Government of Karnataka

# गणित प्रकाश

## गणित की पाठ्यपुस्तक

कक्षा

7

भाग 1

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

0775

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

**Karnataka Textbook Society (R.)**
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003

**0775 – गणित प्रकाश – भाग 1**
कक्षा 7 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

**ISBN 978-93-5729-256-6**

**प्रथम संस्करण**
*अक्तूबर 2025 कार्तिक 1947*

**PD 200T BS**

***© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2025***

**₹ 65.00**

*एन.सी.ई.आर.टी. वॉटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।*

सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशन प्रभाग में प्रकाशित तथा न्यू प्रिंट इंडिया, 8/4बी, इंडस्ट्रियल एरिया, साइट-IV, साहिबाबाद, गाज़ियाबाद (उ.प्र.) द्वारा मुद्रित।

**सर्वाधिकार सुरक्षित**

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भी भाग को छापना तथा इलैक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटो प्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुन: प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रचारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशन की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

**रा.शै.अ.प्र.प. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय**

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
**नई दिल्ली 110 016** फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
**बेंगलुरू 560 085** फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
**अहमदाबाद 380 014** फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट : धनकल बस स्टॉप पनिहटी
**कोलकाता 700 114** फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लेक्स
मालीगाँव
**गुवाहाटी 781 021** फोन : 0361-2676869

**प्रकाशन सहयोग**

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : *एम.वी. श्रीनिवासन*
मुख्य संपादक : *बिज्ञान सुतार*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी) : *दीपक जैसवाल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक : *अमिताभ कुमार*
उत्पादन सहायक : *मनोज कुमार*

**आवरण एवं लेआउट**
*क्रिएटिव आर्ट स्टुडियो और चेतन शर्मा*

**चित्रांकन**
*चेतन शर्मा और मधुश्री वसु*

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# आमुख

*राष्ट्रीय शिक्षा नीति* 2020 एक परिवर्तनकारी पाठ्यचर्या और शैक्षणिक संरचना की अनुशंसा करती है, जिसके मूल में भारतीय संस्कृति, सभ्यता और भारतीय ज्ञान परंपरा सन्निहित है। यह नीति विद्यार्थियों को इक्कीसवीं सदी की संभावनाओं और चुनौतियों के साथ रचनात्मक रूप से जुड़ने के लिए तैयार करती है। यह दूरदर्शी परिप्रेक्ष्य विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 में सभी स्तरों और पाठ्यचर्या क्षेत्रों में समाहित है। बुनियादी और आरंभिक स्तर मानवीय अस्तित्व के पाँचों आयामों को स्पर्श करते हुए विद्यार्थियों की अंतर्निहित योग्यताओं के संपोषण के साथ 'पंचकोश' मध्य स्तर पर उनके अधिगम प्रतिफलों की प्रगति का मार्ग प्रशस्त करते हैं। इस प्रकार, मध्य स्तर कक्षा 6 से कक्षा 8 तक तीन वर्षों को समाहित करते हुए आरंभिक और माध्यमिक स्तरों के बीच एक सेतु का कार्य करता है।

मध्य स्तर पर इस राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा का उद्देश्य है— विद्यार्थियों को उन आवश्यक कौशलों में दक्ष करना जो बच्चों की विश्लेषणात्मक, वर्णनात्मक और सृजनात्मक क्षमताओं को प्रोत्साहित करें और उन्हें आने वाली चुनौतियों और अवसरों के लिए तैयार करें। मध्य स्तर हेतु राष्ट्रीय पाठ्यचर्या के आधार पर विकसित बहुआयामी पाठ्यक्रम में ऐसे नौ विषय सम्मिलित किए गए हैं जो बच्चों के समग्र विकास को बढ़ावा देते हैं। इनमें तीन भाषाओं (कम से कम दो भारतीय मूल की भाषाएँ) सहित विज्ञान, गणित, सामाजिक विज्ञान, कला शिक्षा, शारीरिक शिक्षा एवं कल्याण और व्यावसायिक शिक्षा सम्मिलित हैं।

ऐसी परिवर्तनकारी शिक्षण संस्कृति के लिए अनुकूल परिस्थितियों की आवश्यकता होती है। इसे व्यावहारिक रूप देने के लिए विभिन्न विषयों की उपयुक्त पाठ्यपुस्तकें भी होनी चाहिए। पाठ्यसामग्री और पढ़ने-पढ़ाने के उपागमों के मध्य इन पाठ्यपुस्तकों की महत्वपूर्ण भूमिका होगी; ऐसी निर्णायक भूमिका जो बच्चों की जिज्ञासा और अन्वेषणात्मक प्रवृत्ति के बीच एक विवेकपूर्ण संतुलन बनाएगी। कक्षा नियोजन और विषयों की पढ़ाई के मध्य उचित संतुलन बनाने के लिए शिक्षकों का प्रशिक्षण और तैयारी भी आवश्यक है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निरंतर गुणवत्तापूर्ण पाठ्यपुस्तकें तैयार करने के लिए एक प्रतिबद्ध संस्था है। पाठ्यपुस्तकों के निर्माण हेतु संबंधित विषय विशेषज्ञों, शिक्षाशास्त्रियों और अध्यापकों को समितियों में सम्मिलित किया जाता है। कक्षा 7 के लिए विकसित गणित की पाठ्यपुस्तक *गणित प्रकाश,* भाग 1 गणितीय चिंतन प्रारंभ करने के लिए उत्साह जगाने के संदर्भ में एन.ई.पी. 2020 एवं एन.सी.एफ.-एस.ई. 2023 की आशाओं के अनुरूप है। कक्षा 7 के विद्यार्थियों के लिए विकसित यह पाठ्यपुस्तक, कक्षा 6 में प्रारंभ हुई गणित की दुनिया में इसकी यात्रा को आगे ले जाती है। इस यात्रा के दौरान अवधारणाएँ एवं प्रश्न

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

दैनिक जीवन की स्थितियों से निकलकर आते हैं। अत: यह आशा की जाती है कि विद्यार्थी उनसे आसानी से जुड़ सकेंगे। पुस्तक विद्यार्थियों को अपने आस-पास के पैटर्न देखने एवं तलाशने और गणितीय अवधारणाओं को स्वयं खोजने हेतु प्रोत्साहित करने के प्रयास करती है। विषय-सामग्री गणित को अन्य विषय क्षेत्रों, जैसे— विज्ञान, सामाजिक विज्ञान के साथ-साथ अन्य मिश्रित विषयों (क्रॉस कटिंग थीम्स), जैसे— पर्यावरण शिक्षा, मूल्य शिक्षा, समावेशी शिक्षा, भारतीय ज्ञान पद्धति (आई.के.एस.) से एकीकृत करने का प्रयत्न करती है। रंगीन चित्र, उदाहरण एवं क्रियात्मक प्रश्नावलियाँ इस पाठ्यपुस्तक का आधार बनाती हैं जो अधिक जटिल गणितीय अवधारणाओं को समझने के लिए विद्यार्थियों में एक दृढ़ नींव विकसित करेंगी। संपूर्ण पुस्तक में कहानियाँ, वार्तालाप एवं उपाख्यान सम्मिलित किए गए हैं, जिससे युवा विद्यार्थी अमूर्त गणितीय अवधारणाओं को स्वयं से जोड़कर समझ सकें। पहेलियाँ एवं अभिनव समस्याएँ विद्यार्थियों को न केवल गणितीय अवधारणाएँ तार्किकता के साथ उनके आस-पास के वातावरण से जोड़ने एवं उनकी गणित की समझ व्यापक बनाने में सहायक होंगी, अपितु उन्हें गणनात्मक चिंतन के उभरते हुए क्षेत्र की अवधारणाओं को समझने के लिए भी तैयार करेंगी। शिक्षा के विद्यार्थी-केंद्रित दृष्टिकोण के माध्यम से विद्यार्थियों के सहयोग एवं उनकी सक्रिय भागीदारी पर ध्यान दिया गया है।

इस पाठ्यपुस्तक के अतिरिक्त इस स्तर पर विद्यार्थियों को अन्य विभिन्न शिक्षण संसाधनों का पता लगाने हेतु भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। ऐसे संसाधन उपलब्ध कराने में विद्यालय के पुस्तकालय महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसके साथ ही विद्यार्थियों को ऐसा करने के लिए मार्गदर्शन देने और प्रोत्साहित करने में अभिभावकों और शिक्षकों की भूमिका भी महत्वपूर्ण होगी।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण में सम्मिलित सभी व्यक्तियों का आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने इस उत्कृष्ट प्रयास को साकार किया है और आशा करता हूँ कि यह पुस्तक सभी हितधारकों की अपेक्षाओं को पूर्ण करेगी। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों को निरंतर परिष्कृत करने हेतु वचनबद्ध है। हम आपकी टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करते हैं जो भावी संशोधनों में सहायक हो सकते हैं।

दिनेश प्रसाद सकलानी
*निदेशक*
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
*मार्च, 2025*

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

# पुस्तक के विषय में

गणित, विद्यार्थियों को न केवल बुनियादी अंकगणित कौशलों को विकसित करने में सहायता करता है, अपितु तार्किकता, रचनात्मक समस्या निदान और स्पष्ट एवं सटीक संवाद (मौखिक एवं लिखित दोनों) की महत्वपूर्ण क्षमताएँ विकसित करने में भी सहयोग प्रदान करता है। गणितीय ज्ञान अन्य विद्यालयी विषयों की अवधारणाओं को समझने में भी महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है, जैसे— विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान और यहाँ तक कि कला, शारीरिक शिक्षा एवं व्यावसायिक शिक्षा। गणित का अधिगम, सुविचारित विकल्पों एवं निर्णयों के लिए क्षमताओं को विकसित करने में भी योगदान दे सकता है। यह संख्याओं और मात्रात्मक तर्कों की समझ, प्रभावी एवं सार्थक लोकतांत्रिक और आर्थिक भागीदारी के लिए भी आवश्यक है। इस प्रकार गणित, विद्यालयी शिक्षा के समस्त उद्देश्यों को प्राप्त करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मध्य स्तर पर गणित एक बड़ी चुनौती है जिसे बच्चे के अनुभव और वातावरण के समीप होने एवं अमूर्त रूप में होने, दोनों की दोहरी भूमिका निभानी होती है। गणित को दृढ़ता व परिशुद्धता को बनाए रखने और उस पर बल देने के साथ-साथ अंतर्ज्ञान विकसित करने की दोहरी भूमिका निभानी चाहिए। इसके अतिरिक्त इसे कलात्मकता और रचनात्मकता तथा शिष्टता और सौंदर्यता की भावना विकसित करने के साथ-साथ आलोचनात्मक एवं तार्किक चिंतन में वृद्धि की दोहरी भूमिका भी निभानी चाहिए। अंततः गणित को विद्यार्थियों को स्वयं अवधारणाओं की खोज और अन्वेषण के पर्याप्त अवसर प्रदान करने तथा साथ ही गणित के वैश्विक भंडार में सर्वश्रेष्ठ ज्ञात विधियों को पढ़ाने की दोहरी भूमिका निभानी चाहिए।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में गणित को सीखने के उपरोक्त लक्ष्यों एवं चुनौतियों का समाधान करने का प्रयास किया गया है। इस पुस्तक के लेखकों का लक्ष्य विद्यार्थियों में अंतर्ज्ञान और दृढ़ता, दोनों को विकसित करने के लिए औपचारिक एवं अनौपचारिक परिभाषाओं और विधियों के बीच विवेकपूर्ण संतुलन बनाना है। यह पुस्तक सक्रिय एवं अनुभवात्मक अधिगम को बढ़ावा देने के लिए कक्षा में विद्यार्थी-विद्यार्थी और विद्यार्थी-शिक्षक के मध्य गणितीय वार्तालाप के कई अवसर भी प्रदान करती है। पुस्तक में निरंतर अन्वेषण को प्रोत्साहित करने के लिए अनेक प्रश्न, पहेलियाँ और अभ्यास दिए गए हैं। कक्षा में चर्चा को प्रोत्साहित करने हेतु कई खुले अंत वाले (ओपन एंडेड) प्रश्न भी दिए गए हैं।

इस पाठ्यपुस्तक का अध्याय 1, 'हमारे आस-पास की बड़ी संख्याएँ' खोजों एवं संदर्भों से जोड़ने के साथ लाखों एवं करोड़ों की दुनिया से एक परिचय करवाता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अध्याय 2, 'अंकगणितीय व्यंजक' में विभिन्न संक्रियाओं वाले व्यंजकों पर विचार करते हैं एवं चर्चा करते हैं कि बिना कठिनाई के उन्हें कैसे लिखा एवं पढ़ा जाए। अध्याय 3, 'बिंदु से परे एक दृष्टि' दशमलव बिंदु के उपयोग एवं दशमलव संख्याओं के जोड़ एवं घटाव से परिचय करवाता है। अध्याय 4, 'अक्षर-संख्याओं के उपयोगी व्यंजक' अंकगणितीय व्यंजकों पर आधारित अध्याय है एवं विद्यार्थियों को बीजगणित की दुनिया में पहला कदम रखने के लिए एक मार्गदर्शक है। इस अध्याय में अक्षर-संख्याओं एवं बीजगणितीय (बीजीय) व्यंजकों के आधारभूत विचारों से परिचित कराया गया है। अध्याय 5, 'समांतर और प्रतिच्छेदी रेखाएँ' ज्यामिति की कुछ आधारभूत इकाइयों से परिचित करवाता है और इसमें पेपर मोड़ने जैसी क्रियाशील गतिविधियों एवं दृढ़ गणितीय तर्क का संतुलन है। अध्याय 6, 'संख्याओं का खेल' में गणनात्मक चिंतन एवं पहेलियों व समता, विरहंका-फिबोनाशी अनुक्रम एवं क्रिप्टारिदम की अवधारणाओं के द्वारा समस्या निदान के पहलू निहित हैं। अध्याय 7, 'तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं की एक कथा' रचना द्वारा त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों एवं कोणों से संबंधित कुछ रोचक गुणों की खोज करता है। अध्याय 8, 'भिन्नों के साथ कार्य करना' विद्यार्थियों की भिन्नों की समझ का आधार बनाता है एवं भिन्नों के गुणा एवं भाग की खोज करता है। भिन्नों पर ये संक्रियाएँ करने के लिए महान भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त (628 ई.) की विधियों एवं सूत्रों को नए उदाहरणों एवं रोचक पहेलियों द्वारा जीवंत बनाया गया है। सभी अध्यायों में, अन्य विषयों, जैसे— कला, इतिहास एवं विज्ञान के साथ संबंधों पर बल देने का प्रयत्न किया गया है।

हम आशा करते हैं कि कहानी सुनाने और व्यावहारिक क्रियाकलापों को एक साथ क्रियान्वित करके सीखने को एक गहन अधिगम अनुभव बनाया जाएगा, जो जिज्ञासा को जगाता हो और गणित के प्रति प्रेम को बढ़ावा देता हो। यह आशा की जाती है कि शिक्षक बच्चों को चर्चा करने, खेलने, परस्पर सामंजस्य बनाने, विभिन्न विचारों के लिए तार्किकता प्रदान करने और प्रस्तुत तर्कों में कमियाँ ढूँढ़ने का अवसर देंगे। विद्यार्थियों के लिए यह भी आवश्यक है कि अंततः वे यह समझने की क्षमता विकसित करें कि किसी तथ्य या अवधारणा को सिद्ध करने का क्या अर्थ होता है और वे उसमें अंतर्निहित अवधारणाओं के विषय में भी आश्वस्त बनें। गणित की कक्षा में एल्गोरिद्म के अंधाधुंध अनुप्रयोग की अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए, अपितु बच्चों को प्रश्न हल करने के विभिन्न तरीके ढूँढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

*राष्ट्रीय शिक्षा नीति* 2020 के अनुसार गणनात्मक चिंतन (Computational Thinking) को भी पहेलियों, खेलों और संवादात्मक अभ्यासों के माध्यम से धीरे-धीरे प्रस्तुत किया गया है, यह पुस्तक इस चिंतन को बढ़ावा देती है। पाठ्यपुस्तक में विभिन्न अवधारणाओं का संदर्भ देते समय उनकी भारतीयता की जड़ों को भी ध्यान में रखा गया है। अध्यायों में भारतीय गणितज्ञों का योगदान एक समस्या समाधान दृष्टिकोण के रूप में दिया गया है ताकि विद्यार्थियों को भारत की समृद्ध गणितीय विरासत और गणित में भारत के वैश्विक योगदान के विषय में जागरूक किया जा सके।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अवधारणाएँ और समस्याएँ दैनिक जीवन की स्थितियों से जुड़ी हुई हैं। उन संदर्भों और सामग्रियों का उपयोग करने का प्रयास किया गया है जिनसे विद्यार्थी परिचित हैं। पुस्तक के अंत में अधिगम सामग्री पत्रक दिए गए हैं जिनकी फोटोकॉपी करके उनका उपयोग किया जा सकता है। अनेक जगहों पर, सहकर्मी समूह के प्रयासों और चर्चाओं को प्रोत्साहित करने के लिए अभ्यास या क्रियाकलाप दिए गए हैं। पाठ्यपुस्तक, कक्षा में एक विविध समूह के विद्यार्थियों की सीखने की आवश्यकताओं को संबोधित करने का उद्देश्य रखती है।

हमने गणित में निहित प्रकरणों में परस्पर तारतम्यता और सामंजस्यता दर्शाने हेतु प्रारंभिक अध्यायों में सीखी गई अवधारणाओं को बाद के अध्यायों के विचारों से जोड़ने का प्रयास किया है। हम आशा करते हैं कि शिक्षक इन अवधारणाओं को संयुक्त रूप से दोहराने के अवसर के रूप में उपयोग करेंगे ताकि बच्चे गणित की संपूर्ण संकल्पनात्मक संरचना की सराहना कर सकें। इसके साथ-साथ शिक्षक भिन्न, ऋणात्मक संख्याओं के विचारों और अन्य गणितीय विचारों, जो विद्यार्थियों के लिए नए हों, को अधिक समय दें। इनमें से कई अवधारणाएँ भविष्य में गणित को सीखने की आधार हैं।

अंततः इस पुस्तक का उद्देश्य केवल एक पाठ्यपुस्तक से कहीं अधिक है। यह गणितीय खोज और अन्वेषण की दुनिया का पासपोर्ट है। इसे कक्षा और घर, दोनों जगह उपयोग किया जा सकता है। हम आशा करते हैं कि यह विद्यार्थियों को स्वयं के गणितीय साहसिक कार्यों की शुरुआत करने के लिए प्रेरित कर सकती है, जिससे वे अपने आस-पास की सभी वस्तुओं में गणित की सुंदरता और प्रासंगिकता को देख सकें। अपने जुझारू दृष्टिकोण और कक्षा 7 की व्यापक गणितीय अवधारणाओं के साथ यह पुस्तक युवा मस्तिष्कों को लुभाने और उन्हें गणितीय खोज की आजीवन यात्रा के लिए तैयार करती है।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के सभी लेखकों और योगदानकर्ताओं को इस महत्वपूर्ण और मूल्यवान योगदान हेतु तथा राष्ट्र के गणित शिक्षकों, शिक्षार्थियों और जिज्ञासुओं के लिए की गई सेवा के लिए पुनः धन्यवाद देता हूँ।

हम इस पुस्तक के संबंध में आपकी टिप्पणियों और सुझावों का स्वागत करते हैं और आशा करते हैं कि शिक्षण और सीखने के दौरान आपने जो रुचिपूर्ण अभ्यास, क्रियाकलाप और कार्य विकसित किए हैं, उन्हें प्रेषित करेंगे। इन सुझावों को आगामी संस्करणों में सम्मिलित किया जाएगा।

आशुतोष वझलवार
*आचार्य* एवं *शैक्षणिक संयोजक*
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

# राष्ट्रीय पाठ्यक्रम और शिक्षण अधिगम सामग्री समिति (एन.एस.टी.सी.)

1. महेश चंद्र पंत, *कुलाधिपति*, राष्ट्रीय शैक्षिक योजना एवं प्रशासन संस्थान ***(अध्यक्ष)***
2. मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय ***(सह-अध्यक्ष)***
3. सुधा मूर्ति, *प्रतिष्ठित लेखिका* एवं *शिक्षाविद*
4. बिबेक देबरॉय, *अध्यक्ष*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद् (ई.ए.सी.-पी.एम.)
5. शेखर मांडे, *पूर्व महानिदेशक*, सी.एस.आई.आर. एवं *प्रतिष्ठित आचार्य*, सावित्रीबाई फुले पुणे विश्वविद्यालय, पुणे
6. सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय, कनाडा
7. शंकर महादेवन, *संगीत विशेषज्ञ*, मुंबई
8. यू. विमल कुमार, *निदेशक*, प्रकाश पादुकोण बैडमिंटन अकादमी, बेंगलुरू
9. मिशेल डैनिनो, *अतिथि आचार्य*, आई.आई.टी. गांधीनगर
10. सुरीना राजन, *आई.ए.एस.* (सेवानिवृत्त), *पूर्व महानिदेशक*, हिपा, हरियाणा
11. चमू कृष्ण शास्त्री, *अध्यक्ष*, भारतीय भाषा समिति, शिक्षा मंत्रालय
12. संजीव सान्याल, *सदस्य*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद् (ई.ए.सी.-पी.एम.)
13. एम.डी. श्रीनिवास, *अध्यक्ष*, सेंटर फॉर पॉलिसी स्टडीज, चेन्नई
14. गजानन लोंढ़े, *अध्यक्ष*, प्रोग्राम ऑफिस, एन.एस.टी.सी.
15. रबिन छेत्री, *निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., सिक्किम
16. प्रत्यूष कुमार मंडल, *आचार्य*, सामाजिक विज्ञान शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
17. दिनेश कुमार, *आचार्य*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
18. कीर्ति कपूर, *आचार्य*, भाषा शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
19. रंजना अरोड़ा, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, पाठ्यचर्या अध्ययन और विकास विभाग, रा.शै अ.प्र.प., नई दिल्ली ***(सदस्य-सचिव)***

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

# पाठ्यपुस्तक विकास समूह

## योगदानकर्ता

आलोका कान्हेरे, *परियोजना वैज्ञानिक अधिकारी*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, मुंबई

अमर्त्य कुमार दत्ता, *आचार्य*, सांख्यिकी-गणित यूनिट, भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (आई.एस.आई.), कोलकाता

अंजलि गुप्ते, *प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत्त), विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर

अपर्णा लालिंगकर, *निदेशक*, अक्षरब्रह्मा कंसल्टेंसी, पुणे— (टीम लीडर)

आशुतोष केदारनाथ वझलवार, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली — **सी.ए.जी. (गणित) सदस्य समन्वयक (अंग्रेजी संस्करण)**

गीतांजलि पाठक, *आचार्य*, एस.पी. महाविद्यालय, पुणे

एच.एस. शारदा, *टी.जी.टी.*, शासकीय हाई स्कूल, एच.डी. कोट, कर्नाटक

के.वी. सुब्रमण्यम, *आचार्य*, चेन्नई गणितीय संस्थान (सी.एम.आई.), चेन्नई

किरण बर्वे, *संकाय*, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे

माधवन मुकुंद, निदेशक, चेन्नई गणितीय संस्थान, चेन्नई— **अध्यक्ष, सी.ए.जी., (गणित)**

मधु बी., *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), मैसूरु

मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय — **सह-अध्यक्ष, एन.एस.टी.सी.**

पद्मप्रिया शिराली, *पूर्व प्रधानाचार्य*, सह्याद्रि स्कूल के.एफ.आई., पुणे

पंतजलि शर्मा, *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), अजमेर

राखी बैनर्जी, *सह आचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलुरू

रामचन्दर कृष्णमूर्ति, *प्रधानाचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विद्यालय, बेंगलुरू

शिवकुमार के.एम., *वरिष्ठ सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

श्रवण एस.के., *वरिष्ठ सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, यूनिवर्सिटी ऑफ ब्रिटिश कोलंबिया, कनाडा— सदस्य, एन.एस.टी.सी.

वी.एम. शोलापुरकर, *सहायक आचार्य*, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे

विजयन के., *आचार्य*, पाठ्यक्रम अध्ययन और विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## समीक्षक

अनुराग बेहर, *सदस्य*, राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा निरीक्षण समिति

के. (रवि) सुब्रमण्यम, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र (एच.बी.सी.एस.ई.), मुंबई

स्वस्ति शर्मा, *वरिष्ठ परामर्शदाता*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी. (समीक्षक हिंदी संस्करण)

## सदस्य-समन्वयक (हिंदी संस्करण)

टी.पी. शर्मा, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

## अनुवादक

प्रदीप कुमार जैन, *प्रवक्ता गणित* (सेवानिवृत्त), राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, नई दिल्ली

महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड), सेवानिवृत्त, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

सुधा पाटीदार, *टी.जी.टी.* (गणित), डॉ. राधाकृष्णन इंटरनेशनल स्कूल, डिफेंस कॉलोनी, नई दिल्ली

@KVBS NOT TO BE REPUBLISHED

# आभार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (रा.शै अ.प्र.प.) इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में मिश्रित विषयों (Cross-Cutting Themes) पर दिशानिर्देशों के लिए पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूह (CAG) और गणित एवं अन्य संबद्ध पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूहों (CAGs) के सम्मानित अध्यक्ष एवं सदस्यों का उनके मार्गदर्शन एवं समर्थन के लिए आभार व्यक्त करती है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास के दौरान, विभिन्न कार्यशालाएँ आयोजित की गईं, जिनमें विभिन्न संस्थानों से गणित के विषय विशेषज्ञ आमंत्रित किए गए। रा.शै.अ.प्र.प. इन विषय-विशेषज्ञों द्वारा इस पाठ्यपुस्तक की सामग्री के विकास एवं शिक्षणशास्त्र में सुधार के लिए शैलेश ए. शिराली, *निदेशक*, शिक्षक शिक्षा कार्यक्रम, वैली स्कूल, के.एफ.आई.; सादिक अली शेख, *प्रमुख*, गणित विभाग, मौलाना आज़ाद कला, विज्ञान एवं वाणिज्य कॉलेज, औरंगाबाद, महाराष्ट्र; जसपाल कौर, *टी.जी.टी.* (गणित), स्कूल ऑफ एक्सेलेंस, दिल्ली; बीना प्रकाश, *वरिष्ठ पी.जी.टी.* (गणित), कैम्पियन स्कूल, भोपाल; महेंद्र शंकर, *वरिष्ठ प्रवक्ता* (सेवानिवृत्त), रा.शै अ.प्र.प., नई दिल्ली; शैली चौधरी, *टी.जी.टी.* (गणित), राजकीय बालिका उच्च माध्यमिक विद्यालय, खजूरी खास, दिल्ली; रवि रक्षित शर्मा, *टी.जी.टी.* (गणित), जी.सी.एम.एस., न्यू सीलमपुर, दिल्ली; पूनम अरोड़ा, *पी.जी.टी.* (गणित), मेंटर शिक्षक, एस.बी.वी., वेस्ट पटेल नगर, नई दिल्ली; शालीनी अरोड़ा बहरी, *टी.जी.टी.* (गणित), एस.के.वी., नं. 1, नरेला, दिल्ली; संगीता सोलंकी, *टी.जी.टी.* (गणित), द हेरिटेज स्कूल, दिल्ली; सुनीता शर्मा, *टी.जी.टी.* (गणित), द हेरिटेज स्कूल, दिल्ली; ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली; इशिता मुखर्जी, *संसाधन विशेषज्ञ*, सी.बी.एस.ई., दिल्ली; तरुण चौबीसा, *वरिष्ठ परामर्शदाता*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.; सुनील बजाज, *अतिरिक्त निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., गुरुग्राम, हरियाणा के बहुमूल्य सुझावों के लिए आभार व्यक्त करती है।

परिषद्, कार्यक्रम कार्यालय से निधि एम. शास्त्री, *परामर्शदाता* और भावना उपाध्याय, सदस्य, के प्रयासों के लिए आभार ज्ञापित करती है।

पृष्ठ संख्या डिजाइन की प्रेरणा 'मेथ फॉर लव' के द्वारा 'प्राइम क्लाइम्ब गेम' से ली गई है। परिषद् दशमलव सिक्का मोहरों के चित्र उपलब्ध करवाने के लिए चैतन्य देव और रामू एम.एस. का आभार व्यक्त करती है।

परिषद्, सुनीता फरक्या, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प. के शैक्षणिक एवं प्रशासनिक सहयोग के लिए आभार ज्ञापित करती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

परिषद्, इस पाठ्यपुस्तक में सहयोग प्रदान करने के लिए विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग में कार्यरत सुष्मिता जोशी, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; मंजू महार, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी* के योगदान की सराहना करती है। इसके साथ ही किशोर सिंघल, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा); अभिलाष शुक्ला, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा); *टंकण हिंदी* (संविदा) के पद पर कार्यरत विशाल शर्मा, दीपक और गिरिश गोयल का सहयोग भी प्रशंसनीय है।

परिषद् पुस्तक को अंतिम रूप देने और संपादन के लिए प्रकाशन प्रभाग के सदस्यों दिनेश वशिष्ट, *संपादक* (संविदा); कहकशा, *सहायक संपादक* (संविदा); राकेश कुमार, सीनियर प्रूफ रीडर; राहिल अंसारी, *प्रूफ रीडर* (संविदा) और आफरीन, *प्रूफ रीडर* (संविदा) का भी आभार ज्ञापित करती है। अंतत: परिषद्, पुस्तक की रूपरेखा तैयार करने के लिए पवन कुमार बरियार, *प्रभारी,* डी.टी.पी. प्रकोष्ठ; विपन कुमार शर्मा, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा) और बिट्टू कुमार महतो, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा) का भी धन्यवाद व्यक्त करती है।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

# शिक्षक के लिए शब्द

हम आशा करते हैं कि *गणित प्रकाश* पाठ्यपुस्तक, गणित जैसे रोमांचक विषय को सीखने के आनंद को अगली पीढ़ी तक पहुँचाने के महत्वपूर्ण कार्य को पूर्ण करने में एक दृढ़ समर्थक एवं मार्गदर्शक के रूप में आपकी सहायता करेगी।

इस कार्य के लिए एक अनुकूल वातावरण प्रदान करना आवश्यक है जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में गणितीय चिंतन को विकसित करने में सहायता करेगा। प्राय: कक्षाओं में विद्यार्थियों को जो कुछ भी बताया जाता है, उसे वे केवल सुनते हैं या बोर्ड पर जो कुछ लिखा जाता है, उसे कॉपी में उतारते हैं। इस तरह की कक्षाओं में गणित सीखने के लिए आवश्यक परिस्थितियों का अभाव होता है, इसलिए अनुकूल वातावरण की अनुपस्थिति में कोई भी विद्यार्थियों से गणितीय चिंतन और समझ को ग्रहण करने की आशा नहीं कर सकता। कक्षाएँ ऐसी जगह होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी गणितीय अवधारणाओं के साथ खेलने, पैटर्नों को खोजने, चर्चा करने और समस्याओं को हल करने के लिए रचनात्मक रणनीतियों को अपने मित्रों के साथ मिलकर क्रियान्वित करने में व्यस्त रहें। विद्यार्थियों को समस्याओं को एक-दूसरे के समक्ष भी रखना चाहिए और उनके संभव समाधान पर चर्चा करनी चाहिए। निश्चित रूप से ये वही स्थितियाँ हैं, जिनके कारण अब तक गणित के संपूर्ण क्षेत्र का विकास हुआ है।

कक्षा में ऐसा वातावरण तैयार करना जटिल कार्य नहीं है। इसके लिए हमें कुछ रुचिकर प्रश्न, समस्याएँ, पैटर्न या चुनौतियाँ चाहिए जिन्हें नियमित आधार पर विद्यार्थियों के लिए प्रस्तुत किया जाए। कक्षा में विद्यार्थियों को युग्मों में या समूहों में प्रश्न को समझने, उस पर चर्चा करने एवं उस पर कार्य करने के लिए पर्याप्त समय दिया जाए।

इसके साथ ही एक ऐसा वातावरण विकसित करने की आवश्यकता है जहाँ विद्यार्थियों की त्रुटियों को समझा जाए और उनके महत्व को सीखने में स्वीकार किया जाए।

यद्यपि कक्षाओं में गणितीय चिंतन को प्रारंभ करने के लिए उत्साह जाग्रत करना कठिन कार्य नहीं है, फिर भी इसे बनाए रखना चुनौतीपूर्ण हो सकता है। यह उत्साह बनाए रखने के लिए इसमें आपकी ओर से प्रयास सम्मिलित हो सकते हैं। इसके लिए गणितीय प्रश्न, समस्या, पैटर्न या चुनौती को प्रस्तुत करने का पहला भाग सप्ताह में कम-से-कम एक या दो बार किया जाए। इसके साथ ही विद्यार्थियों को प्रश्न को समझने, चर्चा करने और उस पर काम करने के लिए आपकी ओर से पर्याप्त प्रतीक्षा समय भी दिया जाए। आपके ऐसे प्रयास विद्यार्थियों के गणित को देखने और उसके प्रति दृष्टिकोण पर सकारात्मक प्रभाव डाल सकते हैं।

यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि यह सकारात्मक प्रभाव त्वरित नहीं होता है, अपितु यह सीखने की एक धीमी प्रक्रिया है। यह प्रक्रिया विभिन्न कारकों पर निर्भर करती है, जैसे— समस्या

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

समाधान हेतु आप विद्यार्थियों को कितने अवसर देते हैं, आपका धैर्य और प्रोत्साहन, जो आप विद्यार्थियों को देते हैं।

समस्या प्रस्तुत करने में आपकी सहायता करने के लिए, इस पुस्तक में सभी समस्याओं या प्रश्नों को चिह्न (?) का उपयोग करके चिह्नित किया गया है। यह चिह्न कक्षा में समस्या समाधान और अन्वेषण की प्रक्रिया प्रारंभ करने के संभावित अवसर का संकेतक है। आप देखेंगे कि कुछ समस्याओं को 'गणित चर्चा' नाम दिया गया है। इस प्रकार के प्रश्नों को कक्षा में विशेष रूप से चर्चा के लिए विषय बनाया जा सकता है।

पाठ्यपुस्तक में महत्वपूर्ण गणितीय प्रक्रियाओं, चिंतन के तरीकों एवं समस्या-निदान दृष्टिकोणों को प्रमुखता से दिखाने के लिए उल्लू का शुभंकर (मैस्कॉट) कई स्थानों पर दिया गया है। जहाँ उल्लू का शुभंकर विद्यमान हो एवं ऐसी अन्य स्थितियों में भी इन्हें कक्षाओं में चर्चाओं के दौरान स्पष्ट किया जा सकता है।

विद्यार्थियों की गणितीय चिंतन और अवधारणाओं की समझ को विकसित करने के लिए पर्याप्त समस्याएँ दी गई हैं। उन सभी को हल करने का प्रयास इस मूल्य पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को सरल करने और उन पर चर्चा करने का पर्याप्त समय ही न मिले।

यह समझना महत्वपूर्ण है कि खोजपूर्ण समस्याएँ केवल समस्याओं को सरल करने के कौशल को बढ़ावा देने के लिए नहीं हैं, अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना प्रारंभ करते हैं तो वे प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाने में भी सहायता करती हैं।

विद्यार्थियों को आत्मनिर्भर शिक्षार्थी बनाने के प्रयास अवश्य होने चाहिए। इसके लिए एक अनिवार्य पहलू गणितीय पाठ को पढ़ने और समझने की क्षमता है। इस कौशल को बढ़ावा देने हेतु विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। वे जो पढ़ते हैं, उन्हें उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के सामने व्यक्त करने के पर्याप्त अवसर प्रदान किए जाने चाहिए। यह उस एक बड़ी समस्या का भी समाधान करेगा जिसका सामना विद्यार्थी गणित को बोलने और शब्द समस्याओं की व्याख्या करने में करते हैं।

पाठ्यपुस्तक में अनेक खुले अंत वाले (open-ended) प्रश्न दिए गए हैं। इसमें कुछ अवधारणाओं को समझने के नए तरीके भी सम्मिलित हैं। यदि आप उन्हें हल करने में सक्षम नहीं हैं या उनमें से कुछ का तुरंत अनुसरण नहीं कर पा रहे हैं तो यह कोई जटिल समस्या नहीं है। प्रत्येक व्यक्ति को संपूर्ण ज्ञान नहीं होता। ऐसी सामग्री को समझने और उस पर विचार करने के लिए इसे कक्षा में ले जाना और चर्चा के लिए प्रस्तुत करना बहुत उपयोगी होगा। चर्चा के पश्चात जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। यह प्रक्रिया अपने आप ही पाठ्यसामग्री को समझने में सुगम बना सकती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं और जब विद्यार्थी, शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए हल तलाशते और चिंतन करते हुए देखते हैं तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।

आशा है कि आप और आपके विद्यार्थी इस पुस्तक का उपयोग करके एक बहुत अच्छा और उपयोगी समय व्यतीत करेंगे।

## प्रमुख बिंदुओं का सारांश

### अन्वेषण के लिए समय

1. विद्यार्थियों के लिए नियमित रूप से नई समस्याओं, प्रश्नों, पैटर्नों या चुनौतियों को प्रस्तुत करना महत्वपूर्ण है। उन्हें व्यक्तिगत रूप से और समूहों में उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने और उन पर काम करने के लिए पर्याप्त समय दीजिए।
2. एक ऐसे वातावरण को निर्मित करने की आवश्यकता है, जो त्रुटियों को स्वीकारता है और सीखने में उनके महत्व को समझाता हो।
3. एक ऐसी पाठ्य संस्कृति होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी एक-दूसरे के लिए समस्याएँ प्रस्तुत करें और समस्याओं को हल करने की विभिन्न विधियों पर एक-दूसरे से चर्चा करें।

### पाठ्यपुस्तक में समस्याओं के विषय में

1. पुस्तक में खोजपूर्ण समस्याएँ न केवल समस्याओं के समाधान के स्तर में वृद्धि करती हैं, अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना प्रारंभ करते हैं तो इन समस्याओं का उद्देश्य प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाना भी है।
2. पुस्तक में सभी समस्याओं को हल करने का प्रयास इस मूल्य पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने एवं सरल करने के लिए पर्याप्त समय ही न मिले।

### पढ़ना

1. विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित कीजिए।
2. विद्यार्थी जो पढ़ते हैं, उन्हें उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के सामने व्यक्त करने का अवसर प्रदान करें।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**न जानने का अधिकार!**

1. यदि विद्यार्थी को पढ़ते समय कुछ पाठ्यसामग्री तुरंत समझ में नहीं आती है तो इसमें कोई जटिल समस्या नहीं है। ऐसी पाठ्यसामग्री को समझने और उस पर विचार करने के साथ-साथ, इसे कक्षा में प्रस्तुत किया जा सकता है और उस पर चर्चा की जा सकती है। चर्चा के पश्चात, जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं। जब विद्यार्थी शिक्षक को किसी विषय का हल तलाशते एवं चिंतन करते हुए देखते हैं तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित होता है।
2. सीखना एक सतत प्रक्रिया है। वास्तव में, गणित में इतना कुछ है जो अभी भी ज्ञात नहीं है और जिसके लिए और अधिक अन्वेषण की आवश्यकता है।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

# विद्यार्थियों के लिए शब्द

गणित कला को सराहने के लिए केवल निष्क्रिय दर्शक बने रहना पर्याप्त नहीं है, अपितु इसमें आपकी सक्रिय भागीदारी की भी आवश्यकता है, जैसे— कोई जासूस किसी रहस्य को सुलझाने के लिए प्रक्रिया में अनुरत रहता है।

इस भागीदारी की आवश्यकता विशेषतः तब होती है जब आप कोई नया प्रश्न देखते हैं या कोई प्रश्न आपकी अपनी जिज्ञासा से उत्पन्न होता है या फिर जब आप संख्याओं अथवा आकृतियों के किसी नए आकर्षक पैटर्न को देखते हैं। जब ऐसी अवधारणाओं आपके सामने आएँ तो आप अपने अध्ययन कार्य को विराम दीजिए एवं अपनी रचनात्मकता का उपयोग प्रश्न का परिणाम निकालने अथवा पैटर्न को समझने में कीजिए।

आपको ज्ञात होगा कि इस पाठ्यपुस्तक में अध्यायों के अंतर्गत कुछ प्रश्नों के साथ उनके उत्तर भी दिए गए हैं। उनके उत्तर देखने से पहले प्रश्नों को स्वयं या समूह में हल करना अथवा उन पर चर्चा करना, अधिगम के लिए सार्थक सिद्ध होगा।

ऐसा करने से गणित की पुस्तक को पढ़ने का आपका अनुभव समृद्ध होगा जो कि आपकी अधिगम प्रक्रिया को सशक्त बनाएगा।

अध्ययन करते समय अध्यायों में आपको यह चिह्न (?) देखने को मिलेगा जो यह दर्शाता है कि अब गणित के तथ्यों एवं अवधारणाओं को समझने का समय है।

कभी-कभी आपको शीर्षक 'आइए, पता लगाएँ' के अंतर्गत एक ही स्थान पर कई प्रश्न एक साथ मिलेंगे।

इस पुस्तक में कुछ प्रश्न 

के अंतर्गत सम्मिलित हैं। ये प्रश्न आपको आपके मित्रों के साथ चर्चा करने एवं हल करने के लिए दिए गए हैं।

अंततः पाठ्य सामग्री को रोचक बनाने हेतु कुछ प्रश्न 

के अंतर्गत सम्मिलित हैं। इन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए अधिक रचनात्मक चिंतन की आवश्यकता है। अतः इनका उत्तर देना आपके लिए अत्यंत रोचक होगा।

© ITBS NOT TO BE REPUBLISHED

# भारत का संविधान

## उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता और अखंडता**] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य" के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "राष्ट्र की एकता" के स्थान पर प्रतिस्थापित।

© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

# विषय-सूची


*आमुख* *iii*

*पुस्तक के विषय में* *v*

*शिक्षक के लिए शब्द* *xiii*

*विद्यार्थियों के लिए शब्द* *xvii*

**अध्याय 1**
हमारे आस-पास की बड़ी संख्याएँ 1

**अध्याय 2**
अंकगणितीय व्यंजक 24

**अध्याय 3**
बिंदु से परे एक दृष्टि 46

**अध्याय 4**
अक्षर-संख्याओं के उपयोगी व्यंजक 81

**अध्याय 5**
समांतर और प्रतिच्छेदी रेखाएँ 106

**अध्याय 6**
संख्याओं का खेल 127

**अध्याय 7**
तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं की एक कथा 146

**अध्याय 8**
भिन्नों के साथ कार्य करना 173

अधिगम सामग्री पत्रक 200


@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## भारत का संविधान

*भाग 4क*

# नागरिकों के मूल कर्तव्य

**अनुच्छेद 51 क**

**मूल कर्तव्य –** भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

# 1 हमारे आस-पास की बड़ी संख्याएँ

0775CH01

## 1.1 एक लाख किस्में!



कर्नाटक के चिन्तामणि नामक नगर में ईश्वरप्पा नाम का एक कृषक रहता है। वह खेत में चावल उगाने के लिए बीज खरीदने नियमित रूप से बाजार जाता है। ऐसी ही एक यात्रा के दौरान उसने रमन्ना और लक्ष्मम्मा को बातचीत करते सुना। रमन्ना कहता है, "पहले हमारे देश में चावल की लगभग एक लाख किस्में थीं। कृषक भिन्न-भिन्न किस्मों के बीजों का संरक्षण करते थे और चावल उगाने के लिए उनका उपयोग करते थे। अब हमारे पास कुछ ही किस्में बची हैं। कृषकों को भी बीज खरीदने के लिए बाजार आना-जाना पड़ता है।"

लक्ष्मम्मा कहती हैं, "मेरे घर के पास एक बीज बैंक है। अब तक उन्होंने विभिन्न स्थानों से चावल की लगभग सौ देसी किस्मों के बीज एकत्रित किए हैं। आप वहाँ से भी बीज खरीद सकते हो।"



आपने शायद पहले भी 'लाख' शब्द सुना होगा। क्या आप जानते हो कि एक लाख कितना बड़ा होता है? आइए, ज्ञात करते हैं।

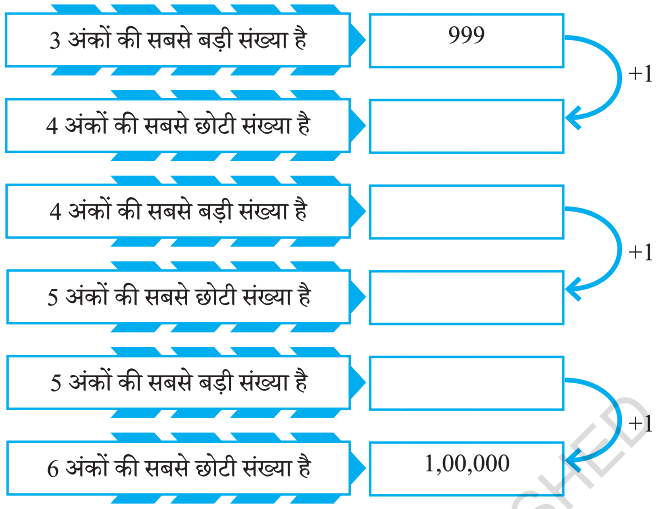
ईश्वरप्पा ने इस घटना को अपनी पुत्री रोक्सी और पुत्र ऐस्तु के साथ साझा किया।

ऐस्तु को यह जानकर आश्चर्य हुआ कि इस देश में चावल की लगभग एक लाख किस्में थीं। उसे आश्चर्य हुआ "एक लाख! अब तक मैंने केवल 3 किस्में ही चखी हैं। यदि हम प्रत्येक दिन एक नई किस्म को चखने का प्रयत्न करें तो सभी किस्मों का स्वाद लेने में जीवन काल के 100 वर्ष लग जाएँगे?"

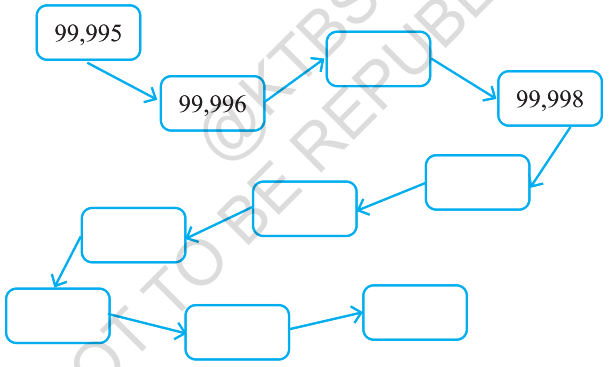
आप क्या सोचते हैं? अनुमान लगाइए।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

परंतु एक लाख होता कितना है? प्रतिरूप (पैटर्न) का निरीक्षण कीजिए और नीचे दिए गए बक्सों को भरिए।




***1,00,000 को "एक लाख" पढ़ा जाता है***




@KIRS NOT TO BE REPUBLISHED



रोक्सी और ऐस्तु ने पाया कि यदि वे प्रतिदिन एक किस्म का चावल खाते हैं तो वे जीवनभर में एक लाख किस्म के चावल खाने के निकट भी नहीं पहुँच पाएँगे। रोक्सी सुझाव देती है, "क्या होगा यदि हम 2 किस्मों के चावल प्रतिदिन खाएँ? क्या हम 100 वर्षों में 1 लाख किस्म के चावल खा सकेंगे?



? क्या होगा यदि एक व्यक्ति 3 किस्मों के चावल प्रतिदिन खाए? क्या वे 100 वर्षों के जीवन काल में सभी 1 लाख किस्मों का स्वाद ले सकेंगे? ज्ञात कीजिए।

ऐस्तु कहता है, "हम जानते हैं कि यदि हम अधिवर्ष (लीपवर्ष) को अनदेखा कर दें तो एक वर्ष में 365 दिन होते हैं। यदि हम y वर्षों तक जीवित रहते हैं तो हमारे जीवन काल में दिनों की संख्या $365 \times y$ होगी।"

y के लिए एक संख्या चुनिए। आपके चुने हुए y के लिए, y वर्षों में दिनों की संख्या 1 लाख के कितने निकट है?

## पता लगाइए

1. 2011 की जनगणना के अनुसार चिन्तामणि नगर की जनसंख्या लगभग 75,000 थी। 75,000 एक लाख से कितना कम है?
2. वर्ष 2024 में चिन्तामणि नगर की अनुमानित जनसंख्या 1,06,000 थी। 1,06,000 एक लाख से कितना अधिक है?
3. 2011 से 2024 तक चिन्तामणि नगर की जनसंख्या कितनी बढ़ी?

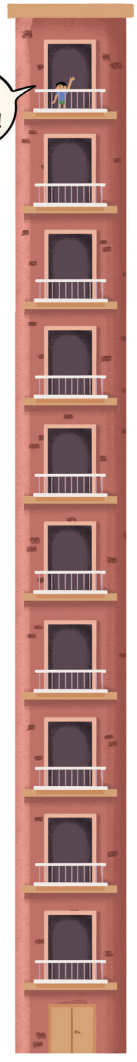
## बड़ी संख्याओं की अनुभूति

हो सकता है कि आपको इस तरह के रोचक तथ्य पता चले हों—

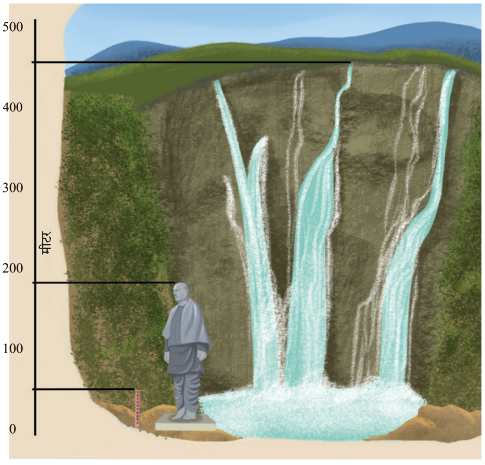
- गुजरात में स्थित सरदार वल्लभभाई पटेल की 'एकता की प्रतिमा' विश्व की सबसे ऊँची प्रतिमा है, इसकी ऊँचाई लगभग 180 मीटर है।
- कहा जाता है कि कर्नाटक में कुंचीकल जलप्रपात लगभग 450 मीटर ऊँचाई से गिरता है।

यह अनुमान लगा पाना सदैव सरल नहीं होता कि ये माप कितने बड़े हैं। परंतु जब हम उनकी तुलना पहले से परिचित किसी वस्तु के साथ करते हैं तब हमें उनके आकार की बेहतर समझ होती है; आइए, एक उदाहरण देखते हैं।

दाईं ओर दिए गए चित्र को देखिए। सोमू 1 मीटर लंबा है। यदि प्रत्येक तल उसकी ऊँचाई का चार गुना हो तो भवन की अनुमानित ऊँचाई क्या है?




कौन ऊँचा है _____ एकता की प्रतिमा या यह भवन? कितना ऊँचा है? _____ मी.




हम देख सकते हैं कि एकता की प्रतिमा की ऊँचाई सोमू के भवन की ऊँचाई की लगभग 4 गुनी है।

कुंचीकल जलप्रपात सोमू के भवन की तुलना में कितना ऊँचा है? _____ मी.

सोमू के भवन में कितने तल होने चाहिए ताकि उसकी ऊँचाई जलप्रपात की ऊँचाई के समान हो जाए?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## क्या एक लाख बहुत बड़ी संख्या है?



ईश्वरप्पा ने रोक्सी और ऐस्तु से पूछा, "एक लाख छोटा है या बड़ा?"
रोक्सी मानती है कि एक लाख एक बड़ी संख्या है—

- "हमारे पास चावल की एक लाख किस्में थीं— यह बहुत अधिक है।"
- "1 लाख दिन जीने का अर्थ होगा 274 वर्ष तक जीना— यह वास्तव में एक लंबा समय है!"
- "यदि एक लाख व्यक्ति कंधे से कंधा मिलाकर एक रेखा में खड़े हो जाएँ तो वे 38 किलोमीटर तक फैल सकते हैं।"

परंतु ऐस्तु सोचता है कि यह इतना बड़ा नहीं है—



- "क्या आप जानते हो कि अहमदाबाद के क्रिकेट स्टेडियम में एक लाख से अधिक व्यक्तियों के बैठने की क्षमता है? इतने छोटे से क्षेत्र में एक लाख व्यक्ति!"
- "अधिकांश मनुष्यों के सिर पर 80,000 से 1,20,000 बाल होते हैं। कल्पना कीजिए इतने छोटे से स्थान में एक लाख बाल कैसे समा जाते हैं!"
- "मैंने सुना है कि यहाँ मछलियों की कुछ ऐसी प्रजातियाँ हैं जहाँ एक मादा मछली एक बार में आराम से लगभग एक लाख अंडे देती है। कुछ तो एक बार में दस लाख तक अंडे देती हैं।"

? आप एक लाख को कैसे देखते हैं— क्या यह एक बड़ी संख्या है या छोटी?

## संख्याओं को लिखना और पढ़ना

हम पहले से ही भारतीय स्थानीय मान प्रणाली में 5 अंकों की संख्याओं में अल्पविराम (,) का उपयोग करते आ रहे हैं, जैसे— 45,830 जैसे-जैसे संख्याएँ बढ़ती जाती हैं, अल्पविराम का उपयोग संख्याओं को पढ़ना सरल बनाता है।

हम अल्पविराम का उपयोग अंकों के बीच में करते हैं, जैसे— "दस हजार" के स्थान और "एक लाख" के स्थान के बीच, जैसा कि आपने पहले देखा है (1,00,000)।

12,78,830 का संख्या नाम बारह लाख अठहत्तर हजार आठ सौ तीस है। इसी प्रकार, संख्या 15,75,000 को शब्दों में पंद्रह लाख पचहत्तर हजार कहेंगे।

नीचे दी गई संख्याओं को शब्दों में लिखिए—

(a) 3,00,600 (b) 5,04,085
(c) 27,30,000 (d) 70,53,138

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए भारतीय स्थानीय मान प्रणाली में संगत संख्या लिखिए—

(a) एक लाख तेईस हजार चार सौ छप्पन

(b) चार लाख सात हजार सात सौ चार

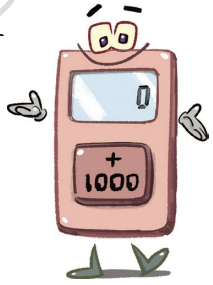
(c) पचास लाख पाँच हजार पचास

(d) दस लाख दो सौ पैंतीस

**शिक्षक हेतु टिप्पणी—** विद्यार्थियों को इन तथ्यों के बीच संबंध बनाने के लिए प्रोत्साहित कीजिए। उदाहरण के लिए, क्या चिन्तामणि नगर की समस्त जनसंख्या एक स्टेडियम में व्यवस्थित हो सकती है? हम कैसे कल्पना कर सकते हैं कि 38 किलोमीटर लंबी रेखा में एक लाख व्यक्ति स्टेडियम में एक-दूसरे के साथ में बैठ सकते हैं?

## 1.2 दहाइयों की भूमि

यहाँ **दहाइयों की भूमि** में, विशेष बटनों वाले कुछ विशेष गणक (कैलकुलेटर) हैं।




1. **हँसमुख हजार** के पास +1000 का एक बटन है। निम्नलिखित को दिखाने के लिए इसे कितनी बार दबाना चाहिए—

   (a) तीन हजार? 3 बार

   (b) 10,000? _____

   (c) तिरेपन हजार? _____

   (d) 90,000? _____

   (e) एक लाख? _____

   (f) _____ 153 बार?

   (g) 1 लाख बनाने के लिए कितने हजार चाहिए?




2. **दबंग दहाई** के पास +10 का मात्र एक बटन है। निम्नलिखित को दिखाने के लिए इसे कितनी बार दबाना चाहिए—

   (a) पाँच सौ? _____

   (b) 780? _____

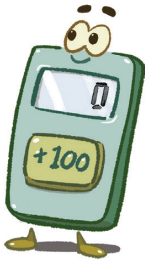
   (c) 1000? _____

   (d) 3700? _____

   (e) 10,000? _____

   (f) एक लाख? _____

   (g) _____ 435 बार?

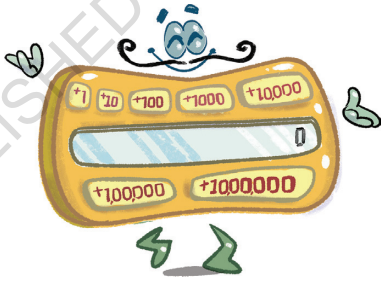



3. **समझदार सैकड़े** के पास +100 का मात्र एक बटन है। निम्नलिखित को दिखाने के लिए इसे कितनी बार दबाना चाहिए—

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(a) चार सौ? _____ बार
(b) 3,700? _____
(c) 10,000? _____
(d) तिरेपन हजार? _____
(e) 90,000? _____
(f) 97,600? _____
(g) 1,00,000? _____
(h) _____ 582 बार?
(i) दस हजार बनाने के लिए कितने सैकड़ों की आवश्यकता होती है?
(j) एक लाख बनाने के लिए कितने सैकड़ों की आवश्यकता होती है?
(k) समझदार सैकड़ा कहता है, "यहाँ कुछ संख्याएँ हैं जो दबंग दहाई और हँसमुख हजार नहीं दिखा सकता है, परंतु मैं दिखा सकता हूँ। क्या यह कथन सत्य है? सोचिए और खोजिए।

4. **चतुर चित्ती** एक अलग प्रकार का कैलकुलेटर है। इसमें निम्नलिखित बटन हैं— +1, +10, +100, +1000, +10000, +100000 और +1000000। इसमें सदैव काम करने के कई तरीके होते हैं। आप पूछ सकते हैं, "ऐसा कैसे?" संख्या 321 प्राप्त करने के लिए वह +10 को 32 बार और +1 को एक बार दबाता है। क्या उसे 321 प्राप्त होगा? वैकल्पिक रूप से वह +100 को दो बार, +10 को बारह बार तथा +1 को एक बार दबा सकता है।




5. 5072 को प्राप्त करने के लिए नीचे दो भिन्न प्रकार दिखाए गए हैं। इन दो प्रकारों को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है—
(a) $(50 \times 100) + (7 \times 10) + (2 \times 1) = 5072$
(b) $(3 \times 1000) + (20 \times 100) + (72 \times 1) = 5072$

| बटन | 5072 | |
|---|---|---|
| +10,00,000 | | |
| +1,00,000 | | |
| +10,000 | | |
| +1,000 | | 3 |
| +100 | 50 | 20 |
| +10 | 7 | |
| +1 | 2 | 72 |

? 5072 प्राप्त करने की एक अलग विधि ज्ञात कीजिए और उसी के लिए एक व्यंजक लिखिए।

### ? पता लगाइए

नीचे दी गई प्रत्येक संख्या के लिए संख्या को प्राप्त करने के लिए कम से कम दो भिन्न विधियों द्वारा बटन दबाकर व्यंजक लिखिए। चित्ती की तरह सोचिए और रचनात्मक बनिए।

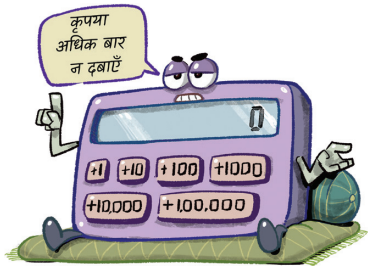
(a) 8300 (b) 40629
(c) 56354 (d) 66666
(e) 367813

© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

**चतुर चित्ती** के पास आपके लिए कुछ प्रश्न हैं—

(a) आपको संख्या बनाने के लिए बटन को ठीक 30 बार दबाना है। आप 3 अंकों की सबसे बड़ी संख्या कौन-सी बना सकते हैं? आप 3 अंकों की सबसे छोटी संख्या कौन-सी बना सकते हैं?

(b) 25 बार बटन दबाकर 997 प्राप्त किया जा सकता है। क्या 997 को 25 से कम या अधिक बार बटन दबाकर बना सकते हैं?




इसी प्रकार के प्रश्नों का निर्माण कीजिए और अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

साधारण सिप्पी एक अलग प्रकार का गणक है। इसमें निम्नलिखित बटन हैं— +1, +10, +100, +1,000, +10,000, +1,00,000। इसका उपयोग यथासंभव न्यूनतम किया जाना चाहिए।

? हम कम-से-कम बटन दबाकर संख्याएँ (a) 5072 और (b) 8300 कैसे प्राप्त कर सकते हैं?

पता लगाइए कि नीचे दी गई तालिका में वाँछित संख्या को प्राप्त करने के लिए कौन-सा बटन दबाना चाहिए और कितनी बार। इसका उद्देश्य यथासंभव कम बटन दबाना है।

यहाँ संख्या 5072 को प्राप्त करने की एक विधि दी गई है। इस विधि में बटनों को कुल 23 बार दबाया गया है।

क्या 23 से कम बार बटन को दबाकर 5072 प्राप्त करने की कोई अन्य विधि है?

इसके लिए एक व्यंजक लिखिए।

| बटन | 5072 |
|---|---|
| +10,00,000 | |
| +1,00,000 | |
| +10,000 | |
| +1,000 | 5 |
| +100 | 0 |
| +10 | 6 |
| +1 | 12 |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## ? पता लगाइए

1. पिछले 'पता लगाइए' में दी गई संख्याओं के लिए ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक संख्या को कम-से-कम बटन दबाकर कैसे प्राप्त किया जा सकता है और संगत व्यंजक लिखिए।
2. क्या आप प्रत्येक संख्या और सबसे कम बार बटन दबाने की संख्या के बीच कोई संबंध देखते हैं?
3. यदि आप ध्यान दें तो सबसे कम बटन दबाने के लिए व्यंजक संख्याओं का भारतीय स्थानीय मान संकेतन दिखाता है। सोचिए ऐसा क्यों है?

गणित चर्चा

क्या होगा यदि + 10,00,000 के बटन को 10 बार दबाया जाए? आपको कौन-सी संख्या प्राप्त होगी? इसमें कितने शून्य होंगे? हम इसे क्या कहेंगे? यह संख्या 100 लाख होगी, जिसे **1 करोड़** भी कहा जाता है। एक करोड़ को भारतीय स्थानीय मान प्रणाली में 1,00,00,000 लिखा जाता है। इसमें 1 के बाद में 7 शून्य होते हैं।

## 1.3 करोड़ और करोड़ों का!

नीचे दी गई तालिका में अंकों के नामकरण एवं अल्पविराम लगाने की भारतीय और अमेरिकी, दोनों पद्धतियों के अनुसार कुछ संख्याएँ दिखाई गई हैं (अमेरिकी पद्धति को अंतरराष्ट्रीय पद्धति भी कहा जाता है)। दोनों पद्धतियों में अल्पविराम के स्थानों को ध्यान से देखिए।

| भारतीय पद्धति | | अमेरिकी पद्धति/ अंतरराष्ट्रीय पद्धति | |
|---|---|---|---|
| 1,000 | एक हजार | 1,000 | एक हजार |
| 10,000 | दस हजार | 10,000 | दस हजार |
| 1,00,000 | एक लाख | 100,000 | सौ हजार |
| 10,00,000 | दस लाख | 1,000,000 | एक मिलियन |
| 1,00,00,000 | एक करोड़ | 10,000,000 | दस मिलियन |
| 10,00,00,000 | दस करोड़ | 100,000,000 | सौ मिलियन |
| 1,00,00,00,000 | एक अरब या सौ करोड़ | 1,000,000,000 | एक बिलियन |

ध्यान दीजिए कि भारतीय पद्धति में अंकों को समूहबद्ध करने के लिए 3-2-2... प्रतिरूप (पैटर्न) में दाएँ से बाएँ ओर अल्पविरामों को लगाया जाता है (हजार, लाख, करोड़ आदि)। अमेरिकी पद्धति में अंकों को समान रूप से समूहबद्ध करने के लिए 3-3-3-3... प्रतिरूप में दाएँ से बाएँ ओर अल्पविराम को लगाया जाता है (हजार, मिलियन, बिलियन आदि)।

भूटान, नेपाल, श्रीलंका, पाकिस्तान, बांग्लादेश, मालदीव, अफगानिस्तान और म्यांमार में भी संख्याओं के नामकरण की भारतीय पद्धति को अपनाया जाता है। लाख शब्द की उत्पत्ति संस्कृत के "लक्ष" शब्द से और करोड़ की उत्पत्ति संस्कृत के "कोटि" शब्द से हुई है। अमेरिकी पद्धति का भी बहुत से देशों में उपयोग किया जाता है।

1 लाख और 1 करोड़ में शून्यों की संख्या को ध्यान से देखिए।

1 लाख को 1 के आगे 5 शून्य लगाकर लिखा जाता है।

1 करोड़ को 1 के आगे 7 शून्य लगाकर लिखा जाता है।

1 लाख एक हजार का एक सौ गुना है, एक करोड़ एक लाख का एक सौ गुना है और एक अरब, एक करोड़ का एक सौ गुना है (अर्थात एक सौ हजार 1 लाख है, 100 लाख 1 करोड़ है और 100 करोड़ 1 अरब है)।

? एक हजार लाख में कितने शून्य हैं? _____

? एक सौ हजार में कितने शून्य हैं? _____

संख्या 9876501234 को अल्पविराम लगाकर सरलता से पढ़ा जा सकता है—

(a) 9,87,65,01,234 ⟶ 9 अरब 87 करोड़ 65 लाख 1 हजार और 234 या 987 करोड़ 65 लाख 1 हजार 234 (भारतीय पद्धति में)।

(b) 9,876,501,234 ⟶ 9 बिलियन 876 मिलियन 501 हजार 234 (अमेरिकी पद्धति में)।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

1. संख्याओं को भारतीय स्थानीय मान संकेतन के अनुसार पढ़िए और उनके संख्या नामों को भारतीय और अमेरिकी दोनों पद्धतियों में लिखिए—
   (a) 4050678 (b) 48121620
   (c) 20022002 (d) 246813579
   (e) 345000543 (f) 1020304050
2. निम्नलिखित संख्याओं को भारतीय स्थानीय मान संकेतन में लिखिए—
   (a) एक करोड़ एक लाख एक हजार दस
   (b) एक बिलियन एक मिलियन एक हजार एक
   (c) दस करोड़ बीस लाख तीस हजार चालीस
   (d) नौ बिलियन अस्सी मिलियन सात सौ हजार छह सौ
3. तुलना कीजिए और '<', '>' या '=' उपयुक्त चिह्न लगाइए—
   (a) 30 हजार _____ 3 लाख
   (b) 500 लाख _____ 5 मिलियन
   (c) 800 हजार _____ 8 मिलियन
   (d) 640 करोड़ _____ 60 बिलियन

आगे की कक्षाओं में हमें इससे भी बड़ी संख्याएँ मिलेंगी।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## 1.4 सटीक और सन्निकट मान




आप इस बातचीत के बारे में क्या सोचते हैं? क्या आपने ऐसा कोई समाचार या कथन पढ़ा या सुना है?

बहुत बार यथार्थ संख्या की आवश्यकता नहीं होती और केवल सन्निकट मान ही पर्याप्त होता है। उदाहरण के लिए, 2011 की जनगणना के अनुसार चिन्तामणि नगर की जनसंख्या 76,068 है। इसके स्थान पर यह कहना कि जनसंख्या लगभग 75,000 है, यह अनुमान लगाने के लिए पर्याप्त है कि संख्या कितनी बड़ी है।




© KSSB NOT TO BE REPUBLISHED

कुछ ऐसी परिस्थितियाँ होती हैं जहाँ एक संख्या को ऊपर की ओर सन्निकटित करना उचित होता है (जब सन्निकटित संख्या वास्तविक संख्या से अधिक होती है तो उसे ऊपर की ओर सन्निकटित किया जाता है)। उदाहरण के लिए, यदि एक विद्यालय में विद्यार्थियों, शिक्षकों, कर्मचारियों और प्रधानाचार्य को मिलाकर 732 व्यक्ति हैं तो वे 700 मिठाइयों के स्थान पर 750 मिठाइयाँ मंगा सकते हैं।

कुछ ऐसी परिस्थितियाँ होती हैं जहाँ नीचे की ओर सन्निकटित करना अच्छा होता है (जब सन्निकटित संख्या वास्तविक संख्या से कम होती है तो उसे नीचे की ओर सन्निकटित करते हैं)। उदाहरण के लिए, यदि एक वस्तु का मूल्य ₹470 हो तो दुकानदार मूल्य ₹500 की जगह ₹450 के आस-पास बता सकता है।

? सोचिए और ऐसी परिस्थितियों को साझा कीजिए जहाँ यह उचित हो (a) ऊपर की ओर सन्निकटन (b) नीचे की ओर सन्निकटन (c) या तो ऊपर की ओर सन्निकटन अथवा नीचे की ओर सन्निकटन सही हो और (d) जब यथार्थ संख्याओं की आवश्यकता हो।

## निकटतम पड़ोसी

बड़ी संख्याओं के साथ निकटतम हजार, लाख या करोड़ जानना उपयोगी होता है। उदाहरण के लिए, संख्या 6,72,85,183 की निकटतम संख्या आगे दी गई तालिका में दिखाई गई हैं—

| | |
|---|---|
| निकटतम हजार | 6,72,85,000 |
| निकटतम दस हजार | 6,72,90,000 |
| निकटतम लाख | 6,73,00,000 |
| निकटतम दस लाख | 6,70,00,000 |
| निकटतम करोड़ | 7,00,00,000 |

? इसी प्रकार इन संख्याओं के लिए पाँच निकटतम संख्या लिखिए—

(a) 3,87,69,957 (b) 29,05,32,481

? मेरे पास एक संख्या है जिसके लिए सभी पाँच निकटतम संख्या 5,00,00,000 हैं। यह संख्या क्या हो सकती है? ऐसी यहाँ कितनी संख्याएँ हैं?

गणित चर्चा

रोक्सी और ऐस्तु सरल व्यंजकों के मानों का अनुमान लगा रहे हैं।

1. 4,63,128 + 4,19,682,

रोक्सी— "इनका योगफल 8,00,000 के निकट है और 8,00,000 से अधिक है।"

ऐस्तु— "इनका योगफल 9,00,000 के निकट है और 9,00,000 से कम है।"

(a) क्या ये अनुमान सही हैं? किसका अनुमान योगफल के निकटतम है?

(b) क्या इनका योगफल 8,50,000 से अधिक होगा या 8,50,000 से कम होगा? आप ऐसा क्यों सोचते हैं?

(c) क्या इनका योगफल 8,83,128 से अधिक होगा या 8,83,128 से कम होगा? आपको ऐसा क्यों लगता है?

(d) 4,63,128 + 4,19,682 का यथार्थ मान = _____ है।

2. 14,63,128 – 4,90,020

रोक्सी — "इनका अंतर 10,00,000 के निकट है और 10,00,000 से कम है।"

ऐस्तु — "इनका अंतर 9,00,000 के निकट है और 9,00,000 से अधिक है।"

(a) क्या ये अनुमान सही हैं? किसका आकलन अंतर के निकटतम है?

(b) क्या इनमें अंतर 9,50,000 से अधिक होगा या 9,50,000 से कम होगा? आपको ऐसा क्यों लगता है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(c) क्या अंतर 9,63,128 से अधिक होगा या 9,63,128 से कम होगा? आपको ऐसा क्यों लगता है?

(d) 14,63,128 – 4,90,020 का सटीक मान = _____ है।

**शिक्षक हेतु टिप्पणी —** विद्यार्थियों से इस प्रकार के प्रश्न पूछिए, "यदि दो संख्याओं का योगफल 8,50,000 से कम हो तो संख्याएँ क्या होंगी?"

## नगरों की जनसंख्या

नीचे दी गई तालिका में कुछ भारतीय नगरों की जनसंख्या को देखिए—

| क्रम | शहर | जनसंख्या (2011) | जनसंख्या (2001) |
|---|---|---|---|
| 1 | मुंबई | 1,24,42,373 | 1,19,78,450 |
| 2 | नई दिल्ली | 1,10,07,835 | 98,79,172 |
| 3 | बेंगलुरू | 84,25,970 | 43,01,326 |
| 4 | हैदराबाद | 68,09,970 | 36,37,483 |
| 5 | अहमदाबाद | 55,70,585 | 35,20,085 |
| 6 | चेन्नई | 46,81,087 | 43,43,645 |
| 7 | कोलकाता | 44,86,679 | 45,72,876 |
| 8 | सूरत | 44,67,797 | 24,33,835 |
| 9 | वडोदरा | 35,52,371 | 16,90,000 |
| 10 | पुणे | 31,15,431 | 25,38,473 |
| 11 | जयपुर | 30,46,163 | 23,22,575 |
| 12 | लखनऊ | 28,15,601 | 21,85,927 |
| 13 | कानपुर | 27,67,031 | 25,51,337 |
| 14 | नागपुर | 24,05,665 | 20,52,066 |
| 15 | इंदौर | 19,60,631 | 14,74,968 |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | ठाणे | 18,18,872 | 12,62,551 |
| 17 | भोपाल | 17,98,218 | 14,37,354 |
| 18 | विशाखापटनम | 17,28,128 | 13,45,938 |
| 19 | पिपरी-चिंचवड़ | 17,27,692 | 10,12,472 |
| 20 | पटना | 16,84,222 | 13,66,444 |

? तालिका में दी गई सूचनाओं के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर सन्निकट मानों के द्वारा दीजिए—

1. इन आँकड़ों के विषय में आपका सामान्य अवलोकन क्या है? कक्षा के साथ साझा कीजिए।
2. उपर्युक्त तालिका के लिए एक उपयुक्त शीर्षक क्या है?
3. 2011 में पुणे की जनसंख्या कितनी है? 2001 की तुलना में इसमें लगभग कितनी वृद्धि हुई है?
4. 2001 और 2011 के बीच में किस नगर की जनसंख्या में सबसे अधिक वृद्धि हुई?
5. क्या यहाँ ऐसे भी नगर हैं जिनकी जनसंख्या लगभग दो गुनी हो गई? यह कौन-से नगर हैं?
6. पटना की जनसंख्या को किस संख्या से गुणा किया जाए कि वह मुंबई की जनसंख्या के लगभग समान हो जाए?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 1.5 गुणनफल में प्रतिरूप

रोक्सी और ऐस्तु गुणन का खेल, खेल रहे हैं। संख्या को 10, 100 अथवा 1000 ... आदि से गुणा करने के लिए उन्होंने एक रोचक तकनीक देखी।

### गुणन की एक संक्षिप्त विधि

रोक्सी $116 \times 5$ को निम्न तरीके से हल करती है—

$$116 \times 5 = \overset{58}{\cancel{116}} \times \frac{10}{\cancel{2}}$$

$$= 58 \times 10$$

$$= 580$$

ऐस्तु 824 × 25 का मान इस तरह निकालता है

$$824 \times 25 = \cancel{824}^{206} \times \frac{100}{\cancel{4}}$$

$$= 20600$$

? क्या आप गुणन और विभाजन के अर्थ का उपयोग करते हुए यह स्पष्ट कर सकते हैं कि किसी संख्या को 5 से गुणा करना या उसे 2 से भाग करके 10 से गुणा करने पर समान संख्या क्यों प्राप्त होती है?

गणित चर्चा

## ? पता लगाइए

1. इन गुणनफलों का शीघ्र परिकलन करने की विधियाँ ज्ञात कीजिए—
   (a) 2 × 1768 × 50
   (b) 72 × 125 [**संकेत** — $125 = \frac{1000}{8}$ ]
   (c) 125 × 40 × 8 × 25
2. इन गुणनफलों का परिकलन शीघ्र कीजिए—
   (a) 25 × 12 = _____
   (b) 25 × 240 = _____
   (c) 250 × 120 = _____
   (d) 2500 × 12 = _____
   (e) _____ × _____ = 120000000

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## गुणनफल कितना लंबा है?

नीचे दिए गए प्रत्येक बक्से में गुणन के रोचक पैटर्न दिखाई देते हैं। पैटर्न ज्ञात करने के लिए उन्हें हल कीजिए। ज्ञात पैटर्न के आधार पर गुणन को आगे बढ़ाइए।

| | |
|---|---|
| 11 × 11 =<br>111 × 111 =<br>1111 × 1111 = | 66 × 61 =<br>666 × 661 =<br>6666 × 6661 = |
| 3 × 5 =<br>33 × 35 =<br>333 × 335 = | 101 × 101 =<br>102 × 102 =<br>103 × 103 = |

? गुणा की जाने वाली दोनों संख्याओं में अंकों की संख्याओं और प्रत्येक स्थिति में उनके गुणनफल को ध्यान से देखिए। क्या गुणा की जाने वाली संख्याओं में और उनके गुणनफल में अंकों की संख्याओं के बीच कोई संबंध है?

? रोक्सी कहती है कि 2 अंकों की दो संख्याओं का गुणनफल केवल 3 या 4 अंकों की संख्या ही हो सकती है। क्या वह सही है?

? यह जानने के लिए कि रोक्सी का कथन सही है, क्या हमें 2 अंकों की संख्याओं के साथ सभी संभव गुणन का प्रयत्न करना चाहिए? या इसे पता लगाने की कोई और उपयुक्त विधि है?



वह अपना तर्क समझाती है, "हम 2 अंकों की दो संख्याओं के गुणनफल में प्राप्त अंकों की संख्या के बारे में जानना चाहते हैं। इस तरह का सबसे छोटा गुणनफल जानने के लिए मैं $10 \times 10$ लेती हूँ। इसलिए इसके अतिरिक्त सभी गुणनफल 100 से बड़े होंगे। ऐसा सबसे बड़ा गुणनफल ज्ञात करने के लिए मैं 3 अंकों की न्यूनतम संख्याओं को गुणा करके $100 \times 100 = 10{,}000$ प्राप्त करूँगी। अत: 2 अंकीय संख्याओं का गुणनफल सदैव 10,000 से कम होगा।"

? क्या 3 अंकों की संख्या को दूसरी 3 अंकों की संख्या से गुणा करने पर 4 अंकों की संख्या प्राप्त होगी?

? क्या 4 अंकों की संख्या को 2 अंकों की संख्या के साथ गुणा करने पर 5 अंकों की संख्या प्राप्त होगी?

? नीचे दिए गए गुणन कथनों को देखिए। क्या आप कोई पैटर्न देखते हैं? देखिए कि क्या यह पैटर्न अन्य संख्याओं पर भी लागू होता है?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-अंक | × | 1-अंक | = | 1-अंक | या | 2-अंक |
| 2-अंक | × | 1-अंक | = | 2-अंक | या | 3-अंक |
| 2-अंक | × | 2-अंक | = | 3-अंक | या | 4-अंक |
| 3-अंक | × | 3-अंक | = | 5-अंक | या | 6-अंक |
| 5-अंक | × | 5-अंक | = | | या | |
| 8-अंक | × | 3-अंक | = | | या | |
| 12-अंक | × | 13-अंक | = | | या | |

@KVBC NOT TO BE REPUBLISHED

## बड़ी संख्याओं के बारे में आकर्षक तथ्य

बड़ी संख्याओं के बारे में कुछ रोचक तथ्य नीचे छिपे हुए हैं। इन तथ्यों को उजागर करने के लिए गुणनफल या भागफल का परिकलन कीजिए। एक बार जब आप गुणनफल या भागफल ज्ञात करते हैं तो संख्या को भारतीय तथा अमेरिकन, दोनों पद्धतियों में पढ़िए। प्रत्येक संख्या को खोजने के बाद उस तथ्य के बारे में अपने विचार और प्रश्न कक्षा के साथ साझा कीजिए।

$1250 \times 380$

दंत कथाओं के अनुसार पुरंदरदास द्वारा रचित कीर्तनों की संख्या $1250 \times 380$ है। पुरंदरदास पंद्रहवीं शताब्दी के एक संगीतकार और गायक हैं। उनके कीर्तनों में सामाजिक सुधार, भक्ति और आध्यात्मिकता सम्मिलित थी। उन्होंने कर्नाटक संगीत सिखाने के तरीकों को व्यवस्थित किया जिनका पालन आज भी किया जाता है।





इतने सारे गीत रचने के लिए वे कितने वर्षों तक जीवित रहे? उन्होंने कितने वर्ष की आयु में गीतों की रचना प्रारंभ की थी? यदि उन्होंने 4,75,000 गीतों की रचना की तो उन्होंने प्रतिवर्ष कितने गीतों की रचना की?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**$2100 \times 70{,}000$**

**पृथ्वी और सूर्य के बीच की दूरी लगभग $2,100 \times 70,000$ किलोमीटर है। यह दूरी पूरे वर्ष बदलती रहती है। सबसे अधिक दूरी लगभग 15 करोड़ 20 लाख किलोमीटर है।**

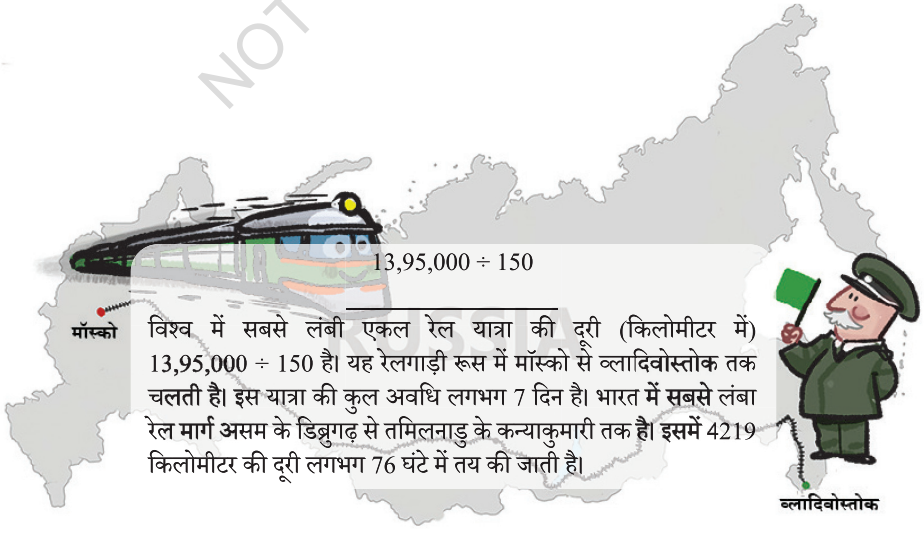



**6,400 × 62,500**

**अमेजन नदी द्वारा अटलांटिक महासागर में प्रति सेकंड छोड़े जाने वाले जल की औसत मात्रा 6,400 × 62,500 लीटर है। अटलांटिक महासागर में नदी का प्रवाह इतना अधिक है कि पीने योग्य शुद्ध मीठा जल खुले समुद्र में 160 किलोमीटर दूर तक भी पाया जाता है।**

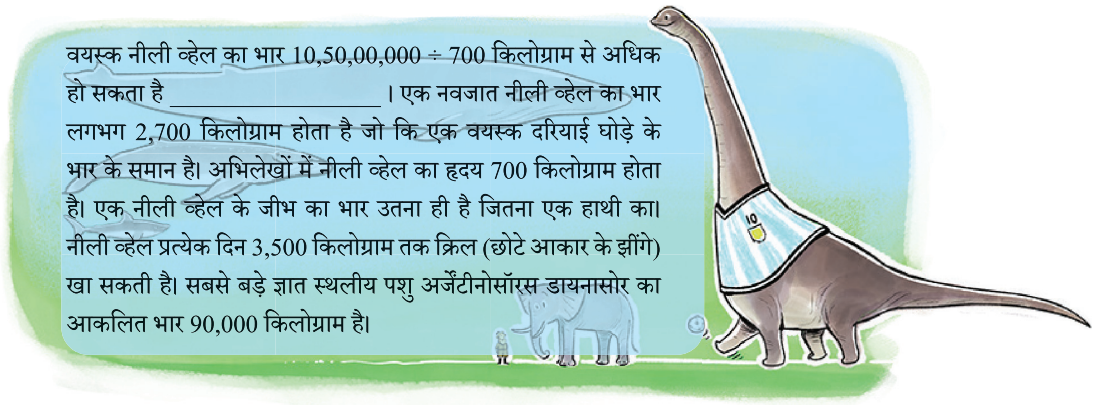
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

जैसा कि आपने पहले किया था, वैसे ही विभाजन के विषय में रोचक तथ्यों को उजागर करने के लिए दी गई संख्याओं को विभाजित कीजिए। प्रत्येक संख्या का पता लगाने के बाद अपने विचारों को और प्रश्नों को कक्षा के साथ साझा कीजिए।

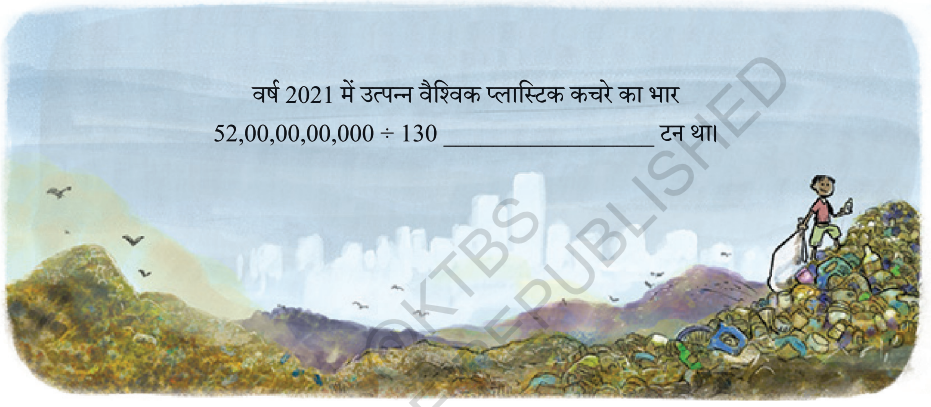



**13,95,000 ÷ 150**

विश्व में सबसे लंबी एकल रेल यात्रा की दूरी (किलोमीटर में) 13,95,000 ÷ 150 है। यह रेलगाड़ी रूस में मॉस्को से व्लादिवोस्तोक तक चलती है। इस यात्रा की कुल अवधि लगभग 7 दिन है। भारत में सबसे लंबा रेल मार्ग असम के डिब्रुगढ़ से तमिलनाडु के कन्याकुमारी तक है। इसमें 4219 किलोमीटर की दूरी लगभग 76 घंटे में तय की जाती है।



वयस्क नीली व्हेल का भार 10,50,00,000 ÷ 700 किलोग्राम से अधिक हो सकता है _____। एक नवजात नीली व्हेल का भार लगभग 2,700 किलोग्राम होता है जो कि एक वयस्क दरियाई घोड़े के भार के समान है। अभिलेखों में नीली व्हेल का हृदय 700 किलोग्राम होता है। एक नीली व्हेल के जीभ का भार उतना ही है जितना एक हाथी का। नीली व्हेल प्रत्येक दिन 3,500 किलोग्राम तक क्रिल (छोटे आकार के झींगे) खा सकती है। सबसे बड़े ज्ञात स्थलीय पशु अर्जेंटीनोसॉरस डायनासोर का आकलित भार 90,000 किलोग्राम है।



वर्ष 2021 में उत्पन्न वैश्विक प्लास्टिक कचरे का भार 52,00,00,00,000 ÷ 130 _____ टन था।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

**बड़ी संख्या का तथ्य**

1 ग्राम स्वस्थ मिट्टी में 10 करोड़ से 1 अरब तक बैक्टीरिया और 1 लाख से 10 लाख तक कवक हो सकते हैं जो पौधों की वृद्धि और स्वास्थ्य में सहायता कर सकते हैं।

अपनी कक्षा के विद्यार्थियों के साथ उन बड़ी संख्याओं के तथ्यों को साझा कीजिए जिन्हें आप जानते हैं या जिनसे आप परिचित हैं।

## 1.6 क्या आपने कभी सोचा...?

ऐस्तु बड़ी संख्याओं के बारे में इन सभी रोचक तथ्यों से प्रसन्न है। इनके बारे में सोचते हुए उसने एक असामान्य प्रश्न सामने रखा, "क्या मुंबई की पूरी जनसंख्या एक लाख बसों में समा सकती है?"

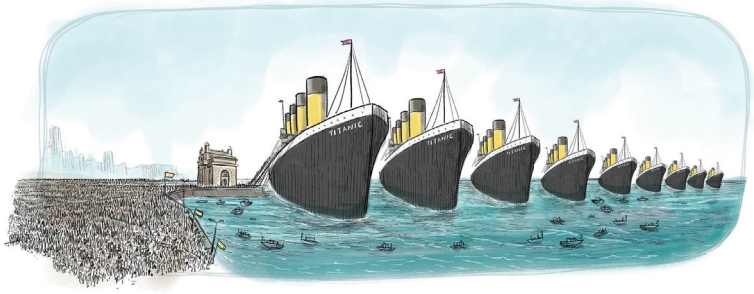
आपको क्या लगता है?

हम इसका पता कैसे लगा सकते हैं?

माना कि एक बस में 50 व्यक्ति बैठ सकते हैं तो 1 लाख बसों में 1 लाख × 50 = 50 लाख व्यक्तियों को बैठाया जा सकता है।

मुंबई की जनसंख्या 1 करोड़ 24 लाख से अधिक है (यह हमने पीछे दी गई तालिका में देखा था)। अत: मुंबई की पूरी जनसंख्या 1 लाख बसों में नहीं समा सकती है।

? आर.एम.एस. टाइटैनिक जहाज पर लगभग 2,500 यात्री सवार थे। क्या मुंबई की जनसंख्या ऐसे 5,000 जहाजों में समा सकती है?




इस अनोखे प्रश्न से प्रेरित होकर रोक्सी को आश्चर्य हुआ। "यदि मैं 100 किलोमीटर की यात्रा प्रत्येक दिन कर करूँ तो क्या मैं चाँद तक 10 वर्षों में पहुँच सकती हूँ?" (पृथ्वी और चाँद के बीच की दूरी 3,84,400 किलोमीटर है।)

एक वर्ष में वह कितनी दूरी की यात्रा कर सकेगी?

10 वर्षों में वह कितनी दूरी की यात्रा कर सकेगी?

क्या इन गणनाओं को चरणों में करना सरल नहीं है? आप इस विधि का उपयोग सभी बड़ी गणनाओं को करने में कर सकते हैं।

? यदि आप प्रतिदिन 1,000 किलोमीटर की यात्रा करते हैं तो पता लगाइए कि क्या आप अपने जीवनकाल में सूर्य तक पहुँच सकते हैं? (आपने पृथ्वी और सूर्य के बीच की दूरी को पिछले 'पृष्ठ 16' में देखा था।)

? आवश्यक तर्कसंगत कल्पना कीजिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(a) यदि कागज की एक शीट (पत्रक) का भार 5 ग्राम हो तो क्या आप एक लाख कागज की शीटों को एक साथ उठा सकते हो?

(b) यदि पूरे विश्व में प्रत्येक मिनट में 250 शिशु जन्म लेते हैं तो क्या एक दिन में 10 लाख (1 मिलियन) शिशु जन्म ले सकते हैं?

(c) क्या आप 10 लाख सिक्कों को एक दिन में गिन सकते हैं? मान लीजिए की आप प्रत्येक सेकंड में 1 सिक्का गिन सकते हो।

? सोचिए और ऐसे रोचक प्रश्न बनाइए और उन्हें अपनी कक्षा के साथ साझा कीजिए।

## ? पता लगाइए

1. 10 अंकों की संख्या बनाने के लिए 0 से 9 तक सभी अंकों को एक बार (पहला अंक 0 नहीं हो सकता) प्रयोग करते हुए लिखिए—

(a) 5 का सबसे बड़ा गुणज (b) सबसे छोटी सम संख्या

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

2. संख्या 10,30,285 शब्दों में दस लाख तीस हजार दो सौ पिचासी है जिसमें 14 अक्षर हैं। 7 अंकों की ऐसी संख्या का नाम लिखिए जिसमें अक्षरों की संख्या अधिकतम हो।

3. 9 अंकों की ऐसी संख्या लिखिए जिसमें किन्हीं दो अंकों को परस्पर बदलने पर एक बड़ी संख्या प्राप्त हो। ऐसी कितनी संख्याएँ हैं?

4. संख्या 12345123451234512345 में से 10 अंकों को इस प्रकार काटिए कि शेष संख्या संभवत: बड़ी से बड़ी हो।

5. शब्द 'बारह' और 'तेरह' में अक्षर (र और ह) समान हैं। शब्द 'तेरह' और 'चौदह' में अक्षर (ह) समान है और शब्द 'चौदह' और 'पंद्रह' में अक्षर (द और ह) समान हैं। ऐसी दो क्रमागत संख्याओं को ज्ञात करने के लिए आपको कहाँ तक गिनना होगा जिसमें कोई भी अक्षर उभयनिष्ठ न हो?

6. माना कि आप सभी संख्याओं 1,2,3,4,...,9,10,11,... को लिखते हैं। आपके द्वारा लिखा गया दसवाँ अंक 1 है और ग्यारहवाँ अंक 0 है और यह संख्या 10 का भाग है।




   (a) 1000वाँ अंक क्या होगा? यह किस संख्या पर आएगा?
   (b) किस संख्या में 10 लाखवाँ अंक आएगा?
   (c) आपने अंक 5 को 5000वीं बार कब लिखा होगा?




7. एक गणक में केवल +10,000 और +100 के ही बटन हैं। निम्नलिखित संख्याओं को बनाने के लिए बटनों को दबाने की संख्या का वर्णन करते हुए एक व्यंजक लिखिए—
   (a) 20,800 (b) 92,100
   (c) 1,20,500 (d) 65,30,000
   (e) 70,25,700

8. कितने लाख मिलकर एक बिलियन बनाते हैं?

9. आपको 1 से 9 तक संख्यांकित संख्या पत्रकों के दो समूह दिए गए हैं। नीचे दिए गए प्रत्येक बक्से में एक संख्या पत्रक को रखकर निम्न परिणामों को प्राप्त कीजिए—
   (a) सबसे बड़ा संभावित योगफल
   (b) दो परिणामी संख्याओं का सबसे छोटा संभावित अंतर

© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED



10. आपको कुछ संख्या पत्रक— 4,000, 13,000, 300, 70,000, 1,50,000, 20 और 5 दिए गए हैं। इन पत्रकों का उपयोग करके आप अपनी इच्छानुसार किन्हीं भी संक्रियाओं का उपयोग करके नीचे दी गई संख्याओं के जितना हो सके उतना निकटतम पहुँच सकते हैं। एक विशिष्ट संख्या को बनाने के लिए प्रत्येक पत्रक का उपयोग केवल एक बार किया जा सकता है।
    (a) 1,10,000 — मैं इसका निकटतम $4000 \times (20 + 5) + 13000 = 1,13,000$ बना सकता हूँ।
    (b) 2,00,000 —
    (c) 5,80,000 —
    (d) 12,45,000 —
    (e) 20,90,800 —
11. पता लगाइए कि 'एकता की प्रतिमा' की ऊँचाई से मिलान करने के लिए कितने सिक्कों का ढेर लगाना चाहिए। मान लीजिए कि प्रत्येक सिक्के की मोटाई 1 मिलीमीटर है।
12. एक बहुत बड़े समुद्री पक्षी एल्बाट्रॉस के पंखों का फैलाव लगभग 7 फीट चौड़ा होता है। वे कई महासागरों में स्थानांतरण के लिए जाने जाते हैं। एल्बाट्रॉस एक दिन में लगभग 900 से 1,000 किलोमीटर की दूरी तय कर सकता है। रिकॉर्ड में सबसे लंबी एकल यात्रा 12,000 किलोमीटर है। प्रशांत महासागर को पार करने में ऐसी यात्रा में लगभग कितने दिन लगेंगे?



13. लिमोसा (एक पक्षी) के नाम सबसे लंबी अविरत उड़ान का रिकॉर्ड दर्ज है। बिना रुके अलास्का से आस्ट्रेलिया 13,560 किलोमीटर की यात्रा की। यह यात्रा 13 अक्तूबर 2022 से आरंभ होकर लगभग 11 दिन लगातार चली। उसके द्वारा प्रत्येक दिन में तय की गई लगभग दूरी ज्ञात कीजिए। पता लगाइए कि उसने प्रत्येक घंटे में लगभग कितनी दूरी तय की।
14. बॉल्ड ईगल को भूतल से 4,500 से 6,000 मीटर की ऊँचाई तक उड़ने के लिए जाना जाता है। माउंट एवरेस्ट की ऊँचाई लगभग 8,850 मीटर है। हवाई जहाज 10,000 से 12,800 मीटर की ऊँचाई तक उड़ सकता है। सोमू के भवन की तुलना में ये ऊँचाइयाँ कितनी गुना बड़ी हैं?



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## सारांश

- हमें लाख, करोड़, अरब; मिलियन और बिलियन जैसी बड़ी संख्याएँ मिलीं। हमने सीखा कि इन संख्याओं को भारतीय और अमेरिकन (अंतरराष्ट्रीय) पद्धतियों में कैसे लिखा और पढ़ा जाता है।
  (a) 1 लाख में 1 के आगे 5 शून्य होते हैं— 1,00,000
  (b) 1 करोड़ में 1 के आगे 7 शून्य होते हैं— 1,00,00,000
  (c) 1 मिलियन में 1 के आगे 6 शून्य होते हैं— 10,00,000 (जो 10 लाख भी है)
  (d) 1 अरब में 1 के आगे 9 शून्य होते हैं— 1,00,00,00,000 (जिसे 100 करोड़ या 1 बिलियन भी कहते हैं)
- हम सामान्यत: बड़ी संख्याओं को ऊपर की ओर सन्निकटित करते हैं अथवा नीचे की ओर सन्निकटित करते हैं। कई बार यह जानना ही पर्याप्त होता है कि कोई वस्तु कितनी बड़ी या छोटी है।
- बड़ी संख्याओं या राशियों की समझ प्राप्त करने के लिए हम जाँच सकते हैं कि वे उन संख्याओं या राशियों की तुलना में कितनी गुना बड़ी हैं जिनसे हम अधिक परिचित हैं।
- हमने देखा कि संख्याओं को कैसे गुणनखंडित किया जाए और गुणन को सरल बनाने के लिए उन्हें पुन: समूहीकृत कैसे किया जाए।
- हमने कुछ रोचक विचारों का प्रयोग किया, जैसे— "क्या कोई व्यक्ति एक वर्ष में 1,000 फिल्में देख सकेगा?"

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



पहेली का समय!

## टूथपिक अंक

हम अंकों को नीचे चित्र में दिखाए गए तरीके से लिख सकते हैं। —



आप इस विधि से अंकों को लिखने के लिए टूथपिक का या माचिस की तीलियों का उपयोग कर सकते हैं या फिर अंकों को केवल इस प्रकार से भी लिख सकते हैं कि तीलियों को दिखाने के लिए रेखाओं का उपयोग हो।

अंक 7 को बनाने के लिए, 3 तीलियों की आवश्यकता है।

संख्या 5,108 को बनाइए। इसके लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता है?

1. संख्या 42,019 को बनाइए। इसके लिए ठीक 23 तीलियों की आवश्यकता होगी।
2. 42,019 से आरंभ करके दो और तीलियों को बनाइए और इससे एक बड़ी संख्या बनाइए। एक उदाहरण 42,078 है। इस प्रकार से आप 42,019 से बड़ी और कौन-कौन सी संख्याएँ बना सकते हो?
3. प्रीतम अंक '1' को अंकों '4', '2', '0', '1' और '9' के बीच कहीं रखना चाहता है। उसे अंक '1' को कहाँ रखना चाहिए कि उसे सबसे बड़ी संभावित संख्या प्राप्त हो?
4. वह अंक '1' को रखकर और कौन-सी संख्याएँ बना सकता है?

1. संख्या 63,890 को बनाइए या लिखिए।
2. 63,890 से आरंभ करके ठीक चार तीलियों को पुन: व्यवस्थित कीजिए और एक बड़ी संख्या बनाइए। एक उदाहरण 88,078 है। इस प्रकार से आप 63,890 से बड़ी और कौन-कौन सी संख्याएँ बना सकते हो?

1. ठीक 24 तीलियों या रेखाओं का उपयोग करके कोई भी संख्या बनाइए।
2. 24 तीलियों या रेखाओं का उपयोग करके बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है?
3. 24 तीलियों या रेखाओं का उपयोग करके बनाई जा सकने वाली सबसे छोटी संख्या कौन-सी है?

आप स्वयं प्रश्न बनाइए और एक-दूसरे को चुनौती दीजिए।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

# 2 अंकगणितीय व्यंजक

0775CH02

## 2.1 सरल व्यंजक

आपने 13 + 2, 20 – 4, 12 × 5, और 18 ÷ 3 जैसे गणितीय वाक्यांश देखे होंगे। ऐसे वाक्यांश **अंकगणितीय व्यंजक** कहलाते हैं।

प्रत्येक अंकगणितीय व्यंजक का एक मान वह संख्या होती है जिसका मूल्यांकन किया जाता है। उदाहरण के लिए, व्यंजक 13 + 2 का मान 15 है। इस व्यंजक को '13 धन 2' या '13 और 2 का योग' पढ़ा जा सकता है।

हम अंकगणितीय व्यंजक और इसके मान के बीच संबंध निरूपित करने या दर्शाने के लिए बराबर के चिह्न '=' का उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए—

$$13 + 2 = 15$$

**उदाहरण 1 —** मल्लिका विद्यालय में भोजन के लिए प्रतिदिन ₹25 खर्च करती है। उसके द्वारा एक सप्ताह में सोमवार से शुक्रवार तक भोजन हेतु खर्च की गई कुल राशि के लिए एक व्यंजक लिखिए।

कुल राशि के लिए व्यंजक 5 × 25 है।

5 × 25, '25 का 5 गुना' या '5 और 25 का गुणनफल' है।

विभिन्न व्यंजकों का मान समान हो सकता है। यहाँ 12 को दो संख्याओं और चार गणितीय संक्रियाओं +, –, × और ÷ में से किसी एक का उपयोग करके व्यक्त करने के विभिन्न तरीके हैं—

$$10 + 2,\ 15 - 3,\ 3 \times 4,\ 24 \div 2$$

आप अपनी पसंदीदा संख्या चुनिए और उस मान के लिए आप जितने व्यंजक लिख सकते हैं, उतने लिखिए।

### व्यंजकों की तुलना

जिस प्रकार हम '=' '<' और '>' के चिह्नों का उपयोग करके संख्याओं की तुलना करते हैं, उसी प्रकार हम व्यंजकों की भी तुलना कर सकते हैं। हम व्यंजकों की तुलना उनके मानों के आधार पर करते हैं और उसी के अनुसार 'के बराबर', 'से बड़ा है' या 'से छोटा है' का चिह्न लगाते हैं। उदाहरण के लिए—

$$10 + 2 > 7 + 1$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्योंकि 10 + 2 का मान 12 है जो कि 7 + 1 के मान 8 से बड़ा है।
इसी प्रकार

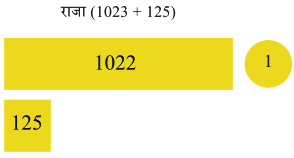
$$13 - 2 < 4 \times 3$$

## पता लगाइए

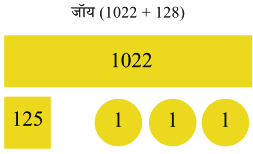
1. बराबर '=' के चिह्न के दोनों ओर के व्यंजकों को समान बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—
   (a) $13 + 4 =$ ____ $+ 6$ (b) $22 +$ ____ $= 6 \times 5$
   (c) $8 \times$ ____ $= 64 \div 2$ (d) $34 -$ ____ $= 25$
2. निम्नलिखित व्यंजकों को उनके मानों के बढ़ते क्रम में व्यवस्थित कीजिए।
   (a) $67 - 19$ (b) $67 - 20$
   (c) $35 + 25$ (d) $5 \times 11$
   (e) $120 \div 3$

**उदाहरण 2**— कौन-सा व्यंजक बड़ा है? $1023 + 125$ या $1022 + 128$?

मानों को ज्ञात किए बिना एक स्थिति का अनुमान लगाने से उत्तर देने में हमें सहायता मिल सकती है। राजा के पास 1023 कंचे थे एवं आज उसे 125 कंचे और मिले। अब उसके पास 1023 + 125 कंचे हैं। जॉय के पास 1022 कंचे थे और आज उसे 128 कंचे और मिले। अब उसके पास 1022 +128 कंचे हैं। किसके पास अधिक कंचे हैं?




इस स्थिति को दाईं ओर दिए गए चित्र के अनुसार प्रदर्शित कर सकते हैं। इससे प्रारंभ करते हैं, राजा के पास जॉय की तुलना में 1 कंचा अधिक था। किंतु आज जॉय को राजा की तुलना में 3 कंचे अधिक मिले। हम देख सकते हैं कि अब जॉय के पास राजा की तुलना में 2 कंचे अधिक हैं।

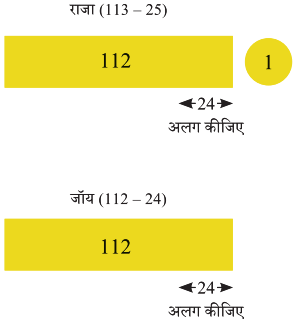



अर्थात

$$1023 + 125 < 1022 + 128$$

**उदाहरण 3**— कौन-सा व्यंजक बड़ा है? $113 - 25$ या $112 - 24$?

एक स्थिति का अनुमान लगाएँ कि राजा के पास 113 कंचे थे। इनमें से 25 कंचे खो गए। अत: उसके पास $113 - 25$ कंचे बचे हैं। जॉय के पास 112 कंचे थे और आज 24 कंचे खो गए। अब उसके पास $112 - 24$ कंचे बचे हैं। किसके पास अधिक कंचे बचे हैं?




अर्थात

$$113 - 25 = 112 - 24$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? दिए गए व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक की तुलना करने के लिए '>' या '<' अथवा '=' का उपयोग कीजिए। क्या आप इसे जटिल गणनाओं के बिना कर सकते हैं? प्रत्येक स्थिति के लिए अपना अनुमान व्यक्त कीजिए।

(a) $245 + 289$ ☐ $246 + 285$
(b) $273 - 145$ ☐ $272 - 144$
(c) $364 + 587$ ☐ $363 + 589$
(d) $124 + 245$ ☐ $129 + 245$
(e) $213 - 77$ ☐ $214 - 76$

## 2.2 जटिल व्यंजकों को पढ़ना और उनका मान निकालना

कभी-कभी जब कोई व्यंजक किसी संदर्भ के साथ नहीं होता तब उसका मान ज्ञात करने की एक से अधिक विधियाँ हो सकती हैं। ऐसी स्थितियों में व्यंजक का अधिक सटीक मान कैसे निकाला जाए, यह निर्दिष्ट करने के लिए कुछ साधन और नियमों की आवश्यकता होती है।

भाषा के साथ एक उदाहरण देते हुए, दिए गए वाक्यों को देखिए—

(a) वाक्य — शालिनी खिलौनों के साथ एक सहेली के पास बैठी है।
अर्थ — सहेली के पास खिलौने हैं और शालिनी उसके पास बैठी है।





(b) वाक्य — शालिनी खिलौनों के साथ, एक सहेली के पास बैठी है।
अर्थ — शालिनी के पास खिलौने हैं और वह उन्हें लेकर अपनी सहेली के पास बैठी है।

विराम चिह्न के बिना इस वाक्य के दो भिन्न प्रकार से अर्थ निकाले जा सकते हैं। अल्प-विराम का उचित उपयोग निर्देशित करता है कि वाक्य को कैसे समझा जाए।

आइए, एक व्यंजक देखते हैं जिसका मान एक से अधिक विधियों से निकाला जा सकता है।

? **उदाहरण 4 —** मल्लेश खेल के मैदान में 30 कंचे लाया। अरुण कंचों के 5 थैले लाया और प्रत्येक थैले में 4 कंचे थे। मल्लेश और अरुण खेल के मैदान में कितने कंचे लाए?
मल्लेश ने इसे एक गणितीय व्यंजक लिखकर संक्षिप्त किया—

$$30 + 5 \times 4$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इस व्यंजक के पीछे का संदर्भ जाने बिना पूर्णा ने इस व्यंजक का मान 140 निकाला। उसने पहले 30 और 5 को जोड़ा जिससे 35 प्राप्त हुआ और फिर 35 को 4 से गुणा करके 140 प्राप्त किया।

मल्लेश ने इस व्यंजक का मान 50 निकाला। उसने 5 और 4 को गुणा करके 20 प्राप्त किया और 20 में 30 जोड़कर 50 प्राप्त किया।

इस स्थिति में मल्लेश सही है, किंतु पूर्णा ने इसे गलत क्यों समझा?

व्यंजक $30 + 5 \times 4$ को केवल देखने से ही यह स्पष्ट नहीं होता कि हमें पहले योग करना चाहिए या गुणा।

जिस प्रकार भाषा में विराम चिह्नों का उपयोग करके संदेहों को हल किया जाता है, उसी प्रकार व्यंजकों का मान निकालने में संदेहों को हल करने हेतु गणित में कोष्ठकों और पदों की धारणा का उपयोग किया जाता है।

## व्यंजकों में कोष्ठक

कंचों की संख्या ज्ञात करने के व्यंजक में $30 + 5 \times 4$ में हमें पहले 5 और 4 को गुणा करना था और फिर इस गुणनफल को 30 के साथ जोड़ना था। संक्रियाओं का यह क्रम कोष्ठक के उपयोग द्वारा इस प्रकार स्पष्ट किया जाता है—

$$30 + (5 \times 4)$$

जब कोष्ठक वाले व्यंजक का मान निकालते हैं तो हमें अन्य संक्रियाओं का पालन करने से पहले कोष्ठक के अंदर के व्यंजक का मान ज्ञात करना होता है। अत: उपरोक्त व्यंजक में हम पहले $5 \times 4$ का मान ज्ञात करते हैं और फिर योग करते हैं। इस प्रकार यह व्यंजक कंचों की संख्या दर्शाता है।

$$30 + (5 \times 4) = 30 + 20 = 50$$

**उदाहरण 5**— इरफान ने ₹15 में बिस्कुट का एक पैकेट और ₹56 में तूर की दाल का एक पैकेट खरीदा। उसने दुकानदार को ₹100 दिए। एक व्यंजक लिखिए जो दुकानदार से इरफान को वापस मिलने वाले रुपयों की गणना करने में हमारी सहायता कर सकता हो।

इरफान ने बिस्कुट के पैकेट पर ₹ 15 और तूर की दाल पर ₹56 खर्च किए। अतः रुपयों में कुल मूल्य $15 + 56$ है। उसने दुकानदार को ₹ 100 दिए। अत: उसे ₹100 में से कुल मूल्य घटाकर बाकी रुपये वापस मिलने चाहिए। क्या हम उस व्यंजक को इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$100 - 15 + 56?$$

क्या हम पहले 100 में से 15 घटाकर और फिर परिणाम में 56 जोड़ सकते हैं? ऐसा करने से हमें 141 प्राप्त होगा। यह असंगत है कि उसे दुकानदार को चुकाए गए रुपयों से अधिक रुपये मिले!

इस स्थिति में हम कोष्ठक का उपयोग कर सकते हैं—

$$100 - (15 + 56)$$

पहले कोष्ठक के अंदर के व्यंजक का मान निकालने पर हमें $100 - 71$ प्राप्त होता है जो 29 है। अत: इरफान को ₹ 29 वापस मिलेंगे।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## व्यंजकों में पद

मान लीजिए हमारे पास बिना किसी कोष्ठक का व्यंजक $30 + 5 \times 4$ है। क्या इसका कोई अर्थ नहीं है?

जब व्यंजकों में एक से अधिक संक्रियाएँ हों और कोष्ठक के द्वारा संक्रियाओं का क्रम निर्दिष्ट न हो तो हम क्रम का निर्धारण करने के लिए पदों की धारणा का उपयोग करते हैं।

पद व्यंजकों के भाग होते हैं जो '+' के चिह्न के द्वारा अलग किए जाते हैं। उदाहरण के लिए, $12 + 7$ में पद 12 और 7 हैं
जैसा कि नीचे चिह्नित किया गया है।

$$12 + 7 = (12) + (7)$$

हम ऊपर की तरह ही व्यंजक के प्रत्येक पद को चिह्नित करेंगे। ध्यान रखें कि पदों को चिह्नित करने की यह विधि सामान्य विधि नहीं है। ऐसा तब तक किया जाएगा जब तक आप इस अवधारणा से परिचित नहीं हो जाते।

अब $83 - 14$ में पद कौन-से हैं? हम जानते हैं कि किसी संख्या को घटाना, उस संख्या के प्रतिलोम को जोड़ने के समान ही है। याद कीजिए कि किसी दी गई संख्या के प्रतिलोम में उस संख्या के विपरीत चिह्न होता है। उदाहरण के लिए, 14 का प्रतिलोम $-14$ है और $-14$ का प्रतिलोम 14 है। इस प्रकार 83 में से 14 को घटाना, 83 में $-14$ को जोड़ने के समान ही है। अर्थात

$$83 - 14 = (83) + (-14)$$

इस प्रकार व्यंजक $83 - 14$ के पद 83 और $-14$ हैं।

? अन्य उदाहरण लेकर जाँचिए कि घटाने को इस प्रकार जोड़ने से बदलने पर व्यंजक का मान नहीं बदलता है।

? क्या आप कक्षा 6 की गणित की पाठ्यपुस्तक में पढ़े गए पूर्णांकों के टोकन मॉडल का उपयोग करके व्याख्या कर सकते हैं कि क्यों किसी संख्या को घटाना उसके प्रतिलोम को जोड़ने के समान है?

प्रयास करें

पदों की पहचान करने के लिए किसी व्यंजक में सभी घटाव इसी प्रकार से योग में बदले जाते हैं। यहाँ व्यंजकों और उनके पदों के कुछ अन्य उदाहरण दिए गए हैं—

$$-18 - 3 = (-18) + (-3)$$

$$6 \times 5 + 3 = (6 \times 5) + (3)$$

$$2 - 10 + 4 \times 6 = (2) + (-10) + (4 \times 6)$$

ध्यान दीजिए कि $6 \times 5$ और $4 \times 6$ एकल पद हैं, क्योंकि उनमें कोई '+' का चिह्न नहीं है। नीचे दी गई सारणी में कुछ व्यंजक दिए गए हैं। सारणी को पूरा कीजिए।

© KSTBC NOT TO BE REPUBLISHED

| व्यंजक | पदों के योग के रूप में व्यंजक | पद |
|---|---|---|
| 13 – 2 + 6 | (13) + (– 2) + (6) | 13, – 2, 6 |
| 5 + 6 × 3 | (5) + (6 × 3) | |
| 4 + 15 – 9 | ( ) + ( ) + ( ) | |
| 23 – 2 × 4 + 16 | ( ) + ( ) + ( ) | |
| 28 + 19 – 8 | ( ) + ( ) + ( ) | |

अब हम देखेंगे कि व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए कैसे पदों का उपयोग संक्रियाओं के क्रम का निर्धारण करने में किया जाता है।

हम उन व्यंजकों से प्रारंभ करेंगे जिनमें केवल योग (सभी घटावों को उचित रूप से योगों में बदलने के साथ) हों।

? क्या पदों के योग के क्रम को परिवर्तित करने से अलग मान प्राप्त होता है?

## अदला-बदली और समूहीकरण

आइए, केवल दो पदों वाले सरल व्यंजक पर विचार करते हैं।

? **उदाहरण 6 —** मधु छत से एक ड्रोन उड़ा रही है। ड्रोन 6 मीटर ऊपर जाता है और फिर 4 मीटर नीचे आता है। यह दिखाने के लिए कि छत से ड्रोन की अंतिम स्थिति कितनी ऊँचाई पर है, एक व्यंजक लिखिए।

ड्रोन छत से 6 – 4 = 2 मीटर ऊपर है। इसे पदों के योग के रूप में लिखने पर —

(6) + (– 4) = (2)

यदि हम पदों की अदला-बदली कर दें तो क्या योग बदलेगा?

(– 4) + (6) = (2)

इस स्थिति में ऐसा नहीं है।

हमें ज्ञात ही है कि जब दोनों पद धनात्मक संख्याएँ हों तो पदों की अदला-बदली से योग नहीं बदलता है।

? क्या तब भी ऐसा ही होगा जब पदों में ऋणात्मक संख्याएँ भी हों? कुछ अन्य व्यंजक लीजिए और जाँच कीजिए।

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

? क्या आप कक्षा 6 की गणित की पाठ्यपुस्तक में हमने जो पूर्णांकों का टोकन मॉडल देखा था, उसका उपयोग करके व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों हो रहा है?

प्रयास करें

इस प्रकार दो पदों वाले किसी व्यंजक में पदों की अदला-बदली से मान नहीं बदलता है।

पद 1 + पद 2 = पद 2 + पद 1

अब तीन पदों वाले एक व्यंजक पर विचार कीजिए—

$$(-7) + 10 + (-11)$$

आइए, निम्नानुसार दो विभिन्न विधियों से इन पदों का योग ज्ञात करते हैं—

$-7 + 10 + -11$

(पहले दो पदों का योग ज्ञात करके और फिर उनके योग को तीसरे पद में जोड़कर)

$-7 + 10 + -11$

(अंतिम दो पदों का योग ज्ञात करके और फिर उनके योग को पहले पद में जोड़कर)

आप क्या देखते हैं? दोनों ही स्थितियों में योगफल समान हैं।

पुन: हम जानते हैं कि धनात्मक संख्याओं को जोड़ते समय उन्हें उपरोक्त दो विधियों से में किसी भी विधि से समूहीकरण करने पर योगफल समान ही प्राप्त होता है।

? क्या तब भी ऐसा ही होगा जब पदों में ऋणात्मक संख्याएँ हों? कुछ और व्यंजक लीजिए और जाँच कीजिए।

? क्या आप कक्षा 6 की गणित की पाठ्यपुस्तक में पढ़े गए पूर्णांकों के टोकन मॉडल का उपयोग करके व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों हो रहा है?

प्रयास करें

इस प्रकार किसी व्यंजक के पदों का समूहीकरण नीचे दिए गए तरीकों में से किसी भी तरीके से करने पर समान मान प्राप्त होता है।

पद 1 + पद 2 + पद 3 = पद 1 + पद 2 + पद 3

आइए, व्यंजक (– 7) + 10 + (– 11) पर पुनः विचार करें। क्या होगा जब हम क्रम को बदल देते हैं और पहले – 7 और – 11 को जोड़ते हैं और फिर इस योगफल को 10 में जोड़ते हैं? क्या हमें पहले के समान ही योगफल प्राप्त होगा?

NOT TO BE REPUBLISHED © UKTBS

हम देखते हैं कि व्यंजक $(-7) + 10 + (-11)$ के पदों को किसी भी क्रम में जोड़ने पर समान योगफल $-8$ ही प्राप्त होता है।

? क्या किसी व्यंजक के पदों को किसी भी क्रम में जोड़ने पर समान मान प्राप्त होता है? कुछ और व्यंजक लीजिए और जाँचिए। 3 पदों से अधिक पदों वाले व्यंजकों पर भी विचार कीजिए।

**इस प्रकार पदों के किसी भी क्रम में जोड़ने से समान मान प्राप्त होता है।** अर्थात केवल जोड़ने वाले किसी व्यंजक में इस बात से अंतर नहीं आता कि पदों को किस क्रम में जोड़ा गया है, उन सभी में समान मान प्राप्त होता है।

आइए, उन व्यंजकों पर विचार करते हैं जिनमें गुणा और भाग भी हों और जिनमें कोष्ठकों द्वारा संक्रियाओं का क्रम निर्दिष्ट न हो। पहले प्रत्येक पद का मान ज्ञात करके ऐसे व्यंजकों का मान ज्ञात किया जाता है। एक बार सभी पदों का मान ज्ञात करके उन्हें जोड़ दिया जाता है।

उदाहरण के लिए, व्यंजक $30 + 5 \times 4$ का मान इस प्रकार प्राप्त किया जाता है—

$$30 + 5 \times 4 = (30) + (5 \times 4) = (30) + (20) = (50)$$

व्यंजक $5 \times (3 + 2) + 7 \times 8 + 3$ का मान इस प्रकार प्राप्त किया जाता है—

$$5 \times (3 + 2) + 7 \times 8 + 3 = (5 \times (3 + 2)) + (7 \times 8) + (3)$$

यहाँ पहले $(3 + 2)$ का मान प्राप्त किया जाता है और फिर इस योगफल को 5 से गुणा किया जाता है $(= 25)$। पद $7 \times 8$ का मान 56 प्राप्त होता है। इस व्यंजक का हल $25 + 56 + 3 = 84$ प्राप्त होता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? मनसा संख्याओं की एक लंबी सूची का योग ज्ञात कर रही है। उसे उन सभी को जोड़ने में पाँच मिनट लगते हैं और वह उत्तर 11749 प्राप्त करती है। फिर उसे पता चलता है कि वह चौथी संख्या 9055 को तो मिलाना भूल गई थी। क्या उसे फिर से आरंभिक संख्या से योग प्रारंभ करना होगा?

1342
774
8611
9055
1022

गणित में हम "पदों की अदला-बदली से योगफल नहीं बदलता है" कहने के स्थान पर इसे **जोड़ का क्रमविनिमेयता गुण (commutative property)** कहते हैं। इसी प्रकार, "समूहीकरण से योगफल नहीं बदलता है" **जोड़ का साहचर्यता गुण** कहलाता है।

## दैनिक जीवन में वस्तुओं के क्रम की अदला-बदली

? मनसा बाहर खेलने जा रही है। उसकी माँ कहती हैं, "अपनी टोपी और जूते पहनो!" उसे पहले क्या पहनना चाहिए? वह पहले अपनी टोपी पहनकर फिर अपने जूते पहन सकती है या वह पहले अपने जूते पहनकर फिर अपनी टोपी पहन सकती है।





दोनों ही स्थितियों में मनसा एकदम समान दिखेगी। एक अन्य स्थिति का अनुमान लगाइए— मनसा की माँ कहती है, "अपने

मोजे और जूते पहनो।" अब क्रम महत्वपूर्ण है। उसे पहले मोजे और फिर जूते पहनने चाहिए। यदि वह पहले जूते पहनती है और फिर मोजे पहनती है तो वह बहुत असहज अनुभव करेगी और बहुत ही अलग दिखेगी।

## कुछ अधिक व्यंजक और उनके पद

? **उदाहरण 7** — अमू, चरण, मधु और जॉन एक होटल में गए और चार दोसे मँगवाए। प्रत्येक दोसे का मूल्य ₹23 है और वे परोसनेवाला (वेटर) को ₹5 की धन्यवाद राशि (टिप) देकर धन्यवाद देना चाहते हैं। कुल मूल्य की व्याख्या करने वाला व्यंजक लिखिए।

4 दोसे का मूल्य = $4 \times 23$

क्या धन्यवाद राशि (टिप) के साथ कुल मूल्य को $4 \times 23 + 5$ लिखा जा सकता है? इसका मान ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है—

$4 \times 23 + 5 =$ (4 × 23) + (5) = (92) + (5) = (97)

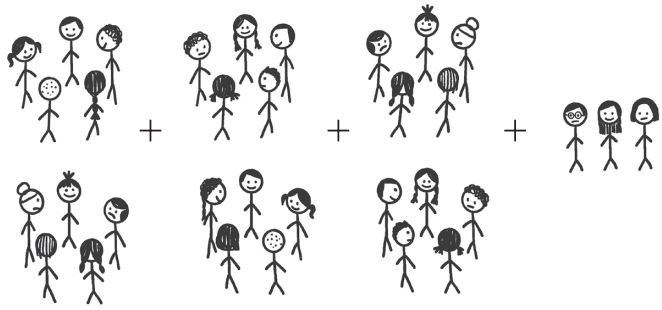
इस प्रकार व्यंजक को लिखने की सही विधि $4 \times 23 + 5$ है।

? यदि दोसों की कुल संख्या 7 तक पहुँच जाती है और धन्यवाद राशि वही रहती है तो उन्हें कितने रुपये देने होंगे? इस स्थिति के लिए एक व्यंजक लिखिए और इसके पदों की पहचान कीजिए।

? **उदाहरण 8** — एक कक्षा में विद्यार्थी खेल रहे हैं, "पहाड़ पर आग लगी है भागो, भागो, भागो!" जब भी शिक्षक कोई संख्या बोलते हैं तो विद्यार्थियों को स्वयं को उस संख्या के समूहों में व्यवस्थित करना होता है। जो कोई भी घोषणा किए गए समूह के आकार का भाग नहीं बनता, वह खेल से बाहर हो जाता है।

रूबी आराम करना चाहती थी इसलिए कक्षा में एक तरफ बैठकर उनका खेल देख रही थी। अन्य 33 विद्यार्थी कक्षा में खेल खेल रहे थे।

शिक्षक ने '5' बोला। जैसे ही विद्यार्थी समूहों में व्यवस्थित हो गए तो रूबी ने $6 \times 5 + 3$ लिखा (उसने $6 \times 5$ से 3 अधिक समझा)



? सोचिए और चर्चा कीजिए कि उसने यह क्यों लिखा? पदों के योग के रूप में लिखा गया व्यंजक है—

(6 × 5) + (3)

NOT TO BE REPUBLISHED

? नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति के लिए व्यंजक लिखिए और उसके पदों को पहचानिए—

यदि शिक्षक ने '4' बोला होता तो रुबी लिखती _____

यदि शिक्षक ने '7' बोला होता तो रुबी लिखती _____

उपरोक्त विधि के समान अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या के लिए व्यंजक लिखिए।

? **उदाहरण 9 —** रघु ने थोक बाजार से 100 कि.ग्रा. चावल खरीदे और उन्हें 2 कि.ग्रा. के पैकेट में पैक किया। उसके पास पहले से ही 2 कि.ग्रा. के चार पैकेट थे। अब उसके पास 2 कि.ग्रा. चावल के कितने पैकेट हैं, उस संख्या के लिए व्यंजक लिखिए और पदों की पहचान कीजिए।

उसके पास पहले से 4 पैकेट थे। 2 कि.ग्रा. चावल के नए पैकेटों की संख्या $100 \div 2$ है, जिसे हम $\frac{100}{2}$ के रूप में भी लिखते हैं।

अब उसके पास 2 कि.ग्रा. चावल के पैकेट की संख्या $4 + \frac{100}{2}$ है। इसके पद हैं—

$$\boxed{4} + \boxed{\frac{100}{2}}$$

? **उदाहरण 10 —** कन्नन को ₹1 और ₹5 के सिक्कों और ₹10, ₹20, ₹50 और ₹100 के नोटों का उपयोग करके दुकानदार को ₹432 चुकाने हैं। वह यह कैसे कर सकता है?

यहाँ एक से अधिक संभावनाएँ हैं। उदाहरण के लिए—

$$432 = 4 \times 100 + 1 \times 20 + 1 \times 10 + 2 \times 1$$

अर्थात, ₹100 के 4 नोट, ₹20 का 1 नोट, ₹10 का 1 नोट और ₹1 के 2 सिक्के

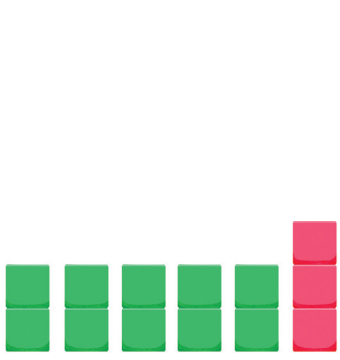
$$432 = 8 \times 50 + 1 \times 10 + 4 \times 5 + 2 \times 1$$

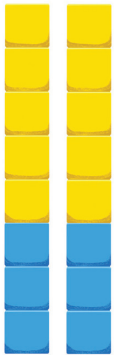
अर्थात ₹50 के 8 नोट, ₹10 का 1 नोट, ₹5 के 4 सिक्के और ₹1 के 2 सिक्के

? उपरोक्त दोनों व्यंजकों में पदों की पहचान कीजिए।

? क्या आप किसी को ₹432 देने के कुछ अन्य तरीके सोच सकते हैं?

? **उदाहरण 11 —** यहाँ दो चित्र दिए गए हैं। दोनों व्यवस्थाओं में से कौन-सी व्यवस्था व्यंजक $5 \times 2 + 3$ से मेल खाती है?





© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, इस व्यंजक को पदों के योग के रूप में लिखते हैं।

$$(5 \times 2) + (3) = (10) + (3) = (13)$$

यह व्यंजक $5 \times 2 + 3$, $5 \times 2$ से 3 अधिक के रूप में समझा जा सकता है जो बाईं ओर की व्यवस्था को दर्शाता है।

? पीले और नीले वर्गों की संख्या का उपयोग करते हुए दाईं ओर की व्यवस्था के लिए क्या व्यंजक होगा?

क्या आपको कोष्ठकों का उपयोग याद है? इसके लिए हमें कोष्ठक का उपयोग करने की आवश्यकता है।

$$2 \times (5 + 3)$$

ध्यान दीजिए कि इस व्यवस्था को इस प्रकार भी दर्शाया जा सकता है—

$$5 + 3 + 5 + 3$$

या

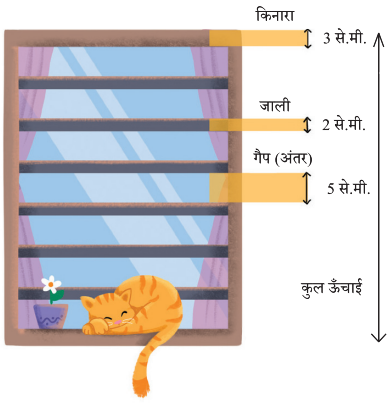
$$5 \times 2 + 3 \times 2$$

## ? पता लगाइए

1. प्रत्येक स्थिति में पदों को लिखते हुए नीचे दिए गए व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $28 - 7 + 8$ (b) $39 - 2 \times 6 + 11$
   (c) $40 - 10 + 10 + 10$ (d) $48 - 10 \times 2 + 16 \div 2$
   (e) $6 \times 3 - 4 \times 8 \times 5$
2. नीचे दिए गए व्यंजकों में से प्रत्येक के लिए एक कहानी या स्थिति लिखिए और व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए—
   (a) $89 + 21 - 10$ (b) $5 \times 12 - 6$
   (c) $4 \times 9 + 2 \times 6$
3. नीचे दी गई स्थितियों में से प्रत्येक के लिए स्थिति का वर्णन करने वाला व्यंजक लिखिए, इसके पदों की पहचान कीजिए और व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।
   (a) रानी आलिया ने पिछले वर्ष राजकुमारी एल्सा और राजकुमारी एना को 100 सोने के सिक्के दिए। राजकुमारी एल्सा ने सिक्कों का उपयोग एक व्यवसाय शुरू करने में किया और अपने सिक्कों को दुगुना कर लिया। राजकुमारी एना ने आभूषण खरीदे और अब उसके पास केवल आधे सिक्के बचे हैं। राजकुमारी एल्सा और राजकुमारी एना दोनों के पास कितने सोने के सिक्के हैं, यह वर्णन करने के लिए एक व्यंजक लिखिए।
   (b) दो स्टेशनों के बीच मेट्रो ट्रेन का टिकट वयस्क के लिए ₹40 का और बच्चे के लिए ₹20 का है। टिकटों की कुल लागत कितनी है—
      (i) चार वयस्क और तीन बच्चों के लिए?
      (ii) दो समूहों के लिए जिसमें से प्रत्येक में तीन वयस्क हों?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(c) चित्र में दर्शाए गए मापों के बीच संबंधों का वर्णन करते हुए एक व्यंजक लिखकर खिड़की की कुल ऊँचाई ज्ञात कीजिए।




## कोष्ठकों को हटाना — I

आइए, इस व्यंजक का मान ज्ञात करते हैं—

$$200 - (40 + 3)$$

पहले हम कोष्ठक के अंदर के पद का मान 43 ज्ञात करते हैं और फिर इसे 200 में से घटाते हैं।

किंतु 200 में से पहले 40 को घटाना अधिक आसान है।

$$200 - 40 = 160$$

और फिर 160 में से 3 घटाना

$$160 - 3 = 157$$

हमने यहाँ जो किया, वह $200 - 40 - 3$ था। ध्यान दीजिए कि हमने ऐसा नहीं किया—

$$200 - 40 + 3$$

अत: $200 - (40 + 3) = 200 - 40 - 3$

**उदाहरण 12** — हमने इसे पहले भी एक स्थिति में देखा है जहाँ इरफान ₹15 में बिस्कुट का एक पैकेट और ₹56 में तूर दाल का एक पैकेट खरीदता है। जब उसने ₹100 चुकाए तो जो रुपये उसे वापस मिले—

$$100 - (15 + 56) = 29$$

वापस मिले रुपयों की गणना निम्नानुसार भी की जा सकती थी—

(a) पहले 100 में से बिस्कुट के पैकेट का मूल्य (15) घटाइए—

$$100 - 15 = 85$$

ये इरफान के वे रुपये हैं जो दुकानदार के पास थे यदि उसने केवल बिस्कुट ही खरीदा होता। क्योंकि उसने तूर की दाल भी खरीदी थी अतः इसका मूल्य बचे हुए 85 रुपयों में से ही लिया जाएगा।

(b) अतः वापस मिलने वाले रुपये जानने के लिए हमें तूर की दाल का मूल्य 85 में से घटाना होगा।

$$85 - 56 = 29$$

यहाँ हमने $100 - 15 - 56$ किया

अतः $100 - (15 + 56) = 100 - 15 - 56$

ध्यान दीजिए कि जिन कोष्ठकों के आगे ऋणात्मक चिह्न लगा हो उन्हें हटाते समय कोष्ठकों के अंदर के पदों के चिह्न बदल जाते हैं। पहले उदाहरण में 40 और 3 के चिह्नों तथा दूसरे उदाहरण में 15 और 56 के चिह्नों का ध्यान से देखिए।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

**उदाहरण 13** — व्यंजक 500 – (250 – 100) पर विचार कीजिए। क्या इस व्यंजक को कोष्ठक के बिना लिखना संभव है?

इस व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए हमें 250 – 100 = 150 को 500 में से घटाना होगा —

$$500 - (250 - 100) = 500 - 150 = 350$$

यदि हम 500 में से 250 सीधे घटाते तो हमें जितना घटाना था उससे 100 अधिक घटा देते। अतः हमें 500 – (250 – 100) के समान मान प्राप्त करने के लिए व्यंजक 500 – 250 में 100 फिर से जोड़ने चाहिए। संक्रियाओं का यह क्रम 500 – 250 + 100 है। इस प्रकार —

$$500 - (250 - 100) = 500 - 250 + 100$$

जाँच कीजिए कि 500 – (250 – 100), 500 – 250 – 100 समान नहीं है।

पुनः ध्यान दीजिए कि जब उन कोष्ठकों को हटाया जाता है जिनके आगे ऋणात्मक चिह्न लगा हो तो कोष्ठकों के अंदर के पदों के चिह्न बदल जाते हैं। इस स्थिति में 250 और – 100 के चिह्न बदल कर – 250 और 100 में लिखे जाते हैं।

**उदाहरण 14** — हीरा के पास दुर्लभ सिक्कों का संग्रह है। उसके पास एक थैले में 28 सिक्के और दूसरे थैले में 35 सिक्के हैं। वह दूसरे थैले में से 10 सिक्के अपने मित्र को उपहार में दे देती है। हीरा के पास बचे सिक्कों की संख्या के लिए एक व्यंजक लिखिए।

इसे 28 + (35 – 10) द्वारा दर्शाया जा सकता है।

हम जानते हैं कि यह 28 + {35 + (– 10)} के समान है क्योंकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। इस व्यंजक को सामान्य रूप से 28 + 35 + (– 10) या 28 + 35 – 10 के रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार —

$$28 + (35 - 10) = 28 + 35 - 10 = 53$$

जब कोष्ठकों के आगे ऋणात्मक चिह्न नहीं लगा हो तो कोष्ठकों को हटाते समय उनके अंदर लिखे पदों के चिह्न नहीं बदलते हैं। उपरोक्त उदाहरण में पदों 35 और –10 के चिह्नों पर ध्यान दीजिए।



कब चिह्नों को बदला जाए और कब नहीं बदला जाए? इसे याद रखने के स्थान पर आप व्यंजकों के अर्थों के बारे में सोचकर अपने स्वयं के लिए पता लगा सकते हैं।

## पदों में परिवर्तन (टिंकर) I

यदि हम एक व्यंजक के किसी एक पद का मान बढ़ाते या घटाते हैं तो व्यंजक के मान पर क्या प्रभाव पड़ता है?

नीचे तीन स्तंभों में कुछ व्यंजक दिए गए हैं। प्रत्येक स्तंभ में पहले व्यंजक के एक या दो पदों को बदला गया है। पहले स्तंभ में उदाहरण को देखिए और जितनी संभव हो उतनी कम गणना करके रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| | | |
|---|---|---|
| 53 + (– 16) = 37 | 53 + (– 16) = 37 | (– 87) + (–16) = ◯ |
| 54 + (– 16) = 38<br>54, 53 से एक अधिक है, अत: मान 37 से 1 अधिक होगा। | 52 + (– 16) = ◯<br>52, 53 से एक कम है, अत: मान 37 से 1 कम होगा। | (– 88) + (– 15) = ◯ |
| 53 + (– 15) = ◯<br>क्या – 15, – 16 से एक अधिक या एक कम है? | 53 + (– 17) = ◯<br>क्या – 17, – 16 से एक अधिक या एक कम है? | (– 86) + (– 18) = ◯ |
| | | (– 97) + (– 26) = ◯ |

## पता लगाइए

1. रिक्त स्थानों को संख्याओं से और रिक्त बक्सों को संक्रियाओं तथा चिह्नों से इस प्रकार भरिए कि बराबर चिह्न के दोनों ओर समान व्यंजक हों।
   (a) $24 + (6 - 4) = 24 + 6 \square \_\_\_\_$
   (b) $38 + (\_\_\_\_ \square \_\_\_\_) = 38 + 9 - 4$
   (c) $24 - (6 + 4) = 24 \square 6 - 4$
   (d) $24 - 6 - 4 = 24 - 6 \square \_\_\_\_$
   (e) $27 - (8 + 3) = 27 \square (8 \square 3)$
   (f) $27 - (\_\_\_\_ \square \_\_\_\_) = 27 - 8 + 3$
2. कोष्ठक को हटाइए और समान मान वाला व्यंजक लिखिए।
   (a) $14 + (12 + 10)$ (b) $14 - (12 + 10)$
   (c) $14 + (12 - 10)$ (d) $14 - (12 - 10)$
   (e) $-14 + (12 - 10)$ (f) $14 - (-12 - 10)$
3. नीचे दिए गए व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए। प्रत्येक युग्म के लिए, पहले यह अनुमान लगाने का प्रयत्न कीजिए कि क्या उनके मान समान हैं। दोनों व्यंजक कब समान हैं?
   (a) $(6 + 10) - 2$ और $6 + (10 - 2)$
   (b) $16 - (8 - 3)$ और $(16 - 8) - 3$
   (c) $27 - (18 + 4)$ और $27 + (-18 - 4)$
4. दिए गए व्यंजकों के प्रत्येक समूह में उन समूहों को पहचानिए जिनके मान समान हैं। आपको इनके मान ज्ञात नहीं करने हैं, किंतु इसके स्थान पर अपने पदों की समझ का उपयोग कीजिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(a) $319 + 537,\ 319 - 537,\ -537 + 319,\ 537 - 319$

(b) $87 + 46 - 109,\ \ 87 + 46 - 109,\ \ 87 + 46 - 109,\ \ 87 - 46 + 109,$
$87 - (46 + 109),\ (87 - 46) + 109$

5. व्यंजकों में उचित स्थानों पर कोष्ठकों का उपयोग कीजिए जिससे दर्शाए गए मान प्राप्त हों।

(a) $34 - 9 + 12 = 13$

(b) $56 - 14 - 8 = 34$

(c) $-22 - 12 + 10 + 22 = -22$

6. पद के मान बदलने के तर्कों का उपयोग करते हुए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए जिससे बराबर (=) चिह्न के दोनों ओर के व्यंजक समान हों।

(a) $423 +$ _____ $= 419 +$ _____

(b) $207 - 68 = 210 -$ _____

7. आवश्यकता के अनुसार संख्याओं 2, 3 और 5 का उपयोग करते हुए और संक्रियाओं '+' और '–' व कोष्ठकों का उपयोग करते हुए जितने विभिन्न मान संभव हों उतने मानों वाले व्यंजक बनाइए। उदाहरण के लिए, $2 - 3 + 5 = 4$ और $3 - (5 - 2) = 0$

8. यशोदा को जब कभी भी किसी संख्या में से 9 घटाना होता है तो वह 10 घटाती है और इसमें 1 जोड़ देती है। उदाहरण के लिए, $36 - 9 = 26 + 1$

(a) क्या आप सोचते हैं कि उसे हमेशा सही उत्तर प्राप्त होता है? क्यों?

(b) क्या आप ऐसी ही अन्य युक्तियों के विषय में सोच सकते हैं? कुछ उदाहरण दीजिए।

गणित चर्चा

9. इन दो व्यंजकों पर विचार कीजिए— (a) $73 - 14 + 1$, (b) $73 - 14 - 1$
प्रत्येक व्यंजक के लिए नीचे दिए गए समूह में से व्यंजकों को पहचानिए जो इनके समान हों।

(a) $73 - (14 + 1)$ (b) $73 - (14 - 1)$

(c) $73 + (-14 + 1)$ (d) $73 + (-14 - 1)$

## कोष्ठकों को हटाना — II

**उदाहरण 15—** ल्हामो और नोर्बू एक भोजनालय गए। उनमें से प्रत्येक ने एक वड़ा और एक रसगुल्ला मँगवाया। एक वड़ा का मूल्य ₹43 है और एक रसगुल्ले का मूल्य ₹24 है। उस राशि के लिए एक व्यंजक लिखिए, जो उन्हें चुकाने होगी।

चूँकि उनमें से प्रत्येक के पास एक वड़ा और एक रसगुल्ला था, अत: उनमें से प्रत्येक का भाग $43 + 24$ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

NCERT BOOKS NOT TO BE REPUBLISHED

? उन्हें कुल कितने रुपये चुकाने हैं? क्या इसे व्यंजक $2 \times 43 + 24$ के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है?

इसे पदों के योग के रूप में लिखने पर प्राप्त होता है—

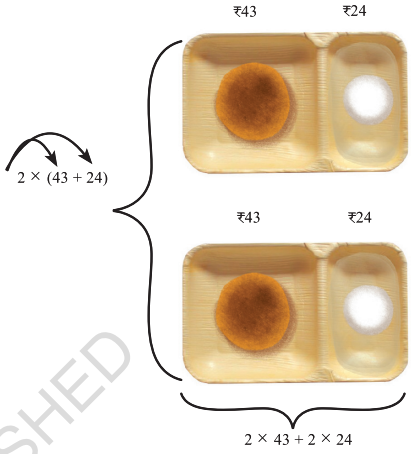
$$(2 \times 43) + (24)$$

इस व्यंजक का अर्थ $2 \times 43$ से 24 अधिक है।

किंतु हमें वह व्यंजक चाहिए जिसका अर्थ $43 + 24$ का दुगुना हो।

हम ऐसा व्यंजक लिखने के लिए कोष्ठक का उपयोग कर सकते हैं—

$$2 \times (43 + 24)$$




अत: हम कह सकते हैं कि दोनों को मिलकर $2 \times (43 + 24)$ चुकाने होंगे। यह दो वड़ा और दो रसगुल्लों के लिए रुपये चुकाने के समान भी है—

$$2 \times 43 + 2 \times 24$$

अर्थात

$$2 \times (43 + 24) = 2 \times 43 + 2 \times 24$$

? यदि उनका एक अन्य मित्र संगमू उनसे आकर मिलता है और खाने की वही वस्तुएँ मँगवाता है तो चुकाए जाने वाले कुल रुपयों के लिए व्यंजक क्या होगा?

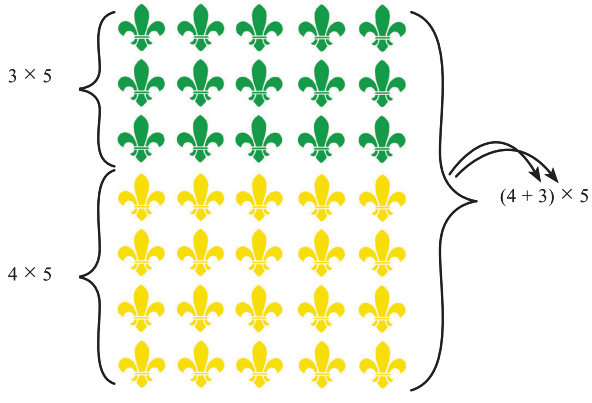
? **उदाहरण 16**— गणतंत्र दिवस की परेड में बाल स्काउट और बालिका गाइड साथ में मार्च कर रहे हैं। स्काउट 4 पंक्तियों में मार्च कर रहे हैं और प्रत्येक पंक्ति में 5 स्काउट हैं। गाइड 3 पंक्तियों में मार्च कर रही हैं और प्रत्येक पंक्ति में 5 गाइड हैं (नीचे दिए गए चित्र को देखिए)। इस परेड में कितने स्काउट और गाइड मार्च कर रहे हैं?

मार्च कर रहे बाल स्काउट की संख्या $4 \times 5$ है। मार्च कर रही बालिका गाइड की संख्या $3 \times 5$ है।

स्काउट और गाइड की कुल संख्या

$4 \times 5 + 3 \times 5$ होगी।

इसे पहले पंक्तियों की कुल संख्या पता लगाना है, जो कि $4 + 3$ है और फिर उनके योगफल को प्रत्येक पंक्ति में खड़े विद्यार्थियों की संख्या के साथ गुणा करके भी ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार बालक और बालिकाओं की संख्या को $(4 + 3) \times 5$ के द्वारा भी पता लगाया जा सकता है।




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अर्थात $4 \times 5 + 3 \times 5 = (4 + 3) \times 5$

इन व्यंजकों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है

$4 \times 5 + 3 \times 5 =$ (4 × 5) + (3 × 5) = (20) + (15) = (35)

$(4 + 3) \times 5 = 7 \times 5 = 35$

? $5 \times 4 + 3 \neq 5 \times (4 + 3)$ क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

क्या $5 \times (4 + 3) = 5 \times (3 + 4) = (3 + 4) \times 5$ है?

पिछले दो उदाहरणों में हमने जो अवलोकन किया उसे सामान्य तरीके से इस प्रकार देखा जा सकता है—

$10 \times 98 + 3 \times 98$ पर विचार कीजिए। इसका अर्थ है कि 10 बार 98 और 3 बार 98 का योगफल करना है।

$\underbrace{98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98 + 98}_{\text{10 बार}} + \underbrace{98 + 98 + 98}_{\text{3 बार}}$

स्पष्टतया यह $10 + 3 = 13$ बार 98 के समान ही है। इस प्रकार

$$10 \times 98 + 3 \times 98 = (10 + 3) \times 98$$

इस समानता को अन्य तरीके से लिखने पर हमें प्राप्त होता है

$$(10 + 3) 98 = 10 \times 98 + 3 \times 98$$

उपरोक्त गुणा में संख्याओं की अदला-बदली करने पर इस गुणा को निम्नानुसार देखा जा सकता है—

$$98 \times 10 + 98 \times 3 = 98 \times (10 + 3) \text{ और}$$

$$98 (10 + 3) = 98 \times 10 + 98 \times 3$$

आइए, इसी प्रकार व्यंजक $14 \times 10 - 6 \times 10$ पर विचार करते हैं। इसका अर्थ है कि 6 बार 10 को 14 बार 10 में से घटाना है।

$\overbrace{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \cancel{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10}}^{\text{14 बार}}$

स्पष्टतया यह $14 - 6 = 8$ बार 10 है। इस प्रकार—

$$14 \times 10 - 6 \times 10 = (14 - 6) \times 10$$

या

$$(14 - 6) \times 10 = 14 \times 10 - 6 \times 10$$

इस गुण को (जिसे वितरण या बंटन गुण कहा जाता है) अच्छी तरह से संक्षेप में इस प्रकार कहा जा सकता है—

**किसी योगफल (अंतर) का गुणज गुणजों के योगफल (अंतर) के समान होता है।**

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## पदों में परिवर्तन (टिंकर) II

आइए, समझते हैं कि जब हम किसी गुणा में संख्याओं को बदलते हैं तो क्या होता है?

**उदाहरण 17**— $53 \times 18 = 954$ दिया गया है। $63 \times 18$ का पता लगाइए।

क्योंकि $63 \times 18$ का अर्थ 63 बार 18 है।

इसलिए $63 \times 18 = (53 + 10) \times 18$

$= 53 \times 18 + 10 \times 18$

$= 954 + 180$

$= 1134$

**उदाहरण 18**— $97 \times 25$ का मान ज्ञात करने की एक प्रभावी विधि ज्ञात कीजिए।

$97 \times 25$ का अर्थ है 97 बार 25

हम इसे $(100 - 3) \times 25$ के रूप में लिख सकते हैं।

हम जानते हैं कि यह 100 बार 25 और 3 बार 25 के अंतर के समान ही है—

$$97 \times 25 = 100 \times 25 - 3 \times 25$$

उपरोक्त का मान ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात करने के लिए इस विधि का प्रयोग कीजिए—

(a) $95 \times 8$

(b) $104 \times 15$

(c) $49 \times 50$

क्या आप सामान्यतया गुणा करने की जिस विधि का उपयोग करते हैं, उसकी तुलना में इस विधि से शीघ्र हल प्राप्त होता है?

उपरोक्त गुणनफल के समान कौन-से अन्य गुणनफल शीघ्र प्राप्त किए जा सकते हैं?

गणित चर्चा

### पता लगाइए

1. रिक्त स्थानों को संख्याओं से और बक्सों को चिह्नों से भरिए जिससे कि दोनों ओर के व्यंजक समान हों।

(a) $3 \times (6 + 7) = 3 \times 6 + 3 \times 7$

(b) $(8 + 3) \times 4 = 8 \times 4 + 3 \times 4$

(c) $3 \times (5 + 8) = 3 \times 5 \square 3 \times \_\_\_\_$

(d) $(9 + 2) \times 4 = 9 \times 4 \square 2 \times \_\_\_\_$

(e) $3 \times (\_\_\_\_ + 4) = 3 \_\_\_\_ + \_\_\_\_$

(f) $(\_\_\_\_ + 6) \times 4 = 13 \times 4 + \_\_\_\_$

(g) $3 \times (\_\_\_\_ + \_\_\_\_) = 3 \times 5 + 3 \times 2$

@KIPS NOT TO BE REPUBLISHED

(h) ( ____+____ ) ×____ = 2 × 4 + 3 × 4

(i) 5 × (9 – 2) = 5 × 9 – 5 × ____

(j) (5 – 2) × 7 = 5 × 7 – 2 × ____

(k) 5 × (8 – 3) = 5 × 8 ☐ 5 × ____

(l) (8 – 3) × 7 = 8 × 7 ☐ 3 × 7

(m) 5 × (12 –____ ) = ____ ☐ 5 ×____

(n) (15 –____ ) × 7 = ____ ☐ 6 × 7

(o) 5 × ( ____–____) = 5 × 9 – 5 × 4

(p) ( ____–____ ) × ____ = 17 × 7 – 9 × 7

2. दाईं और बाईं ओर के व्यंजकों का विश्लेषण करके नीचे बक्सों में '>', '<' या '=' भरिए। इसका पता लगाने के लिए व्यंजकों को हल किए बिना, तर्क और पदों व कोष्ठकों की समझ का उपयोग कीजिए।

(a) (8 – 3) × 29 ☐ (3 – 8) × 29

(b) 15 + 9 × 18 ☐ (15 + 9) × 18

(c) 23 × (17 – 9) ☐ 23 × 17 + 23 × 9

(d) (34 – 28) × 42 ☐ 34 × 42 – 28 × 42

3. यहाँ 14 बनाने का एक तरीका 2 × (1 + 6) = 14 है। क्या 14 प्राप्त करने के अन्य तरीके भी हैं? उन्हें नीचे दिए गए रिक्त स्थानों में भरिए—

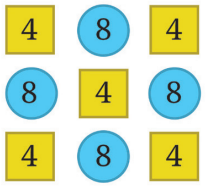
(a) _____ × ( _____ + _____ ) = 14

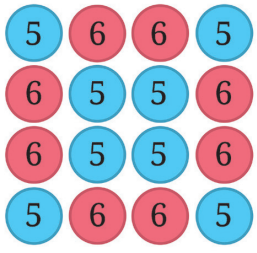
(b) _____ × ( _____ + _____ ) = 14

(c) _____ × ( _____ + _____ ) = 14

(d) _____ × ( _____ + _____ ) = 14

4. नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र में संख्याओं का योगफल (कम से कम दो अलग तरीकों से) ज्ञात कीजिए। व्याख्या कीजिए कि आपने इसे व्यंजकों के द्वारा कैसे हल किया?




## पता लगाइए

1. आगे दी गई स्थितियों को पढ़िए। उनमें से प्रत्येक के लिए उचित व्यंजक लिखिए और उनके मान ज्ञात कीजिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(a) बेगुर में जिला बाजार सप्ताह के सातों दिन खुलता है। रहीम अपने बगीचे से प्रत्येक दिन 9 किलोग्राम आम और श्याम अपने बगीचे से प्रत्येक दिन 11 किलोग्राम आम इस बाजार में भेजता है। स्थानीय जिला बाजार में उनके द्वारा एक सप्ताह में भेजे गए आमों की मात्रा ज्ञात कीजिए।

(b) बीनू प्रत्येक माह ₹20,000 अर्जित करती है। वह प्रत्येक माह ₹5000 किराए पर, ₹5000 भोजन पर और ₹2000 अन्य वस्तुओं पर खर्च करती है। एक वर्ष के अंत में बीनू कितने रुपयों की बचत करेगी?

(c) एक घोंघा दिन के समय एक खंभे पर 3 से.मी. चढ़ता है और रात के समय सोते हुए गलती से 2 से.मी. फिसल जाता है। यह खंभा 10 से.मी. ऊँचा है और इसके ऊपरी भाग पर एक स्वादिष्ट भोजन है। घोंघे को कितने दिनों में भोजन मिलेगा?

2. मेल्विन मंगलवार और शनिवार के अतिरिक्त प्रत्येक दिन दो पृष्ठों की एक कहानी पढ़ता है। वह 8 सप्ताहों में कितनी कहानियाँ पूरी पढ़ लेगा? निम्नलिखित में से कौन-सा व्यंजक इस स्थिति को दर्शाता है?

(a) $5 \times 2 \times 8$
(b) $(7 - 2) \times 8$
(c) $8 \times 7$
(d) $7 \times 2 \times 8$
(e) $7 \times 5 - 2$
(f) $(7 + 2) \times 8$
(g) $7 \times 8 - 2 \times 8$
(h) $(7 - 5) \times 8$

3. नीचे दिए गए व्यंजकों के मान ज्ञात करने की विभिन्न विधियाँ ज्ञात कीजिए—

(a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$
(b) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

4. नीचे दिए गए व्यंजकों के युग्मों की तुलना '<', '>' या '=' से या फिर तर्क के उपयोग द्वारा कीजिए।

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $49 - 7 + 8$ | ☐ | $49 - 7 + 8$ |
| (b) | $83 \times 42 - 18$ | ☐ | $83 \times 40 - 18$ |
| (c) | $145 - 17 \times 8$ | ☐ | $145 - 17 \times 6$ |
| (d) | $23 \times 48 - 35$ | ☐ | $23 \times (48 - 35)$ |
| (e) | $(16 - 11) \times 12$ | ☐ | $-11 \times 12 + 16 \times 12$ |
| (f) | $(76 - 53) \times 88$ | ☐ | $88 \times (53 - 76)$ |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(g) $25 \times (42 + 16)$ ☐ $25 \times (43 + 15)$

(h) $36 \times (28 - 16)$ ☐ $35 \times (27 - 15)$

5. गणना किए बिना पहचानिए कि दिए गए व्यंजक के बराबर कौन-सा व्यंजक है। आप पदों का उपयोग करके और कोष्ठकों को हटाकर व्यंजकों को पुन: लिख सकते हैं। दिए गए व्यंजक के बराबर एक से अधिक व्यंजक हो सकते हैं।

(a) $83 - 37 - 12$

(i) $84 - 38 - 12$

(ii) $84 - (37 + 12)$

(iii) $83 - 38 - 13$

(iv) $-37 + 83 - 12$

(b) $93 + 37 \times 44 + 76$

(i) $37 + 93 \times 44 + 76$

(ii) $93 + 37 \times 76 + 44$

(iii) $(93 + 37) \times (44 + 76)$

(iv) $37 \times 44 + 93 + 76$

6. एक संख्या चुनिए और उस मान वाले दस भिन्न व्यंजक बनाइए।

## सारांश

- हम कुछ समय से सामान्य व्यंजकों को पढ़ते और उनका मान निकालते आए हैं। यहाँ हमने कुछ सरल व्यंजकों के अर्थ तथा उनके मानों को दोहराकर प्रारंभ किया।
- हमने सीखा कि कैसे कुछ व्यंजकों के सीधे मान निकालने के स्थान पर तर्क द्वारा उनकी तुलना की जाए।
- जटिल व्यंजकों को बिना भ्रम के पढ़ने और हल करने में सहायता करने के लिए हम पदों और कोष्ठकों का उपयोग करते हैं।
- जब कोई व्यंजक पदों के योग के रूप में लिखा गया हो तो पदों का क्रम बदलने से या पदों का समूहीकरण करने से व्यंजक का मान नहीं बदलता है। ऐसा क्रमश: 'योग के क्रमविनिमेयता गुण' और 'योग के साहचर्यता गुण' के कारण होता है।
- कोष्ठकों के अंदर व्यंजकों का मान ज्ञात करने के लिए हमने देखा कि जब हम ऐसे कोष्ठक को हटाते हैं जिसके आगे ऋणात्मक चिह्न लगा हो तो कोष्ठक के अंदर लिखे पदों के चिह्न बदल जाते हैं।
- हमने "वितरण के गुण" के बारे में भी सीखा — कोष्ठक के अंदर लिखे व्यंजक को किसी संख्या से गुणा करना, उस संख्या को कोष्ठक के अंदर लिखे प्रत्येक पद से गुणा करने के समान होता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



पहेली का समय!

## व्यंजक इंजीनियर

तीन बार 3 लेकर और आवश्यकता के अनुसार चार संक्रियाएँ (योग, घटाव, गुणा और भाग) तथा कोष्ठकों का उपयोग करके हम बहुत से व्यंजक बना सकते हैं। उदाहरण के लिए, $(3+3)/3=2, 3+3-3=3, 3\times3+3=12$ और इसी प्रकार अनेक।

चार बार 4 लेकर व्यंजक बनाइए जिनके 1 से 20 तक सभी मान प्राप्त होते हों।

संख्याओं 1, 2, 3, 4 और 5 का केवल एक बार किसी भी क्रम में उपयोग करके –10 और +10 के बीच जितने संभव हों, उतने मान प्राप्त कीजिए।

0 से 9 तक की संख्याओं का केवल एक बार किसी भी क्रम में उपयोग करके 100 मान वाला एक व्यंजक बनाइए।

आप कौन-कौन से इसी प्रकार के अन्य रोचक प्रश्न पूछ सकते हैं?



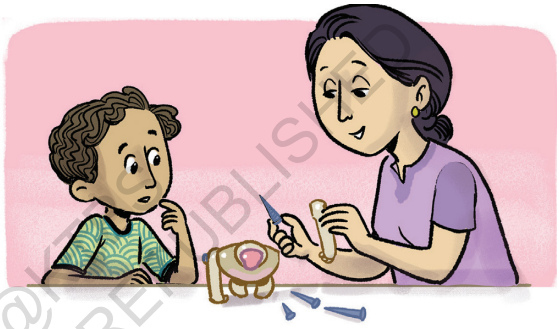
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

# 3 बिंदु से परे एक दृष्टि

0775CH03

## 3.1 छोटी इकाइयों की आवश्यकता

सोनू की माँ एक खिलौने को ठीक कर रही थीं। वे एक पेंच की सहायता से दो टुकड़ों को जोड़ने का प्रयास कर रही थीं। सोनू अपनी माँ को बहुत उत्सुकता के साथ देख रहा था। उसकी माँ उन टुकड़ों को जोड़ने में असमर्थ रहीं। सोनू ने पूछा, ऐसा क्यों हुआ? उसकी माँ ने कहा कि वह पेंच सही माप का नहीं था।



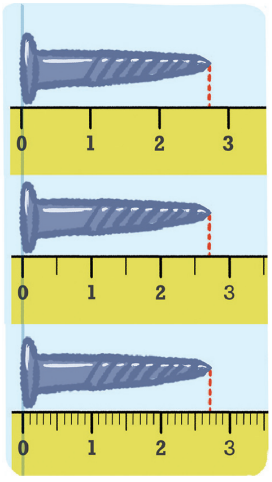
वह डिब्बे में से दूसरा पेंच लाईं तथा खिलौने को ठीक करने में सफल रहीं। सोनू को ये दोनों पेंच एक जैसे ही लगे। परंतु जब उसने उन्हें निकट से देखा तो पाया कि उनकी लंबाई में थोड़ा अंतर था।

सोनू को उत्सुकता हुई कि किस प्रकार लंबाइयों में एक छोटा-सा अंतर इतना प्रभाव डाल सकता है। उसकी जिज्ञासा लंबाइयों में अंतर जानने की हुई। उसकी उत्सुकता यह जानने की भी हुई कि यह अंतर कितना कम था, क्योंकि वे दोनों पेंच तो लगभग एक जैसे ही दिख रहे थे।



आगे दिए गए चित्र में पेंचों को एक मापक (स्केल) पर रखा गया है। उन्हें मापिए तथा दिए गए स्थानों पर उनकी लंबाई लिखिए।

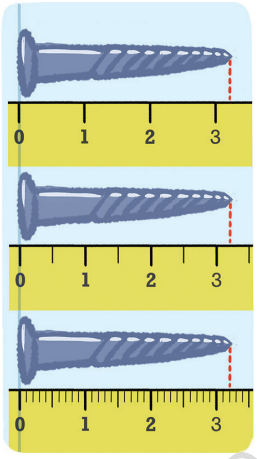
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED




2 से.मी. और
3 से.मी. के बीच

$2\frac{1}{2}$ से.मी. से अधिक परंतु
3 से.मी. से कम

$2\frac{7}{10}$ से.मी.




_____

_____

_____

? कौन-से मापक ने इन पेंचों की लंबाई को एकदम सटीक रूप से मापने में आपकी सहायता की और क्यों?

? $2\frac{7}{10}$ से.मी. (प्रथम पेंच की लंबाई) का क्या अर्थ है?

जैसा कि मापक पर देखते हैं कि दो क्रमागत संख्याओं के बीच की एक से.मी. इकाई लंबाई को 10 समान भागों में विभाजित किया गया है। लंबाई $2\frac{7}{10}$ से.मी. प्राप्त करने के लिए हम 0 से 2 तक जाते हैं तथा फिर उसके आगे $\frac{1}{10}$ के सात भाग लेते हैं। इस पेंच की कुल लंबाई 2 से.मी. + $\frac{7}{10}$ से.मी. है। इसी प्रकार हम लंबाई $3\frac{2}{10}$ से.मी. का अर्थ समझ सकते हैं।

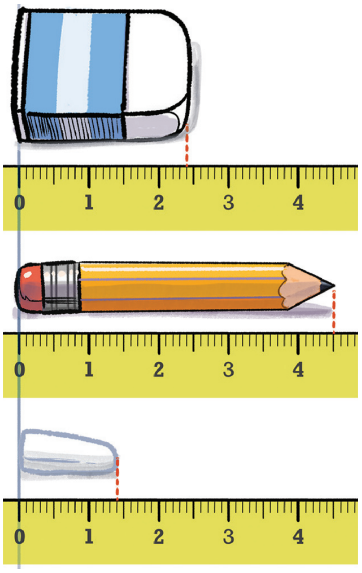
हम $2\frac{7}{10}$ से.मी. को दो और सात-दशांश सेंटीमीटर तथा $3\frac{2}{10}$ से.मी. को तीन और दो-दशांश सेंटीमीटर पढ़ते हैं।

? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि इन पेंचों को मापने के लिए इकाई को छोटे भागों में विभाजित क्यों किया गया?

? निम्नलिखित वस्तुओं को एक मापक का उपयोग करते हुए मापिए तथा इनके मापों को सेंटीमीटरों में उसी प्रकार लिखिए जैसे कि पहले पेंचों की लंबाइयों के लिए दर्शाया गया था— पेन, शार्पनर (sharpener) तथा अपनी पसंद की कोई अन्य वस्तु।

? चित्र में दर्शाई गई वस्तुओं के मापन लिखिए—

© KIBS NOT TO BE REPUBLISHED

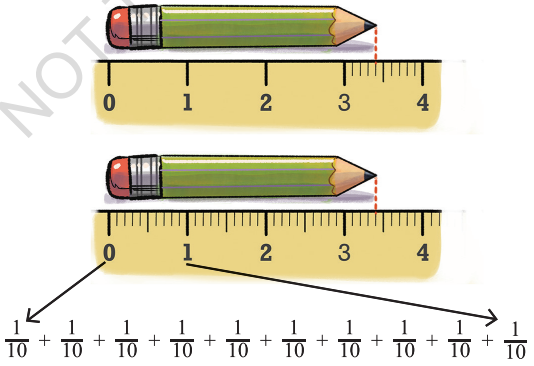



जैसा कि आप यहाँ देख सकते हैं कि जब सटीक मापों की आवश्यकता हो तब हम मापन की छोटी इकाइयों का उपयोग कर सकते हैं।

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

## 3.2 एक दसवाँ भाग (दशांश)

नीचे दिए हुए चित्र में दर्शाई गई पेंसिल की लंबाई $3\frac{4}{10}$ इकाई है जिसे 3 इकाई और चार दशांश (दसवाँ भाग) भी पढ़ा जा सकता है, अर्थात इसे $(3 \times 1) + \left(4 \times \frac{1}{10}\right)$ इकाई पढ़ा जा सकता है।




$$= 10 \text{ बार } \frac{1}{10} = 10 \times \frac{1}{10} = 1 \text{ इकाई}$$

यह लंबाई 34 दशांश इकाइयों के समान है क्योंकि 10 दशांश इकाइयों से एक इकाई बनती है।

$$34 \times \frac{1}{10} = \frac{34}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{4}{10} \text{ (34 दशांश)}$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{4}{10} \text{ (3 और 4 दशांश)}$$

नीचे कुछ संख्याएँ भिन्नात्मक इकाइयों के साथ दर्शाई गई हैं तथा यह भी दिया गया है कि इन्हें किस प्रकार पढ़ा जाता है—

$4\frac{1}{10}$ ⟶ **चार और एक-दशांश**

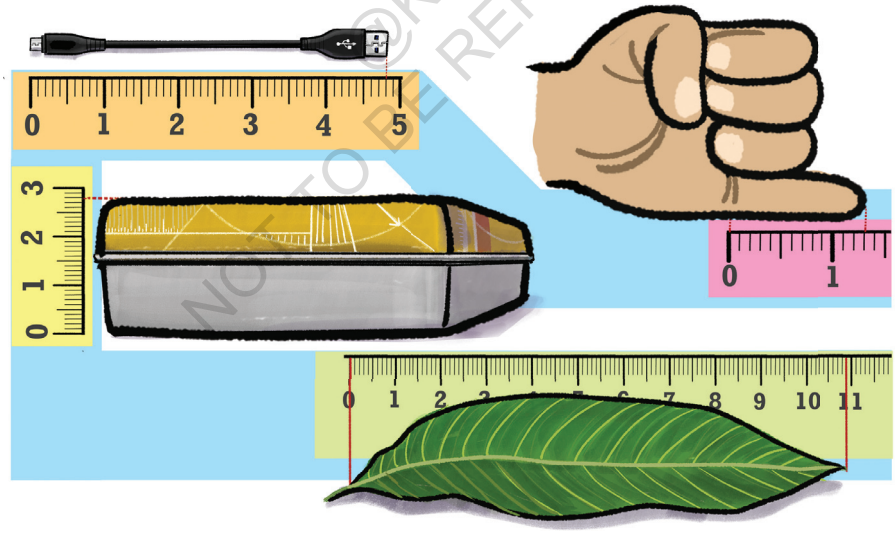
$\frac{4}{10}$ ⟶ **चार एक-दशांश या चार-दशांश**

$\frac{41}{10}$ ⟶ **इकतालीस दशांश या इकतालीस एक-दशांश**

$41\frac{1}{10}$ ⟶ **इकतालीस और एक-दशांश**

नीचे दर्शाई गई वस्तुओं के लिए इनकी लंबाइयों को दो प्रकार से लिखिए तथा उन्हें ऊँचे स्वर में पढ़िए। चार्जिंग (यू.एस.बी.) केबल का एक उदाहरण दिया गया है। (ध्यान दीजिए कि प्रत्येक आरेख में प्रयुक्त की गई इकाई की लंबाई समान नहीं है।)

इस यू.एस.बी. केबल की लंबाई 4 और $\frac{8}{10}$ इकाई या $\frac{48}{10}$ इकाई है।




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? इन लंबाइयों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित कीजिए—

(a) $\frac{9}{10}$ (b) $1\frac{7}{10}$ (c) $\frac{130}{10}$ (d) $13\frac{1}{10}$

(e) $10\frac{5}{10}$ (f) $7\frac{6}{10}$ (g) $6\frac{7}{10}$ (h) $\frac{4}{10}$

? निम्नलिखित लंबाइयों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित कीजिए— $4\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{41}{10}, 41\frac{1}{10}$

? सोनू अपने शरीर के कुछ अंगों को माप रहा है। सोनू की निचली भुजा की लंबाई $2\frac{7}{10}$ इकाई है तथा ऊपरी भुजा की लंबाई $3\frac{6}{10}$ इकाई है। उसकी भुजा की कुल लंबाई कितनी है?

आइए, कुल लंबाई प्राप्त करने के लिए निचली तथा ऊपरी भुजाओं की लंबाइयों को क्रमश: 2 इकाई और 7 दशांश तथा 3 इकाई और 6 दशांश के रूप में देखें।

अत: यहाँ (2 + 3) इकाई और (7 + 6) दशांश हैं। ये दोनों मिलकर 5 इकाई और 13 दशांश बनाते हैं। परंतु 13 दशांश 1 इकाई और 3 दशांश के समान है। अत: कुल लंबाई 6 इकाई 3 दशांश है।

(a) $(2+3)+\left(\frac{7}{10}+\frac{6}{10}\right)$

$=(2+3)+\left(\frac{13}{10}\right)$

$=5+\frac{13}{10}$

$=5+\frac{10}{10}+\frac{3}{10} \quad =5+1+\frac{3}{10}$

$=6+\frac{3}{10}$

$=6\frac{3}{10}$

(b)
$$\begin{array}{r} 2\frac{7}{10} \\ +\,3\frac{6}{10} \\ \hline 5\frac{13}{10} \end{array}$$

$6\frac{3}{10}$

अथवा दोनों लंबाइयों को दशांशों में परिवर्तित किया जा सकता है तथा फिर जोड़ा जा सकता है।

(c) 27 दशांश और 36 दशांश मिलकर 63 दशांश के समान हैं। अर्थात

$$\frac{27}{10}+\frac{36}{10}=\frac{63}{10}$$

$\frac{63}{10}$ वही है जो 60 दशांश $\left(\frac{60}{10}\right)$ और 3 दशांश $\left(\frac{3}{10}\right)$, जो कि 6 इकाई और 3 दशांश हैं अर्थात $6\frac{3}{10}$ के समान है।

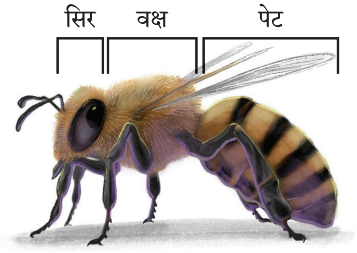
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? यहाँ एक मधुमक्खी के शरीर के अंगों की लंबाइयाँ दी गई हैं। इसकी कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।

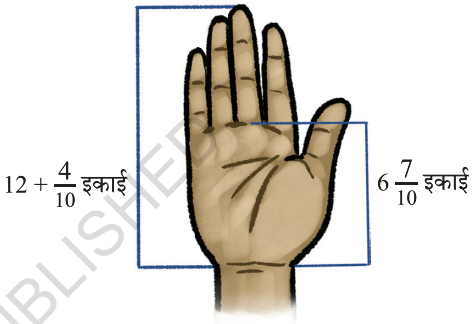
सिर $2\frac{3}{10}$ इकाई

वक्ष $5\frac{4}{10}$ इकाई

पेट $7\frac{5}{10}$ इकाई




? जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है कि शैलजा के हाथ की लंबाई $12\frac{4}{10}$ इकाई है तथा उसके हथेली की लंबाई $6\frac{7}{10}$ इकाई है, उसकी सबसे लंबी अँगुली (मध्यमा) की लंबाई क्या है?




इस उंगली की लंबाई $\left(12+\frac{4}{10}\right)-\left(6+\frac{7}{10}\right)$ का मान निकालकर ज्ञात की जा सकती है। यह विभिन्न विधियों से किया जा सकता है। उदाहरणार्थ—

(a) $12+\frac{4}{10}-6-\frac{7}{10}$

$=(12-6)+\left(\frac{4}{10}-\frac{7}{10}\right)$

$=6-\frac{3}{10}$

$=5+1-\frac{3}{10}$

$=5+\frac{10}{10}-\frac{3}{10}$

$=5+\frac{7}{10}=5\frac{7}{10}$

चर्चा कीजिए कि यहाँ क्या किया जा रहा है और क्यों?

(b) $12\frac{4}{10}$ $\longrightarrow$ $11\frac{14}{10}$

$-6\frac{7}{10}$ $\quad$ $-6\frac{7}{10}$

$=5\frac{7}{10}$

गणन संख्याओं की तरह यह सुविधाजनक है कि घटाने को दशांशों से प्रारंभ किया जाए। हम 7 दशांशों को 4 दशांशों में से नहीं घटा सकते। अत: हम 12 में से एक इकाई को विभक्त करके तथा 10 दशांश में बदल देते हैं। अब इस संख्या में 11 इकाई और 14 दशांश हैं। हम 7 दशांशों को 14 दशांशों में से घटाते हैं तथा फिर 6 इकाइयों को 11 इकाइयों में से घटाते हैं।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

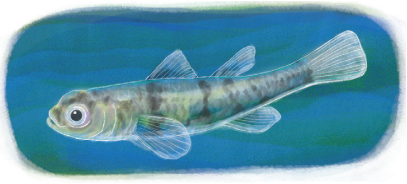
? इन दोनों लंबाइयों को दशांशों में बदलकर इनका अंतर ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

? एक सेलेसटियल पर्ल डेनियो (Celestial Pearl Danio) की लंबाई $2\frac{4}{10}$ से.मी. है तथा फिलीपीन गोबी की लंबाई $\frac{9}{10}$ से.मी. है। उनकी लंबाइयों में क्या अंतर है?

? ये मछलियाँ आपकी उंगली की तुलना में कितनी बड़ी हैं?



सेलेसटियल पर्ल डेनियो



फिलीपीन गोबी

? संख्याओं के दिए गए अनुक्रम को देखिए। प्रत्येक पद के बाद आए परिवर्तन को पहचानिए और पैटर्न का विस्तार कीजिए।

(a) $4, 4\frac{3}{10}, 4\frac{6}{10},$ _____, _____, _____, _____

(b) $8\frac{2}{10}, 8\frac{7}{10}, 9\frac{2}{10},$ _____, _____, _____, _____

(c) $7\frac{6}{10}, 8\frac{7}{10},$ _____, _____, _____, _____

(d) $5\frac{7}{10}, 5\frac{3}{10},$ _____, _____, _____, _____

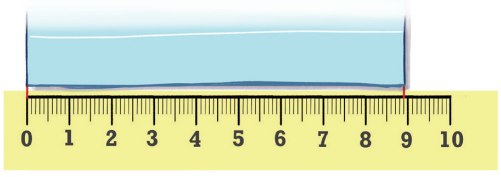
(e) $13\frac{5}{10}, 13, 12\frac{5}{10},$ _____, _____, _____, _____

(f) $11\frac{5}{10}, 10\frac{4}{10}, 9\frac{3}{10},$ _____, _____, _____, _____

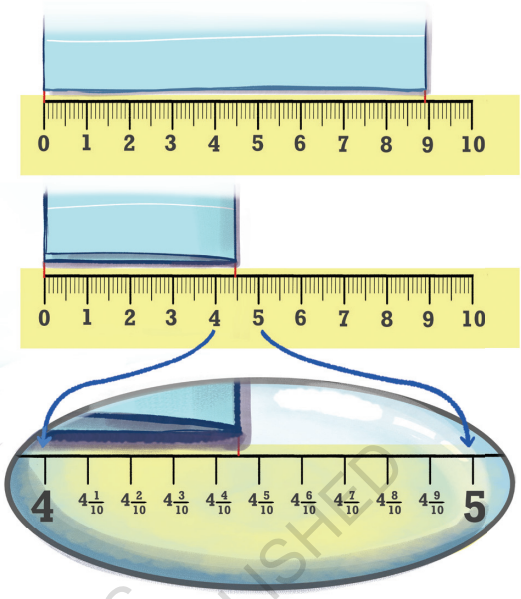
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 3.3 एक सौवाँ भाग (शतांश)

कागज के एक पत्रक (शीट) की लंबाई $8\frac{9}{10}$ इकाई थी जिसे 8 इकाई और 9 दशांश भी कहा जा सकता है। इसे इसकी लंबाई के अनुदिश आधा मोड़ा जाता है। अब इसकी लंबाई क्या है?

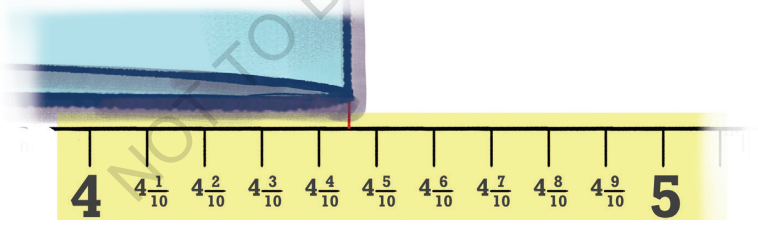


हम कह सकते हैं कि इसकी लंबाई $4\frac{4}{10}$ इकाई और $4\frac{5}{10}$ इकाई के बीच में है। परंतु हम इसका सटीक मापन नहीं बता सकते, क्योंकि यहाँ ऐसे कोई चिह्न अंकित नहीं हैं। इससे पहले हमने एक इकाई को 10 एक-दशांशों में विभाजित किया था जिससे छोटी लंबाइयाँ मापी जा सकें। हम ऐसा ही कुछ यहाँ भी कर सकते हैं तथा प्रत्येक दशांश को 10 भागों में विभाजित कर सकते हैं।




? इस प्राप्त छोटे भाग की लंबाई क्या है? ऐसे कितने छोटे भागों से एक इकाई बनती है?

जैसा कि नीचे चित्र में दर्शाया गया है कि प्रत्येक दशांश के 10 छोटे भाग हैं तथा एक इकाई में 10 दशांश हैं। इसलिए एक इकाई में ऐसे 100 छोटे भाग होंगे। अतः इस एक भाग की लंबाई एक इकाई का $\frac{1}{100}$ होगी।




अब हम अपने प्रश्न पर वापस आते हैं कि इस मुड़े हुए कागज की लंबाई क्या है?

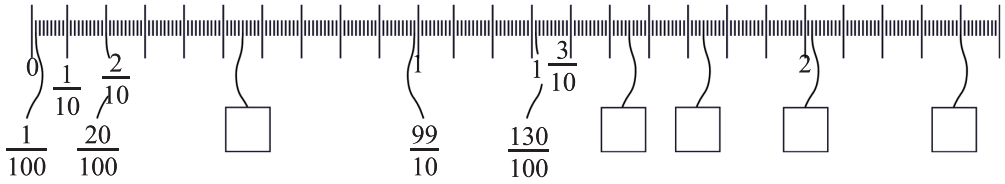
हम देखते हैं कि यह $4\frac{4}{10}\ \frac{5}{100}$ पर समाप्त हो रहा है जिसे **4 इकाई और 4 दशांश और 5 शतांश** के रूप में पढ़ा जाता है।

? कितने शतांशों से एक दशांश बनता है? क्या हम यह भी कह सकते हैं कि यह लंबाई 4 इकाई और 45 शतांश है?

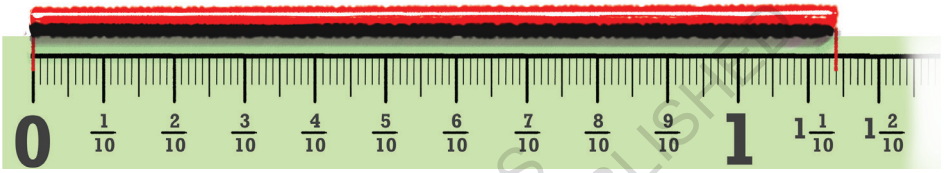
गणित चर्चा

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

? नीचे दिए गए चित्र को देखिए। अंकित चिह्नों पर तथा संगत लंबाइयों पर ध्यान दीजिए जिन्हें 0 से मापा गया है। रिक्त बक्सों में लंबाइयों को भरिए।




पहले चित्र में तार की लंबाई तीन भिन्न-भिन्न प्रकार से दी गई है। क्या आप देख सकते हैं कि ये एक ही (समान) लंबाई को क्यों व्यक्त करते हैं?

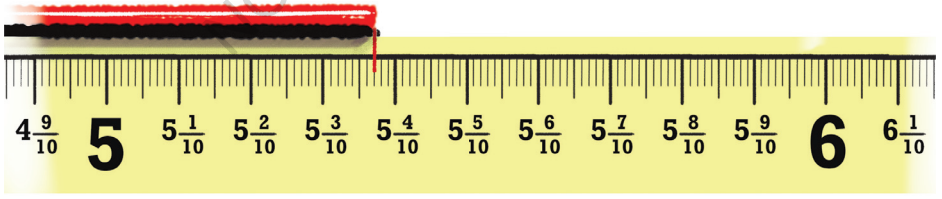


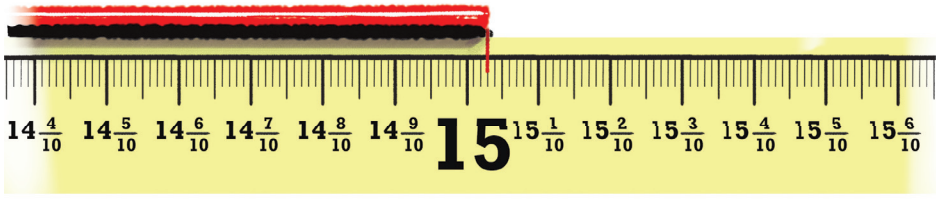

$1\frac{1}{10}\frac{4}{100}$ **एक इकाई और एक दशांश और चार शतांश**

$1\frac{14}{100}$ **एक और चौदह शतांश**

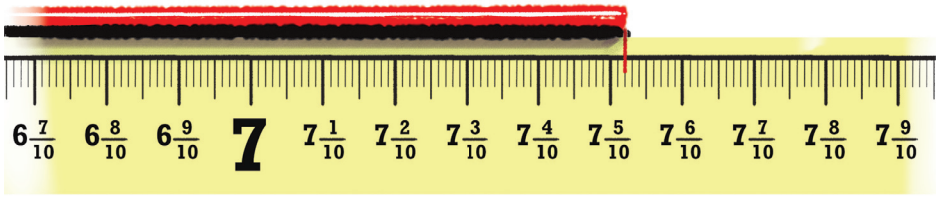
$\frac{114}{100}$ **एक सौ चौदह शतांश**

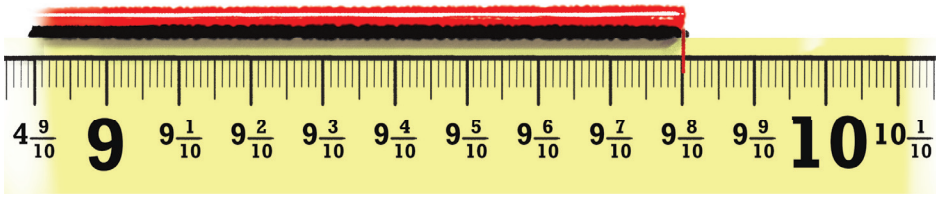
? नीचे दर्शाई गई लंबाइयों के लिए मापन लिखिए और मापों को शब्दों में पढ़िए—




© KIBS NOT TO BE REPUBLISHED



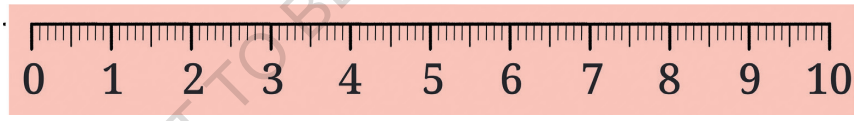




प्रत्येक समूह में सबसे लंबी तथा सबसे छोटी लंबाइयों की पहचान कीजिए। प्रत्येक लंबाई को मापक पर अंकित कीजिए।

(a) $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{33}{100}$



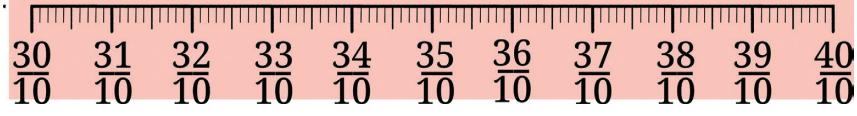

(b) $3\frac{1}{10}, \frac{30}{10}, 1\frac{3}{10}$




(c) $\frac{45}{100}, \frac{54}{100}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}$




(d) $3\frac{6}{100}, 3\frac{6}{100}, 3\frac{6}{10}\frac{6}{100}$

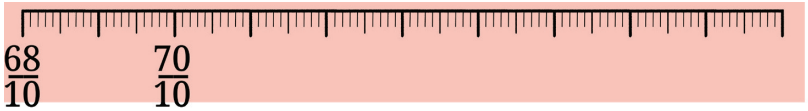



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

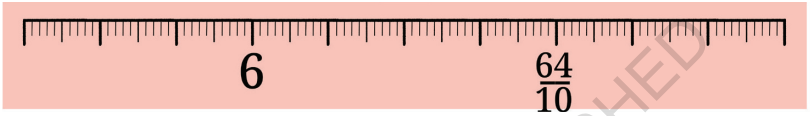
(e) $\frac{8}{10}\ \frac{2}{100}, \frac{9}{100}, 1\frac{8}{100}$




(f) $7\frac{3}{10}\ \frac{5}{100}, 7\frac{5}{10}, 7\frac{41}{100}$




(g) $\frac{65}{10}\ \frac{15}{100}, 5\frac{87}{100}, 5\frac{7}{100}$




? $15\frac{3}{10}\ \frac{4}{100}$ और $2\frac{6}{10}\ \frac{8}{100}$ का योग क्या होगा?

इसे विभिन्न विधियों से हल किया जा सकता है। कुछ विधियाँ नीचे दर्शाई गई हैं—

(a) पहली विधि

$$(15+2)+\left(\frac{3}{10}+\frac{6}{10}\right)+\left(\frac{4}{100}+\frac{8}{100}\right)$$
$$=17+\frac{9}{10}+\frac{12}{100}$$
$$=17+\frac{9}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}$$
$$=17+\frac{10}{10}+\frac{2}{100}$$
$$=18\frac{2}{100}$$

दस शतांश और एक दशांश समान हैं।

(b) दूसरी विधि

$$\begin{array}{rrrr} & 15 & \frac{3}{10} & \frac{4}{100} \\ + & 2 & \frac{6}{10} & \frac{8}{100} \\ \hline = & 17 & \frac{9}{10} & \frac{12}{100} \\ = & 17 & \frac{10}{10} & \frac{2}{100} \\ = & 18 & & \frac{2}{100} \end{array}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? क्या ये दोनों विधियाँ भिन्न-भिन्न हैं?

? नीचे 483 + 268 के लिए दिए गए योग को देखिए। क्या आप ऊपर दर्शाई गई विधियों तथा इस विधि के बीच कोई समानताएँ देख रहे हैं?

$$\begin{aligned}&(400 + 80 + 3) + (200 + 60 + 8)\\ &= (400 + 200) + (80 + 60) + (3 + 8)\\ &= 600 + 140 + 11\\ &= 600 + 150 + 1\\ &= 700 + 50 + 1\\ &= 751\end{aligned}$$

कोई भी व्यक्ति $15\frac{3}{10}\ \frac{4}{100} + 2\frac{6}{10}\ \frac{8}{100}$ को शतांशों में परिवर्तित करके योगफल ज्ञात कर सकता है जैसा कि नीचे दर्शाया गया है—

(c) $(15 + 2) + \left(\frac{34}{100} + \frac{68}{100}\right)$

$= 17 + \frac{102}{100}$

$= 17 + 1 + \frac{2}{100}$

$= 18\frac{2}{100}$

100 शतांश 1 इकाई के बराबर होते हैं।

(d) $\left(\frac{1534}{100}\right) + \left(\frac{268}{100}\right)$

$= \frac{1802}{100}$

$= \frac{1800}{100} + \frac{2}{100}$

$= 18\frac{2}{100}$

1500 शतांश 15 के बराबर है तथा 200 शतांश 2 के बराबर है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? अंतर ज्ञात कीजिए। $25\frac{9}{10} - 6\frac{4}{10}\frac{7}{100}$ में क्या अंतर है?

इसे हल करने की एक विधि—

$$25\frac{9}{10} \longrightarrow 25\frac{8}{10}\frac{10}{100} \longrightarrow 25\frac{8}{10}\frac{10}{100}$$

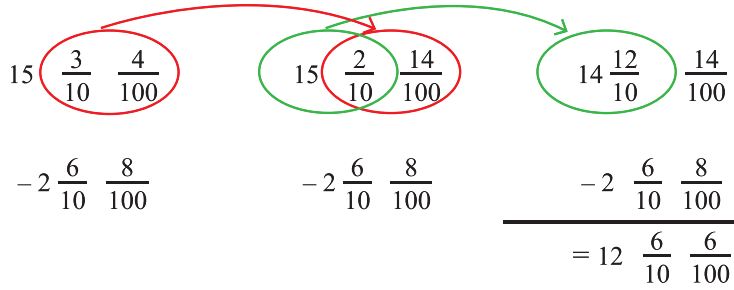
$$-6\frac{4}{10}\frac{7}{100} \qquad -6\frac{4}{10}\frac{7}{100} \qquad -6\frac{4}{10}\frac{7}{100}$$

$$= 19\frac{4}{10}\ \frac{3}{100}$$

? शतांशों में परिवर्तित कर इसे हल कीजिए। अंतर ज्ञात कीजिए—

$15\ \frac{3}{10}\ \frac{4}{100} - 2\ \frac{6}{10}\ \frac{8}{100}$?

इसे हल करने की एक विधि यह है—




653 – 268 के लिए नीचे घटाने की प्रक्रिया को देखिए। क्या आप इस प्रक्रिया में और ऊपर दी गई विधियों के बीच कोई समानताएँ देख पा रहे हैं?

गणित चर्चा

$$
\begin{aligned}
&(600 + 50 + 3) - (200 + 60 + 8)\\
&= (600 - 200) + (50 - 60) + (3 - 8)\\
&= (600 - 200) + (40 - 60) + (13 - 8)\\
&= (600 - 200) + (40 - 60) + 5\\
&= (500 - 200) + (140 - 60) + 5\\
&= 300 + 80 + 5\\
&= 385
\end{aligned}
$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? **पता लगाइए**

योग और अंतर ज्ञात कीजिए—

(a) $\frac{3}{10} + 3\ \frac{4}{100}$

(b) $9\ \frac{5}{10}\ \frac{7}{100} + 2\ \frac{1}{10}\ \frac{3}{100}$

(c) $15\ \frac{6}{10}\ \frac{4}{100} + 14\ \frac{3}{10}\ \frac{6}{100}$

(d) $7\ \frac{7}{100} - 4\ \frac{4}{100}$

(e) $8\ \frac{6}{100} - 5\ \frac{3}{100}$

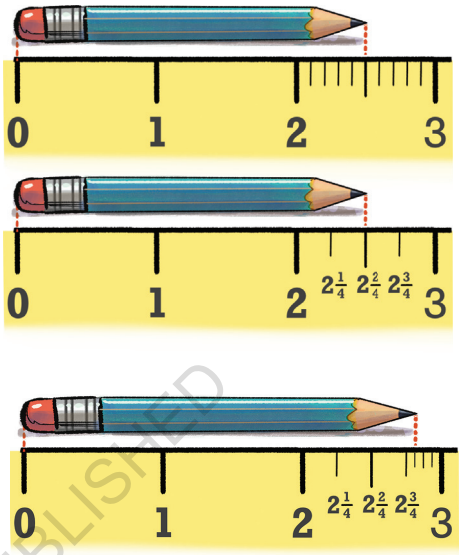
(f) $12\ \frac{6}{10}\ \frac{2}{100} - \frac{9}{10}\ \frac{9}{100}$

## 3.4 दशमलव स्थानीय मान

आपने इस ओर अवश्य ही ध्यान दिया होगा कि जब भी हमें किसी वस्तु को अधिक सटीकता के साथ मापने की आवश्यकता होती है हम एक भाग को 10 छोटे समान भागों में विभक्त करते हैं अर्थात हम एक इकाई को 10 दशांशों में तथा फिर प्रत्येक दशांश को 10 शतांशों में विभक्त करते हैं और उसके बाद इन छोटे भागों को हम मापन में उपयोग करते हैं।

? क्या हम एक इकाई को 4 समान भागों में, 5 समान भागों में, 8 समान भागों में अथवा किन्हीं अन्य समान भागों में विभक्त नहीं कर सकते?

हाँ, हम कर सकते हैं। नीचे दिया गया उदाहरण यह तुलना प्रस्तुत करता है कि जब इकाई को 10 या 4 समान भागों में विभक्त किया जाता है तब किस प्रकार एक ही लंबाई को उन दो विभिन्न स्थितियों में निरूपित किया जाता है।




यहाँ तक कि यदि और अधिक सटीक मापन की आवश्यकता है तो प्रत्येक चतुर्थांश को और आगे चार समान भागों में विभक्त किया जा सकता है। तब प्रत्येक भाग एक इकाई का $\frac{1}{16}$ भाग मापता है अर्थात ऐसे 16 भागों से 1 इकाई बनती है।

? तो एक इकाई को सदैव 10 भागों में ही क्यों विभक्त करें?

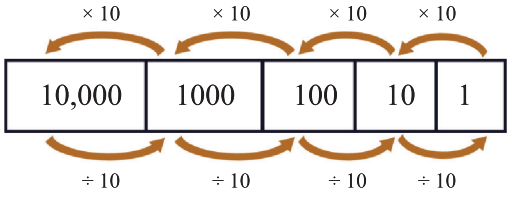
इसका कारण भारतीय स्थानीय मान पद्धति में 10 के द्वारा निभाई जाने वाली विशिष्ट भूमिका है। भारतीय स्थानीय मान पद्धति में लिखी एक पूर्ण संख्या में उदाहरणार्थ, 284 में 2 का स्थानीय मान सैकड़ा (100) है, 8 का स्थान दहाई (10) है तथा 4 का स्थान इकाई (1) है। प्रत्येक स्थान का स्थानीय मानक अपने से ठीक दाईं ओर के स्थानीय मान का 10 गुना है। तुलनात्मक रूप में प्रत्येक स्थान अपने से ठीक बाईं ओर के स्थान से 10 गुना छोटा है।

10 इकाइयों से 1 दहाई बनती है।

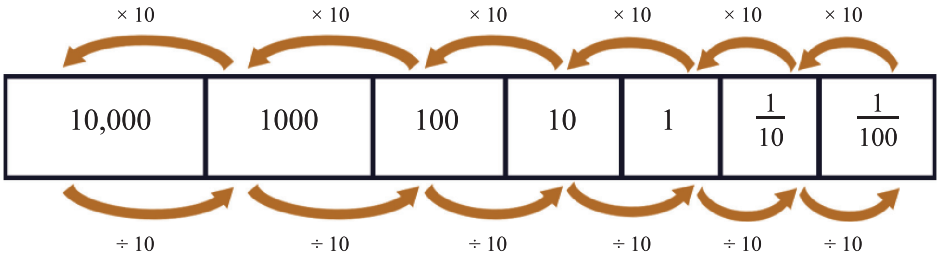
10 दहाइयों से 1 सैकड़ा बनता है।

10 सैकड़ों से 1 हजार बनता है इत्यादि।

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED



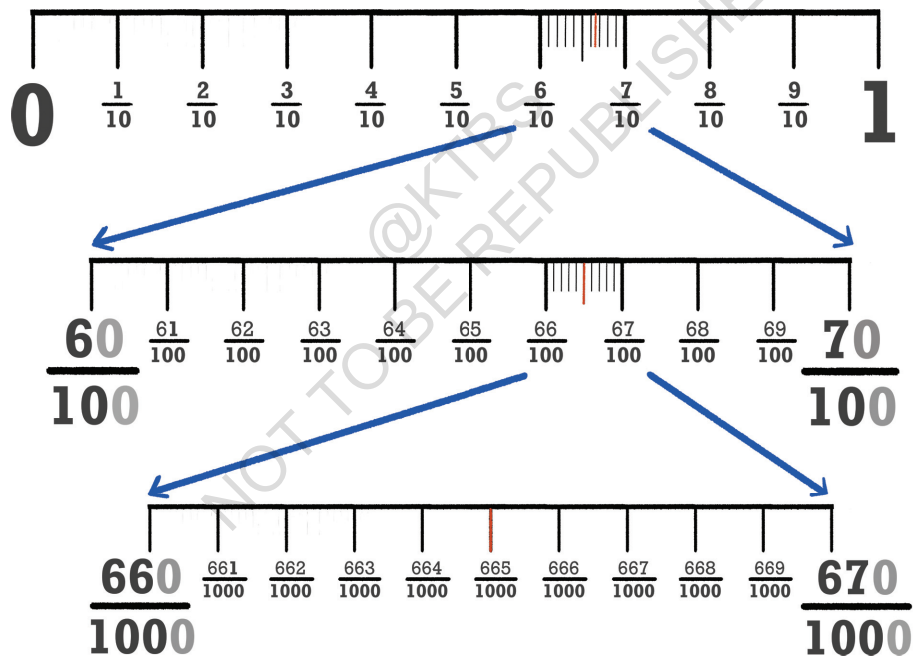

संख्याओं को लिखने की इस पद्धति को एक से छोटी राशियों के लिए विस्तार करने के लिए हम एक इकाई को 10 समान भागों में विभाजित करते हैं। इससे क्या प्राप्त होता है? इससे एक दशांश प्राप्त होता है। एक दशांश को 10 समान भागों में विभाजित करने पर एक शतांश प्राप्त होता है इत्यादि।




? क्या हम इसे और आगे विस्तार कर सकते हैं?

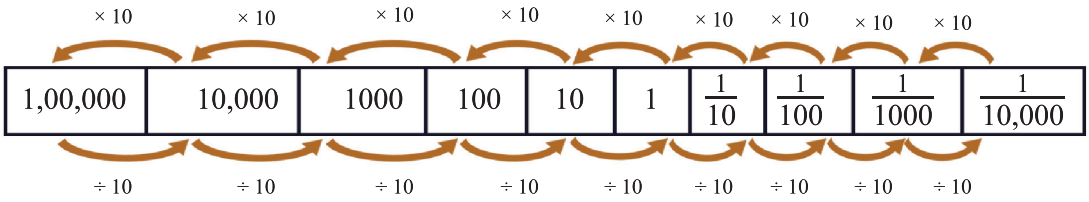
? जब $\frac{1}{100}$ को 10 समान भागों में विभक्त किया जाएगा, तब भिन्न क्या होगा?

यह $\frac{1}{1000}$ होगा अर्थात ऐसे एक हजार भागों से एक इकाई बनती है। इसलिए यह भाग एक सहस्त्रांश कहलाता है।




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जिस प्रकार 10,000 के बाईं ओर विस्तार करने पर प्रत्येक चरण में हम बड़े स्थानीय मान प्राप्त करते हैं, उसी प्रकार हम $\frac{1}{1000}$ के दाईं ओर विस्तार करते हुए प्रत्येक चरण पर छोटे स्थानीय मान भी प्राप्त कर सकते हैं।




संख्याओं को लिखने की यह विधि 'दशमलव पद्धति' कहलाती है, क्योंकि यह संख्या 10 पर आधारित है। लैटिन में 'डेसेम (decem)' का अर्थ दस है जो संस्कृत शब्द दश के सजातीय है। अनेक भारतीय भाषाओं में 10 के लिए ऐसे ही समान शब्दों के भी सजातीय हैं, जिनमें ओड़िया, कोंकणी, मराठी, गुजराती, हिंदी, काश्मीरी, बोडो और असमिया सम्मिलित हैं। हम संख्याओं को लिखने की और अधिक अन्य विधियों के बारे में बाद की कक्षाओं में अध्ययन करेंगे।

**कितना बड़ा?**

हम पहले से ही जानते हैं कि 10 एक सौ से मिलकर 1000 बनता है तथा 100 एक सौ से 10000 बनता है।

? इसी प्रकार के प्रश्न हम भिन्नात्मक भागों के बारे में भी पूछ सकते हैं—

(a) कितने सहस्त्रांशों से एक इकाई बनती है?
(b) कितने सहस्त्रांशों से एक-दशांश बनता है?
(c) कितने सहस्त्रांशों से एक-शतांश बनता है?
(d) कितने दशांशों से एक दहाई बनती है?
(e) कितने शतांशों से एक दहाई बनती है?

? इसी प्रकार के कुछ और प्रश्न बनाइए तथा उनके उत्तर दीजिए।

## संकेतन, संख्या लेखन एवं पठन

हम संख्याओं को एक विशिष्ट विधि में लिखते आ रहे हैं, जैसे $4 \times 100$ (4 सैकड़े) + $5 \times 10$ (5 दहाई) + $6 \times 1$ (6 इकाई)। 456 की बजाय क्या इसी प्रकार हम दशांशों और शतांशों को लिखना छोड़ सकते हैं?

? क्या मात्रा $4\frac{2}{10}$ को 42 ($2 \times \frac{1}{10}$ में $\frac{1}{10}$ को छोड़कर) लिखा जा सकता है? यदि हाँ तो हमें कैसे ज्ञात होगा कि 42 का अर्थ 4 दहाई और 2 इकाई है या इसका अर्थ 4 इकाई और 2 दशांश है?

गणित चर्चा

इसी प्रकार 705 के अर्थ ये हो सकते हैं—

(a) 7 सैकड़े और 0 दहाई और 5 इकाई (700 + 0 + 5)
(b) 7 दहाई और 0 इकाई और 5 दशांश $\left(70 + 0 + \frac{5}{10}\right)$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(c) 7 इकाई और 0 दशांश और 5 शतांश $\left(7+\frac{0}{10}+\frac{5}{100}\right)$

क्योंकि ये अलग-अलग मात्राएँ हैं अत: हमें इन्हें लिखने की भिन्न-भिन्न विधियों की आवश्यकता है।

दो पूर्णांकों के मध्य में जब भिन्नात्मक भाग प्रारंभ होते हैं उस स्थान की पहचान करने के लिए हम एक पृथक्कारक के रूप में ('.') एक बिंदु का उपयोग करते हैं, जिसे **दशमलव बिंदु** कहा जाता है।

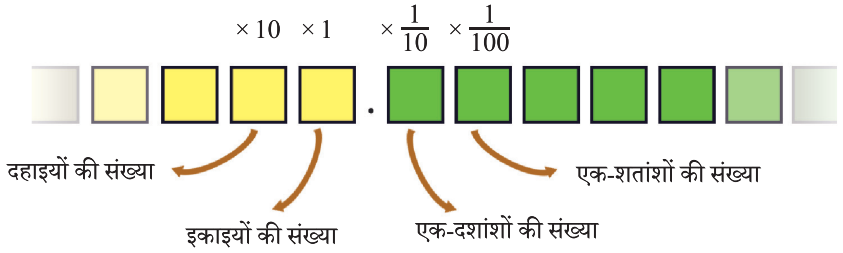
तब उपरोक्त राशियाँ दशमलव संकेतन में इस प्रकार लिखी जाती हैं—

| राशि | दशमलव संकेतन |
|---|---|
| 7 सैकड़े और 5 इकाई $(700 + 0 + 5)$ | 705 |
| 7 दहाई और 5 दशांश $\left(70 + 0 + \frac{5}{10}\right)$ | 70.5 |
| 7 इकाई और 5 शतांश $\left(7 + 0 + \frac{5}{100}\right)$ | 7.05 |

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इन संख्याओं को जब स्थानीय मानों के माध्यम से दर्शाया जाता है तब वे निम्नलिखित प्रकार के होते हैं—

| दशमलव संख्या | सैकड़े | दहाई | इकाई | दशांश | शतांश |
|---|---|---|---|---|---|
| 705 | $7 \times 100$ | $0 \times 10$ | $5 \times 1$ | | |
| 70.5 | | $7 \times 10$ | $0 \times 1$ | $5 \times \frac{1}{10}$ | |
| 7.05 | | | $7 \times 1$ | $0 \times \frac{1}{10}$ | $5 \times \frac{1}{100}$ |



इस प्रकार दशमलव संकेतन संख्याओं की भारतीय स्थानीय मान पद्धति का भिन्नात्मक भागों के लिए एक स्वाभाविक विस्तार है। जैसे कि 705 का अर्थ $7 \times 100 + 5 \times 1$ है, उसी प्रकार 70.5 का अर्थ $7 \times 10 + 5 \times \frac{1}{10}$ है तथा 7.05 का अर्थ $7 \times 1 + 5 \times \frac{1}{100}$ है।

हम देख चुके हैं कि संख्याओं को किस प्रकार दशमलव बिंदु ('.') का उपयोग करते हुए लिखा जाता है। परंतु हम इन संख्याओं को किस प्रकार पढ़ते या बोलते हैं?

हम जानते हैं कि 705 को 'सात सौ पाँच' पढ़ा जाता है। 70.5 को **सत्तर दशमलव पाँच (सत्तर और पाँच-दशांश** संक्षिप्त में) पढ़ा जाता है। 7.05 को **सात दशमलव शून्य पाँच (सात और पाँच-शतांश** संक्षिप्त में) पढ़ा जाता है। 0.274 को **शून्य दशमलव दो सात चार** पढ़ा जाता है। हम इसे **शून्य दशमलव दो सौ चौहत्तर** नहीं पढ़ते हैं क्योंकि 0.274 का अर्थ **2 दशांश और 7 शतांश और 4 सहस्त्रांश** है।

? पृष्ठ संख्या 62 पर दी गई तालिका की तरह एक स्थानीय मान-तालिका बनाइए। नीचे दी प्रत्येक राशि को स्थानीय मान के माध्यम से दशमलव रूप में लिखिए तथा इस प्रकार प्राप्त संख्या को पढ़िए—

(a) 2 इकाई, 3 दशांश और 5 शतांश

(b) 1 दहाई और 5 दशांश

(c) 4 इकाई और 6 शतांश

(d) 1 सैकड़ा, 1 इकाई और 1 शतांश

(e) $\frac{8}{100}$ और $\frac{9}{10}$

(f) $\frac{5}{100}$

(g) $\frac{1}{10}$

(h) $2\frac{1}{100}$, $4\frac{1}{10}$ और $7\frac{7}{1000}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

बड़ी संख्याओं वाले अध्याय में, हमने सीखा था कि 23 सैकड़ों को किस प्रकार लिखा जाता है। 23 सैकड़े = $23 \times 100 = 2000 + 300 = 2300$ है।

| हजार | सैकड़ा | दहाई | इकाई |
|---|---|---|---|
| | 23 | | |
| 2 | 3 | 0 | 0 |

इसी प्रकार 23 दहाइयाँ निम्नलिखित होंगी—

23 दहाइयाँ = $23 \times 10 = 200 + 30 = 230$

| हजार | सैकड़ा | दहाई | इकाई |
|---|---|---|---|
| | | 23 | |
| | 2 | 3 | 0 |

? हम 234 दशांश को दशमलव रूप में किस प्रकार लिख सकते हैं?

234 दशांश $= \frac{234}{10}$

$= \frac{200}{10} + \frac{30}{10} + \frac{4}{10}$

$= 20 + 3 + \frac{4}{10}$

$= 23.4$

| सैकड़ा | दहाई | इकाई | दशांश | शतांश |
|---|---|---|---|---|
| | | | 234 | |
| | 2 | 3 | 4 | |

? इन संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए— (a) 234 शतांश (b) 105 दशांश

## 3.5 मापन इकाइयाँ

### लंबाई परिवर्तन

हम कुछ वर्षों से एक मापक (रूलर) के उपयोग द्वारा लंबाई मापना देख चुके हैं। हम यह भी जानते हैं कि 1 से.मी. = 10 मि.मी. (मिलीमीटर) होता है।

? 1 मिलीमीटर में कितने से.मी. होते हैं?

1 मि.मी. $= \frac{1}{10}$ से.मी. = 0.1 से.मी. (अर्थात एक से.मी. का एक–दशांश) है।

? निम्नलिखित में कितने से.मी. हैं? (a) 5 मि.मी. (b) 12 मि.मी.

5 मि.मी. $= \frac{5}{10}$ से.मी. = 0.5 से.मी.

12 मि.मी. = 10 मि.मी. + 2 मि.मी.

= 1 से.मी. + $\frac{2}{10}$ से.मी.

= 1.2 से.मी.

5.6 से.मी. कितने मि.मी. के बराबर है? 1 से.मी. में 10 मि.मी. होते हैं तथा 1 से.मी. = मि.मि.

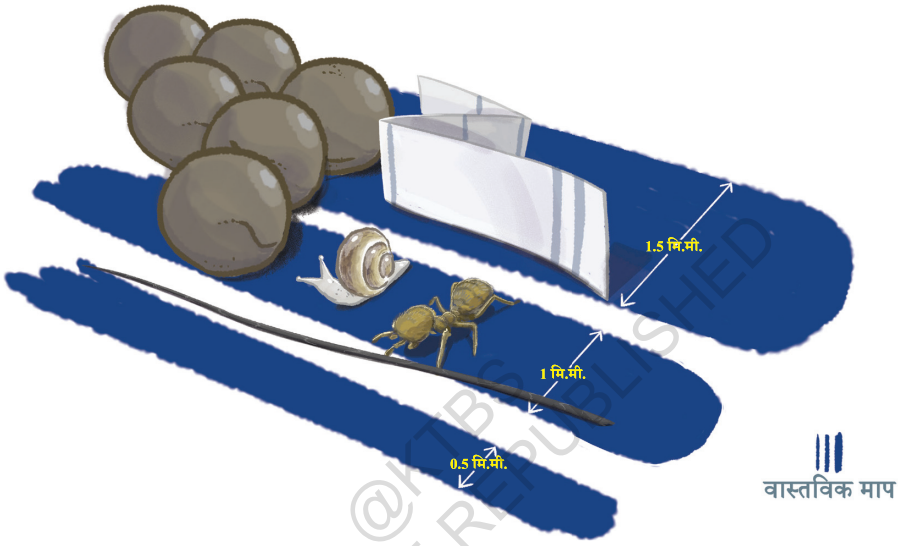
अत: 5.6 से.मी. (5 से.मी. + 0.6 से.मी.) = 56 मि.मी. है।

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

? नीचे दिए गए रिक्त स्थानों को भरिए (मि.मी. < – > से.मी.)—

| | | |
|---|---|---|
| 12 मि.मी. = 1.2 से.मी. | 56 मि.मी. = 5.6 से.मी. | 70 मि.मी. = _____ |
| _____ = 0.9 से.मी. | 134 मि.मी. = _____ | _____ = 203.6 से.मी. |

नीचे दिए हुए चित्र यह दर्शाते हैं कि कुछ वस्तुएँ कितनी छोटी होती हैं। प्रत्येक का एक सन्निकट मापन ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

- तीन नीली पट्टियाँ पेन से चिह्न बनाने के प्रतीकात्मक सापेक्ष मापों को निरूपित करती हैं। सूक्ष्म चिह्न, मध्यम चिह्न और गहरा चिह्न।
- मानव के बालों की मोटाई लगभग 0.1 मि.मी. होती है।
- एक समाचार पत्र की मोटाई 0.05 मि.मी. से 0.08 मि.मी. हो सकती है।
- सरसों के बीजों की मोटाई 1-2 मि.मी. होती है।
- अब तक खोजी गई चीटियों की सबसे छोटी प्रजाति कैरबारा ब्रूनी (Carabera Bruni) की कुल लंबाई 0.8 – 1 मि.मी. होती है। ये श्रीलंका और चीन में पाई जाती हैं।
- अब तक खोजी गई भूमि घोंघा प्रजातियों में सबसे छोटे घोंघे एक्मेल्ला नाना (Acmella Nana) के खोल का व्यास 0.7 मि.मी. होता है। ये मलेशिया में पाए जाते हैं।

हम यह भी जानते हैं कि 1 मी. = 100 से.मी. है। इसके आधार पर हम कह सकते हैं कि—

$$1 \text{ से.मी.} = \frac{1}{100} \text{ मी.} = 0.01 \text{ मी.}$$

? (a) 10 से.मी. (b) 15 से.मी. कितने मी. के बराबर है?

10 से.मी. = $\frac{1}{10}$ मी. = 0.1 मी. है।

क्योंकि प्रत्येक से.मी. एक मीटर का एक-शतांश होता है। अत: 15 से.मी. को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$15 \text{ से.मी.} = \frac{15}{100} \text{ मी.}$

$= \frac{10}{100} \text{ मी.} + \frac{5}{100} \text{ मी.}$

$= \frac{1}{10} \text{ मी.} + \frac{5}{100} \text{ मी.}$

$= 0.15 \text{ मी.}$

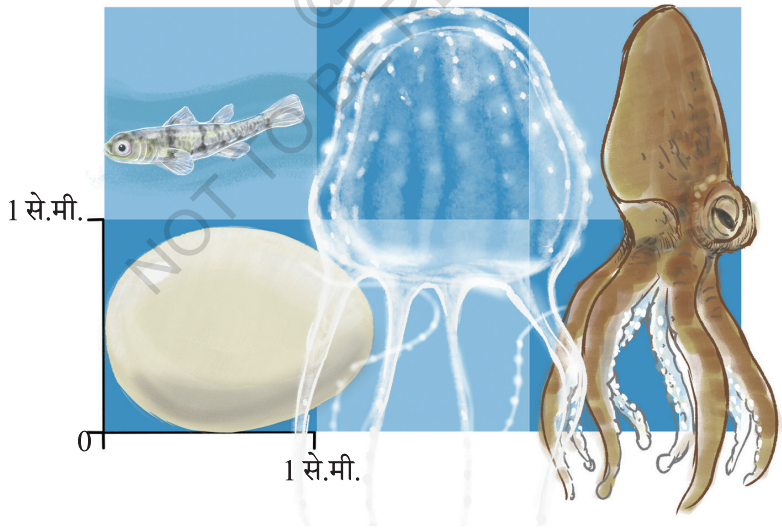
? नीचे दिए रिक्त स्थानों को भरिए। (से.मी. < – > मी.)—

| | | |
|---|---|---|
| 36 से.मी. = _____ | 50 से.मी. = _____ | _____ = 0.89 मी. |
| 4 से.मी. = _____ | 325 से.मी. = _____ | _____ = 2.07 मी. |

? 1 मीटर में कितने मि.मी. होते हैं?

? क्या हम 1 मि.मी. $= \frac{1}{1000}$ मी. लिख सकते हैं?

यहाँ हमारे पास प्रकृति की छोटी वस्तुओं के बारे में कुछ और रोचक तथ्य हैं।




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

- सामान्यत: हमिंग पक्षी के अंडे की लंबाई 1.3 से.मी. तथा चौड़ाई 0.9 से.मी. होती है।
- फिलीपीन गोबी की लंबाई लगभग 0.9 से.मी. होती है। यह फिलीपीन्स और अन्य दक्षिण एशियाई देशों में पाई जाती है।

- सबसे छोटी ज्ञात जेलीफिश इरूकंदजी के पेट का माप 0.5 – 2.5 से.मी. होता है। इसके जाल की लंबाई 1 मी. तक हो सकती है। ये ऑस्ट्रेलिया में पाई जाती हैं। इसका जहर मानव के लिए घातक हो सकता है।
- विश्व में सबसे छोटा ज्ञात ऑक्टोपस वोल्फी ऑक्टोपस (Wolfi octopus) जिसे स्टार–सकर (Star–sucker) पिग्मी ऑक्टोपस भी कहा जाता है। इसका सामान्य आकार लगभग 1–2.5 से.मी. होता है तथा इसका भार 1 ग्राम से कम होता है। ये प्रशांत महासागर में पाए जाते हैं।

## भार परिवर्तन

आइए, एक किलोग्राम (कि.ग्रा.) पर दृष्टि डालें। हम जानते हैं कि 1 कि.ग्रा. = 1000 ग्राम (ग्रा.) होता है। हम कह सकते हैं कि

$$1 \text{ ग्रा.} = \frac{1}{1000} \text{ कि.ग्रा.} = 0.001 \text{ कि.ग्रा.}$$

? 5 ग्रा. कितने किलोग्राम के बराबर है?

$$5 \text{ ग्रा.} = \frac{5}{1000} \text{ कि.ग्रा.} = 0.005 \text{ कि.ग्रा.}$$

? 10 ग्रा. कितने किलोग्राम के बराबर है?

$$10 \text{ ग्रा.} = \frac{10}{1000} \text{ कि.ग्रा.} = \frac{1}{100} \text{ कि.ग्रा.} = 0.010 \text{ कि.ग्रा.}$$

क्योंकि प्रत्येक ग्राम एक कि.ग्रा. का एक सहस्त्रांश है, अत: 254 ग्राम को लिखा जा सकता है—

$$254 \text{ ग्रा.} = \frac{254}{1000} \text{ कि.ग्रा.}$$

$$= \left(\frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{4}{1000}\right) \text{ कि.ग्रा.}$$

$$= \left(\frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}\right) \text{ कि.ग्रा.}$$

$$= 0.254 \text{ कि.ग्रा.}$$

? नीचे दिए रिक्त स्थानों को भरिए (ग्रा. < – > कि.ग्रा.)

| | | |
|---|---|---|
| 465 ग्रा. = _____ | 68 ग्रा. = _____ | 1560 ग्रा. = _____ |
| 704 ग्रा. = _____ | _____ = 0.56 कि.ग्रा. | _____ = 2.5 कि.ग्रा. |

नीचे दिए गए चित्र पर दृष्टि डालिए जिसमें चावल की विभिन्न मात्राएँ दर्शाई गई हैं। यहाँ 1 ग्राम की ढेरी से प्रारंभ करते हुए पिछली ढेरी या पैकट से 10 गुनी भारी उत्तरोत्तर ढेरियाँ ज्ञात की जा सकती हैं। इस चित्र में चावलों का कुल भार 11.111 कि.ग्रा. है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




साथ ही

1 ग्राम (ग्रा.) = 1000 मिलीग्राम (मि.ग्रा.) होता है। अत: 1 मि.ग्रा. = $\frac{1}{1000}$ ग्राम = 0.001 ग्राम है।

## रुपये – पैसे परिवर्तन

आपने 'पैसे' के बारे में सुना होगा। 100 पैसे 1 रुपये के बराबर होते हैं। जैसे कि हमारे पास रुपयों के लिए सिक्के और नोट हैं। इसी प्रकार कुछ समय पूर्व तक पैसों के लिए सिक्कों का उपयोग किया जाता था। 1 पैसा, 10 पैसे, 20 पैसे, 25 पैसे और 50 पैसे के लिए सिक्के होते थे। 25 पैसे और उससे कम राशि के सिक्कों को वर्ष 2011 में उपयोग से हटा लिया गया था। परंतु हमें अभी भी बिलों खातों के विवरण इत्यादि में पैसे दिखाई देते हैं।

1 रुपया = 100 पैसे हैं।

1 पैसा = $\frac{1}{100}$ रुपये = 0.01 रुपये है।

क्योंकि प्रत्येक पैसा एक रुपये का एक शतांश है अत:

$$75 \text{ पैसे} = \frac{75}{100} \text{ रुपये}$$

$$= \left(\frac{70}{100} + \frac{5}{100}\right) \text{ रुपये}$$

$$= \left(\frac{7}{10} + \frac{5}{100}\right) \text{ रुपये}$$

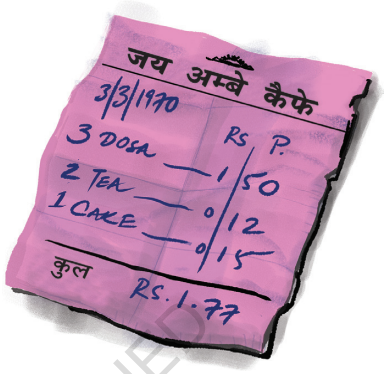
$$= 0.75 \text{ रुपये}$$

© @KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? नीचे दिए गए रिक्त स्थानों को भरिए (रुपये < – > पैसे)

| | | |
|---|---|---|
| 10 पैसे = _____ | _____ पैसे = ₹ 0.05 | _____ पैसे = ₹ 0.36 |
| _____ = ₹ 0.50 | 99 पैसे = _____ | 250 पैसे = _____ |

1970 के दौरान एक मसाला दोसा का मूल्य केवल 50 पैसे था, एक केला 20–25 पैसे में खरीदा जा सकता था, एक मुट्ठी पुदीना 2–3 पैसे में उपलब्ध था तथा एक कि.ग्रा. चावल का मूल्य ₹ 2.45 था।



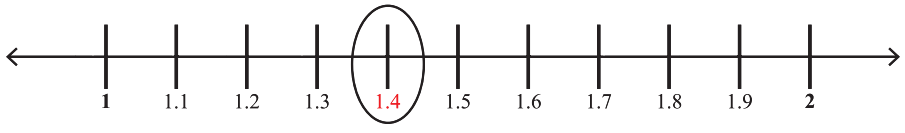

? विद्यालय में वयस्क व्यक्तियों के साथ उनके बचपन के समय में प्रचलित विभिन्न उत्पादों और सेवाओं के मूल्यों पर चर्चा कीजिए। पुराने सिक्कों और डाक टिकटों को खोजने का प्रयास कीजिए।

प्रयास करें




## 3.6 दशमलवों की स्थितियाँ ज्ञात करना तथा उनकी तुलना करना

आइए, दशमलव संख्या 1.4 पर विचार करें। यह 1 इकाई और 4 दशांशों के समान है। इसका अर्थ है कि 1 और 2 के बीच की इकाई को 10 समान भागों में विभाजित किया गया है तथा इनमें से चार भाग ले लिए जाते हैं। अत: 1 और 2 के बीच में 1.4 स्थित है। एक संख्या रेखा खींचिए तथा 1 और 2 के बीच की इकाई को 10 समान भागों में विभाजित कीजिए। इनमें से चौथा भाग लीजिए। इस प्रकार हम संख्या रेखा पर 1.4 प्राप्त करते हैं।

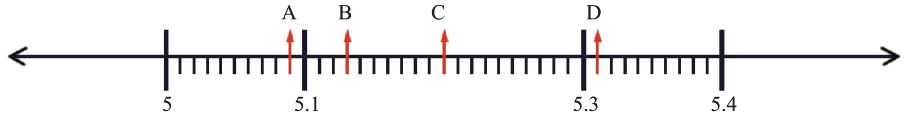



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? संख्या रेखा पर 1 और 1.1 के बीच सभी विभाजनों के नाम लिखिए।




? पहचान कीजिए और दिए हुए अक्षरों के सम्मुख दशमलव संख्याएँ लिखिए।




## शून्य की दुविधा!

? सोनू कहता है कि 0.2 को 0.20, 0.200 के रूप में भी लिखा जा सकता है; जारा सोचती है कि दाईं ओर शून्य लगाने पर उस दशमलव संख्या का मान बदल सकता है। आप क्या सोचते हैं?

हम स्थानीय मानों का उपयोग करते हुए इन संख्याओं द्वारा निरूपित राशियों पर एक दृष्टि डालकर इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात कर सकते हैं।

| दशमलव संख्या | इकाई | दशांश | शतांश | सहस्त्रांश |
|---|---|---|---|---|
| 0.2 | 0 | 2 | | |
| 0.20 | 0 | 2 | 0 | |
| 0.200 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 0.02 | 0 | 0 | 2 | |
| 0.002 | 0 | 0 | 0 | 2 |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

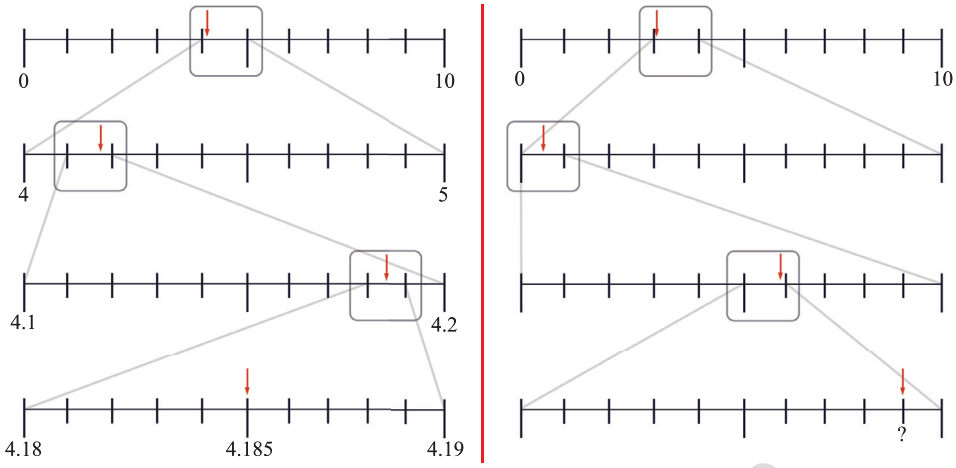
हम देख सकते हैं कि 0.2, 0.20, 0.200 सभी समान हैं, क्योंकि ये एक ही राशि को निरूपित करते हैं जो कि दशांश 2 है, परंतु 0.2, 0.02 और 0.002 भिन्न-भिन्न हैं।

? क्या आप बता सकते हैं कि उपरोक्त में से कौन-सी संख्या सबसे छोटी है तथा कौन-सी सबसे बड़ी है?

? इनमें से कौन-कौन सी संख्याएँ समान हैं? 4.5, 4.05, 0.405, 4.50, 4.005, 04.50

आगे चित्र (a) में दी गई संख्या रेखाओं को देखिए। प्रत्येक स्तर पर संख्या रेखा के एक विशेष भाग को संख्या 4.185 निर्धारित करने के लिए आवर्धित किया गया है।

? चित्र (b) की अंतिम संख्या रेखा में उस दशमलव संख्या की पहचान कीजिए जिसे '?' द्वारा व्यक्त किया गया है।

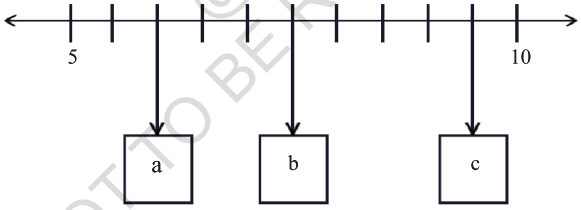



(a) (b)

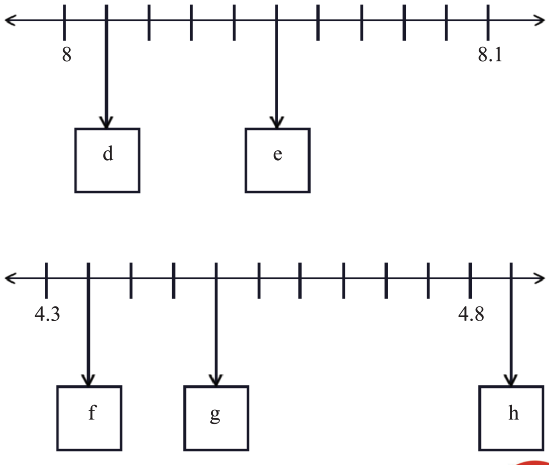
? ऐसी ही संख्या रेखाएँ निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के लिए बनाइए—

(a) 9.876 (b) 0.407

? नीचे दर्शाई संख्या रेखा में, 'a', 'b' और 'c' से अंकित बक्से कौन-सी दशमलव संख्याएँ व्यक्त करते हैं?




'b' से अंकित बक्सा दशमलव संख्या 7.5 के संगत है। क्या आपने देखा कि ऐसा कैसे हुआ? 5 और 10 के बीच में 5 इकाइयाँ हैं जिन्हें10 समान भागों में विभाजित किया गया है। अत: प्रत्येक 2 विभाजनों से एक इकाई बनती है। अत: प्रत्येक विभाजन $\frac{1}{2}$ इकाई है। 'a' और 'c' कौन-सी संख्याएँ व्यक्त करते हैं?




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

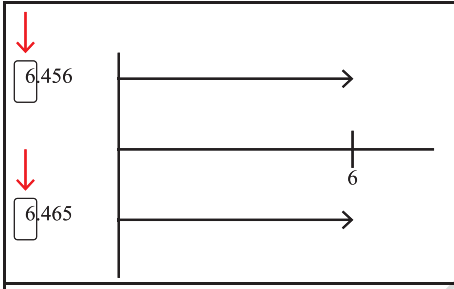
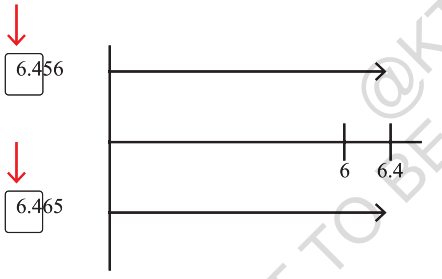
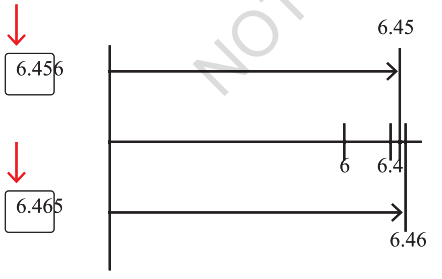
? इसी प्रकार के तर्क का उपयोग करते हुए नीचे दिए गए बक्सों की दशमलव संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

? इनमें से कौन-सी संख्या बड़ी है — 6.456 या 6.465?

इसका उत्तर देने के लिए हम संख्या रेखा के उपयोग से दोनों दशमलव संख्याओं की स्थिति निर्धारित कर सकते हैं तथा दिखा सकते हैं कि कौन-सी संख्या बड़ी है।

हम यह कार्य प्रत्येक स्थान के संगत अंकों की तुलना करके भी कर सकते हैं, जैसा कि हमने पूर्ण संख्याओं की स्थिति में किया था।

यह तुलना चरणबद्ध विधि द्वारा नीचे दर्शाई जा रही है। ध्यान दीजिए कि नीचे दिया गया चित्रीयकरण मापक (स्केल) के अनुसार नहीं है।

| | |
|---|---|
|  | दोनों संख्याओं में 6 इकाई हैं। |
|  | दोनों संख्याओं में 6 इकाई और 4 दशांश हैं। |
|  | दोनों संख्याओं में 6 इकाई और 4 दशांश हैं। परंतु पहली संख्या में 5 शतांश हैं जबकि दूसरी संख्या में 6 शतांश हैं। |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हमने दो संख्याओं के सबसे अधिक सार्थक अंकों (उच्चतम स्थानीय मान वाले अंक) की तुलना करके प्रारंभ किया। यदि ये दोनों अंक समान हैं तो हम अगले छोटे स्थानीय मान की तुलना करते हैं। हम यह प्रक्रिया तब तक जारी रखते हैं जब तक हम उस स्थान पर न पहुँच जाएँ जहाँ दोनों अंक समान नहीं हैं। इस स्थान पर बड़े अंक वाली संख्या दूसरी संख्या से बड़ी होगी।

? हम इस बिंदु पर आकर क्यों रुक सकते हैं? क्या हम सुनिश्चित कर सकते हैं कि इसके बाद जो भी अंक आएँगे उनसे हमारे निष्कर्ष पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा?

गणित चर्चा

कौन-सी दशमलव संख्या बड़ी है?

(a) 1.23 या 1.32

(b) 3.81 या 13.800

(c) 1.009 या 1.090

### निकटतम दशमलव

दशमलव संख्याओं 0.9, 1.1, 1.01 और 1.11 पर विचार कीजिए। उस दशमलव संख्या की पहचान कीजिए जो 1 के निकटतम है।

आइए इन दशमलव संख्याओं की तुलना करें। इन्हें आरोही क्रम में 1 के साथ व्यवस्थित करने पर हम $0.9 < 1.01 < 1.1 < 1.11$ प्राप्त करते हैं। 1 के निकट की संख्याओं में 1.01 संख्या 1 से 1/100 दूर है जबकि 0.9 संख्या 1 से 10/100 दूर है। अत: 1 के निकटतम 1.01 है।

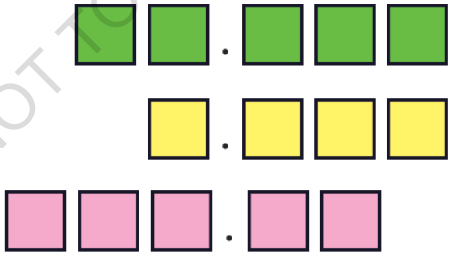
? उपरोक्त में कौन-सी संख्या 1.09 के निकटतम है?

? इनमें से कौन-सी संख्या 4 के निकटतम है — 3.56, 3.65, 3.099?

? इनमें से कौन-सी संख्या 1 के निकटतम है — 0.8, 0.69, 1.08?

? नीचे दी प्रत्येक स्थिति में अंकों 4, 1, 8, 2 और 5 का केवल एक बार उपयोग करते हुए 25 के निकटतम संभावित दशमलव संख्या को बनाने का प्रयास कीजिए।

गणित चर्चा



NOT TO BE REPUBLISHED @KTRS

## 3.7 दशमलवों को जोड़ना और घटाना

? प्रिया को अपनी स्कर्ट के लिए 2.7 मी. कपड़े की आवश्यकता है तथा शैलजा को अपनी कुर्ती के लिए 3.5 मी. कपड़े की आवश्यकता है। कपड़े की कुल कितनी मात्रा की आवश्यकता है?

पहले हमें 2.7 मी. + 3.5 मी. का योग ज्ञात करना होगा।

पूर्व में हमने देखा था कि $2\frac{7}{10} + 3\frac{5}{10}$ को किस प्रकार जोड़ा जाता है (इसे नीचे भी दर्शाया गया है)। क्या आप इसी योग को दशमलव संकेतन का उपयोग करते हुए भी कर सकते हैं? इसे नीचे दर्शाया गया है।

अपने आकलन को साझा कीजिए।

$$2\frac{7}{10}$$
$$+\,3\frac{5}{10}$$
$$= 5\frac{12}{10}$$
$$= 6\frac{2}{10}$$

$$\overset{1}{2.7}$$
$$+\,3.5$$
$$= 6.2$$

अत: 6.2 मी. कपड़े की आवश्यकता है।

? प्रिया के कपड़े की तुलना में शैलजा का कपड़ा कितना लंबा है?

हमें 3.5 मी. – 2.7 मी. के मध्य अंतर ज्ञात करना है। पुनः देखिए कि किस प्रकार $3\frac{5}{10} - 2\frac{7}{10}$ और 3.5 मी. – 2.7 मी. के अंतर को अभिकलित किया जाता है।

$$3\frac{5}{10} \longrightarrow 2\frac{15}{10}$$
$$-\,2\frac{7}{10} \qquad -\,2\frac{7}{10}$$
$$= 0\frac{8}{10}$$

$$3.5 \longrightarrow \overset{2}{\cancel{3}}\overset{1}{.}5$$
$$-\,2.7 \qquad -\,2.7$$
$$= 0.8$$

जैसा कि आप देख सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं को जोड़ने और घटाने वाली मानक प्रक्रिया का उपयोग दशमलवों को जोड़ने और घटाने में भी किया जा सकता है।

इनमें निहित स्थानीय मान परिकलन का एक विस्तृत चित्रण नीचे 75.345 + 86.691 योग के लिए दर्शाया गया है। इसका संक्षिप्त रूप उसके ठीक आगे दिखाया गया है।

| $1 \times 100$ | $1 \times 10$ | $1 \times 1$ | $1 \times \frac{1}{10}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $7 \times 10$ | $5 \times 1$ | $3 \times \frac{1}{10}$ | $4 \times \frac{1}{100}$ | $5 \times \frac{1}{1000}$ | |
| + | $8 \times 10$ | $6 \times 1$ | $6 \times \frac{1}{10}$ | $9 \times \frac{1}{100}$ | $1 \times \frac{1}{1000}$ | |
| $= 1 \times 100$ | $16 \times 10$ | $12 \times 1$ | $10 \times \frac{1}{10}$ | $13 \times \frac{1}{100}$ | $6 \times \frac{1}{1000}$ | |

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ 1} \\ 75.345 \\ +86.691 \\ \hline =162.036 \end{array}$$

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

? 84.691 – 77.345 के लिए विस्तृत स्थानीय मान गणना लिखिए तथा इसका संक्षिप्त रूप लिखिए।

प्रयास करें

? **पता लगाइए**

1. योग ज्ञात कीजिए—

(a) 5.3 + 2.6 (b) 18 + 8.8
(c) 2.15 + 5.26 (d) 9.01 + 9.10
(e) 29.19 + 9.91 (f) 0.934 + 0.6
(g) 0.75 + 0.03 (h) 6.236 + 0.487

2. अंतर ज्ञात कीजिए—

(a) 5.6 – 2.3 (b) 18 – 8.8
(c) 10.4 – 4.5 (d) 17 – 16.198
(e) 17 – 0.05 (f) 34.505 – 18.1
(g) 9.9 – 9.09 (h) 6.236 – 0.487

### दशमलव अनुक्रम

दशमलव संख्याओं के इस अनुक्रम को देखिए तथा प्रत्येक पद के बाद हुए परिवर्तन की पहचान कीजिए—

4.4, 4.8, 5.2, 5.6, 6.0, …

हम देख सकते हैं कि प्रत्येक पद में 0.4 जोड़कर अगला पद ज्ञात किया जा रहा है।

? इस अनुक्रम को जारी रखते हुए अगले तीन पद लिखिए।

? इसी प्रकार परिवर्तन की पहचान कीजिए और नीचे दिए गए प्रत्येक अनुक्रम के लिए अगले तीन पद लिखिए। इस गणना को मानसिक रूप से करने का प्रयास कीजिए।

(a) 4.4, 4.45, 4.5, … (b) 25.75, 26.25, 26.75, …
(c) 10.56, 10.67, 10.78, … (d) 13.5, 16, 18.5, …
(e) 8.5, 9.4, 10.3, … (f) 5, 4.95, 4.90, …
(g) 12.45, 11.95, 11.45, … (h) 36.5, 33, 29.5, …

? अपने स्वयं के अनुक्रम बनाइए तथा अपने सहपाठियों को प्रतिरूप (पैटर्न) का विस्तार करने के लिए चुनौती दीजिए।

### योग और अंतर का आकलन

सोनू दशमलव संख्याओं के योग और अंतरों को देख चुका है तथा कहता है, "यदि हम दो दशमलव संख्याओं को जोड़ते हैं तो इनका योग सदैव इनकी पूर्ण संख्याओं वाले भागों के योग

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

से बड़ा होगा। साथ ही यह योग इनकी पूर्ण संख्याओं वाले भागों के योग से 2 से अधिक संख्या से सदैव कम होगा।"

आइए, इसके इस कथन का अर्थ समझने के लिए एक उदाहरण का उपयोग करें।

यदि जोड़ी जानी वाली संख्याएँ 25.936 और 8.202 हैं तो उसका कथन है कि इनका योग 25 + 8 (पूर्ण संख्याओं वाला भाग) से बड़ा होगा तथा 25 + 1 + 8 + 1 से छोटा होगा।

गणित चर्चा

? उपरोक्त कथन के बारे में आप क्या सोचते हैं? जाँच कीजिए कि क्या यह इन संख्याओं के लिए सत्य है। क्या यह किन्हीं भी 2 दशमलव संख्याओं के लिए सही होगा?

? 25.93603259 और 8.202 के योग के बारे में क्या कह सकते हैं?

प्रयास करें

? इस प्रकार पूर्ण संख्याओं की उस सीमा को कम करने की एक विधि विकसित कीजिए जिसमें दोनों दशमलव संख्याओं का अंतर स्थित होगा।

**शिक्षक हेतु टिप्पणी** — गणना से पूर्व परिणाम के आकलन से यह पहचान करने में सहायता मिल सकती है कि गणना में कोई त्रुटि तो नहीं हुई है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 3.8 दशमलव पद्धति पर और अधिक

### दशमलव और मापन आपदाएँ

दशमलव बिंदु और इकाई परिवर्तन की त्रुटियाँ कभी-कभी छोटी प्रतीत हो सकती हैं, परंतु इनसे गंभीर समस्याएँ उत्पन्न हो सकती हैं। यहाँ कुछ वास्तविक घटनाएँ दी जा रही हैं जिनमें ऐसी त्रुटियों से बड़ी समस्याएँ प्रकट हुई हैं।

- 2013 में एम्सटर्डम नगर परिषद् (नीदरलैंड) के वित्त कार्यालय ने आवास लाभों में €1.8 मिलियन के स्थान पर एक प्रोग्रामन त्रुटि के कारण €188 मिलियन भेज दिए, जिसमें भुगतान यूरोज (Euros) के स्थान पर यूरो सेंटों (Euro Cents) में कर दिया गया था। ($1$ यूरो सेंट $= \frac{1}{100}$ यूरो)
- वर्ष 1983 में एक दशमलव त्रुटि ने एक एयर कनाडा बोईंग 767 के लिए लगभग एक आपदा उत्पन्न कर दी। कर्मचारियों ने ईंधन भरने का परिकलन गलती से किलोग्रामों के स्थान पर 22,300 पाउंड (Pounds) कर दिया, जितना आवश्यक था उससे लगभग आधा (1 पाउंड ~0.453 kg)। बीच हवा में उस वायुयान में जब ईंधन समाप्त होने लगा तब पायलटों को एक परित्यक्त एयरफील्ड में आपातकालीन लैंडिग करनी पड़ी। सौभाग्यवश सभी यात्री जीवित बच गए।

औषधि प्रदान करते समय दशमलव संख्याओं को त्रुटिपूर्वक पढ़ने से अनेक घटनाएँ हुई हैं। उदाहरणार्थ, 0.05 मि.ग्रा. (mg) को 0.5 मि.ग्रा. पढ़ने से किसी औषधि का उपयोग निर्धारित मात्रा

से 10 गुना अधिक हो सकता है। इसीलिए यह महत्वपूर्ण है कि इकाइयों तथा दशमलव बिंदु के स्थान की ओर विशेष रूप से ध्यान दिया जाए।

## भ्रामक दशमलव संकेतन

सरयू को एक संदेश प्राप्त होता है, "बस स्टेशन पर अपराह्न के 4.5 घंटे बाद पहुँचेगी।" वह बस स्टेशन पर कब पहुँचेगी — 4:05 अपराह्न (p.m.), 4:50 अपराह्न, 4:25 अपराह्न?

इनमें से कोई नहीं। यहाँ 0.5 घंटे का अर्थ एक घंटे को 10 समान भागों में विभक्त करके उनमें से 5 भाग लेना है। प्रत्येक भाग 6 मिनट (60 मिनट/10) लंबा होगा। ऐसे 5 भागों से 30 मिनट बनते हैं। अतः वह बस स्टेशन पर 4:30 अपराह्न पर पहुँचेगी।

यहाँ एक दशमलव दुर्घटना की एक संक्षिप्त कहानी दी जा रही है। एक लड़की ने एक खुले स्थान की चौड़ाई को 2 फुट 5 इंच मापा तथा बढ़ई से एक 2.5 फुट चौड़ा दरवाजा बनाने के लिए कहा। बढ़ई 2 फुट 6 इंच चौड़ा दरवाजा बनाता है (क्योंकि 1 फुट = 12 इंच इसलिए 0.5 फुट = 6 इंच) और यह पूरी तरह बंद नहीं होता है।




यदि आप क्रिकेट मैच देखते हैं तो आपने 'शेष ओवर: 5.5' जैसी दशमलव दिखने वाली संख्याओं पर ध्यान दिया होगा। इसका क्या अर्थ है — 5 ओवर और 5 गेंदें? या 5 ओवर और 3 गेंदें? यहाँ, 5.5 ओवर का अर्थ $5\frac{5}{6}$ ओवर (क्योंकि 1 ओवर = 6 गेंदें) अर्थात 5 ओवर 5 गेंदें है।

? अन्य किन स्थानों पर हमें दशमलव जैसे संकेतन के साथ ऐसे अदशमलव दिखाई दे सकते हैं।

गणित चर्चा

## इतिहास की एक झलक – समय के साथ दशमलव संकेतन

अनेक भारतीय खगोलशास्त्रियों और गणितज्ञों के ग्रंथों में दशमलव भिन्न अर्थात $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ इत्यादि जैसे हरों वाली भिन्न पाए जाते हैं, जिनमें अंकगणित और बीजगणित पर श्रीधराचार्य का आठवीं शताब्दी का महत्वपूर्ण कार्य भी सम्मिलित है। आवश्यक रूप से दशमलव संकेतन के

NOT TO BE REPUBLISHED

आधुनिक रूप का विस्तृत रूप से वर्णन लगभग 950 सामान्य संवत् में एक अरब गणितज्ञ अबुल हसन अल-उक्लिदिसी की पुस्तक अल-फुसुल फी अल-हिसाब अल-हिन्दी (भारतीय अंकगणित पर अध्यायों की पुस्तक) में किया गया है। उसने संख्या 0.059375 को 0̇059375 के रूप में निरूपित किया।

पंद्रहवीं शताब्दी में पूर्ण संख्याओं को भिन्नात्मक भागों से पृथक करने के लिए भिन्न-भिन्न संकेतनों का उपयोग किया गया—

- पूर्ण संख्या भाग के अंतिम अंक के ऊपर एक ऊर्ध्वाधर चिह्न (जैसा ऊपर दर्शाया गया है)
- भिन्न-भिन्न रंगों का उपयोग
- दशमलव स्थानों की संख्या दर्शाने के लिए अंकीय सुपरस्क्रिप्ट का उपयोग (0.36 को $36^{2}$ लिखा जाएगा)

सोलहवीं शताब्दी में स्कॉटलैंड के एक गणितज्ञ जॉन नेपियर तथा एक जर्मन गणितज्ञ क्रिस्टोफर क्लैवियस ने पूर्ण संख्या और भिन्नात्मक भागों को पृथक करने के लिए बिंदु / अवधि (‘.’) का उपयोग किया, जबकि एक फ्राँसीसी गणितज्ञ फ्रेन्कोइस विएटे ने इसके स्थान पर अल्पविराम चिह्न (‘,’) का उपयोग किया।

वर्तमान में अनेक देश पूर्णांकीय भाग और भिन्नात्मक भाग को पृथक करने के लिए अल्पविराम चिह्न का उपयोग करते हैं। इन देशों में 1,000.5 को 1000,5 लिखा जाता है (एक हजार पृथककर्ता के रूप में रिक्त स्थान है)। परंतु भारतीय स्थानीय मान पद्धति में भिन्नात्मक भागों वाली संख्याओं को लिखने के लिए दशमलव बिंदु को एक सबसे अधिक लोकप्रिय संकेतन के रूप में मान्यता दी गई है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

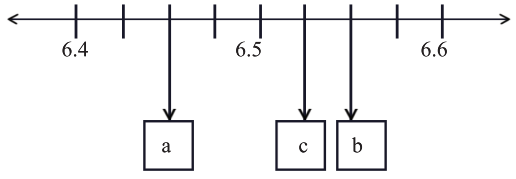
1. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलवों में परिवर्तित कीजिए—

   (a) $\frac{5}{100}$ (b) $\frac{16}{1000}$ (c) $\frac{12}{10}$ (d) $\frac{254}{1000}$

2. निम्नलिखित दशमलवों को दशांशों, शतांशों और सहस्त्रांशों के एक योग के रूप में परिवर्तित कीजिए—

   (a) 0.34 (b) 1.02 (c) 0.8 (d) 0.362

3. नीचे दी गई संख्या रेखा में प्रत्येक अक्षर कौन-सी दशमलव संख्या को निरूपित करता है?

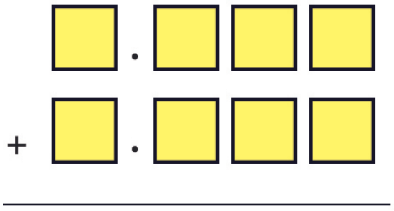


4. निम्नलिखित राशियों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए—
   (a) 11.01, 1.011, 1.101, 11.10, 1.01
   (b) 2.567, 2.675, 2.768, 2.499, 2.698
   (c) 4.678 ग्राम, 4.595 g, 4.600 ग्राम, 4.656 ग्राम, 4.666 ग्राम
   (d) 33.13 मीटर, 33.31 मीटर, 33.133 मीटर, 33.331 मीटर, 33.313 मीटर
5. अंकों 1, 4, 0, 8 और 6 के उपयोग से निम्नलिखित संख्याएँ बनाइए—
   (a) 30 के निकटतम दशमलव संख्या
   (b) 100 और 1000 के बीच संभव न्यूनतम दशमलव संख्या।
6. क्या अधिक अंकों वाली एक दशमलव संख्या, एक कम अंकों वाली दशमलव संख्या से सदैव बड़ी होगी?
7. माही ने 0.25 कि.ग्रा. फलियाँ, 0.3 कि.ग्रा. गाजर, 0.5 कि.ग्रा. आलू, 0.2 कि.ग्रा. शिमला मिर्च और 0.05 कि.ग्रा. अदरक खरीदा। उसके द्वारा खरीदी गई वस्तुओं का कुल भार ज्ञात कीजिए।
8. पिंटो प्रथम 3 दिनों में एक दूध की डेयरी को 3.79 लीटर, 4.22 लीटर और 4.25 लीटर दूध की आपूर्ति करता है। 6 दिनों में वह 25 लीटर दूध की आपूर्ति करता है। उसके द्वारा डेयरी को अंतिम 3 दिनों में की गई दूध की आपूर्ति की मात्रा ज्ञात कीजिए।
9. टिंकू का भार जनवरी में 35.75 कि.ग्रा. तथा फरवरी में 34.50 कि.ग्रा. था। उसके भार में वृद्धि हुई या कमी हुई? कितना परिवर्तन हुआ है?
10. पैटर्न 5.5, 6.4, 6.39, 7.29, 7.28, 6.18, 6.17, ____, _____ का आगे विस्तार कीजिए।
11. कितने मिलीमीटर से एक किलोमीटर बनता है?
12. भारतीय रेल ई-टिकट बुक करने वाले यात्रियों को वैकल्पिक यात्रा बीमा की सुविधा का विकल्प प्रदान करती है। इसकी लागत 45 पैसे प्रति यात्री है। यदि 1 लाख व्यक्ति इस सुविधा बीमा योजना को चुनते हैं तो एक दिन में कितने बीमा शुल्क का भुगतान किया गया?
13. कौन-सी संख्या बड़ी है?
   (a) $\frac{10}{1000}$ या $\frac{1}{10}$ ?
   (b) एक शतांश या 90 सहस्त्रांश?
   (c) एक सहस्त्रांश या 90 शतांश?
14. दी गई राशियों को दशमलव के रूप में लिखिए (एक उदाहरण दिया गया है)—
   (a) 87 इकाई, 5 दशांश और 60 शतांश = 88.10
   (b) 12 दहाई और 12 दशांश
   (c) 10 दहाई, 10 इकाई, 10 दशांश, 10 शतांश
   (d) 25 दहाई, 25 इकाई, 25 दशांश और 25 शतांश

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

15. प्रत्येक अंक 0 – 9 का एक से अधिक बार उपयोग न करते हुए नीचे दिए बक्सों को इस प्रकार भरिए कि योग 10.5 के निकटतम हो।

प्रयास करें



16. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए—

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{1}{5}$ (f) $\frac{4}{5}$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## सारांश

- हम अधिक सटीक माप प्राप्त करने के लिए एक इकाई को छोटे भागों में विभक्त कर सकते हैं।
- हमने भारतीय स्थानीय मान पद्धति को विस्तृत करके देखा कि
  - » 1 इकाई = 10 दशांश
  - » 1 दशांश = 10 शतांश
  - » 1 शतांश = 10 सहस्त्रांश
  - » 10 शतांश = 1 दशांश
  - » 100 शतांश = 1 इकाई
- संख्या के **पूर्ण संख्या** भाग को भिन्नात्मक भाग से पृथक करने के लिए भारतीय स्थानीय मान पद्धति में दशमलव **बिंदु** (‘.’) का उपयोग किया जाता है।
- हमने यह भी सीखा कि दशमलव संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा उनकी स्थिति को संख्या रेखा पर किस प्रकार निर्धारित किया जाता है एवं उन पर जोड़ने और घटाने की संक्रियाएँ किस प्रकार की जाती हैं।

# 4 अक्षर-संख्याओं के उपयोगी व्यंजक

0775CH04

## 4.1 अक्षर-संख्याओं की धारणा

इस अध्याय में हम गणितीय संबंधों एवं प्रतिरूपों को व्यक्त करने की एक संक्षिप्त विधि समझेंगे। हम देखेंगे कि कैसे यह इन संबंधों एवं प्रतिरूपों के विषय में सोचने और व्याख्या करने में हमारी सहायता करती है कि वे क्यों सत्य हो सकते हैं?

? **उदाहरण 1** — शबनम, आफताब से 3 वर्ष बड़ी है। जब आफताब की आयु 10 वर्ष थी तब शबनम की आयु 13 वर्ष रही होगी। अब आफताब की आयु 18 वर्ष है तो अब शबनम की आयु कितनी होगी?_____

? आफताब की आयु दी गई है तो आप शबनम की आयु कैसे ज्ञात करेंगे?

सरल है, हम शबनम की आयु ज्ञात करने के लिए आफताब की आयु में 3 जोड़ते हैं।

? क्या हम इसे एक व्यंजक के रूप में लिख सकते हैं?

शबनम की आयु आफताब की आयु से 3 वर्ष अधिक है। संक्षेप में इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है—

**शबनम की आयु = आफताब की आयु + 3**

इस प्रकार के गणितीय संबंधों को सामान्यतया लघु रूप में प्रदर्शित किया जाता है। उपर्युक्त संबंध में वाक्यांश 'आफताब की आयु' लिखने के स्थान पर एक सुविधाजनक प्रतीक का उपयोग करने की परंपरा है। सामान्यतया इस उद्देश्य के लिए अक्षरों या लघु वाक्यांशों का उपयोग किया जाता है।

| आफताब की आयु | शबनम की आयु के लिए व्यंजक |
|---|---|
| 4 | 4 + 3 |
| 10 | 10 + 3 |
| 23 | 23 + 3 |
| ? | ? + 3 |
| a | a + 3 |

चित्र 4.1

आइए, हम आफताब की आयु को अक्षर '$a$' से (हम अन्य अक्षर भी उपयोग कर सकते हैं) दर्शाते हैं एवं शबनम की आयु को अक्षर '$s$' से दर्शाते हैं। तब शबनम की आयु ज्ञात करने के लिए व्यंजक $a + 3$ होगा, जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$s = a + 3$$

यदि $a$ का मान 23 है (वर्षों में आफताब की आयु) तो शबनम की आयु कितनी है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

व्यंजक '$a + 3$' में $a$ को 23 से प्रतिस्थापित करने पर हमें $s = 23 + 3 = 26$ वर्ष प्राप्त होता है।

जिन संख्याओं को प्रदर्शित करने के लिए अक्षरों जैसे कि '$a$' एवं '$s$' का उपयोग किया जाता है, वे **अक्षर-संख्याएँ** कहलाती हैं। ऐसे गणितीय व्यंजक जिनमें अक्षर-संख्याएँ हों, जैसे कि व्यंजक $a + 3$ तो वे **बीजगणितीय व्यंजक** कहलाते हैं।

? शबनम की आयु दी गई है तो आफताब की आयु ज्ञात करने के लिए एक व्यंजक लिखिए।

हम जानते हैं कि आफताब शबनम से 3 वर्ष छोटा है। अत: आफताब की आयु शबनम से 3 वर्ष कम होगी। इसको इस प्रकार लिखा जा सकता है—

आफताब की आयु = शबनम की आयु – 3

यदि पुनः हम अक्षर '$a$' से आफताब की आयु को एवं अक्षर '$s$' से शबनम की आयु को प्रदर्शित करते हैं तो बीजगणितीय व्यंजक $a = s - 3$ होगा अर्थात $s$ से 3 कम।

? यदि शबनम की आयु 20 वर्ष हो तो इस व्यंजक का उपयोग करके आफताब की आयु ज्ञात कीजिए।

? **उदाहरण 2 —** पार्थिव माचिस की तीलियों से प्रतिरूप बना रहा है। वह समान L को एक के आगे एक लगा रहा है। प्रत्येक L में माचिस की दो तीलियाँ हैं, जैसा कि चित्र 4.2 में दिखाया गया है —



*चित्र 4.2*

5 L को बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियों की आवश्यकता है? ये $5 \times 2$ होंगी।

7 L को बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियों की आवश्यकता है? ये $7 \times 2$ होंगी।

45 L को बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियों की आवश्यकता है? ये $45 \times 2$ होंगी।

अब L की संख्या एवं तीलियों की संख्या के बीच क्या संबंध है?

आइए, सबसे पहले यहाँ संबंध या पैटर्न का वर्णन करते हैं। प्रत्येक L में माचिस की 2 तीलियों की आवश्यकता है। **अतः आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या L की संख्या की दुगुनी होगी।** इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है—

माचिस की तीलियों की संख्या = 2 × L की संख्या

अब हम L की संख्या प्रदर्शित करने के लिए किसी भी अक्षर का उपयोग कर सकते हैं। आइए 'n' का उपयोग करते हैं। माचिस की तीलियों के लिए बीजगणितीय व्यंजक होगा—

$$2 \times n$$

यह व्यंजक बताता है कि L बनाने के लिए माचिस की कितनी तीलियाँ आवश्यक हैं। माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए हम $n$ को L की संख्या से प्रतिस्थापित करते हैं।

? **उदाहरण 3** — केतकी नारियल व गुड़ के लड्डू बनाकर उनकी आपूर्ति करती है। एक नारियल का मूल्य ₹35 है एवं 1 किलोग्राम (कि.ग्रा.) गुड़ का मूल्य ₹60 है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? यदि वह 10 नारियल एवं 5 किलोग्राम गुड़ खरीदती है तो उसे कितने रुपये चुकाने चाहिए?

10 नारियलों का मूल्य = 10 × ₹35

5 किलोग्राम गुड़ का मूल्य = 5 × ₹60

कुल मूल्य = 10 × ₹35 + 5 × ₹60 = ₹350 + ₹300 = ₹650

? यदि वह 8 नारियल एवं 9 किलोग्राम गुड़ खरीदती है तो उसे कितने रुपये चुकाने होंगे?

? दी गई नारियल की संख्या एवं गुड़ की मात्रा के लिए चुकाए जाने वाले कुल रुपयों को ज्ञात करने के लिए बीजगणितीय व्यंजक लिखिए।

आइए, हम संबंधों को पहचानते हैं और फिर व्यंजक लिखते हैं।

| आवश्यक मात्रा | संबंध | व्यंजक |
|---|---|---|
| नारियल का मूल्य | नारियलों की संख्या × 35 | $c \times 35$ |
| गुड़ का मूल्य | गुड़ के किलोग्राम की संख्या × 60 | $j \times 60$ |

यहाँ '$c$' नारियलों की संख्या को प्रदर्शित करता है एवं '$j$' गुड़ के किलोग्राम की संख्या को प्रदर्शित करता है। भुगतान की जाने वाले कुल राशि होगी—

नारियलों का मूल्य + गुड़ का मूल्य

संगत बीजगणितीय व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$c \times 35 + j \times 60$$

? 7 नारियलों एवं 4 किलोग्राम गुड़ के लिए भुगतान की जाने वाली कुल राशि को ज्ञात करने के लिए इस व्यंजक का उपयोग कीजिए।

ध्यान दीजिए कि '$c$' एवं '$j$' के विभिन्न मानों के लिए व्यंजक का मान भी परिवर्तित होता है। इस व्यंजक को पदों के योग के रूप में लिखने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\boxed{c \times 35} + \boxed{j \times 60}$$

? **उदाहरण 4** — हम सामान्य आकारों के परिमाप की गणना के साथ परिचित हैं। परिमापों के लिए व्यंजक लिखिए।

किसी वर्ग का परिमाप इसकी भुजा की लंबाई का 4 गुना होता है। इसे व्यंजक $4 \times q$ के रूप में लिखा जा सकता है यहाँ $q$ भुजा की लंबाई को दर्शाता है।

? 7 से.मी. भुजा वाले वर्ग का परिमाप क्या है? इसे ज्ञात करने के लिए व्यंजक का उपयोग कीजिए।

आप समझ गए होंगे कि अक्षर-संख्याओं एवं बीजगणितीय व्यंजकों के उपयोग सामान्य गणितीय संबंधों को संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में किस प्रकार हमारी सहायता करते हैं। इस प्रकार व्यक्त किए गए गणितीय संबंध सूत्र कहलाते हैं।

© KSEEB NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

1. परिमाप के लिए सूत्र लिखिए —
   (a) समान भुजाओं वाला त्रिभुज
   (b) एक सम पंचभुज (जैसा कि हम गत वर्ष सीख चुके हैं कि हम 'सम' शब्द का उपयोग यह बताने के लिए करते हैं कि सभी भुजाओं की लम्बाई और कोणों के माप समान हैं)।
   (c) एक सम षट्भुज

2. मुनिरत्न के पास 20 मी. लंबा पाइप है। यद्यपि उसे उसके बगीचे के लिए एक अधिक लंबे पानी के पाइप की आवश्यकता है। वह इसमें कुछ और लंबाई का एक अन्य पाइप जोड़ता है। पाइप की कुल लंबाई के लिए व्यंजक दीजिए। अन्य पाइप की लंबाई को मीटर में दर्शाने के लिए अक्षर-संख्या '$k$' का उपयोग कीजिए।

3. यदि कृतिका के पास ₹100, ₹20 एवं ₹5 के निम्नलिखित संख्या में नोट हैं तो बताइए उसके पास कुल कितने रुपये हैं? दी गई सारणी पूर्ण कीजिए—

| ₹100 के नोटों की संख्या | ₹20 के नोटों की संख्या | ₹5 के सिक्कों की संख्या | व्यंजक और कुल राशि |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 6 | |
| | | | $6 \times 100 + 4 \times 20 + 3 \times 5 = 695$ |
| 8 | 4 | $z$ | |
| $x$ | $y$ | $z$ | |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. वेंकटलक्ष्मी की एक आटा चक्की है। रोलर मिल को शुरू होने में 10 सेकंड लगते हैं। एक बार शुरू हो जाने पर अनाज के प्रत्येक किलोग्राम को आटे के रूप में पीसने में 8 सेकंड लगते हैं। यह मानते हुए कि प्रारंभ में मशीन बंद थी, नीचे दिए गए व्यंजकों में से कौन-सा व्यंजक $y$ किलोग्राम अनाज को पूर्णतया पीसने में लगने वाले समय को दर्शाता है?
   (a) $10 + 8 + y$ (b) $(10 + 8) \times y$
   (c) $10 \times 8 \times y$ (d) $10 + 8 \times y$
   (e) $10 \times y + 8$

5. अपनी पसंद के अक्षर का उपयोग करके बीजगणितीय व्यंजक लिखिए।
   (a) एक संख्या से 5 अधिक (b) एक संख्या से 4 कम
   (c) एक संख्या के 13 गुना से 2 कम (d) एक संख्या के 2 गुना से 13 कम

6. निम्नलिखित बीजगणितीय व्यंजकों की संगत स्थितियों का वर्णन कीजिए—
   (a) $8 \times x + 3 \times y$
   (b) $15 \times j - 2 \times k$

7. यदि किसी कैलेंडर के महीने में चित्र में दर्शाए अनुसार दिनांकों से भरी कोई $2 \times 3$ जाल चुनी जाती है तो खाली बक्सों में दिनांकों के लिए व्यंजक लिखिए यदि नीचे की पंक्ति में मध्य कक्ष में दिनांक 'w' हो।

**नवंबर 2024**

| सोम | मंगल | बुध | गुरु | शुक्र | शनि | रवि |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| $w-1$ | $w$ | |

## 4.2 अंकगणितीय व्यंजकों का पुनरावलोकन

हमने व्यंजकों को पदों के योग के रूप में लिखना सीखा जिससे अंकगणितीय व्यंजकों को पढ़ना हमारे लिए सरल हो गया। इन्हें कई बार अनेक तरीकों से पढ़ा जा सकता था जिससे यह भ्रामक लगने लगा था। हमने **अदला-बदली** (दो संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ना) एवं **समूहीकरण** (संख्याओं को आसान तरीके से समूहीकरण करके जोड़ना) का उपयोग व्यंजकों के सरल तरीकों से मान निकालने के लिए किया। पदों की अदला-बदली एवं समूहीकरण से व्यंजक का मान नहीं बदलता है। हमने व्यंजकों में कोष्ठकों का उपयोग सीखा साथ ही उन कोष्ठकों का उपयोग करना भी सीखा जिनके बाहर ऋणात्मक चिह्न हो। हमने **वितरण गुण** (किसी योगफल का गुणज उसके गुणजों के योगफल के बराबर होता है) सीखा।

आइए, इन अवधारणाओं को दोहराते हैं और निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात करते हैं—

1. $23 - 10 \times 2$
2. $83 + 28 - 13 + 32$
3. $34 - 14 + 20$
4. $42 + 15 - (8 - 7)$
5. $68 - (18 + 13)$
6. $7 \times 4 + 9 \times 6$
7. $20 + 8 \times (16 - 6)$

आइए, पहले व्यंजक $23 - 10 \times 2$ का मान ज्ञात करते हैं। सबसे पहले हम व्यंजक के पदों को लिखेंगे। ध्यान दीजिए कि इन पदों में से एक पद एक संख्या है जबकि दो पदों का योग करने से पहले अन्य पद को भी एक संख्या में बदलना होगा।

$$23 - 10 \times 2 = 23 + -10 \times 2 = 23 + -20 = 3$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, अब दूसरे व्यंजक का मान ज्ञात करते हैं। इस व्यंजक के सभी पद संख्याएँ हैं। यदि हम पदों पर ध्यान दें तो हम पाते हैं कि पदों की अदला-बदली करने से अथवा समूहीकरण करने से मान ज्ञात करना सरल हो जाता है।

$83 + 28 - 13 + 32 =$

$\boxed{83} + \boxed{28} + \boxed{-13} + \boxed{32}$

$= \boxed{70} + \boxed{60} = \boxed{130}$

आइए, अब पाँचवे व्यंजक को देखते हैं। इसमें ऋणात्मक चिह्न के साथ बाहर की ओर एक कोष्ठक है। हम दो तरह से इसका मान ज्ञात कर सकते हैं। पहले कोष्ठक हल करके (बाईं ओर हल के समान) या उचित तरीके से कोष्ठक को हटाकर (दाईं ओर के समान)।

$= \boxed{68} + \boxed{-(18 + 13)}$

$= \boxed{68} + \boxed{-31}$

$= \boxed{37}$

**या**

$= \boxed{68} + \boxed{-(18 + 13)}$

$= \boxed{68} + \boxed{-18} + \boxed{-13}$

$= \boxed{50} + \boxed{-13} = \boxed{37}$

अब अन्य अंकगणितीय व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए।

जब बीजगणितीय व्यंजकों में अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाता है तो बीजगणितीय व्यंजकों के मान भी संख्याओं के रूप में प्राप्त होते हैं। जैसा कि उदाहरण 1 में जब आफताब की आयु 23 वर्ष थी तो शबनम की आयु ज्ञात करने के लिए हमने व्यंजक $a + 3$ में अक्षर-संख्या '$a$' को 23 से प्रतिस्थापित किया था एवं इससे 26 मान प्राप्त हुआ था।

## 4.3 बीजगणितीय व्यंजकों में गुणा का चिह्न हटाना

इस संख्या श्रेणी को देखिए—

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

हम इस श्रेणी या प्रतिरूप का वर्णन कैसे कर सकते हैं? सरल है— ये वे संख्याएँ हैं जो 4 के पहाड़े में आती हैं (बढ़ते क्रम में 4 के गुणज)।

इस श्रेणी का तीसरा पद कौन-सा है? यह $4 \times 3$ है।

इस श्रेणी का 29वाँ पद कौन-सा है? यह $4 \times 29$ है।

? इस श्रेणी का $n$वाँ पद ज्ञात करने के लिए बीजगणितीय व्यंजक ज्ञात कीजिए।

ध्यान दीजिए कि यहाँ '$n$' एक अक्षर-संख्या है जो श्रेणी में एक स्थिति दर्शाती है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्योंकि यह 4 के गुणजों का अनुक्रम है यह देखा जा सकता है कि $n$वाँ पद 4 गुना $n$ होगा—

$$4 \times n$$

मानक अभ्यास में हम गुणा का चिह्न हटाकर $4 \times n$ को संक्षिप्त में $4n$ लिखते हैं। हम पहले संख्या लिखते हैं तथा उसके बाद अक्षर लिखा जाता है।

यदि $k = 4$ हो तो व्यंजक $7k$ का मान ज्ञात कीजिए। मान $7 \times 4 = 28$ है। जब $m = 2$ हो तो व्यंजक $5m + 3$ के मान को ज्ञात कीजिए। यहाँ $5m$ का अर्थ है $5 \times m$ तो $m = 2$ के लिए। अतः व्यंजक का मान $5 \times 2 + 3 = 13$ है।

## त्रुटियाँ ढूँढ़िए, त्रुटियाँ सुधारिए

नीचे कुछ सरलीकरण दर्शाए गए हैं जहाँ अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से प्रतिस्थापित किया गया है एवं व्यंजक का मान प्राप्त किया गया है।

1. इनमें से प्रत्येक का अवलोकन कीजिए और यदि कोई त्रुटि हो तो पहचानिए।
2. यदि आपको लगता है कि कोई त्रुटि है तो व्याख्या करने का प्रयास कीजिए कि क्या त्रुटि हुई होगी।
3. इसके बाद उन्हें सुधार कर व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।

**1** यदि $a = -4$
तब $10 - a = 6$

**2** यदि $d = 6$
तब $3d = 36$

**3** यदि $s = 7$
तब $3s - 2 = 15$

**4** यदि $r = 8$
तब $2r + 1 = 29$

**5** यदि $j = 5$
तब $2j = 10$

**6** यदि $m = -6$
तब $3(m + 1) = 19$

**7** यदि $f = 3, g = 1$
तब $2f - 2g = 2$

**8** यदि $t = 4, b = 3$
तब $2t + b = 24$

**9** यदि $h = 5, n = 6$
तब $h - (3 - n) = 4$

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

## 4.4 बीजगणितीय व्यंजकों का सरलीकरण

पूर्व में हमने विभिन्न सम चित्रों के परिमाप को उनकी भुजाओं के पदों में ज्ञात करने के लिए व्यंजक प्राप्त किए। आइए, अब एक आयत का परिमाप ज्ञात करने के लिए एक व्यंजक ज्ञात करते हैं।



पूर्व की भाँति ही पहले हम वर्णन करेंगे कि जब एक आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात हो तो परिमाप कैसे ज्ञात किया जाए।

लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई का योगफल ज्ञात कीजिए।

आइए, लंबाई एवं चौड़ाई के स्थान पर अक्षर-संख्याओं क्रमश: $l$ एवं $b$ का उपयोग करते हैं। अतः हमारे पास है—

$$p = l + b + l + b$$

जैसा कि हम जानते हैं कि ये अक्षर संख्याओं को प्रदर्शित करते हैं। अतः किसी भी व्यंजक के पद को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। अत: उपरोक्त व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$p = l + l + b + b$$

क्योंकि $l + l = 2 \times l = 2l$ एवं $b + b = 2 \times b = 2b$, अत:

$$p = 2l + 2b$$

ध्यान दीजिए कि परिमाप के लिए हमने जो प्रारंभिक व्यंजक ($l + b + l + b$) एवं अंतिम व्यंजक ($2l + 2b$) प्राप्त किए, वे भिन्न दिखते हैं। फिर भी वे समान हैं, क्योंकि हमने प्रारंभिक व्यंजक में वही नियम एवं संक्रियाएँ लगाई हैं जो हमने पहले संख्याओं के लिए लगाई थीं। वे इस अर्थ में समान हैं कि जब अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाता है तो उन दोनों के समान मान प्राप्त होते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि हम $l = 3$, $b = 4$ मान रखते हैं हमें प्राप्त होता है—

$$l + b + l + b = 3 + 4 + 3 + 4 = 14$$

या $\quad 2l + 2b = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$

हम व्यंजक $2l + 2b$ को $l + b + l + b$ का **सरलीकृत रूप** कहते हैं। आइए, सरलीकरण के कुछ अन्य उदाहरण देखते हैं।

**उदाहरण 5**— यहाँ सारणी में एक दुकान पर बेची गई पेंसिल एवं रबर की संख्याएँ दिखाई गई हैं। प्रत्येक पेंसिल की कीमत $c$ है एवं प्रत्येक रबर की कीमत $d$ है। दुकानदार द्वारा इन तीन दिनों में अर्जित किए गए कुल रुपयों को ज्ञात कीजिए।

| | पहला दिन | दूसरा दिन | तीसरा दिन |
|---|---|---|---|
| पेंसिल (मूल्य '$c$') | 5 | 3 | 10 |
| रबर (मूल्य '$d$') | 4 | 6 | 1 |

आइए, पहले पेंसिल की बिक्री से अर्जित किए गए रुपयों को ज्ञात करते हैं।

पहले दिन पेंसिल बेचकर अर्जित किए गए रुपये $5c$ हैं। इसी प्रकार दूसरे दिन पेंसिल बेचकर अर्जित किए गए रुपये _____ हैं एवं तीसरे दिन _____ हैं।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पेंसिल की बिक्री से अर्जित किए गए कुल रुपये $5c + 3c + 10c$ हैं। क्या हम इस व्यंजक को आगे हल कर सकते हैं एवं पदों की संख्या कम कर सकते हैं?

व्यंजक का अर्थ है कि $c$ के 5 गुने को $c$ के 3 गुने में जोड़ा गया है एवं फिर इसे $c$ के 10 गुने में जोड़ा गया है। अतः कुल मिलाकर अक्षर-संख्या $c$ को $(5 + 3 + 10)$ बार जोड़ा गया है। यह मान वही है जो हम संख्याओं के वितरण गुण के रूप में देख चुके हैं। इस प्रकार

$$5 \times c + 3 \times c + 10 \times c = (5 + 3 + 10) \times c$$

$(5 + 3 + 10) \times c$ को $18 \times c = 18c$ के रूप में सरल किया जा सकता है।

? यदि $c$ = ₹50 हो तो पेंसिल की बिक्री से अर्जित की गई कुल राशि ज्ञात कीजिए।

? रबर की बिक्री से अर्जित किए गए कुल रुपयों के लिए व्यंजक लिखिए फिर व्यंजक को हल कीजिए।

इन तीन दिनों में पेंसिल एवं रबर की बिक्री से अर्जित किए गए कुल रुपयों के लिए व्यंजक $18c + 11d$ है।

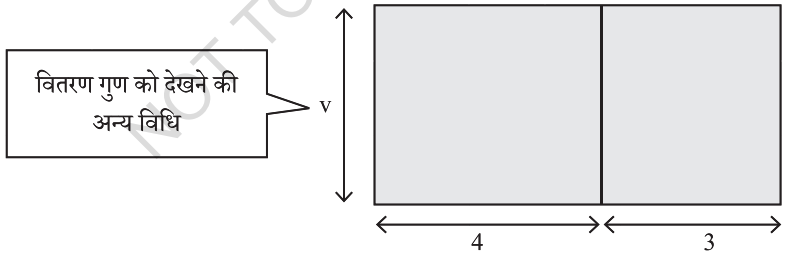
? क्या व्यंजक $18c + 11d$ को आगे हल किया जा सकता है?

इस व्यंजक को आगे हल करने की कोई अन्य विधि नहीं है, क्योंकि इसमें भिन्न अक्षर-संख्याएँ हैं। अभी यह अपने सरलतम रूप में है।

इस प्रश्न में हमने व्यंजक $5c + 3c + 10c$ को व्यंजक $18c$ तक सरल होते देखा।

? जाँचिए कि यदि $c$ को विभिन्न संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाए तो क्या दोनों व्यंजकों के मान समान प्राप्त होंगे?

? **उदाहरण 6—** एक बड़े आयत को नीचे दर्शाए अनुसार दो छोटे आयतों में बाँटा गया है। बड़े आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक लिखिए।




छोटे आयतों के क्षेत्रफल $4v$ वर्ग इकाई एवं $3v$ वर्ग इकाई हैं।

बड़े आयत का क्षेत्रफल दो प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है—

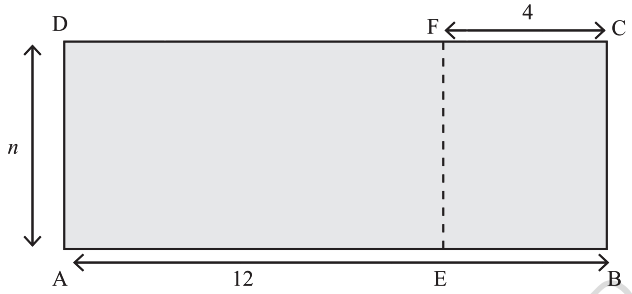
(i) इसकी पहली भुजा $v$ एवं दूसरी भुजा $(4 + 3)$ का उपयोग करके या (ii) छोटे आयतों के क्षेत्रफल जोड़कर।

पहली विधि से हमें $7v$ प्राप्त होता है और दूसरी विधि से हमें $4v + 3v$ प्राप्त होता है। हम जानते हैं कि ये दोनों ही समान हैं— $4v + 3v = 7v$ और यह बड़े आयत के क्षेत्रफल के लिए आवश्यक व्यंजक है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पूर्व की तरह एक बड़े आयत को नीचे दर्शाए अनुसार दो छोटे आयतों में बाँटा गया है। आयत AEFD का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक लिखिए।

इस स्थिति में भी आयत AEFD का क्षेत्रफल दो विधियों से ज्ञात किया जा सकता है— (i) भुजाओं $n$ एवं $(12 - 4)$ को सीधे उपयोग करके या (ii) आयत ABCD के क्षेत्रफल में से आयत EBCF का क्षेत्रफल घटाकर।




पहली विधि से हमें $8n$ प्राप्त होता है एवं दूसरी विधि से हमें $12n - 4n$ प्राप्त होता है और ये दोनों समान ही हैं, क्योंकि $12n - 4n = 8n$ है। यह आयत AEFD के क्षेत्रफल के लिए व्यंजक है।

जिन पदों के समूह में समान अक्षर-संख्याएँ होती हैं, वे **सजातीय पद** कहलाते हैं। जैसे— $(5c, c, 10c)$ और $(12n - 4n)$। जिन पदों के समूह में अलग-अलग अक्षर संख्याएँ होती हैं, वे **विजातीय पद** कहलाते हैं, जैसे— $(18c, 11d)$

**उदाहरण 7—** एक दुकान एक दिन के उपयोग के लिए कुर्सियाँ एवं मेज किराए पर देती है। उन्हें किराए पर लेने के लिए पहले प्रत्येक वस्तु के अनुसार निम्नलिखित राशि चुकानी होती है।

| वस्तु | राशि |
|---|---|
| कुर्सी | ₹40 |
| मेज | ₹75 |

जब फर्नीचर वापस लौटाया जाता है तो दुकानदार निम्नानुसार कुछ राशि वापस लौटाता है।

| वस्तु | वापस दी जाने वाली राशि |
|---|---|
| कुर्सी | ₹6 |
| मेज | ₹10 |

यदि x कुर्सियाँ एवं y मेज किराए पर ली गई हों तो भुगतान किए गए कुल रुपयों के लिए व्यंजक लिखिए।

आइए, x कुर्सियों एवं y मेज के लिए प्रारंभ में भुगतान की गई राशि तथा फर्नीचर को लौटाने के बाद वापस मिलने वाली राशि को ज्ञात करते हैं।

इन राशियों को प्राप्त करने की विधि का वर्णन कीजिए।

प्रारंभ में भुगतान की गई राशि रुपयों में $40x + 75y$ है और वापस लौटाई गई कुल राशि रुपयों में $6x + 10y$ है।

अतः भुगतान की गई कुल राशि $= (40x + 75y) - (6x + 10y)$

क्या हम इस व्यंजक को हल कर सकते हैं? यदि हाँ, तो कैसे? यदि नहीं, तो क्यों नहीं?

गणित चर्चा

जब हम किसी बीजगणितीय व्यंजक के कोष्ठक खोलने की विधि को याद करते हैं तो हमें प्राप्त होता है—

NOT TO BE REPUBLISHED

$$(40x + 75y) - (6x + 10y) = (40x + 75y) - 6x - 10y$$

क्योंकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है और जब बचे हुए कोष्ठक को खोला जाता है तो व्यंजक $40x + 75y + (-6x) + (-10y)$ हो जाता है।

हम सजातीय पदों को एक साथ समूह में रख सकते हैं, ऐसा करने से हमें प्राप्त होता है—

$$40x + -6x + 75y + -10y$$
$$= (40 - 6)x + (75 - 10)y$$
$$= 34x + 65y$$

व्यंजक $(40x + 75y) - (6x + 10y)$ को $34x + 65y$ के रूप में सरल किया गया है, यह रुपयों में भुगतान की गई कुल राशि है।

? क्या हम प्रारंभिक व्यंजक को इस प्रकार लिख सकते थे—
$(40x + 75y) + (-6x - 10y)$?

गणित चर्चा

? **उदाहरण 8—** चारु प्रश्नोत्तरी प्रतियोगिता के तीन चरणों में पहुँची। तीन चरणों में उसके अंक $7p - 3q$, $8p - 4q$ एवं $6p - 2q$ हैं। यहाँ सही उत्तर के लिए अंक को $p$ से दर्शाया गया है एवं गलत उत्तर के लिए दण्ड के रूप में कटने वाले अंक को $q$ से दर्शाया गया है।

? प्रत्येक व्यंजक का क्या अर्थ है?

यदि एक सही उत्तर के लिए 4 अंक ($p = 4$) हो एवं गलत उत्तर के लिए दण्ड के रूप में कटने वाला अंक 1 ($q = 1$) हो तो पहले चरण में चारु के द्वारा प्राप्त किए गए अंक ज्ञात कीजिए।

चारु के अंक $7 \times 4 - 3 \times 1$ हैं। हम व्यंजक को पदों के योग के रूप में लिखकर इस व्यंजक का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$7 \times 4 - 3 \times 1 = 7 \times 4 + (-3 \times 1) = 28 + (-3) = 25$

दूसरे एवं तीसरे चरण में उसके कितने अंक हैं?

क्या होगा यदि गलत उत्तर देने पर दण्ड के रूप में अंक न कटें? उस स्थिति में $q$ का मान क्या होगा?

तीनों चरणों के बाद उसके अंतिम अंक कितने होंगे? उसके अंतिम अंक तीनों अंकों का योगफल होंगे—

$(7p - 3q) + (8p - 4q) + (6p - 2q)$

क्योंकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है तो हम कोष्ठकों को हटा भी सकते हैं एवं लिख भी सकते हैं।

$7p + -3q + 8p + -4q + 6p + -2q$
$= 7p + 8p + 6p + -(3q) + -(4q) + -(2q)$ (पदों की अदला-बदली एवं समूहीकरण द्वारा)
$= (7 + 8 + 6)p + -(3 + 4 + 2)q$
$= 21p + -9q$
$= 21p - 9q$

तीनों चरणों के बाद चारु के कुल अंक $21p - 9q$ हैं। उसकी सखी कृषिता के तीनों चरणों के बाद अंक $23p - 7q$ हैं।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कृषिता के लिए प्राप्त तीनों चरणों में कुछ ऐसे संभावित अंक बताइए जिससे कि उनका योगफल $23p - 7q$ हो।

क्या हम बता सकते हैं कि किसके अंक अधिक हैं और क्यों?

कृषिता ने चारु से कितने अधिक अंक प्राप्त किए, दोनों अंकों के बीच का अंतर ज्ञात करके यह पता लगाया जा सकता है।

$23p - 7q - (21p - 9q)$

इस व्यंजक को आगे हल कीजिए।

**उदाहरण 9 —** व्यंजक $4(x + y) - y$ को हल कीजिए।

वितरण गुण का उपयोग कर इस व्यंजक को हल किया जा सकता है।

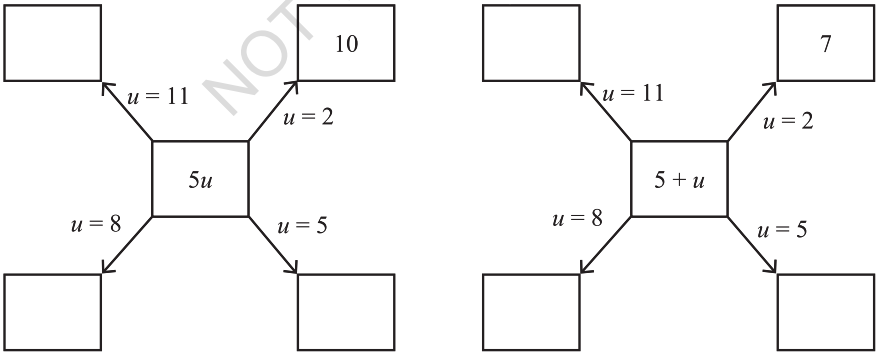
$$\begin{aligned} 4(x + y) - y &= 4x + 4y - y \\ &= 4x + 4y + -y \\ &= 4x + (4 - 1)y \\ &= 4x + 3y \end{aligned}$$

**उदाहरण 10 —** क्या व्यंजक $5u$ एवं $5 + u$ एक-दूसरे के समान हैं?

व्यंजक $5u$ का अर्थ है संख्या $u$ का 5 गुना एवं व्यंजक $5 + u$ का अर्थ है संख्या $u$ से 5 अधिक। ये दोनों भिन्न संक्रियाएँ होने से $u$ के अधिकतर मानों के लिए उनके भिन्न मान प्राप्त होने चाहिए।

आइए, इसे जाँचते हैं।

अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से प्रतिस्थापित करके नीचे दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए, एक उदाहरण दर्शाया गया है। फिर $5u$ एवं $5 + u$ के मानों की तुलना कीजिए।




यदि व्यंजक $5u$ एवं $5 + u$ समान हैं तो $u$ के किसी दिए गए मान के लिए उन्हें समान मान प्राप्त होने चाहिए। किंतु हम देख सकते हैं कि उन्हें समान मान प्राप्त नहीं होते हैं। अत: ये दोनों व्यंजक समान नहीं हैं।

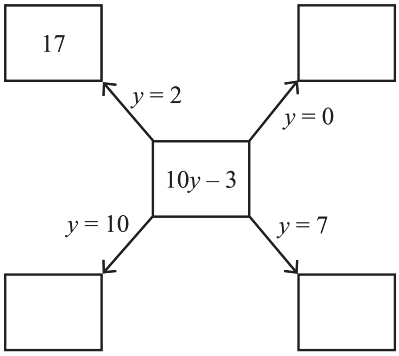
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

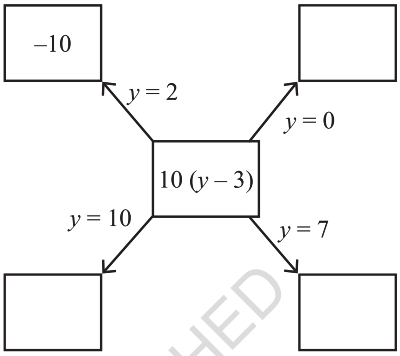
क्या व्यंजक $10y - 3$ एवं $10\,(y - 3)$ समान हैं?

$10y - 3$, सरल रूप में $10 \times y - 3$ अर्थात $y$ के 10 गुना से 3 कम

$10\,(y - 3)$, सरल रूप में $10 \times (y - 3)$ अर्थात y से 3 कम का 10 गुना

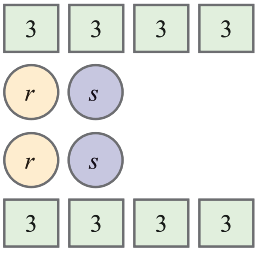
आइए, $y$ के विभिन्न मानों के लिए इन व्यंजकों के मानों की तुलना करते हैं।




क्या आपको लगता है कि दोनों आरेखों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करने के बाद दोनों व्यंजक समान हैं?

**उदाहरण 11** — चित्र में दी गई संख्याओं का योग क्या है?
(अज्ञात मानों को अक्षर-संख्याओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है)




इसके लिए अनेक विधियाँ हैं। उनमें से कुछ इस प्रकार हैं।

1. पंक्तिवार जोड़ने पर प्राप्त होता है —

$$(4 \times 3) + (r + s) + (r + s) + (4 \times 3)$$

2. सजातीय पदों को साथ में जोड़ने पर प्राप्त होता है —

$$(8 \times 3) + (r + r) + (s + s)$$

3. ऊपर का आधा भाग जोड़कर उसे दुगुना करने पर प्राप्त होता है —

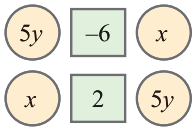
$$2 \times (4 \times 3 + r + s)$$

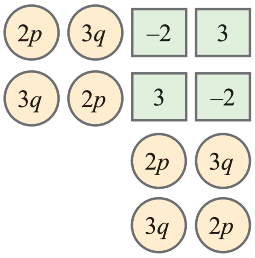
तीनों व्यंजक भिन्न दिखाई दे सकते हैं। हम प्रत्येक व्यंजक को सरल कर सकते हैं। हम देखते हैं कि वे सभी समान हैं — $2r + 2s + 24$

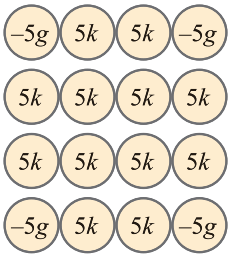
## पता लगाइए

1. आगे दिए गए प्रत्येक चित्र में संख्याओं का योग कीजिए। उनके संगत व्यंजक लिखिए और उन्हें हल कीजिए। प्रत्येक चित्र में संख्याओं का कम से कम तीन अलग-अलग प्रकार से योग करने का प्रयत्न कीजिए एवं देखिए कि क्या आपको समान मान प्राप्त होता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED




2. नीचे दिए गए व्यंजकों में से प्रत्येक को सरल रूप में व्यक्त कीजिए—

(a) $p + p + p + p, p + p + p + q,$
(b) $p + q + p - q,$
(c) $p - q + p - q,$
(d) $p + q - p + q,$
(e) $p + q - (p + q),$
(f) $p - q - p - q,$
(g) $2d - d - d - d,$
(h) $2d - d - d - c,$
(i) $2d - d - (d - c),$
(j) $2d - (d - d) - c,$
(k) $2d - d - c - c$

## त्रुटियाँ ढूँढ़िए, त्रुटियाँ सुधारिए

नीचे कुछ बीजगणितीय व्यंजकों को सरल किया गया है। दाईं ओर दिए गए व्यंजक अपने सरलतम रूप में होने चाहिए।

- प्रत्येक व्यंजक का निरीक्षण कीजिए और यदि कोई त्रुटि हो तो देखिए।
- यदि आपको लगता है कि कोई त्रुटि है तो व्याख्या करने का प्रयत्न कीजिए कि क्या त्रुटि हुई होगी।
- फिर इसे सही विधि से सरल कीजिए।

| | व्यंजक | सरलतम रूप | सही सरलतम रूप |
|---|---|---|---|
| 1. | $3a + 2b$ | 5 | |
| 2. | $3b - 2b - b$ | 0 | |
| 3. | $6 (p + 2)$ | $6p + 8$ | |
| 4. | $(4x + 3y) - (3x + 4y)$ | $x + y$ | |
| 5. | $5 - (2 - 6z)$ | $3 - 6z$ | |
| 6. | $2 + (x + 3)$ | $2x - 6$ | |
| 7. | $2y + (3y - 6)$ | $-y + 6$ | |
| 8. | $7p - p + 5q - 2q$ | $7p + 3q$ | |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

| | | |
|---|---|---|
| 9. | $5\,(2w + 3x + 4w)$ | $10w + 15x + 20w$ |
| 10. | $3j + 6k + 9h + 12$ | $3\,(j + 2k + 3h + 4)$ |
| 11. | $4\,(2r + 3s + 5)$ | $-20 - 8r - 12s$ |

? सभी सही सरलतम रूपों पर दृष्टि डालिए (जैसे कोष्ठकों को हटा दिया गया है, सजातीय पदों का योग कर दिया गया है एवं केवल संख्याओं वाले पदों का भी योग कर दिया गया है)। क्या इन व्यंजकों में पदों की संख्या एवं अक्षर-संख्याओं की संख्या में कोई संबंध है?

## 4.5 प्रतिरूप (पैटर्न) चुनिए तथा संबंध बताइए

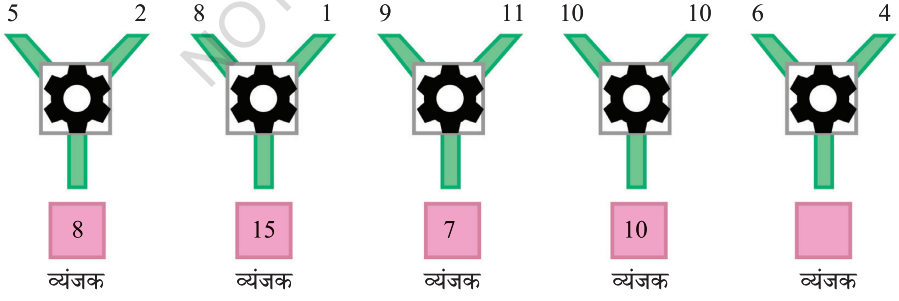
प्रथम भाग में हमने इसकी एक झलक देखी कि बीजगणितीय व्यंजकों और सामान्य प्रतिरूप एवं संबंधों को संक्षिप्त व सुरुचिपूर्ण ढंग से व्याख्या करने में कैसे उपयोग किया जाए। अब हम विभिन्न स्थितियों में मात्राओं के बीच सामान्य संबंधों को खोजना, पैटर्नों को ढूँढ़ना एवं यहाँ तक कि यह व्याख्या करना कि ये पैटर्न क्यों बनते हैं, जारी रखते हैं।

दो बातें याद रखें। पहला इनका सामान्य भाषा में वर्णन करने का महत्व, दूसरा इनको व्यंजकों के रूप में लिखने का प्रयत्न करने से पहले गणितीय संबंधों को दृष्टिगत करना याद रखिए।

### सूत्र खोजो

दिए गए चित्र को देखिए। हर बार संख्या-मशीन 'Y' के शीर्ष पर 2 संख्याओं को निविष्ट (Input) के रूप में लेती है, कुछ संक्रियाएँ करती है एवं नीचे परिणाम देती है। हर बार मशीन अपने निविष्ट (Input) पर समान संक्रियाएँ करती है।

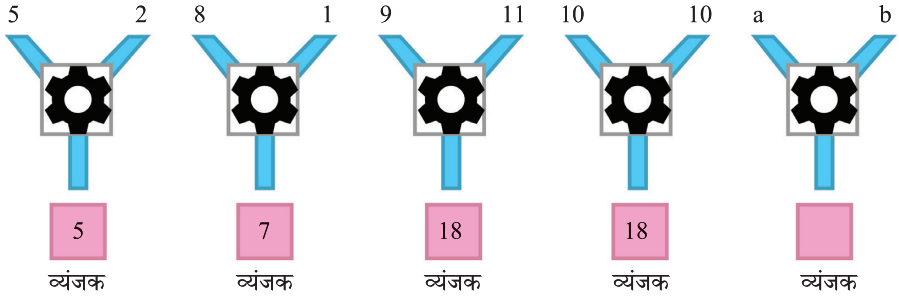
? इस संख्या-मशीन के सूत्र का पता लगाइए।

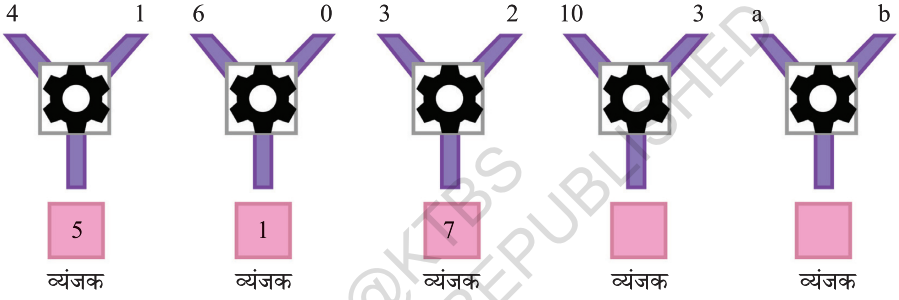



ऊपर दी गई संख्या-मशीन के लिए सूत्र है, 'पहली संख्या के दुगुने में से दूसरी संख्या घटाना'। जब यह बीजगणितीय व्यंजक के रूप में लिखा जाता है तो सूत्र $2a - b$ है। पहले निविष्टों के समूह के लिए व्यंजक $2 \times 5 - 2 = 8$ है। जाँचिए कि प्रत्येक निविष्ट के समूह के लिए क्या यह सूत्र सही है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? नीचे दी गई संख्या-मशीनों के लिए सूत्रों का पता लगाइए और प्रत्येक समूह के निविष्ट के लिए व्यंजक लिखिए।



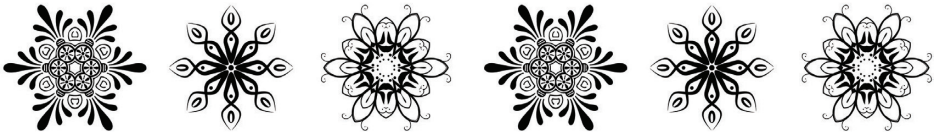

? अब आप स्वयं का एक सूत्र बनाइए। उस सूत्र का उपयोग करके उदाहरणों के रूप में कुछ संख्या-मशीनें लिखिए। अपने सहपाठियों को इसका पता लगाने की चुनौती दीजिए।

**शिक्षक हेतु टिप्पणी**— केवल प्रश्न हल करना ही नहीं अपितु नए प्रश्न बनाना भी गणित सीखने का एक भाग है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## प्रतिरूप (पैटर्न) का वर्णन करने के लिए बीजगणितीय व्यंजक

? **उदाहरण 12**— सोमजीत ने एक साड़ी के किनारे पर एक दोहराव वाले पैटर्न को देखा।



? सोमजीत को आश्चर्य होता है कि क्या सभी स्थितियों का वर्णन करने की कोई ऐसी विधि है जहाँ

(i) डिजाइन A, (ii) डिजाइन B एवं (iii) डिजाइन C विद्यमान है।

आइए, अभिकल्पना (डिजाइन) C से प्रारंभ करते हैं। यह सबसे पहले तीसरे स्थान पर दिखता है, फिर दूसरी बार छठे स्थान पर।

? डिजाइन C $n$वीं बार कहाँ दिखाई देगा?

हम देख सकते हैं कि यह डिजाइन उन स्थानों पर दिखाई देता है, जो 3 के गुणज हैं। अत: $n$वीं बार डिजाइन C, $3n$ स्थान पर विद्यमान होगा।

? इसी प्रकार अन्य डिजाइनों के लिए $n$वीं बार विद्यमान होने की स्थितियों के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

ऐसे स्थान जहाँ B विद्यमान है वे हैं — 2, 5, 8, 11, 14 एवं इसी प्रकार क्रमश: आगे तक।

हम देख सकते हैं कि डिजाइन B के $n$वीं बार विद्यमान होने का स्थान डिजाइन C के $n$वीं बार विद्यमान होने की स्थान से एक कम है। इस प्रकार डिजाइन B के $n$वीं बार विद्यमान होने की स्थिति है—

$$3n - 1$$

इसी प्रकार, डिजाइन A के $n$वीं बार विद्यमान होने के स्थान बताने के लिए व्यंजक $3n - 2$ है।

? दी गई संख्या के लिए क्या हम बता सकते हैं कि वहाँ कौन-सा डिजाइन विद्यमान होगा? स्थिति 122 पर कौन–सा डिजाइन विद्यमान होगा?

जैसा कि पहले देखा गया है कि यदि स्थान संख्या 3 का गुणज है तो स्पष्टतया वहाँ डिजाइन C होगा। यदि स्थान संख्या 3 के गुणज से एक कम है तो वहाँ डिजाइन B है एवं यदि यह 3 के गुणज से 2 कम है तो वहाँ डिजाइन A विद्यमान है।

? क्या इसके लिए स्थान संख्या को 3 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल को उपयोग में लाया जा सकता है? नीचे दी गई सारणी को ध्यान से देखिए।

| स्थान संख्या | 3 से विभाजित करने पर भागफल | शेषफल |
|---|---|---|
| 99 | 33 | 0 |
| 122 | 40 | 2 |
| 148 | 49 | 1 |

? इस सारणी का उपयोग स्थितियों 99, 122 एवं 148 पर विद्यमान डिजाइन को ज्ञात करने में कीजिए।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## कैलेंडर (तिथिपत्र) में पैटर्न

यहाँ नवंबर 2024 का कैलेंडर दिया गया है। $2 \times 2$ के वर्ग लीजिए जैसा कि कैलेंडर में चिह्नित है। इस वर्ग में संख्याएँ एक रोचक गुण दर्शाती हैं।

**नवंबर 2024**

| सोम | मंगल | बुध | गुरु | शुक्र | शनि | रवि |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

आइए, चिह्नित $2 \times 2$ वर्ग लेते हैं एवं विकर्णों पर विद्यमान संख्याओं 12 एवं 20; 13 एवं 19 को लेते हैं। इनका योगफल ज्ञात कीजिए; $12 + 20$, $13 + 19$। आपने क्या देखा?

| | |
|---|---|
| 12 | 13 |
| 19 | 20 |

ये समान हैं।

आइए, कैलेंडर में संख्याओं को 30 के आगे बढ़ाकर अनंत पंक्तियाँ बनाते हैं।

**नवंबर 2024**

| सोम | मंगल | बुध | गुरु | शुक्र | शनि | रवि |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

? क्या इस अनंत जाल में प्रत्येक $2 \times 2$ वर्ग में विकर्ण संख्याओं के योगफल समान होंगे? हम कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं?

यह सुनिश्चित करने के लिए हम सभी $2 \times 2$ वर्गों की जाँच नहीं कर सकते, क्योंकि यहाँ असीमित संख्या में वर्ग हैं।

आइए, एक $2 \times 2$ वर्ग पर विचार करते हैं। इसकी ऊपरी बाईं संख्या कोई भी संख्या हो सकती है। आइए, इसे '$a$' कहते हैं।

? जैसा कि हम ऊपरी बाईं संख्या जानते हैं तो इस $2 \times 2$ वर्ग में हम अन्य संख्याएँ कैसे ज्ञात करेंगे?

| | |
|---|---|
| $a$ | ? |
| ? | ? |

आइए, पहले अन्य संख्याओं को शब्दों में वर्णित करें। जैसा कि हम करते आए हैं—

- '$a$' के दाईं ओर की संख्या **इससे 1 अधिक होगी।**
- '$a$' के नीचे की संख्या **इससे 7 अधिक होगी।**
- '$a$' से विकर्ण स्थिति पर संख्या **इससे 8 अधिक होगी।**

| | |
|---|---|
| $a$ | $a+1$ |
| $a+7$ | $a+8$ |

अतः $2 \times 2$ वर्ग में अन्य संख्याएँ जाल में दर्शाए अनुसार प्रदर्शित की जा सकती हैं। आइए, विकर्ण-संख्याओं के योगफल ज्ञात करते हैं; $a + (a + 8)$ और $(a + 1) + (a + 7)$

आइए, अब इन्हें सरल करते हैं।

क्योंकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है, अतः कोष्ठकों को हटाया जा सकता है।

$a + (a + 8) = a + a + 8 = 2a + 8$

$(a + 1) + (a + 7) = a + 1 + a + 7 = a + a + 1 + 7 = 2a + 8$

हम देखते हैं कि दोनों विकर्ण संख्याओं के योगफल समान हैं जो $2a + 8$ हैं ($a$ के दुगुने से 8 अधिक)।

? कोई भी $2 \times 2$ वर्ग लेकर एवं इसकी ऊपरी बाईं संख्या को '$a$' मानकर विकर्ण संख्याओं के योगफल के लिए इस व्यंजक की जाँच कीजिए।

इस प्रकार हमने प्रदर्शित किया कि '$a$' के किसी भी मान के लिए अर्थात किसी भी $2 \times 2$ वर्ग के लिए विकर्ण संख्याओं के योगफल समान हैं।



यह प्रश्न एक उदाहरण है जो यह जाँचने में बीजगणितीय मॉडल की शक्ति को दर्शाता है कि क्या कोई एक पैटर्न लगातार चलता रहेगा।

अनंत पंक्तियों वाले कैलेंडर से नीचे दिए गए आकार में संख्याओं के एक समूह पर विचार कीजिए।

| | | |
|---|---|---|
| | 8 | |
| 14 | 15 | 16 |
| | 22 | |

? सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए। इसकी तुलना मध्य में लिखी संख्या 15 से कीजिए। इस आकार में संख्याओं के अन्य समूह के लिए इसे दोहराइए। आपने क्या देखा?

हम देखते हैं कि कुल योगफल मध्य में लिखी संख्या से सदैव 5 गुना होता है।

? क्या सदैव ऐसा होगा? आप इसे कैसे दर्शाएँगे?

गणित चर्चा

(**संकेत—** इस आकार में संख्याओं के एक सामान्य समूह पर विचार कीजिए। मध्य में लिखी संख्या को '$a$' लीजिए। अन्य संख्याओं को '$a$' के पदों में व्यक्त कीजिए।)

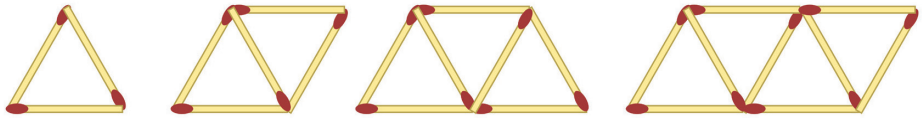
गणित चर्चा

अन्य आकार ज्ञात कीजिए जिनके लिए चित्र के अंदर की संख्याओं का योगफल हमेशा उनमें से किसी एक संख्या का गुणज है।

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## माचिस की तीलियों से प्रतिरूप (पैटर्न)

नीचे दिए गए चित्रों को देखिए। यह माचिस की तीलियों से बनाया गया एक पैटर्न है। क्या आप पहचान सकते हैं कि पैटर्न क्या है?




हम देख सकते हैं कि चरण 1 में 1 त्रिभुज है, चरण 2 में 2 त्रिभुज हैं, चरण 3 में 3 त्रिभुज हैं एवं इसी प्रकार आगे भी हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि अगले चरण (5वें चरण) में कितनी माचिस की तीलियाँ होंगी? ये 11 होंगी। आप भी इसका आरेख खींचकर देख सकते हैं।

? चरण 33, चरण 84 एवं चरण 108 में कितनी माचिस की तीलियाँ होंगी? अवश्य, हम आरेख खींच सकते हैं एवं गिन सकते हैं किंतु क्या यहाँ विद्यमान पैटर्न का उपयोग करके शीघ्रता से उत्तर देने की कोई विधि है?

अगले चरण में माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने का सामान्य नियम क्या है? हम देख सकते हैं कि प्रत्येक चरण में अगला चरण प्राप्त करने के लिए माचिस की 2 तीलियाँ रखी गई हैं अर्थात प्रत्येक समय माचिस की 2 तीलियाँ बढ़ती हैं।

| चरण संख्या | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| माचिस की तीलियों की संख्या | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इसका उपयोग करके चरण 33 में माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने (सतत संख्याएँ लिखे बिना) की एक विधि पर विचार कीजिए।

क्योंकि प्रत्येक बार माचिस की 2 तीलियाँ जोड़ी जाती हैं तो चरण 33 में कितनी बार 2 जोड़े जाएँगे। नीचे दी गई सारणी को देखिए एवं ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

| चरण संख्या | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| माचिस की तीलियों की संख्या | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| | | 3 + 2 | 3 + 2 + 2 | 3 + 2 + 2 + 2 | 3 + 2 + 2 + 2 + 2 | |

33 त्रिभुज (चरण संख्या 33) बनाने के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या _____ है। इसी प्रकार चरण संख्या 84 एवं चरण संख्या 108 के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

किसी भी चरण में माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए नियम या सूत्र का वर्णन करने के लिए कौन-सा व्यंजक हो सकता है?

पैटर्न इस प्रकार है कि चरण संख्या 10 में 9 बार 2 एवं 3 जोड़कर $(3 + 2 \times 9)$ माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात होती है; चरण संख्या 11 में 10 बार 2 एवं 3 जोड़कर $(3 + 2 \times 10)$ माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात होती है। चरण संख्या $y$ के लिए व्यंजक क्या है?

यह $y$ से एक कम का दुगुना अर्थात $2\ (y-1)$ और 3 का योग है।

अत: व्यंजक है

$$3 + 2 \times (y - 1)$$

यह व्यंजक चरण संख्या $y$ में माचिस की तीलियों की संख्या बताता है। अब हम किसी भी चरण संख्या में माचिस की तीलियों की संख्या शीघ्र ज्ञात कर सकते हैं।

आपने ध्यान दिया ही होगा कि पहले चरण में भी 2 सम्मिलित है, $3 = 1 + 2$ इसका उपयोग करके हमें जो व्यंजक प्राप्त होता है, वह है

$$2y + 1$$

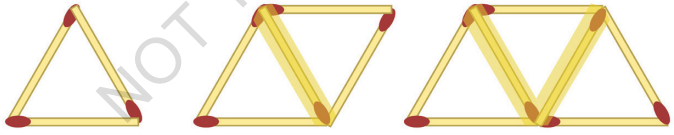
? क्या उपरोक्त व्यंजक किसी भी चरण में माचिस की तीलियों की संख्या बताता है? क्या ये दोनों व्यंजक समान हैं?

हम व्यंजक $3 + 2 \times (y - 1)$ को सरल करके इसकी जाँच कर सकते हैं—

$$3 + 2 \times (y - 1) = 3 + 2y - 2$$
$$= 2y + 1$$

दोनों ही व्यंजक समान हैं।

यहाँ गिनने या पैटर्न को देखने की एक भिन्न विधि है। आइए, चित्र को फिर से देखते हैं।



माचिस की तीलियों को दो अभिविन्यासों में रखा गया है। (a) ऊपर एवं नीचे क्षैतिज रूप से एवं (b) मध्य में विकर्ण रूप से। उदाहरण के लिए, चरण संख्या 2 में माचिस की 2 तीलियाँ क्षैतिज रूप में माचिस की 3 तीलियाँ विकर्ण रूप से रखी गई हैं।

? चरण संख्या 3 एवं चरण संख्या 4 में ये संख्याएँ क्या हैं?

? चरणों के बढ़ने के साथ प्रत्येक अभिविन्यास में माचिस की तीलियों की संख्या कैसे बदलती है? प्रत्येक अभिविन्यास में चरण संख्या $y$ पर माचिस की तीलियों की संख्या के लिए व्यंजक लिखिए। क्या दोनों व्यंजकों का योगफल $2y + 1$ आता है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

आपसे पूछे गए प्रश्नों तथा उचित व्यंजकों को ज्ञात करने के लिए सबसे पहले वर्णित स्थिति में विभिन्न मात्राओं के बीच संबंध समझने का प्रयत्न कीजिए। यदि आवश्यक हो तो अज्ञात के लिए कुछ मानों की कल्पना कीजिए एवं संबंध ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

1. एक प्लेट ज्वार की रोटी का मूल्य ₹30 है एवं एक प्लेट पुलाव का मूल्य ₹20 है। यदि एक दिन में ज्वार की रोटी $x$ प्लेट एवं पुलाव की $y$ प्लेट का आर्डर दिया गया तो उस दिन अर्जित कुल राशि को रुपयों में वर्णित करने के लिए कौन-सा व्यंजक होगा?

   (a) $30x + 20y$ (b) $(30 + 20) \times (x + y)$

   (c) $20x + 30y$ (d) $(30 + 20) \times x + y$

   (e) $30x - 20y$

2. पुष्पिता स्वतंत्रता दिवस पर चंपा एवं गेंदे के दो तरह के फूल बेचती है '$p$' ग्राहक केवल चंपा खरीदते हैं, '$q$' ग्राहक केवल गेंदा खरीदते हैं एवं '$r$' ग्राहक दोनों खरीदते हैं। उसी दिन वह प्रत्येक ग्राहक को एक छोटा राष्ट्रीय झंडा देती है। उस दिन वह कितने झंडे देती है?

   (a) $p + q + r$ (b) $p + q + 2r$

   (c) $2 \times (p + q + r)$ (d) $p + q + r + 2$

   (e) $p + q + r + 1$ (f) $2 \times (p + q)$

3. एक घोंघा एक गहरे कुएँ की दीवार पर चढ़ने का प्रयत्न कर रहा है। दिन के समय यह '$u$' से.मी. चढ़ता है एवं रात के समय वह धीरे से '$d$' से.मी. नीचे फिसल जाता है। 10 दिनों एवं 10 रातों तक ऐसा होता है।

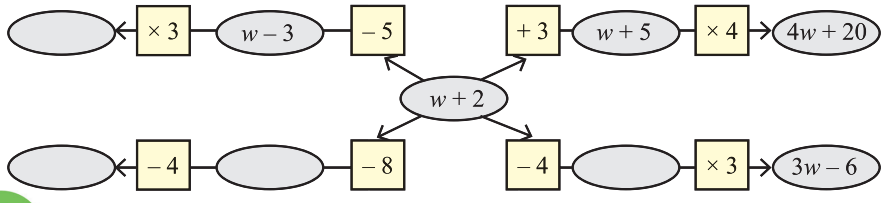
   (a) घोंघा अपनी प्रारंभिक स्थिति से कितना दूर है, यह बताने के लिए एक व्यंजक लिखिए।

   (b) यदि $d > u$ तो हम घोंघे की गति के बारे में क्या कह सकते हैं?

4. राधा साइकिल दौड़ की प्रतिस्पर्धा के लिए तैयारी कर रही है एवं प्रतिदिन अभ्यास करती है। पहले सप्ताह में वह प्रतिदिन 5 कि.मी. साइकिल चलाती है। प्रत्येक सप्ताह वह प्रतिदिन साइकिल चलाने की दूरी को '$z$' कि.मी. बढ़ाती है। 3 सप्ताह के बाद राधा कितने कि.मी. साइकिल चला चुकी होगी?

   प्रयास करें

5. नीचे दिए गए चित्र को ध्यान से देखिए कि कैसे व्यंजक $w + 2$ एक रास्ते के माध्यम से व्यंजक $4w + 20$ हो जाता है। अन्य रास्तों पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए। अंडाकार स्थानों में व्यंजक लिखें जाएँगे एवं बक्सों में गणितीय संक्रियाएँ लिखी जाएँगी?




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. यहाँपुर से वहाँपुर जाने वाली एक लोकल ट्रेन मार्ग में समान दूरी पर तीन स्टेशनों पर रुकती है। एक स्टेशन से दूसरे स्टेशन तक दूरी तय करने में मिनटों में लगने वाला समय समान है एवं इसे $t$ से प्रदर्शित किया गया है। ट्रेन तीनों स्टेशनों पर 2 मिनट के लिए रुकती है।
   (a) यदि $t = 4$ हो तो यहाँपुर से वहाँपुर की यात्रा में लगने वाला समय क्या होगा?
   (b) यहाँपुर से वहाँपुर की यात्रा में लगने वाले समय के लिए बीजगणितीय व्यंजक क्या होगा? (*संकेत* — स्थिति के दृश्यीकरण के लिए एक रफ आरेख खींचिए।)

7. दिए गए व्यंजकों को सरल कीजिए—
   (a) $3a + 9b - 6 + 8a - 4b - 7a + 16$
   (b) $3\,(3a - 3b) - 8a - 4b - 16$
   (c) $2\,(2x - 3) + 8x + 12$
   (d) $8x - (2x - 3) + 12$
   (e) $8h - (5 + 7h) + 9$
   (f) $23 + 4\,(6m - 3n) - 8n - 3m - 18$

8. नीचे दिए गए व्यंजकों का योग ज्ञात कीजिए—
   (a) $4d - 7c + 9$ और $8c - 11 + 9d$
   (b) $-6f + 19 - 8s$ और $-23 + 13f + 12s$
   (c) $8d - 14c + 9$ और $16c - (11 + 9d)$
   (d) $6f - 20 + 8s$ और $23 - 13f - 12s$
   (e) $13m - 12n$ और $12n - 13m$
   (f) $-26m + 24n$ और $26m - 24n$

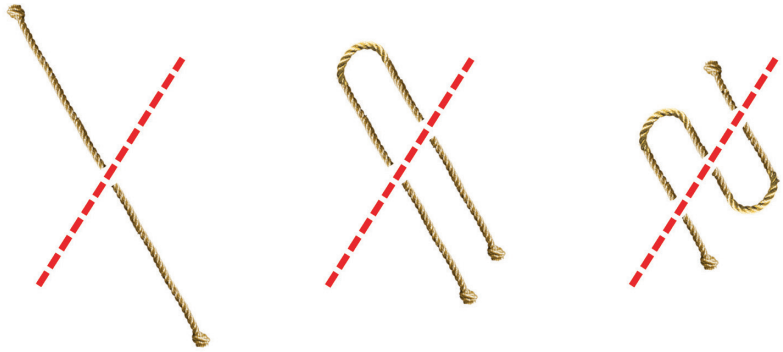
9. नीचे दिए गए व्यंजकों का घटाव कीजिए—
   (a) $9a - 6b + 14$ से $6a + 9b - 18$
   (b) $-15x + 13 - 9y$ से $7y - 10 + 3x$
   (c) $17g + 9 - 7h$ से $11 - 10g + 3h$
   (d) $9a - 6b + 14$ से $6a - (9b + 18)$
   (e) $10x + 2 + 10y$ से $-3y + 8 - 3x$
   (f) $8g + 4h - 10$ से $7h - 8g + 20$

10. दिए गए बीजगणितीय व्यंजकों के लिए संगत स्थितियों का वर्णन कीजिए—
   (a) $8x + 3y$
   (b) $15x - 2x$

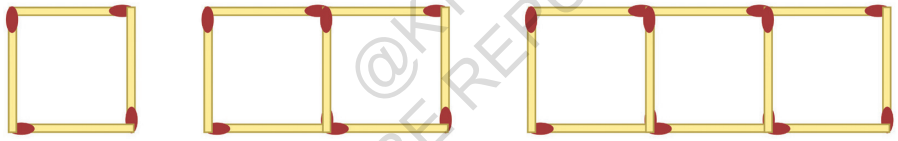
11. कल्पना कीजिए कि एक सीधी रस्सी है। यदि इसे चित्र में दर्शाए अनुसार एक बार काटा जाए तो हमें 2 टुकड़े प्राप्त होंगे। यदि रस्सी को चित्र में दर्शाए अनुसार एक बार मोड़कर काटा जाए तो हमें 3 टुकड़े प्राप्त होंगे। पैटर्न को ध्यान से देखिए एवं बताइए कि यदि रस्सी को 10 बार

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

मोड़कर काटा जाए तो हमें रस्सी के कितने टुकड़े प्राप्त होंगे। यदि रस्सी को $r$ बार मोड़कर काटा जाए तो टुकड़ों की संख्या के लिए व्यंजक क्या होगा?

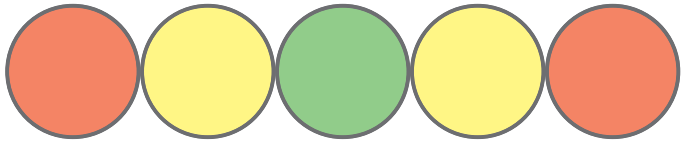


12. नीचे दी गई माचिस की तीलियों के पैटर्न को ध्यान से देखिए और पहचानिए। ऐसे 10 वर्ग बनाने के लिए माचिस की कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी? $w$ वर्ग बनाने के लिए माचिस की कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?



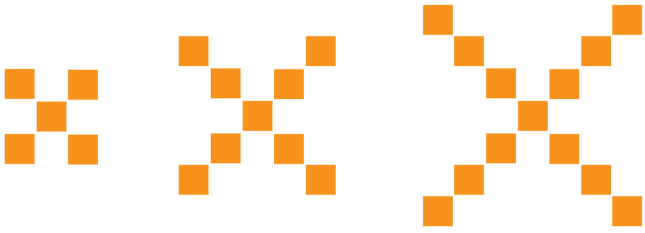
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

13. क्या आपने ध्यान दिया कि ट्रैफिक सिग्नल में रंग कैसे बदलते हैं? रंग-परिवर्तन का क्रम नीचे दर्शाया गया है। स्थिति 90, 190 एवं 343 पर रंग ज्ञात कीजिए। प्रत्येक रंग की स्थिति का वर्णन करने के लिए व्यंजक लिखिए।




.....

14. दिए गए पैटर्न को ध्यान से देखिए। चरण 4, चरण 10 एवं चरण 50 में कितने वर्ग होंगे? एक सामान्य सूत्र लिखिए। यदि हम सभी वर्गों के कोनों की संख्या को गिनना चाहते हैं तो सूत्र कैसे बदलेगा?



15. इस अनंत 4 स्तंभीय ग्रिड में संख्याएँ एक विशेष क्रम में लिखी गई हैं।

(a) दिए गए एक स्तंभ (1, 2, 3, 4) में सभी संख्याएँ निर्मित करने के लिए व्यंजक दीजिए।

(b) बताइए कि नीचे दी गई संख्याएँ किस पंक्ति एवं किस स्तंभ में विद्यमान होंगी—

(i) 124

(ii) 147

(iii) 201

(c) कौन-सी संख्या पंक्ति '$r$' एवं स्तंभ '$c$' में विद्यमान होगी?

(d) 3 के गुणजों की स्थितियों को ध्यान से देखिए।

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |
| | | | |

क्या आपको इसमें कोई पैटर्न दिख रहा है? आप जो अन्य पैटर्न देखते हैं, उनकी सूची बनाइए।

गणित चर्चा

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## सारांश

- बीजगणितीय व्यंजकों का उपयोग मात्राओं के बीच पैटर्नों का मॉडल बनाने व गणितीय संबंध बनाने तथा पूर्वकथन बनाने हेतु सूत्रों में किया जाता है।
- बीजगणितीय व्यंजकों में केवल संख्याओं का ही उपयोग नहीं होता, अपितु अक्षर-संख्याओं का भी उपयोग होता है। अंकगणितीय व्यंजकों को हल करने के नियम बीजगणितीय व्यंजकों पर भी लागू होते हैं। ये नियम बीजगणितीय व्यंजकों को उनके सरलतम रूपों में बदलने के लिए उपयोग किए जा सकते हैं।
- बीजगणितीय व्यंजकों का सामान्य भाषा में वर्णन किया जा सकता है एवं सामान्य भाषा में दी गई स्थितियों को बीजगणितीय व्यंजकों में बदला जा सकता है। बीजगणित द्वारा सरलता से लिखे जाने वाले पैटर्न या संबंध, सामान्य भाषा में प्राय: लंबे एवं जटिल हो सकते हैं। यह बीजगणित का एक लाभ है।

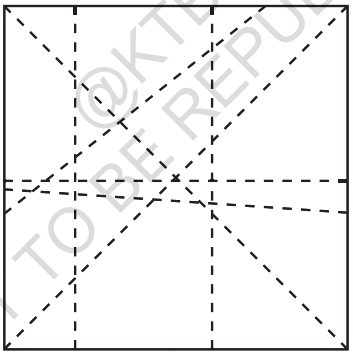
# 5 समांतर और प्रतिच्छेदी रेखाएँ

0775CH05

## 5.1 रेखा के पार

कागज का एक वर्गाकार टुकड़ा लीजिए और इसे विभिन्न प्रकार से मोड़िए तथा इसे पुन: खोल लीजिए। अब मोड़ने से कागज पर बने मोड़ों पर मापक व पेंसिल का उपयोग करके रेखाएँ खींचिए। आपको कागज पर विभिन्न रेखाएँ दिखेंगी। रेखाओं के किसी भी युग्म को लीजिए और एक-दूसरे के साथ उनका संबंध देखिए। क्या वे परस्पर मिल रही हैं? क्या आपको लगता है कि जो रेखाएँ कागज के अंदर नहीं मिल रही है, यदि उन्हें कागज के बाहर तक बढ़ाया जाए तो वे मिलेंगी?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



चित्र 5.1

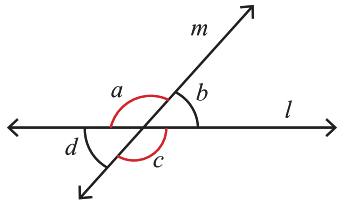
इस अध्याय में हम एक **समतल सतह** पर रेखाओं के मध्य संबंध खोजेंगे। मेज का ऊपरी भाग, आपके कागज का टुकड़ा, श्यामपट्ट (ब्लैकबोर्ड) एवं बुलेटिन बोर्ड सभी समतल सतहों के उदाहरण हैं।

आइए, रेखाओं के एक ऐसे युग्म को देखें जो एक-दूसरे से मिल रही हैं। आप ध्यान देंगे कि वे एक बिंदु पर मिलती हैं। एक समतल सतह पर जब रेखाओं का एक युग्म एक-दूसरे से एक बिंदु पर मिलता है तो इसका अर्थ है कि वे रेखाएँ एक-दूसरे को **प्रतिच्छेद** करती हैं।

आइए, देखते हैं कि क्या होता है जब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं?

? वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कितने कोण बना रही हैं?

चित्र 5.2 में हम देख सकते हैं कि रेखा $l$, रेखा $m$ को जहाँ प्रतिच्छेद करती है, वहाँ चार कोण बनते हैं।




चित्र 5.2

? क्या दो सरल रेखाएँ एक से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं?

**गतिविधि 1**

कागज की एक समतल शीट पर दो रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर प्रतिच्छेद करें। इनसे बने चारों कोणों को चाँदे की सहायता से मापिए। ऐसी ही प्रतिच्छेदी रेखाओं के चार युग्म बनाइए और प्रतिच्छेदी बिंदुओं पर बने कोणों को मापिए।

? आपको इन कोणों के बीच कौन-सा प्रतिरूप (पैटर्न) दिख रहा है?

? चित्र 5.2 में यदि $\angle a$ का माप $120°$ है तो क्या आप $\angle b$, $\angle c$ और $\angle d$ का माप बिना उन्हें खीचें और मापे निकाल सकते हैं?

हम जानते हैं कि $\angle a$ एवं $\angle b$ दोनों का कुल माप $180°$ है, क्योंकि जब वे दोनों साथ मिलते हैं तो वे एक सरल कोण (ऋजु कोण) बनाते हैं जिसका माप $180°$ होता है। अतः यदि $\angle a$ का माप $120°$ है तो $\angle b$ का माप अवश्य ही $60°$ होगा।

इसी प्रकार $\angle b$ एवं $\angle c$ दोनों का कुल माप $180°$ है। अतः यदि $\angle b$ का माप $60°$ है तो $\angle c$ का माप अवश्य ही $120°$ होगा और $\angle c$ एवं $\angle d$ दोनों का कुल माप $180°$ है। अतः यदि $\angle c$ का माप $120°$ है तो $\angle d$ का माप अवश्य ही $60°$ होगा।

अर्थात चित्र 5.2 में $\angle a$ और $\angle c$ का माप $120°$ है तथा $\angle b$ और $\angle d$ का माप $60°$ है।

अत: जब दो रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं और चार कोण $a$, $b$, $c$ एवं $d$ बनते हैं, जैसा कि चित्र 5.2 में दर्शाया गया है तब $\angle a$ और $\angle c$ समान होंगे तथा $\angle b$ और $\angle d$ समान होंगे।

? क्या यह तथ्य प्रतिच्छेदी रेखाओं के प्रत्येक युग्म के लिए सदैव सत्य है?

$\angle a$ के विभिन्न मापों के लिए इसकी जाँच कीजिए। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं कि इन मापों का उपयोग करके $\angle a$ के किसी भी माप के लिए यह गुण सत्य सिद्ध होगा?

चित्र 5.2 के लिए $\angle a$ के मानों का अनुमान लगाए बिना हम अपने तर्क का सामान्यीकरण कर सकते हैं। हम जानते हैं कि सरल या ऋजु कोण का माप $180°$ होता है, अत: $\angle a + \angle b = \angle a + \angle d = 180°$ ही होगा। इस प्रकार $\angle b$ एवं $\angle d$ हमेशा समान होंगे। इसी प्रकार $\angle b + \angle a = \angle b + \angle c = 180°$ है। अतः $\angle a$ एवं $\angle c$ अवश्य समान ही होंगे।

दो रेखाओं को एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करने से बनने वाले आसन्न कोण, रैखिक युग्म कहलाते हैं, जैसे— $\angle a$ और $\angle b$ तथा रैखिक युग्मों का योग सदैव $180°$ होता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

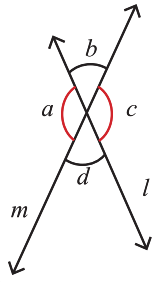
दो रेखाओं के एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करने से बनने वाले सम्मुख कोण शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं, जैसे— $\angle b$ और $\angle d$। शीर्षाभिमुख कोण सदैव एक-दूसरे के समान होते हैं।

उपरोक्त तर्क से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि जब कभी भी दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं। इस प्रकार का औचित्य गणित में उपपत्ति (proof) कहलाता है।

### पता लगाइए

चित्र 5.3 में आप जिन रैखिक युग्मों एवं शीर्षाभिमुख कोणों को देखते हैं, उन सभी की सूची बनाइए—

| | |
|---|---|
| रैखिक युग्म | $\angle a$ और $\angle b$, … |
| शीर्षाभिमुख कोण | $\angle b$ और $\angle d$, … |



चित्र 5.3

### मापन एवं ज्यामिति

आपने ध्यान दिया होगा कि जब आप रैखिक युग्मों को मापते हैं तो कभी-कभी उनका योग 180° नहीं आता अथवा जब आप शीर्षाभिमुख कोणों को मापते हैं तो कभी-कभी वे असमान हो सकते हैं। इसके क्या कारण हैं? इसके विभिन्न कारण हो सकते हैं—

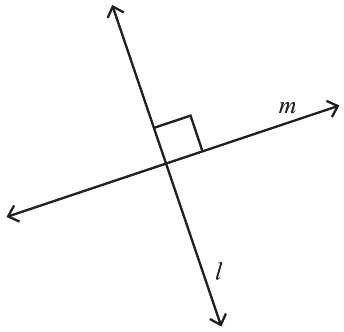
- मापन उपकरणों, जैसे चाँदा आदि के उपयुक्त रूप से उपयोग नहीं करने के कारण होने वाली मापन त्रुटियाँ।
- खींची गई रेखाओं की मोटाई में अंतर के कारण ज्यामिति में 'आदर्श' रेखा में कोई मोटाई नहीं होती, किंतु हमारे लिए बिना मोटाई की रेखाएँ बनाना संभव भी नहीं है।

ज्यामिति में हम अपने आस-पास दिखने वाली रेखाओं तथा अन्य आकारों के आदर्श रूप बनाते हैं और उनके मध्य संबंधों का विश्लेषण करते हैं। उदाहरण के लिए, हम जानते हैं एक सरल रेखा द्वारा बनने वाला कोण 180° है। अत: यदि अन्य रेखा इस कोण को दो भागों में बाँटती है तो दोनों भागों का योगफल 180° होना चाहिए। हम यहाँ तक केवल तर्क के द्वारा पहुँचे हैं न कि मापन द्वारा। जब हम किसी उपकरण के द्वारा मापों को मापते हैं तो हो सकता है कि ऊपर बताए गए कारणों के कारण ये माप हमारे पूर्वानुमान जितने सही न हों फिर भी ये माप हमारे पूर्वानुमान के बहुत निकट ही प्राप्त होते हैं, इसी कारण ज्यामिति का व्यापक अनुप्रयोग विभिन्न विषयों में होता है, जैसे — भौतिकी, कला अभियान्त्रिकी एवं वास्तुकला इत्यादि।

## 5.2 लम्ब रेखाएँ

क्या आप प्रतिच्छेदी रेखाओं का एक युग्म इस प्रकार बना सकते हैं जिसमें सभी चारों कोण समान हों? क्या आप पता लगा सकते हैं कि प्रत्येक कोण का माप क्या होगा?

© KIRBS NOT TO BE REPUBLISHED




चित्र 5.4

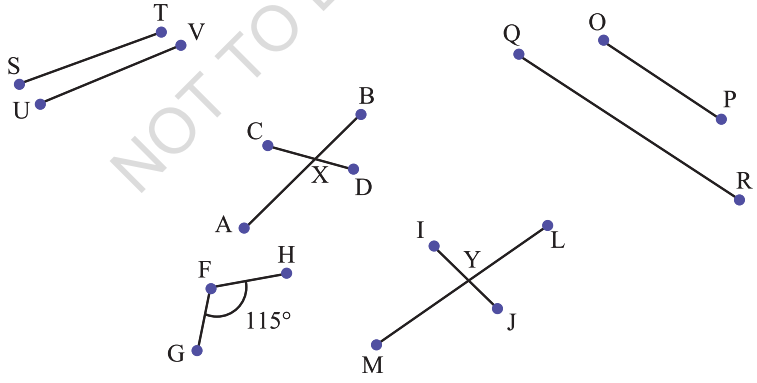
यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं एवं सभी चारों कोण समान हों तो प्रत्येक कोण अवश्य ही एक समकोण (90°) होगा।

**लम्ब रेखाएँ** रेखाओं का ऐसा युग्म होता है जहाँ वे रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण (90°) पर प्रतिच्छेद करती हैं। चित्र 5.4 में हम कह सकते हैं कि रेखाएँ *l* एवं *m* एक-दूसरे पर लम्ब हैं।

## 5.3 रेखाओं के मध्य

चित्र 5.5 देखिए एवं प्रत्येक स्थिति में रेखाखंडों के मिलने या आर-पार जाने के तरीके का उचित गणितीय शब्दों (एक बिंदु, एक अंत-बिंदु, मध्य-बिंदु, अवसंधि— जहाँ दो रेखाएँ मिलती हैं, प्रतिच्छेद करती है) और प्रत्येक कोण की डिग्री माप के साथ वर्णन कीजिए।

उदाहरण के लिए, रेखाखंड FG एवं FH अंत-बिंदु F पर कोण 115° पर मिलते हैं।



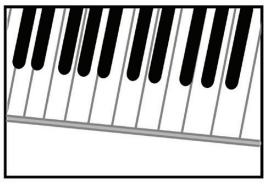
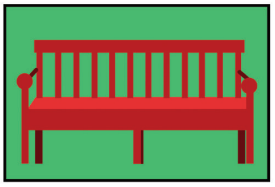

चित्र 5.5

यदि रेखाखंडों ST एवं UV को आगे बढ़ाया जाए तो क्या इन रेखाओं के मिलने की संभावना है?

यदि रेखाखंडों OP एवं QR को आगे बढ़ाया जाए तो क्या इन रेखाओं के मिलने की संभावना है?

यहाँ रेखाओं के कुछ उदाहरण दिए गए हैं जिन्हें हम अपने आस-पास देखते हैं—

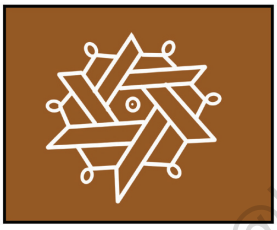
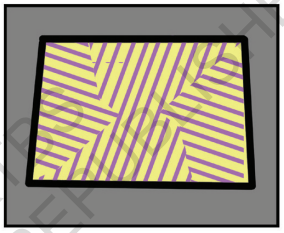
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED


ऊपर दिए गए चित्रों में रेखाओं के लिए क्या सर्वनिष्ठ/उभयनिष्ठ है? उनके एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करने की संभावना प्रतीत नहीं होती। ऐसी रेखाएँ समांतर रेखाएँ कहलाती हैं।

रेखाओं का वह युग्म जो एक ही तल (Plane) पर विद्यमान होती हैं एवं कभी एक-दूसरे से नहीं मिलती चाहे हम इन रेखाओं को दोनों सिरों पर कितना भी आगे बढ़ा दें, वे समांतर रेखाएँ कहलाती हैं।

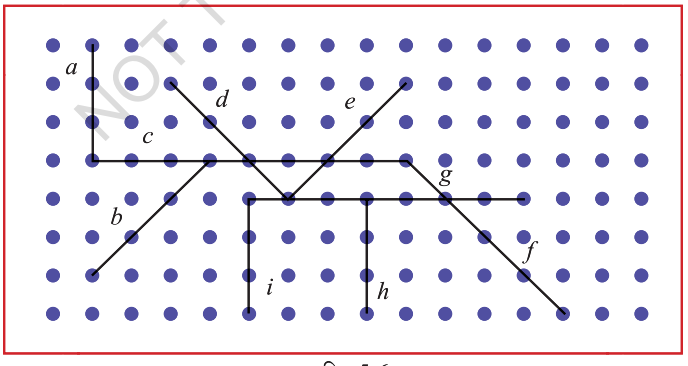
कुछ ऐसी समांतर रेखाओं के नाम बताइए जिन्हें आप अपनी कक्षा में देख सकते हैं।

NOT TO BE REPUBLISHED @KTR

समांतर रेखाओं का उपयोग प्रायः कलाकृतियों में एवं छायांकन में किया जाता है।

? नीचे दिए गए चित्र 5.6 में रेखाओं के कौन-से युग्म समांतर प्रतीत होते हैं?




चित्र 5.6

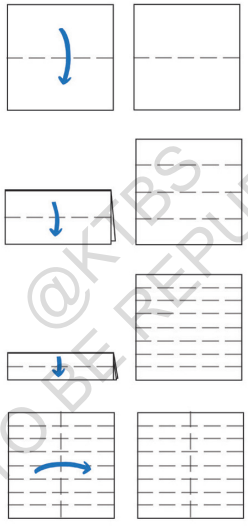
**शिक्षक हेतु टिप्पणी**— यह महत्वपूर्ण है कि रेखाएँ एक ही तल पर विद्यमान हों। हो सकता है कि मेज पर खींची गई एक रेखा एवं बोर्ड पर खींची गई एक रेखा परस्पर कभी न मिलें परंतु इससे वे समांतर नहीं बनती हैं।

## 5.4 कागज को मोड़ने में समांतर एवं लम्ब रेखाएँ

### गतिविधि 2

एक सपाट वर्गाकार कागज लीजिए (इस गतिविधि के लिए एक समाचार-पत्र का उपयोग कीजिए)।

- आप कागज के सम्मुख किनारों की व्याख्या किस प्रकार करेंगे? वे एक-दूसरे के _____ हैं।
- आप कागज के आसन्न किनारों की व्याख्या किस प्रकार करेंगे? आसन्न किनारे एक-दूसरे के _____ हैं। वे एक बिंदु पर मिलते हैं। वे समकोण बनाते हैं।
- कागज को क्षैतिज रूप से आधे भाग में मोड़िए। इससे एक नई रेखा बनती है (चित्र 5.7 देखिए)।
- अब आप कितनी समांतर रेखाएँ देखते हैं? नया रेखाखंड ऊर्ध्वाधर भुजाओं (वर्टिकल) से किस प्रकार संबंधित है?



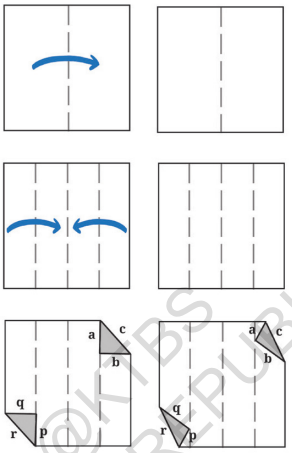
चित्र 5.7

NOT TO BE REPUBLISHED @KLBS

- मुड़े हुए कागज में एक और क्षैतिज मोड़ बनाइए। अब आप कितनी समांतर रेखाएँ देखते हैं?
- यदि आप पुन: एक बार ऐसा करें तो क्या होगा? आपको कितनी समांतर रेखाएँ प्राप्त होंगी? क्या यहाँ कोई पैटर्न है? यदि आप एक और क्षैतिज मोड़ बनाते हैं तो जाँचिए कि क्या यह पैटर्न आगे बढ़ता है।
- वर्गाकार कागज में एक ऊर्ध्वाधर मोड़ बनाइए। यह नई ऊर्ध्वाधर रेखा पहले से बनी क्षैतिज रेखाओं को _____ है।
- शीट को विकर्ण के अनुदेश से मोड़िए। क्या आप वह मोड़ ज्ञात कर सकते हैं जो विकर्ण रेखा के समांतर रेखा बनाता हो?

अभ्यास करने हेतु आपके लिए यहाँ एक अन्य गतिविधि भी दी गई है।

- एक वर्गाकार कागज लीजिए, इसे मध्य से मोड़िए एवं मोड़ को खोल दीजिए।
- किनारों को मध्य रेखा की ओर मोड़िए एवं उन मोड़ों को खोल दीजिए।
- ऊपरी दाएँ कोने को एवं निचले बाएँ कोने के मोड़ की रेखा पर इस प्रकार मोड़िए कि त्रिभुज बनें। चित्र 5.8 को देखिए।
- ये त्रिभुज मोड़ की रेखा के पार नहीं जाने चाहिए।
- क्या $a$, $b$ एवं $c$ क्रमशः $p$, $q$ एवं $r$ के समांतर हैं? यदि हाँ, तो क्यों? यदि नहीं, तो क्यों नहीं?

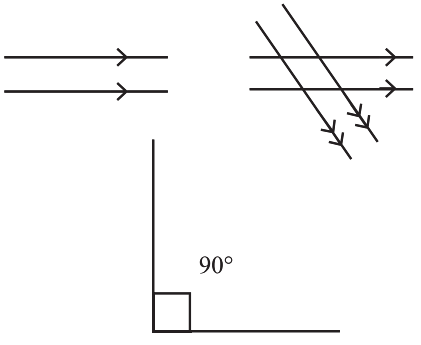



चित्र 5.8

©KIPS NOT TO BE REPUBLISHED

## संकेतन

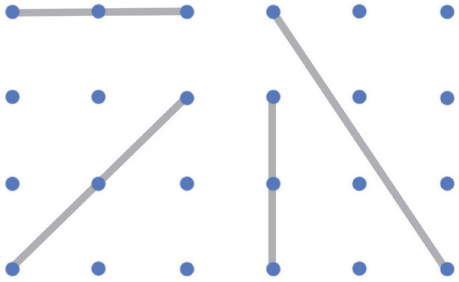
गणित में हम रेखाओं के समूह को समांतर दर्शाने के लिए तीर के चिह्न (>) का उपयोग करते हैं। यदि समांतर रेखाओं के एक से अधिक समूह होते हैं (जैसा कि चित्र 5.9 में है) तो दूसरे समूह को तीर के दो चिह्नों से दर्शाया जाता है एवं इसी प्रकार ही आगे भी दर्शाया जाता है। लम्बवत रेखाओं को उनके बीच एक वर्ग कोण के साथ चिह्नित किया जाता है।




चित्र 5.9

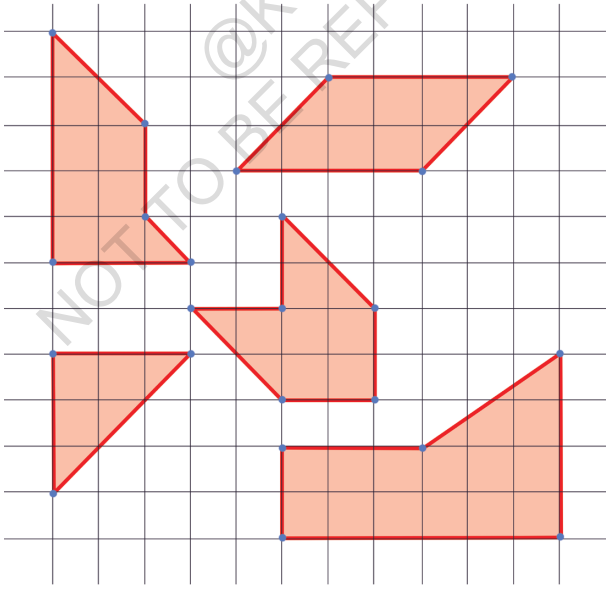
## पता लगाइए

1. चित्र 5.10 में बिंदुकित कागज पर दी गई रेखाओं के लम्बवत कुछ रेखाएँ खींचिए।



चित्र 5.10

2. चित्र 5.11 में ऊपर दिए गए संकेतनों (एकल तीर का चिह्न, दो तीर के चिह्न आदि) का उपयोग करके समांतर रेखाओं को चिह्नित कीजिए। लम्ब रेखाओं के बीच कोण को वर्ग के प्रतीक से चिह्नित कीजिए।
   (a) आपने लम्बवत रेखाओं को कैसे पहचाना?
   (b) आपने समांतर रेखाओं को कैसे पहचाना?

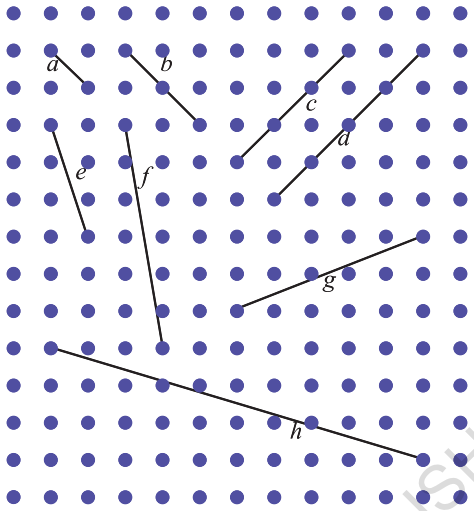


चित्र 5.11

3. नीचे दिए बिंदुकित कागज पर समांतर रेखाओं के विभिन्न समूह बनाइए। रेखाखंड विभिन्न लंबाइयों के हो सकते हैं किंतु उनके अंत-बिंदु बिंदुकित होने चाहिए।

@KVTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. अपनी समझ का उपयोग करके बताइए कि समांतर रेखाएँ कैसी दिखती हैं तथा इस बिंदुकित कागज पर दिए गए रेखाखंडों के समांतर रेखाएँ खींचने का प्रयत्न कीजिए।



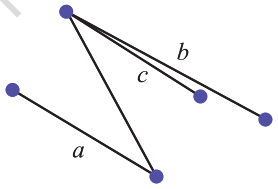

चित्र 5.12

(a) क्या आपको इनमें से कुछ रेखाएँ खींचना चुनौतीपूर्ण लगा?

(b) कौन-सी रेखाएँ खींचना चुनौतीपूर्ण लगा?

(c) आपने इसे कैसे किया?

5. चित्र 5.13 में कौन-सी रेखा, रेखा $a$ के समांतर है— रेखा $b$ या रेखा $c$? आपने यह कैसे सुनिश्चित किया?




चित्र 5.13

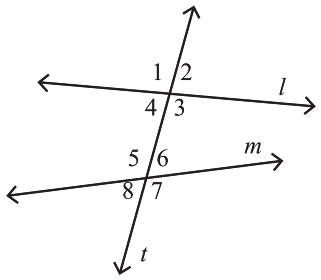
**शिक्षक हेतु टिप्पणी**— आयताकार बिंदुकित कागज पर ऊर्ध्वाधर रेखाएँ, क्षैतिज रेखाएँ एवं 45° पर झुकी रेखाएँ खींचना सरल होता है, किंतु भिन्न अभिविन्यास वाली रेखा के समांतर रेखा खींचना थोड़ा कठिन होता है। इसके लिए विद्यार्थियों को उनके अंतर्ज्ञान का उपयोग करने दीजिए।

पिछली प्रश्नावलियों से हमने देखा कि कभी-कभी हमारे लिए यह सुनिश्चित करना कठिन होता है कि दो रेखाएँ समांतर हैं अथवा नहीं। यह सुनिश्चित करने के लिए हम तिर्यक रेखाओं (transversals) की अवधारणा का उपयोग करते हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## 5.5 तिर्यक रेखाएँ

यहाँ हम देख सकते हैं कि तब क्या होता है जब दो रेखाएँ विभिन्न तरीकों से प्रतिच्छेद करती हैं। आइए, पता लगाते हैं कि क्या होता है जब एक रेखा दो भिन्न रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है।




चित्र 5.14

चित्र 5.14 में एक रेखा $t$ है जो रेखाओं $l$ एवं $m$ को प्रतिच्छेद करती है। यहाँ $t$ एक **तिर्यक रेखा** है (ऐसी रेखा जो दो रेखाओं को प्रतिच्छेद करे वह तिर्यक रेखा कहलाती है)। ध्यान दीजिए कि जब एक रेखा दो रेखाओं के समूह को पार कर जाती है तो 8 कोण बनते हैं।

? क्या यह संभव है कि सभी 8 कोणों के माप भिन्न हों? यदि हाँ, तो क्यों? यदि नहीं, तो क्यों नहीं?

? 5 भिन्न कोणों 6, 5, 4, 3 और 2 के विषय में आपके क्या विचार हैं?

चित्र 5.14 में क्योंकि $\angle 1$ और $\angle 3$ शीर्षाभिमुख कोण हैं, अतः वे समान माप के हैं। क्या शीर्षाभिमुख कोणों के अन्य युग्म भी हैं? हम देख सकते हैं कि शीर्षाभिमुख कोणों के कुल 4 युग्म हैं एवं प्रत्येक युग्म में कोण एक-दूसरे के समान हैं।

इस प्रकार जब दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करती है तो अधिक से अधिक 4 भिन्न मापों के 8 कोण बनते हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

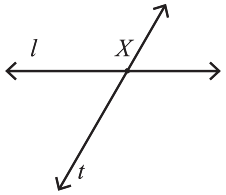
## 5.6 संगत कोण

हम चित्र 5.14 में देखते हैं कि तिर्यक रेखा $t$ कोणों के दो समूह बनाती है— एक रेखा $l$ के साथ एवं दूसरा रेखा $m$ के साथ। स्थिति के आधार पर पहले समूह के कोण दूसरे समूह में कोणों के संगत हैं। $\angle 1$ एवं $\angle 5$ संगत कोण कहलाते हैं। इसी प्रकार $\angle 2$ और $\angle 6$, $\angle 3$ और $\angle 7$, $\angle 4$ तथा $\angle 8$ तिर्यक रेखा $t$ द्वारा रेखाओं $l$ और $m$ को प्रतिच्छेद करने पर बनने वाले संगत कोण हैं।

? **गतिविधि 3**

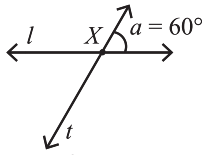
एक रेखा-युग्म एवं एक तिर्यक रेखा इस प्रकार खींचिए कि वे दो भिन्न कोण बनाएँ।

**चरण 1**— रेखा $l$ खींचिए एवं इस रेखा को बिंदु $X$ पर प्रतिच्छेद करती हुई तिर्यक रेखा $t$ खींचिए।




चित्र 5.15

**चरण 2**— रेखाओं $l$ और $t$ द्वारा बनने वाला $\angle a$ मापिए। (आइए इसे $60°$ मान लेते हैं।)



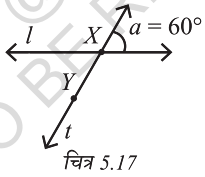

चित्र 5.16

अब कितने विभिन्न कोण बने हैं?

यदि एक कोण $60°$ है तो रैखिक युग्म का अन्य कोण $120°$ होना चाहिए। अतः हमारे पास दो भिन्न कोण हैं।

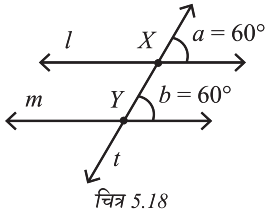
अब हम तिर्यक रेखा $t$ को प्रतिच्छेद करती हुई अन्य रेखा खींचकर केवल $60°$ और $120°$ बनाना चाहते हैं।

**चरण 3**— रेखा $t$ पर एक बिंदु Y चिह्नित कीजिए।




चित्र 5.17

**चरण 4**— बिंदु Y से होकर जाती हुई एक रेखा $m$ खींचिए जो रेखा $t$ के साथ $60°$ का कोण बनाती है। हम इसे या तो अनुरेखण कागज (ट्रेसिंग पेपर) से $\angle a$ का नकल करके या चाँदे के उपयोग से कोणों को मापकर बना सकते हैं।




चित्र 5.18

रेखाओं $l$ व $m$ के बारे में आपने क्या ध्यान दिया? क्या ये एक-दूसरे के समांतर प्रतीत होती हैं?

हाँ, वे निश्चित रूप से ही एक-दूसरे के समांतर प्रतीत होती हैं।

तिर्यक रेखा $t$ द्वारा रेखाओं $l$ व $m$ पर बने कोण $\angle a$ व $\angle b$, संगत कोण हैं। ये संगत कोण एक-दूसरे के समान होते हैं।

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

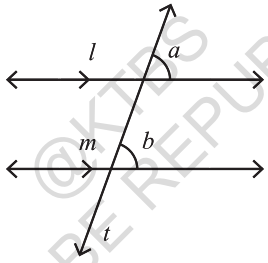
इससे हम देख सकते हैं कि—

जब एक तिर्यक रेखा द्वारा एक रेखा-युग्म पर बने संगत कोण एक-दूसरे के समान होते हैं तो उस युग्म की रेखाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।

मान लीजिए कि दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली एक तिर्यक रेखा है, तो संगत कोणों के बारे में क्या कहा जा सकता है?

### गतिविधि 4

चित्र 5.19 में समांतर रेखाएँ $l$ व $m$ हैं (चित्र में समांतर रेखाएँ चिह्नित करने के लिए किस संकेतन का उपयोग किया गया है)। रेखा $t$ इन दोनों रेखाओं की तिर्यक रेखा है। $\angle a$ व $\angle b$ संगत कोण हैं। एक अनुरेखण कागज (ट्रेसिंग पेपर) लेकर उस पर $\angle a$ को अनुरेख (ट्रेस) कीजिए। अब इस अनुरेखण कागज को $\angle b$ पर रखिए एवं देखिए कि क्या कोण पूर्णतः संपाती हैं। आप देखेंगे कि कोण समान हैं। चित्र में अन्य संगत कोणों की चाँदे की सहायता से जाँच कीजिए। क्या सभी संगत कोण एक-दूसरे के समान हैं?



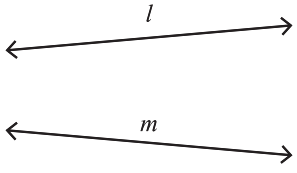

चित्र 5.19

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एक तिर्यक रेखा द्वारा समांतर रेखाओं के युग्म को प्रतिच्छेद करने पर बने संगत कोण सदैव एक-दूसरे के समान होते हैं।

### गतिविधि 5

चित्र 5.20 में रेखाओं $l$ व $m$ की तिर्यक रेखा इस प्रकार खींचिए कि संगत कोणों का एक युग्म समान हो। आप कोणों को एक चाँदे द्वारा माप सकते हैं।




चित्र 5.20

क्या आपको ऐसी तिर्यक रेखा खींचने में कठिनाई आ रही है जिससे संगत कोण समान हों?

जब एक रेखा-युग्म में रेखाएँ एक-दूसरे के समांतर नहीं होती हैं तो तिर्यक रेखा द्वारा बनने वाले संगत कोण कभी भी एक-दूसरे के समान नहीं हो सकते।

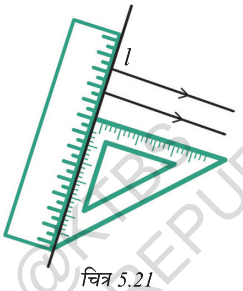
## 5.7 समांतर रेखाएँ खींचना

क्या आप एक मापक एवं एक समकोणक (सेट स्कवेयर) का उपयोग करके समांतर रेखाओं का एक युग्म बना सकते हैं?

चित्र 5.21 दर्शाता है कि आप इसे किस प्रकार कर सकते हैं।

एक मापक द्वारा एक रेखा *l* खींचिए। अपने समकोणक को खिसकाकर आप रेखा *l* के लम्बवत दो रेखाएँ खींच सकते हैं।

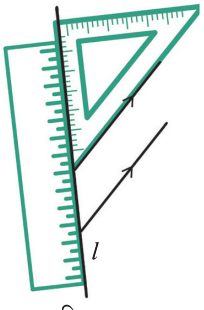
क्या ये दोनों रेखाएँ एक-दूसरे के समांतर हैं? हमने कैसे सुनिश्चित किया कि वे एक-दूसरे के समांतर हैं? इन रेखाओं एवं रेखा *l* के बीच कौन-से कोण बने हैं?




चित्र 5.21

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्योंकि हमने समकोणक का उपयोग किया है, अत: कोणों का माप 90° है। रेखाओं की स्थिति भिन्न है, किंतु वे *l* के साथ समान कोण बनाती हैं। यदि रेखा *l* को दो नई रेखाओं के साथ तिर्यक रेखा के रूप में देखा जाए तो संगत कोणों का माप 90° होगा।




चित्र 5.22

जैसा कि हम जानते हैं कि ये संगत कोण हैं एवं समान हैं, अत: हम सुनिश्चित कर सकते हैं कि ये रेखाएँ समांतर हैं।

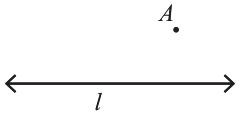
चित्र 5.22 में दर्शाए अनुसार समकोणक की लम्बी भुजा का उपयोग करके दो और समांतर रेखाएँ खींचिए।

आपको कैसे ज्ञात हुआ कि ये दोनों रेखाएँ समांतर हैं? क्या आप जाँच सकते हैं कि संगत कोण समान हैं या नहीं?

**शिक्षक हेतु टिप्पणी**—विद्यार्थियों को संगत कोणों की समानता की जाँच करने के लिए कोणों को मापने की अनुरेख विधि एवं चाँदे के उपयोग हेतु भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। संगत कोणों एवं समांतर रेखाओं के बीच संबंध बनाने के लिए उपयोग की जाने वाली भाषा पर ध्यान दीजिए। रेखा-युग्म की रेखाओं के एक-दूसरे के समांतर होने के लिए संगत कोणों की समानता आवश्यक एवं पर्याप्त, दोनों है।

## पता लगाइए

क्या आप रेखा $l$ के समांतर एक रेखा खींच सकते हैं जो बिंदु A से होकर जाती है? आप इसे अपने ज्यामिति बॉक्स के उपकरणों से कैसे करेंगे? अपनी विधि का उल्लेख कीजिए।



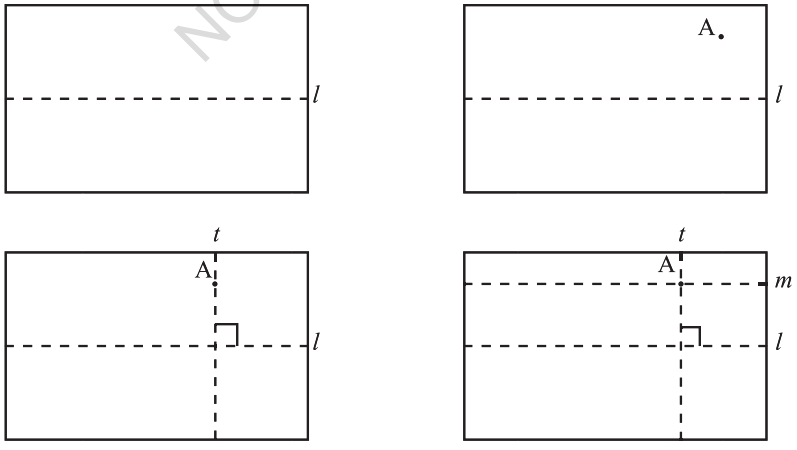

चित्र 5.23

## कागज मोड़कर समांतर रेखाएँ बनाना

आइए, कागज मोड़कर समांतर रेखाएँ बनाने का प्रयत्न करते हैं। किसी रेखा $l$ (मोड़ के रूप में दी हुई) के समांतर कोई रेखा किस प्रकार खींच सकते हैं जो रेखा बिंदु A से होकर गुजरती हो?

हम जानते हैं कि कैसे किसी कागज के टुकड़े को मोड़कर रेखा $l$ के लम्बवत रेखा प्राप्त की जा सकती है। अब $l$ की इस लम्बवत रेखा के लिए कागज को इस प्रकार मोड़ने का प्रयत्न कीजिए कि यह बिंदु A से होकर जाए। आइए, इस नए मोड़ से बनी रेखा को $t$ कहें।

अब $t$ के लम्बवत रेखा के लिए कागज को इस प्रकार मोड़िए जो पुनः बिंदु A से होकर जाए। आइए, इस रेखा को $m$ कहें। रेखाएँ $l$ एवं $m$ एक-दूसरे के समांतर रेखाएँ हैं।



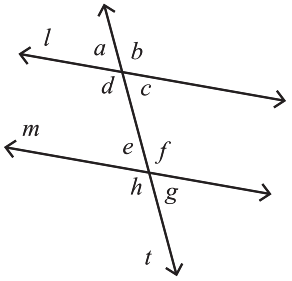

चित्र 5.24

© KSEEBS NOT TO BE REPUBLISHED

? रेखाएँ $l$ व $m$ एक-दूसरे के समांतर रेखाएँ क्यों हैं?

## 5.8 एकांतर कोण

चित्र 5.25 में $\angle d$, $\angle f$ का **एकांतर कोण (alternate angle)** कहलाता है एवं $\angle c$, $\angle e$ का एकांतर कोण कहलाता है।




चित्र 5.25

आप दिए गए कोण का एकांतर कोण ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए $\angle f$ का एकांतर कोण ज्ञात करने के लिए हम पहले $\angle f$ के संगत कोण को ज्ञात करेंगे जो $\angle b$ है एवं फिर $\angle b$ के शीर्षाभिमुख कोण को ज्ञात करेंगे जो कि $\angle d$ है।

? **गतिविधि 6**

चित्र 5.25 में यदि $\angle f$ का माप $120°$ है तो इसके एकांतर कोण $\angle d$ का माप क्या है?

यदि हमें $\angle b$ का माप ज्ञात हो तो क्या $\angle d$ का माप ज्ञात कर सकते हैं? क्योंकि ये दोनों शीर्षाभिमुख कोण हैं। याद रखिए कि शीर्षाभिमुख कोण सदैव समान होते हैं।

$\angle b$ का माप क्या है? इसका माप $120°$ है, क्योंकि यह $\angle f$ का संगत कोण है।

अतः $\angle d$ का माप भी $120°$ होगा।

वास्तव में, $\angle f = \angle b$, चाहे $\angle f$ की माप कुछ भी हो। क्यों? क्योंकि $\angle b$, $\angle f$ का संगत कोण है।

इसी प्रकार $\angle b = \angle d$ है, चाहे $\angle b$ का माप कुछ भी हो। क्यों? क्योंकि $\angle d$, $\angle b$ का शीर्षाभिमुख कोण है। अतः यह स्थिति निश्चित रूप से हमेशा ऐसी ही होगी—

$\angle f = \angle d$

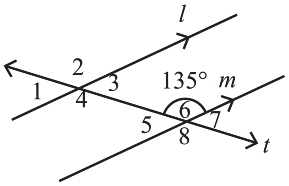
संगत कोणों के प्रति हमारी समझ से हमने बिना किसी मापन के उपयोग से यह सिद्ध कर दिया कि एकांतर कोण सदैव समान होते हैं।

समांतर रेखाओं के एक युग्म को तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर बनने वाले एकांतर कोण हमेशा एक-दूसरे के समान होते हैं।

? **उदाहरण 1** — चित्र 5.26 में समांतर रेखाएँ $l$ व $m$ तिर्यक रेखा $t$ द्वारा प्रतिच्छेद की जाती हैं। यदि $\angle 6$ का माप $135°$ हो तो अन्य कोणों का माप क्या होगा?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**हल**— यदि $\angle 6$ का माप $135°$ है तो $\angle 2$ का माप भी $135°$ ही होगा क्योंकि यह $\angle 6$ का संगत कोण है एवं रेखाएँ $l$ और $m$ समांतर हैं।



चित्र 5.26

$\angle 8$ का माप $135°$ है, क्योंकि यह $\angle 6$ का शीर्षाभिमुख कोण है।

$\angle 4$ का माप $135°$ है, क्योंकि यह $\angle 8$ का संगत कोण है।

$\angle 2$ का माप $135°$ है, क्योंकि यह $\angle 4$ का शीर्षाभिमुख कोण है।

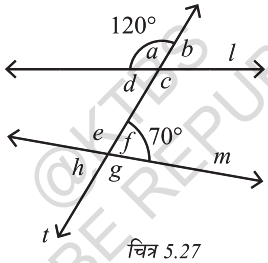
अतः $\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 6$ एवं $\angle 8$ सभी का माप $135°$ है।

$\angle 5$ व $\angle 6$ रैखिक युग्म बनाते हैं अर्थात दोनों का माप मिलकर $180°$ है। यदि $\angle 6$ का माप $135°$ है तो

$\angle 5 = 180° - 135° = 45°$

इसी प्रकार हम ज्ञात कर सकते हैं कि $\angle 1$, $\angle 3$ एवं $\angle 7$ का माप $45°$ है।

**उदाहरण 2**— चित्र 5.27 में रेखाएँ $l$ व $m$ तिर्यक रेखा $t$ द्वारा प्रतिच्छेद की जाती हैं। यदि $\angle a$ का माप $120°$ हो एवं $\angle f$ का माप $70°$ हो तो क्या रेखाएँ $l$ व $m$ एक-दूसरे के समांतर हैं?



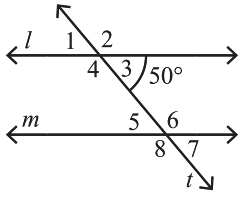
चित्र 5.27

**हल**— $\angle a$ का माप $120°$ है, अतः $\angle b$ का माप $60°$ होगा, क्योंकि $\angle a$ व $\angle b$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

$\angle b$ , $\angle f$ का संगत कोण है। यदि $l$ व $m$ समांतर हैं तो $\angle b$ को $\angle f$ के समान होना चाहिए, परंतु ये परस्पर समान नहीं हैं।

अत: रेखाएँ $l$ व $m$ एक-दूसरे के समांतर नहीं हैं, क्योंकि तिर्यक रेखा $t$ द्वारा बनने वाले संगत कोण एक-दूसरे के समान नहीं हैं।

**उदाहरण 3**—चित्र 5.28 में तिर्यक रेखा $t$ समांतर रेखाओं $l$ व $m$ को प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle 3$ का माप $50°$ है तो $\angle 6$ का माप क्या होगा?



चित्र 5.28

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

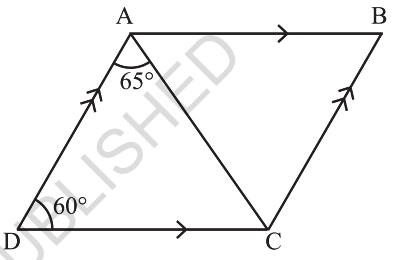
**हल**— $\angle 3$ का माप $50°$ है, अतः $\angle 2$ का माप $130°$ होगा, क्योंकि $\angle 2$ और $\angle 3$ रैखिक युग्म बनाते हैं तथा रैखिक युग्म के कोणों का योग हमेशा $180°$ होता है।

$\angle 2$ और $\angle 6$ संगत कोण हैं तथा उन्हें समान होना चाहिए, क्योंकि रेखाएँ $l$ व $m$ समांतर हैं। अतः $\angle 6$ का माप $130°$ है।

कोण $\angle 3$ और $\angle 6$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण (interior angle) कहलाते हैं।

क्या कोण $\angle 3$ और $\angle 6$ के बीच कोई संबंध है? आप $\angle 3$ के विभिन्न माप लेकर एवं $\angle 6$ के माप देखकर इस संबंध को ज्ञात करने का प्रयत्न कर सकते हैं। जब आपको यह संबंध ज्ञात हो जाए तो इसकी जाँच करने का प्रयत्न करें एवं सिद्ध करने का प्रयत्न करें कि क्या यह संबंध सदैव सत्य ही है। आपको ज्ञात होगा कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों का योग हमेशा $180°$ होता है।

**उदाहरण 4**— चित्र 5.29 में रेखाखंड AB रेखाखंड CD के समांतर है एवं रेखाखंड AD रेखाखंड BC के समांतर है। $\angle ADC$ का माप $60°$ है। $\angle CAB$, $\angle ABC$ एवं $\angle BCD$ के माप क्या हैं?



चित्र 5.29

**हल**— आइए, समांतर रेखाओं AB और CD को देखें। AD इन दोनों रेखाओं की एक तिर्यक रेखा है।

हम जानते हैं कि समांतर रेखाओं के युग्म को एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर उस तिर्यक रेखा के एक ही ओर बनने वाले अंतः कोणों का योग $180°$ होता है।

अत:,

$\angle ADC + \angle DAB = 180°$

या $60° + \angle DAB = 180°$

अतः $\angle DAB = 120°$

क्या हम इससे $\angle CAB$ को ज्ञात कर सकते हैं?

$\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$

अतः $120° = 65° + \angle CAB$

अतः $\angle CAB = 55°$

आइए, समांतर रेखाखंडों AD और BC को देखते हैं। इन दोनों को तिर्यक रेखा CD प्रतिच्छेद करती है। अतः $\angle ADC + \angle BCD = 180°$ है, क्योंकि ये तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत: कोण हैं। क्योंकि $\angle ADC$ का माप $60°$ दिया गया है इसलिए $\angle BCD = 120°$ है।

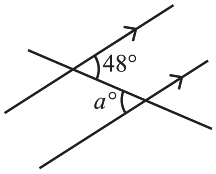
इसी प्रकार, हमें $\angle ABC = 60°$ प्राप्त होता है।

अतः चित्र 5.29 में $\angle CAB = 55°$, $\angle ABC = 60°$ एवं $\angle BCD = 120°$ है।

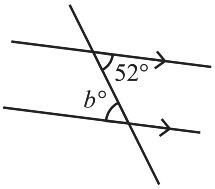
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

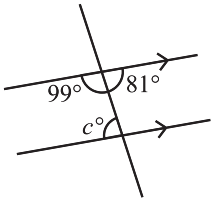
1. नीचे दिए गए चिह्नित कोणों को ज्ञात कीजिए—



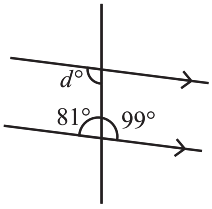

a = ☐



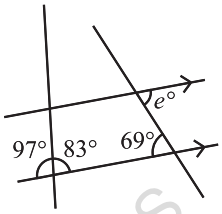

b = ☐



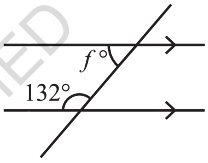

c = ☐



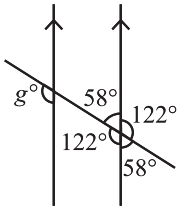

d = ☐



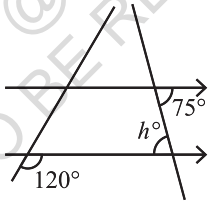

e = ☐



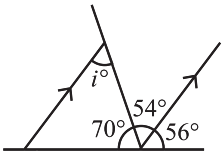

f = ☐



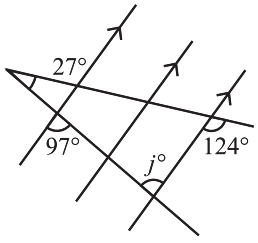

g = ☐




h = ☐




i = ☐

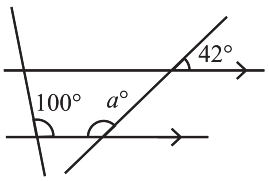



j = ☐

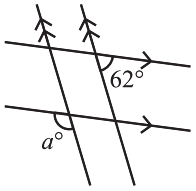
चित्र 5.30

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

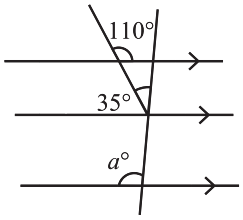
2. नीचे दी गई आकृतियों में संकेत $a$ द्वारा निर्देशित कोणों का मान ज्ञात कीजिए—



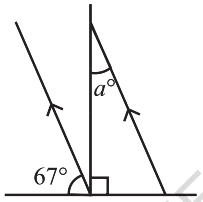

a = ☐




a = ☐



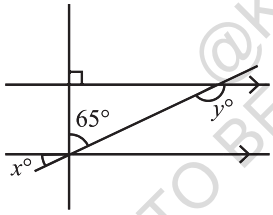

a = ☐

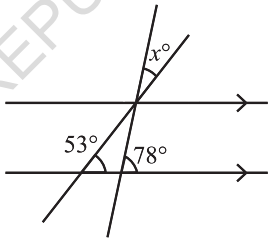



a = ☐

चित्र 5.31

3. नीचे दिए गए चित्रों में कोण $x$ और $y$ के क्या मान हैं?

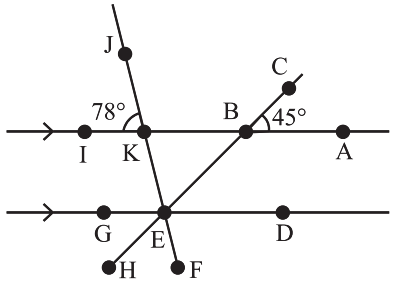



चित्र 5.32

$x$ ☐ $y$ ☐ $x$ ☐

4. चित्र 5.33 में $\angle ABC = 45°$ और $\angle IKJ = 78°$ है। $\angle GEH$, $\angle HEF$ और $\angle FED$ ज्ञात कीजिए।

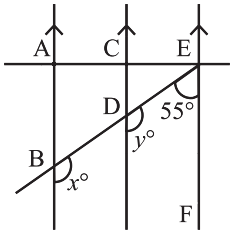



चित्र 5.33

$\angle GEH$ ☐ $\angle HEF$ ☐ $\angle FED$ ☐

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. चित्र 5.34 में AB, CD के समांतर है एवं CD, EF के समांतर है। साथ ही EA, AB पर लम्ब है। यदि $\angle BEF = 55°$ हो तो $x$ और $y$ के मान ज्ञात कीजिए।

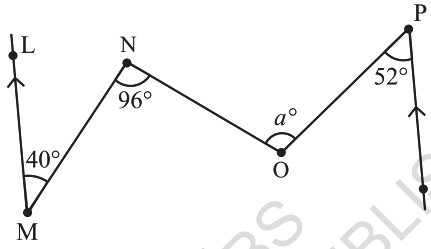



$x$ ☐

$y$ ☐

चित्र 5.34

6. चित्र 5.35 में कोण $\angle NOP$ का माप क्या है?



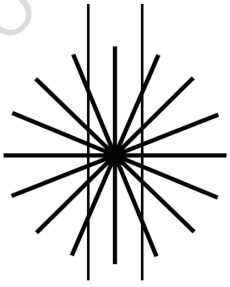

$a$ ☐

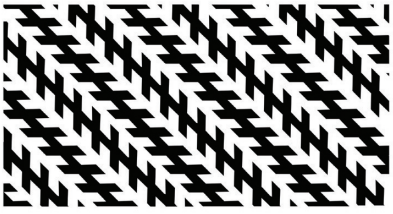
चित्र 5.35

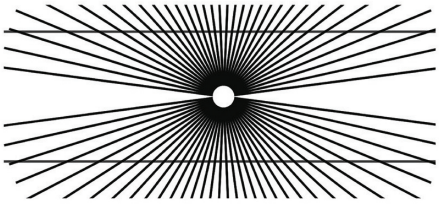
(**संकेत**—बिंदुओं N और O से होकर जाती हुई LM व PQ के समांतर रेखाएँ खींचिए।)

## 5.9 समांतर भ्रम

ऐसा प्रतीत हो रहा है कि यहाँ कोई समांतर रेखाएँ नहीं हैं। अथवा हैं भी?







इन भ्रमों के क्या कारण हैं?

@NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## सारांश

- जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं तो चार कोण बनते हैं। शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं एवं रैखिक युग्म के कोणों का योग 180° होता है।
- जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं एवं उनके बीच 90° के कोण बनते हैं (अर्थात सभी चारों कोण समान हों) तो रेखाएँ एक-दूसरे पर लम्ब कहलाती हैं।
- जब किसी समतल पर दो रेखाएँ एक-दूसरे को कभी प्रतिच्छेद नहीं करती तो वे समांतर रेखाएँ कहलाती हैं।
- जब एक रेखा $t$ अन्य रेखा-युग्म को प्रतिच्छेद करती है तो यह तिर्यक रेखा कहलाती है एवं यह 4 कोणों के 2 समूह बनाती है। पहले समूह के 4 कोणों में से प्रत्येक कोण का एक संगत कोण दूसरे समूह में होता है।
- जब एक तिर्यक रेखा समांतर रेखाओं के एक युग्म को प्रतिच्छेद करती है तो संगत कोण समान होते हैं। यदि एक तिर्यक रेखा एक रेखा-युग्म को प्रतिच्छेद करती है एवं संगत कोण समान हों तो रेखा-युग्म की रेखाएँ समांतर होती हैं।
- जब एक तिर्यक रेखा एक समांतर रेखा-युग्म को प्रतिच्छेद करती है तो एकांतर कोण समान होते हैं।
- एक तिर्यक रेखा द्वारा एक समांतर रेखा-युग्म को प्रतिच्छेद करने पर तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंत: कोणों का योग सदैव 180° होता है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

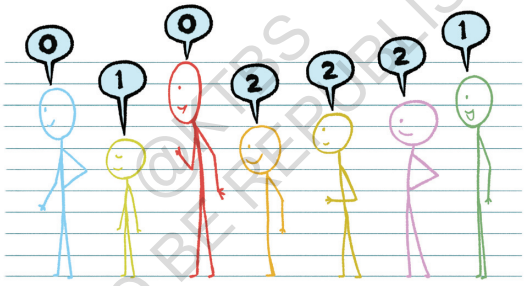
# 6 संख्याओं का खेल

0775CH06

## 6.1 संख्याएँ हमें बताती हैं

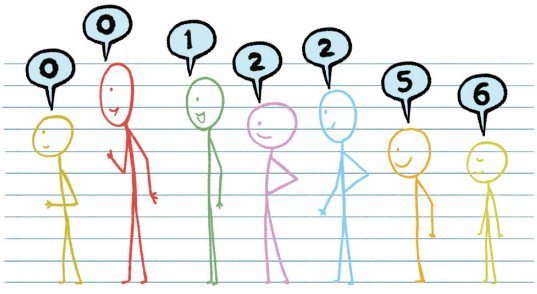
? नीचे दिए गए चित्र में विद्यमान संख्याएँ हमें क्या बताती हैं?

कक्षा 6 की गणित की पाठ्यपुस्तक को याद करें। अब वे संख्याओं को एक भिन्न नियम का उपयोग करते हुए पुकारते हैं।




? आपके विचार से इन संख्याओं का क्या तात्पर्य है?

बच्चे स्वयं को पुनर्व्यवस्थित करते हैं तथा प्रत्येक बच्चा इस नई व्यवस्था के आधार पर एक संख्या बोलता है।

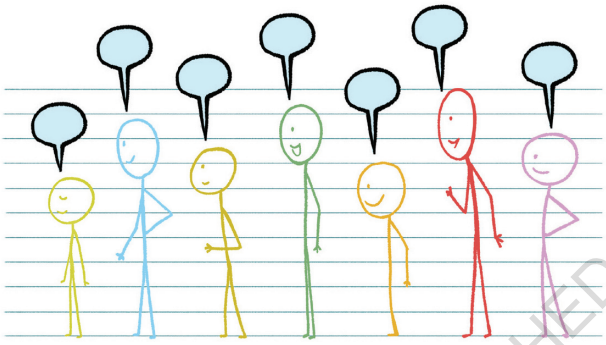



? क्या आप पता लगा पाए कि ये संख्याएँ क्या बता रही हैं? देखिए और ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

यहाँ एक नियम है— प्रत्येक बच्चा अपने सम्मुख खड़े उन बच्चों की संख्या बोलता है जो लंबाई में उससे बड़े हैं। जाँच कीजिए कि क्या प्रत्येक बच्चे द्वारा बोली गई संख्या दोनों व्यवस्थाओं में इस नियम के साथ मेल खाती है।

? उस संख्या को लिखिए जो प्रत्येक बच्चे को इस नियम के आधार पर नीचे दर्शाई गई व्यवस्था के लिए बोलनी चाहिए।



## ? पता लगाइए

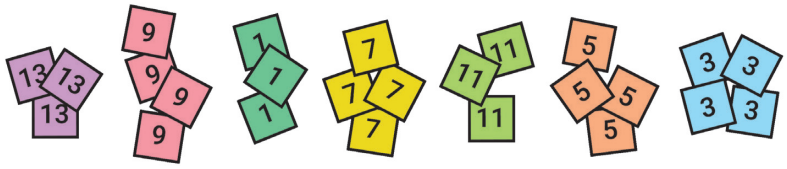
1. इस पुस्तक के अंत में दिए गए स्टिकर चित्रों के कटआउट को इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए अथवा रेखा खंड खींचकर उसकी ऊँचाई के आधार पर ऐसी व्यवस्था बनाइए कि उनका अनुक्रम निम्नलिखित रूप में पढ़ा जाए—
   (a) 0, 1, 1, 2, 4, 1, 5
   (b) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
   (c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
   (d) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0
   (e) 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
   (f) 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3
2. नीचे दिए गए कथनों में से प्रत्येक के बारे में सोचिए तथा पहचान कीजिए कि यह कथन *सदैव सत्य है* या *केवल कभी-कभी सत्य है* या *सदैव असत्य* है। अपने तर्क को साझा कीजिए।
   (a) यदि कोई व्यक्ति '0' बोलता है तो ऐसे व्यक्ति उस समूह में सबसे लंबे हैं।
   (b) यदि कोई व्यक्ति सबसे लंबा है तो उसकी संख्या '0' है।
   (c) सबसे पहले व्यक्ति की संख्या '0' है।
   (d) यदि कोई व्यक्ति पंक्ति में प्रथम या अंतिम नहीं है (अर्थात ऐसे व्यक्ति जो कहीं बीच में खड़े हैं) तो वह '0' नहीं बोल सकता है।
   (e) वह व्यक्ति जो सबसे बड़ी संख्या बोलता है, वह सबसे छोटा है।
   (f) 8 व्यक्तियों के समूह में अधिकतम संभावित संख्या क्या है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## 6.2 समानता चयन

किशोर के पास कुछ संख्या पत्रक हैं तथा वह किसी पहेली पर कार्य कर रहा है। वहाँ 5 डिब्बे हैं तथा प्रत्येक डिब्बे में केवल 1 संख्या कार्ड ही होना चाहिए। इन डिब्बों में रखे कार्डों की संख्याओं का योग 30 होना चाहिए। क्या ऐसा करने की कोई विधि ज्ञात करने में आप उसकी सहायता कर सकते हैं?

☐ + ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = 30




क्या आप पता कर सकते हैं कि किन 5 कार्डों के योग से योगफल 30 प्राप्त होगा? क्या ऐसा करना संभव है? इस संग्रह में से 5 कार्ड चुनने की अनेक विधियाँ हैं।

क्या सभी संभावनाओं की जाँच किए बिना एक हल ज्ञात करने की कोई विधि है?

आइए, पता लगाते हैं।

? कुछ सम संख्याओं को जोड़िए। आपको किस प्रकार की संख्या प्राप्त होती है? क्या इससे कोई अंतर पड़ता है कि आप ऐसी कितनी संख्याएँ जोड़ते हैं?

किसी भी सम संख्या को बिना शेषफल वाले युग्मों में व्यवस्थित किया जा सकता है। यहाँ कुछ सम संख्याओं को युग्मों में व्यवस्थित करके दर्शाया गया है।

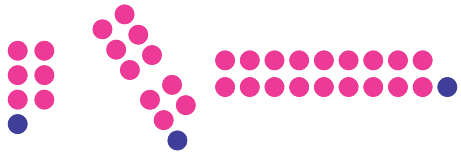


जैसा कि हम चित्र में देख रहे हैं कि कितनी भी सम संख्याओं को जोड़ने पर प्राप्त एक संख्या को बिना किसी शेष संख्या के युग्मों में व्यवस्थित किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि यह योग सदैव एक सम संख्या होगा।



? अब कुछ विषम संख्याओं को लेकर जोड़िए। आपको किस प्रकार की संख्या प्राप्त होती है? क्या इससे कोई अंतर पड़ता है कि आप कितनी विषम संख्याएँ जोड़ते हैं?

विषम संख्याओं को युग्मों में व्यवस्थित नहीं किया जा सकता है। एक विषम संख्या युग्मों के संग्रह से एक अधिक होती है। कुछ विषम संख्याएँ नीचे दशाई गई हैं—



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्या आप एक विषम संख्या को युग्मों के संग्रह से एक कम संख्या के रूप में भी सोच सकते हैं?

यह चित्र दर्शाता है कि दो विषम संख्याओं का योग सदैव सम होता है। यहाँ दिए गए अन्य चित्र भी इस उपपत्ति को सत्यापित करने के उदाहरण है!




? तीन विषम संख्याओं को जोड़ने के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या परिणामी योग को युग्मों के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है?

? पता लगाइए कि (a) 4 विषम संख्याओं के, (b) 5 विषम संख्याओं के तथा (c) 6 विषम संख्याओं के योग की स्थिति में क्या होता है?

अब उस पहेली पर वापस आइए, जिसे किशोर हल करने का प्रयास कर रहा था। वहाँ 5 रिक्त डिब्बे हैं। इसका अर्थ है कि उसके पास विषम संख्या में डिब्बे हैं। सभी संख्या कार्डों पर विषम संख्याएँ अंकित हैं।

इन्हें जोड़ने पर 30 प्राप्त होना चाहिए जो कि एक सम संख्या है। क्योंकि किन्हीं 5 विषम संख्याओं को जोड़ने पर कभी भी एक सम संख्या प्राप्त नहीं होगी। अत: किशोर इन कार्डों को डिब्बों में कभी भी इस प्रकार व्यवस्थित नहीं कर सकता कि इनका योग 30 प्राप्त हो।

? दो भाई-बहन मार्टिन और मारिया का जन्म ठीक एक वर्ष के अंतराल में हुआ। आज वे अपना जन्मदिन मना रहे हैं। मारिया कहती है कि उनकी आयु का योग 112 वर्ष है। क्या यह संभव है? यदि हाँ, तो क्यों? यदि नहीं, तो क्यों नहीं?

क्योंकि उनका जन्म एक वर्ष के अंतराल में हुआ है इसलिए उनकी आयु (दो) क्रमागत संख्याएँ होंगी। क्या उनकी आयु 51 और 52 वर्ष हो सकती है? 51+52 = 103 है। कुछ अन्य क्रमागत संख्याएँ लेकर प्रयास कीजिए और देखिए कि क्या उनका योग 112 है।

गणन संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, ... में सम और विषम संख्याएँ एकांतर रूप से (एक-एक छोड़कर) आ रही हैं। किन्हीं भी दो क्रमागत संख्याओं में एक सदैव सम संख्या होगी तथा दूसरी सदैव विषम संख्या होगी!

एक सम संख्या और एक विषम संख्या का योगफल क्या होगा? हम देख सकते हैं कि इनके योग को युग्मों में व्यवस्थित नहीं किया जा सकता है इसलिए यह एक विषम संख्या होगी।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्योंकि 112 एक सम संख्या है तथा मार्टिन और मारिया की आयु (वर्षों में) क्रमागत संख्याएँ हैं, अत: इनका योग 112 नहीं हो सकता।

हम **समानता** शब्द का उपयोग सम या विषम होने के गुण को व्यक्त करने में करते हैं। उदाहरणार्थ, किन्हीं दो क्रमागत संख्याओं का योग एक विषम संख्या होना एक समानता है। इसी प्रकार किन्हीं दो विषम संख्याओं का योग एक सम संख्या होना एक समानता है।

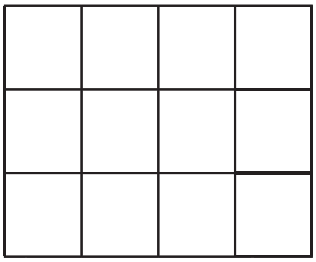
## पता लगाइए

1. विषम और सम संख्याओं के चित्रीय निरूपणों की अपनी समझ का उपयोग करते हुए निम्नलिखित में से प्रत्येक योग की समानता ज्ञात कीजिए—
   (a) 2 सम संख्याओं और 2 विषम संख्याओं का योग (सम + सम + विषम + विषम)
   (b) 2 विषम संख्याओं और 3 सम संख्याओं का योग
   (c) 5 सम संख्याओं का योग
   (d) 8 विषम संख्याओं का योग
2. लता के पास उसके गुल्लक में ₹1 के सिक्के विषम संख्या में हैं, ₹5 के सिक्के विषम संख्या में हैं तथा ₹10 के सिक्के सम संख्या में हैं। उसे कुल धनराशि की गणना करने पर ₹205 प्राप्त हुए। क्या उसने गणना में कोई त्रुटि की? यदि कोई त्रुटि नहीं हुई तो उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के हो सकते हैं? यदि उससे कोई त्रुटि हुई तो स्पष्ट कीजिए कि ऐसा क्यों हुआ होगा?
3. हम जानते हैं कि—
   (a) सम + सम = सम
   (b) विषम + विषम = सम
   (c) सम + विषम = विषम

   इसी प्रकार नीचे दी गई स्थितियों के लिए समानता ज्ञात कीजिए—
   (d) सम – सम = _____
   (e) विषम – विषम = _____
   (f) सम – विषम = _____
   (g) विषम – सम = _____

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## जाल (ग्रिड) में छोटे वर्ग



एक 3 × 3 ग्रिड में 9 छोटे वर्ग हैं, जो एक विषम संख्या है। वहीं,
एक 3 × 4 ग्रिड में 12 छोटे वर्ग होते हैं, जो एक सम संख्या है।
यहाँ 3 × 4 की समानता सम है।

किसी एक ग्रिड की विमाएँ (विस्तार) दी गई होने पर क्या आप गुणनफल को परिकलित किए बिना छोटे वर्गों की संख्या की समानता बता सकते हैं?

? इन ग्रिड में छोटे वर्गों की संख्या की समानता ज्ञात कीजिए—

(a) $27 \times 13$
(b) $42 \times 78$
(c) $135 \times 654$

## व्यंजकों की समानता

बीजीय व्यंजक $3n+4$ पर विचार कीजिए। $n$ के विभिन्न मानों के लिए इस व्यंजक की भिन्न-भिन्न समानताएँ हैं—

| $n$ | $3n + 4$ का मान | मान की समानता |
|---|---|---|
| 3 | 13 | विषम |
| 8 | 28 | सम |
| 10 | 34 | सम |

? एक ऐसा व्यंजक लिखिए जिसकी समानता सदैव एक सम है।

इसके कुछ उदाहरण हैं, जैसे — $100p$ और $48w-2$, इसी प्रकार के और अधिक व्यंजक ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

? ऐसे व्यंजक लिखिए जिनकी समानता सदैव विषम है।

? $3n+4$ जैसे कुछ अन्य व्यंजक लिखिए जिनकी समानता या तो विषम हो सकती है या फिर सम हो सकती है।

? व्यंजक $6k+2$ का मान 8, 14, 20, ... प्राप्त होता है। ($k = 1, 2, 3, ...,$ के लिए) इसमें अनेक सम संख्याएँ छूट गई हैं।

? क्या ऐसे व्यंजक हैं जिनके उपयोग से हम सभी सम संख्याओं की सूची बना सकते हैं?
(**संकेत** — सभी सम संख्याओं का एक गुणनखंड 2 है।)

? क्या ऐसे व्यंजक हैं जिनके उपयोग से हम सभी विषम संख्याओं की सूची बना सकते हैं?

हम पहले देख चुके हैं कि किस प्रकार हम 4 के गुणजों के अनुक्रम में $n$वें पद को व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ $n$ एक अक्षर-संख्या है और यह उस अनुक्रम में एक स्थान व्यक्त करती है (उदाहरणार्थ पहला, तेइसवाँ, एक सौ सत्रहवाँ इत्यादि)।

? 2 के गुणजों का $n$वाँ पद क्या होगा? अथवा $n$वीं सम संख्या क्या है?

आइए, इस प्रश्न के उत्तर के लिए विषम संख्याओं पर विचार करें।

? 100वीं विषम संख्या क्या है?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए निम्नलिखित प्रश्न पर विचार कीजिए—

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? 100वीं सम संख्या क्या है?

यह $2 \times 100 = 200$ है।

क्या यह 100वीं विषम संख्या ज्ञात करने में हमारी सहायता करता है? आइए, सम और विषम संख्याओं वाले अनुक्रमों की पदानुसार तुलना करें।

**सम संख्याएँ—** 2, 4, 6, 8, 10, 12,...

**विषम संख्याएँ—** 1, 3, 5, 7, 9, 11,...

हम देखते हैं कि किसी भी स्थान पर विषम संख्या अनुक्रम की संख्या का मान, सम संख्या अनुक्रम की संख्या के मान से एक कम है। इस प्रकार 100वीं विषम संख्या $200 - 1 = 199$ है।

? $n$वीं विषम संख्या ज्ञात करने के लिए एक सूत्र लिखिए।

आइए, सर्वप्रथम उस विधि का वर्णन करें जो हमने एक दिए हुए स्थान पर विषम संख्या ज्ञात करने के लिए सीखी थी—

(a) उस स्थान पर सम संख्या प्राप्त कीजिए। यह उस स्थान संख्या का 2 गुना होती है।

(b) फिर इस सम संख्या में से 1 घटाइए।

हम इस प्रक्रिया को व्यंजकों के रूप में लिखने पर प्राप्त करते हैं—

(a) $2n$ (b) $2n - 1$

इस प्रकार $2n$ वह सूत्र है जो $n$वीं सम संख्या प्रदान करता है तथा $2n - 1$ वह सूत्र है जो $n$वीं विषम संख्या प्रदान करता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 6.3 जाल (ग्रिड) में कुछ खोज

इस $3 \times 3$ ग्रिड को देखिए। यह एक सरल नियम के अनुसार भरा गया है। इसमें बिना किसी पुनरावृत्ति के 1 से 9 तक की संख्याओं का उपयोग कीजिए। इस ग्रिड के बाहर लिखी संख्याओं पर घेरा लगाया गया है।

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 5 | 16 |
| 6 | 1 | 2 | 9 |
| 3 | 9 | 8 | 20 |
| 13 | 17 | 15 | |

? क्या आप पता लगा पाए हैं कि घेरा लगी हुई संख्याएँ क्या निरूपित करती हैं?

पीले घेरों में लिखी संख्याएँ संगत पंक्तियों और स्तंभों का योग हैं।

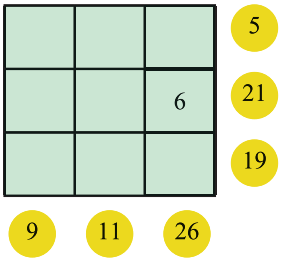
ऊपर बताए गए नियम के आधार पर नीचे दिए गए ग्रिड भरिए—

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | | | 13 |
| | | | 14 |
| | | 5 | 18 |
| 24 | 9 | 12 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 24 |
| 4 | | | 15 |
| | | 3 | 6 |
| 12 | 16 | 17 | |

? इसी प्रकार के कुछ प्रश्न स्वयं बनाइए तथा अपने सहपाठियों को चुनौती दीजिए।

दी गई समस्या को हल करने का प्रयास कीजिए?




? आपने अनुभव किया होगा कि इस ग्रिड के लिए एक हल ज्ञात करना संभव नहीं है। ऐसी स्थिति क्यों है?

न्यूनतम संभावित योग $6 = 1 + 2 + 3$ है। अधिकतम संभावित योग $24 = 9 + 8 + 7$ है। स्पष्टतः घेरे के अंदर की कोई भी संख्या 6 से कम एवं 24 से अधिक नहीं हो सकती है। इस ग्रिड में योग 5 और 26 दिए हुए हैं। अत: यह असंभव है!

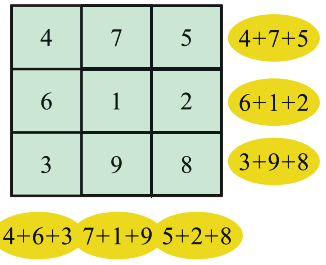
हमारे द्वारा पहले हल किए गए ग्रिड में किशोर ने देखा था कि घेरों में लगी सभी संख्याओं का योग सदैव 90 था। साथ ही विद्या ने देखा था कि सभी तीनों पंक्तियों या सभी तीनों स्तंभों के लिए घेरों में लिखी संख्याओं का योग सदैव 45 था। जाँच कीजिए कि क्या यह आपके द्वारा पहले हल किए गए ग्रिड के लिए भी सत्य है।




? पंक्तियों के योग अथवा स्तंभों के योग को जोड़ने पर योग सदैव 45 क्यों होना चाहिए?

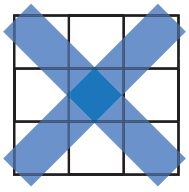
इस ग्रिड से हम देख सकते हैं कि सभी पंक्तियों के योग को जोड़ने पर प्राप्त योग 1 से 9 तक की संख्याओं के योग के समान होगा। ऐसा ही स्तंभों के योग के लिए भी देखा जा सकता है। 1 से 9 तक की संख्याओं का योग

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$




यदि प्रत्येक पंक्ति प्रत्येक स्तंभ तथा प्रत्येक विकर्ण में लिखी संख्याओं का योग समान संख्या हो तो उन संख्याओं का एक वर्गाकार ग्रिड **जादुई वर्ग (magic square)** कहलाता है। यह योग **जादुई योग** कहलाता है। विकर्णों को चित्र में दर्शाया गया है।

संख्याओं द्वारा यादृच्छिक रूप से ग्रिड को भरकर एक जादुई वर्ग की रचना करने का प्रयास करना कठिन हो सकता है। इसका कारण यह है कि पुनरावृत्ति के बिना 1 से 9 तक की संख्याओं के उपयोग से एक $3 \times 3$ ग्रिड को भरने की अनेक विधियाँ हैं। वस्तुतः यह ज्ञात किया जा सकता है कि इसके लिए ऐसी ठीक 3,62,880 विधियाँ हैं। आपको आश्चर्य होगा कि इस प्रकार ग्रिड को भरने की विधियों की संख्या सभी संख्याओं को बिना लिखे ही ज्ञात की जा सकती है। हम बाद की कक्षाओं में देखेंगे कि ऐसा किस प्रकार करते हैं।



इसके स्थान पर हमें एक जादुई वर्ग बनाने के लिए क्रमबद्ध विधि से आगे बढ़ाना चाहिए। इसके लिए आइए स्वयं से कुछ प्रश्न पूछें।

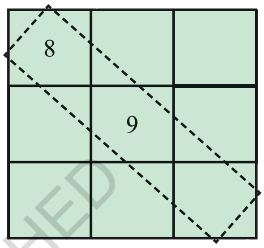
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

1. जादुई योग क्या हो सकता है? क्या यह कोई भी संख्या हो सकती है?

आइए, एक क्षण के लिए केवल पंक्ति के योगों पर अपना ध्यान केंद्रित करें। हम देख चुके हैं कि 1 से 9 तक की संख्याओं वाली एक 3 × 3 ग्रिड में पंक्ति योग की संख्याओं का कुल योग सदैव 45 होगा। क्योंकि एक जादुई वर्ग में सभी पंक्ति योग समान होते हैं तथा इन्हें जोड़ने पर 45 प्राप्त होता है। अत: इनमें से प्रत्येक को 15 होना चाहिए। इस प्रकार हम निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं—

**प्रेक्षण 1—** 1 से 9 तक की संख्याओं के उपयोग से बनाए गए एक जादुई वर्ग में जादुई योग 15 होना चाहिए।

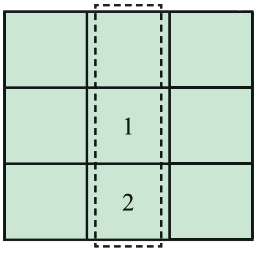
2. किसी जादुई वर्ग के केंद्र पर संभवतः कौन-कौन सी संख्याएँ विद्यमान हो सकती हैं?




आइए, इन संभावनाओं पर एक-एक करके विचार करें। क्या केंद्रीय संख्या 9 हो सकती है? यदि ऐसा है तो 8 को किसी अन्य वर्ग में आना चाहिए। उदाहरण के लिए इस वर्ग में 8 + 9 + अन्य संख्या = 15 प्राप्त होनी चाहिए।

परंतु यह संभव नहीं है। क्योंकि हम 8 को किसी भी स्थान पर लिखें, पर यह समस्या सदैव रहेगी।

अत: 9 केंद्र के स्थान पर नहीं आ सकता। क्या केंद्रीय संख्या 1 हो सकती है?



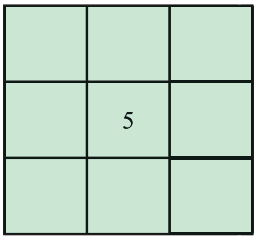

यदि ऐसा है तो 2 को किसी अन्य वर्ग में अवश्य आना चाहिए।

यहाँ हमें 2 + 1 + अन्य संख्या = 15 अवश्य प्राप्त होनी चाहिए। परंतु यह संभव नहीं है, क्योंकि हम केवल 1 से 9 तक की संख्याओं का ही उपयोग कर रहे हैं। चाहे हम 2 को किसी भी स्थान पर लिखें परंतु यह समस्या सदैव रहेगी।

अतः केंद्र पर संख्या 1 भी नहीं आ सकती है।

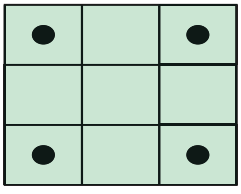
? ऐसे ही तर्क का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि 1 से 9 तक की संख्याओं में से कौन-सी संख्याएँ केंद्र पर विद्यमान हो सकती हैं।

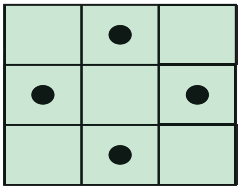
इस खोज के द्वारा हम निम्नलिखित रोचक प्रेक्षण पर पहुँच जाएँगे—




**प्रेक्षण 2—** 1 से 9 तक की संख्याओं द्वारा भरे गए एक जादुई वर्ग के केंद्र पर प्रकट होने वाली संख्या 5 ही होनी चाहिए।

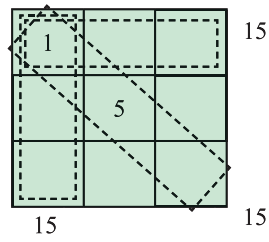
आइए, अब देखें कि एक जादुई वर्ग में न्यूनतम संख्या (1) और अधिकतम संख्या (9) कहाँ आनी चाहिए। हमारा दूसरा प्रेक्षण हमें बताता है कि इन्हें परिसीमा स्थानों में से किसी स्थान पर आना चाहिए। आइए, इन स्थानों का दो श्रेणियों में वर्गीकरण करें—





© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्या 1 कोने के वर्ग में विद्यमान हो सकता है? उदाहरणार्थ क्या इसे संलग्न वर्ग के अनुसार रख सकते हैं?




? यदि हाँ, तो 15 प्राप्त करने के लिए दो अन्य संख्याओं के साथ 1 जोड़ने की तीन विधियाँ होनी चाहिए। हम $1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 15$ प्राप्त करते हैं। क्या कोई अन्य संयोजन संभव है?

? इसी प्रकार क्या 9 को किसी कोने के वर्ग में रखा जा सकता है?

**प्रेक्षण 3 —** संख्याएँ 1 और 9 किसी कोने के स्थान पर विद्यमान नहीं हो सकती हैं, अत: इन्हें मध्य-स्थानों में से किसी स्थान पर आना चाहिए।

? क्या आप 1 और 9 के लिए अन्य संभव स्थान ज्ञात कर सकते हैं?

अब हमारे पास जादुई वर्ग के लिए एक पूर्ण पंक्ति या एक पूर्ण स्तंभ है!

इसे पूरा करने का प्रयास कीजिए!

(**संकेत** — सर्वप्रथम 1 और 9 वाली पंक्ति को भरिए।)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 1 | 5 | 9 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| | 5 | |
| | 9 | |

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## ? पता लगाइए

1. 1 से 9 तक की संख्याओं के उपयोग से कितने भिन्न-भिन्न जादुई वर्ग बनाए जा सकते हैं?
2. 2 से 10 तक की संख्याओं के उपयोग से एक जादुई वर्ग की रचना कीजिए। ऐसा करने के लिए आप कौन-सी युक्ति अपनाएँगे? इसकी तुलना 1 से 9 तक की संख्याओं से बनाए गए जादुई वर्गों से कीजिए।
3. एक जादुई वर्ग लीजिए तथा
   (a) प्रत्येक संख्या में 1 की वृद्धि कीजिए।
   (b) प्रत्येक संख्या को दुगुना कीजिए।

   क्या प्रत्येक स्थिति में परिणामी ग्रिड भी एक जादुई वर्ग है? प्रत्येक स्थिति में जादुई योग में किस प्रकार का परिवर्तन होता है?
4. एक जादुई वर्ग पर अन्य कौन-कौन सी संक्रियाएँ की जा सकती हैं ताकि एक अन्य जादुई वर्ग प्राप्त हो जाए?
5. किन्हीं भी 9 क्रमागत संख्याओं के संग्रह के उपयोग से (जैसे 2 – 10, 3 – 11, 9 – 17, इत्यादि) एक जादुई वर्ग की रचना करने की विधियों पर चर्चा कीजिए।

## एक 3 × 3 जादुई वर्ग का व्यापकीकरण करना

हम यह व्याख्या कर सकते हैं कि जादुई वर्ग की संख्याएँ परस्पर किस प्रकार संबंधित हैं अर्थात जादुई वर्ग की संरचना किस प्रकार की जाती है।

? उन जादुई वर्गों में से किसी एक वर्ग का चयन कीजिए जिन्हें आपने क्रमागत संख्याओं का उपयोग करके बनाया है। यदि केंद्र पर स्थित संख्या की अक्षर संख्या $m$ है तो व्यक्त कीजिए कि अन्य संख्याएँ किस प्रकार $m$ से संबंधित हैं, अर्थात वे m से कितनी अधिक या कम हैं।

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | $m$ | |
| | | |

(**संकेत** — स्मरण कीजिए कि हमने बीजीय व्यंजकों के अध्याय में किस प्रकार एक तिथि पत्र (कैलेंडर) मास में $2 \times 2$ ग्रिड की व्याख्या की थी।)

? एक बार जब व्यापकीकृत रूप प्राप्त हो जाए तब अपने प्रेक्षणों को कक्षा के साथ साझा कीजिए।

गणित चर्चा

? **पता लगाइए**

1. इस व्यापकीकृत रूप के उपयोग से वह जादुई वर्ग ज्ञात कीजिए जब केंद्रीय संख्या 25 है।
2. किसी पंक्ति, स्तंभ या विकर्ण के तीन पदों को जोड़ने पर कौन-सा व्यंजक प्राप्त होता है?
3. निम्नलिखित स्थितियों के परिणाम लिखिए —
   (a) व्यापकीकृत रूप के प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर।
   (b) व्यापकीकृत रूप के प्रत्येक पद को दुगुना करने पर।
4. एक जादुई वर्ग की रचना कीजिए जिसका जादुई योग 60 हो।
5. क्या 9 अक्रमागत संख्याओं को भरकर एक जादुई वर्ग प्राप्त करना संभव है?

प्रयास करें

## सबसे पहला 4 × 4 जादुई वर्ग

सबसे पहला अभिलेखित $4 \times 4$ जादुई वर्ग भारत के पार्श्वनाथ जैन मंदिर खजुराहो में दसवीं शताब्दी के एक शिलालेख में पाया गया है तथा इसे 'चौतीसा यंत्र' कहा जाता है।



| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 3 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

*भारत में सर्वप्रथम अभिलेखित 4 × 4 जादुई वर्ग, चौतीसा यंत्र, खजुराहो, भारत*

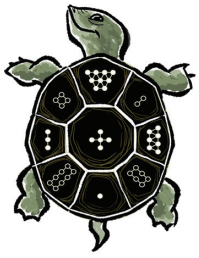
चौतीस अर्थात 34 है। आपके विचार से उन लोगों ने इसे 'चौतीसा यंत्र' क्यों कहा?

इस जादुई वर्ग की प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ और विकर्ण की संख्याओं का योग 34 है।

क्या आप इस वर्ग में 4 संख्याओं के अन्य प्रतिरूप (पैटर्न) ज्ञात कर सकते हैं जिनमें प्रत्येक पंक्ति अथवा स्तंभ या विकर्ण की 4 संख्याओं का योग 34 हो?

© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

## इतिहास और संस्कृति में जादुई वर्ग



सर्वप्रथम अभिलेखित जादुई वर्ग की रचना 2000 से अधिक वर्षों पूर्व प्राचीन चीन में हुई थी जिसे लो शू वर्ग कहा जाता है। किवंदंती (दन्त कथा) है कि लो नदी में आई एक विपत्तिकारक बाढ़ के समय ईश्वर ने लोगों को बचाने के लिए एक कछुए को भेजा था। वह कछुआ अपनी पीठ पर एक $3 \times 3$ ग्रिड लाया था जिस पर 1 से 9 तक की संख्याएँ एक जादुई पैटर्न में व्यवस्थित थीं।

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

विश्व के विभिन्न भागों में विभिन्न समय पर जादुई वर्गों का अध्ययन किया गया जिनमें भारत, जापान, मध्य एशिया और यूरोप सम्मिलित हैं।

भारतीय गणितज्ञों ने वृहत-रूप से जादुई वर्गों पर कार्य किया है। इनके द्वारा रचे गए ग्रंथों में इन जादुई वर्गों की रचना करने की व्यापक विधियों का वर्णन किया गया है, जिनकी हमने ऊपर चर्चा की है कि भारतीय गणितज्ञों का कार्य केवल $3 \times 3$ और $4 \times 4$ के ग्रिड बनाने तक ही सीमित नहीं रहा, अपितु इन्होंने इन्हें $5 \times 5$ तथा अन्य बड़े वर्ग के ग्रिड के लिए भी विस्तृत किया। हम इनका अध्ययन बाद की कक्षाओं में करेंगे।



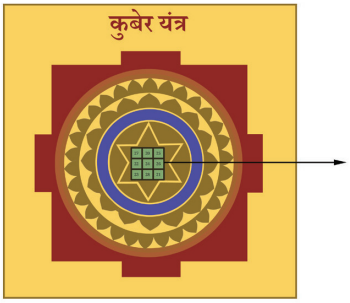
जादुई वर्गों का प्रकट होना अध्ययनशील गणितीय कार्यों तक ही सीमित नहीं रहा। ये भारत के अनेक स्थानों पर पाए गए हैं। दाईं ओर संलग्न चित्र एक $3 \times 3$ जादुई वर्ग का है जो तमिलनाडु के पलानी नामक स्थान के एक मंदिर के एक स्तंभ पर प्राप्त हुआ है। इस मंदिर का निर्माण लगभग आठवीं शताब्दी में किया गया था।

$3 \times 3$ जादुई वर्ग भारत के घरों और दुकानों पर भी पाए जा सकते हैं। नीचे दर्शाया गया 'नवग्रह यंत्र' भी एक ऐसा ही उदाहरण है।




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक ग्रह के साथ एक भिन्न जादुई योग संबद्ध है। नीचे 'कुबेर यंत्र' का एक चित्र दर्शाया गया है—




| | | |
|---|---|---|
| 27 | 20 | 25 |
| 22 | 24 | 26 |
| 23 | 28 | 21 |

## 6.4 प्रकृति का मनपसंद अनुक्रम— विरहांक-फिबोनाची संख्याएँ!

अनुक्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . (विरहांक-फिबोनाची संख्याएँ) संपूर्ण गणित में सबसे अधिक प्रसिद्ध अनुक्रमों में से एक है। यह कला, विज्ञान और गणित की दुनिया प्रत्येक स्थान पर देखने को मिल जाता है। यद्यपि ये संख्याएँ अनेक बार विज्ञान के क्षेत्र में प्राप्त होती रहती हैं, यह उल्लेखनीय है कि इन संख्याओं की सर्वप्रथम खोज कला (विशिष्ट रूप से कविता) के संदर्भ में हुई थी।

इस प्रकार विरहांक-फिबोनाची संख्याएँ कला, विज्ञान और गणित के बीच निकटता के संबंधों का एक सुंदर दृष्टांत प्रदान करती हैं।

### विरहांक संख्याओं की खोज

विरहांक संख्याएँ सर्वप्रथम हजारों वर्ष पूर्व संस्कृत और प्राकृत भाषाविदों के ग्रंथों में उनकी काव्यात्मक रचनाओं के अध्ययन में उद्धृत हुईं!

अनेक भारतीय भाषाओं, जैसे— प्राकृत, संस्कृत, मराठी, मलयालम, तमिल और तेलुगु की काव्यात्मक रचनाओं में प्रत्येक शब्दांश* (syllable) लघु-गुरु (दीर्घ) के रूप में वर्गीकृत हैं।

एक गुरु शब्दांश का एक लघु शब्दांश की तुलना में लंबे समय तक उच्चारण किया जाता है— वस्तुत: ठीक दुगुने समय तक। इसके गायन के समय एक लघु शब्दांश समय की एक ताल पर समाप्त होता है तथा गुरु शब्दांश समय के दो तालों (beats) पर समाप्त होता है।

श्लोक गायन की इस सरल व्यवस्था से असंख्य गणितीय प्रश्न उत्पन्न हुए जिन पर इन भाषाओं के प्राचीन कवियों ने विस्तृत रूप से विचार किया। श्लोकों से संबंधित प्रश्नों को पूछने और उनके उत्तर देने की प्रक्रिया में अनेक महत्वपूर्ण गणितीय खोजें की गईं।

* शब्दांश— यह शब्द का वह भाग है जिसमें एक स्तरध्वनि होती है एवं इसे एक शब्दांश को अक्षर भी कहा जाता है।

© KIDS NOT TO BE REPUBLISHED

इन प्रश्नों में एक विशेष रूप से महत्वपूर्ण प्रश्न था कि लघु शब्दांशों (1 ताल) और गुरु शब्दांशों (2 ताल) को सम्मिलित करते हुए 8 तालों की कितनी लय (rhythms) बनाई जा सकती हैं? अर्थात कोई व्यक्ति ऐसी कितनी विधियों से आठ तालों को लघु एवं गुरु शब्दांशों से भर सकता है जहाँ एक लघु शब्दांश एक ताल का समय लेता है तथा एक गुरु शब्दांश दो तालों का समय लेता है?

यहाँ कुछ संभावनाएँ दी गई हैं—

**गुरु गुरु गुरु गुरु**
लघु लघु लघु लघु लघु लघु लघु लघु
लघु **गुरु गुरु** लघु **गुरु**
**गुरु गुरु** लघु लघु **गुरु**
⋮

क्या आप अन्य संभावनाएँ भी ज्ञात कर सकते हैं?

अधिक गणितीय रूपों में लिखने पर — 1 और 2 के योग के रूप में संख्या 8 को कितनी विधियों से लिखा जा सकता है?

उदाहरण के लिए— $8 = 2 + 2 + 2 + 2$,
$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$,
$8 = 1 + 2 + 2 + 1 + 2$,
$8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 2$,
इत्यादि।

क्या आप कोई अन्य विधियाँ सोच पा रहे हैं?

यहाँ संख्याओं 1, 2, 3 और 4 में से प्रत्येक को 1 और 2 के योग के रूप में लिखने की सभी विधियाँ दी जा रही हैं—

| | विभिन्न विधियाँ | विधियों की संख्या |
|---|---|---|
| $n = 1$ | 1 | 1 |
| $n = 2$ | 1 + 1<br>2 | 2 |
| $n = 3$ | 1 + 1 + 1<br>1 + 2<br>2 + 1 | 3 |
| $n = 4$ | 1 + 1 + 1 + 1<br>1 + 1 + 2<br>1 + 2 + 1<br>2 + 1 + 1<br>2 + 2 | 5 |

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अपनी अभ्यास पुस्तिका में संख्या 5 को सभी संभावित विधियों से 1 और 2 के योग के रूप में लिखने का प्रयास कीजिए। आपने कितनी विधियाँ ज्ञात की हैं? (आपको 8 विभिन्न विधियाँ प्राप्त होनी चाहिए)। क्या आप सभी संभावनाओं को लिखे बिना इन्हें ज्ञात कर सकते हैं? क्या आप n = 8 के लिए इसका प्रयास कर सकते हैं?

यहाँ लघु एवं गुरु शब्दांशों की 5 तालों वाली सभी लय लिखने की एक क्रमबद्ध विधि दी जा रही है। 4 तालों वाली सभी लयों के सम्मुख '1+' लिखिए; फिर 3 तालों वाली सभी लयों के सम्मुख '2+' लिखिए। इससे हमें 5 तालों वाली सभी लय प्राप्त हो जाती हैं—

| | | |
|---|---|---|
| $n = 5$ | 1 + 1 + 1 + 1 + 1<br>1 + 1 + 1 + 2<br>1 + 1 + 2 + 1<br>1 + 2 + 1 + 1<br>1 + 2 + 2 | 2 + 1 + 1 + 1<br>2 + 1 + 2<br>2 + 2 + 1 |

इस प्रकार 5 तालों वाली 8 लय हैं!

यह विधि तब ठीक से कार्यान्वित होती जब 5 तालों वाली प्रत्येक लय को या तो '1+' से या '2+' से प्रारंभ होना चाहिए। यदि यह '1+' से प्रारंभ होती है तो शेष संख्याओं को एक 4 ताल लय प्रदान करनी चाहिए तथा हम इन सभी को लिख सकते हैं। यदि यह '2+' के साथ प्रारंभ होती है तो शेष संख्याओं को एक 3 ताल लय प्रदान करनी चाहिए तथा हम इन सभी को लिख सकते हैं। इस प्रकार 5 ताल लयों की संख्या 4 ताल लयों की संख्या और 3 ताल लयों की संख्या का योग है।

6 ताल लय कितनी हैं? इसी तर्क के अनुसार यह 5 ताल लयों की संख्या और 4 ताल लयों की संख्या का योग होगा। अर्थात यह 8 + 5 = 13 है। इस प्रकार 6 तालों वाली 13 लय होंगी।

? क्रमबद्ध विधि का उपयोग करते हुए सभी 6 ताल लयों को लिखिए। अर्थात 6 को 1 और 2 के योग के रूप में सभी संभावित विधियों से लिखिए। क्या आपको 13 विधियाँ प्राप्त हुईं?

किसी भी निश्चित संख्या में दी गई ताल के लघु एवं गुरु अक्षरों की सभी लयों की गणना करने की यह सुंदर एवं उत्तम विधि एक महान प्राकृत भाषाविद और छंद शास्त्री **विरहांक** ने लगभग वर्ष 700 सामान्य संवत् में प्रदान की थी। उन्होंने अपनी इस विधि को कविता के प्राकृत छंद के रूप में दिया। इसी कारण अनुक्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... को **विरहांक अनुक्रम** कहा जाता है तथा इस अनुक्रम की संख्याएँ विरहांक संख्याएँ कहलाती हैं। विरहांक इतिहास में वे प्रथम ज्ञात व्यक्ति थे जिन्होंने स्पष्टत: इन महत्वपूर्ण संख्याओं पर विचार किया तथा इनके बनने का नियम लिखा।

भारत में अन्य भाषाविदों और छंद शास्त्रियों ने भी इन संख्याओं पर इसी काव्यात्मक संदर्भ में विचार किया। नि:संदेह, विरहांक को प्रसिद्ध भाषाविद् और छंद शास्त्री पिंगल के पूर्व कार्यों से प्रेरणा प्राप्त हुई। पिंगल का जीवन काल लगभग 300 सामान्य संवत् पूर्व था। विरहांक के बाद इन संख्याओं के बारे में गोपाल (1135 सामान्य संवत्) और फिर हेमचन्द्र (1150 सामान्य संवत्) द्वारा भी लिखा गया।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

पश्चिम में इन संख्याओं को एक इटालियन गणितज्ञ **फिबोनाची** के नाम पर फिबोनाची संख्याएँ कहा जाता है। इन्होंने इन संख्याओं के विषय में **विरहांक** से 500 वर्ष बाद लगभग 1202 सामान्य संवत् में लिखा। जैसा कि हम देख सकते हैं कि फिबोनाची न तो ऐसे प्रथम व्यक्ति थे और न ही द्वितीय तथा तृतीय व्यक्ति थे जिन्होंने इन संख्याओं के विषय में लिखा। परंतु कभी-कभी **"विरहांक-फिबोनाची संख्याओं"** का उपयोग इसलिए किया जाता है कि सभी व्यक्ति समझ सकें कि वस्तुत: इनका संदर्भ क्या है।

अत: लघु एवं गुरु शब्दांशों वाली 8 तालों में कितनी लय होंगी? हम इसके लिए विरहांक अनुक्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, **34**, 55, ... का 8वाँ पद लेते हैं।

इस प्रकार 8 तालों वाली 34 लय हैं।

इस अनुक्रम में 55 के बाद आने वाली संख्या लिखिए।

हम देख चुके हैं कि इस अनुक्रम में अगली संख्या पिछली दो संख्याओं को जोड़कर प्राप्त होती है। जाँच कीजिए कि यह तथ्य ऊपर दी संख्याओं के लिए सत्य है या नहीं। अगली संख्या है—

$34+55 = 89$

? इस अनुक्रम में अगली तीन संख्याएँ लिखिए—

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ____, ____, ____, …

यदि आपको उपरोक्त अनुक्रम की एक और संख्या लिखनी हो तो क्या आप बता सकते हैं कि (पिछली दो संख्याओं को जोड़े बिना) यह संख्या सम होगी या विषम?

? इस अनुक्रम में प्रत्येक संख्या की समानता क्या है? समानताओं के अनुक्रम में क्या आप कोई पैटर्न देख पा रहे हैं?

वर्तमान समय में **विरहांक-फिबोनाची** संख्याएँ काव्यात्मक रचनाओं (श्लोकों) से लेकर ढोल-नगाड़े बजाने तक, चित्रकला और वास्तुकला से लेकर विज्ञान तक अनेक गणितीय और कलात्मक सिद्धांतों का आधार बनती हैं। संभवत: इन संख्याओं की सबसे अधिक प्रकटीभूत अद्भुत घटनाएँ प्रकृति की कलाओं में होती हैं! उदाहरणार्थ एक गुलबहार के फूल में पंखुड़ियों की संख्या सामान्यत: एक **विरहांक** संख्या होती है।

आप निम्नलिखित फूलों में से प्रत्येक में कितनी पंखुड़ियाँ देख पा रहे हैं?



*13 पंखुड़ियों वाला गुलबहार का फूल*



*21 पंखुड़ियों वाला गुलबहार का फूल*



*34 पंखुड़ियों वाला गुलबहार का फूल*

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

विरहांक-फिबोनाची संख्याओं के अनेक उल्लेखनीय गणितीय गुण हैं जिनका हम बाद में गणित के साथ अन्य विषयों में भी अध्ययन करेंगे।

ये संख्याएँ वस्तुत: विज्ञान, कला और गणित के बीच घनिष्ठ संबंधों का एक उत्तम उदाहरण है।



## 6.5 अंक पहेली

आप संख्याओं के साथ अंकगणितीय संक्रियाएँ कर चुके हैं। अक्षरों के साथ ये सक्रियाएँ करने के विषय में आपके क्या विचार हैं?

नीचे दिए परिकलनों में अंकों को अक्षरों द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया है। प्रत्येक अक्षर एक विशेष अंक (0–9) को व्यक्त करता है। आपको पता लगाना है कि प्रत्येक अक्षर किस अंक को व्यक्त करता है।

$$\begin{array}{r} T \\ T \\ +\ T \\ \hline UT \end{array}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यहाँ हमें 1-अंकीय संख्या T प्राप्त है। इसे स्वयं में दो बार जोड़ने पर एक 2-अंकीय योग प्राप्त हो रहा है। इस योग की इकाई का अंक वही एकल अंक है जिसे जोड़ा गया है।

? U और T क्या हो सकते हैं? क्या T अंक 2 हो सकता है? क्या यह 3 हो सकता है?

जब आप खोज करेंगे तब देखेंगे कि T = 5 है तथा UT = 15 है।

$$\begin{array}{r} K2 \\ +\ K2 \\ \hline HMM \end{array}$$

आइए, दाईं ओर दिए गए एक और उदाहरण पर दृष्टि डालें। यहाँ K2 का अर्थ है कि यह संख्या एक 2-अंकीय संख्या है जिसमें इकाई का अंक 2 है तथा दहाई का अंक K है। K2 को स्वयं से जोड़ने पर एक 3-अंकीय संख्या HMM प्राप्त होती है। अक्षर M को किस अंक के संगत होना चाहिए?

इस योग के दहाई और इकाई के स्थान में प्रत्येक पर समान अंक है।

? H के विषय में क्या विचार हैं? क्या यह 2 हो सकता है? क्या यह 3 हो सकता है?

इस प्रकार के प्रश्न हल करने में रोचक और मनोरंजक हो सकते हैं! यहाँ आपको हल करने का प्रयास करने के लिए ऐसे ही कुछ और प्रश्न दिए जा रहे हैं। पता लगाइए कि प्रत्येक अक्षर किस अंक को व्यक्त करता है।

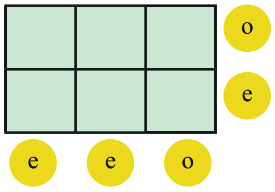
अपनी कक्षा के सहपाठियों के साथ उन विचारों को साझा कीजिए जो आपने इन प्रश्नों के विषय में सोचा था। आप कुछ नई विधियों (अभिगमों) को भी ज्ञात कर सकते हैं।

| | | | |
|---|---|---|---|
| YY | B5 | KP | C1 |
| + Z | + 3D | + KP | + C |
| ZOO | ED5 | PRR | 1FF |

इस प्रकार के प्रश्न क्रिप्टारिथमेटिक प्रश्न या अल्फामेटिक प्रश्न (अक्षर विज्ञान पहेली) कहलाते हैं।

## पता लगाइए

1. एक विद्युत बल्ब जला हुआ (On) है। दिनेश इसके बटन को 77 बार दबाता है। क्या यह बल्ब अब जला हुआ (On) होगा या बंद (Off) होगा? ऐसा क्यों?
2. ललिता के पास एक बड़ा प्राचीन विश्वकोश है। जब वह इसे खोलती है तब इसके अनेक खुले पृष्ठ गिर जाते हैं। वह कुल 50 पृष्ठ गिनती है जो दोनों ओर छपे हुए हैं। क्या इन खुले पृष्ठों की संख्याओं का योग 6000 हो सकता है? यदि हाँ, तो क्यों अथवा नहीं, तो क्यों नहीं?
3. यहाँ चित्र में एक 2 × 3 का ग्रिड दिया गया है। प्रत्येक पंक्ति और स्तंभ के लिए योग की समानता घेरे में लिखी हुई है। '*e*' सम संख्या के लिए है तथा '*o*' विषम संख्या के लिए है। इन बक्सों को 3 विषम संख्याओं (*o*) तथा 3 सम संख्याओं (*e*) से इस प्रकार भरिए कि पंक्ति और स्तंभों के योग की समानता संतुष्ट हो जाए।




4. जादुई योग 0 वाला एक 3 × 3 जादुई वर्ग बनाइए। सभी संख्याएँ शून्य नहीं हो सकती हैं। आवश्यकतानुसार ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग कीजिए।
5. निम्नलिखित रिक्त स्थानों को 'विषम' या 'सम' से भरिए—
   (a) विषम संख्या में सम संख्याओं का योग _____ होता है।
   (b) सम संख्या में विषम संख्याओं का योग _____ होता है।
   (c) सम संख्या में सम संख्याओं का योग _____ होता है।
   (d) विषम संख्या में विषम संख्याओं का योग _____ होता है।
6. 1 से 100 तक की संख्याओं के योग की समानता क्या है?
7. विरहांक अनुक्रम में दो क्रमागत संख्याएँ 987 और 1597 हैं। इस अनुक्रम की अगली दो संख्याएँ तथा पिछली दो संख्याएँ क्या हैं?
8. अंगद एक 8 पगों वाली सीढ़ी पर चढ़ना चाहता है। उसके खेल का एक नियम है कि एक समय पर वह 1 पग या 2 पग ही ले सकता है। उदाहरणार्थ, उसके पथों में से एक पथ 1, 2, 2, 1, 2 है। तो बताइए कि वह शीर्ष पर कितनी भिन्न विधियों से पहुँच सकता है?
9. विरहांक अनुक्रम के 20वें पद की समानता क्या है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

10. सत्य कथनों की पहचान कीजिए—

(a) व्यंजक $4m - 1$ से सदैव विषम संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

(b) सभी सम संख्याओं को $6j - 4$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(c) दोनों व्यंजक $2p + 1$ और $2q - 1$ सभी विषम संख्याओं का वर्णन करते हैं।

(d) व्यंजक $2f + 3$ सम और विषम दोनों संख्याओं को व्यक्त करता है।

11. निम्नलिखित क्रिप्टारिथम को हल कीजिए—

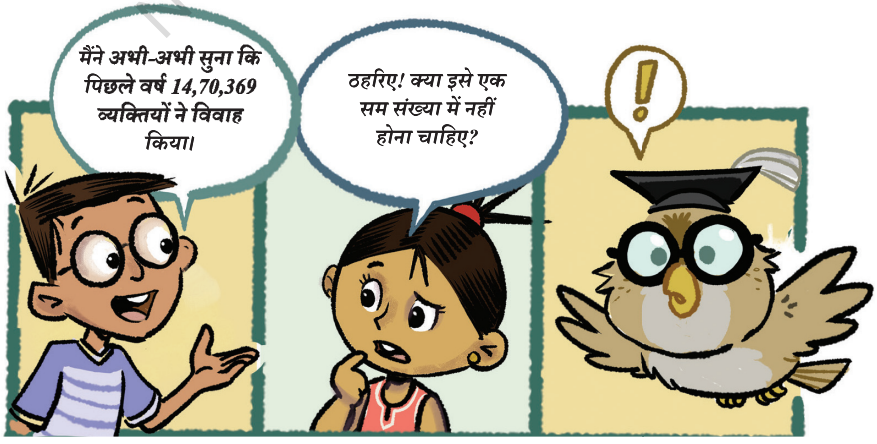
$$\begin{array}{r} \text{UT} \\ +\ \text{TA} \\ \hline \text{TAT} \end{array}$$

## सारांश

इस अध्याय में हमने सीखा—

- प्रथम क्रियाकलाप में हमने देखा कि संख्याओं के एक अनुक्रम के विषय में सूचना (उदाहरणार्थ मापनों) को किस प्रकार निरूपित किया जाता है तथा किस प्रकार वास्तविक संख्याओं के विषय में बिना किसी जानकारी के उन्हें व्यवस्थित किया जाता है।
- हमने संख्या समानता की धारणा के विषय में अध्ययन किया, जिनमें ऐसी संख्याओं के विषय में जाना, जो युग्मों में व्यवस्थित की जा सकती हैं (सम संख्याएँ) तथा ऐसी संख्याएँ, जो युग्मों में व्यवस्थित नहीं की जा सकती हैं (विषम संख्याएँ)।
- हमने सीखा कि योग और गुणनफलों की समानता कैसे निर्धारित की जाए।
- ग्रिड में योग की खोज करते समय हम निर्धारित कर सके कि किस ग्रिड को पंक्तियों और स्तंभों के योग को देखकर भरना असंभव है। हमने इस तथ्य को जादुई वर्ग की रचना करने के लिए विस्तृत किया है।
- हमने देखा कि किस प्रकार विरहांक संख्याएँ ऐतिहासिक रूप से कलाओं के माध्यम से खोजी गईं। विरहांक अनुक्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 34, 55... है।
- हम क्रिप्टारिथम के माध्यम से गणित जासूस बन गए हैं जहाँ अंकों को अक्षरों से प्रतिस्थापित किया जाता है।

NOT TO BE REPUBLISHED



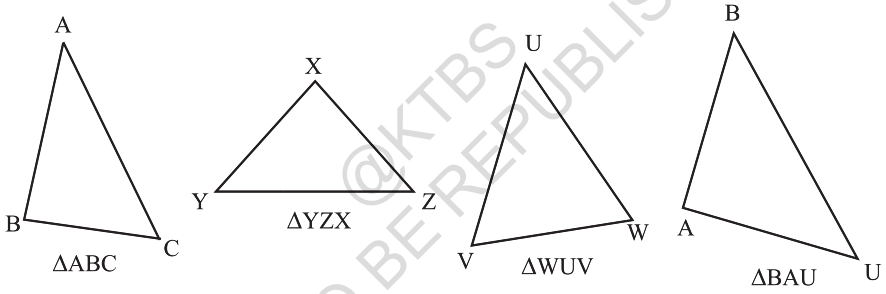
# 7 तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं की एक कथा

0775CH07

एक त्रिभुज सबसे अधिक आधारभूत बंद आकार है। जैसा कि हम जानते हैं कि इसमें निम्नलिखित बिंदु अंतर्विष्ट होते हैं—

- तीन कोने के बिंदु जिन्हें हम इस त्रिभुज के शीर्ष कहते हैं तथा
- तीन रेखाखंड अर्थात त्रिभुज की भुजाएँ जो शीर्षों को युग्मों में जोड़ती हैं।

त्रिभुज विभिन्न आकारों में दिखाई देते हैं। इनमें से कुछ आकारों को नीचे दर्शाया गया है—




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ध्यान दीजिए कि एक त्रिभुज को व्यक्त करने के लिए कौन-सा प्रतीक प्रयुक्त किया जाता है तथा त्रिभुजों को उनके शीर्षों का उपयोग करते हुए किस प्रकार नामांकित किया गया है। एक त्रिभुज को नामांकित करते समय इसके शीर्ष किसी भी क्रम में आ सकते हैं।

कोनों पर तीनों रेखाओं के मिलने पर तीन कोण बनते हैं जिन्हें हम उस त्रिभुज के कोण कहते हैं। उदाहरणार्थ $\Delta ABC$ में ये कोण $\angle CAB$, $\angle ABC$ और $\angle BCA$ हैं, जिन्हें हम क्रमशः $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ के रूप में व्यक्त करते हैं।

? जब तीनों शीर्ष एक सरल रेखा पर स्थित होते हैं तब क्या होता है?

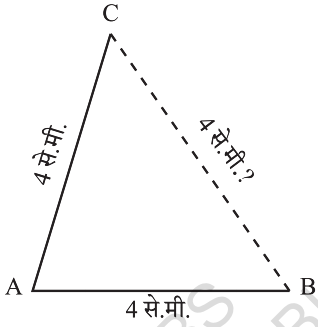
## 7.1 समबाहु त्रिभुज

सभी त्रिभुजों में समबाहु त्रिभुज सबसे अधिक सममित (symmetric) होते हैं। ये ऐसे त्रिभुज हैं जिनकी सभी भुजाओं की लंबाई समान होती हैं। आइए, इनकी रचना करने का प्रयास करें।

? एक ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई 4 से.मी. हो।

आपने इस त्रिभुज की रचना किस प्रकार की तथा आपने कौन-कौन से साधन उपयोग किए हैं? क्या यह रचना केवल एक मापक और एक पेंसिल के उपयोग से की जा सकती है?

केवल एक मापक के उपयोग से इस त्रिभुज की रचना निश्चित रूप से संभव है, परंतु इसके लिए अनेक बार प्रयत्न करने की आवश्यकता हो सकती है। मान लीजिए कि हम 4 से.मी. लंबाई का आधार खींचते हैं तथा इसे AB नाम देते हैं (नीचे दिए गए चित्र को देखिए)। अब यदि मापक के उपयोग से तीसरा बिंदु C इस प्रकार अंकित कीजिए कि AC = 4 से.मी. है तो यह संभव हो सकता है कि BC की लंबाई 4 से.मी. नहीं हो। यदि ऐसा होता है तो हमें C को बार-बार इस प्रकार अंकित करने का प्रयास करना पड़ेगा कि हमें BC की लंबाई 4 से.मी. प्राप्त हो जाए।

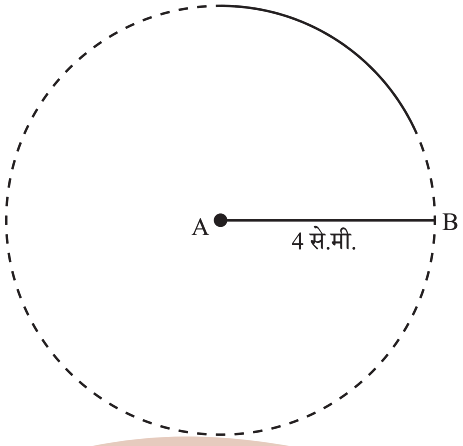



? हम इस रचना को किस प्रकार अधिक सक्षम बना सकते हैं?

पिछली कक्षा में (रचनाओं से खेलना अध्याय में) एक परकार के उपयोग से ऐसी ही समस्या को हल करने की विधि का स्मरण कीजिए। हमें 'घर' के शीर्ष बिंदु को अंकित करना पड़ा था जो दो अन्य बिंदुओं से 5 से.मी. की दूरी पर था। जो विधि हमने उस बिंदु को प्राप्त करने में प्रयुक्त की थी वही विधि यहाँ भी प्रयुक्त की जा सकती है।

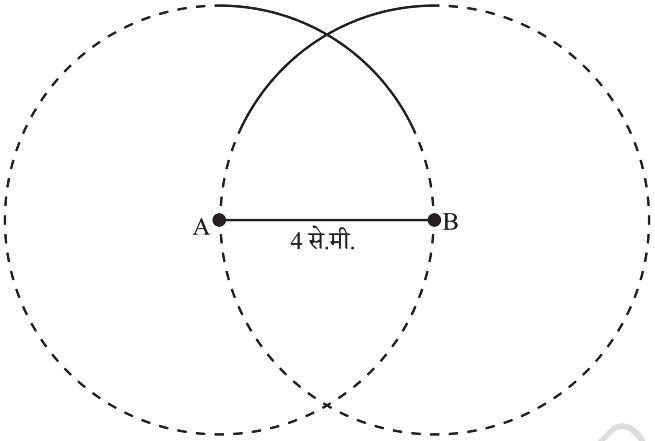
AB = 4 से.मी. की रचना के बाद हम निम्नलिखित विधि का प्रयोग कर सकते हैं—

**चरण 1—** एक परकार का उपयोग करते हुए बिंदु A को केंद्र लेकर 4 से.मी. त्रिज्या का एक पर्याप्त रूप से लंबा चाप खींचिए जैसा कि नीचे चित्र में दर्शाया गया है। बिंदु C इसी चाप पर कहीं स्थित होगा। हम इसे किस प्रकार अंकित करें?




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

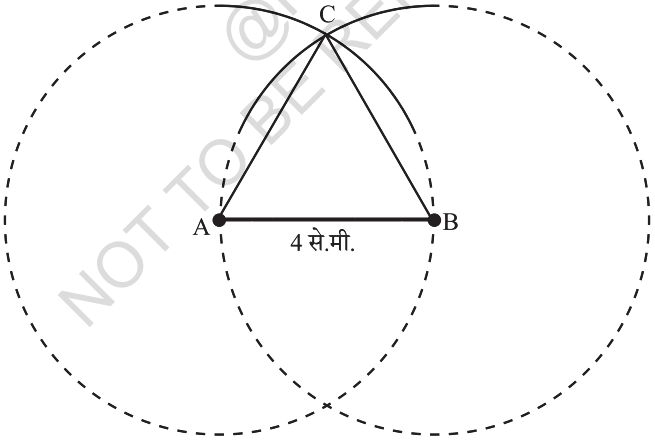
**चरण 2 —** अब केंद्र B लेकर त्रिज्या 4 से.मी. के एक अन्य चाप की रचना कीजिए।




मान लीजिए कि C इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है।

? यह रचना सुनिश्चित करती है कि AC और BC दोनों की ही लंबाई 4 से.मी. है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

**चरण 3 —** वाँछित समबाहु त्रिभुज प्राप्त करने के लिए AC और BC को जोड़िए।




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## 7.2 दी गई भुजाओं से एक त्रिभुज की रचना करना

हम उन त्रिभुजों की रचना किस प्रकार करते हैं जो समबाहु नहीं हैं?

? एक ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाओं की लंबाई 4 से.मी., 5 से.मी. और 6 से.मी. हो।

पिछली स्थिति की तरह इस त्रिभुज की रचना भी केवल एक मापक के उपयोग से की जा सकती है; परंतु इसके लिए हमें अनेक प्रयास करने होंगे।

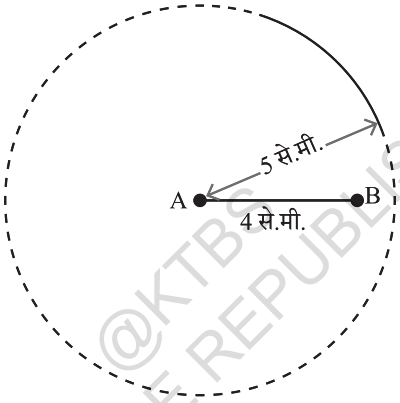
? हम इस त्रिभुज की रचना अधिक सक्षमता से किस प्रकार कर सकते हैं?

दी हुई इन लंबाइयों में से किसी एक को त्रिभुज का आधार मान लीजिए, जैसे 4 से.मी. को त्रिभुज का आधार चुना। मान लीजिए कि A और B इस आधार के शीर्ष हैं तथा तीसरे शीर्ष को C कहिए। मान लीजिए कि AC = 5 से.मी. है तथा BC = 6 से.मी. है।



चित्र 7.1

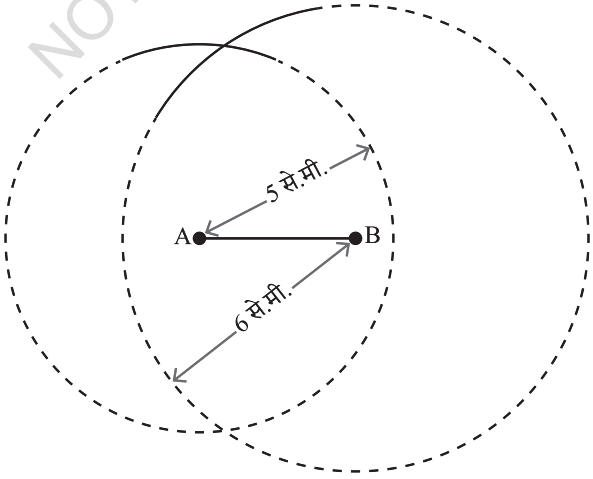
जैसा कि हमने समबाहु त्रिभुज की स्थिति में किया था, आइए वैसे ही सर्वप्रथम वे सभी बिंदु प्राप्त करें जो A से 5 से.मी. की दूरी पर हैं। ये बिंदु उस वृत्त पर स्थित हैं जिसका केंद्र A है और त्रिज्या 5 से.मी. है। बिंदु C को भी इसी वृत्त पर कहीं स्थित होना चाहिए। हम इसे कैसे ज्ञात करते हैं?




चित्र 7.2

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

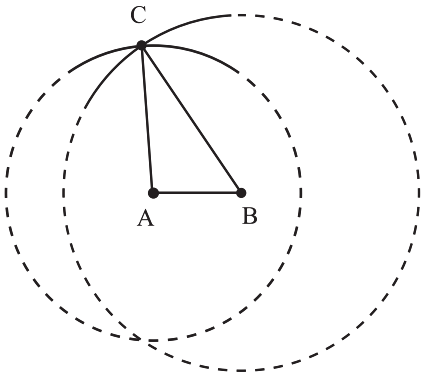
हम इस तथ्य का उपयोग करेंगे कि यह बिंदु C, बिंदु B से 6 से.मी. की दूरी पर है। केंद्र B लेकर त्रिज्या 6 से.मी. की एक चाप खींचिए।




चित्र 7.3

वाँछित बिंदु C इन दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेद बिंदुओं में से एक बिंदु होगा।

यह प्रतिच्छेद बिंदु त्रिभुज का तीसरा शीर्ष क्यों है? इसका कारण भी समबाहु त्रिभुजों को बनाने के समान ही है, जो पहले बताया जा चुका है। यह बिंदु दोनों वृत्तों पर स्थित होता है। अत: A से इसकी दूरी A पर केंद्रित वृत्त की त्रिज्या (5 से.मी.) है तथा B से इसकी दूरी B पर केंद्रित वृत्त की त्रिज्या (6 से.मी.) है।




यह ध्यान रखते हुए कि तीसरे शीर्ष को प्राप्त करने के लिए पूर्ण वृत्तों की रचना आवश्यक नहीं है। आइए, इस रचना के चरणों को सारांश रूप में लिखें (चित्र 7.2 और 7.3 को देखिए) —

**चरण 1** — किसी एक भुजा की लंबाई के आधार AB की रचना कीजिए। आइए AB = 4 से.मी. चुनें (चित्र 7.1 देखिए)।

**चरण 2** — केंद्र A लेकर त्रिज्या 5 से.मी. के एक पर्याप्त रूप से लंबे चाप की रचना कीजिए (चित्र 7.2 देखिए)।

**चरण 3** — केंद्र B लेकर त्रिज्या 6 से.मी. का एक चाप खींचिए ताकि वह पहले चाप को प्रतिच्छेद करे (चित्र 7.3 देखिए)।

**चरण 4** — वह बिंदु जहाँ दोनों चाप मिलते हैं वह वाँछित तीसरा शीर्ष बिंदु C है। AC और BC को मिलाकर ΔABC प्राप्त कीजिए।

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## रचना कीजिए

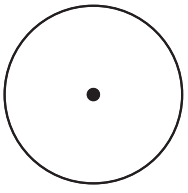
? निम्नलिखित लंबाइयों की भुजाओं वाले त्रिभुजों की रचना कीजिए (सभी इकाइयाँ से.मी. में हैं) —

(a) 4, 4, 6
(b) 3, 4, 5
(c) 1, 5, 5
(d) 4, 6, 8
(e) 3.5, 3.5, 3.5

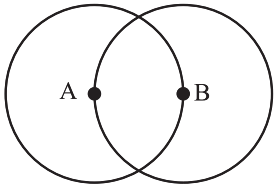
हम देख चुके हैं कि वे त्रिभुज जिनकी तीनों भुजाएँ समान होती हैं, वे **समबाहु (equilateral) त्रिभुज** कहलाते हैं। वे त्रिभुज जिनकी दो भुजाएँ समान होती हैं, वे **समद्विबाहु (isosceles) त्रिभुज** कहलाते हैं।

## ? पता लगाइए

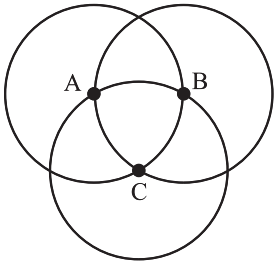
1. समद्विबाहु त्रिभुज को बनाने के लिए दिए गए वृत्त पर स्थित बिंदुओं या केंद्र बिंदु का उपयोग करें।



2. समद्विबाहु और समबाहु त्रिभुजों को बनाने के लिए दिए गए वृत्तों या केंद्रों पर स्थित बिंदुओं का उपयोग कीजिए। ये सभी वृत्त समान मापों के हैं।




*A और B समान मापों के वृत्तों के केंद्र हैं*




*A, B और C समान मापों वाले वृत्तों के केंद्र हैं*

## क्या किसी भी लंबाई के त्रिभुज बनाने संभव हैं?

क्या आप किसी भी दी गई लंबाई वाली भुजाओं से त्रिभुजों की रचना कर सकते हैं? क्या ऐसी लंबाइयाँ हैं जिनसे एक त्रिभुज की रचना असंभव है? आइए, इसका पता लगाएँ।

? एक ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें उसकी भुजाओं की लंबाई 3 से.मी., 4 से.मी. और 8 से.मी. हो। क्या आप ऐसे एक त्रिभुज की रचना कर पा रहे हैं?

? यहाँ लंबाइयों का एक अन्य समूह भी है— 2 से.मी., 3 से.मी. और 6 से.मी.। जाँच कीजिए कि क्या इन लंबाइयों की भुजाओं से एक त्रिभुज बनाना संभव है।

? भुजाओं की लंबाइयों के कुछ अन्य समूह ज्ञात करने का प्रयास कीजिए जिनके लिए एक त्रिभुज की रचना असंभव है। देखिए कि क्या आप इनमें कोई पैटर्न ज्ञात कर सकते हैं?

गणित चर्चा

हम देखते हैं कि लंबाइयों के कुछ समूहों के लिए तो एक त्रिभुज की रचना संभव है, परंतु अन्य के लिए संभव नहीं है। हम किस प्रकार जाँच कर सकते हैं कि लंबाइयों के एक दिए हुए समूह के लिए एक त्रिभुज का अस्तित्व है या नहीं? एक विधि यह है कि उस त्रिभुज की वास्तविक रूप से रचना करने का प्रयास किया जाए तथा जाँच की जाए कि क्या यह संभव है? क्या इसकी जाँच करने की कोई अन्य अधिक प्रभावी विधि है?

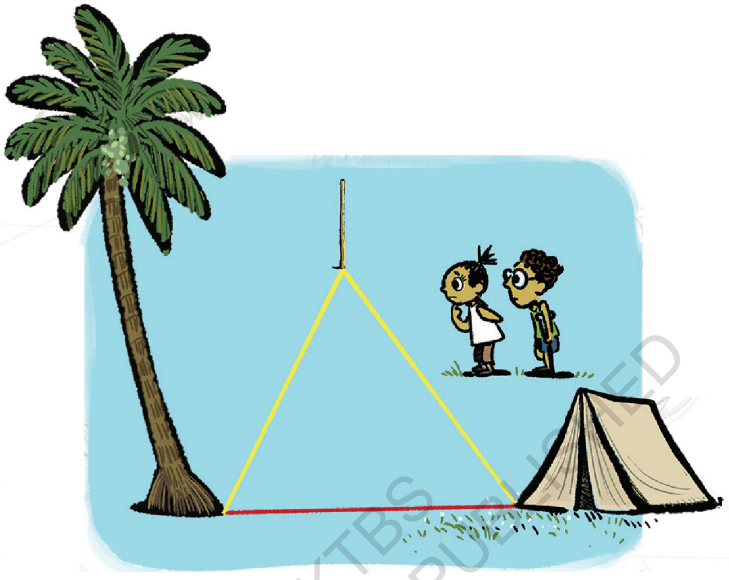
### त्रिभुज असमिका

10 से.मी., 15 से.मी. और 30 से.मी. लंबाइयों पर विचार कीजिए। क्या इन लंबाइयों की भुजाओं वाले किसी त्रिभुज का अस्तित्व संभव है?

आइए, इस प्रश्न को हल करने के लिए त्रिभुजों के एक गुण का अध्ययन करें। एक छोटे समतल भूमिखंड की कल्पना कीजिए जिस पर एक तंबू, एक पेड़ और एक खंभा स्थित है। कल्पना कीजिए कि आप तंबू के प्रवेश द्वार पर हैं तथा आप उस पेड़ तक जाना चाहते हैं। कौन-सा मार्ग छोटा है— (i) पेड़ तक सरल रेखा मार्ग (लाल मार्ग) या (ii) तंबू से खंभे तक सरल रेखा मार्ग और फिर उसके बाद खंभे से पेड़ तक सरल रेखा मार्ग (पीला मार्ग)?

© KSEBC NOT TO BE REPUBLISHED

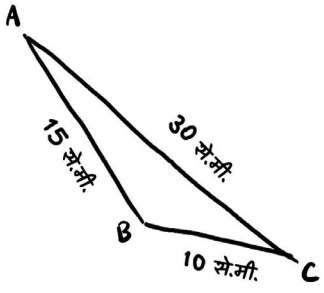
स्पष्टत: तंबू से पेड़ तक सीधा सरल रेखा मार्ग खंभे से होकर घूमकर पेड़ तक जाने वाले मार्ग की तुलना में छोटा है। वस्तुत: तंबू से पेड़ तक जाने के लिए सीधा सरल रेखा मार्ग ही सबसे छोटा संभावित मार्ग है।



क्या दो बिंदुओं के बीच में सीधा मार्ग किसी तीसरे बिंदु से होकर घूमकर जाने वाले मार्ग की तुलना में छोटा होगा? स्पष्टत:, इसका उत्तर 'हाँ' है।

? क्या 10 से.मी., 15 से.मी. और 30 से.मी. की लंबाइयों की भुजाओं वाले एक त्रिभुज के अस्तित्व के विषय में कुछ बताने के लिए इस समझ का उपयोग किया जा सकता है?

आइए, मान लें कि इन लंबाइयों के इस समूह का एक त्रिभुज है। *याद रखिए कि अभी तक हम त्रिभुज के अस्तित्व के विषय में निश्चित नहीं हैं, परंतु हम केवल मान रहे हैं कि इसका अस्तित्व है।* आइए एक रफ आरेख खींचें।




*चित्र 7.4*

क्या इस त्रिभुज में सब कुछ सही दिख रहा है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यदि यह त्रिभुज संभव होता है तो किन्हीं भी दो शीर्षों के बीच सीधा मार्ग तीसरे बिंदु से होकर घूमकर जाने वाले मार्ग की तुलना में छोटा होना चाहिए। क्या यह हमारे इस रफ आरेख के लिए सत्य है?

आइए, B और C के बीच के मार्गों पर विचार करें।

सीधे मार्ग की लंबाई = BC = 10 से.मी. है।

बिंदु A से होकर जाने वाले मार्ग की लंबाई क्या है? यह रेखाखंडों BA और AC की लंबाइयों का योग है।

घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई = BA + AC = 15 से.मी. + 30 से.मी. = 45 से.मी. है।

क्या सीधे मार्ग की लंबाई घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई से छोटी है?

आइए, अब A और B के बीच के मार्गों पर विचार करें।

सीधे मार्ग की लंबाई = AB = 15 से.मी. है।

शीर्ष C से होकर घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई ज्ञात करने पर हम प्राप्त करते हैं कि घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई = AC + CB = 30 से.मी. + 10 से.मी. = 40 से.मी. है।

क्या सीधे मार्ग की लंबाई घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई की तुलना में छोटी है? हाँ, अंत में C और A के बीच के मार्गों पर विचार कीजिए।

सीधे मार्ग की लंबाई = CA = 30 से.मी. है।

घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई = CB + BA = 10 से.मी. + 15 से.मी. = 25 से.मी. है।

क्या सीधे मार्ग की लंबाई घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई की तुलना में छोटी है? इस स्थिति में सीधे मार्ग की लंबाई घूमकर जाने वाले मार्ग की लंबाई से बड़ी है जो कि निरर्थक है। क्या ऐसे त्रिभुज का कोई अस्तित्व है? नहीं।

अत: 10 से.मी., 15 से.मी. और 30 से.मी. लंबाइयों की भुजाओं वाले किसी त्रिभुज का अस्तित्व नहीं हो सकता है।

इस प्रकार बिना रचना किए हम यह ज्ञात करने में समर्थ हो पाए कि 10 से.मी., 15 से.मी. और 30 से.मी. की लंबाइयों के समूह के लिए एक त्रिभुज का अस्तित्व क्यों नहीं हो सकता। हम यह कार्य स्थानिक सहज ज्ञान से तथा तर्कण (विवेचन) के माध्यम से कर पाने में समर्थ हुए।

स्मरण कीजिए कि हमने किस तरह इसी प्रकार के सहज ज्ञान और तर्कण का उपयोग प्रतिच्छेदी और समांतर रेखाओं के गुणों की खोज करने में किया था। हम यह कार्य आगे भी ज्यामिति से संबंधित गुणों की खोज करते समय जारी रखेंगे।

? क्या हम 3 से.मी., 3 से.मी. और 7 से.मी. लंबाइयों की भुजाओं वाले एक त्रिभुज के अस्तित्व के बारे में जान सकते हैं? अपने उत्तर का सत्यापन इसकी रचना द्वारा कीजिए।



? "चित्र 7.4 में दिए गए रफ आरेख में क्या लंबाइयों को एक भिन्न क्रम में नियत करना संभव है ताकि सीधे मार्ग सदैव घूमकर जाने वाले मार्गों की तुलना में छोटे रहें? यदि ऐसा संभव है तो एक त्रिभुज का अस्तित्व हो सकता है।"

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

क्या त्रिभुज में लंबाइयों की ऐसी पुनर्व्यवस्था संभव है?

गणित चर्चा

## पता लगाइए

1. हमने रचना द्वारा जाँच की है कि भुजाओं की लंबाइयों 3 से.मी., 4 से.मी. और 8 से.मी. तथा 2 से.मी., 3 से.मी. और 6 से.मी. वाले त्रिभुज बनाने संभव नहीं हैं। जाँच कीजिए कि क्या आप त्रिभुज की रचना किए बिना इस तथ्य का पता लगा सकते थे?
2. क्या हम लंबाइयों के निम्नलिखित समूहों में से प्रत्येक के लिए एक त्रिभुज के अस्तित्व के बारे में बता सकते हैं?
   (a) 10 कि.मी., 10 कि.मी. और 25 कि.मी.
   (b) 5 मि.मी., 10 मि.मी. और 20 मि.मी.
   (c) 12 से.मी., 20 से.मी. और 40 से.मी.

आपने अनुभव किया होगा कि एक रफ चित्र का उपयोग करके तथा सीधे मार्ग की लंबाइयों को उनके संगत घूमकर जाने वाले मार्गों की लंबाइयों से तुलना करना प्रत्येक लंबाई की अन्य दोनों लंबाइयों के योग से तुलना करने के समान है तथा इस प्रकार की तीन तुलनाएँ करनी पड़ती हैं।

3. अभी तक देखी गई लंबाइयों के प्रत्येक समूह में आपने इस ओर अवश्य ही ध्यान दिया होगा कि न्यूनतम दो तुलनाओं में एक सीधी लंबाई अन्य दो लंबाइयों के योग से कम थी (यदि नहीं तो पुन: जाँच कीजिए)। उदाहरणार्थ, 10 से.मी., 15 से.मी. और 30 से.मी. की लंबाइयों के समूह के लिए ऐसा घटित होने वाली दो तुलनाएँ ये हैं—

प्रयास करें

$$10 < 15 + 30$$

$$15 < 10 + 30$$

परंतु यह बात तीसरी लंबाई के लिए घटित नहीं होती है— $30 > 10 + 15$ है।

क्या ऐसा सदैव होगा? अर्थात लंबाइयों के किसी भी समूह के लिए न्यूनतम दो तुलनाएँ होंगी जिनमें एक लंबाई अन्य दो लंबाइयों के योग से कम होगी? लंबाइयों के भिन्न-भिन्न समूहों के लिए इसका पता लगाइए।

आगे लंबाइयों के एक दिए हुए समूह के लिए क्या बिना किसी परिकलन के इसकी तुरंत पहचान करना संभव है कि कौन-सी लंबाई अन्य दोनों लंबाइयों के योग से कम है?
(**संकेत**— बढ़ते क्रम में सीधी लंबाइयों पर विचार कीजिए।)

भुजाओं की तीन लंबाइयाँ प्राप्त करने पर हमें एक त्रिभुज के अस्तित्व की जाँच करने के लिए किसकी तुलना करने की आवश्यकता है?

यदि प्रत्येक लंबाई अन्य दो लंबाइयों के योग से कम है तो हम कहते हैं कि ये लंबाइयाँ **त्रिभुज असमिका** (triangle inequality) को संतुष्ट करती हैं। उदाहरणार्थ, समूह 3, 4, 5 त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करता है, जबकि समूह 10, 15, 30 त्रिभुज असमिका को संतुष्ट नहीं करता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

हमने देखा कि जो लंबाइयाँ त्रिभुज असमिका को संतुष्ट नहीं करतीं वे किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ नहीं हो सकती हैं, जैसे — 10, 15, 30 जैसी लंबाइयाँ।

क्या 4 से.मी., 5 से.मी. और 8 से.मी. की भुजाओं की लंबाइयों वाले एक त्रिभुज का अस्तित्व है?

ये त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करती हैं —

$$8 < 4 + 5 = 9$$

? हमें अन्य दो भुजाओं की जाँच करने की आवश्यकता क्यों नहीं है?

इसका अर्थ यह है कि सभी सीधे मार्गों की लंबाइयाँ घूमकर जाने वाले मार्गों की लंबाइयों से कम हैं। क्या इससे एक त्रिभुज के अस्तित्व की पुष्टि होती है?

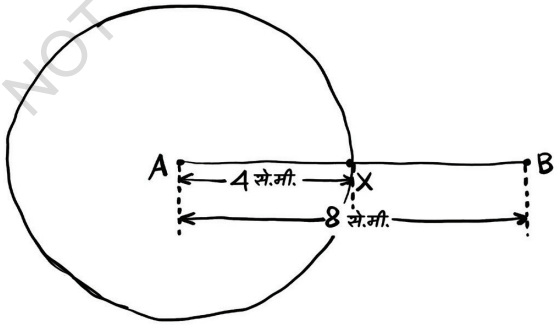
यदि एक भी सीधे मार्ग की लंबाई बड़ी होती तो हम निष्कर्ष निकाल सकते थे कि निश्चित रूप से त्रिभुज का अस्तित्व नहीं होगा। परंतु इस स्थिति में हम केवल यह कह सकते हैं कि त्रिभुज का अस्तित्व हो सकता है तथा नहीं भी हो सकता है।

त्रिभुज के अस्तित्व के लिए तीसरे शीर्ष को प्राप्त करने के लिए हमारे द्वारा खींचे गए दोनों चापों को आवश्यक रूप से प्रतिच्छेद करना चाहिए। क्या बिना वास्तविक रचना किए यह निर्धारित करना संभव है कि ऐसा होगा या नहीं?

### वृत्तों की रचना का चित्रीयकरण

आइए, कल्पना करें कि हम सबसे लंबी भुजा को आधार बनाकर रचना प्रारंभ कर रहे हैं। मान लीजिए कि 8 से.मी. लंबाई का AB आधार है। अगला चरण है कि अन्य दो लंबाइयों 4 से.मी. और 5 से.मी. के संगत पर्याप्त लंबे चापों की रचना की जाए।

आइए, चापों की केवल रचना करने के स्थान पर वृत्तों को पूरा बनाएँ। मान लीजिए कि हम केंद्र A लेकर त्रिज्या 4 से.मी. का एक वृत्त बनाते हैं।

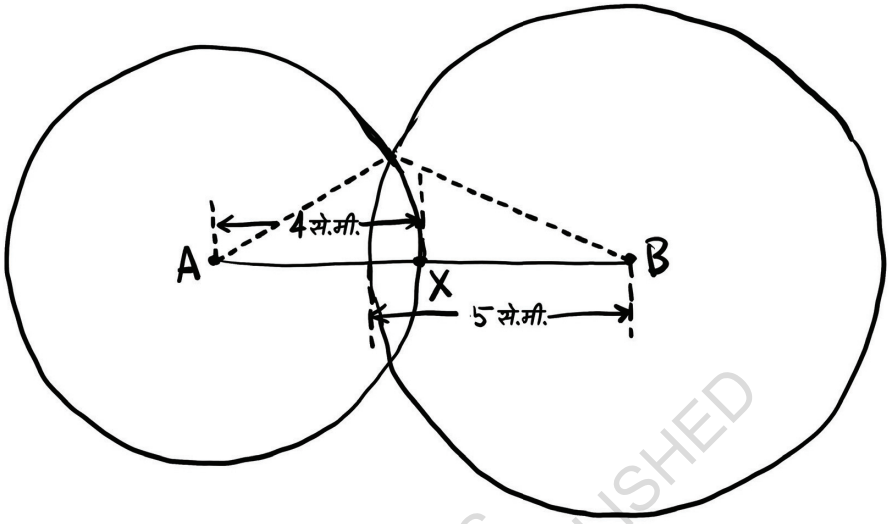



? अब मान लीजिए कि B को केंद्र लेकर त्रिज्या 5 से.मी. के एक वृत्त की रचना की जाती है। क्या आप इस परिणामी चित्र का एक रफ आरेख बना सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि आगे दिए गए चित्र में AX = 4 से.मी. है तथा AB = 8 से.मी. है। अत: BX क्या है? क्या यह लंबाई परिणामी चित्र के चित्रीयकरण में सहायता करती है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्योंकि BX = 4 से.मी. है तथा केंद्र B वाले वृत्त की त्रिज्या 5 से.मी. है। अत: यह स्पष्ट है कि ये दोनों वृत्त परस्पर दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगे।




*चित्र 7.5 — दोनों वृत्त परस्पर दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर रहे हैं*

यह तथ्य एक त्रिभुज के अस्तित्व के विषय में हमें क्या बताता है? बिंदु A और बिंदु B, वृत्तों के दो प्रतिच्छेद बिंदुओं में से किसी एक बिंदु सहित हमें वाँछित त्रिभुज प्रदान करेंगे। इस प्रकार 4 से.मी., 5 से.मी. और 8 से.मी. की लंबाइयों की भुजाओं वाले एक त्रिभुज का अस्तित्व है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

1. निम्नलिखित में से कौन-सी लंबाइयाँ एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ हो सकती हैं? अपने उत्तरों को स्पष्ट कीजिए। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक समूह में तीनों लंबाइयों के मापन की इकाई समान है।

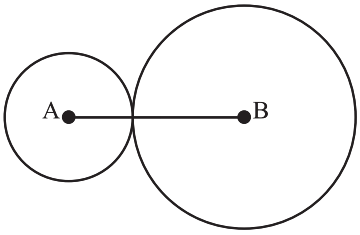
   (a) 2, 2, 5 (b) 3, 4, 6
   (c) 2, 4, 8 (d) 5, 5, 8
   (e) 10, 20, 25 (f) 10, 20, 35
   (g) 24, 26, 28

पिछले प्रश्नों से हम देखते हैं कि **जब भी तीन लंबाइयों का समूह त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करता है (प्रत्येक लंबाई < अन्य दोनों लंबाइयों का योग) तब एक त्रिभुज का अस्तित्व होता है, जिसकी भुजाओं की लंबाइयाँ ये तीनों लंबाइयाँ होती हैं।**

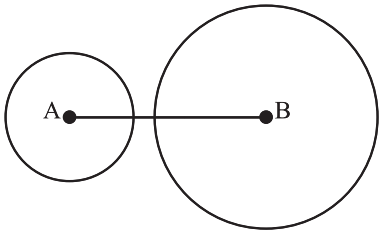
क्या तब त्रिभुजों का अस्तित्व सदैव ही होता है जब तीन लंबाइयों का एक समूह त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करता है? हम इसके लिए किस प्रकार सुनिश्चित हो सकते हैं?

हम त्रिभुज के अस्तित्व को लेकर तभी सुनिश्चित हो सकते हैं जब हम यह दर्शा सकें कि त्रिभुज असमिका के संतुष्ट होने पर दोनों वृत्त आंतरिक रूप से प्रतिच्छेद करें (जैसा चित्र 7.5 में है)। परंतु जब दो वृत्तों को बनाया जाता है तब अन्य कौन-सी संभावनाएँ हो सकती है आइए, इनका चित्र बनाकर अध्ययन करें।

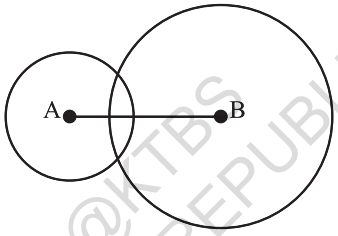
निम्नलिखित संभावित भिन्न स्थितियाँ हो सकती हैं—




**स्थिति 1** — *वृत्त एक-दूसरे को स्पर्श कर रहे हैं*




**स्थिति 2** — *वृत्त प्रतिच्छेद नहीं कर रहे हैं*




**स्थिति 3** — *वृत्त परस्पर आंतरिक रूप से प्रतिच्छेद कर रहे हैं*

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ध्यान दीजिए कि इन वृत्तों की रचना करते समय हम—

(a) आधार AB की लंबाई = दी हुई लंबाइयों में सबसे अधिक लंबाई को लेते हैं।

(b) वृत्तों की त्रिज्याएँ अन्य दोनों छोटी लंबाइयों को लेते हैं।

हम ऊपर बताई गई स्थितियों में से किससे त्रिभुज बना पाएँगे? स्पष्टत: त्रिभुज केवल तभी बनेंगे जब वृत्त परस्पर आंतरिक रूप से प्रतिच्छेद करेंगे (स्थिति 3)।

? आइए, इनमें से प्रत्येक स्थिति का, त्रिज्याओं (दो छोटी लंबाइयों) का तथा AB (सबसे बड़ी लंबाई) के बीच एक संबंध ज्ञात करते हुए अध्ययन करें।

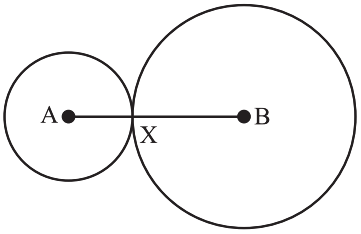
**स्थिति 1— वृत्त परस्पर एक बिंदु पर स्पर्श कर रहे हैं**

इस स्थिति के घटित होने के लिए

दोनों त्रिज्याओं का योग = AB है

अथवा

दोनों छोटी लंबाइयों का योग = सबसे बड़ी लंबाई है।




**स्थिति 2— वृत्त आंतरिक रूप से प्रतिच्छेद नहीं कर रहे हैं**

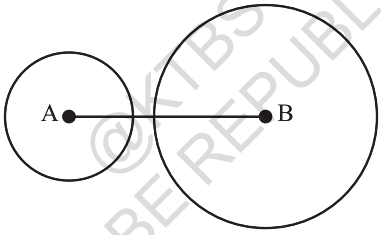
? इस स्थिति के घटित होने के लिए त्रिज्याओं और AB के बीच क्या संबंध होना चाहिए?

यह आकृति से देखा जा सकता है कि

दोनों त्रिज्याओं का योग < AB

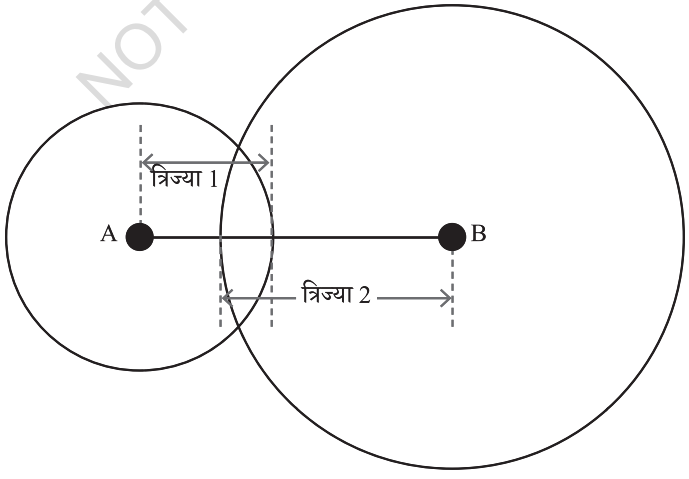
अथवा

दोनों छोटी लंबाइयों का योग < सबसे बड़ी लंबाई




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**स्थिति 3— वृत्त परस्पर प्रतिच्छेद कर रहे हैं**



AB एक त्रिज्या और दूसरी त्रिज्या के एक भाग से मिलकर बना है। अत:

दोनों त्रिज्याओं का योग > AB

अथवा

दोनों छोटी लंबाइयों का योग > सबसे बड़ी लंबाई

? क्या हम इस विश्लेषण का उपयोग यह बताने में कर सकते हैं कि एक त्रिभुज का अस्तित्व तब होता है जब इसकी लंबाइयाँ त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करती हैं?

यदि दी गई लंबाइयाँ त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करती हैं तो दो छोटी लंबाइयों का योग सबसे बड़ी लंबाई से बड़ा होता है। इसका अर्थ है कि यह हमें स्थिति 3 पर पहुँचा देता है, जहाँ वृत्त परस्पर आंतरिक रूप से प्रतिच्छेद करते हैं तथा इसीलिए त्रिभुज का अस्तित्व है।

? लंबाइयों के उस समूह के लिए दोनों वृत्त किस प्रकार के बनेंगे जो त्रिभुज असमिका को संतुष्ट नहीं करते हैं? ऐसी लंबाइयों के समूहों के तीन-तीन उदाहरण ज्ञात कीजिए जिनके लिए वृत्त —

(a) परस्पर एक बिंदु पर स्पर्श करते हैं

(b) परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करते हैं।

? एक संपूर्ण प्रक्रिया बनाइए जिसका उपयोग एक त्रिभुज के अस्तित्व की जाँच करने में किया जा सके।

**निष्कर्ष**

यदि तीन लंबाइयों का दिया हुआ एक समूह त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करता है तो ऐसी लंबाइयों वाली भुजाओं के लिए एक त्रिभुज का अस्तित्व होता है। यदि यह समूह त्रिभुज असमिका को संतुष्ट नहीं करता है तो ऐसी लंबाइयों वाली भुजाओं के लिए त्रिभुज का अस्तित्व नहीं होता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## ? पता लगाइए

1. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित लंबाइयों के प्रत्येक समूह के लिए एक त्रिभुज का अस्तित्व है या नहीं (लंबाइयाँ समान इकाई में हैं) —

   (a) 1, 100, 100 (b) 3, 6, 9

   (c) 1, 1, 5 (d) 5, 10, 12

2. क्या भुजाओं 50, 50, 50 (समान इकाई में) वाले एक समबाहु त्रिभुज का अस्तित्व है? क्या व्यापक रूप में किसी भी लंबाई की भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज का अस्तित्व है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए तीसरी लंबाई के न्यूनतम 5 संभावित मान दीजिए ताकि इन्हें भुजाओं की लंबाइयों के रूप में लेने पर एक त्रिभुज का अस्तित्व हो (दशमलव मानों को भी चुना जा सकता है) —

   (a) 1, 100 (b) 5, 5

   (c) 3, 7

देखिए कि क्या आप प्रत्येक स्थिति में तीसरी भुजा की सभी संभावित लंबाइयों की व्याख्या कर सकते हैं ताकि इन लंबाइयों की भुजाओं के त्रिभुज का अस्तित्व हो जाए। उदाहरणार्थ स्थिति (a) में 99 और 101 के बीच की सभी संख्याएँ संभव होंगी।

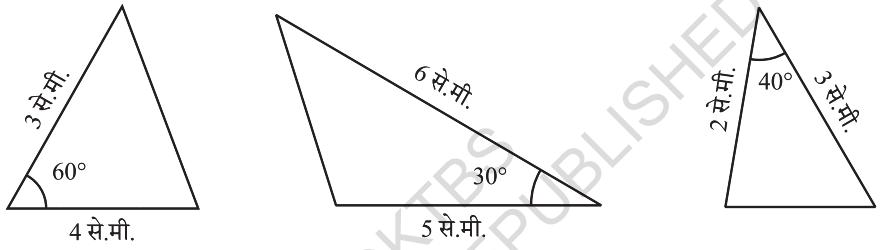
प्रयास करें

## 7.3 दी गई भुजाओं और कोणों के माप से त्रिभुजों की रचना करें

हम देख चुके हैं कि त्रिभुजों की रचना कैसे की जाती है, जब उनकी भुजाओं की लंबाइयाँ दी हुई हों। अब हम उन रचनाओं को लेंगे जब कुछ भुजाओं की लंबाइयों के स्थान पर कोणों के माप दिए गए हों।

### दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण

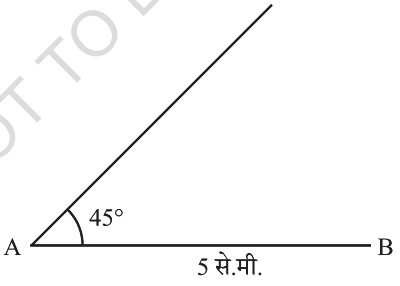
हम एक त्रिभुज की रचना कैसे करते हैं जब उसकी दो भुजाएँ तथा उनके अंतर्गत कोण दिए हुए हों? यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं जो अंतर्गत कोणों के माप दर्शा रहे हैं—




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 से.मी., AC = 4 से.मी. और ∠A= 45° है।

आइए, दी हुई भुजाओं में से एक भुजा AB को त्रिभुज का आधार लेते हैं।

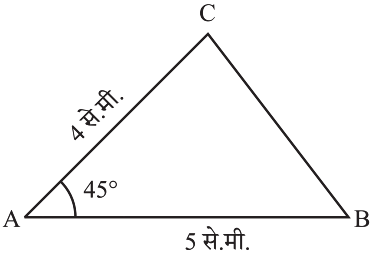



**चरण 1** — 5 से.मी. लंबी एक भुजा AB की रचना कीजिए।

**चरण 2** — कोण की दूसरी भुजा को खींचकर ∠A = 45° की रचना कीजिए।

**चरण 3** — इस दूसरी भुजा पर बिंदु C इस प्रकार अंकित कीजिए कि AC = 4 से.मी. रहे।

**चरण 4** — वाँछित त्रिभुज प्राप्त करने के लिए BC को मिलाइए।



## पता लगाइए

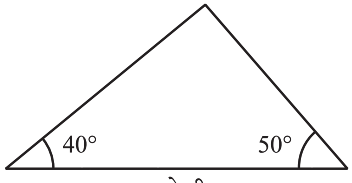
1. निम्नलिखित मापों के लिए त्रिभुजों की रचना कीजिए जहाँ कोण भुजाओं के बीच में है—
   (a) 3 से.मी., 75°, 7 से.मी.
   (b) 6 से.मी., 25°, 3 से.मी.
   (c) 3 से.मी., 120°, 8 से.मी.

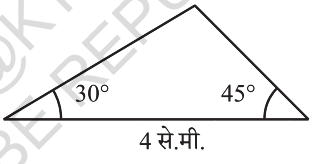
हम देख चुके हैं कि भुजाओं की लंबाइयों के सभी समूहों के लिए त्रिभुजों का अस्तित्व नहीं होता है। क्या दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण की स्थिति में माप का कोई ऐसा संयोजन है जहाँ एक त्रिभुज की रचना संभव नहीं हो? इनकी रचना करते समय आपने जो प्रेक्षित किया है उसका उपयोग करते हुए अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

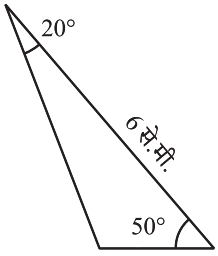
गणित चर्चा

### दो कोण और अंतर्गत भुजा

इस स्थिति में हमें दो कोण और एक भुजा दी हुई है। यह भुजा दोनों कोणों का एक भाग है जिसे अंतर्गत भुजा कहा जाता है। यहाँ ऐसे मापों के कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं—



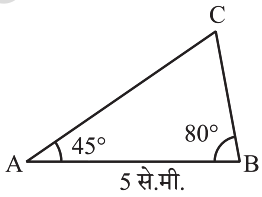




@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 से.मी., ∠A = 45° और ∠B = 80° है।

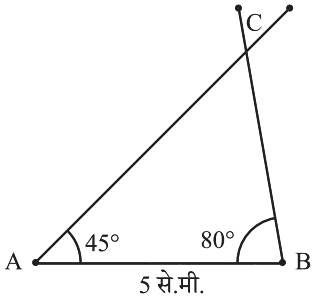
आइए, दी हुई भुजा को आधार मानें।




**चरण 1**— 5 से.मी. लंबाई का आधार AB खींचिए।

**चरण 2**— क्रमश: 45° और 80° मापों के ∠A और ∠B खींचिए।

**चरण 3**— दो नए रेखाखंडों का प्रतिच्छेद बिंदु तीसरा शीर्ष C है।



## पता लगाइए

1. निम्नलिखित मापनों के लिए त्रिभुजों की रचना कीजिए—
   (a) 75°, 5 से.मी., 75°
   (b) 25°, 3 से.मी., 60°
   (c) 120°, 6 से.मी., 30°

### क्या त्रिभुजों का अस्तित्व सदैव संभव है?

गणित चर्चा

क्या दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजाओं के प्रत्येक संयोजन के लिए त्रिभुज बन सकते हैं? पता लगाइए।

जिस प्रकार जब हमें तीनों भुजाएँ दी जाती हैं तो प्रत्येक बार एक त्रिभुज बनना आवश्यक नहीं होता, उसी प्रकार दो कोण और उसके बीच के प्रत्येक संयोजन से भी सदैव त्रिभुज नहीं बनता।

ऐसे दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजाओं के मापन के उदाहरण ज्ञात कीजिए जहाँ एक त्रिभुज की रचना संभव नहीं है।

आइए, एक ऐसी स्थिति को दर्शाने का प्रयास करें। एक बार आधार खींचने के बाद कल्पना करने का प्रयास कीजिए कि अन्य दोनों भुजाएँ किस प्रकार की होनी चाहिए कि वे परस्पर मिलें नहीं।

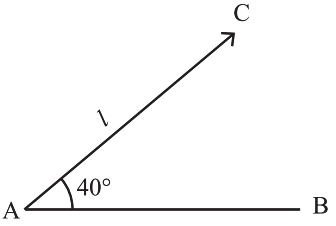
यहाँ कुछ स्पष्ट उदाहरण दिए जा रहे हैं—



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यदि इन दो कोणों में से एक समकोण और दूसरा 90° से अधिक या उसके बराबर है तो यह स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति में कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

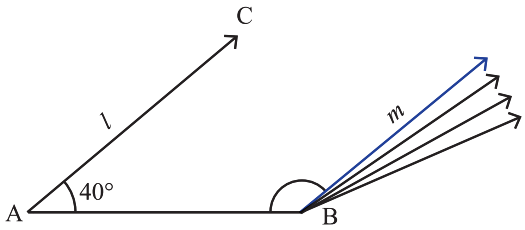
अब हम आधार कोणों में से एक को न्यून कोण 40° का कोण बनाते हैं। अन्य कोण के मान संभवतः क्या होने चाहिए ताकि ये रेखाएँ परस्पर न मिलें?




यह स्पष्ट है कि यदि B से होकर जानी वाली रेखा दाईं ओर पर्याप्त रूप से झुकी हुई होगी तो वह रेखा *l* से नहीं मिलेगी।

(a) ऐसा घटित होने के लिए (ऊपर आकृति में अंकित) एक संभावित ∠B ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

(b) इन रेखाओं के न मिलने के लिए $\angle B$ का न्यूनतम मान क्या हो सकता है?




नीली रेखा $l$ से न मिलने वाली रेखा है जो दाईं ओर न्यूनतम झुकी हुई है।

चित्र से यह स्पष्ट है कि जो रेखा न्यूनतम $\angle B$ की रचना करती है उसे रेखा $l$ के समांतर होना चाहिए। आइए, इस समांतर रेखा को रेखा $m$ कहें।

क्या आप इस स्थिति में $\angle B$ का वास्तविक मान बता सकते हैं?

(**संकेत—** ध्यान दीजिए कि AB एक तिर्यक रेखा है।)

हम देख चुके हैं कि जब दो रेखाएँ समांतर होती हैं तब तिर्यक रेखा के एक ही ओर के दोनों अंत: कोणों का योग 180° होता है। इसलिए $\angle B = 140°$ है।

इसलिए $\angle B$ के किन मानों के लिए एक त्रिभुज का अस्तित्व नहीं होगा? क्या लंबाई AB की इसमें कोई भूमिका है?

उपरोक्त चर्चा से यह देखा जा सकता है कि एक त्रिभुज के अस्तित्व के निर्णय लेने में लंबाई AB की कोई भूमिका नहीं है। हम कह सकते हैं कि जब $\angle B$ का मान 140° अथवा इससे अधिक हो तब एक त्रिभुज का अस्तित्व संभव नहीं है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

1. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक कोण के लिए एक अन्य कोण ज्ञात कीजिए जिसके लिए एक त्रिभुज (i) संभव है (ii) अथवा संभव नहीं है। प्रत्येक श्रेणी के लिए न्यूनतम दो भिन्न-भिन्न कोण ज्ञात कीजिए।

   (a) 30° (b) 70°

   (c) 54° (d) 144°

2. निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन-से युग्म एक त्रिभुज के कोण हो सकते हैं तथा कौन-से नहीं हो सकते हैं—

   (a) 35°, 150° (b) 70°, 30°

   (c) 90°, 85° (d) 50°, 150°

त्रिभुज असमिका की तरह क्या आप एक नियम ऐसा बना सकते हैं जो उन दो कोणों की व्याख्या करे जिनके लिए एक त्रिभुज का निर्माण संभव है?

क्या इस नियम को बनाने में दोनों कोणों के योग का उपयोग किया जा सकता है?

जब दिए हुए दो कोणों का योग 180° से कम है तो इन कोणों वाले एक त्रिभुज का अस्तित्व होता है। यदि यह योग 180° अथवा इससे अधिक है तो इन कोणों वाले किसी त्रिभुज का कोई अस्तित्व नहीं होता।

आइए, दो कोणों को लें। मान लीजिए कि हम 60° और 70° के कोण लेते हैं जिनका योग 180° से कम है। मान लीजिए कि इसकी अंतर्गत भुजा 5 से.मी. है।

? तीसरे कोण का माप क्या हो सकता है? यदि आधार की लंबाई को बदलकर कोई अन्य मान कर दिया जाए, जैसे 7 से.मी. तो क्या इस माप में कोई परिवर्तन होगा? रचना कीजिए तथा पता लगाइए?

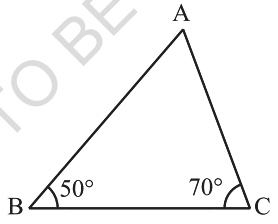
? व्यापक रूप में देखें तो दो कोणों के निश्चित हो जाने पर क्या तीसरा कोण अंतर्गत भुजा की लंबाई पर निर्भर करता है? कोणों के भिन्न-भिन्न युग्म तथा भुजा की लंबाइयाँ लेकर प्रयास कीजिए।

माप ये दर्शा सकते हैं कि भुजा की लंबाई का तीसरे कोण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता (या बहुत ही कम प्रभाव पड़ता है)। इस प्रेक्षण के साथ ही आइए देखें कि क्या हम रचना और माप किए बिना तीसरे कोण को ज्ञात कर सकते हैं।

? विभिन्न त्रिभुजों के साथ यह देखने के लिए प्रयोग करने का प्रयास कीजिए कि क्या किन्हीं दो कोणों तथा तीसरे कोण के बीच कोई संबंध है। इस संबंध को ज्ञात करने के लिए आप कौन-से आँकड़ों का संग्रह करेंगे तथा इन संग्रहित आँकड़ों को किस प्रकार संगठित करेंगे?

गणित चर्चा

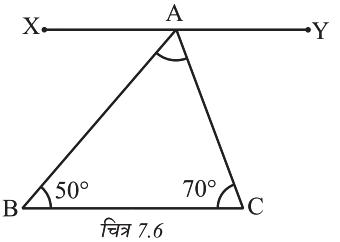
? एक त्रिभुज ABC पर विचार कीजिए जिसमें $\angle B = 50°$ और $\angle C = 70°$ हैं। आइए देखें कि हम बिना किसी त्रिभुज की रचना किए $\angle A$ किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हमने देखा कि समांतर रेखाओं की धारणा यह निर्धारित करने में उपयोगी थी कि त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों का योग 180° से कम होता है। समांतर रेखाओं का उपयोग तीसरे कोण $\angle BAC$ को ज्ञात करने में भी किया जा सकता है।

मान लीजिए कि हम शीर्ष A से होकर एक रेखा XY को आधार BC के समांतर खींचते हैं।



चित्र 7.6

? हम देख सकते हैं कि यहाँ नए कोण बन गए हैं। ये कोण $\angle XAB$ और $\angle YAC$ हैं। इनके मान क्या हैं?

क्योंकि रेखा XY आधार BC के समांतर है

इसलिए $\angle XAB = \angle B$ और $\angle YAC = \angle C$ है, क्योंकि ये तिर्यक रेखाओं AB और AC से बने एकांतर कोण हैं।

अत: $\angle XAB = 50°$ और $\angle YAC = 70°$ है। क्या हम इससे $\angle BAC$ ज्ञात कर सकते हैं?

हम जानते हैं कि $\angle XAB$, $\angle YAC$ और $\angle BAC$ मिलकर $180°$ का कोण बनाते हैं। इसलिए

$$\angle XAB + \angle YAC + \angle BAC = 180°$$

$$50° + \angle BAC + 70° = 180°$$

$$120° + \angle BAC = 180°$$

इस प्रकार $\angle BAC = 180° - 120° = 60°$

अब BC की कोई भी उपयुक्त लंबाई लेकर एक त्रिभुज की रचना कीजिए तथा सत्यापन कीजिए क्या वास्तव में ऐसी स्थिति संभव है।

### पता लगाइए

1. यदि दो कोण दिए गए हों तो एक समांतर रेखा के उपयोग से त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

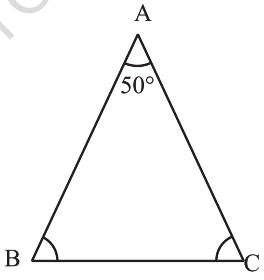
   (a) $36°, 72°$ (b) $150°, 15°$

   (c) $90°, 30°$ (d) $75°, 45°$

2. क्या आप एक ऐसे त्रिभुज की रचना कर सकते हैं जिसके सभी कोण $70°$ के बराबर हैं? यदि दो कोण $70°$ के हैं तो तीसरा कोण क्या होगा? यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण बराबर हैं तो प्रत्येक कोण का माप क्या होगा? खोजिए और ज्ञात कीजिए?

3. यहाँ एक त्रिभुज है जिसमें हमें ज्ञात है कि $\angle B = \angle C$ और $\angle A = 50°$ है। क्या आप $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कर सकते हैं?

प्रयास करें




© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

### कोण के योग का गुण

किसी त्रिभुज के कोणों के योग के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

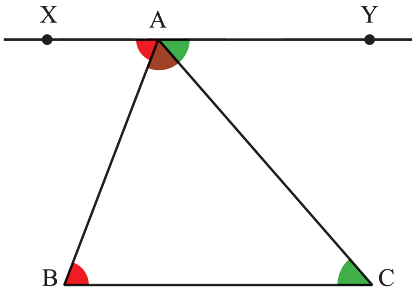
एक त्रिभुज ABC पर विचार कीजिए। इसके कोणों का योग ज्ञात करने के लिए हम आधार के समांतर रेखा खींचने वाली विधि का ही उपयोग कर सकते हैं— A से होकर BC के समांतर एक रेखा की रचना कीजिए।

हमें $\angle A + \angle B + \angle C$ ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि $\angle B = \angle XAB$ और $\angle C = \angle YAC$

इसलिए $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle XAB + \angle YAC = 180°$ है क्योंकि ये तीनों कोण मिलकर एक ऋजु (सरल) कोण बनाते हैं।

इस प्रकार हमने सिद्ध कर दिया कि किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। यह अद्‌भुत परिणाम **त्रिभुजों के कोणों के योग का गुण** कहलाता है।

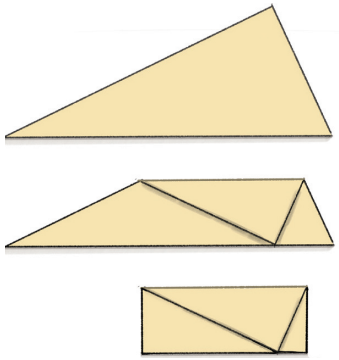



*चित्र 7.7*

इस बात पर सोचने में कुछ समय लगाइए कि हमने इस कोण योग गुण का किस प्रकार पता लगाया। प्रारंभ में तीसरे कोण तथा अन्य दो कोणों के बीच संबंध स्पष्ट नहीं था। परंतु ऊपर के शीर्ष से होकर आधार के समांतर एक समांतर रेखा खींचने के एक सरल से विचार ने (चित्र 7.7 देखिए) इस संबंध को तुरंत स्पष्ट बना दिया। इस उत्तम विचार को गणित के इतिहास की एक प्रभावशाली पुस्तक *दी एलिमेंट्स* (*The Elements*) में देखा जा सकता है। इस पुस्तक को लिखने का श्रेय एक यूनानी गणितज्ञ यूक्लिड (*Euclid*) को दिया जाता है। इनका जीवन-काल लगभग 300 सामान्य संवत् था।

यह हल एक और ऐसा उदाहरण है जो बताता है कि गणित में सृजनात्मक चिंतन किस प्रकार एक मुख्य भूमिका का निर्वाह करता है!

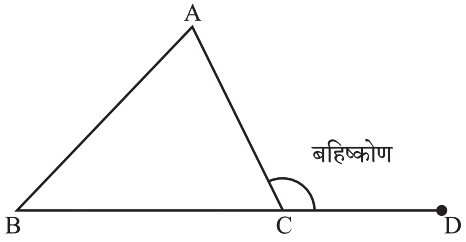
इस कोण योग गुण के सत्यापन की एक सुविधाजनक विधि है। इस विधि में एक कागज के त्रिभुजाकार कटआउटों को मोड़ा जाता है। क्या आप देख रहे हैं कि यह विधि किस प्रकार दर्शाती है कि इस त्रिभुज में कोणों का योग 180° है?



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

### बहिष्कोण

किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर उसके द्वारा एक अन्य भुजा के साथ बनाया गया कोण उस त्रिभुज का **बहिष्कोण (exterior angle)** कहलाता है। इस चित्र में ∠ACD एक बहिष्कोण है।




यदि ∠A = 50° और ∠B = 60° है तो ∠ACD ज्ञात कीजिए।

कोण योग गुण द्वारा हम जानते हैं कि

$$50° + 60° + \angle ACB = 180°$$

$$110° + \angle ACB = 180°$$

इसलिए ∠ACB = 70° है।

क्योंकि ∠ACD = 180 ° – 70° = 110° अत: ∠ACB और ∠ACD मिलकर एक ऋजु कोण बनाते हैं।

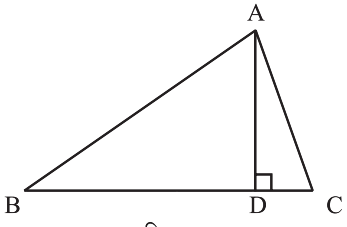
∠A और ∠B के विभिन्न मापों के लिए बहिष्कोण ज्ञात कीजिए। क्या आप बहिष्कोण और इन दोनों कोणों के बीच कोई संबंध देखते हैं?

(**संकेत—** कोण योग गुण द्वारा हमें ∠A + ∠B + ∠ACB = 180° प्राप्त है।) हमें ∠ACD + ∠ACB = 180° भी प्राप्त है, क्योंकि ये ऋजु कोण बनाते हैं। यह क्या दर्शाता है?

## 7.4 त्रिभुजों के शीर्षलम्बों से संबंधित रचनाएँ

एक त्रिभुज के सापेक्ष उपयोगी माप का एक अन्य समूह है। यह समूह प्रत्येक शीर्ष की ऊँचाई एवं उसकी सम्मुख भुजा के संबंध में है।

अपने आस-पास के संसार में हम विभिन्न वस्तुओं की ऊँचाइयों की बात करते हैं, जैसे— एक व्यक्ति की लंबाई, एक पेड़ की ऊँचाई, एक भवन की ऊँचाई इत्यादि। शब्द 'ऊँचाई' से हमारा क्या तात्पर्य होता है?



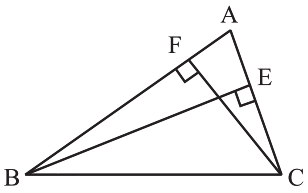
*चित्र 7.8*

एक त्रिभुज ABC पर विचार कीजिए। शीर्ष A की सम्मुख भुजा BC से कितनी ऊँचाई है तथा इसे किस प्रकार मापा जा सकता है?

मान लीजिए कि A से BC पर खींचा गया लम्ब रेखाखंड AD है। AD की लंबाई शीर्ष A से BC की ऊँचाई है। रेखाखंड AD इस त्रिभुज के 'शीर्षलम्बों' (altitudes) में से एक शीर्षलम्ब है।

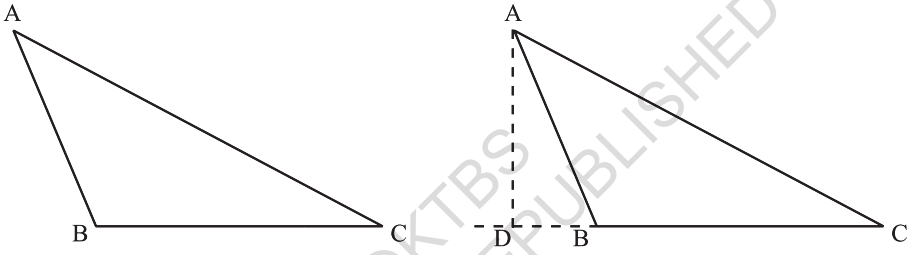
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

नीचे दिए गए चित्र में अन्य शीर्षलम्ब BE और CF हैं जो अन्य शीर्षों से संगत सम्मुख भुजाओं पर खींचे गए लंब हैं।




जब भी हम त्रिभुज की ऊँचाई शब्द का उपयोग करते हैं तब सामान्यतः यह शीर्षलम्ब की लंबाई के संदर्भ में होता है, चाहे हम आधार के रूप में किसी भी भुजा को लें (चित्र 7.8 की स्थिति में यह शीर्षलम्ब AD है)।

इस त्रिभुज में A से भुजा BC तक शीर्षलम्ब क्या होगा?




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हम BC को आगे बढ़ाते हैं तथा फिर A से इस रेखा पर लम्ब डालते हैं।

## कागज मोड़ने के उपयोग से शीर्षलम्ब

? कागज का एक त्रिभुजाकार टुकड़ा काटिए। तीनों भुजाओं में से किसी एक भुजा को आधार के रूप में निश्चित कीजिए। इसे इस प्रकार मोड़िए कि परिणामी मोड़ का चिह्न ऊपरी शीर्ष से आधार पर शीर्षलम्ब हो। इसका औचित्य दीजिए कि मोड़ के चिह्न को आधार पर लंब क्यों होना चाहिए?

## किसी त्रिभुज के शीर्षलम्बों की रचना

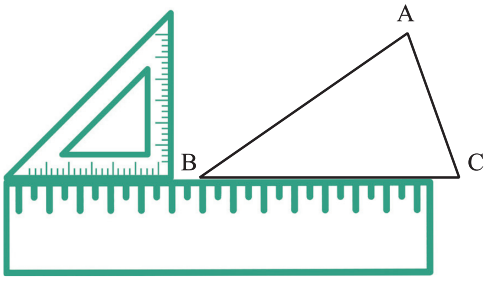
एक त्रिभुज की रचना कीजिए। BC को आधार लेते हुए शीर्षों को A, B और C से नामांकित कीजिए।

? A से भुजा BC पर शीर्षलम्ब खींचिए।

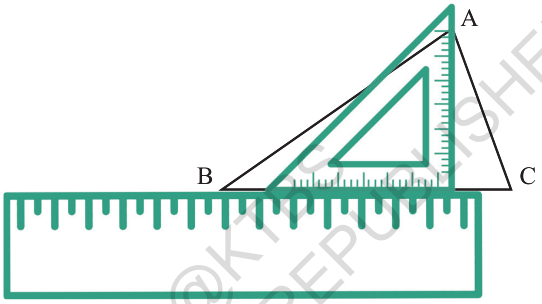
केवल एक मापक के उपयोग से शीर्षलम्ब खींचना सही नहीं होगा। 90° का एक सटीक कोण प्राप्त करने के लिए हम एक समकोण के साथ एक मापक का उपयोग करते हैं।

? क्या आप देख सकते हैं कि ऐसा कैसे किया जाता है?

**चरण 1**— मापक को आधार के अनुदिश रखिए। अब समकोणक को चित्र में दर्शाए अनुसार मापक पर रखिए ताकि समकोण के किनारों में से एक किनारा मापक को स्पर्श करे।




**चरण 2**— समकोणक को मापक के अनुदिश तब तक सरकाइए जब तक कि समकोणक का ऊर्ध्वाधर किनारा शीर्ष A को छू न ले।




© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

**चरण 3**— समकोणक के ऊर्ध्वाधर किनारे का उपयोग करते हुए A से होकर BC पर शीर्षलम्ब खींचिए।

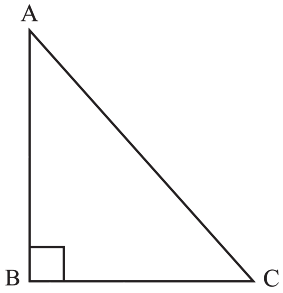
? क्या ऐसे किसी त्रिभुज का अस्तित्व है जिसमें एक भुजा भी एक शीर्षलम्ब हो?

ऐसे त्रिभुज की कल्पना कीजिए तथा एक रफ आरेख खींचिए।

हम देखते हैं कि ऐसा उन त्रिभुजों में होता है जिनमें एक कोण समकोण होता है।

एक समकोण वाले त्रिभुज **समकोणीय त्रिभुज (right-angled)** या केवल **समकोण त्रिभुज (right-triangle)** कहलाते हैं।

A से BC पर शीर्षलम्ब



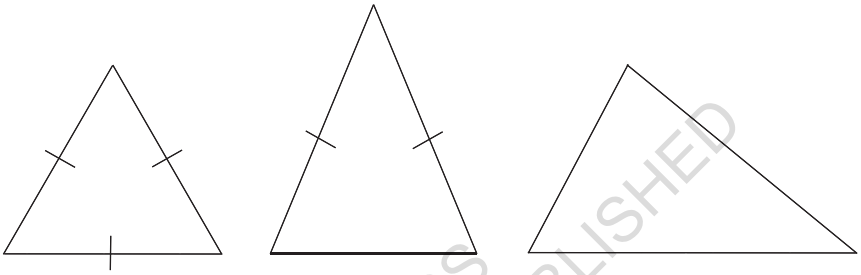
## 7.5 त्रिभुजों के प्रकार

त्रिभुजों के अध्ययन में हमारे समक्ष निम्नलिखित प्रकार के त्रिभुज आए हैं— समबाहु, समद्विबाहु, विषमबाहु और समकोण त्रिभुज।

? क्या आपने किसी अन्य प्रकार का त्रिभुज भी देखा था?

समबाहु और समद्विबाहु त्रिभुजों का वर्गीकरण भुजाओं की समानता के आधार पर था।

समबाहु त्रिभुज में सभी भुजाओं की लंबाई समान होती है। समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाओं की लंबाई समान होती है। विषमबाहु त्रिभुज में सभी भुजाओं की लंबाई असमान होती है।



*समबाहु त्रिभुज* *समद्विबाहु त्रिभुज* *विषमबाहु त्रिभुज*

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्या ऐसा ही वर्गीकरण कोणों की समता के आधार पर किया जा सकता है? क्या इन दो वर्गीकरणों में कोई संबंध है? हम इन प्रश्न का उत्तर आगे के एक अध्याय में देंगे।

जब हमने एक त्रिभुज को समकोण त्रिभुज के रूप में वर्गीकृत किया था तब हमने कोणों के मापों का उपयोग किया था।

? कोणों के मापों के आधार पर त्रिभुजों के अन्य कौन-से प्रकार हैं?

त्रिभुजों का उनके कोणों के मापों के आधार पर एक वर्गीकरण न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण त्रिभुज है। हम पहले से ही जानते हैं कि एक समकोण त्रिभुज क्या होता है। यह एक ऐसा त्रिभुज होता है जिसका एक कोण समकोण होता है। इसी प्रकार एक अधिक कोण त्रिभुज में एक कोण अधिक कोण होता है।

? एक न्यून कोण त्रिभुज क्या हो सकता है? क्या हम इसे एक न्यून कोण वाले त्रिभुज के रूप में परिभाषित कर सकते हैं? क्यों नहीं?

एक **न्यून कोण त्रिभुज** में सभी तीनों कोण न्यून कोण होते हैं।

? **पता लगाइए**

1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 5 से.मी., AB = 6 से.मी. और CA = 5 से.मी. है। A से भुजा BC पर शीर्षलम्ब की रचना कीजिए।

2. एक त्रिभुज TRY की रचना कीजिए जिसमें RY = 4 से.मी., TR = 7 से.मी. और ∠R = 140° है। T से भुजा RY पर शीर्षलम्ब की रचना कीजिए।

3. एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें ∠B= 90° और AC = 5 से.मी. है। इन मापनों के कितने भिन्न-भिन्न त्रिभुज हो सकते हैं?

प्रयास करें

(**संकेत—** ध्यान दीजिए कि अन्य मापन कोई भी मान ग्रहण कर सकते हैं। AC को आधार लीजिए। ∠A और ∠C के क्या-क्या मान ले सकते हैं ताकि अन्य कोण 90° का हो?)

4. रचना के माध्यम से पता लगाइए कि क्या एक ऐसे समबाहु त्रिभुज की रचना संभव है जिसमें (i) एक समकोण हो और (ii) एक अधिक कोण हो। साथ ही ऐसे समद्विबाहु त्रिभुज की भी रचना कीजिए जिसमें (i) एक समकोण हो और (ii) एक अधिक कोण हो।

## सारांश

- एक परकार का उपयोग त्रिभुजों की रचना को उस स्थिति में सरलीकृत कर देता है जब उनकी भुजाओं की लंबाइयाँ दी गई होती हैं।
- तीन लंबाइयों का एक समूह उस स्थिति में त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करता है जब प्रत्येक लंबाई अन्य दो लंबाइयों के योग से कम होती है।
- एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करती हैं और यदि दी गई लंबाइयों का एक समूह त्रिभुज असमिका को संतुष्ट करता है तो उन लंबाइयों की भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना की जा सकती है।
- त्रिभुजों की रचना तब भी की जा सकती है जब निम्नलिखित मापन दिए गए हों—
  (a) दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण
  (b) दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा
- किसी त्रिभुज के कोणों का योग सदैव 180° होता है।
- एक त्रिभुज का शीर्षलम्ब उसके एक शीर्ष से सम्मुख भुजा पर खींचा गया लम्ब रेखाखंड होता है।
- समबाहु त्रिभुजों में भुजाएँ समान लंबाइयों की होती हैं। समद्विबाहु त्रिभुजों में दो भुजाएँ समान लंबाइयों की होती हैं तथा विषमबाहु त्रिभुजों में तीनों भुजाएँ तीन भिन्न-भिन्न लंबाइयों की होती हैं।
- त्रिभुजों को उनके कोणों के मापों के आधार पर न्यून कोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज तथा अधिक कोण त्रिभुज के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED



पहेली का समय!

## एक बक्से में सबसे छोटा मार्ग

एक बक्से के एक कोने में एक मकड़ी बैठी है। वह सबसे अधिक दूरी वाले सम्मुख कोने (आकृति में चिह्नित) पर पहुँचना चाहती है। क्योंकि वह उड़ नहीं सकती है, इसलिए वह उस सम्मुख कोने तक उस बक्से की सतहों पर चलकर ही पहुँच सकती है। वह कौन-से सबसे छोटे मार्ग से होकर जा सकती है?



एक गत्ते (कार्डबोर्ड) का बक्सा लीजिए तथा उस पर वह मार्ग चिह्नित कीजिए जो आपके अनुसार एक कोने से सम्मुख कोने तक पहुँचने में सबसे छोटा होगा। इस मार्ग की लंबाई की तुलना अपने मित्रों द्वारा चिह्नित मार्गों की लंबाइयों से कीजिए।

**संकेत**





@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

# 8 भिन्नों के साथ कार्य करना

0775CH08

## 8.1 भिन्नों का गुणन

आरोन एक घंटे में 3 किलोमीटर चलता है। वह 5 घंटे में कितना चल सकता है?



यह एक साधारण प्रश्न है। हम जानते हैं कि दूरी को ज्ञात करने के लिए हमें 5 और 3 के गुणनफल की आवश्यकता होगी, अर्थात हम 5 और 3 का गुणा करेंगे।

1 घंटे में तय की गई दूरी = 3 कि.मी.

इसलिए

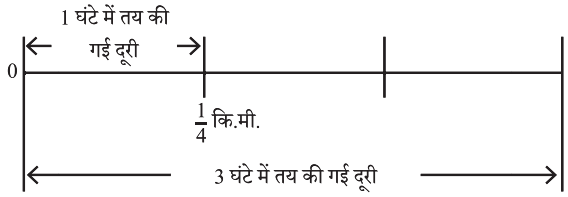
5 घंटे में तय की जाने वाली दूरी $= 5 \times 3$ कि.मी.

$= 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ कि.मी.

$= 15$ कि.मी.

? आरोन का पालतू कछुआ बहुत ही धीमी गति से चलता है। वह एक घंटे में केवल $\frac{1}{4}$ किलोमीटर ही चलता है। वह 3 घंटे में कितना चल सकता है?

यहाँ एक घंटे में तय की गई दूरी एक भिन्न है। इससे कोई अंतर नहीं पड़ता। कुल तय की गई दूरी की गणना उसी प्रकार की जाती है जैसे गुणन किया जाता है।




1 घंटे में तय की गई दूरी = $\frac{1}{4}$ कि.मी.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अत: 3 घंटो में तय की गई दूरी $= 3 \times \frac{1}{4}$ कि.मी.

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ कि.मी.

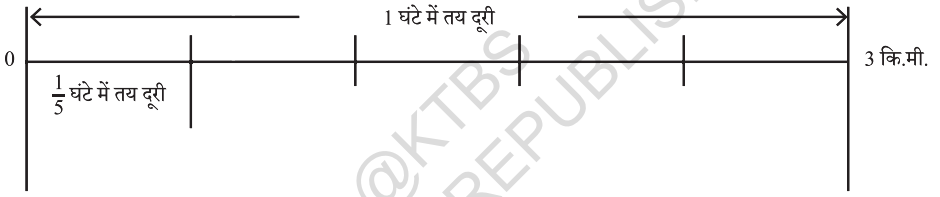
$= \frac{3}{4}$ कि.मी.

कछुआ 3 घंटे में $\frac{3}{4}$ कि.मी. चल सकता है।

आइए, हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करें जिसमें पैदल चलने में बिताया गया समय एक घंटे का एक भिन्न हो।

? हमने देखा कि आरोन एक घंटे में 3 किलोमीटर चल सकता है। वह $\frac{1}{5}$ घंटे में कितनी दूर तक चल सकता है?

हम गुणन द्वारा तय की गई कुल दूरी की गणना को आगे बढ़ाएँगे।




$\frac{1}{5}$ घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{1}{5} \times 3$ कि.मी.

**गुणनफल ज्ञात करना**

1 घंटे में तय की गई दूरी = 3 कि.मी.

$\frac{1}{5}$ घंटे में तय की गई दूरी, 3 किलोमीटर को 5 समान भागों में विभाजित करने पर प्राप्त लंबाई के समान है जो कि $\frac{3}{5}$ कि.मी. है।

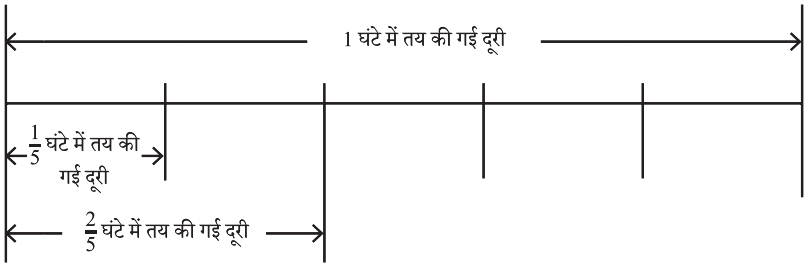
यह हमें बताती है कि $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$

? आरोन $\frac{2}{5}$ घंटों में कितनी दूर तक चल सकता है?

एक बार पुनः हमारे पास है—

तय की गई दूरी $= \frac{2}{5} \times 3$ कि.मी.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED




### गुणनफल ज्ञात करना

1. हम सबसे पहले $\frac{1}{5}$ घंटे में तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते हैं।
2. क्योंकि अवधि $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ की दोगुनी है। कुल तय की गई दूरी जानने के लिए हम इस दूरी को 2 से गुणा करते हैं।

यह गणना इस प्रकार है—

1 घंटे में तय की गई दूरी = 3 कि.मी.

1. $\frac{1}{5}$ घंटे में तय की गई दूरी

   = 3 कि.मी. को 5 समान भागों में विभाजित करने पर प्राप्त एक भाग की लंबाई

   = $\frac{3}{5}$ कि.मी.

2. इस दूरी को 2 से गुणन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \text{ कि.मी.}$$

उपरोक्त से हम देख सकते हैं कि

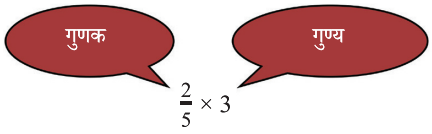
$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

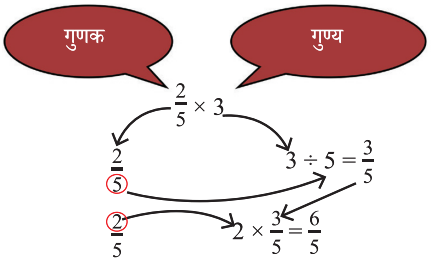
### चर्चा

हमने यह गुणन इस प्रकार किया—

- सबसे पहले हमने गुण्य 3 को गुणक के हर 5 से विभाजित किया जिससे हमें $\frac{3}{5}$ प्राप्त हुआ।



- फिर हमने परिणाम को गुणक के अंश द्वारा गुणा किया जो कि 2 है। इससे हमें $\frac{6}{5}$ प्राप्त होता है।




इस प्रकार जब हमें एक पूर्ण संख्या को एक भिन्न से गुणा करने की आवश्यकता हो तो हम ऊपर दिए गए चरणों का अनुसरण करते हैं।

**उदाहरण 1**— एक किसान के 5 पोते-पोतियाँ हैं। वह अपने प्रत्येक पोता-पोती को $\frac{2}{3}$ एकड़ भूमि वितरित करता है। उसने अपने सभी पोते-पोतियों को कुल कितनी भूमि दी?

$5 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

**उदाहरण 2**— एक घंटे इंटरनेट समय की लागत ₹8 है। $1\frac{1}{4}$ घंटे इंटरनेट समय की लागत क्या होगी?

$1\frac{1}{4}$ घंटे अर्थात $\frac{5}{4}$ घंटे हैं (मिश्रित भिन्न को बदलने पर)।

$\frac{5}{4}$ घंटे इंटरनेट समय की लागत $= \frac{5}{4} \times 8$

$= 5 \times \frac{8}{4}$

$= 5 \times 2$

$= 10$

अत: $1\frac{1}{4}$ घंटे इंटरनेट समय की लागत ₹10 है।

## पता लगाइए

1. तेनजिन प्रतिदिन $\frac{1}{2}$ गिलास दूध पीता है। वह एक सप्ताह में कितने गिलास दूध पीता है? उसने जनवरी माह में कितने गिलास दूध पिया?
2. श्रमिकों का एक समूह 1 कि.मी. लंबी एक पानी की नहर को 8 दिनों में बना सकता है। अत: यह समूह एक दिन में _____ कि.मी. पानी की नहर बना सकता है। यदि वे एक सप्ताह में 5 दिन कार्य करते हैं तो वे एक सप्ताह में _____ कि.मी. पानी की नहर बना सकते हैं।
3. मंजू और उसकी दो पड़ोसन मिलकर प्रत्येक सप्ताह 5 लीटर तेल खरीदती हैं और उसे समान मात्रा में 3 परिवारों के बीच साझा करती हैं? प्रत्येक परिवार को एक सप्ताह में कितना तेल मिलता है? एक परिवार को 4 सप्ताह में कितना तेल प्राप्त होगा?
4. साफिया ने सोमवार को रात 10 बजे चंद्रमा को अस्त होते देखा। उसकी माताजी एक वैज्ञानिक हैं। उन्होंने बताया कि चंद्रमा प्रत्येक दिन पिछले दिन की तुलना में $\frac{5}{6}$ घंटे देर से अस्त होता है। चंद्रमा बृहस्पतिवार को रात 10 बजे के कितने घंटे बाद अस्त होगा?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5. गुणा कीजिए और उसे मिश्रित भिन्न में बदलिए।

(a) $7 \times \frac{3}{5}$

(b) $4 \times \frac{1}{3}$

(c) $\frac{9}{7} \times 6$

(d) $\frac{13}{11} \times 6$

अभी तक हमने एक पूर्ण संख्या का भिन्न के साथ और एक भिन्न का एक पूर्ण संख्या के साथ गुणन करना सीखा। क्या होगा जब गुणन में दोनों संख्याएँ भिन्न हों?

## दो भिन्नों को गुणा करना

? हम जानते हैं कि आरोन का पालतू कछुआ 1 घंटे में केवल $\frac{1}{4}$ कि. मी. चल सकता है। वह आधे घंटे में कितनी दूर चल सकता है?

| घंटा | दूरी |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ |
| $\frac{1}{2}$ | ? |

ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए गुणन विधि का उपयोग करने से हमें प्राप्त होता है—

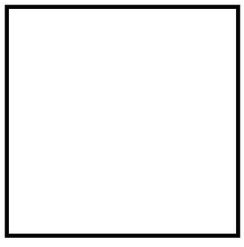
$\frac{1}{2}$ घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ कि.मी.

### गुणनफल ज्ञात करना

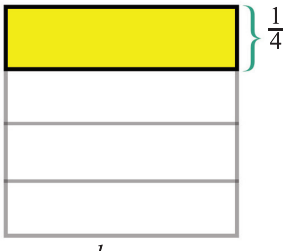
1 घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{1}{4}$ कि.मी.

अत: $\frac{1}{2}$ घंटे में तय दूरी, $\frac{1}{4}$ को 2 समान भागों में विभाजित करने पर प्राप्त लंबाई होगी।

यह ज्ञात करने के लिए कि 'पूर्ण' के लिए इकाई वर्ग का उपयोग करके भिन्नों को दर्शाना उपयोगी होता है।



*पूर्ण के रूप में इकाई वर्ग*



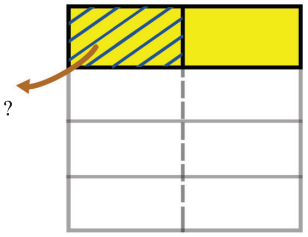

*$\frac{1}{4}$ पूर्ण का*

अब हम इस $\frac{1}{4}$ को 2 समान भागों में बाँटते हैं। हमें क्या प्राप्त होता है?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पूर्ण का कितना भिन्न छायांकित है?

क्योंकि पूर्ण को 8 समान भागों में विभाजित किया गया है और एक भाग छायांकित किया गया है। अत: हम कह सकते हैं कि पूर्ण का $\frac{1}{8}$ भाग छायांकित है। इसलिए कछुए द्वारा $\frac{1}{2}$ घंटे में तय दूरी $\frac{1}{8}$ कि.मी. है।




$\frac{1}{4}$ *को 2 समान भागों में बाँटें*

इससे पता चलता है कि $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

? यदि कछुआ तेज चलता है और वह 1 घंटे में $\frac{2}{5}$ कि.मी. की दूरी तय कर सकता है तो वह $\frac{3}{4}$ घंटे में कितनी दूर चलेगा?

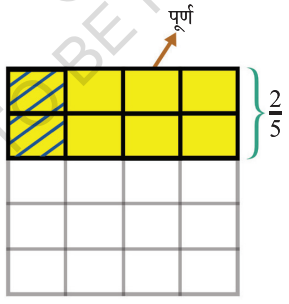
तय की गई दूरी $= \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ कि.मी.

**गुणनफल ज्ञात करना**

(i) सबसे पहले $\frac{1}{4}$ घंटे में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

(ii) प्राप्त परिणाम को 3 से गुणा करके $\frac{3}{4}$ घंटे में तय की गई दूरी ज्ञात करते हैं।

(i) $\frac{1}{4}$ घंटे में तय की गई दूरी (कि.मी. में) = $\frac{2}{5}$ को 4 समान भागों में विभाजित करने पर प्राप्त प्रत्येक भाग।




*चित्र 8.1*

इकाई वर्ग को पूर्ण के रूप में लेने पर चित्र 8.1 में छायांकित भाग वह क्षेत्र है जो हमें $\frac{2}{5}$ को 4 समान भागों में विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

यह पूर्ण का कितना भाग है?

पूर्ण को 5 पंक्तियों और 4 स्तंभों में विभाजित किया गया है,

जिससे $5 \times 4 = 20$ समान भाग मिलते हैं।

छायांकित भागों की संख्या = 2

अत: $\frac{1}{4}$ घंटे में तय की गई दूरी = $\frac{2}{20}$

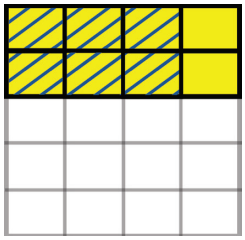
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(ii) अब हमें $\frac{2}{20}$ को 3 से गुणा करने की आवश्यकता है।

$\frac{3}{4}$ घंटे में तय दूरी $= 3 \times \frac{2}{20}$

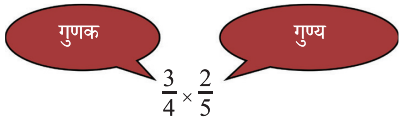
$= \frac{6}{20}$

अत: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$



## चर्चा

एक भिन्न को दूसरे भिन्न द्वारा गुणा करने की स्थिति में हम उसी विधि का अनुसरण करते हैं जिसका हमने तब उपयोग किया था जब हम एक भिन्न को एक पूर्ण द्वारा गुणा करते थे। हमने निम्नानुसार गुणा किया था—




$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{20}$ गुण्य को 4 से विभाजित करना

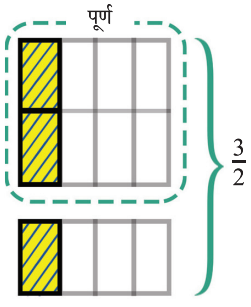
$\frac{3}{4}$ $3 \times \frac{2}{20} = \frac{6}{20}$ गुण्य को 3 से गुणा करना

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

गणित चर्चा

? इस समझ का उपयोग करके $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}$ गुणा कीजिए।

आइए, इकाई वर्ग को पूर्ण के रूप में लेते हुए पहले $\frac{3}{2}$ को प्रदर्शित करें। क्योंकि $\frac{3}{2}$ भिन्न एक पूर्ण और एक आधा भिन्न है। इसे निम्नानुसार देखा जा सकता है—




चित्र 8.2

गुणा के चरणों का अनुसरण करते हुए हमें पहले भिन्न $\frac{3}{2}$ को 4 समान भागों में विभाजित करना है। ऐसा चित्र 8.2 में पीले रंग वाले क्षेत्र द्वारा दर्शाए अनुसार किया जा सकता है। यह $\frac{3}{2}$ को 4 समान भागों में बाँटने पर प्राप्त भिन्न को दर्शाता है। इसका क्या मान है?

हम देखते हैं कि पूर्ण को 2 पंक्तियों और 4 स्तंभों में बाँटा गया है जिससे $2 \times 4 = 8$ समान भाग मिलते हैं।

कुल छायांकित भागों की संख्या = 3

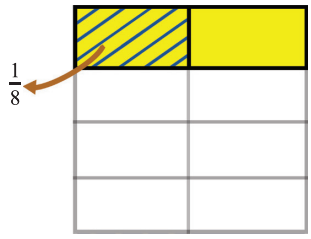
अत: छायांकित पीला भाग $= \frac{3}{8}$

अब अगले चरण में प्राप्त परिणाम को 5 से गुणा किया जाता है। यह $\frac{5}{4}$ और $\frac{3}{2}$ का गुणनफल देता है।

$$\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = 5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

## एक आयत के क्षेत्रफल और भिन्न गुणन के बीच संबंध

चित्र 8.3 में छायांकित आयत की लंबाई और चौड़ाई क्या है? क्योंकि हमने एक इकाई वर्ग (1 इकाई भुजा वाला) के साथ आरंभ किया है, अत: लंबाई और चौड़ाई $\frac{1}{2}$ इकाई और $\frac{1}{4}$ इकाई है।



चित्र 8.3

इस आयत का क्षेत्रफल क्या है? हम देखते हैं कि ऐसे 8 आयत मिलकर एक वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाते हैं। इसलिए प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल $\frac{1}{8}$ वर्ग इकाई है।

? क्या आपको क्षेत्रफल और लंबाई व चौड़ाई के गुणनफल के बीच कोई संबंध दिखाई दे रहा है?

भिन्नात्मक भुजाओं वाले आयत का क्षेत्रफल इसकी भुजाओं के गुणनफल के समान है।

सामान्यत: यदि हम दो भिन्नों का गुणनफल ज्ञात करना चाहते हैं तो हम दो भिन्नों को भुजा मानकर बने आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

### ? पता लगाइए

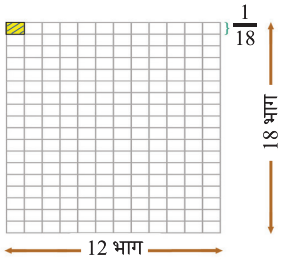
1. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए। भिन्न को प्रदर्शित करने के लिए एक इकाई वर्ग को एक पूर्ण के रूप में उपयोग कीजिए।
   (a) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$
   (b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$
   (c) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$
   (d) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$

   अब $\frac{1}{12} \times \frac{1}{18}$ ज्ञात कीजिए।

ऐसा करने के लिए भिन्नों को एक इकाई वर्ग का प्रयोग करके प्रदर्शित करना बड़ा जटिल कार्य है। आइए, उपरोक्त स्थितियों में हमने जो किया उसका अवलोकन करके गुणनफल ज्ञात करें।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

प्रत्येक स्थिति में पूर्ण को पंक्तियों और स्तंभों में विभाजित किया गया है।




पंक्तियों की संख्या गुण्य का हर होती है जो कि इस स्थिति में 18 है।

स्तंभों की संख्या गुणक का हर होती है जो कि इस स्थिति में 12 है।

इस प्रकार पूर्ण को $18 \times 12$ समान भागों में विभाजित किया गया है।

अत: $\frac{1}{18} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{(18 \times 12)} = \frac{1}{216}$

इस प्रकार जब दो भिन्नात्मक इकाइयों को गुणा किया जाता है तो उनका गुणनफल $\frac{1}{\text{(हरों का गुणनफल)}}$ होता है।

हम इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं—

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{b \times d}$$

2. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए। भिन्नों को प्रदर्शित करने के लिए एक इकाई वर्ग को एक पूर्ण के रूप में उपयोग कीजिए और संक्रियाओं को करके दिखाइए।

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

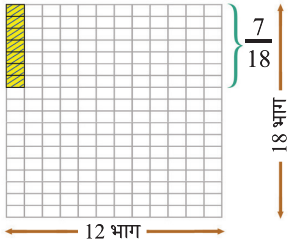
(c) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ (d) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$

© KEBS NOT TO BE REPUBLISHED

## अंशों और हरों को गुणा करना

अब $\frac{5}{12} \times \frac{7}{18}$ ज्ञात करें।

आइए, पूर्व की भाँति ही चरणबद्ध गुणन करके गुणनफल ज्ञात करें। पहले पूर्ण को 18 पंक्तियों एवं 12 स्तंभों में विभाजित करके $12 \times 18$ समान भाग बनाए जाते हैं।



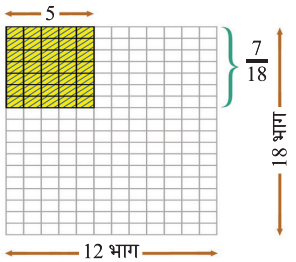

$\frac{7}{18}$ को 12 समान भागों में विभाजित करने पर हमें $\frac{7}{(12 \times 18)}$ प्राप्त होता है।

तब हम इस प्राप्त परिणाम को 5 से गुणा करके गुणनफल प्राप्त करते हैं। यह $\frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)}$ है।

अत: $\frac{5}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)} = \frac{35}{216}$

इससे हम देख सकते हैं कि सामान्यत:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$




इस सूत्र को पहली बार इस सामान्य रूप में ब्रह्मगुप्त ने 628 सामान्य संवत् में अपने *ब्रह्मस्फुट–सिद्धांत* नामक ग्रंथ में बताया था।

ऊपर दिया गया सूत्र तब भी कार्य करता है जब गुणक या गुण्य एक पूर्ण संख्या हो। हम पूर्ण संख्या को हर 1 वाले भिन्न के रूप में लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए—

$3 \times \frac{3}{4}$ को $\frac{3}{1} \times \frac{3}{4}$ लिखा जा सकता है।

$= \frac{3 \times 3}{1 \times 4} = \frac{9}{4}$

और

$\frac{3}{5} \times 4$ को $\frac{3}{5} \times \frac{4}{1}$ लिखा जा सकता है।

$= \frac{3 \times 4}{5 \times 1} = \frac{12}{5}$

## भिन्नों का गुणनफल — न्यूनतम रूप में सरलीकरण

? निम्नलिखित भिन्नों का गुणा कीजिए और गुणनफल को न्यूनतम रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24}$$

पहले अंशों (12 और 5) और हरों (7 और 24) को गुणा करने और फिर सरल करने की अपेक्षा हम यह कर सकते हैं—

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24} = \frac{(12) \times 5}{7 \times (24)}$$

हम देखते हैं कि गोले में लिखी संख्याओं का उभयनिष्ठ गुणनखंड 12 है। हम जानते हैं कि जब अंश और हर को उभयनिष्ठ गुणनखंड द्वारा विभाजित किया जाता है तो भिन्न सदैव वही रहता है। इस स्थिति में हम उन्हें 12 से विभाजित कर सकते हैं।

$$\frac{\overset{1}{\cancel{12}} \times 5}{7 \times \underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{1 \times 5}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, इस विधि का उपयोग करते हुए हम एक और गुणन करें।

$$\frac{14}{15} \times \frac{25}{42}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{14}} \times \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{3}{\cancel{42}}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}$$

जब भिन्नों को गुणा करते हैं तो हम अंशों और हरों को गुणा करने से पहले उनके उभयनिष्ठ गुणनखंड द्वारा अंश व हर को विभाजित कर सकते हैं। इसे उभयनिष्ठ गुणनखंडों को निरस्त करना (काटना) कहते हैं।

## इतिहास की एक झलक

भारत में किसी भिन्न को उसके न्यूनतम रूप में सरलीकृत करने की प्रक्रिया को अपवर्तन कहते हैं। यह प्रक्रिया इतनी प्रसिद्ध है कि इसका उल्लेख एक गैर-गणितीय ग्रंथ में भी मिलता है। एक जैन विद्वान उमास्वाति (150 सामान्य संवत्) ने एक दार्शनिक ग्रंथ में इसे उपमा के रूप में प्रयोग किया था!

## पता लगाइए

1. एक पानी की टंकी एक नल से भरी जाती है। यदि नल 1 घंटा खुला रहता है तो टंकी का $\frac{7}{10}$ भाग भर जाता है। टंकी का कितना भाग भरेगा यदि नल को निम्नलिखित समय के लिए खुला छोड़ा जाए—

   (a) $\frac{1}{3}$ घंटा _____

   (b) $\frac{2}{3}$ घंटा _____

   (c) $\frac{3}{4}$ घंटा _____

   (d) $\frac{7}{10}$ घंटा _____

   (e) टंकी को पूरा भरने के लिए नल को कितने समय तक चलते रहने देना चाहिए?

   प्रयास करें

2. सरकार ने एक सड़क बनाने के लिए सोमू की भूमि का $\frac{1}{6}$ भाग ले लिया। अब सोमू के पास भूमि का कितना भाग शेष बचा है? वह शेष भाग की आधी भूमि अपनी पुत्री कृष्णा को और $\frac{1}{3}$ भाग अपने पुत्र बोरा को दे देता है। उनके हिस्सों को देने के बाद वह शेष भूमि अपने पास रखता है।

   (a) मूल भूमि का कितना भाग कृष्णा को प्राप्त हुआ?

   (b) मूल भूमि का कितना भाग बोरा को प्राप्त हुआ?

   (c) मूल भूमि का कितना भाग सोमू ने अपने लिए रखा?

@KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. एक ऐसे आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ $3\frac{3}{4}$ फीट और $9\frac{3}{5}$ फीट हैं।

4. त्सेवांग ने अपने उद्यान में एक पंक्ति में चार पौध लगाई। दो पौध के बीच की दूरी $\frac{3}{4}$ मीटर है। पहले और अंतिम पौध के बीच की दूरी को ज्ञात कीजिए।

   (**संकेत —** चार पौध का एक कच्चा चित्र बनाइए जिसमें दो पौध के बीच की दूरी $\frac{3}{4}$ मीटर हो।)

5. कौन अधिक भारी है — 500 ग्राम का $\frac{12}{15}$ अथवा 4 किलोग्राम का $\frac{3}{20}$?

## क्या गुणनफल गुणन की संख्याओं से सदैव बड़ा होता है?

जैसा कि हम जानते हैं कि जब एक संख्या को 1 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल सदैव अपरिवर्तित रहता है। अब हम उन संख्याओं के युग्मों के गुणा को देखेंगे जहाँ दोनों में से कोई भी संख्या 1 नहीं है।

जब हम 1 से बड़ी दो गिनती संख्याओं, जैसे 3 और 5 का गुणा करते हैं तो गुणनफल गुणा की जाने वाली दोनों संख्याओं से बड़ा होता है।

$$3 \times 5 = 15$$

गुणनफल 15 दोनों संख्याओं, 3 और 5 से बड़ा है।

परंतु क्या होता है जब हम $\frac{1}{4}$ और 8 का गुणा करते हैं?

$$\frac{1}{4} \times 8 = 2$$

उपरोक्त गुणा में गुणनफल 2, $\frac{1}{4}$ से बड़ा है, परंतु 8 से छोटा है।

क्या होता है जब हम $\frac{3}{4}$ और $\frac{2}{5}$ का गुणा करते हैं?

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

आइए, इस गुणनफल $\frac{6}{20}$ की तुलना संख्याओं $\frac{3}{4}$ और $\frac{2}{5}$ के साथ करें। आइए इस हेतु $\frac{3}{4}$ को $\frac{15}{20}$ और $\frac{2}{5}$ को $\frac{8}{20}$ के रूप में व्यक्त करते हैं।

इससे हम यह देख सकते हैं कि गुणनफल दोनों संख्याओं से छोटा है।

आपको क्या लगता है कि गुणा की जाने वाली दोनों संख्याओं से गुणनफल कब बड़ा है, यह दोनों संख्याओं के बीच में है और कब यह दोनों संख्याओं से छोटा है?

(**संकेत—** गुणनफल और गुणा की जाने वाली संख्याओं के बीच संबंध इस बात पर निर्भर करता है कि क्या वे 0 और 1 के बीच में हैं या वे 1 से बड़ी हैं। संख्याओं के अलग-अलग युग्मों को लीजिए और उनके गुणनफल का निरीक्षण कीजिए। प्रत्येक गुणा के लिए आगे दिए गए प्रश्नों पर विचार कीजिए।)

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

| स्थिति | गुणा | संबंध |
|---|---|---|
| **स्थिति** 1 | दोनों संख्याएँ 1 से बड़ी हैं। (उदाहरणार्थ $\frac{4}{3} \times 4$) | गुणनफल ($\frac{16}{3}$) दोनों संख्याओं से बड़ा है। |
| **स्थिति** 2 | दोनों संख्याएँ 0 और 1 के बीच में हैं। (उदाहरणार्थ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$) | गुणनफल ($\frac{3}{10}$) दोनों संख्याओं से छोटा है। |
| **स्थिति** 3 | एक संख्या 0 और 1 के बीच की है तथा एक संख्या 1 से बड़ी है। (उदाहरणार्थ $\frac{3}{4} \times 5$) | गुणनफल ($\frac{15}{4}$) 1 से बड़ी संख्या से छोटा है और 0 और 1 के बीच की संख्या से बड़ा है। |

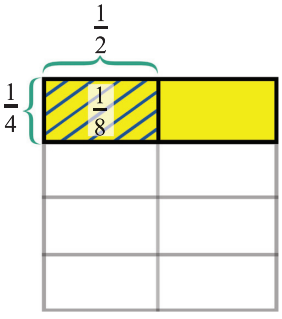
प्रत्येक स्थिति के लिए और अधिक उदाहरणों का निर्माण कीजिए तथा गुणनफल एवं गुणा की जाने वाली संख्याओं के बीच के संबंध को ध्यान से देखिए।

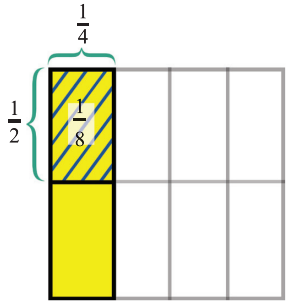
? आप गुणा की जाने वाली संख्याओं और गुणनफल के बीच संबंध के विषय में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? रिक्त स्थान भरिए—

- जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक संख्या 0 और 1 के बीच की हो तो गुणनफल दूसरी संख्या से _____ (बड़ा/छोटा) होता है।
- जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक संख्या 1 से बड़ी हो तो गुणनफल दूसरी संख्या से _____ (बड़ा/छोटा) होता है।

## गुणन का क्रम

हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$




अब $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ क्या होगा?

यह भी $\frac{1}{8}$ होगा।

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

सामान्य रूप से ध्यान दें कि आयत का क्षेत्रफल सदैव समान रहता है चाहे हम उसकी लंबाई व चौड़ाई को परस्पर बदल दें।

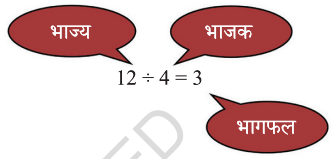
गुणन के क्रम से कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इस प्रकार

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

यह भिन्नों को गुणा करने के ब्रह्मगुप्त के सूत्र से भी देखा जा सकता है।

## 8.2 भिन्नों का विभाजन (भाग)

$12 \div 4$ क्या है? यह आप पहले से ही जानते हैं। परंतु क्या इस समस्या को गुणन समस्या के रूप में पुनः व्यक्त किया जा सकता है?




4 को किससे गुणा किया जाए कि 12 प्राप्त हो? अर्थात

$$4 \times ? = 12$$

हम भिन्नों को विभाजित करने के लिए भाग को गुणन समस्या में परिवर्तित करने की इस तकनीक का उपयोग कर सकते हैं।

$1 \div \frac{2}{3}$ क्या है?

आइए, इसे गुणन समस्या के रूप में पुन: लिखें

$$\frac{2}{3} \times ? = 1$$

गुणनफल 1 प्राप्त करने के लिए $\frac{2}{3}$ को किससे गुणा किया जाए?

यदि हम किसी तरह 2 और 3 को निरस्त कर दें तो हमारे पास 1 बचता है।

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}} = 1$$

उत्तर

अत: $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

आइए, एक अन्य समस्या हल करें—

$$3 \div \frac{2}{3}$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यह $\frac{2}{3} \times ? = 3$ के समान है।

क्या आप उत्तर ज्ञात कर सकते हैं?

हम जानते हैं कि $\frac{2}{3}$ को किससे गुणा किया जाए कि 1 प्राप्त हो। 3 प्राप्त करने के लिए हमें बस इसे 3 से गुणा करने की आवश्यकता है।

$$\frac{2}{3} \times \boxed{\frac{3}{2} \times 3} = 3$$

उत्तर

अत: $3 \div \frac{2}{3} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$ क्या है?

इसे गुणन समस्या के रूप में पुन: लिखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{1}{2} \times ? = \frac{1}{5}$$

इसे हम कैसे हल करते हैं?

$$\frac{1}{2} \times \boxed{2 \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

उत्तर

अत: $\frac{1}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ क्या होगा?

इसे गुणन के रूप में पुन: लिखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{3}{5} \times ? = \frac{2}{3}$$

हम इसे कैसे हल करेंगे?

$$\frac{3}{5} \times \boxed{\frac{5}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

उत्तर

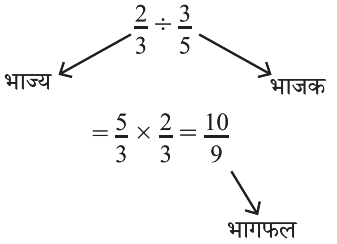
अत: $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

## चर्चा

उपरोक्त विभाजन की प्रत्येक समस्या में हमने उत्तर कैसे पाया इसका अवलोकन कीजिए। दो भिन्नों का विभाजन कैसे किया जाता है क्या इसके लिए हम एक नियम बना सकते हैं?
आइए, हम पिछली समस्या पर विचार करें।

प्रत्येक विभाजन समस्या में हमारे पास भाज्य, भाजक और भागफल होता है। भागफल प्राप्त करने के लिए हम जिस तकनीक का प्रयोग कर रहे हैं, वह है—




1. पहले हम वह संख्या ज्ञात करते हैं जिसे भाजक से गुणा करने पर 1 प्राप्त हो। हम देखते हैं कि प्राप्त संख्या एक भिन्न है जिसका अंश भाजक का हर है और जिसका हर भाजक का अंश है।

भाजक $\frac{3}{5}$ के लिए यह भिन्न $\frac{5}{3}$ है। हम $\frac{5}{3}$ को $\frac{3}{5}$ का **व्युत्क्रम** कहते हैं।

जब हम किसी भिन्न को उसके व्युत्क्रम से गुणा करते हैं तो हमें 1 प्राप्त होता है। अत: हमारी तकनीक में पहला चरण है– भाजक का व्युत्क्रम ज्ञात करना।

2. तब हम भागफल प्राप्त करने के लिए भाज्य को इस व्युत्क्रम के साथ गुणा करते हैं। सारांशत:, दो भिन्नों को विभाजित करना—
   - भाजक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए
   - भागफल प्राप्त करने के लिए इसे भाज्य से गुणा कीजिए।

अत:
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{c \times b}$$

इसे पुन: इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

भिन्नों के योग, घटाने और गुणन की जिन विधियों और सूत्रों को आपने पहले सीखा था, वस्तुत: भिन्नों के विभाजन की इन विधियों और सूत्रों को सामान्य रूप से सर्वप्रथम ब्रह्मगुप्त ने अपने ग्रंथ *ब्रह्मस्फुट-सिद्धांत* (628 सामान्य संवत्) में ही स्पष्ट रूप से बता दिया था।

अत: उपरोक्त ब्रह्मगुप्त सूत्र का प्रयोग करते हुए उदाहरणार्थ $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ का मान ज्ञात करने के लिए हम लिखते हैं—

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$$

NOT TO BE @KTBS REPUBLISHED

### भाज्य, भाजक और भागफल

जब हम दो पूर्ण संख्याओं को विभाजित करते हैं तो हमें भागफल प्राप्त होता है, जैसे $6 \div 3$ का भागफल 2 है। यहाँ भागफल भाज्य से छोटा है।

$$6 \div 3 = 2, 2 < 6$$

परंतु क्या होगा जब हम 6 को $\frac{1}{4}$ से भाग करते हैं?

$$6 \div \frac{1}{4} = 24$$

यहाँ भागफल भाज्य से बड़ा है।

क्या होगा जब हम $\frac{1}{8}$ को $\frac{1}{4}$ से भाग करते हैं?

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

यहाँ भी भागफल भाज्य से बड़ा है।

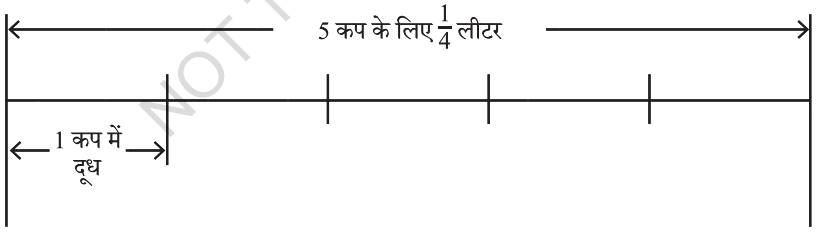
आपको क्या लगता है कि भागफल कब भाज्य से कम और कब भाज्य से अधिक है?

क्या भाजक और भागफल के बीच भी ऐसा ही एक संबंध है?

गुणन में ऐसे संबंधों की अपनी समझ का प्रयोग करके ऊपर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

## 8.3 भिन्नों से संबंधित कुछ समस्याएँ

**उदाहरण 3** — लीना 5 कप चाय बनाती है। इसके लिए वह $\frac{1}{4}$ लीटर दूध उपयोग करती है। चाय के प्रत्येक कप में कितना दूध है?




लीना 5 कप चाय में $\frac{1}{4}$ लीटर दूध उपयोग करती है। इसलिए 1 कप चाय में दूध की मात्रा होनी चाहिए—

$$\frac{1}{4} \div 5$$

इसे गुणन में लिखने पर हमें प्राप्त होता है

$$5 \times (\text{प्रति कप दूध}) = \frac{1}{4}$$

© KVBS NOT TO BE REPUBLISHED

हम ब्रह्मगुप्त विधि के अनुसार निम्न प्रकार से विभाजन करते हैं—

5 (भाजक) का व्युत्क्रम $\frac{1}{5}$ है।

इस व्युत्क्रम को भाज्य ( $\frac{1}{4}$ ) से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

इसलिए चाय के प्रत्येक कप में $\frac{1}{20}$ लीटर दूध है।

**उदाहरण 4**— ऐसे भिन्न जो इकाई भिन्न नहीं हैं इनके साथ कार्य करने के कुछ सबसे पुरातन उदाहरण सबसे प्राचीन ज्यामिति ग्रंथ *शुल्बसूत्र* में पाए जाते हैं। यहाँ बौधायन के *शुल्बसूत्र* (लगभग 800 सामान्य संवत् पूर्व) से एक उदाहरण लिया गया है।

$7\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई क्षेत्र को वर्गाकार ईंटों से ढकिए जिनकी प्रत्येक भुजा $\frac{1}{5}$ इकाई की है।

ऐसी कितनी वर्गाकार ईंटों की आवश्यकता है?

प्रत्येक वर्गाकार ईंट का क्षेत्रफल $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ वर्ग इकाई है।

ढके जाने वाला कुल क्षेत्रफल है $7\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई $= \frac{15}{2}$ वर्ग इकाई

जैसा कि (ईंटों की संख्या) × (एक ईंट का क्षेत्रफल) = कुल क्षेत्रफल

$$\text{ईंटों की संख्या} = \frac{15}{2} \div \frac{1}{25}$$

भाजक का व्युत्क्रम 25 है।

प्राप्त व्युत्क्रम को भाज्य से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$25 \times \frac{15}{2} = \frac{25 \times 15}{2} = \frac{375}{2}$$

**उदाहरण 5**— इस समस्या की चतुर्वेद पृथूदक स्वामी (लगभग 860 सामान्य संवत्) ने ब्रह्मगुप्त के ग्रंथ *ब्रह्मस्फुट-सिद्धांत* पर अपने टीकाग्रंथ में भी चर्चा की है।

चार फव्वारे एक कुण्ड को भरते हैं। पहला फव्वारा कुण्ड को एक दिन में भर सकता है। दूसरा उसे आधे दिन में भर सकता है। तीसरा उसे एक चौथाई दिन में भर सकता है। चौथा फव्वारा उस कुण्ड को $\frac{1}{5}$ दिन में भर सकता है। यदि उन सभी को एक साथ खोल दिया जाए तो वे सभी कुण्ड को कितने समय में भर देंगे?

आइए, इस समस्या को चरणबद्ध तरीके से हल करें।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

एक दिन में कितनी बार—

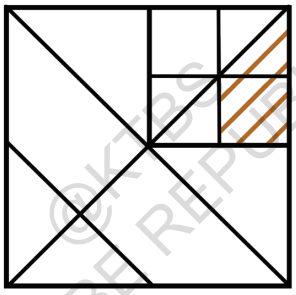
- पहला फव्वारा कुण्ड को भर देगा = $1 \div 1 = 1$
- दूसरा फव्वारा कुण्ड को भर देगा = $1 \div \frac{1}{2} =$ _____
- तीसरा फव्वारा कुण्ड को भर देगा = $1 \div \frac{1}{4} =$ _____
- चौथा फव्वारा कुण्ड को भर देगा = $1 \div \frac{1}{5} =$ _____

1 दिन में चारों फव्वारे मिलकर कुण्ड को ____ + ____ + ____ + ____ = 12 बार भरेंगे।

इस प्रकार चारों फव्वारों को एक साथ कुण्ड भरने में कुल $\frac{1}{12}$ दिन का समय लगेगा।

## भिन्नात्मक संबंध

यहाँ एक वर्ग है जिसके अंदर कुछ रेखाएँ खींची गई हैं।



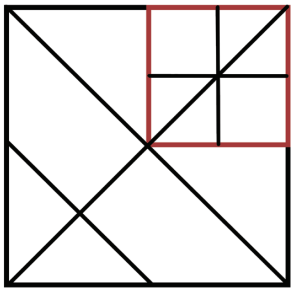
चित्र 8.4

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

गणित चर्चा

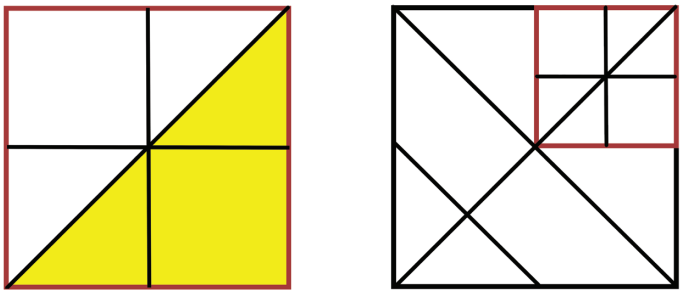
छायांकित क्षेत्र पूरे वर्ग के क्षेत्रफल का कितना भाग घेरता है?

इस समस्या को हल करने की विभिन्न विधियाँ हैं। उनमें से एक यह है—
माना पूरे वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है।
हम देख सकते हैं कि दायाँ शीर्ष वर्ग पूरे वर्ग (चित्र 8.5 में) के क्षेत्रफल का $\frac{1}{4}$ भाग घेरता है।



चित्र 8.5

लाल वर्ग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$ वर्ग इकाई है।



चित्र 8.6

आइए, इस लाल वर्ग को देखें। इसके अंदर बने त्रिभुज (पीले रंग में) का क्षेत्रफल लाल वर्ग के क्षेत्रफल का आधा है। अत:

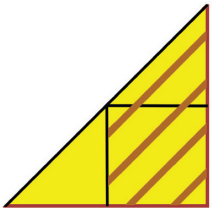
पीले त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ वर्ग इकाई

इस पीले त्रिभुज का कितना भाग छायांकित है?

छायांकित क्षेत्र पीले त्रिभुज के क्षेत्रफल का $\frac{3}{4}$ भाग घेरता है। क्या आप पता कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

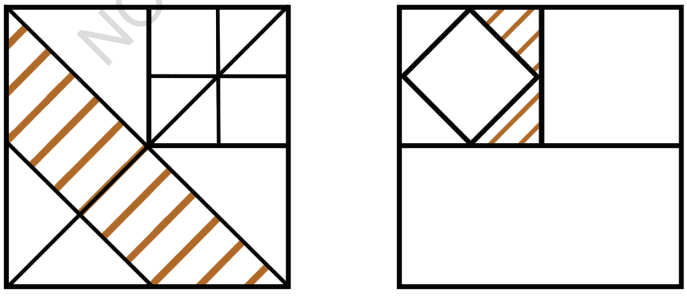
छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$ वर्ग इकाई

इस प्रकार छायांकित क्षेत्र पूरे वर्ग के क्षेत्रफल का $\frac{3}{32}$ भाग घेरता है।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र में बड़े वर्ग का वह भाग ज्ञात कीजिए जिसे छायांकित क्षेत्र घेरता है।



अगले अध्याय में हम इस प्रकार की और भी रोचक समस्याओं को हल करेंगे।

## एक द्रम्म संबंधी दान

निम्नलिखित समस्या भास्कराचार्य (भास्कर द्वितीय) द्वारा 1150 सामान्य संवत् में रचित ग्रंथ *लीलावती* से अनुवादित है।

"हे बुद्धिमान! एक कृपण (कंजूस) ने एक भिखारी को एक द्रम्म का $\frac{1}{5}$ का $\frac{1}{16}$ का $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$ का $\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{4}$ भाग दिया। यदि आप भिन्नों का गणित अच्छे प्रकार जानते हैं तो आप मुझे बताओ कि कृपण ने भिखारी को कितनी कौड़ियाँ दीं?"

द्रम्म उन दिनों में उपयोग किए जाने वाले चाँदी के सिक्के को संदर्भित करता है। कहानी कहती है कि 1 द्रम्म 1280 कौड़ियों के समतुल्य था। आइए, देखें कि व्यक्ति ने द्रम्म का कितना भाग दिया —

$$\text{एक द्रम्म का } \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4}\right) \text{ वाँ भाग}$$

हल करने पर हमें प्राप्त होता है $\frac{6}{7680}$

इसे न्यूनतम पदों में सरल करने पर हमें प्राप्त होता है —

$$\frac{6}{7680} = \frac{1}{1280}$$

अत: भिखारी को 1 कौड़ी दी गई।

आप उत्तर में भास्कराचार्य का विनोद देख सकते हैं। कृपण ने भिखारी को सबसे कम मूल्य का केवल एक सिक्का दिया अर्थात मात्र एक कौड़ी दी।

बारहवीं शताब्दी के आस-पास भारतीय महाद्वीप के विभिन्न साम्राज्यों में अनेक प्रकार के सिक्के प्रचलन में थे। अधिकांशत: सोने के सिक्के जिन्हें 'दीनार' (गद्यन और हूण) कहा जाता था; चाँदी के सिक्के जिन्हें 'द्रम्म' या 'टंका' कहा जाता था; ताँबे के सिक्के जिन्हें 'कासु' या 'पण' और 'मशक' कहा जाता था; और 'कौड़ियों' का उपयोग किया जाता था। इन सिक्कों की सटीक विनिमय (रूपांतरण) दर क्षेत्र, समय-अवधि, आर्थिक स्थितियों, सिक्कों के वजन और उनकी शुद्धता के आधार पर निर्भर होती थी।

सोने के सिक्कों का मूल्य अधिक होता था और इनका उपयोग बड़े लेन-देन और धन संचय के लिए किया जाता था। चाँदी के सिक्कों का उपयोग अधिकांशत: प्रतिदिन के लेन-देन में किया जाता था। ताँबे के सिक्कों का मूल्य कम होता था और इनका उपयोग छोटे लेन-देन में किया जाता था। कौड़ी सबसे कम मूल्य वर्ग की मुद्रा थी और इनका उपयोग बहुत छोटे लेन-देन में अथवा धनराशि वापस करने के रूप में किया जाता था।

यदि हम मानें कि 1 सोने का दीनार = 12 चाँदी के द्रम्म, 1 चाँदी का द्रम्म = 4 ताँबे के पण, 1 ताँबे का पण = 6 मशक और 1 पण = 30 कौड़ियाँ,

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1 ताँबे का पण = $\frac{1}{48}$ सोने की दीनार $\left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}\right)$

1 कौड़ी = _____ ताँबे के पण

1 कौड़ी = _____ सोने की दीनार

## एक ऐतिहासिक झलक

जैसा आपने देखा कि भिन्न एक महत्वपूर्ण संख्या है यह विभिन्न प्रकार की दैनिक जीवन की समस्याओं में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है, जिसमें मात्राओं या परिमाणों को समान रूप में विभाजित करना और साझा करना सम्मिलित है। जोड़ने, घटाने, गुणन और विभाजन की अंकगणितीय संक्रियाओं से युक्त जिन गैर-इकाई भिन्नों का आज हम उपयोग करते हैं, उनकी सामान्य अवधारणा बड़े पैमाने पर भारत में विकसित हुई। प्राचीन भारतीय ज्यामिति ग्रंथों को *शुल्बसूत्र* कहा जाता था। ये 800 सामान्य संवत् पूर्व रचे गए थे। ये ग्रंथ अनुष्ठानों के लिए अग्नि-वेदियों के निर्माण से संबंधित थे। इनमें सामान्य गैर-इकाई भिन्नों का व्यापक रूप से उपयोग किया गया था। इनमें ऐसे भिन्नों का विभाजन करना भी सम्मिलित था जैसा कि हमने उदाहरण 3 में देखा है।

भिन्नों ने भारत की लोकप्रिय संस्कृति में 150 सामान्य संवत् पूर्व से ही अपना स्थान बना लिया था जैसा कि प्रतिष्ठित जैन विद्वान उमास्वाति के दार्शनिक कार्य में भिन्नों को न्यूनतम पदों में व्यक्त करने के एक अनौपचारिक संदर्भ से प्रमाणित होता है।

हम भिन्नों पर जिन अंकगणितीय संक्रियाओं के सामान्य नियमों का वर्तमान समय में उपयोग करते हैं, वस्तुत: वे नियम सर्वप्रथम 628 सामान्य संवत् में ब्रह्मगुप्त द्वारा अपने ग्रंथ *ब्रह्मस्फुट-सिद्धांत* में संहिताबद्ध किए गए थे। हम सामान्य भिन्नों को जोड़ने और घटाने के लिए उनकी विधियों को पहले ही देख चुके हैं। सामान्य भिन्नों को गुणा करने के लिए ब्रह्मगुप्त ने लिखा है—

"दो या दो से अधिक भिन्नों का गुणनफल अंशों के गुणनफल को हरों के गुणनफल से विभाजित करके प्राप्त किया जाता है।" (*ब्रह्मस्फुटसिद्धांत*, श्लोक 12.1.3)

सूत्र है— $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

सामान्य भिन्नों के विभाजन के लिए ब्रह्मगुप्त ने लिखा है—

"भाजक के अंश को और हर को आपस में बदलकर भिन्नों का विभाजन किया जाता है; फिर भाज्य के अंश को नए अंश से और हर को नए हर से गुणा किया जाता है।"

भास्कर द्वितीय ने 1150 सामान्य संवत् में अपनी पुस्तक *लीलावती* में ब्रह्मगुप्त के कथन को व्युत्क्रम की धारणा के संदर्भ में और अधिक स्पष्ट किया है।

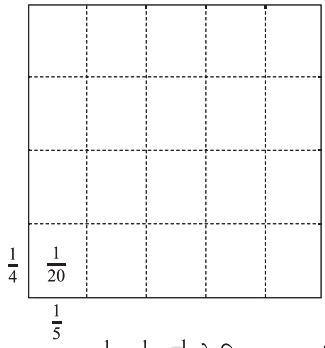
''एक भिन्न का दूसरे भिन्न द्वारा विभाजन, पहले भिन्न का दूसरे भिन्न के व्युत्क्रम के साथ गुणनफल के बराबर होता है।'' (*लीलावती*, श्लोक 2.3.40)

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

दोनों श्लोक इस सूत्र के समकक्ष हैं।

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

भास्कर प्रथम ने आर्यभट्ट के 499 सामान्य संवत् के कार्य पर 629 सामान्य संवत् में अपने टीकाग्रंथ *आर्यभटीय भाष्य* में भिन्नों के गुणन की ज्यामितीय व्याख्या निरूपण (जिसे हमने पहले देखा था) में एक वर्ग को लंबाई और चौड़ाई के अनुरूप समान भागों में विभाजित करके आयतों में विभाजित करने के रूप में वर्णित किया था।



*भास्कर प्रथम का $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ के लिए दृश्य स्पष्टीकरण*

अनेक अन्य भारतीय गणितज्ञों, जैसे — श्रीधराचार्य (लगभग 750 सामान्य संवत्), महावीराचार्य (लगभग 850 सामान्य संवत्), चतुर्वेद पृथूदकस्वामी (लगभग 860 सामान्य संवत्) और भास्कर द्वितीय (लगभग 1150 सामान्य संवत्) ने भिन्नों के अंकगणित के उपयोग को और अधिक विकसित किया।

भिन्नों और उन पर अंकगणितीय संक्रियाओं का भारतीय सिद्धांत प्रसारित किया गया और इसका प्रयोग मोरक्को के अल-हस्सर (लगभग 1192 सामान्य संवत्) जैसे अरब और अफ्रीकी गणितज्ञों द्वारा आगे विकसित किया गया। यह सिद्धांत अगली कुछ शताब्दियों में अरबों के माध्यम से यूरोप में प्रसारित हुआ और केवल सत्रहवीं शताब्दी के आस-पास यूरोप में सामान्य उपयोग में आया। इसके बाद यह विश्वभर में फैल गया। यह सिद्धांत आज आधुनिक गणित में वास्तव में अपरिहार्य है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

## पता लगाइए

1. निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए।

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3 \div \frac{7}{9}$ | $\frac{14}{4} \div 2$ | $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$ | $\frac{14}{6} \div \frac{7}{3}$ |
| $\frac{4}{3} \div \frac{3}{4}$ | $\frac{7}{4} \div \frac{1}{7}$ | $\frac{8}{2} \div \frac{4}{15}$ | |
| $\frac{1}{5} \div \frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6} \div \frac{11}{12}$ | $3\frac{2}{3} \div 1\frac{3}{8}$ | |

2. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न के लिए उस व्यंजक को चुनिए जो हल का वर्णन करता हो। फिर उसे सरल कीजिए।

   (a) मारिया ने विद्यालय के लिए बनाए गए थैलों को सजाने के लिए 8 मीटर फीता (रिबन) खरीदा। उसने प्रत्येक थैले के लिए $\frac{1}{4}$ मीटर फीते का उपयोग किया और सारा फीता खत्म कर दिया। उसने कितने थैलों को सजाया?

   (i) $8 \times \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

   (iii) $8 \div \frac{1}{4}$ (iv) $\frac{1}{4} \div 8$

   (b) 8 बिल्ले (Badges) बनाने के लिए $\frac{1}{2}$ मीटर फीते (रिबन) उपयोग किया जाता है। प्रत्येक बिल्ला बनाने के लिए उपयोग किए गए फीते की लंबाई क्या है?

   (i) $8 \times \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$

   (iii) $8 \div \frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{2} \div 8$

   (c) एक रोटी बनाने वाले (Baker) को बड़ी रोटी बनाने के लिए $\frac{1}{6}$ किलोग्राम आटे की आवश्यकता है। उसके पास 5 कि.ग्रा. आटा है। उससे वह कितनी रोटियाँ बना सकता है?

   (i) $5 \times \frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6} \div 5$

   (iii) $5 \div \frac{1}{6}$ (iv) $5 \times 6$

3. यदि 12 रोटियाँ बनाने के लिए $\frac{1}{4}$ कि.ग्रा. आटे का उपयोग किया जाता है तो 6 रोटियाँ बनाने के लिए कितना आटा उपयोग होता है?

4. नौवीं शताब्दी ई. में श्रीधराचार्य द्वारा लिखित पुस्तक *पाटीगणित* में इस समस्या का उल्लेख है, "मित्र! सोचकर बताइए कि $1 \div \frac{1}{6}$, $1 \div \frac{1}{10}$, $1 \div \frac{1}{13}$, $1 \div \frac{1}{9}$ और $1 \div \frac{1}{2}$ को एक साथ जोड़ने पर क्या प्राप्त होगा?" मित्र का क्या उत्तर होगा?

5. मीरा एक उपन्यास पढ़ रही है, जिसमें 400 पृष्ठ हैं। उसने कुल पृष्ठों का $\frac{1}{5}$ भाग कल पढ़ा और आज कुल पृष्ठों का $\frac{3}{10}$ भाग पढ़ा। उपन्यास को पूरा पढ़ने के लिए उसे अभी और कितने पृष्ठों को पढ़ने की आवश्यकता है?

@CTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. एक कार 1 लीटर पेट्रोल का उपयोग करके 16 कि.मी. चलती है। $2\frac{3}{4}$ लीटर पेट्रोल का उपयोग करके यह कितनी दूर तक जाएगी?

7. अमृतपाल अपनी छुट्टियों के लिए एक गंतव्य का चयन करता है। यदि वह एक रेलगाड़ी से जाता है तो वहाँ पहुँचने में उसे $5\frac{1}{6}$ घंटे लगेंगे। यदि वह हवाई जहाज से जाता है तो वहाँ पहुँचने में उसे $\frac{1}{2}$ घंटा लगेगा? हवाई जहाज द्वारा जाने से कितना समय बचेगा?

8. मरियम की दादी माँ एक केक बनाती हैं। मरियम और उसके चचेरे भाई केक का $\frac{4}{5}$ भाग खा लेते हैं। शेष केक को मरियम की तीन सहेलियों द्वारा बराबर-बराबर बाँट लिया जाता है। प्रत्येक सहेली को केक का कितना भाग मिला?

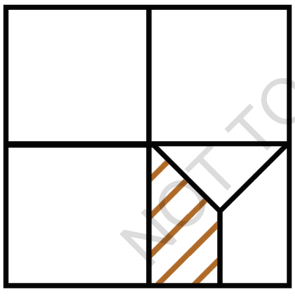
9. $\left(\frac{565}{465} \times \frac{707}{676}\right)$ के गुणनफल का वर्णन करने के लिए एक अथवा अधिक विकल्पों को चुनिए—

(a) $> \frac{565}{465}$ (b) $< \frac{565}{465}$

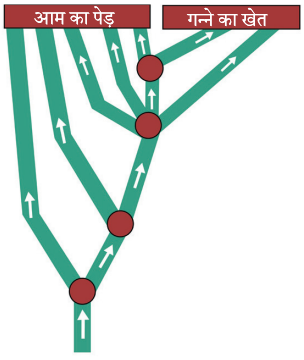
(c) $> \frac{707}{676}$ (d) $< \frac{707}{676}$

(e) $> 1$ (f) $< 1$

10. पूरे वर्ग का कितना भाग छायांकित है?



11. चींटियों का एक समूह भोजन की खोज में निकला। जैसे-जैसे वे खोजते हैं, वे प्रत्येक बिंदु पर समान रूप से विभाजित होते रहते हैं (जैसा कि चित्र 8.7 में दिखाया गया है) और दो भोजन के स्रोतों पर पहुँचते हैं— एक समूह आम के पेड़ के पास और दूसरा समूह गन्ने के खेत के पास। मूल समूह का कितना भाग प्रत्येक खाद्य स्रोत तक पहुँचा?




चित्र 8.7

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

12. $1-\frac{1}{2}$ क्या है?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$ ?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$ ?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$ ?

एक सामान्य कथन बनाइए और व्याख्या कीजिए।

## सारांश

- भिन्नों के गुणन के लिए ब्रह्मगुप्त का सूत्र—

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

- भिन्नों को गुणा करते समय यदि अंश और हर में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो तो हम अंश और हर को गुणा करने से पहले उन्हें काट सकते हैं।
- गुणन में जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक संख्या 0 और 1 के बीच होती है तो गुणनफल दूसरी संख्या से छोटा होता है। यदि गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक संख्या 1 से बड़ी होती है तो गुणनफल दूसरी संख्या से बड़ा होता है।
- भिन्न $\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ होता है। जब हम भिन्न को उसके व्युत्क्रम से गुणा करते हैं तो गुणनफल 1 प्राप्त होता है।
- भिन्नों के विभाजन के लिए ब्रह्मगुप्त का सूत्र—

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

- विभाजन में जब, भाजक 0 और 1 के बीच होता है तो भागफल भाज्य से बड़ा या अधिक होता है। जब भाजक 1 से बड़ा होता है तो भागफल भाज्य से छोटा या कम होता है।

© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

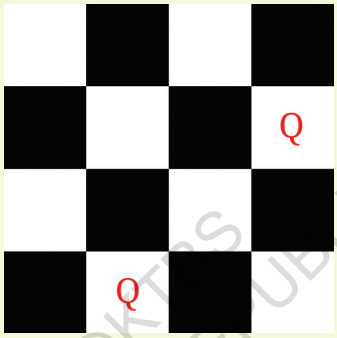


पहेली का समय!

## शतरंज की पहेलियाँ
## गैर-आक्रमणकारी रानियाँ

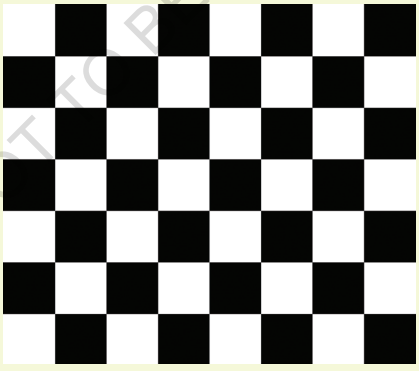
शतरंज दो खिलाड़ियों का एक लोकप्रिय रणनीतिक खेल है। इस खेल की उत्पत्ति भारत में हुई है। यह 8 × 8 के वर्गाकार जाल (ग्रिड) पर खेला जाता है। यहाँ सफेद और काले रंग के मोहरों के दो सेट होते हैं, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए 1 सेट। पता लगाइए कि प्रत्येक मोहरे को कैसे चला जाता है और इस खेल के नियम क्या हैं?

यहाँ शतरंज पर आधारित एक प्रसिद्ध पहेली है। अपनी वर्तमान स्थिति से रानी का मोहरा क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर या विकर्ण की दिशा में आगे बढ़ सकता है। 4 रानियों को इस प्रकार रखें कि कोई भी 2 रानियाँ एक-दूसरे पर आक्रमण न करें। उदाहरण के लिए नीचे दी गई व्यवस्था मान्य नहीं है, क्योंकि रानियाँ एक-दूसरे पर आक्रमण की रेखा में हैं।




© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

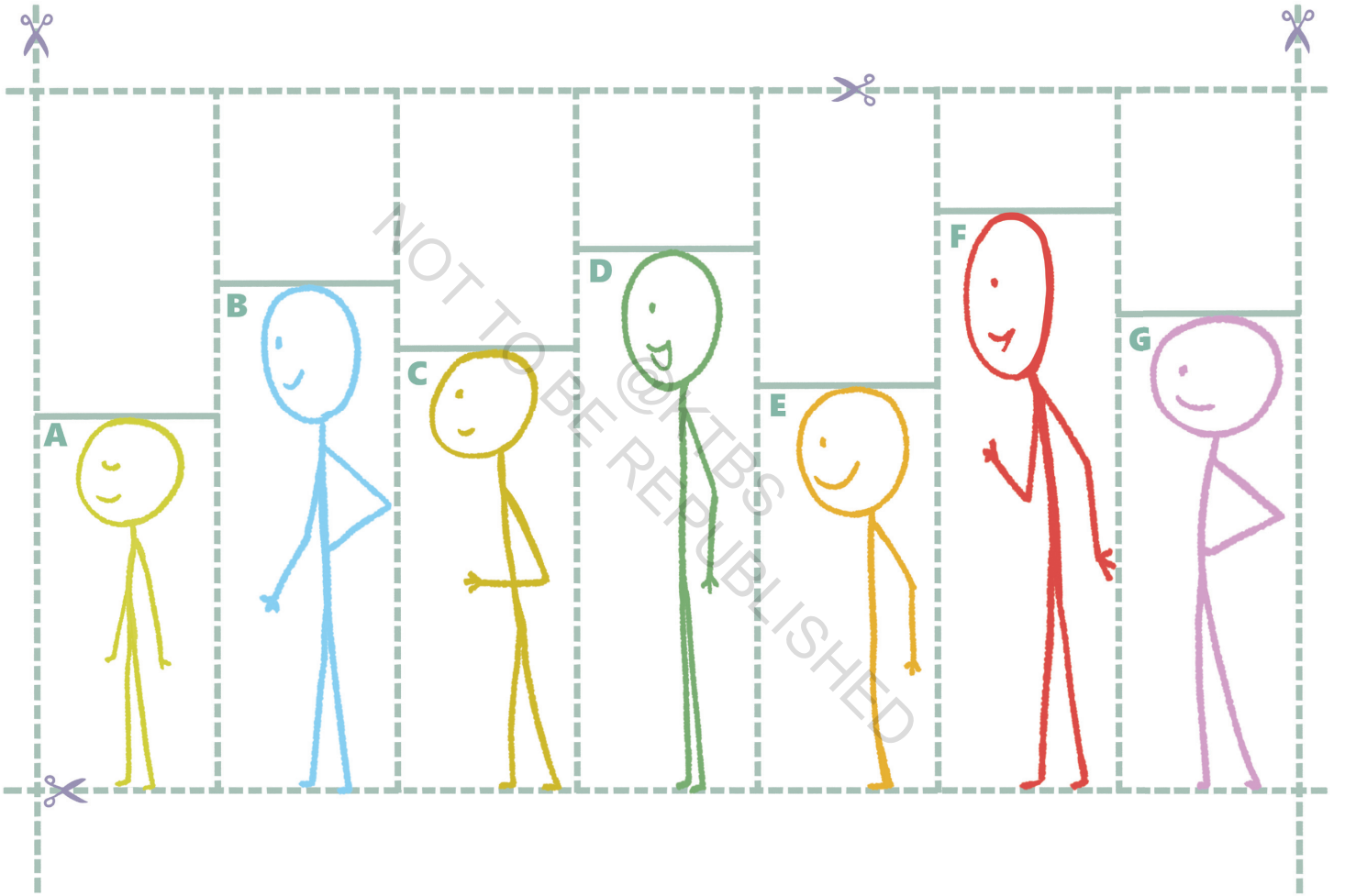
अब 8 रानियों को इस 8 × 8 ग्रिड पर इस प्रकार रखिए कि कोई भी 2 रानियाँ एक-दूसरे पर आक्रमण न करें।





# अधिगम सामग्री पत्रक

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED




NOT TO BE REPUBLISHED
©KTBS

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED