबकि सीधे प्रेक्षण करके या प्रयोग करने जैसे अन्य साधनों से सूचना प्राप्त करना या तो संभव न हो या बहुत खर्चीला हो।

आपको यह जानकर भी आश्चर्य हो सकता है कि हमें गणितीय निदर्शन का प्रयोग क्यों करना चाहिए? आइए हम निदर्शन के लाभ पर कुछ चर्चा करें। मान लीजिए हम ताजमहल पर मथुरा रिफाइनरी के विसर्जन के संक्षारक प्रभाव पर अध्ययन करना चाहते हैं। हम ताजमहल पर सीधे प्रयोग नहीं करना चाहेंगे, क्योंकि ऐसा करना सुरक्षित नहीं होगा। वास्तव में, हम इस संबंध में ताजमहल का एक छोटा मॉडल ले सकते हैं। परन्तु इसके लिए हमें विशिष्ट सुविधाओं की आवश्यकता हो सकती है, जोकि काफी खर्चीली हो सकती है। यही वह स्थल है जहाँ गणितीय निदर्शन काफी उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

मान लीजिए हम यह ज्ञात करना चाहते हैं कि 5 साल बाद कितने प्राथमिक विद्यालयों की आवश्यकता होगी। तब हम एक गणितीय निदर्श का प्रयोग करके, यह समस्या हल कर सकते हैं। इसी प्रकार, केवल निदर्शन करके वैज्ञानिकों ने अनेक परिघटनाओं की व्याख्या की है।

अनुच्छेद A2.4 में आपने यह देखा है कि उत्तम विधियों को लागू करके दूसरे उदाहरण में हम उत्तर में सुधार लाने का प्रयास कर सकते थे। लेकिन हम वहीं रुक गए, क्योंकि हमारे पास कोई गणितीय साधन उपलब्ध नहीं है। ऐसी स्थिति वास्तविक जीवन में भी हो सकती है। प्रायः हमें सन्निकट उत्तरों से ही संतुष्ट हो जाना पड़ता है, क्योंकि गणितीय साधन उपलब्ध नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए, मौसम के निदर्शन में प्रयुक्त निदर्श समीकरण इतने जटिल होते हैं कि यथा स्थिति हल ज्ञात करने के गणितीय साधन उपलब्ध नहीं हैं।

आप आश्चर्य कर सकते हैं कि किस सीमा तक हमें अपने निदर्श में सुधार लाना चाहिए। इसमें सुधार लाने के लिए, प्रायः हमें अन्य कारकों को भी ध्यान में रखने की आवश्यकता होती है। जब हम ऐसा करते हैं, तब हम अपने गणितीय समीकरणों में और चर बढ़ा देते हैं। तब हमें एक अति जटिल निदर्श प्राप्त हो सकता है, जिसका प्रयोग करना कठिन होगा। निदर्श इतना सरल होना चाहिए कि उसका प्रयोग किया जा सके। एक उत्तम निदर्श दो कारकों को संतुलित करता है:

1. परिशुद्धता (accuracy), अर्थात् यह वास्तविकता से कितना निकट है।
2. प्रयोग की सरलता

उदाहरण के लिए, न्यूटन के गति के नियम काफी सरल, परन्तु इतने शक्तिशाली हैं कि इससे अनेक भौतिक स्थितियों का निदर्शन किया जा सकता है।

अतः, क्या गणितीय निदर्शन सभी समस्याओं का उत्तर है, बिल्कुल नहीं! इसकी अपनी सीमाएँ हैं।

अतः यह बात हमें अपने मस्तिष्क में रखना चाहिए कि निदर्श वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या का केवल एक सरलीकरण है और ये दोनों समान नहीं होते। यह बहुत कुछ उस अंतर के समान है जो किसी देश के भौतिक लक्षणों को दर्शाने वाले मानचित्र और स्वयं उस देश में होता है। इस मानचित्र से हम समुद्र तल से एक स्थान की ऊँचाई तो ज्ञात कर सकते हैं परन्तु हम यहाँ के लोगों के अभिलक्षणों के बारे में कुछ ज्ञात नहीं कर सकते। अतः हमें निदर्श का प्रयोग केवल उद्देश्य को ध्यान में रखकर करना चाहिए और यह भी ध्यान रखना होता है कि इसका निर्माण करते समय हमने किन-किन कारकों की उपेक्षा कर दी है। हमें निदर्श का प्रयोग केवल लागू होने वाली सीमाओं के अंदर ही करनी चाहिए। आगे की कक्षाओं में हम इस पहलू पर कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे।

प्रश्नावली A 2.3

1. आपकी पाठ्य पुस्तक में दी गई शब्द-समस्याओं को हल करने में और गणितीय निदर्शन के प्रक्रम में क्या अंतर है?
2. मान लीजिए आप चौराहे पर खड़े वाहनों के प्रतीक्षा-काल को कम-से-कम करना चाहते हैं। निम्नलिखित कारकों में कौन-से कारक महत्वपूर्ण हैं और कौन-से कारक महत्वपूर्ण नहीं हैं?
 - (i) पेट्रोल की कीमत।
 - (ii) वह दर जिससे चार अलग-अलग सड़कों से आने वाले वाहन चौराहे पर पहुँचते हैं।
 - (iii) साइकिल और रिक्शा आदि जैसी धीमी गति से चलने वाले वाहनों और कार तथा मोटर साइकिल जैसी तेज गति से चलने वाले वाहनों का अनुपात।

A 2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. शब्द-समस्याओं को हल करने में प्रयुक्त चरणों का पुनर्विलोकन करना।
2. कुछ गणितीय निदर्शों का निर्माण करना।
3. गणितीय निदर्शन में प्रयुक्त नीचे बॉक्स में दिए गए चरणों पर चर्चा:

1. सूत्रण :

- (i) समस्या का कथन लिखना
- (ii) सुसंगत कारकों को पहचानना
- (iii) गणितीय वर्णन

2. हल ज्ञात करना

3. वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के संदर्भ में हल का निर्वचन
4. यह देखना कि किस सीमा तक निदर्श अध्ययन की जा रही समस्या का एक उत्तम निरूपण है।

4. गणितीय निदर्शन का उद्देश्य, लाभ और सीमाएँ।

उत्तर/संकेत

प्रश्नावली 7.1

1. ये बराबर हैं
6. $\angle BAC = \angle DAE$

प्रश्नावली 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$
7. प्रत्येक 45° का है।

प्रश्नावली 7.3

3. (ii), (i) से $\angle ABM = \angle PQN$

प्रश्नावली 8.1

3. (i) $\triangle DAC$ और $\triangle BCA$ से यह दिखाइए कि $\angle DAC = \angle BCA$ और $\angle ACD = \angle CAB$, आदि।
(ii) प्रमेय 8.4 की सहायता से यह दिखाइए कि $\angle BAC = \angle BCA$.

प्रश्नावली 8.2

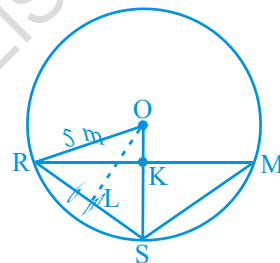
2. दिखाइए कि PQRS एक समांतर चतुर्भुज है। यह भी दिखाइए कि $PQ \parallel AC$ और $PS \parallel BD$ है। इसलिए $\angle P = 90^\circ$ है।
5. AECF एक समांतर चतुर्भुज है। अतः $AF \parallel CE$ आदि।

प्रश्नावली 9.1

1. सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ लेकर ठीक-ठीक प्रमेय 10.1 की भाँति सिद्ध कीजिए।
2. SAS सर्वांगसम-अभिगृहीत की सहायता से दिए गए दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाइए।

प्रश्नावली 9.2

- 6 cm; पहले यह दिखाइए कि केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा छोटे वृत्त की त्रिज्या पर लंब है और तब यह दिखाइए कि उभयनिष्ठ जीवा छोटे वृत्त का व्यास है।
- यदि एक वृत्त जिसका केन्द्र O है की दो समान जीवाएँ AB तथा CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं, $OM \perp AB$ और $OM \perp CD$ खींचिए और OE को मिलाइए। दिखाइए कि समकोण $\triangle OME$ और $\triangle ONE$ सर्वांगसम है।
- उदाहरण 2 की भाँति हल कीजिए।
- $OM \perp AD$ खींचिए।
- रेशमा, सलमा और मंदीप को क्रमशः बिन्दु R, S और M द्वारा दर्शाइए। माना $KR = x$ m (आकृति देखिए)
 $\triangle ORS$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times x \times 5$
 साथ ही, $\triangle ORS$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$
 x का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार आप RM का मान भी ज्ञात कर सकते हैं।
- समबाहु त्रिभुज के गुण तथा पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कीजिए।



प्रश्नावली 9.3

- 45°
- $150^\circ, 30^\circ$
- 10°
- 80°
- 110°
- $\angle BCD = 80^\circ$ और $\angle ECD = 50^\circ$

8. CD पर लंब AM और BN डालिए ($AB \parallel CD$ और $AB < CD$). दिखाइए कि $\triangle AMD \cong \triangle BNC$ है।
इससे $\angle C = \angle D$ प्राप्त होता है, अतः $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

प्रश्नावली 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900,3\text{cm}^2$
2. ₹ 1650000
3. $20\sqrt{2}\text{m}^2$
4. $21\sqrt{11}\text{cm}^2$
5. 9000cm^2
6. $9\sqrt{15}\text{cm}^2$

प्रश्नावली 11.1

1. 165cm^2
2. 1244.57m^2
3. (i) 7 cm (ii) 462cm^2
4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280
5. 63 m
6. ₹ 1155
7. 5500cm^2
8. ₹ 384.34 (लगभग)

प्रश्नावली 11.2

1. (i) 1386cm^2 (ii) 394.24cm^2 (iii) 2464cm^2
2. (i) 616cm^2 (ii) 1386cm^2 (iii) 38.5m^2
3. 942cm^2

4. 1 : 4
5. ₹27.72
6. 3.5 cm
7. 1 : 16
8. 173.25 cm^2
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

प्रश्नावली 11.3

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3
2. (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35} \text{ l}$
3. 10 cm
4. 8 cm
5. 38.5 kl
6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2
7. $100\pi \text{ cm}^3$
8. $240\pi \text{ cm}^3$; 5 : 12
9. 28.875 m^3 , 99.825 m^2

प्रश्नावली 11.4

1. (i) $1437 \frac{1}{3} \text{ cm}^3$ (ii) 1.05 m^3 (लगभग)
2. (i) $11498 \frac{2}{3} \text{ cm}^3$ (ii) 0.004851 m^3 3. 345.39 g (लगभग) 4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 L (लगभग) 6. 0.06348 m^3 (लगभग)
7. $179 \frac{2}{3} \text{ cm}^3$ 8. (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (लगभग) 9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 mm^3 (लगभग)

प्रश्नावली 12.1

1. (ii) पुनरुत्पादी स्वास्थ्य अवस्था
3. (ii) पार्टी A
4. (ii) हाँ बारंबारता बहुभुज (iii) नहीं
5. (ii) 184

8. आयु (वर्षों में)	बारंबारता	चौड़ाई	आयत की लंबाई
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

अब इन लंबाईयों से आप आयत चित्र खींच सकते हैं।

9. (i)

अक्षरों की संख्या	बारंबारता	अंतराल की चौड़ाई	आयत की लंबाई
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

अब, आयत चित्र खींचिए।

(ii) 6 - 8

प्रश्नावली A2.1

1. चरण 1: सूत्रण :

प्रासंगिक कारक है कंप्यूटर को किराए पर लेने की अवधि और हमें दी गई दो लागत। हम यह मान लेते हैं कि कंप्यूटर को खरीदने या किराए पर लेने पर लागत में कोई सार्थक परिवर्तन नहीं होता। अतः हम किसी भी परिवर्तन को अप्रासंगिक मान लेते हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि सभी ब्रांड के कंप्यूटर और पीढ़ियाँ समान हैं अर्थात् ये अंतर भी अप्रासंगिक हैं।

x महिनों के लिए कंप्यूटर को किराए पर लेने पर रु. 2000 x का खर्च आता है। यदि यह राशि कंप्यूटर की कीमत से अधिक है, तो कंप्यूटर खरीदना ही उत्तम होगा। अतः समीकरण यह होता है।

$$2000x = 25000 \quad (1)$$

चरण 2 : हल : (1) हल करने पर, $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

चरण 3 : निर्वचन : क्योंकि 12.5 महीने बाद कंप्यूटर को किराए पर लेने पर लागत अधिक आती है। अतः कंप्यूटर खरीदना ही सस्ता तब पड़ेगा, जबकि इसका प्रयोग आप 12 महीने से अधिक अवधि के लिए करना चाहते हैं।

2. चरण 1 : सूत्रण : हम यहाँ यह मान लेंगे कि कार अचर चाल से चल रही है। अतः चाल में हुए किसी भी परिवर्तन को असंगत माना जाएगा। यदि कारें x घंटे के बाद मिलती हैं, तो पहली कार A से $40x$ कि.मी. की दूरी तय करेगी और दूसरी कार $30x$ कि.मी. की दूरी तय करेगी। अतः यह A से $(100 - 30x)$ कि.मी. की दूरी तय करेगी। अतः समीकरण होगा $40x = 100 - 30x$, अर्थात् $70x = 100$.

चरण 2 : हल : समीकरण हल करने पर $x = \frac{100}{70}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : निर्वचन : $\frac{100}{70}$ लगभग 1.4 घंटा है अतः कारें 1.4 घंटे बाद मिलेंगी।

3. **चरण 1 : सूत्रण :** कक्षा में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे चांद की चाल यह है
- $$\frac{\text{कक्षा की लंबाई}}{\text{लिया गया समय}}$$

चरण 2 : हल : क्योंकि कक्षा लगभग वृत्तीय है, इसलिए लंबाई $2 \times \pi \times 384000 \text{ km} = 2411520 \text{ km}$

एक कक्षा को पूरा करने में चंद्रमा 24 घंटे लेता है।

$$\text{अतः चाल} = \frac{2411520}{24} = 100480 \text{ km/h}$$

चरण 3 : निर्वचन : चाल 100480 km/h है।

4. **सूत्रण :** यह कल्पना कर ली गई है कि बिल में अंतर होने का कारण केवल वाटर हीटर का प्रयोग है।

मान लीजिए वाटर हीटर के इस्तेमाल होने का औसत समय = x घंटा

वाटर हीटर के इस्तेमाल के कारण प्रति महीने अंतर = ₹1240 – ₹1000 = ₹240

एक घंटे के लिए वाटर हीटर का इस्तेमाल की लागत = ₹8

So, the cost of using the water heater for 30 days = $8 \times 30 \times x$

अतः 30 दिनों तक वाटर हीटर का इस्तेमाल करने की लागत = बिल में अंतर

$$\text{इसलिए, } 240x = 240$$

हल : इस समीकरण से हमें $x = 1$ प्राप्त होता है।

निर्वचन : क्योंकि $x = 1$, इसलिए औसतन प्रति दिन 1 घंटे तक वाटर हीटर का प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली A2.2

1. यहाँ हम किसी विशेष हल पर चर्चा नहीं करेंगे। आप यहाँ पिछले उदाहरण में प्रयुक्त विधि का या किसी अन्य उपयुक्त विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

प्रश्नावली A2.3

1. हम यह पहले बता चुके हैं कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में सूत्रण भाग ब्यौरेवार हो सकता है। हम शब्द समस्याओं में उत्तर को व्यक्त नहीं करते। इसके अतिरिक्त इस शब्द समस्या का एक सही उत्तर होता है। आवश्यक नहीं है कि यह वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियाँ ही हों।
2. महत्वपूर्ण कारक (ii) और (iii)। यहाँ (i) एक महत्वपूर्ण कारक नहीं है, यद्यपि इसकी बेची गई वाहनों की संख्या को प्रभावित भी कर सकता है।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NOTE

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED