



Government of Karnataka

# गणित MATHEMATICS

## 10

दसवीं कक्षा  
Tenth Standard  
भाग - 2



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्  
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

**Karnataka Textbook Society (R.)**

6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru - 560 003

## ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer*, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT*, Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT*, S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT*, Kendriya Vidyalaya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT*, JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master*, Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT*, K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT*, K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT*, Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT*, JNV, Neriya Mangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT*,

CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT*, D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT*, Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT*, JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge*, Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator*, Naresh Kumar; *Copy Editor*, Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader*, Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

## विषय सूची

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>8. त्रिकोणमिति का परिचय</b>                       | <b>1</b>  |
| 8.1 भूमिका                                           | 1         |
| 8.2 त्रिकोणमितीय अनुपात                              | 3         |
| 8.3 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात         | 11        |
| 8.4 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ                         | 17        |
| 8.5 सारांश                                           | 22        |
| <b>9. त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग</b>               | <b>23</b> |
| 9.1 ऊँचाइयाँ और दूरियाँ                              | 23        |
| 9.2 सारांश                                           | 33        |
| <b>10. वृत्त</b>                                     | <b>34</b> |
| 10.1 भूमिका                                          | 34        |
| 10.2 वृत्त की स्पर्श रेखा                            | 35        |
| 10.3 एक बिंदु से एक वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या | 38        |
| 10.4 सारांश                                          | 43        |
| <b>11. वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल</b>              | <b>44</b> |
| 11.1 त्रिज्यखंड और वृत्तखंड के क्षेत्रफल             | 44        |
| 11.2 सारांश                                          | 50        |
| <b>12. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन</b>                 | <b>51</b> |
| 12.1 भूमिका                                          | 51        |
| 12.2 ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल            | 52        |
| 12.3 ठोसों के संयोजन का आयतन                         | 58        |
| 12.4 सारांश                                          | 62        |

|                                          |            |
|------------------------------------------|------------|
| <b>13. सांख्यिकी</b>                     | <b>63</b>  |
| 13.1 भूमिका                              | 63         |
| 13.2 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य           | 63         |
| 13.3 वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक           | 76         |
| 13.4 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक          | 82         |
| 13.5 सारांश                              | 94         |
| <b>14. प्रायिकता</b>                     | <b>96</b>  |
| 14.1 प्रायिकता - एक सैद्धांतिक दृष्टिकोण | 96         |
| 14.2 सारांश                              | 113        |
| <b>परिशिष्ट 2 - गणितीय निदर्शन</b>       | <b>114</b> |
| <b>उत्तर/संकेत</b>                       | <b>127</b> |



1063CH08

## त्रिकोणमिति का परिचय

# 8

*There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.*

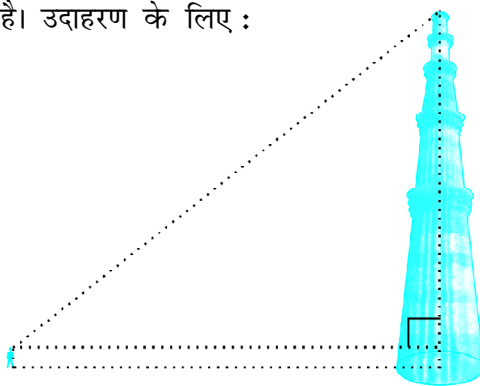
(संभवतः त्रिकोणमिति के अतिरिक्त गणित की कोई ऐसी शाखा नहीं है, जो उसकी मध्य स्थिति का स्थान ले सके।)

– J.F. Herbart (1890)

### 8.1 भूमिका

आप अपनी पिछली कक्षाओं में त्रिभुजों, विशेष रूप से समकोण त्रिभुजों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आइए हम अपने आस-पास के परिवेश से कुछ ऐसे उदाहरण लें, जहाँ समकोण त्रिभुजों के बनने की कल्पना की जा सकती है। उदाहरण के लिए :

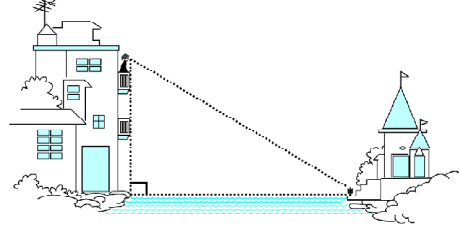
- मान लीजिए एक स्कूल के छात्र कुतुबमीनार देखने गए हैं। अब, यदि कोई छात्र मीनार के शिखर को देख रहा हो, तो एक समकोण त्रिभुज बनने की कल्पना की जा सकती है जैसाकि आकृति 8.1 में दिखाया गया है। क्या वास्तव में मापे बिना ही छात्र मीनार की ऊँचाई ज्ञात कर सकता है?



आकृति 8.1

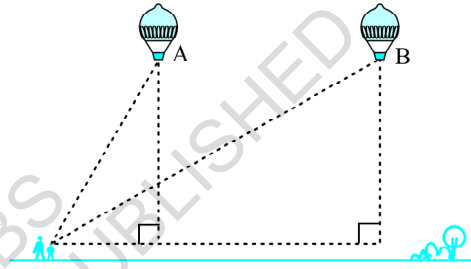
- मान लीजिए एक लड़की नदी के किनारे स्थित अपने मकान की बालकनी पर बैठी हुई है और वह इस नदी के दूसरे किनारे पर स्थित पास ही के मंदिर की एक निचली सीढ़ी पर रखे गमले को देख रही है। इस स्थिति में, एक समकोण त्रिभुज बनने की

कल्पना की जा सकती है जैसाकि आकृति 8.2 में दिखाया गया है, यदि आपको वह ऊँचाई ज्ञात हो, जिस पर लड़की बैठी हुई है, तो क्या आप नदी की चौड़ाई ज्ञात कर सकते हैं?



आकृति 8.2

3. मान लीजिए एक गर्म हवा वाला गुब्बारा हवा में उड़ रहा है। आसमान में उड़ने पर इस गुब्बारे को एक लड़की देख लेती है और इस बात को बताने के लिए वह अपनी माँ के पास दौड़कर जाती है। गुब्बारे को देखने के लिए उसकी माँ तुरंत घर से बाहर निकल आती है। अब मान लीजिए कि जब पहले-पहल लड़की गुब्बारे को देखती है, तब गुब्बारा बिंदु A पर था। जब माँ-बेटी दोनों ही गुब्बारे को देखने के लिए बाहर निकलकर आती हैं तब तक गुब्बारा एक अन्य बिंदु B तक आ चुका होता है। क्या आप जमीन के उस स्थान से, जहाँ माँ और बेटी दोनों खड़ी हैं, B की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं?



आकृति 8.3

ऊपर बताई गई सभी स्थितियों में दूरियाँ अथवा ऊँचाईयाँ कुछ गणितीय तकनीकों को, जो त्रिकोणमिति नामक गणित की एक शाखा के अंतर्गत आते हैं, लागू करके ज्ञात किया जा सकता है। अंग्रेजी शब्द 'trigonometry' की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों 'tri' (जिसका अर्थ है तीन), 'gon' (जिसका अर्थ है, भुजा) और 'metron' (जिसका अर्थ है माप) से हुई है। वस्तुतः **त्रिकोणमिति** में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के संबंधों का अध्ययन किया जाता है। प्राचीन काल में त्रिकोणमिति पर किए गए कार्य का उल्लेख मिस्र और बेबीलॉन में मिलता है। प्राचीन काल के खगोलविद् त्रिकोणमिति का प्रयोग पृथ्वी से तारों और ग्रहों की दूरियाँ मापने में करते थे। आज भी इंजीनियरिंग और भौतिक विज्ञान में प्रयुक्त अधिकांश प्रौद्योगिकीय उन्नत विधियाँ त्रिकोणमितीय संकल्पनाओं पर आधारित हैं।

इस अध्याय में हम एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के कुछ अनुपातों का उसके न्यून कोणों के सापेक्ष अध्ययन करेंगे जिन्हें **कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात** कहते हैं। यहाँ हम अपनी चर्चा केवल न्यून कोणों तक ही सीमित रखेंगे। यद्यपि इन अनुपातों का विस्तार दूसरे

कोणों के लिए भी किया जा सकता है। यहाँ हम  $0^\circ$  और  $90^\circ$  के माप वाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी परिभाषित करेंगे। हम कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित करेंगे और इन अनुपातों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities), जिन्हें **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ** कहा जाता है, स्थापित करेंगे।

## 8.2 त्रिकोणमितीय अनुपात

अनुच्छेद 8.1 में आप विभिन्न स्थितियों में बने कुछ समकोण त्रिभुजों की कल्पना कर चुके हैं।

आइए हम एक समकोण त्रिभुज ABC लें, जैसाकि आकृति 8.4 में दिखाया गया है।

;  $\angle CAB$  (या संक्षेप में कोण A) एक न्यून कोण है। कोण A के सापेक्ष भुजा BC की स्थिति पर ध्यान दीजिए। यह भुजा कोण A के सामने है। इस भुजा को हम कोण A की **सम्मुख भुजा** कहते हैं, भुजा AC समकोण त्रिभुज का **कर्ण** है और भुजा AB,  $\angle A$  का एक भाग है। अतः इसे हम कोण A की **संलग्न भुजा** कहते हैं।

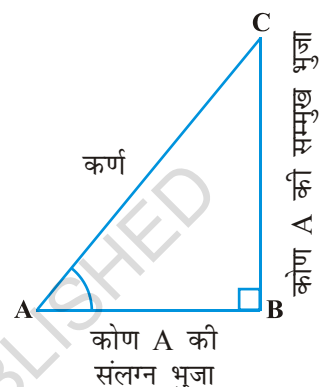
ध्यान दीजिए कि कोण A के स्थान पर कोण C लेने पर भुजाओं की स्थिति बदल जाती है। (देखिए आकृति 8.5)

पिछली कक्षाओं में आप “अनुपात” की संकल्पना के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। यहाँ अब हम समकोण त्रिभुज की भुजाओं से संबंधित कुछ अनुपातों को, जिन्हें हम त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं, परिभाषित करेंगे।

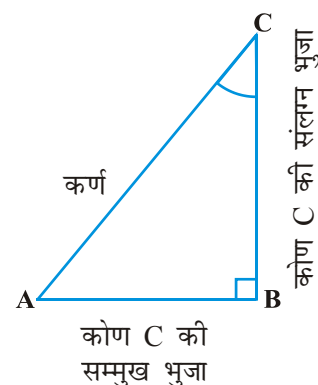
समकोण त्रिभुज ABC (देखिए आकृति 8.4) के कोण A के **त्रिकोणमितीय अनुपात** निम्न प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं:

$$\angle A \text{ का sine} = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ का cosine} = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$



आकृति 8.4



आकृति 8.5

$$\angle A \text{ का tangent} = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ का cosecant} = \frac{1}{\angle A \text{ का sine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ का secant} = \frac{1}{\angle A \text{ का cosine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ का cotangent} = \frac{1}{\angle A \text{ का tangent}} = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC}$$

ऊपर परिभाषित किए गए अनुपातों को संक्षेप में क्रमशः  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$ ,  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\sec A$  और  $\cot A$  लिखा जाता है। ध्यान दीजिए कि अनुपात  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\sec A$  और  $\cot A$  अनुपातों  $\sin A$ ,  $\cos A$  और  $\tan A$  के क्रमशः व्युत्क्रम होते हैं।

$$\text{और आप यहाँ यह भी देख सकते हैं कि } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ और}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

अतः एक समकोण त्रिभुज के एक न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज के कोण और उसकी भुजाओं की लंबाई के बीच के संबंध को व्यक्त करते हैं।

क्यों न यहाँ आप एक समकोण त्रिभुज के कोण C के त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित करने का प्रयास करें (देखिए आकृति 8.5)?

शब्द “sine” का सबसे पहला प्रयोग जिस रूप में आज हम करते हैं उसका उल्लेख 500 ई. में आर्यभट्ट द्वारा लिखित पुस्तक आर्यभटीयम् में मिलता है। आर्यभट्ट ने शब्द अर्ध-ज्या का प्रयोग अर्ध-जीवा के लिए किया था जिसने समय-अंतराल में ज्या या जीवा का संक्षिप्त रूप ले लिया। जब पुस्तक आर्यभटीयम् का अनुवाद अरबी भाषा में किया गया, तब शब्द जीवा को यथावत रख लिया गया। शब्द जीवा को साइनस (Sinus) के रूप में अनूदित किया गया, जिसका अर्थ वक्र है, जबकि अरबी रूपांतर को लैटिन में अनूदित किया



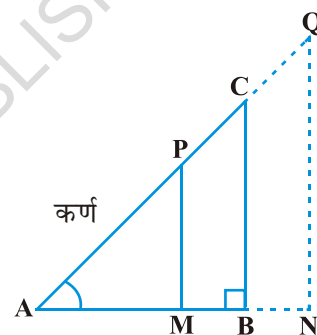
आर्यभट्ट  
476 – 550 सा.यु.

गया। इसके तुरंत बाद sine के रूप में प्रयुक्त शब्द sinus भी पूरे यूरोप में गणितीय पाठों में प्रयुक्त होने लगा। खगोलविद् के एक अंग्रेजी प्रोफेसर एडमंड गुंटर (1581-1626) ने पहले-पहल संक्षिप्त संकेत '*sin*' का प्रयोग किया था।

शब्दों '*cosine*' और '*tangent*' का उद्गम बहुत बाद में हुआ था। *cosine* फलन का उद्गम पूरक कोण के *sine* का अभिकलन करने को ध्यान में रखकर किया गया था। आर्यभट्ट ने इसे कोटिज्या का नाम दिया था। नाम *cosinus* का उद्गम एडमंड गुंटर के साथ हुआ था। 1674 में अंग्रेज गणितज्ञ सर जोनास मूरे ने पहले-पहल संक्षिप्त संकेत '*cos*' का प्रयोग किया था।

**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि प्रतीक  $\sin A$  का प्रयोग कोण A के  $\sin$  के संक्षिप्त रूप में किया गया है। यहाँ  $\sin A$ ,  $\sin$  और A का गुणनफल नहीं है। A से अलग रहकर '*sin*' का कोई अर्थ ही नहीं होता। इसी प्रकार  $\cos A$ , '*cos*' और A का गुणनफल नहीं है। इस प्रकार की व्याख्या अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ भी की जाती है।

अब, यदि हम समकोण त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर एक बिंदु P लें या बड़ी हुई भुजा AC पर बिंदु Q लें और AB पर लंब PM डालें और बड़ी हुई भुजा AB पर लंब QN डालें (देखिए आकृति 8.6), तो  $\triangle PAM$  के  $\angle A$  के त्रिकोणमितीय अनुपातों और  $\triangle QAN$  के  $\angle A$  के त्रिकोणमितीय अनुपातों में क्या अंतर होगा?



आकृति 8.6

इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने के लिए आइए पहले हम इन त्रिभुजों को देखें। क्या  $\triangle PAM$  और  $\triangle CAB$  समरूप हैं? आपको याद होगा कि अध्याय 6 में आप AA समरूपता कसौटी के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस कसौटी को लागू करने पर आप पाएँगे कि त्रिभुज PAM और CAB समरूप हैं। अतः समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म के अनुसार इन त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक हैं।

$$\text{अतः} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$$

$$\text{इससे हमें यह प्राप्त होता है} \quad \frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

इसी प्रकार  $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$ ,  $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$  आदि-आदि

इससे यह पता चलता है कि  $\Delta PAM$  के कोण  $A$  के त्रिकोणमितीय अनुपात और  $\Delta CAB$  के कोण  $A$  के त्रिकोणमितीय अनुपातों में कोई अंतर नहीं होता।

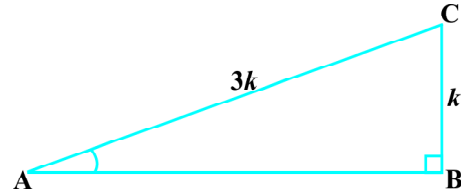
इसी प्रकार आप यह जाँच कर सकते हैं कि  $\Delta QAN$  में भी  $\sin A$  का मान (और अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान) समान बना रहता है।

अपने प्रेक्षणों से अब यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि कोण समान बना रहता हो, तो एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों में त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता।

**टिप्पणी :** सुविधा के लिए  $(\sin A)^2$ ,  $(\cos A)^2$ , आदि के स्थान पर हम क्रमशः  $\sin^2 A$ ,  $\cos^2 A$  आदि लिख सकते हैं। परंतु  $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$  (इसे साइन इनवर्स  $A$  कहा जाता है)।  $\sin^{-1} A$  का एक अलग अर्थ होता है जिस पर चर्चा हम उच्च कक्षाओं में करेंगे। इसी प्रकार की परंपराएँ अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों पर भी लागू होती हैं। कभी-कभी ग्रीक अक्षर  $\theta$  (थीटा) का प्रयोग कोण को प्रकट करने के लिए किया जाता है।

यहाँ हमने एक न्यून कोण के छः त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित किए हैं। यदि हमें कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो क्या हम अन्य अनुपात प्राप्त कर सकते हैं? आइए हम इस पर विचार करें।

यदि एक समकोण त्रिभुज  $ABC$  में  $\sin A = \frac{1}{3}$ , तब इसका अर्थ यह है कि  $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ , अर्थात् त्रिभुज  $ABC$  की भुजाओं  $BC$  और  $AC$  की लंबाइयाँ  $1 : 3$  के अनुपात में हैं (देखिए आकृति



आकृति 8.7

8.7)। अतः यदि  $BC$ ,  $k$  के बराबर हो, तो  $AC$ ,  $3k$  के बराबर होगी, जहाँ  $k$  एक धन संख्या है। कोण  $A$  के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए हमें तीसरी भुजा  $AB$  की लंबाई ज्ञात करनी होती है। क्या आपको पाइथागोरस प्रमेय याद है? आइए हम पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से अपेक्षित लंबाई  $AB$  ज्ञात करें।

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2} k)^2$$

अतः  $AB = \pm 2\sqrt{2} k$

अतः हमें प्राप्त होता है  $AB = 2\sqrt{2} k$  ( $AB = -2\sqrt{2} k$  क्यों नहीं है?)

$$\text{अब} \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

इसी प्रकार, आप कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात प्राप्त कर सकते हैं।

**टिप्पणी :** क्योंकि समकोण त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा होता है, इसलिए  $\sin A$  या  $\cos A$  का मान सदा ही 1 से कम होता है (या विशेष स्थिति में 1 के बराबर होता है)।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 1 :** यदि  $\tan A = \frac{4}{3}$ , तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

**हल :** आइए सबसे पहले हम एक समकोण  $\triangle ABC$  खींचें (देखिए आकृति 8.8)।

$$\text{अब, हम जानते हैं कि } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$$

अतः यदि  $BC = 4k$ , तब  $AB = 3k$ , जहाँ  $k$  धन संख्या है।

अब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

इसलिए

$$AC = 5k$$

अब हम इनकी परिभाषाओं की सहायता से सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिख सकते हैं।

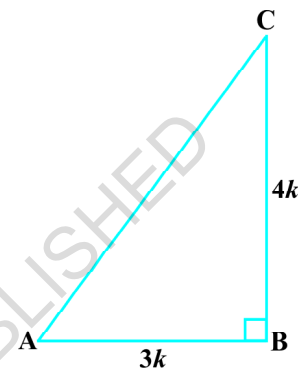
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

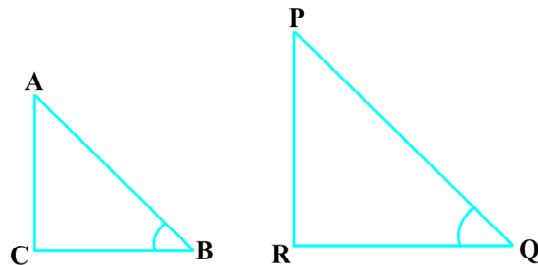
$$\text{अतः } \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}, \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4} \text{ और } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$$

**उदाहरण 2 :** यदि  $\angle B$  और  $\angle Q$  ऐसे न्यूनकोण हों जिससे कि  $\sin B = \sin Q$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $\angle B = \angle Q$

**हल :** आइए हम दो समकोण त्रिभुज  $ABC$  और  $PQR$  लें, जहाँ  $\sin B = \sin Q$  (देखिए आकृति 8.9)।



आकृति 8.8



आकृति 8.9

$$\begin{aligned}
 \text{यहाँ} \quad \sin B &= \frac{AC}{AB} \\
 \text{और} \quad \sin Q &= \frac{PR}{PQ} \\
 \text{तब} \quad \frac{AC}{AB} &= \frac{PR}{PQ} \\
 \text{अतः} \quad \frac{AC}{PR} &= \frac{AB}{PQ} = k \quad (\text{मान लीजिए}) \quad (1)
 \end{aligned}$$

अब, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर हमें ये प्राप्त होते हैं

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$\text{और} \quad QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2 PQ^2 - k^2 PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k \sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \quad (2)$$

(1) और (2) से हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

तब प्रमेय 6.4 का प्रयोग करने पर  $\triangle ACB \sim \triangle PRQ$  प्राप्त होता है। अतः  $\angle B = \angle Q$

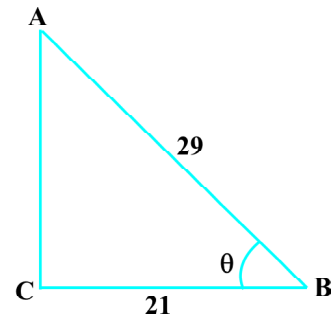
**उदाहरण 3 :**  $\triangle ACB$  लीजिए जिसका कोण C समकोण है जिसमें  $AB = 29$  इकाई,  $BC = 21$  इकाई और  $\angle ABC = \theta$  (देखिए आकृति 8.10) हैं तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i)  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

(ii)  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ .

**हल :**  $\triangle ACB$  में हमें यह प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
 AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2} \\
 &= \sqrt{(29 - 21)(29 + 21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ इकाई}
 \end{aligned}$$



आकृति 8.10

$$\text{अतः} \quad \sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}.$$

$$\text{अब, (i) } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400 + 441}{841} = 1,$$

$$\text{और (ii) } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$$

**उदाहरण 4 :** एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि  $\tan A = 1$  तो सत्यापित कीजिए कि

$$2 \sin A \cos A = 1$$

**हल :**  $\Delta ABC$  में  $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$  (देखिए आकृति 8.11)

अर्थात्

$$BC = AB$$

मान लीजिए  $AB = BC = k$ , जहाँ  $k$  एक धन संख्या है।

अब

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{और} \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{इसलिए} \quad 2 \sin A \cos A = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \text{ जो कि अपेक्षित मान है।}$$

**उदाहरण 5 :**  $\Delta OPQ$  में, जिसका कोण P समकोण है,  $OP = 7 \text{ cm}$  और  $OQ - PQ = 1 \text{ cm}$  (देखिए आकृति 8.12),  $\sin Q$  और  $\cos Q$  के मान ज्ञात कीजिए।

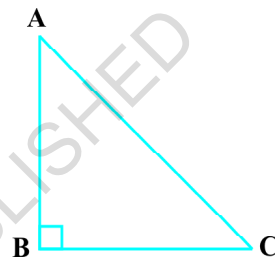
**हल :**  $\Delta OPQ$  से हमें यह प्राप्त है कि

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

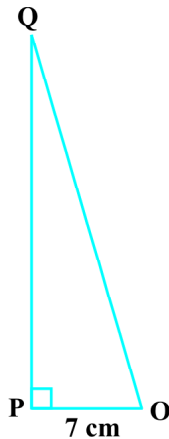
$$\text{अर्थात्} \quad (1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2 \quad (\text{क्यों?})$$

$$\text{अर्थात्} \quad 1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$$

$$\text{अर्थात्} \quad 1 + 2PQ = 7^2 \quad (\text{क्यों?})$$



आकृति 8.11



आकृति 8.12

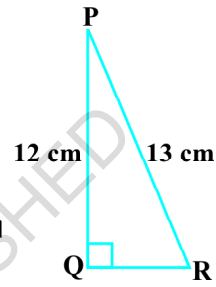
अर्थात्  $PQ = 24 \text{ cm}$  और  $OQ = 1 + PQ = 25 \text{ cm}$   
 अतः  $\sin Q = \frac{7}{25}$  और  $\cos Q = \frac{24}{25}$

### प्रश्नावली 8.1

1.  $\triangle ABC$  में, जिसका कोण B समकोण है,  $AB = 24 \text{ cm}$  और  $BC = 7 \text{ cm}$  है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

- (i)  $\sin A, \cos A$   
 (ii)  $\sin C, \cos C$

2. आकृति 8.13 में,  $\tan P - \cot R$  का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.13

3. यदि  $\sin A = \frac{3}{4}$ , तो  $\cos A$  और  $\tan A$  का मान परिकलित कीजिए।  
 4. यदि  $15 \cot A = 8$  हो तो  $\sin A$  और  $\sec A$  का मान ज्ञात कीजिए।  
 5. यदि  $\sec \theta = \frac{13}{12}$ , हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।  
 6. यदि  $\angle A$  और  $\angle B$  न्यून कोण हो, जहाँ  $\cos A = \cos B$ , तो दिखाइए कि  $\angle A = \angle B$   
 7. यदि  $\cot \theta = \frac{7}{8}$ , तो (i)  $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$ , (ii)  $\cot^2 \theta$  का मान निकालिए?  
 8. यदि  $3 \cot A = 4$ , तो जाँच कीजिए कि  $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$  है या नहीं।  
 9. त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि  $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:  
 (i)  $\sin A \cos C + \cos A \sin C$  (ii)  $\cos A \cos C - \sin A \sin C$   
 10.  $\triangle PQR$  में, जिसका कोण Q समकोण है,  $PR + QR = 25 \text{ cm}$  और  $PQ = 5 \text{ cm}$  है।  $\sin P, \cos P$  और  $\tan P$  के मान ज्ञात कीजिए।  
 11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।  
 (i)  $\tan A$  का मान सदैव 1 से कम होता है।  
 (ii) कोण A के किसी मान के लिए  $\sec A = \frac{12}{5}$   
 (iii)  $\cos A$ , कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।  
 (iv)  $\cot A, \cot$  और A का गुणनफल होता है।  
 (v) किसी भी कोण  $\theta$  के लिए  $\sin \theta = \frac{4}{3}$

### 8.3 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

ज्यामिति के अध्ययन से आप  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  और  $90^\circ$  के कोणों की रचना से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। इस अनुच्छेद में हम इन कोणों और साथ ही  $0^\circ$  वाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

#### 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\triangle ABC$  में, जिसका कोण B समकोण है, यदि एक कोण  $45^\circ$  का हो, तो अन्य कोण भी  $45^\circ$  का होगा अर्थात्  $\angle A = \angle C = 45^\circ$  (देखिए आकृति 8.14)।

अतः  $BC = AB$  (क्यों?)

अब मान लीजिए  $BC = AB = a$

तब पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

इसलिए  $AC = a\sqrt{2}$ .

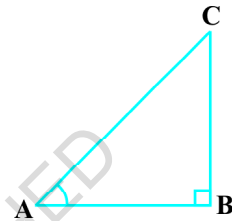
त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाओं को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\sin 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ के कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ के कोण की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{45^\circ \text{ के कोण की सम्मुख भुजा}}{45^\circ \text{ के कोण की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{और } \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}, \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$$

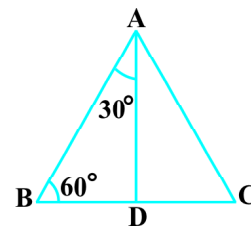


आकृति 8.14

#### 30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

आइए, अब हम  $30^\circ$  और  $60^\circ$  के त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित करें। एक समबाहु त्रिभुज ABC पर विचार करें। क्योंकि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण  $60^\circ$  का होता है, इसलिए  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

A से भुजा BC पर लंब AD डालिए (देखिए आकृति 8.15)।



आकृति 8.15

अब  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$  (क्यों?)

इसलिए  $BD = DC$

और  $\angle BAD = \angle CAD$  (CPCT)

अब आप यह देख सकते हैं कि:

$\triangle ABD$  एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण D समकोण है, और जहाँ  $\angle BAD = 30^\circ$  और  $\angle ABD = 60^\circ$  (देखिए आकृति 8.15)।

जैसा कि आप जानते हैं, कि त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात करने के लिए हमें त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईयाँ ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। अइए, हम यह मान लें कि  $AB = 2a$

तब  $BD = \frac{1}{2}BC = a$

और  $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

इसलिए  $AD = a\sqrt{3}$

अब  $\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

और  $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$ ,  $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

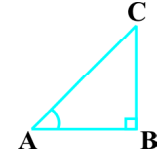
इसी प्रकार

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

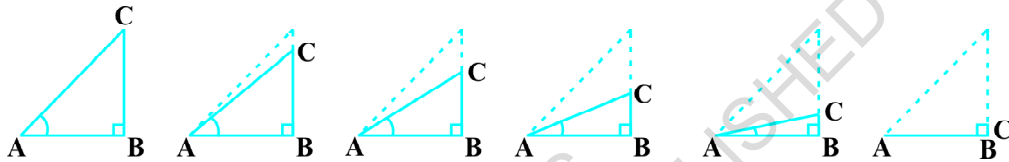
$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2 \text{ और } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

### 0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

आइए, हम देखें कि यदि समकोण त्रिभुज ABC के कोण A को तब तक और छोटा किया जाए जब तक कि यह शून्य नहीं हो जाता है, तब इस स्थिति में कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों पर क्या प्रभाव पड़ता है (देखिए आकृति 8.16)। जैसे-जैसे  $\angle A$  छोटा होता जाता है, वैसे-वैसे भुजा BC की लंबाई कम होती जाती है। बिंदु C, बिंदु B के निकट आता जाता है और अंत में, जब  $\angle A$ , 0° के काफी निकट हो जाता है तब AC लगभग वही हो जाता है जो कि AB है (देखिए आकृति 8.17)।



आकृति 8.16



आकृति 8.17

जब  $\angle A$ , 0° के अत्यधिक निकट होता है तब BC, 0 के अत्यधिक निकट आ जाता है। तब  $\sin A = \frac{BC}{AC}$  का मान 0 के अत्यधिक निकट आ जाता है। और, जब  $\angle A$ , 0° के अत्यधिक निकट होता है, तब AC लगभग वही होता है जो कि AB होता है और  $\cos A = \frac{AB}{AC}$  का मान 1 के अत्यधिक समीप होता है।

इसकी सहायता से हम उस स्थिति में  $\sin A$  और  $\cos A$  के मान परिभाषित कर सकते हैं जबकि  $A = 0^\circ$ , हम  $\sin 0^\circ = 0$  और  $\cos 0^\circ = 1$  परिभाषित करते हैं।

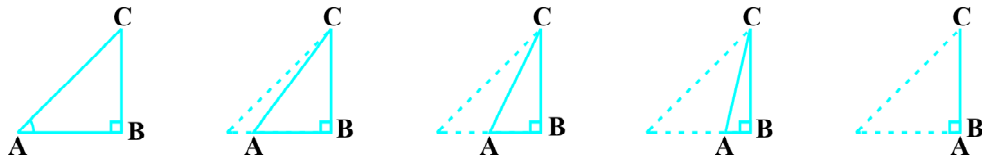
इनका प्रयोग करने पर हमें ये प्राप्त होते हैं:

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0, \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ}, \text{ जो कि परिभाषित नहीं है (क्यों?)}$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1 \text{ तथा } \operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ}, \text{ और यह भी परिभाषित नहीं है। (क्यों?)}$$

आइए अब हम उस स्थिति में देखें कि  $\angle A$  के त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ क्या होता है जबकि  $\triangle ABC$  के इस कोण को तब तक बढ़ा दिया जाता है, जब तक कि 90° का नहीं हो जाता।  $\angle A$  जैसे-जैसे बढ़ा होता जाता है,  $\angle C$  वैसे-वैसे छोटा होता जाता है। अतः ऊपर वाली स्थिति की भाँति भुजा AB की लंबाई कम होती जाती है। बिंदु A, बिंदु B के निकट होता जाता है और, अंत में जब  $\angle A$ , 90° के अत्यधिक निकट आ जाता है, तो  $\angle C$ , 0° के

अत्यधिक निकट आ जाता है और भुजा AC भुजा BC के साथ लगभग संपाती हो जाती है (देखिए आकृति 8.18)।



आकृति 8.18

जब  $\angle C, 0^\circ$  के अत्यधिक निकट होता है तो  $\angle A, 90^\circ$  के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AC लगभग वही हो जाती है, जो भुजा BC है। अतः  $\sin A, 1$  के अत्यधिक निकट हो जाता है और, जब  $\angle A, 90^\circ$  के अत्यधिक निकट होता है, तब  $\angle C, 0^\circ$  के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AB लगभग शून्य हो जाती है। अतः  $\cos A, 0$  के अत्यधिक निकट हो जाता है।

अतः हम यह परिभाषित करते हैं :  $\sin 90^\circ = 1$  और  $\cos 90^\circ = 0$

अब आप क्यों नहीं  $90^\circ$  के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करते हैं?

अब हम तुरंत संदर्भ के लिए एक सारणी 8.1 के रूप में  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  और  $90^\circ$  के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान प्रस्तुत करेंगे।

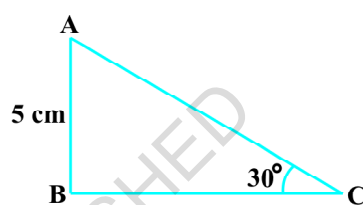
सारणी 8.1

| $\angle A$               | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ |
|--------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| $\sin A$                 | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          |
| $\cos A$                 | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          |
| $\tan A$                 | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | अपरिभाषित  |
| $\operatorname{cosec} A$ | अपरिभाषित | 2                    | $\sqrt{2}$           | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1          |
| $\sec A$                 | 1         | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$           | 2                    | अपरिभाषित  |
| $\cot A$                 | अपरिभाषित | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0          |

**टिप्पणी :** उपर्युक्त सारणी से आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे  $\angle A$  का मान  $0^\circ$  से  $90^\circ$  तक बढ़ता जाता है,  $\sin A$  का मान 0 से बढ़कर 1 हो जाता है और  $\cos A$  का मान 1 से घटकर 0 हो जाता है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लेकर ऊपर की सारणी में दिए गए मानों के प्रयोग को प्रदर्शित करें।

**उदाहरण 6 :**  $\triangle ABC$  में जिसका कोण B समकोण है,  $AB = 5$  cm और  $\angle ACB = 30^\circ$  (देखिए आकृति 8.19)। भुजाओं BC और AC की लंबाई ज्ञात करें।



आकृति 8.19

**हल :** भुजा BC की लंबाई ज्ञात करने के लिए हम उस त्रिकोणमितीय अनुपात को लेंगे जिसमें BC और दी हुई भुजा AB हो। क्योंकि BC कोण C की संलग्न भुजा है, और AB कोण C की सम्मुख भुजा है, इसलिए

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

अर्थात्

$$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

जिससे

$$BC = 5\sqrt{3} \text{ cm प्राप्त होता है।}$$

भुजा AC की लंबाई ज्ञात करने के लिए हम

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \text{ लेते हैं (क्यों?)}$$

अर्थात्

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

अर्थात्

$$AC = 10 \text{ cm}$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में तीसरी भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए विकल्प के रूप में हम पाइथागोरस प्रमेय को लागू कर सकते थे,

अर्थात्

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

**उदाहरण 7 :**  $\triangle PQR$  में, जिसका कोण  $Q$  समकोण है (देखिए आकृति 8.20),  $PQ = 3 \text{ cm}$  और  $PR = 6 \text{ cm}$  है।  $\angle QPR$  और  $\angle PRQ$  ज्ञात कीजिए।

**हल :** दिया हुआ है  $PQ = 3 \text{ cm}$  और  $PR = 6 \text{ cm}$

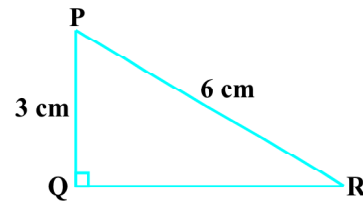
इसलिए 
$$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

या 
$$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अतः 
$$\angle PRQ = 30^\circ$$

और, इसलिए 
$$\angle QPR = 60^\circ \quad (\text{क्यों?})$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कोई एक अन्य भाग (जो या तो न्यून कोण हो या कोई एक भुजा हो) ज्ञात हो, तो त्रिभुज की शेष भुजाएँ और कोण ज्ञात किए जा सकते हैं।



आकृति 8.20

**उदाहरण 8 :** यदि  $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$ ,  $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ ,  $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$ ,  $A > B$ , तो  $A$  और  $B$  ज्ञात कीजिए।

**हल :** क्योंकि  $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$ , इसलिए,  $A - B = 30^\circ$  (क्यों?) (1)

और, क्योंकि  $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ , इसलिए,  $A + B = 60^\circ$  (क्यों?) (2)

(1) और (2) को हल करने पर हमें  $A = 45^\circ$  और  $B = 15^\circ$  प्राप्त होता है।

## प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i)  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii)  $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii)  $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(iv)  $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v)  $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i)  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} =$

- (A)  $\sin 60^\circ$  (B)  $\cos 60^\circ$  (C)  $\tan 60^\circ$  (D)  $\sin 30^\circ$

(ii)  $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} =$

- (A)  $\tan 90^\circ$  (B) 1 (C)  $\sin 45^\circ$  (D) 0

(iii)  $\sin 2A = 2 \sin A$  तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

- (A)  $0^\circ$  (B)  $30^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $60^\circ$

(iv)  $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$  बराबर है:

- (A)  $\cos 60^\circ$  (B)  $\sin 60^\circ$  (C)  $\tan 60^\circ$  (D)  $\sin 30^\circ$

3. यदि  $\tan(A + B) = \sqrt{3}$  और  $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$ ;  $A > B$  तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

4. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i)  $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ .

(ii)  $\theta$  में वृद्धि होने के साथ  $\sin \theta$  के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii)  $\theta$  में वृद्धि होने के साथ  $\cos \theta$  के मान में भी वृद्धि होती है।

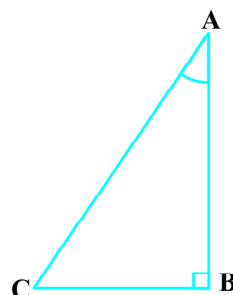
(iv)  $\theta$  के सभी मानों पर  $\sin \theta = \cos \theta$

(v)  $A = 0^\circ$  पर  $\cot A$  परिभाषित नहीं है।

#### 8.4 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

आपको याद होगा कि एक समीकरण को एक सर्वसमिका तब कहा जाता है जबकि यह संबंधित चरों के सभी मानों के लिए सत्य हो। इसी प्रकार एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित सर्वसमिका को **त्रिकोणमितीय सर्वसमिका** कहा जाता है। जबकि यह संबंधित कोण (कोणों) के सभी मानों के लिए सत्य होता है।

इस भाग में, हम एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका सिद्ध करेंगे और इसका प्रयोग अन्य उपयोगी त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में करेंगे।



आकृति 8.21

$\Delta ABC$  में, जो B पर समकोण है (देखिए आकृति 8.21)

हमें यह प्राप्त है  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  (1)

(1) के प्रत्येक पद को  $AC^2$  से भाग देने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

या  $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$

अर्थात्  $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

अर्थात्  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$  (2)

यह सभी A के लिए, जहाँ  $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$ , सत्य होता है। अतः यह एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका है।

आइए, अब हम (1) को  $AB^2$  से भाग दें। ऐसा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

या  $\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$

अर्थात्  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$  (3)

क्या यह समीकरण,  $A = 0^\circ$  के लिए सत्य है? हाँ, यह सत्य है। क्या यह  $A = 90^\circ$  के लिए भी सत्य है?  $A = 90^\circ$  के लिए  $\tan A$  और  $\sec A$  परिभाषित नहीं है। अतः (3), ऐसे सभी A के लिए सत्य होता है, जहाँ  $0^\circ \leq A < 90^\circ$

आइए हम यह देखें कि (1) को  $BC^2$  से भाग देने पर हमें क्या प्राप्त होता है।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

अर्थात्  $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

अर्थात्  $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$  (4)

ध्यान दीजिए कि  $A = 0^\circ$  के लिए  $\operatorname{cosec} A$  और  $\cot A$  परिभाषित नहीं हैं। अतः ऐसे सभी  $A$  के लिए (4) सत्य होता है जहाँ  $0^\circ < A \leq 90^\circ$

इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके हम प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं अर्थात् यदि कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो हम अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

आइए हम यह देखें कि इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके इसे हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए हमें  $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ज्ञात है। तब  $\cot A = \sqrt{3}$

क्योंकि  $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ,  $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , और  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

और, क्योंकि  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ . इसलिए  $\operatorname{cosec} A = 2$

**उदाहरण 9 :** अनुपातों  $\cos A$ ,  $\tan A$  और  $\sec A$  को  $\sin A$  के पदों में व्यक्त कीजिए।

**हल :** क्योंकि

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1, \text{ इसलिए}$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A, \text{ अर्थात् } \cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

इससे यह प्राप्त होता है

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \quad (\text{क्यों?})$$

$$\text{अतः } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ और } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

**उदाहरण 10 :** सिद्ध कीजिए कि  $\sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) = 1$

**हल :**

$$\begin{aligned} \text{वाम पक्ष} &= \sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) = \left( \frac{1}{\cos A} \right) (1 - \sin A) \left( \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right) \\ &= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{दाया पक्ष} \end{aligned}$$

**उदाहरण 11 :** सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

**हल :** वाम पक्ष =  $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$\frac{\cos A \left( \frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\cos A \left( \frac{1}{\sin A} + 1 \right)} = \frac{\left( \frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\left( \frac{1}{\sin A} + 1 \right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{दाँया पक्ष}$$

**उदाहरण 12 :** सर्वसमिका  $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$  का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$

**हल :** क्योंकि हमें  $\sec \theta$  और  $\tan \theta$  से संबंधित सर्वसमिका प्रयुक्त करनी है, इसलिए आइए हम सबसे पहले सर्वसमिका के वाम पक्ष के अंश और हर को  $\cos \theta$  से भाग देकर वाम पक्ष को  $\sec \theta$  और  $\tan \theta$  के पदों में रूपांतरित करें।

$$\begin{aligned} \text{वाम पक्ष} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta} \\ &= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - 1}{(\tan \theta - \sec \theta) + 1} = \frac{\{(\tan \theta + \sec \theta) - 1\} (\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\} (\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{(\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) - (\tan \theta - \sec \theta)}{\{\tan \theta - \sec \theta + 1\} (\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{-1 - \tan \theta + \sec \theta}{(\tan \theta - \sec \theta + 1) (\tan \theta - \sec \theta)} \\ &= \frac{-1}{\tan \theta - \sec \theta} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}, \end{aligned}$$

जो सिद्ध की जाने वाली अपेक्षित सर्वसमिका का दाँया पक्ष है।

## प्रश्नावली 8.3

- त्रिकोणमितीय अनुपातों  $\sin A$ ,  $\sec A$  और  $\tan A$  को  $\cot A$  के पदों में व्यक्त कीजिए।
- $\angle A$  के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को  $\sec A$  के पदों में लिखिए।
- सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए :
  - $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$  बराबर है :  
 (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0
  - $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$  बराबर है :  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1
  - $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$  बराबर है :  
 (A)  $\sec A$  (B)  $\sin A$  (C)  $\operatorname{cosec} A$  (D)  $\cos A$
  - $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$  बराबर है :  
 (A)  $\sec^2 A$  (B) -1 (C)  $\cot^2 A$  (D)  $\tan^2 A$
- निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है :

$$(i) (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$(ii) \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$(iii) \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

[संकेत: व्यंजक को  $\sin \theta$  और  $\cos \theta$  के पदों में लिखिए]

$$(iv) \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

[संकेत: वाम पक्ष और दायी पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए।]

- सर्वसमिका  $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$  को लागू करके

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$(vi) \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$(vii) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

$$(viii) (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$(ix) (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

[संकेत : वाम पक्ष और दायी पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए]

$$(x) \left( \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left( \frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

## 8.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है,

$$\sin A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}, \cos A = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}$$

$$2. \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}; \sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

3. यदि एक न्यून कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

4.  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  और  $90^\circ$  के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान।

5.  $\sin A$  या  $\cos A$  का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं होता, जबकि  $\sec A$  या  $\operatorname{cosec} A$  का मान सदैव 1 से अधिक या 1 के बराबर होता है।

6.  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1 \quad \text{जहाँ } 0^\circ \leq A < 90^\circ$$

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \quad \text{जहाँ } 0^\circ < A \leq 90^\circ$$

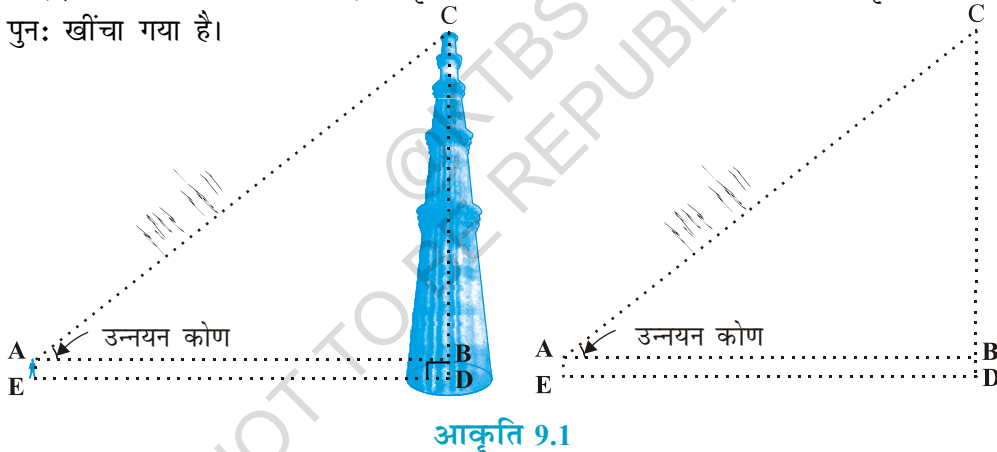


1063CH09

## त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग 9

### 9.1 ऊँचाइयाँ और दूरियाँ

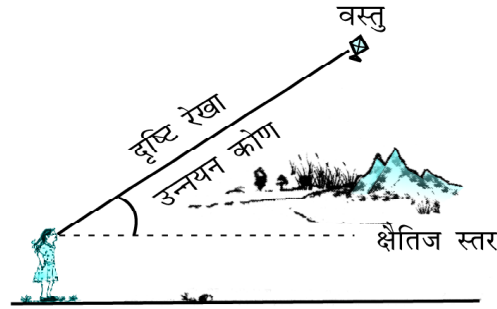
आइए हम अध्याय 8 में दी गई आकृति 8.1 पर विचार करें, जिसे नीचे आकृति 9.1 में पुनः खींचा गया है।



आकृति 9.1

इस आकृति में, छात्र की आँख से मीनार के शिखर तक खींची गई रेखा AC को **दृष्टि-रेखा** (line of sight) कहा जाता है। छात्र मीनार के शिखर की ओर देख रहा है। दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बने कोण BAC को छात्र की आँख से मीनार के शिखर का **उन्नयन कोण** (angle of elevation) कहा जाता है।

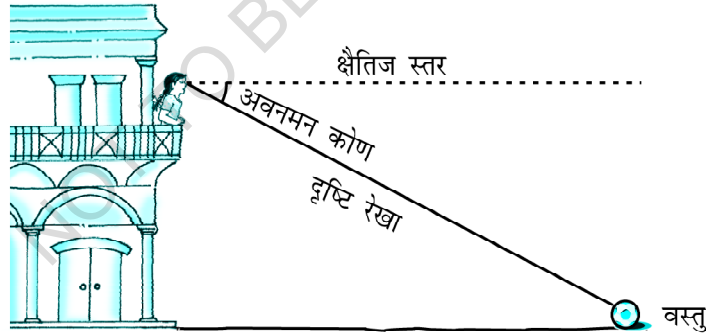
इस प्रकार, **दृष्टि-रेखा** प्रेक्षक की आँख के उस वस्तु के बिंदु को मिलाने वाली रेखा होती है जिसे प्रेक्षक देखता है। देखे गए बिंदु का उन्नयन कोण उस स्थिति में, दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है, जबकि देखा जा रहा बिंदु क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपना सिर उठाना होता है। (देखिए आकृति 9.2)।



आकृति 9.2

आइए अब हम आकृति 8.2 में दी गई स्थिति पर विचार करें। बालकनी में बैठी लड़की मंदिर की सीढ़ी पर रखे गमले को नीचे की ओर देख रही है। इस स्थिति में, दृष्टि-रेखा क्षैतिज स्तर से नीचे है। दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से इस प्रकार बने कोण को **अवनमन कोण** (angle of depression) कहा जाता है।

अतः देखी जा रही वस्तु पर स्थित बिंदु का **अवनमन कोण** उस स्थिति में दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि बिंदु क्षैतिज रेखा से नीचे होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि देखे जाने वाले बिंदु को देखने के लिए हमें अपना सिर नीचे झुकाना होता है (देखिए आकृति 9.3)।



आकृति 9.3

अब आप आकृति 8.3 में बनी दृष्टि-रेखाएँ और इस तरह बने कोणों को पहचान सकते हैं। ये कोण उन्नयन कोण हैं या अवनमन कोण?

आइए हम आकृति 9.1 को पुनः देखें। यदि आप सही मायने में बिना मापे ही मीनार की ऊँचाई CD ज्ञात करना चाहते हैं तो इसके लिए आपको किस जानकारी की आवश्यकता होती है? इसके लिए निम्नलिखित तथ्यों का ज्ञान होना आवश्यक होता है:

- (i) दूरी DE जहाँ छात्र मीनार के पाद-बिंदु से इस दूरी पर खड़ा है।
- (ii) मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $\angle BAC$
- (iii) छात्र की ऊँचाई AE

यह मानकर कि ऊपर बतायी गयीं तीनों जानकारियाँ हमें ज्ञात हैं तो हम किस प्रकार मीनार की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं?

आकृति में  $CD = CB + BD$  यहाँ  $BD = AE$  है जो कि छात्र की ऊँचाई है।

BC ज्ञात करने के लिए हम  $\angle BAC$  या  $\angle A$  के त्रिकोणमिति अनुपातों का प्रयोग करेंगे।

$\triangle ABC$  में, भुजा BC ज्ञात कोण  $\angle A$  के संबंध में सम्मुख भुजा है। यहाँ हम किन-किन त्रिकोणमिति अनुपातों का प्रयोग कर सकते हैं? इनमें से किसके दो मान हमें ज्ञात है और हमें किसका मान ज्ञात करने की आवश्यकता होती है?  $\tan A$  या  $\cot A$  का प्रयोग करने से हमारी खोज का क्षेत्र कम हो जाता है, क्योंकि इन अनुपातों में AB और BC का प्रयोग होता है।

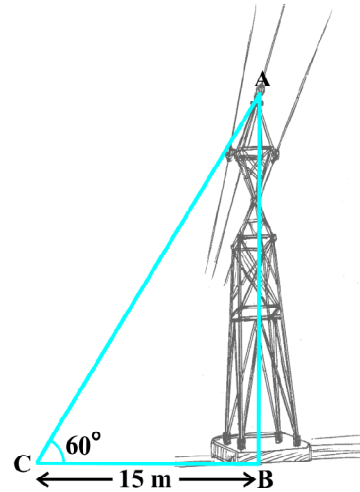
अतः  $\tan A = \frac{BC}{AB}$  या  $\cot A = \frac{AB}{BC}$ , जिसे हल करने पर हमें BC प्राप्त हो जाएगा।

BC और AE जोड़ने पर मीनार की ऊँचाई प्राप्त हो जाएगी।

आइए अब हम कुछ उदाहरण हल करके अभी-अभी चर्चित किए गए प्रक्रम की व्याख्या करें।

**उदाहरण 1 :** धरती पर एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है। धरती के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 15 m दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल :** आइए पहले हम प्रश्न को निरूपित करने के लिए एक सरल आरेख बनाएँ (देखिए आकृति 9.4)। यहाँ AB मीनार को निरूपित करता है, CB मीनार से बिंदु की दूरी है और  $\angle ACB$  उन्नयन कोण है। हम मीनार की ऊँचाई अर्थात् AB ज्ञात करना चाहते हैं और, यहाँ  $\triangle ABC$  एक त्रिभुज है जो B पर समकोण है।



आकृति 9.4

प्रश्न को हल करने के लिए हम त्रिकोणमितीय अनुपात  $\tan 60^\circ$  (या  $\cot 60^\circ$ ) लेते हैं, क्योंकि इस अनुपात में AB और BC दोनों होते हैं

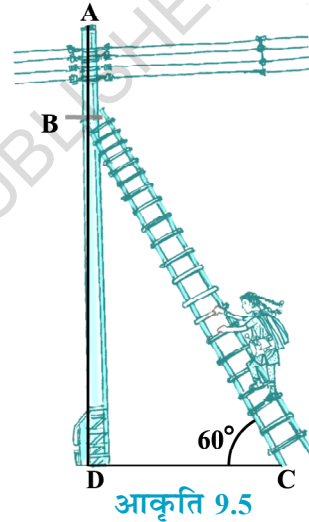
$$\text{अब} \quad \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{अर्थात्} \quad \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

$$\text{अर्थात्} \quad AB = 15\sqrt{3}$$

अतः मीनार की ऊँचाई  $15\sqrt{3}$  m है।

**उदाहरण 2 :** एक बिजली मिस्त्री को एक 5m ऊँचे खंभे पर आ गई खराबी की मरम्मत करनी है। मरम्मत का काम करने के लिए उसे खंभे के शिखर से 1.3m नीचे एक बिंदु तक वह पहुँचना चाहती है (देखिए आकृति 9.5)। यहाँ तक पहुँचने के लिए प्रयुक्त सीढ़ी की लंबाई कितनी होनी चाहिए जिससे कि क्षैतिज से  $60^\circ$  के कोण से झुकाने पर वह अपेक्षित स्थिति तक पहुँच जाए? और यह भी बताइए कि खंभे का पाद-बिंदु कितनी दूरी पर सीढ़ी के पाद-बिंदु से होना चाहिए? (यहाँ आप  $\sqrt{3} = 1.73$  ले सकते हैं।)



**हल :** आकृति 9.5 में, बिजली मिस्त्री को खंभे AD पर बिंदु B तक पहुँचना है।

$$\text{अतः} \quad BD = AD - AB = (5 - 1.3)\text{m} = 3.7 \text{ m}$$

यहाँ BC सीढ़ी को प्रकट करता है। हमें इसकी लंबाई अर्थात् समकोण त्रिभुज BDC का कर्ण ज्ञात करना है।

अब, क्या आप यह बता सकते हैं कि हमें किस त्रिकोणमिति अनुपात का प्रयोग करना चाहिए?

यह त्रिकोणमिति अनुपात  $\sin 60^\circ$  होना चाहिए।

$$\text{अतः} \quad \frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ \text{ या } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

इसलिए  $BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ m (लगभग)}$

अर्थात् सीढ़ी की लंबाई 4.28 m होनी चाहिए।

अब  $\frac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अर्थात्  $DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ m (लगभग)}$

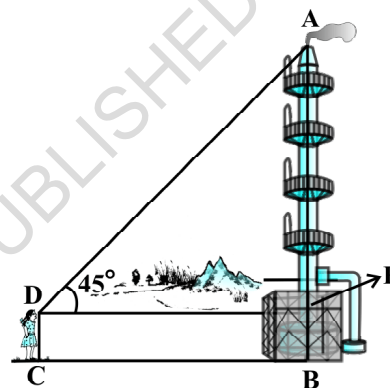
अतः उसे सीढ़ी के पाद को खंभे से 2.14 m की दूरी पर रखना चाहिए।

**उदाहरण 3 :** 1.5 m लंबा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 m की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण  $45^\circ$  है। चिमनी की ऊँचाई बताइए।

**हल :** यहाँ AB चिमनी है, CD प्रेक्षक है और  $\angle ADE$  उन्नयन कोण है (देखिए आकृति 9.6)। यहाँ ADE एक त्रिभुज है जिसमें कोण E समकोण है और हमें चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

यहाँ  $AB = AE + BE = (AE + 1.5) \text{ m}$

और  $DE = CB = 28.5 \text{ m}$



आकृति 9.6

AE ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसा त्रिकोणमिति अनुपात लेना चाहिए जिसमें AE और DE दोनों हों। इसके लिए आइए हम उन्नयन कोण का tangent लें।

अब  $\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$

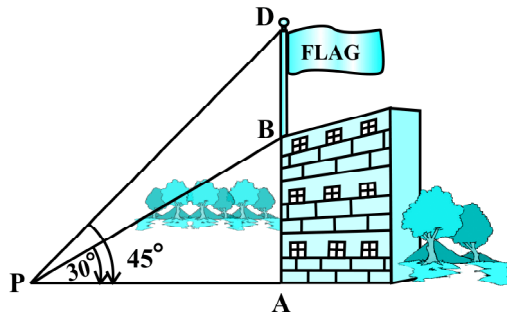
अर्थात्  $1 = \frac{AE}{28.5}$

इसलिए  $AE = 28.5$

अतः चिमनी की ऊँचाई (AB) =  $(28.5 + 1.5) \text{ m} = 30 \text{ m}$

**उदाहरण 4 :** भूमि के एक बिंदु P से एक 10 m ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण  $45^\circ$  है। ध्वजदंड की लंबाई और बिंदु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। (यहाँ आप  $\sqrt{3} = 1.732$  ले सकते हैं।)

**हल :** आकृति 9.7 में, AB भवन की ऊँचाई प्रकट करता है, BD ध्वजदंड प्रकट करता है और P दिया हुआ बिंदु प्रकट करता है। ध्यान दीजिए कि यहाँ दो समकोण त्रिभुज PAB और PAD हैं। हमें ध्वजदंड की लंबाई अर्थात् DB और बिंदु P से भवन की दूरी अर्थात् PA ज्ञात करना है।



आकृति 9.7

क्योंकि हमें भवन की ऊँचाई AB ज्ञात है इसलिए पहले हम समकोण  $\triangle PAB$  लेंगे।

यहाँ  $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$

अर्थात्  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

इसलिए  $AP = 10\sqrt{3}$

अर्थात् P से भवन की दूरी  $10\sqrt{3} \text{ m} = 17.32 \text{ m}$

आइए अब हम यह मान लें कि  $DB = x \text{ m}$  है तब  $AD = (10 + x) \text{ m}$

अब समकोण  $\triangle PAD$  में  $\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

इसलिए  $1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

अर्थात्  $x = 10(\sqrt{3} - 1) = 7.32$

अतः ध्वजदंड की लंबाई 7.32 m है।

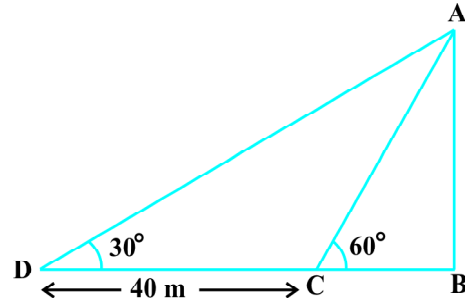
**उदाहरण 5 :** एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 m अधिक लंबी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश (altitude)  $60^\circ$  से घटकर  $30^\circ$  हो जाता है अर्थात् छाया के एक सिरे से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है और DB छाया की लंबाई है

जबकि उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल :** मान लीजिए कि AB की लंबाई  $h$  मीटर है और BC,  $x$  मीटर है। प्रश्न के अनुसार DB, BC से 40m अधिक लंबा है।

अतः  $DB = (40 + x) \text{ m}$

अब, यहाँ दो समकोण त्रिभुज ABC और ABD है।



आकृति 9.8

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ में} \quad \tan 60^\circ &= \frac{AB}{BC} \\ \text{या} \quad \sqrt{3} &= \frac{h}{x} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta ABD \text{ में} \quad \tan 30^\circ &= \frac{AB}{BD} \\ \text{अर्थात्} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{h}{x+40} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) से हमें यह प्राप्त होता है

$$h = x\sqrt{3}$$

इस मान को (2) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है  $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$ , अर्थात्  $3x = x + 40$

$$\text{अर्थात्} \quad x = 20$$

$$\text{इसलिए} \quad h = 20\sqrt{3} \quad [(1) \text{ से}]$$

अतः मीनार की ऊँचाई  $20\sqrt{3} \text{ m}$  है।

**उदाहरण 6 :** एक बहुमंजिल भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन-कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

**हल :** आकृति 9.9 में PC बहुमंजिल भवन को और AB, 8 m ऊँचे भवन को प्रकट करता है। हम बहुमंजिल भवन की ऊँचाई, अर्थात् PC और दो भवनों के बीच की दूरी अर्थात् AC ज्ञात करना चाहते हैं।

आकृति को अच्छी तरह देखिए। आप यहाँ देखेंगे कि PB समांतर रेखाओं PQ और BD की एक तिर्यक-छेदी रेखा है। अतः  $\angle QPB$  और  $\angle PBD$  एकांतर कोण हैं और इसलिए बराबर हैं।

अतः  $\angle PBD = 30^\circ$ , इसी प्रकार,  $\angle PAC = 45^\circ$

समकोण  $\triangle PBD$  में

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ या } BD = PD\sqrt{3}$$

समकोण  $\triangle PAC$  में हम पाते हैं

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^\circ = 1$$

अर्थात्

$$PC = AC$$

और

$$PC = PD + DC$$

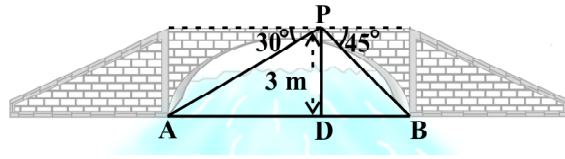
इसलिए  $PD + DC = AC$

क्योंकि  $AC = BD$  और  $DC = AB = 8 \text{ m}$ , इसलिए  $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$  (क्यों?)

$$\text{इससे यह प्राप्त होता है: } PD = \frac{8}{\sqrt{3} - 1} = \frac{8(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = 4(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

अतः बहुमंजिल भवन की ऊँचाई  $\{4(\sqrt{3} + 1) + 8\} \text{ m} = 4(3 + \sqrt{3}) \text{ m}$  है और दो भवनों के बीच की दूरी भी  $4(3 + \sqrt{3}) \text{ m}$  है।

**उदाहरण 7 :** एक नदी के पुल के एक बिंदु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। यदि पुल किनारों से  $3 \text{ m}$  की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.10

**हल :** आकृति 9.10 में, A और B नदी के सम्मुख किनारों के बिंदुओं को प्रकट करते हैं, जिससे कि AB नदी की चौड़ाई है।  $3 \text{ m}$  की ऊँचाई पर बने पुल पर एक बिंदु P है अर्थात्  $DP = 3 \text{ m}$  है। हम नदी की चौड़ाई ज्ञात करना चाहते हैं जो कि  $\triangle APB$  की भुजा AB की लंबाई है।

अब  $AB = AD + DB$

समकोण  $\triangle APD$  में  $\angle A = 30^\circ$

अतः  $\tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$

अर्थात्  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$  या  $AD = 3\sqrt{3} \text{ m}$

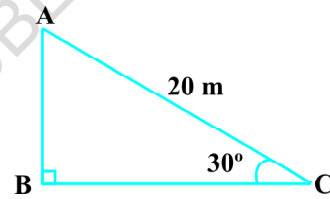
अतः समकोण  $\triangle PBD$  में,  $\angle B = 45^\circ$  है। इसलिए  $BD = PD = 3 \text{ m}$

अब  $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ m}$

इसलिए नदी की चौड़ाई  $3(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$  है।

### प्रश्नावली 9.1

- सर्कस का एक कलाकार एक 20m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण  $30^\circ$  का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 9.11)।

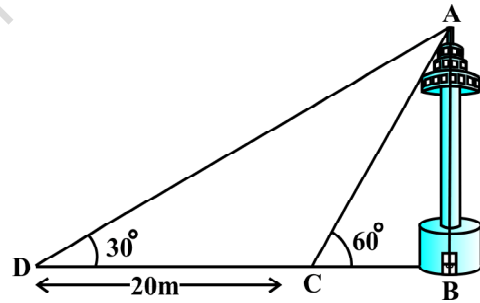


आकृति 9.11

- आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ  $30^\circ$  का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ  $30^\circ$  के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ  $60^\circ$  का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?
- भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव  $60^\circ$  है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. 1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  से  $60^\circ$  हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।
7. भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $45^\circ$  और  $60^\circ$  है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण  $45^\circ$  है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
10. एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $60^\circ$  और  $30^\circ$  है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

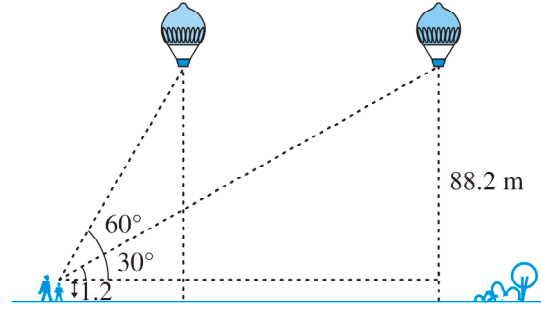
11. एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। (देखिए आकृति 9.12)। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.12

12. 7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है और इसके पाद का अवनमन कोण  $45^\circ$  है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
13. समुद्र-तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

14. 1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर  $30^\circ$  हो जाता है (देखिए आकृति 9.13)। इस अंतराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.13

15. एक सीधा राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को  $30^\circ$  के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकेंड बाद कार का अवनमन कोण  $60^\circ$  हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

## 9.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

- (i) **दृष्टि-रेखा** प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिंदु को मिलाने वाली रेखा होती है।
- (ii) देखी गई वस्तु का **उन्नयन कोण** दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि यह क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को ऊपर उठाना होता है।
- (iii) देखी गई वस्तु का **अवनमन कोण** दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि क्षैतिज रेखा क्षैतिज स्तर से नीचे होती है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को झुकाना पड़ता है।
- त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से किसी वस्तु की ऊँचाई या लंबाई या दो सुदूर वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात की जा सकती है।



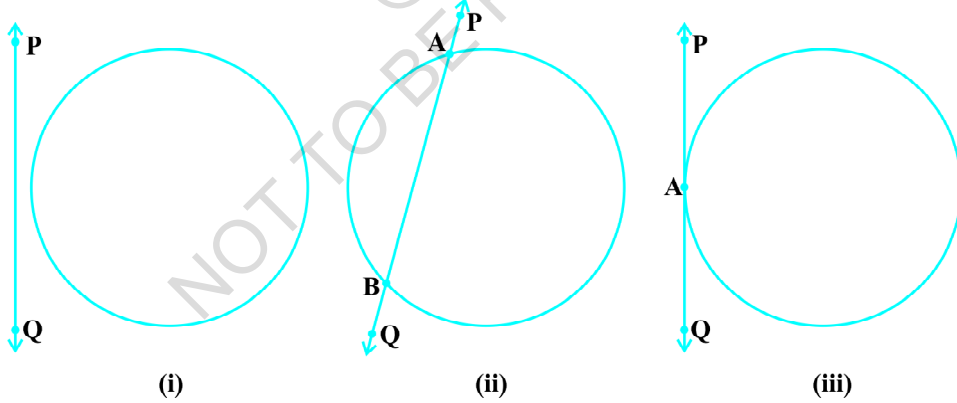
1063CH10

## वृत्त 10

### 10.1 भूमिका

आपने कक्षा IX में पढ़ा है कि वृत्त एक तल के उन बिंदुओं का समूह होता है जो एक नियत बिंदु (केंद्र) से अचर दूरी (त्रिज्या) पर होते हैं। आपने वृत्त से संबंधित अवधारणाओं जैसे जीवा, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड, चाप आदि के बारे में भी पढ़ा है। आइए अब एक तल में स्थित एक वृत्त तथा एक रेखा की विभिन्न स्थितियों पर विचार करें।

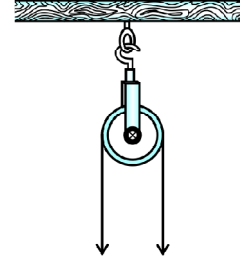
आइए, हम एक वृत्त तथा एक रेखा PQ पर ध्यान दें। दी गई निम्न आकृति 10.1 में तीन संभावनाएँ हो सकती हैं।



आकृति 10.1

आकृति 10.1 (i) में, रेखा PQ तथा वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है। इस दशा में PQ को वृत्त के सापेक्ष **अप्रतिच्छेदी रेखा** कहते हैं। आकृति 10.1 (ii) में रेखा PQ और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु A और B हैं। इस दशा में हम रेखा PQ को वृत्त की **छेदक रेखा** कहते हैं। आकृति 10.1 (iii) में रेखा PQ और वृत्त में एक और केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु A है। इस दशा में रेखा वृत्त की **स्पर्श रेखा** कहलाती है।

आपने कुएँ के ऊपर स्थिर की हुई एक घिरनी को देखा होगा जिसका उपयोग कुएँ से पानी निकालने के लिए किया जाता है। आकृति 10.2 को देखिए। यहाँ घिरनी के दोनों ओर की रस्सी को यदि किरण की तरह समझें तो वह घिरनी द्वारा निरूपित वृत्त पर स्पर्श रेखा की तरह होगी।



आकृति 10.2

ऊपर दी गई स्थितियों के अतिरिक्त क्या वृत्त के सापेक्ष रेखा की कोई अन्य स्थिति हो सकती है? आप देख सकते हैं कि इन स्थितियों के अतिरिक्त रेखा की वृत्त के सापेक्ष कोई अन्य स्थिति नहीं हो सकती है। इस अध्याय में हम वृत्त की स्पर्श रेखा के अस्तित्व के बारे में पढ़ेंगे तथा उनके कुछ गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

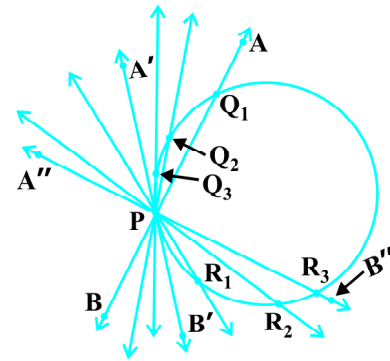
### 10.2 वृत्त की स्पर्श रेखा

पिछले परिच्छेद में आपने देखा है कि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा के अस्तित्व को समझने के लिए आइए हम निम्न क्रियाकलाप करें।

**क्रियाकलाप 1 :** एक वृत्ताकार तार लीजिए तथा वृत्ताकार तार के एक बिंदु P पर एक सीधा तार AB इस प्रकार जोड़िए कि वह बिंदु P के परितः एक समतल में घूम सके। इस प्रणाली को एक मेज़ पर रखिए तथा तार AB को बिंदु P के परितः धीमे-धीमे घुमाइए जिससे सीधे तार की विभिन्न अवस्थाएँ प्राप्त हो सकें [देखिए आकृति 10.3(i)]।

विभिन्न स्थितियों में तार, वृत्ताकार तार को बिंदु P एवं एक अन्य बिंदु  $Q_1$  या  $Q_2$  या  $Q_3$  आदि पर प्रतिच्छेदित करता है। एक स्थिति में, आप देखेंगे कि वह वृत्त को केवल एक बिंदु P पर ही प्रतिच्छेदित करेगा (AB की स्थिति A'B' को देखिए)। ये यह दर्शाता है कि वृत्त के एक बिंदु पर एक स्पर्श रेखा का अस्तित्व है। पुनः घुमाने पर आप प्रेक्षण कर सकते हैं कि AB की अन्य सभी स्थितियों में वह वृत्त को बिंदु P तथा एक अन्य बिंदु  $R_1$  या  $R_2$  या  $R_3$  आदि पर प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार आप प्रेक्षण कर सकते हैं कि वृत्त के एक बिंदु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।

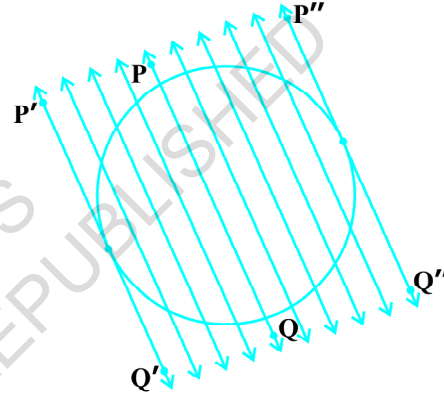


आकृति 10.3 (i)

उपर्युक्त क्रियाकलाप करते हुए आपने अवश्य प्रेक्षण किया होगा कि जैसे-जैसे स्थिति AB से स्थिति A' B' की ओर बढ़ती है, रेखा AB और वृत्त का उभयनिष्ठ बिंदु  $Q_1$ , उभयनिष्ठ बिंदु P की ओर निकट आता जाता है। अंततः, AB की स्थिति A' B' में वह बिंदु P के संपाती हो जाता है। पुनः ध्यान दीजिए कि क्या होता है जब A'' B'', P के परितः दक्षिणावर्त घुमाया जाता है? उभयनिष्ठ बिंदु  $R_3$  धीरे-धीरे बिंदु P की ओर अग्रसर होता है तथा अंततः P से संपाती हो जाता है। इस प्रकार हम देखते हैं:

**किसी वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।**

**क्रियाकलाप 2 :** एक कागज पर एक वृत्त और वृत्त की छेदक रेखा PQ खींचिए। छेदक रेखा के समांतर दोनों ओर अनेक रेखाएँ खींचिए। आप पाएँगे कि कुछ चरणों के बाद रेखाओं द्वारा काटी गई जीवा की लंबाई धीरे-धीरे कम हो रही है अर्थात् रेखा तथा वृत्त के दोनों प्रतिच्छेद बिंदु पास आ रहे हैं [देखिए आकृति 10.3(ii)]। एक स्थिति में छेदक रेखा के एक ओर यह लंबाई तथा दूसरी स्थिति में यह दूसरी ओर शून्य हो जाती है। छेदक रेखा की स्थितियों P'Q' तथा P''Q'' की आकृति 10.3 (ii) में अवलोकन कीजिए। ये दोनों रेखाएँ दी गयी छेदक रेखा PQ के समांतर दो स्पर्श रेखाएँ हैं इससे आपको यह जानने में सहायता मिलती है कि एक छेदक रेखा के समांतर वृत्त की दो से अधिक स्पर्श रेखाएँ नहीं होती हैं।

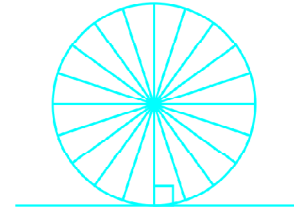


आकृति 10.3(ii)

इस क्रियाकलाप से यह निष्कर्ष भी निकलता है कि स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशेष स्थिति है जब उसकी संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।

स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिंदु को **स्पर्श बिंदु** [आकृति 10.1 (iii) में बिंदु A] कहते हैं तथा स्पर्श रेखा को वृत्त के उभयनिष्ठ बिंदु पर **स्पर्श करना** कहते हैं।

अब आप अपने चारों ओर देखिए। क्या आपने एक साइकिल अथवा एक बैलगाड़ी को चलते देखा है? इनके पहियों की ओर देखिए। एक पहिए की सभी तीलियाँ इसकी त्रिज्याओं के अनुरूप हैं। अब पहिए की स्थिति का धरती पर गति करने के सापेक्ष व्याख्या कीजिए। क्या आपको कहीं स्पर्श रेखा दिखती है? (देखिए आकृति 10.4)। वास्तव



आकृति 10.4

में पहिया एक रेखा के अनुदिश गति करता है जो पहिये को निरूपित करने वाले वृत्त परस्पर्श रेखा है। यह भी देखिए कि सभी स्थितियों में आकृति 10.4 धरती के स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब दृष्टिगोचर होती है (देखिए आकृति 10.4)। अब हम स्पर्श रेखा के इस गुण को सिद्ध करेंगे।

**प्रमेय 10.1 :** वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

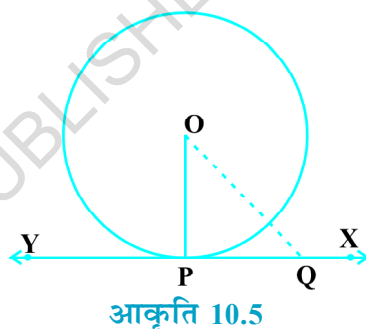
**उपपत्ति :** हमें केंद्र O वाला एक वृत्त दिया है और एक बिंदु P पर स्पर्श रेखा XY दी है। हमें सिद्ध करना है कि OP, XY पर लंब है।

XY पर P के अतिरिक्त एक बिंदु Q लीजिए और OQ को मिलाइए (देखिए आकृति 10.5)।

बिंदु Q वृत्त के बाहर होना चाहिए (क्यों? ध्यान दीजिए कि यदि Q वृत्त के अंदर है तो XY वृत्त की एक छेदक रेखा हो जाएगी और वह वृत्त की स्पर्श रेखा नहीं होगी)। अतः, OQ त्रिज्या OP से बड़ी है। अर्थात्

$$OQ > OP$$

क्योंकि यह बिंदु P के अतिरिक्त XY के प्रत्येक बिंदु के लिए सत्य है, OP बिंदु O से XY के अन्य बिंदुओं की न्यूनतम दूरी है। इसलिए OP, XY पर लंब है (जैसा कि प्रमेय A1.7 में दर्शाया गया है)।



आकृति 10.5

**टिप्पणी :**

- उपर्युक्त प्रमेय से हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वृत्त के किसी बिंदु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।
- स्पर्श बिंदु से त्रिज्या को समाहित करने वाली रेखा को वृत्त के उस बिंदु पर 'अभिलंब' भी कहते हैं।

### प्रश्नावली 10.1

- एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?
- रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
  - किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे \_\_\_\_\_ बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
  - वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को \_\_\_\_\_ कहते हैं।
  - एक वृत्त की \_\_\_\_\_ समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
  - वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को \_\_\_\_\_ कहते हैं।

3. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि  $OQ = 12$  सेमी। PQ की लंबाई है:
- (A) 12 सेमी (B) 13 सेमी (C) 8.5 सेमी (D)  $\sqrt{119}$  सेमी
4. एक वृत्त खींचिए और एक दी गई रेखा के समांतर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए कि उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो।

### 10.3 एक बिंदु से एक वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या

किसी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या के बारे में जानने के लिए निम्न क्रियाकलाप करें:

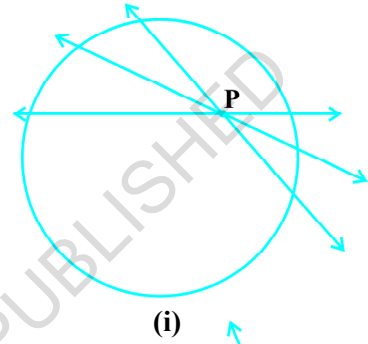
**क्रियाकलाप 3 :** एक कागज़ पर एक वृत्त खींचिए। एक बिंदु P इसके अंदर लीजिए। उस बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचने का प्रयत्न कीजिए। आप क्या पाते हैं? आप पाते हैं कि इससे खींची गई प्रत्येक रेखा वृत्त को दो बिंदुओं पर परिच्छेद करती है इसलिए इन रेखाओं में से कोई स्पर्श रेखा नहीं हो सकती [देखिए आकृति 10.6 (i)]।

पुनः, वृत्त पर एक बिंदु P लीजिए तथा इस बिंदु से स्पर्श रेखाएँ खींचिए। आपने पहले से ही प्रेक्षण किया है कि वृत्त के इस बिंदु पर एक ही स्पर्श रेखा होती है [देखिए आकृति 10.6 (ii)]।

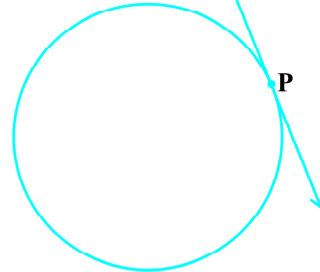
अंत में वृत्त के बाहर एक बिंदु P लीजिए और वृत्त पर इस बिंदु से स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयत्न करिए। आप क्या प्रेक्षण करते हैं? आप पाएँगे कि इस बिंदु से वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं (देखिए आकृति 10.6 (iii))।

संक्षेप में हम इन यथार्थों को निम्न स्थितियों में प्रकट कर सकते हैं।

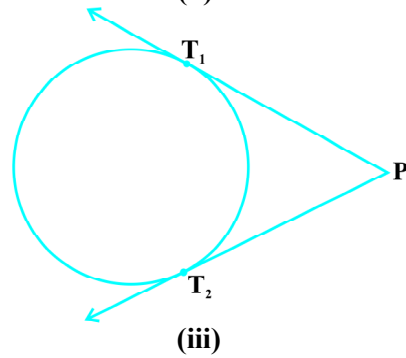
**स्थिति 1 :** वृत्त के अंदर स्थित किसी बिंदु से जाने वाली वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है।



(i)



(ii)



(iii)

आकृति 10.6

**स्थिति 2 :** वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा है।

**स्थिति 3 :** वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

आकृति 10.6 (iii) में स्पर्श रेखाओं  $PT_1$  तथा  $PT_2$  के क्रमशः  $T_1$  तथा  $T_2$  स्पर्श बिंदु हैं।

वाह्य बिंदु P से वृत्त के स्पर्श बिंदु तक स्पर्श रेखा खंड की लंबाई को बिंदु P से वृत्त पर **स्पर्श रेखा की लंबाई** कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि आकृति 10.6 (iii) में  $PT_1$  और  $PT_2$  बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ हैं। लंबाइयों  $PT_1$  और  $PT_2$  में एक उभयनिष्ठ गुण है। क्या आप इसे प्राप्त कर सकते हैं?  $PT_1$  और  $PT_2$  को मापिए। क्या ये बराबर हैं? वास्तव में सदैव ऐसा ही है। आइए इस तथ्य की एक उपपत्ति निम्न प्रमेय में दें।

**प्रमेय 10.2 :** वाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

**उपपत्ति :** हमें केंद्र O वाला एक वृत्त, वृत्त के बाहर का एक बिंदु P तथा P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ, PR दी है (देखिए आकृति 10.7)। हमें सिद्ध करना है कि  $PQ = PR$

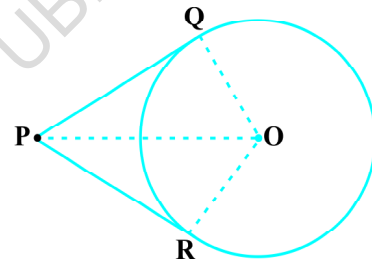


Fig. 10.7

इसके लिए हम OP, OQ और OR को मिलाते हैं। तब  $\angle OQP$  तथा  $\angle ORP$  समकोण हैं क्योंकि ये त्रिज्याओं और स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण हैं और प्रमेय 10.1 से ये समकोण हैं। अब समकोण त्रिभुजों OQP तथा ORP में,

$$OQ = OR \quad (\text{एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

$$OP = OP \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

$$\text{अतः} \quad \Delta OQP \cong \Delta ORP \quad (\text{RHS सर्वांगसमता द्वारा})$$

$$\text{इससे प्राप्त होता है} \quad PQ = PR \quad (\text{CPCT})$$

**टिप्पणी :**

1. प्रमेय को पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके भी निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है:

$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2 \quad (\text{क्योंकि } OQ = OR)$$

जिससे प्राप्त होता है कि  $PQ = PR$

2. यह भी ध्यान दीजिए कि  $\angle OPQ = \angle OPR$ । अतः OP कोण QPR का अर्धक है, अर्थात् वृत्त का केंद्र स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण अर्धक पर स्थित होता है।

आइए, अब कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 1 :** सिद्ध कीजिए कि दो सकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है।

**हल :** हमें केंद्र O वाले दो सकेन्द्रीय वृत्त  $C_1$  और  $C_2$  तथा बड़े वृत्त  $C_1$  की जीवा AB, जो छोटे वृत्त  $C_2$  को बिंदु P पर स्पर्श करती है, दिए हैं (देखिए आकृति 10.8)।

हमें सिद्ध करना है कि  $AP = BP$

आइए OP को मिलाएँ। इस प्रकार AB,  $C_2$  के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है।  
अतः प्रमेय 10.1 से

$$OP \perp AB$$

अब AB वृत्त  $C_1$  की एक जीवा है और  $OP \perp AB$  है। अतः, OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है,

अर्थात्  $AP = BP$

**उदाहरण 2 :** केंद्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिंदु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि  $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$  है।

**हल :** हमें केंद्र O वाला एक वृत्त, एक बाह्य बिंदु T तथा वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ, जहाँ P, Q स्पर्श बिंदु हैं, दिए हैं (देखिए आकृति 10.9)। हमें सिद्ध करना है कि

$$\angle PTQ = 2 \angle OPQ$$

माना  $\angle PTQ = \theta$

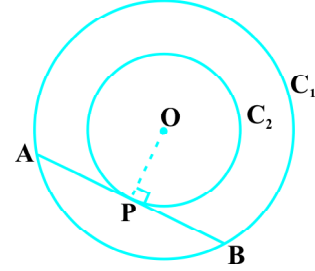
अब प्रमेय 10.2 से  $TP = TQ$ । अतः TPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$\text{इसलिए } \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2} (180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2} \theta$$

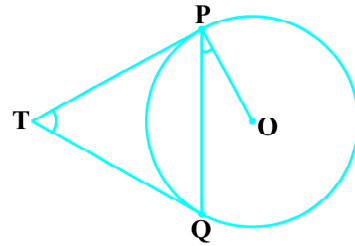
प्रमेय 10.1 से  $\angle OPT = 90^\circ$  है।

$$\text{अतः } \angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \theta\right) = \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \angle PTQ$$

इससे  $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$  प्राप्त होता है।

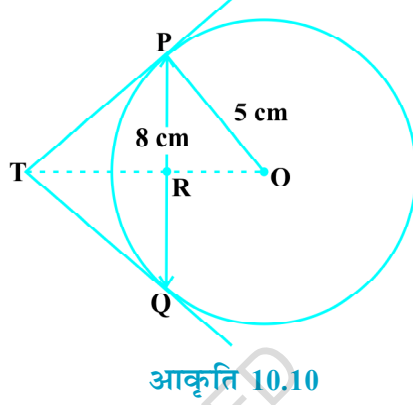


आकृति 10.8



आकृति 10.9

**उदाहरण 3 :** 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त की 8 cm लंबी एक जीवा PQ है। P और Q पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करती हैं (देखिए आकृति 10.10)। TP की लंबाई ज्ञात कीजिए।



**हल :** OT को मिलाएँ। माना यह PQ को बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करती है। तब  $\Delta TPQ$  समद्विबाहु है और TO,  $\angle PTQ$  का कोणार्धक है। इसलिए  $OT \perp PQ$  और इस प्रकार OT, PQ का अर्धक है जिससे प्राप्त होता है  $PR = RQ = 4$  cm

$$\text{साथ ही } OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{अब } \angle TPR + \angle RPO = 90^\circ = \angle TPR + \angle PTR \quad (\text{क्यों?})$$

$$\text{अतः } \angle RPO = \angle PTR$$

इसलिए समकोण त्रिभुज TRP और समकोण त्रिभुज PRO, AA समरूपता द्वारा समरूप

$$\text{हैं। इससे } \frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO} \text{ प्राप्त होता है। अर्थात् } \frac{TP}{5} = \frac{4}{3} \text{ अर्थात् } TP = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

**टिप्पणी :** TP को पाइथागोरस प्रमेय द्वारा निम्न प्रकार से भी प्राप्त कर सकते हैं:

$$\text{माना } TP = x \text{ और } TR = y \text{ तो}$$

$$x^2 = y^2 + 16 \quad (\text{समकोण } \Delta PRT \text{ लेकर}) \quad (1)$$

$$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2 \quad (\text{समकोण } \Delta OPT \text{ लेकर}) \quad (2)$$

(1) को (2) में से घटाकर, हम पाते हैं

$$25 = 6y - 7 \quad \text{या} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\text{इसलिए } x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9} \quad [(1) \text{ से}]$$

$$\text{या } x = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

### प्रश्नावली 10.2

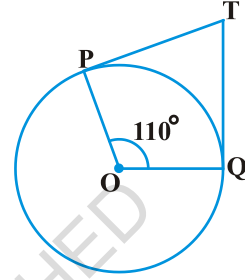
प्रश्न सं. 1, 2, 3 में सही विकल्प चुनिए एवं उचित कारण दीजिए।

1. एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या है:

(A) 7 cm (B) 12 cm  
(C) 15 cm (D) 24.5 cm

2. आकृति 10.11 में, यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि  $\angle POQ = 110^\circ$ , तो  $\angle PTQ$  बराबर है:

(A)  $60^\circ$  (B)  $70^\circ$   
(C)  $80^\circ$  (D)  $90^\circ$



आकृति 10.11

3. यदि एक बिंदु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर  $80^\circ$  के कोण पर झुकी हों, तो  $\angle POA$  बराबर है :

(A)  $50^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $70^\circ$  (D)  $80^\circ$

4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरे पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

5. सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

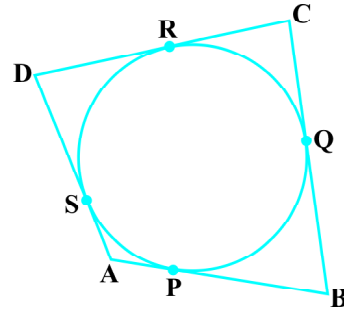
6. एक बिंदु A से, जो एक वृत्त के केंद्र से 5 cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

7. दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

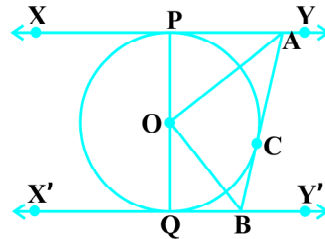
8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12)। सिद्ध कीजिए :

$$AB + CD = AD + BC$$

9. आकृति 10.13 में XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिंदु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि  $\angle AOB = 90^\circ$  है।

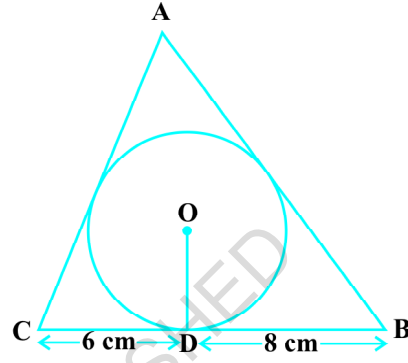


आकृति 10.12



आकृति 10.13

10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।
11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।
12. 4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखंड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिंदु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाइयाँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं (देखिए आकृति 10.14)। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।
13. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।



आकृति 10.14

#### 10.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. वृत्त की स्पर्श रेखा का अर्थ।
2. वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।
3. बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।



1063CH12

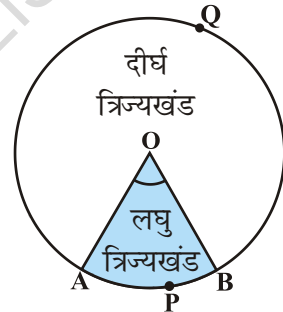
## वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

# 11

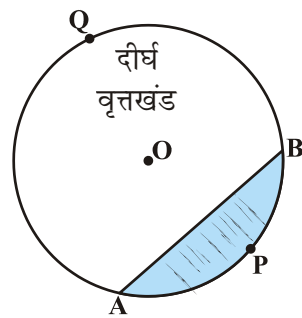
### 11.1 त्रिज्यखंड और वृत्तखंड के क्षेत्रफल

आप पिछली कक्षाओं में शब्दों *त्रिज्यखंड (sector)* और *वृत्तखंड (segment of a circle)* से पूर्व परिचित हैं। आपको याद होगा कि एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो, उस वृत्त का एक त्रिज्यखंड कहलाता है तथा वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिबद्ध हो एक वृत्तखंड कहलाता है। इस प्रकार, आकृति 11.1 में, छायांकित भाग OAPB केंद्र O वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है।  $\angle AOB$  इस त्रिज्यखंड का कोण कहलाता है। ध्यान दीजिए कि इसी आकृति में अछायांकित भाग OAQB भी वृत्त का त्रिज्यखंड है। स्पष्ट कारणों से OAPB एक लघु त्रिज्यखंड (*minor sector*) कहलाता है तथा OAQB एक दीर्घ त्रिज्यखंड (*major sector*) कहलाता है। आप यह भी देख सकते हैं कि इस दीर्घ त्रिज्यखंड का कोण  $360^\circ - \angle AOB$  है।

अब आकृति 11.2 को देखिए, जिसमें AB केंद्र O वाले वृत्त की एक जीवा है। अतः छायांकित भाग APB एक वृत्तखंड है। आप यह भी देख सकते हैं कि अछायांकित भाग AQB भी जीवा AB द्वारा निर्मित एक अन्य वृत्तखंड है। स्पष्ट कारणों से, APB लघु वृत्तखंड कहलाता है तथा AQB दीर्घ वृत्तखंड कहलाता है।



आकृति 11.1

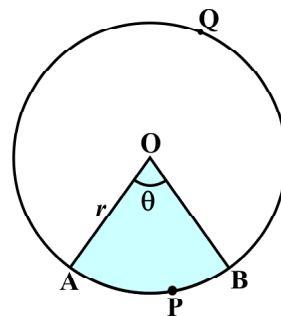


आकृति 11.2

**टिप्पणी :** जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'वृत्तखंड' और 'त्रिज्यखंड' लिखने से हमारा तात्पर्य क्रमशः लघु वृत्तखंड और लघु त्रिज्यखंड से होगा।

आइए उपरोक्त ज्ञान के आधार पर, इनके क्षेत्रफलों के परिकलित करने के कुछ संबंध (या सूत्र) ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

मान लीजिए OAPB केंद्र O और त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है (देखिए आकृति 11.3)। मान लीजिए  $\angle AOB$  का अंशीय (degree) माप  $\theta$  है।



आकृति 11.3

आप जानते हैं कि एक वृत्त [वस्तुतः एक वृत्तीय क्षेत्र या चकती (disc)] का क्षेत्रफल  $\pi r^2$  होता है।

एक तरीके से, हम इस वृत्तीय क्षेत्र को केंद्र O पर  $360^\circ$  का कोण बनाने वाला (अंशीय माप 360) एक त्रिज्यखंड मान सकते हैं। फिर ऐकिक विधि (Unitary Method) का प्रयोग करके, हम त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल नीचे दर्शाए अनुसार ज्ञात कर सकते हैं:

जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 360 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल  $= \pi r^2$

अतः, जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 1 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल  $= \frac{\pi r^2}{360}$

इसलिए जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप  $\theta$  है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

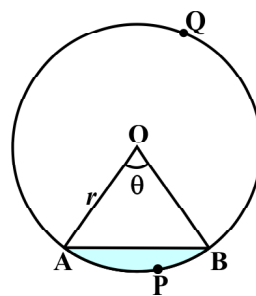
$$= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

इस प्रकार, हम वृत्त के एक त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल के लिए, निम्नलिखित संबंध (या सूत्र) प्राप्त करते हैं:

$$\text{कोण } \theta \text{ वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2,$$

जहाँ  $r$  वृत्त की त्रिज्या है और  $\theta$  त्रिज्यखंड का अंशों में कोण है।

अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: क्या हम इस त्रिज्यखंड की संगत चाप APB की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं। हाँ, हम ऐसा कर सकते हैं। पुनः, ऐकिक विधि का प्रयोग करने तथा संपूर्ण वृत्त ( $360^\circ$  कोण वाले) की लंबाई  $2\pi r$  लेने पर, हम चाप APB की



आकृति 11.4

वांछित लंबाई  $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$  प्राप्त करते हैं।

अतः कोण  $\theta$  वाले त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई  $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

आइए अब केंद्र O और त्रिज्या  $r$  वाले वृत्तखंड APB के क्षेत्रफल पर विचार करें (देखिए आकृति 11.4)। आप देख सकते हैं कि

$$\begin{aligned} \text{वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल} &= \text{त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल} - \Delta \text{ OAB का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OAB का क्षेत्रफल} \end{aligned}$$

**टिप्पणी :** क्रमशः आकृति 11.3 और आकृति 11.4 से, आप देख सकते हैं कि

दीर्घ त्रिज्यखंड OAQB का क्षेत्रफल  $= \pi r^2 -$  लघु त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल

तथा दीर्घ वृत्तखंड AQB का क्षेत्रफल  $= \pi r^2 -$  लघु वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल

अब आइए इन अवधारणाओं (या परिणामों) को समझने के लिए कुछ उदाहरण लें।

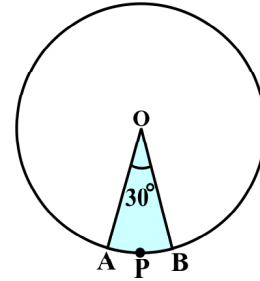
**उदाहरण 1 :** त्रिज्या 4 cm वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण  $30^\circ$  है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए)।

**हल :** दिया हुआ त्रिज्यखंड OAPB है (देखिए आकृति 11.5)।

$$\begin{aligned} \text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 - \text{त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल} \\ &= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2 \\ &= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$



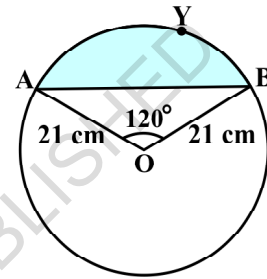
आकृति 11.5

वैकल्पिक रूप से,

$$\begin{aligned} \text{दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2 \\ &= \left( \frac{360 - 30}{360} \right) \times 3.14 \times 16 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{ cm}^2 = 46.05 \text{ cm}^2 \\ &= 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

**उदाहरण 2 :** आकृति 11.6 में दर्शाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त की त्रिज्या 21 cm है

और  $\angle AOB = 120^\circ$  है।  $[\pi = \frac{22}{7}]$  लीजिए ]



आकृति 11.6

**हल :** वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल

$$= \text{त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल} - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} \quad (1)$$

$$\text{अब, त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल} = \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 462 \text{ cm}^2 \quad (2)$$

$\Delta OAB$  का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए  $OM \perp AB$  खींचिए, जैसाकि आकृति 11.7 में दिखाया गया है।

ध्यान दीजिए कि  $OA = OB$  है। अतः, RHS सर्वासमता से,  $\Delta AMO \cong \Delta BMO$  है।

इसलिए M जीवा AB का मध्य-बिंदु है तथा  $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$  है।

मान लीजिए

$$OM = x \text{ cm है।}$$

इसलिए  $\Delta OMA$  से,

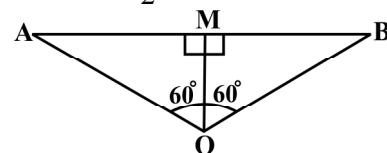
$$\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ$$

या

$$\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left( \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \right)$$

या

$$x = \frac{21}{2}$$



आकृति 11.7

अतः  $OM = \frac{21}{2} \text{ cm}$

साथ ही  $\frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः  $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

इसलिए  $AB = 2 AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

अतः  $\Delta OAB$  का क्षेत्रफल  $= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ cm}^2$   
 $= \frac{441}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$  (3)

इसलिए वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल  $= \left( 462 - \frac{441}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2$  [(1), (2) और (3) से]  
 $= \frac{21}{4} (88 - 21\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

### अभ्यास 11.1

(जब तक अन्यथा न कहा जाए,  $\pi = \frac{22}{7}$  का प्रयोग कीजिए।)

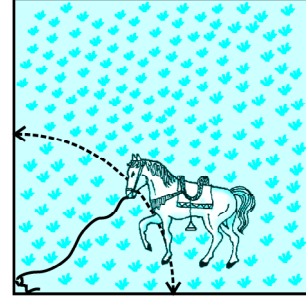
- 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण  $60^\circ$  है।
- एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है।
- एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर एक समकोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:  
 (i) संगत लघु वृत्तखंड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए)।
- त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर  $60^\circ$  का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:  
 (i) चाप की लंबाई (ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल  
 (iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल
- 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर  $60^\circ$  का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  और  $\sqrt{3} = 1.73$  का प्रयोग कीजिए।)

7. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर  $120^\circ$  का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

( $\pi = 3.14$  और  $\sqrt{3} = 1.73$  का प्रयोग कीजिए।)

8. 15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूंट से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 11.8)। ज्ञात कीजिए:

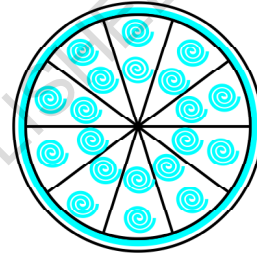
- मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।
- चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए। ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए।)



आकृति 11.8

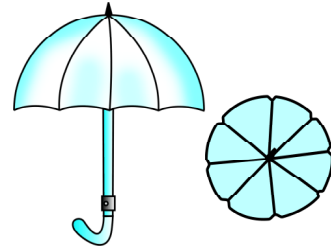
9. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसा कि आकृति 11.9 में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए:

- कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई
- ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल



आकृति 11.9

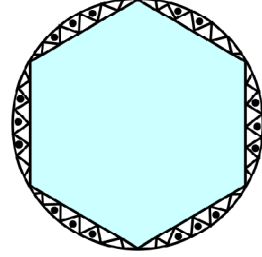
10. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 11.10)। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.10

11. किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और  $115^\circ$  के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।
12. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house)  $80^\circ$  कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए।)

13. एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति 11.11 में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो ₹ 0.35 प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिज़ाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ( $\sqrt{3} = 1.7$  का प्रयोग कीजिए)
14. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:  
त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण  $p^\circ$  है, निम्नलिखित है:



आकृति 11.11

- (A)  $\frac{p}{180} \times 2\pi R$  (B)  $\frac{p}{180} \times \pi R^2$  (C)  $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$  (D)  $\frac{p}{360} \times 2\pi R$

## 11.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में  $\theta$  है, के संगत चाप की लंबाई  $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$  होती है।
2. त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में  $\theta$  है, का क्षेत्रफल  $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$  होता है।
3. एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल



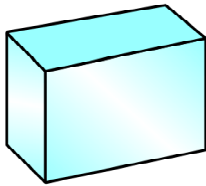
1063CH13

## पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

# 12

### 12.1 भूमिका

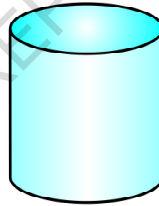
कक्षा IX से, आप कुछ ठोस आकृतियों जैसे घनाभ, शंकु, बेलन और गोला से परिचित हो चुके हैं (देखिए आकृति 12.1)। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि इन आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।



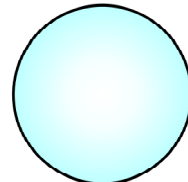
(i)



(ii)



(iii)

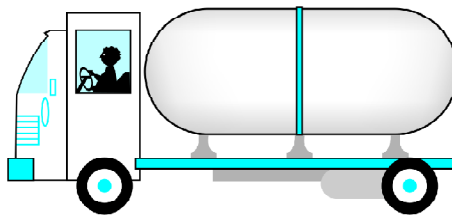


(iv)

आकृति 12.1

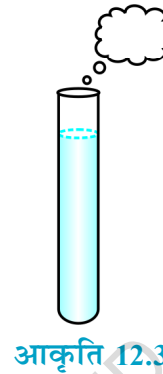
अपने दैनिक जीवन में हमें ऐसे अनेक ठोस देखने को मिलते हैं जो उपरोक्त दो या अधिक आधारभूत ठोसों के संयोजनों से (अर्थात् इनको मिलाकर) बनते हैं।

आपने एक ट्रक के पीछे रखे बड़े कंटेनर (container) को अवश्य ही देखा होगा (देखिए आकृति 12.2), जिसमें एक स्थान से दूसरे स्थान तक तेल या पानी ले जाया जाता है। क्या इसका आकार उपरोक्त चारों ठोसों में से किसी एक के आकार जैसा है? आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि यह ठोस एक बेलन और उसके दोनों सिरों पर दो अर्धगोले लगने पर बना है।



आकृति 12.2

पुनः, आपने ऐसी वस्तु भी अवश्य देखी होगी जो आकृति 12.3 में दर्शाई गई है। क्या आप इसका नाम बता सकते हैं? यह निश्चय ही एक परख नली (test tube) है। आपने इसे अपनी विज्ञान प्रयोगशाला में प्रयोग किया होगा। यह परखनली भी एक बेलन और एक अर्धगोले से मिलकर बनी है। इसी प्रकार, यात्रा करते समय भी उपरोक्त ठोसों के संयोजनों से बने अनेक बड़े और सुंदर भवनों अथवा स्मारकों को आपने देखा होगा।



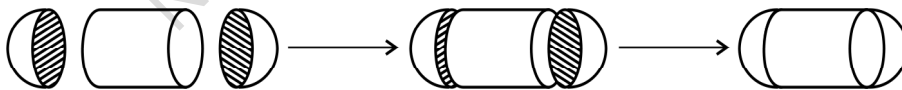
आकृति 12.3

यदि किन्हीं कारणवश, आप इन ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल या आयतन या धारिता ज्ञात करना चाहें तो आप ऐसा किस प्रकार करेंगे? आप ऐसे ठोसों को अब तक पढ़ी हुई चारों ठोस आकृतियों में से किसी एक के रूप में वर्गीकृत नहीं कर सकते।

इस अध्याय में आप यह देखेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं?

## 12.2 ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए उस कंटेनर पर विचार करें जो हमने आकृति 12.2 में देखा था। इस प्रकार के ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल हम कैसे ज्ञात करें? अब, जब भी हमारे सम्मुख कोई नई समस्या आती है तो हम सर्वप्रथम यह देखने का प्रयत्न करते हैं कि क्या हम इसे ऐसी छोटी समस्याओं में तोड़ सकते हैं जिन्हें हम पहले हल कर चुके हैं। हम देख सकते हैं कि यह ठोस एक बेलन के दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगाने से बना है। यह आकृति 12.4 में दिखाए ठोस जैसा लगेगा, जबकि हम सभी टुकड़ों को एक साथ मिला लेते हैं।



आकृति 12.4

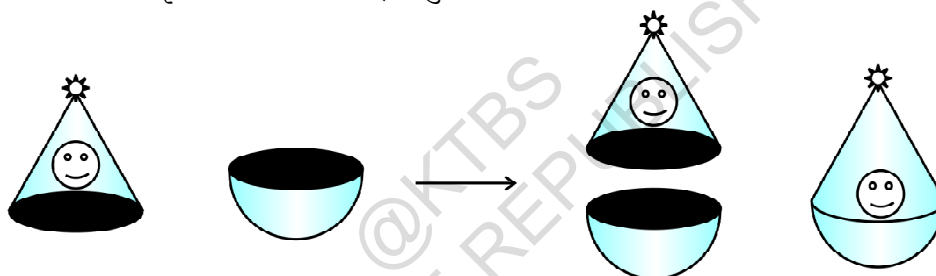
यदि हम नयी बनी हुई वस्तु को देखें, तो हमें केवल दोनों अर्धगोलों तथा बेलन के केवल वक्रपृष्ठ दिखाई देंगे।

इसलिए इस ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तीनों भागों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। इससे हमें प्राप्त होता है:

ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल(TSA) = एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल(CSA)  
 + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल  
 + दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए एक अन्य स्थिति पर विचार करें। मान लीजिए हम अर्धगोले और एक शंकु को जोड़कर एक खिलौना बना रहे हैं। आइए हम उन चरणों को देखें जिनका हम अनुसरण करेंगे।

पहले हम एक शंकु और एक अर्धगोला लेंगे और फिर उनके सपाट पृष्ठों को साथ-साथ लाने का प्रयत्न करेंगे। निस्संदेह, खिलौने के पृष्ठ को चिकना रखने के लिए हम शंकु के आधार की त्रिज्या अर्धगोले की त्रिज्या के बराबर लेंगे। इस खिलौने के बनाने में संबद्ध चरण आकृति 12.5 में दर्शाए अनुसार होंगे:



आकृति 12.5

अपने प्रयत्न के फलस्वरूप हमें एक गोल आधार वाला सुंदर खिलौना प्राप्त हो जाता है। अब, हम यदि यह जानना चाहें कि इस खिलौने के पृष्ठ पर रंग करवाने के लिए कितने पेंट की आवश्यकता होगी, तो हमें क्या जानकारी होनी चाहिए? हमें इस खिलौने के पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता है, जो अर्धगोले के CSA और शंकु के CSA को मिलाकर बनता है।

अतः, हम कह सकते हैं कि

खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्धगोले का CSA + शंकु का CSA

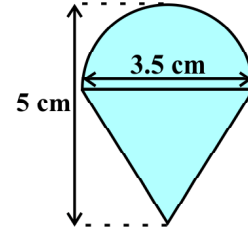
अब, आइए कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 1 :** रशीद को जन्मदिन के उपहार के रूप में एक लट्ठू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर अपने मोमिया रंगों (Crayons) से रंग करना चाहता है। यह लट्ठू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है (देखिए आकृति 12.6)। लट्ठू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है।

उसके द्वारा रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए।})$$

**हल :** यह लट्ठ बिल्कुल उस वस्तु जैसा है जिसकी चर्चा हमने आकृति 12.5 में की थी। अतः, हम वहाँ पर प्राप्त परिणाम को सुविधाजनक रूप से यहाँ प्रयोग कर सकते हैं। अर्थात्



आकृति 12.6

लट्ठ का TSA = अर्धगोले का CSA + शंकु का CSA

$$\begin{aligned} \text{अब, अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2 \\ &= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

साथ ही, शंकु की ऊँचाई = लट्ठ की ऊँचाई – अर्धगोलीय भाग की ऊँचाई (त्रिज्या)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm} = 3.25 \text{ cm}$$

$$\text{अतः शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l)} = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} \text{ cm} = 3.7 \text{ cm (लगभग)}$$

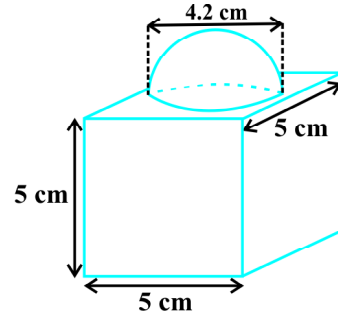
$$\text{इसलिए शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ cm}^2$$

इससे लट्ठ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = 39.6 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

आप देख सकते हैं कि लट्ठ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्धगोले और शंकु के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर नहीं है।

**उदाहरण 2 :** आकृति 12.7 में दर्शाया गया सजावट के लिए प्रयोग होने वाला ब्लॉक दो ठोसों से मिलकर बना है। इनमें से एक घन है और दूसरा अर्धगोला है। इस ब्लॉक (block) का आधार 5 cm कोर या किनारे (edge) वाला एक घन है और उसके ऊपर लगे हुए अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = \frac{22}{7}$  लीजिए।)



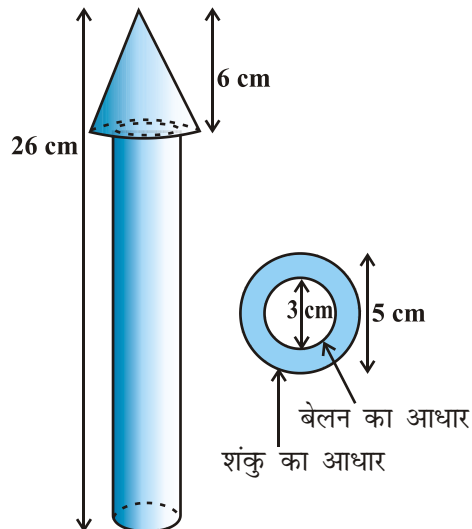
आकृति 12.7

**हल :** घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल =  $6 \times (\text{कोर})^2 = 6 \times 5 \times 5 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

अब, घन का वह भाग जिस पर अर्धगोला लगा हुआ है पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं होगा।

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad \text{ब्लॉक का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{घन का TSA} - \text{अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल} \\ &\quad + \text{अर्धगोले का CSA} \\ &= 150 - \pi r^2 + 2 \pi r^2 = (150 + \pi r^2) \text{ cm}^2 \\ &= 150 \text{ cm}^2 + \left( \frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2} \right) \text{ cm}^2 \\ &= 150 \text{ cm}^2 + 13.86 \text{ cm}^2 = 163.86 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**उदाहरण 3 :** लकड़ी का एक खिलौना रॉकेट (rocket) एक शंकु के आकार का है जो एक बेलन पर अध्यारोपित है, जैसाकि आकृति 12.8 में दर्शाया गया है। संपूर्ण रॉकेट की ऊँचाई 26 cm है, जबकि शंकुवाकार भाग की ऊँचाई 6 cm है। शंकुवाकार के भाग के आधार का व्यास 5 cm और बेलनाकार भाग के आधार का व्यास 3 cm है। यदि शंकुवाकार भाग पर नारंगी रंग किया जाना है और बेलनाकार भाग पर पीला रंग किया जाना है, तो प्रत्येक रंग द्वारा रॉकेट का रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  लीजिए।)



आकृति 12.8

**हल :** शंकु की त्रिज्या को  $r$  से, शंकु की तिर्यक ऊँचाई को  $l$  से, शंकु की ऊँचाई को  $h$  से, बेलन की त्रिज्या को  $r'$  से, बेलन की ऊँचाई को  $h'$  से व्यक्त कीजिए। तब,  $r = 2.5$  cm,  $h = 6$  cm,  $r' = 1.5$  cm,  $h' = 26 - 6 = 20$  cm तथा

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ cm} = 6.5 \text{ cm}$$

यहाँ, शंकवाकार भाग का वृत्तीय आधार बेलन के आधार पर टिका हुआ है परंतु शंकु का आधार बेलन के आधार से बड़ा है। अतः, शंकु के आधार के एक भाग [वलय (ring)] को भी रँगा जाएगा।

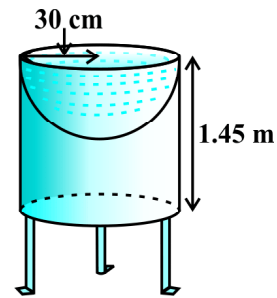
अतः, नारंगी रंग से रँगे भाग का क्षेत्रफल = शंकु का CSA + शंकु के आधार का क्षेत्रफल – बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \pi r l + \pi r^2 - \pi (r')^2 \\ &= \pi [(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2 \\ &= \pi [20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2 \\ &= 63.585 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अब, पीले रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल = बेलन का CSA + बेलन के एक आधार का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= 2\pi r' h' + \pi (r')^2 \\ &= \pi r' (2h' + r') \\ &= 3.14 \times 1.5 [2 \times 20 + 1.5] \text{ cm}^2 \\ &= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2 \\ &= 195.465 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**उदाहरण 4 :** मयंक ने अपने बगीचे के लिए एक पक्षी-स्नानागार (bird-bath) बनाया जिसका आकार एक खोखले बेलन जैसा है जिसके एक सिरे पर अर्धगोलाकार बर्तन बना हुआ है (देखिए आकृति 12.9)। बेलन की ऊँचाई 1.45 m है और उसकी त्रिज्या 30 cm है। इस पक्षी-स्नानागार का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.9

**हल :** मान लीजिए कि बेलन की ऊँचाई  $h$  है तथा बेलन और अर्धगोले की उभयनिष्ठ त्रिज्या  $r$  है। तब,

पक्षी-स्नानागार का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का CSA + अर्धगोले का CSA

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30) \text{ cm}^2$$

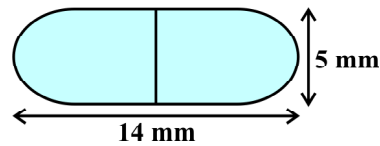
$$= 33000 \text{ cm}^2 = 3.3 \text{ m}^2$$

### प्रश्नावली 12.1

जब तक अन्यथा न कहा जाए,  $\pi = \frac{22}{7}$  लीजिए।

1. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन  $64 \text{ cm}^3$  है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास  $14 \text{ cm}$  है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई  $13 \text{ cm}$  है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक खिलौना त्रिज्या  $3.5 \text{ cm}$  वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई  $15.5 \text{ cm}$  है। इस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. भुजा  $7 \text{ cm}$  वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अंदर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

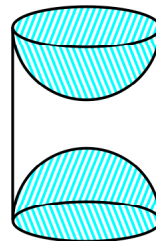
6. दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति 12.10)। पूरे कैप्सूल की लंबाई  $14 \text{ mm}$  है और उसका व्यास  $5 \text{ mm}$  है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.10

7. कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु अध्यारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमशः  $2.1 \text{ m}$  और  $4 \text{ m}$  है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई  $2.8 \text{ m}$  है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, ₹500 प्रति  $\text{m}^2$  की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए। (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है।)

8. ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंकवाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति 12.11 में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.11

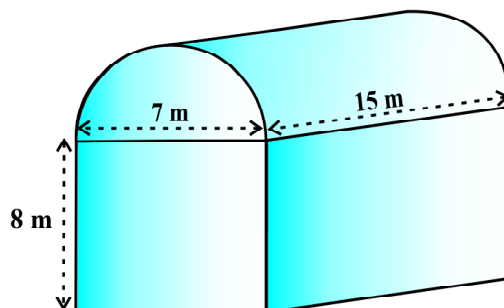
### 12.3 ठोसों के संयोजन का आयतन

पिछले अनुच्छेद में हमने यह चर्चा की है कि दो आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। अब हम देखेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के आयतन किस प्रकार परिकलित किए जाते हैं। ध्यान दीजिए कि पृष्ठीय क्षेत्रफल परिकलित करने में हमने दोनों घटकों (ठोसों) के पृष्ठीय क्षेत्रफलों को जोड़ा नहीं था क्योंकि इनको मिलाने की प्रक्रिया में पृष्ठीय क्षेत्रफल का कुछ भाग लुप्त हो गया था। परंतु आयतन परिकलित करने की स्थिति में ऐसा नहीं होगा। दो आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन वास्तव में दोनों घटकों के आयतनों के योग के बराबर होता है, जैसाकि हम नीचे दिए उदाहरण में देखेंगे।

**उदाहरण 5 :** शांता किसी शेड (shed) में एक उद्योग चलाती है। यह शेड एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्धबेलन आरोपित है (देखिए आकृति 12.12)। यदि इस शेड के आधार की विमाएँ 7 m × 15 m हैं तथा घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है तो शेड में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए।

पुनः यदि यह मान लें कि शेड में रखी मशीनरी 300 m<sup>3</sup> स्थान घेरती है तथा शेड

के अंदर 20 श्रमिक हैं जिनमें से प्रत्येक 0.08 m<sup>3</sup> के औसत से स्थान घेरता है तब शेड में कितनी हवा होगी? ( $\pi = \frac{22}{7}$  लीजिए।)



आकृति 12.12

**हल :** शेड के अंदर हवा का आयतन (जब इसमें कोई व्यक्ति या मशीनरी नहीं है) घनाभ के अंदर की हवा और अर्धबेलन के अंदर की हवा के आयतनों को मिला कर प्राप्त होगा।

अब, घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 m, 7 m और 8 m हैं।

साथ ही, अर्धबेलन का व्यास 7 m और ऊँचाई 15 m है।

इसलिए वांछित आयतन = घनाभ का आयतन +  $\frac{1}{2}$  बेलन का आयतन

$$= \left[ 15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15 \right] \text{m}^3 = 1128.75 \text{m}^3$$

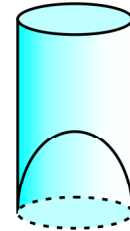
आगे, मशीनरी द्वारा घेरा गया स्थान =  $300 \text{m}^3$

तथा 20 श्रमिकों द्वारा घेरा गया स्थान =  $20 \times 0.08 \text{m}^3 = 1.6 \text{m}^3$

अतः, शेड में उस समय हवा का आयतन, जब उसमें मशीनरी और श्रमिक हैं

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{m}^3$$

**उदाहरण 6 :** एक जूस (juice) बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति 12.13 में दर्शाए गिलासों से जूस देता था। बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार (तली) में एक उभरा हुआ अर्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 cm थी, तो गिलास की आभासी (apparent) धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  लीजिए।)



आकृति 12.13

**हल :** चौँक गिलास का आंतरिक व्यास = 5 cm है और ऊँचाई = 10 cm है, इसलिए

$$\text{गिलास की आभासी धारिता} = \pi r^2 h$$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{cm}^3 = 196.25 \text{cm}^3$$

परंतु इसकी वास्तविक धारिता उपरोक्त धारिता से आधार में बने अर्धगोले के आयतन के बराबर कम है।

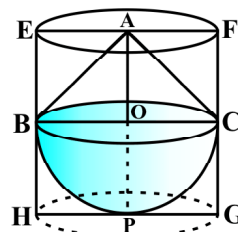
$$\text{अर्थात् कमी बराबर है } \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{cm}^3 = 32.71 \text{cm}^3$$

अतः गिलास की वास्तविक धारिता = आभासी धारिता – अर्धगोले का आयतन

$$= (196.25 - 32.71) \text{cm}^3$$

$$= 163.54 \text{cm}^2$$

**उदाहरण 7 :** एक ठोस खिलौना एक अर्धगोले के आकार का है जिस पर एक लंब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए। यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिगत हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  लीजिए।)



आकृति 12.14

**हल :** मान लीजिए BPC अर्धगोला है तथा ABC अर्धगोले के आधार पर खड़ा एक शंकु है (देखिए आकृति 12.14)। अर्धगोले (और शंकु की भी) की त्रिज्या  $= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$  इसलिए खिलौने का आयतन  $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[ \frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2 \right] \text{ cm}^3 = 25.12 \text{ cm}^3$$

अब, मान लीजिए कि दिए गए ठोस के परिगत लंब वृत्तीय बेलन EFGH है। इस लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या  $= HP = BO = 2 \text{ cm}$  है तथा इसकी ऊँचाई

$$EH = AO + OP = (2 + 2) \text{ cm} = 4 \text{ cm है।}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः, वांछित आयतन} &= \text{लंब वृत्तीय बेलन का आयतन} - \text{खिलौने का आयतन} \\ &= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) \text{ cm}^3 \\ &= 25.12 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

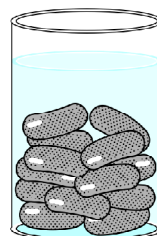
इस प्रकार, दोनों आयतनों का अंतर  $= 25.12 \text{ cm}^3$  है।

## प्रश्नावली 12.2

(जब तक अन्यथा न कहा जाए,  $\pi = \frac{22}{7}$  लीजिए।)

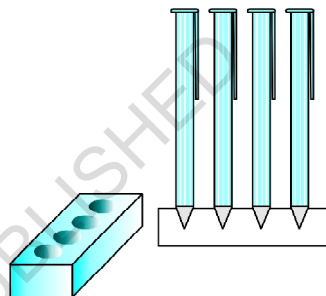
1. एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन  $\pi$  के पदों में ज्ञात कीजिए।
2. एक इंजीनियरिंग के विद्यार्थी रचेल से एक पतली एल्यूमीनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इस मॉडल का व्यास 3 cm है और इसकी लंबाई 12 cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर हैं।)

3. एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाबजामुनों में लगभग कितनी चाशनी होगी, यदि प्रत्येक गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है (देखिए आकृति 12.15)।



आकृति 12.15

4. एक कलमदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ 15 cm × 10 cm × 3.5 cm हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 1.4 cm है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 12.16)।



आकृति 12.16

5. एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8 cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमें प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
6. ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है  $1 \text{ cm}^3$  लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है। ( $\pi = 3.14$  लीजिए।)
7. एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।
8. एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन  $345 \text{ cm}^3$  है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए कि उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है और  $\pi = 3.14$ ।

### 12.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. आधारभूत ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु और गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन (को मिलाने से) से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करना।
2. ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के आयतन ज्ञात करना।

@KTBS  
NOT TO BE REPUBLISHED



1063CH14

## सांख्यिकी 13

### 13.1 भूमिका

कक्षा IX में, आप दिए हुए आँकड़ों को अवर्गीकृत एवं वर्गीकृत बारंबारता बंटनों में व्यवस्थित करना सीख चुके हैं। आपने आँकड़ों को चित्रीय रूप से विभिन्न आलेखों, जैसे दंड आलेख, आयत चित्र (इनमें असमान चौड़ाई वाले वर्ग अंतराल भी सम्मिलित थे) और बारंबारता बहुभुजों के रूप में निरूपित करना भी सीखा था। तथ्य तो यह है कि आप अवर्गीकृत आँकड़ों के कुछ संख्यात्मक प्रतिनिधि (numerical representatives) ज्ञात करके एक कदम आगे बढ़ गए थे। इन संख्यात्मक प्रतिनिधियों को *केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक (measures of central tendency)* कहते हैं। हमने ऐसे तीन मापकों अर्थात् *माध्य (mean)*, *माध्यक (median)* और *बहुलक (mode)* का अध्ययन किया था। इस अध्याय में, हम इन तीनों मापकों, अर्थात् माध्य, माध्यक और बहुलक, का अध्ययन अवर्गीकृत आँकड़ों से वर्गीकृत आँकड़ों के लिए आगे बढ़ाएँगे। हम संचयी बारंबारता (cumulative frequency) और संचयी बारंबारता सारणी की अवधारणाओं की चर्चा भी करेंगे तथा यह भी सीखेंगे कि संचयी बारंबारता वक्रों (cumulative frequency curves), जो *तोरण (ogives)* कहलाती हैं, को किस प्रकार खींचा जाता है।

### 13.2 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

जैसाकि हम पहले से जानते हैं, दिए हुए प्रेक्षणों का माध्य (या औसत) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है। कक्षा IX से, याद कीजिए कि यदि प्रेक्षणों  $x_1, x_2, \dots, x_n$  की बारंबारताएँ क्रमशः  $f_1, f_2, \dots, f_n$  हों, तो इसका अर्थ है कि प्रेक्षण  $x_1$ ,  $f_1$  बार आता है; प्रेक्षण  $x_2$ ,  $f_2$  बार आता है, इत्यादि।

अब, सभी प्रेक्षणों के मानों का योग  $= f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n$  है तथा प्रेक्षणों की संख्या  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  है।

अतः, इनका माध्य  $\bar{x}$  निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होगा :

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

याद कीजिए कि उपरोक्त को संक्षिप्त रूप में एक यूनानी अक्षर  $\Sigma$  [बड़ा सिगमा (capital sigma)] से व्यक्त करते हैं। इस अक्षर का अर्थ है जोड़ना (summation) अर्थात्

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

इसे और अधिक संक्षिप्त रूप में,  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$  लिखते हैं, यह समझते हुए कि  $i$  का मान 1 से  $n$  तक विचरण करता है।

आइए इस सूत्र का निम्नलिखित उदाहरण में माध्य ज्ञात करने के लिए उपयोग करें।

**उदाहरण 1 :** किसी स्कूल की कक्षा X के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित के एक पेपर में, 100 में से प्राप्त किए गए अंक, नीचे एक सारणी में दिए गए हैं। इन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

| प्राप्तांक ( $x_i$ )              | 10 | 20 | 36 | 40 | 50 | 56 | 60 | 70 | 72 | 80 | 88 | 92 | 95 |
|-----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| विद्यार्थियों की संख्या ( $f_i$ ) | 1  | 1  | 3  | 4  | 3  | 2  | 4  | 4  | 1  | 1  | 2  | 3  | 1  |

**हल :** याद कीजिए कि माध्य ज्ञात करने के लिए, हमें प्रत्येक  $x_i$  से उसकी संगत बारंबारता  $f_i$  द्वारा गुणनफल की आवश्यकता है। अतः, आइए इन गुणनफलों को सारणी 13.1 में दर्शाए अनुसार एक स्तंभ में रखें।

सारणी 13.1

| प्राप्तांक ( $x_i$ ) | विद्यार्थियों की संख्या ( $f_i$ ) | $f_i x_i$               |
|----------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| 10                   | 1                                 | 10                      |
| 20                   | 1                                 | 20                      |
| 36                   | 3                                 | 108                     |
| 40                   | 4                                 | 160                     |
| 50                   | 3                                 | 150                     |
| 56                   | 2                                 | 112                     |
| 60                   | 4                                 | 240                     |
| 70                   | 4                                 | 280                     |
| 72                   | 1                                 | 72                      |
| 80                   | 1                                 | 80                      |
| 88                   | 2                                 | 176                     |
| 92                   | 3                                 | 276                     |
| 95                   | 1                                 | 95                      |
| <b>योग</b>           | $\Sigma f_i = 30$                 | $\Sigma f_i x_i = 1779$ |

अब 
$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

अतः, प्राप्त किया गया माध्य अंक 59.3 है।

हमारे दैनिक जीवन की अधिकांश स्थितियों में, आँकड़े इतने बड़े होते हैं कि उनका एक अर्थपूर्ण अध्ययन करने के लिए उन्हें समूहों में बाँट कर (वर्गीकृत करके) छोटा किया जाता है। अतः, हमें दिए हुए अवर्गीकृत आँकड़ों को, वर्गीकृत आँकड़ों में बदलने की आवश्यकता होती है तथा इन आँकड़ों के माध्य ज्ञात करने की विधि निकालने की आवश्यकता होती है।

आइए उदाहरण 1 के अवर्गीकृत आँकड़ों को चौड़ाई, मान लीजिए, 15 के वर्ग अंतराल बनाकर वर्गीकृत आँकड़ों में बदलें। याद रखिए कि वर्ग अंतरालों की बारंबारताएँ निर्दिष्ट करते समय, किसी उपरि वर्ग सीमा (upper class limit) में आने वाले प्रेक्षण अगले वर्ग अंतराल में लिए जाते हैं। उदाहरणार्थ, अंक 40 प्राप्त करने वाले 4 विद्यार्थियों को वर्ग अंतराल 25-40 में न लेकर अंतराल 40-55 में लिया जाता है। इस परंपरा को ध्यान में रखते हुए, आइए इनकी एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाएँ (देखिए सारणी 13.2)।

सारणी 13.2

| वर्ग अंतराल             | 10 - 25 | 25 - 40 | 40 - 55 | 55 - 70 | 70 - 85 | 85 - 100 |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| विद्यार्थियों की संख्या | 2       | 3       | 7       | 6       | 6       | 6        |

अब, प्रत्येक वर्ग अंतराल के लिए, हमें एक ऐसे बिंदु (मान) की आवश्यकता है, जो पूरे अंतराल का प्रतिनिधित्व करे। यह मान लिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु के चारों ओर केंद्रित होती है। अतः, प्रत्येक वर्ग के मध्य-बिंदु (mid-point) [या वर्ग चिह्न (class mark)] को उस वर्ग में आने वाले सभी प्रेक्षणों का प्रतिनिधि (representative) माना जा सकता है। याद कीजिए कि हम एक वर्ग अंतराल का मध्य बिंदु (या वर्ग चिह्न) उसकी उपरि और निचली सीमाओं का औसत निकालकर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$\text{वर्ग चिह्न} = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा} + \text{निचली वर्ग सीमा}}{2}$$

सारणी 13.2 के संदर्भ में, वर्ग 10-25 का वर्ग चिह्न  $\frac{10+25}{2}$ , अर्थात् 17.5 है। इसी प्रकार, हम अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न ज्ञात कर सकते हैं। हम इन वर्ग चिह्नों को सारणी 13.3 में रखते हैं। ये वर्ग चिह्न  $x_i$ 's का काम करते हैं। व्यापक रूप में वर्ग अंतराल के वर्ग चिह्न  $x_i$  के संगत बारंबारता  $f_i$  लिखी जाती है। अब हम उदाहरण 1 की ही तरह, माध्य परिकलित करने की प्रक्रिया की ओर आगे बढ़ सकते हैं।

सारणी 13.3

| वर्ग अंतराल | विद्यार्थियों की संख्या ( $f_i$ ) | वर्ग चिह्न ( $x_i$ ) | $f_i x_i$                 |
|-------------|-----------------------------------|----------------------|---------------------------|
| 10 - 25     | 2                                 | 17.5                 | 35.0                      |
| 25 - 40     | 3                                 | 32.5                 | 97.5                      |
| 40 - 55     | 7                                 | 47.5                 | 332.5                     |
| 55 - 70     | 6                                 | 62.5                 | 375.0                     |
| 70 - 85     | 6                                 | 77.5                 | 465.0                     |
| 85 - 100    | 6                                 | 92.5                 | 555.0                     |
| योग         | $\Sigma f_i = 30$                 |                      | $\Sigma f_i x_i = 1860.0$ |

अंतिम स्तंभ में दिए मानों के योग से हमें  $\sum f_i x_i$  प्राप्त होता है। अतः, दिए हुए आँकड़ों का माध्य  $\bar{x}$ , नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होता है:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

माध्य ज्ञात करने की इस नयी विधि को **प्रत्यक्ष विधि (direct method)** कहा जा सकता है।

हम देखते हैं कि सारणियों 13.1 और 13.3 में, समान आँकड़ों का प्रयोग किया गया है तथा इनमें माध्य परिकलित करने के लिए एक ही सूत्र का प्रयोग किया गया है। परंतु इन दोनों में हमें परिणाम (माध्य) भिन्न-भिन्न प्राप्त हुए हैं। क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसा क्यों हुआ है और इनमें से कौन-सा माध्य अधिक सही है? दोनों मानों के अंतर का कारण सारणी 13.3 में की गई *मध्य-बिंदु कल्पना* है। 59.3 सही माध्य है, जबकि 62 एक सन्निकट माध्य है।

कभी-कभी जब  $x_i$  और  $f_i$  के मान बड़े होते हैं, तो  $x_i$  और  $f_i$  के गुणनफल ज्ञात करना जटिल हो जाता है तथा इसमें समय भी अधिक लगता है। अतः, ऐसी स्थितियों के लिए, आइए इन परिकलनों को सरल बनाने की विधि सोचें।

हम  $f_i$  के साथ कुछ नहीं कर सकते, परंतु हम प्रत्येक  $x_i$  को एक छोटी संख्या में बदल सकते हैं, जिससे हमारे परिकलन सरल हो जाएँगे। हम ऐसा कैसे करेंगे? प्रत्येक  $x_i$  में से एक निश्चित संख्या घटाने के बारे में आपका क्या विचार है? आइए यह विधि अपनाने का प्रयत्न करें।

इसमें पहला चरण यह हो सकता है कि प्राप्त किए गए सभी  $x_i$  में से किसी  $x_i$  को *कल्पित माध्य (assumed mean)* के रूप में चुन लें तथा इसे 'a' से व्यक्त करें। साथ ही, अपने परिकलन कार्य को और अधिक कम करने के लिए, हम 'a' को ऐसा  $x_i$  ले सकते हैं जो  $x_1, x_2, \dots, x_n$  के मध्य में कहीं आता हो। अतः, हम  $a = 47.5$  या  $a = 62.5$  चुन सकते हैं। आइए  $a = 47.5$  चुनें।

अगला चरण है कि  $a$  और प्रत्येक  $x_i$  के बीच का अंतर  $d_i$  ज्ञात किया जाए, अर्थात् प्रत्येक  $x_i$  से 'a' का *विचलन (deviation)* ज्ञात किया जाए।

अर्थात्

$$\begin{aligned} d_i &= x_i - a \\ &= x_i - 47.5 \end{aligned}$$

तीसरा चरण है कि प्रत्येक  $d_i$  और उसके संगत  $f_i$  का गुणनफल ज्ञात करके सभी  $f_i d_i$  का योग ज्ञात किया जाए। ये परिकलन सारणी 13.4 में दर्शाए गए हैं।

सारणी 13.4

| वर्ग अंतराल | विद्यार्थियों की संख्या ( $f_i$ ) | वर्ग चिह्न ( $x_i$ ) | $d_i = x_i - 47.5$ | $f_i d_i$              |
|-------------|-----------------------------------|----------------------|--------------------|------------------------|
| 10 - 25     | 2                                 | 17.5                 | -30                | -60                    |
| 25 - 40     | 3                                 | 32.5                 | -15                | -45                    |
| 40 - 55     | 7                                 | 47.5                 | 0                  | 0                      |
| 55 - 70     | 6                                 | 62.5                 | 15                 | 90                     |
| 70 - 85     | 6                                 | 77.5                 | 30                 | 180                    |
| 85 - 100    | 6                                 | 92.5                 | 45                 | 270                    |
| योग         | $\Sigma f_i = 30$                 |                      |                    | $\Sigma f_i d_i = 435$ |

अतः, सारणी 13.4 से, विचलनों का माध्य  $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

आइए, अब  $\bar{d}$  और  $\bar{x}$  में संबंध ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

चूँकि  $d_i$  ज्ञात करने के लिए हमने प्रत्येक  $x_i$  में से  $a$  को घटाया है, इसलिए माध्य  $\bar{x}$  ज्ञात करने के लिए, हम  $\bar{d}$  में  $a$  जोड़ते हैं। इसे गणितीय रूप से, नीचे दर्शाए अनुसार स्पष्ट किया जा सकता है :

$$\text{विचलनों का माध्य} \quad \bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

$$\text{अतः} \quad \bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

$$\text{अतः} \quad \bar{x} = a + \bar{d}$$

$$\text{अर्थात्} \quad \bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

अब सारणी 13.4 से,  $a$ ,  $\Sigma f_i d_i$  और  $\Sigma f_i$  के मान रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

अतः, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्य 62 है।

माध्य ज्ञात करने की उपरोक्त विधि **कल्पित माध्य विधि (assumed mean method)** कहलाती है।

**क्रियाकलाप 1 :** सारणी 13.3 से, प्रत्येक  $x_i$  (17.5, 32.5, इत्यादि) को 'a' मानकर माध्य परिकलित कीजिए। आप क्या देखते हैं? आप पाएँगे कि प्रत्येक स्थिति में माध्य एक ही, अर्थात् 62 आता है। (क्यों?)

अतः, हम यह कह सकते हैं कि प्राप्त किए गए माध्य का मान चुने हुए 'a' के मान पर निर्भर नहीं करता।

ध्यान दीजिए कि सारणी 13.4 के स्तंभ में दिए सभी मान 15 के गुणज (multiples) हैं। अतः, यदि हम स्तंभ 4 के सभी मानों को 15 से भाग दे दें, तो हमें  $f_i$  से गुणा करने के लिए छोटी संख्याएँ प्राप्त हो जाएँगी। [यहाँ 15, प्रत्येक वर्ग अंतराल की वर्ग माप (साइज) है।]

अतः, आइए मान लें कि  $u_i = \frac{x_i - a}{h}$  है, जहाँ a कल्पित माध्य है और h वर्गमाप है।

अब हम सभी  $u_i$  परिकलित करते हैं और पहले की तरह ही प्रक्रिया जारी रखते हैं (अर्थात्  $f_i u_i$  ज्ञात करते हैं और फिर  $\Sigma f_i u_i$  ज्ञात करते हैं। आइए  $h = 15$  लेकर, सारणी 13.5 बनाएँ।

**सारणी 13.5**

| वर्ग अंतराल | $f_i$             | $x_i$ | $d_i = x_i - a$ | $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ | $f_i u_i$             |
|-------------|-------------------|-------|-----------------|---------------------------|-----------------------|
| 10 - 25     | 2                 | 17.5  | -30             | -2                        | -4                    |
| 25 - 40     | 3                 | 32.5  | -15             | -1                        | -3                    |
| 40 - 55     | 7                 | 47.5  | 0               | 0                         | 0                     |
| 55 - 70     | 6                 | 62.5  | 15              | 1                         | 6                     |
| 70 - 85     | 6                 | 77.5  | 30              | 2                         | 12                    |
| 85 - 100    | 6                 | 92.5  | 45              | 3                         | 18                    |
| <b>योग</b>  | $\Sigma f_i = 30$ |       |                 |                           | $\Sigma f_i u_i = 29$ |

मान लीजिए  $\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$  है।

यहाँ भी हम  $\bar{u}$  और  $\bar{x}$  में संबंध ज्ञात करेंगे।

हमें प्राप्त है  $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

$$\begin{aligned}\text{अतः} \quad \bar{u} &= \frac{\sum f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i} = \frac{1}{h} \left[ \frac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \right] \\ &= \frac{1}{h} [\bar{x} - a]\end{aligned}$$

या  $h\bar{u} = \bar{x} - a$   
अर्थात्  $\bar{x} = a + h\bar{u}$

$$\text{अतः} \quad \bar{x} = a + h \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)$$

अब, सारणी 14.5 से  $a, h, \sum f_i u_i$  और  $\sum f_i$  के मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 47.5 + 15 \times \left( \frac{29}{30} \right) \\ &= 47.5 + 14.5 = 62\end{aligned}$$

अतः, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किया गया माध्य अंक 62 है।

माध्य ज्ञात करने की उपरोक्त विधि **पग-विचलन विधि (step deviation method)** कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि

- पग-विचलन विधि तभी सुविधाजनक होगी, जबकि सभी  $d_i$  में कोई सार्व गुणनखंड है।
- तीनों विधियों से प्राप्त माध्य एक ही है।

- कल्पित माध्य विधि और पग-विचलन विधि प्रत्यक्ष विधि के ही सरलीकृत रूप हैं।
- सूत्र  $\bar{x} = a + h\bar{u}$  का तब भी प्रयोग किया जा सकता है, जबकि  $a$  और  $h$  ऊपर दी हुई संख्याओं की भाँति न हों, बल्कि वे शून्य के अतिरिक्त ऐसी वास्तविक संख्याएँ हों ताकि  $u_i = \frac{x_i - a}{h}$  हो।

आइए इन विधियों का प्रयोग एक अन्य उदाहरण से करें।

**उदाहरण 2 :** नीचे दी हुई सारणी भारत के विभिन्न राज्यों एवं संघीय क्षेत्रों (union territories) के ग्रामीण क्षेत्रों के प्राथमिक विद्यालयों में, महिला शिक्षकों के प्रतिशत बंटन को दर्शाती है। इस अनुच्छेद में चर्चित तीनों विधियों से महिला शिक्षकों का माध्य प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

| महिला शिक्षकों का प्रतिशत         | 15 - 25 | 25 - 35 | 35 - 45 | 45 - 55 | 55 - 65 | 65 - 75 | 75 - 85 |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| राज्यों/संघीय क्षेत्रों की संख्या | 6       | 11      | 7       | 4       | 4       | 2       | 1       |

(स्रोत : एन.सी.ई.आर.टी द्वारा किया गया सातवाँ अखिल भारतीय स्कूल शिक्षा सर्वे)

**हल :** आइए प्रत्येक वर्ग अंतराल का  $x_i$  ज्ञात करें और उन्हें एक स्तंभ में रखें (देखिए सारणी 13.6)।

**सारणी 13.6**

| महिला शिक्षकों का प्रतिशत | राज्यों/संघीय क्षेत्रों की संख्या ( $f_i$ ) | $x_i$ |
|---------------------------|---------------------------------------------|-------|
| 15 - 25                   | 6                                           | 20    |
| 25 - 35                   | 11                                          | 30    |
| 35 - 45                   | 7                                           | 40    |
| 45 - 55                   | 4                                           | 50    |
| 55 - 65                   | 4                                           | 60    |
| 65 - 75                   | 2                                           | 70    |
| 75 - 85                   | 1                                           | 80    |

यहाँ, हम  $a = 50$ ,  $h = 10$ , लेते हैं। तब  $d_i = x_i - 50$  और  $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$  होगा।

अब हम  $d_i$  और  $u_i$  ज्ञात करते हैं और इन्हें सारणी 13.7 में रखते हैं।

सारणी 13.7

| महिला शिक्षकों का प्रतिशत | राज्यों/संघीय क्षेत्रों की संख्या ( $f_i$ ) | $x_i$ | $d_i = x_i - 50$ | $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ | $f_i x_i$ | $f_i d_i$ | $f_i u_i$ |
|---------------------------|---------------------------------------------|-------|------------------|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| 15 - 25                   | 6                                           | 20    | -30              | -3                          | 120       | -180      | -18       |
| 25 - 35                   | 11                                          | 30    | -20              | -2                          | 330       | -220      | -22       |
| 35 - 45                   | 7                                           | 40    | -10              | -1                          | 280       | -70       | -7        |
| 45 - 55                   | 4                                           | 50    | 0                | 0                           | 200       | 0         | 0         |
| 55 - 65                   | 4                                           | 60    | 10               | 1                           | 240       | 40        | 4         |
| 65 - 75                   | 2                                           | 70    | 20               | 2                           | 140       | 40        | 4         |
| 75 - 85                   | 1                                           | 80    | 30               | 3                           | 80        | 30        | 3         |
| योग                       | 35                                          |       |                  |                             | 1390      | -360      | -36       |

उपरोक्त सारणी से, हमें  $\Sigma f_i = 35$ ,  $\Sigma f_i x_i = 1390$ ,  $\Sigma f_i d_i = -360$ ,  $\Sigma f_i u_i = -36$  प्राप्त होता है।

प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग करने से,  $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

कल्पित माध्य विधि का प्रयोग करने से,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

पग-विचलन विधि के प्रयोग से,

$$\bar{x} = a + \left( \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \right) \times h = 50 + \left( \frac{-36}{35} \right) \times 10 = 39.71$$

अतः, ग्रामीण क्षेत्रों के प्राथमिक विद्यालयों में महिला शिक्षकों का माध्य प्रतिशत 39.71 है।

**टिप्पणी :** सभी तीनों विधियों से प्राप्त परिणाम एक ही समान है। अतः, माध्य ज्ञात करने की विधि चुनना इस बात पर निर्भर करता है कि  $x_i$  और  $f_i$  के मान क्या हैं। यदि  $x_i$  और  $f_i$  पर्याप्त रूप से छोटे हैं, तो प्रत्यक्ष विधि ही उपयुक्त रहती है। यदि  $x_i$  और  $f_i$  के मान संख्यात्मक रूप से बड़े हैं, तो हम कल्पित माध्य विधि या पग-विचलन विधि का प्रयोग कर सकते हैं। यदि वर्गमाप असमान हैं और  $x_i$  संख्यात्मक रूप से बड़े हैं, तो भी हम सभी  $d_i$  का एक उपयुक्त सर्वनिष्ठ गुणनखंड  $h$  लेकर, पग-विचलन विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

**उदाहरण 3 :** नीचे दिया हुआ बंटन एकदिवसीय क्रिकेट मैचों में, गेंदबाजों द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या दर्शाता है। उपयुक्त विधि चुनते हुए, लिए गए विकेटों का माध्य ज्ञात कीजिए। यह माध्य क्या सूचित करता है?

| विकेटों की संख्या   | 20 - 60 | 60 - 100 | 100 - 150 | 150 - 250 | 250 - 350 | 350 - 450 |
|---------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| गेंदबाजों की संख्या | 7       | 5        | 16        | 12        | 2         | 3         |

**हल :** यहाँ वर्ग माप भिन्न-भिन्न हैं तथा  $x_i$  संख्यात्मक रूप से बड़े हैं। आइए  $a = 200$  और  $h = 20$  लेकर पग-विचलन विधि का प्रयोग करें। तब, हम सारणी 13.8 में दर्शाए अनुसार आँकड़े प्राप्त करते हैं :

सारणी 13.8

| लिए गए विकेटों की संख्या | गेंदबाजों की संख्या ( $f_i$ ) | $x_i$ | $d_i = x_i - 200$ | $u_i = \frac{d_i}{20}$ | $u_i f_i$   |
|--------------------------|-------------------------------|-------|-------------------|------------------------|-------------|
| 20 - 60                  | 7                             | 40    | -160              | -8                     | -56         |
| 60 - 100                 | 5                             | 80    | -120              | -6                     | -30         |
| 100 - 150                | 16                            | 125   | -75               | -3.75                  | -60         |
| 150 - 250                | 12                            | 200   | 0                 | 0                      | 0           |
| 250 - 350                | 2                             | 300   | 100               | 5                      | 10          |
| 350 - 450                | 3                             | 400   | 200               | 10                     | 30          |
| <b>योग</b>               | <b>45</b>                     |       |                   |                        | <b>-106</b> |

अतः,  $\bar{u} = \frac{-106}{45}$  है। इसलिए,  $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$  है।

यह हमें बताता है कि उपरोक्त 45 गेंदबाजों ने एकदिवसीय क्रिकेट मैचों में 152.89 की औसत से विकेट लिए हैं।

आइए देखें कि इस अनुच्छेद में पढ़ी अवधारणाओं को आप किस प्रकार अनुप्रयोग कर सकते हैं।

### क्रियाकलाप 2 :

अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को तीन समूहों में बाँटिए और प्रत्येक समूह से निम्नलिखित में से एक क्रियाकलाप करने को कहिए :

1. आपके स्कूल द्वारा हाल ही में ली गई परीक्षा में, अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंक एकत्रित कीजिए। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों का एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।
2. अपने शहर में 30 दिन का रिकॉर्ड किए गए दैनिक अधिकतम तापमान एकत्रित कीजिए। इन आँकड़ों को एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए।
3. अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (cm में) मापिए और उनका एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

जब सभी समूह आँकड़े एकत्रित करके उनकी वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणियाँ बना लें, तब प्रत्येक समूह से अपने बारंबारता बंटन का माध्य निकालने को कहिए। इसमें वे जो विधि उपयुक्त समझें उसका प्रयोग करें।

### प्रश्नावली 13.1

1. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अंतर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

| पौधों की संख्या | 0-2 | 2-4 | 4-6 | 6-8 | 8-10 | 10-12 | 12-14 |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|------|-------|-------|
| घरों की संख्या  | 1   | 2   | 1   | 5   | 6    | 2     | 3     |

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों?

2. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

| दैनिक मजदूरी ( रुपये में ) | 500-520 | 520-540 | 540-560 | 560-580 | 580-600 |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| श्रमिकों की संख्या         | 12      | 14      | 8       | 6       | 10      |

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है। माध्य जेबखर्च ₹ 18 है। लुप्त बारंबारता  $f$  ज्ञात कीजिए :

| दैनिक जेब भत्ता ( रुपये में ) | 11-13 | 13-15 | 15-17 | 17-19 | 19-21 | 21-23 | 23-25 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| बच्चों की संख्या              | 7     | 6     | 9     | 13    | $f$   | 5     | 4     |

4. किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके हृदय स्पंदन (beat) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई। एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए :

| हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या | 65-68 | 68-71 | 71-74 | 74-77 | 77-80 | 80-83 | 83-86 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| महिलाओं की संख्या                | 2     | 4     | 3     | 8     | 7     | 4     | 2     |

5. किसी फुटकर बाज़ार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहे थे। इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न-भिन्न थीं। पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था :

| आमों की संख्या    | 50-52 | 53-55 | 56-58 | 59-61 | 62-64 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| पेटियों की संख्या | 15    | 110   | 135   | 115   | 25    |

एक पेटि में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए। आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है?

6. निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है

| दैनिक व्यय ( रुपये में ) | 100-150 | 150-200 | 200-250 | 250-300 | 300-350 |
|--------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| परिवारों की संख्या       | 4       | 5       | 12      | 2       | 2       |

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए।

7. वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड ( $\text{SO}_2$ ) की सांद्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गए, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है :

| $\text{SO}_2$ की सांद्रता | बारंबारता |
|---------------------------|-----------|
| 0.00 - 0.04               | 4         |
| 0.04 - 0.08               | 9         |
| 0.08 - 0.12               | 9         |
| 0.12 - 0.16               | 2         |
| 0.16 - 0.20               | 4         |
| 0.20 - 0.24               | 2         |

वायु में  $\text{SO}_2$  की सांद्रता का माध्य ज्ञात कीजिए।

8. किसी कक्षा अध्यापिका ने पूरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विद्यार्थियों की अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड (record) की। एक विद्यार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए :

| दिनों की संख्या         | 0 - 6 | 6 - 10 | 10 - 14 | 14 - 20 | 20 - 28 | 28 - 38 | 38 - 40 |
|-------------------------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| विद्यार्थियों की संख्या | 11    | 10     | 7       | 4       | 4       | 3       | 1       |

9. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए :

| साक्षरता दर ( % में ) | 45 - 55 | 55 - 65 | 65 - 75 | 75 - 85 | 85 - 95 |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| नगरों की संख्या       | 3       | 10      | 11      | 8       | 3       |

### 13.3 वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

कक्षा IX से याद कीजिए कि बहुलक (mode) दिए हुए प्रेक्षणों में वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है, अर्थात् उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारंबारता अधिकतम है। साथ ही, हमने अवर्गीकृत आँकड़ों के बहुलक ज्ञात करने की भी चर्चा कक्षा IX में की थी। यहाँ, हम वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने की विधि की चर्चा करेंगे। यह संभव है कि एक

से अधिक मानों की एक ही अधिकतम बारंबारता हो। ऐसी स्थितियों में, आँकड़ों को बहुबहुलकीय (*multi modal*) आँकड़े कहा जाता है। यद्यपि, वर्गीकृत आँकड़े भी बहुबहुलकीय हो सकते हैं, परंतु हम अपनी चर्चा को केवल एक ही बहुलक वाली समस्याओं तक ही सीमित रखेंगे।

आइए पहले एक उदाहरण की सहायता से यह याद करें कि अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक हमने किस प्रकार ज्ञात किया था।

**उदाहरण 4 :** किसी गेंदबाज़ द्वारा 10 क्रिकेट मैचों में लिए गए विकेटों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

2    6    4    5    0    2    1    3    2    3

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

**हल :** आइए उपरोक्त आँकड़ों के लिए, एक बारंबारता बंटन सारणी बनाएँ, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

| विकेटों की संख्या       | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| क्रिकेट मैचों की संख्या | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

स्पष्ट है कि गेंदबाज़ ने अधिकतम मैचों (3) में 2 विकेट लिए हैं। अतः, इन आँकड़ों का बहुलक 2 है।

एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में, बारंबारताओं को देखकर बहुलक ज्ञात करना संभव नहीं है। यहाँ, हम केवल वह वर्ग (class) ज्ञात कर सकते हैं जिसकी बारंबारता अधिकतम है। इस वर्ग को **बहुलक वर्ग (modal class)** कहते हैं। बहुलक इस बहुलक वर्ग के अंदर कोई मान है, जिसे निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

जहाँ  $l$  = बहुलक वर्ग की निम्न (निचली) सीमा

$h$  = वर्ग अंतराल की माप (यह मानते हुए कि सभी अंतराल बराबर मापों के हैं)

$f_1$  = बहुलक वर्ग की बारंबारता

$f_0$  = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारंबारता तथा

$f_2$  = बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता है।

इस सूत्र का प्रयोग दर्शाने के लिए, आइए एक उदाहरण लें।

**उदाहरण 5 :** विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा एक मोहल्ले के 20 परिवारों पर किए गए सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए :

| परिवार माप         | 1 - 3 | 3 - 5 | 5 - 7 | 7 - 9 | 9 - 11 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| परिवारों की संख्या | 7     | 8     | 2     | 2     | 1      |

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

**हल :** यहाँ, अधिकतम वर्ग बारंबारता 8 है तथा इस बारंबारता का संगत वर्ग 3-5 है। अतः, बहुलक वर्ग 3-5 है।

अब,

बहुलक वर्ग = 3 - 5, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा ( $l$ ) = 3 तथा वर्ग माप ( $h$ ) = 2 है।

बहुलक वर्ग की बारंबारता ( $f_1$ ) = 8

बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता ( $f_0$ ) = 7 तथा

बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता ( $f_2$ ) = 2 है।

आइए इन मानों को सूत्र में प्रतिस्थापित करें। हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}\text{बहुलक} &= l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 3 + \left( \frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286\end{aligned}$$

अतः, उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक 3.286 है।

**उदाहरण 6 :** गणित की एक परीक्षा में 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन उदाहरण 1 की सारणी 13.3 में दिया गया है। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए। साथ ही, बहुलक और माध्य की तुलना कीजिए और इनकी व्याख्या कीजिए।

**हल :** उदाहरण 1 की सारणी 13.3 को देखिए। चूँकि अधिकतम विद्यार्थियों की संख्या (7) वाला अंतराल 40-55 है, इसलिए बहुलक वर्ग 40-55 है। अतः,

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा ( $l$ ) = 40 है,

वर्ग माप ( $h$ ) = 15 है,

बहुलक वर्ग की बारंबारता ( $f_1$ ) = 7 है,

बहुलक वर्ग से ठीक पहले आने वाले वर्ग की बारंबारता ( $f_0$ ) = 3 है,

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता ( $f_2$ ) = 6 है।

अब, सूत्र का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}\text{बहुलक} &= l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 40 + \left( \frac{7 - 3}{14 - 6 - 3} \right) \times 15 = 52\end{aligned}$$

अतः, बहुलक अंक 52 है।

अब, उदाहरण 1 से आप जानते हैं कि माध्य अंक 62 है।

अतः, अधिकतम विद्यार्थियों का अंक 52 है तथा औसत के रूप में प्रत्येक विद्यार्थी ने 62 अंक प्राप्त किए हैं।

### टिप्पणी :

1. उदाहरण 6 में, बहुलक माध्य से छोटा है। परंतु किन्हीं और समस्याओं (प्रश्नों) के लिए यह माध्य के बराबर या उससे बड़ा भी हो सकता है।

2. यह स्थिति की माँग पर निर्भर करता है कि हमारी रुचि विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों में है या फिर अधिकतम विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों में है। पहली स्थिति में, माध्य की आवश्यकता होगी तथा दूसरी स्थिति में बहुलक की आवश्यकता होगी।

**क्रियाकलाप 3 :** क्रियाकलाप 2 में बनाए गए समूहों और उनको निर्दिष्ट किए कार्यों के साथ क्रियाकलाप जारी रखिए। प्रत्येक समूह से आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने को कहिए। उनसे इसकी तुलना माध्य से करने को कहिए तथा दोनों के अर्थों की व्याख्या करने को कहिए।

**टिप्पणी :** असमान वर्ग मापों वाले वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक भी परिकलित किया जा सकता है। परंतु यहाँ हम इसकी चर्चा नहीं करेंगे।

### प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है :

| आयु ( वर्षों में ) | 5 - 15 | 15 - 25 | 25 - 35 | 35 - 45 | 45 - 55 | 55 - 65 |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| रोगियों की संख्या  | 6      | 11      | 21      | 23      | 14      | 5       |

उपरोक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केंद्रीय प्रवृत्ति की मापों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल ( घंटों में ) की सूचना देते हैं :

| जीवनकाल ( घंटों में ) | 0 - 20 | 20 - 40 | 40 - 60 | 60 - 80 | 80 - 100 | 100 - 120 |
|-----------------------|--------|---------|---------|---------|----------|-----------|
| बारंबारता             | 10     | 35      | 52      | 61      | 38       | 29        |

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए। साथ ही, माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिए।

| व्यय ( ₹ में ) | परिवारों की संख्या |
|----------------|--------------------|
| 1000 - 1500    | 24                 |
| 1500 - 2000    | 40                 |
| 2000 - 2500    | 33                 |
| 2500 - 3000    | 28                 |
| 3000 - 3500    | 30                 |
| 3500 - 4000    | 22                 |
| 4000 - 4500    | 16                 |
| 4500 - 5000    | 7                  |

4. निम्नलिखित बंटन भारत के उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में, राज्यों के अनुसार, शिक्षक-विद्यार्थी अनुपात को दर्शाता है। इन आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों मापकों की व्याख्या कीजिए।

| प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या | राज्य/संघीय क्षेत्रों की संख्या |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 15 - 20                              | 3                               |
| 20 - 25                              | 8                               |
| 25 - 30                              | 9                               |
| 30 - 35                              | 10                              |
| 35 - 40                              | 3                               |
| 40 - 45                              | 0                               |
| 45 - 50                              | 0                               |
| 50 - 55                              | 2                               |

5. दिया हुआ बंटन विश्व के कुछ श्रेष्ठतम बल्लेबाजों द्वारा एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैचों में बनाए गए रनों को दर्शाता है :

| बनाए गए रन      | बल्लेबाजों की संख्या |
|-----------------|----------------------|
| 3000 - 4000     | 4                    |
| 4000 - 5000     | 18                   |
| 5000 - 6000     | 9                    |
| 6000 - 7000     | 7                    |
| 7000 - 8000     | 6                    |
| 8000 - 9000     | 3                    |
| 9000 - 10,000   | 1                    |
| 10,000 - 11,000 | 1                    |

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

6. एक विद्यार्थी ने एक सड़क के किसी स्थान से होकर जाती हुई कारों की संख्याएँ नोट की और उन्हें नीचे दी हुई सारणी के रूप में व्यक्त किया। सारणी में दिया प्रत्येक प्रेक्षण 3 मिनट के अंतराल में उस स्थान से होकर जाने वाली कारों की संख्याओं से संबंधित है। ऐसे 100 अंतरालों पर प्रेक्षण लिए गए। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

| कारों की संख्या | 0 - 10 | 10 - 20 | 20 - 30 | 30 - 40 | 40 - 50 | 50 - 60 | 60 - 70 | 70 - 80 |
|-----------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| बारंबारता       | 7      | 14      | 13      | 12      | 20      | 11      | 15      | 8       |

### 13.4 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

जैसाकि आप कक्षा IX में पढ़ चुके हैं, माध्यक (*median*) केंद्रीय प्रवृत्ति का ऐसा मापक है, जो आँकड़ों में सबसे बीच के प्रेक्षण का मान देता है। याद कीजिए कि अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने के लिए, पहले हम प्रेक्षणों के मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। अब, यदि  $n$  विषम है, तो माध्यक  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  वें प्रेक्षण का मान होता है। यदि  $n$  सम है, तो माध्यक  $\frac{n}{2}$  वें और  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  वें प्रेक्षणों के मानों का औसत (माध्य) होता है।

माना, हमें निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करना है जो एक परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा 50 में से प्राप्त अंक देते हैं।

| प्राप्तांक              | 20 | 29 | 28 | 33 | 42 | 38 | 43 | 25 |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| विद्यार्थियों की संख्या | 6  | 28 | 24 | 15 | 2  | 4  | 1  | 20 |

पहले प्राप्त अंकों का आरोही क्रम तैयार करें और बारंबारता सारणी को निम्न प्रकार से बनाएँ।

सारणी 13.9

| प्राप्तांक | विद्यार्थियों की संख्या<br>बारंबारता |
|------------|--------------------------------------|
| 20         | 6                                    |
| 25         | 20                                   |
| 28         | 24                                   |
| 29         | 28                                   |
| 33         | 15                                   |
| 38         | 4                                    |
| 42         | 2                                    |
| 43         | 1                                    |
| योग        | 100                                  |

यहाँ  $n = 100$  है जो सम संख्या है। माध्यक प्रेक्षण  $\frac{n}{2}$  वें तथा  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  वें प्रेक्षण का औसत होगा। अर्थात् 50 वें तथा 51 वें प्रेक्षणों का औसत। इन प्रेक्षणों को ज्ञात करने के लिए, हम निम्न प्रकार बढ़ते हैं।

सारणी 13.10

| प्राप्तांक | विद्यार्थियों की संख्या |
|------------|-------------------------|
| 20         | 6                       |
| 25 तक      | $6 + 20 = 26$           |
| 28 तक      | $26 + 24 = 50$          |
| 29 तक      | $50 + 28 = 78$          |
| 33 तक      | $78 + 15 = 93$          |
| 38 तक      | $93 + 4 = 97$           |
| 42 तक      | $97 + 2 = 99$           |
| 43 तक      | $99 + 1 = 100$          |

अब हम इस सूचना को दर्शाता एक नया स्तंभ उपरोक्त बारंबारता सारणी में जोड़ते हैं तथा उसे संचयी बारंबारता स्तंभ का नाम देते हैं।

सारणी 13.11

| प्राप्तांक | विद्यार्थियों की संख्या | संचयी बारंबारता |
|------------|-------------------------|-----------------|
| 20         | 6                       | 6               |
| 25         | 20                      | 26              |
| 28         | 24                      | 50              |
| 29         | 28                      | 78              |
| 33         | 15                      | 93              |
| 38         | 4                       | 97              |
| 42         | 2                       | 99              |
| 43         | 1                       | 100             |

उपरोक्त सारणी से हम पाते हैं:

50वाँ प्रेक्षण 28 है (क्यों?)

51वाँ प्रेक्षण 29 है

इसलिए, माध्यक =  $\frac{28 + 29}{2} = 28.5$

**टिप्पणी :** सारणी 13.11 के भाग में सम्मिलित स्तंभ 1 और 3 संचयी बारंबारता सारणी के नाम से जाना जाता है। माध्यक अंक 28.5 सूचित करता है कि लगभग 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने 28.5 से कम अंक और दूसरे अन्य 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने 28.5 से अधिक अंक प्राप्त किए।

आइए देखें कि निम्नलिखित स्थिति में समूहित आँकड़े का माध्यक कैसे प्राप्त करते हैं।

निम्नानुसार एक निश्चित परीक्षा में 100 में 53 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का समूहित बारंबारता बंटन पर विचार करें।

सारणी 13.12

| प्राप्तांक | विद्यार्थियों की संख्या |
|------------|-------------------------|
| 0 - 10     | 5                       |
| 10 - 20    | 3                       |
| 20 - 30    | 4                       |
| 30 - 40    | 3                       |
| 40 - 50    | 3                       |
| 50 - 60    | 4                       |
| 60 - 70    | 7                       |
| 70 - 80    | 9                       |
| 80 - 90    | 7                       |
| 90 - 100   | 8                       |

उपरोक्त सारणी से निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास करें।

कितने विद्यार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किए हैं? स्पष्टतया, उत्तर 5 है।

कितने विद्यार्थियों ने 20 से कम अंक प्राप्त किए हैं? ध्यान दीजिए कि 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों में वे विद्यार्थी सम्मिलित हैं, जिन्होंने वर्ग 0 - 10 में अंक प्राप्त किए हैं और वे विद्यार्थी भी सम्मिलित हैं जिन्होंने वर्ग 10 - 20 में अंक प्राप्त किए हैं। अतः, 20

से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या  $5 + 3$  अर्थात् 8 है। हम कहते हैं कि वर्ग 10 - 20 की *संचयी बारंबारता (cumulative frequency)* 8 है।

इसी प्रकार, हम अन्य वर्गों की संचयी बारंबारताएँ भी ज्ञात कर सकते हैं, अर्थात् हम यह ज्ञात कर सकते हैं कि 30 से कम अंक प्राप्त करने वाले कितने विद्यार्थी हैं, 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले कितने विद्यार्थी हैं, ..., 100 से कम अंक प्राप्त करने वाले कितने विद्यार्थी हैं। हम इन्हें नीचे एक सारणी 13.13 के रूप में दे रहे हैं :

सारणी 13.13

| प्राप्तांक | विद्यार्थियों की संख्या<br>(संचयी बारंबारता) |
|------------|----------------------------------------------|
| 10 से कम   | 5                                            |
| 20 से कम   | $5 + 3 = 8$                                  |
| 30 से कम   | $8 + 4 = 12$                                 |
| 40 से कम   | $12 + 3 = 15$                                |
| 50 से कम   | $15 + 3 = 18$                                |
| 60 से कम   | $18 + 4 = 22$                                |
| 70 से कम   | $22 + 7 = 29$                                |
| 80 से कम   | $29 + 9 = 38$                                |
| 90 से कम   | $38 + 7 = 45$                                |
| 100 से कम  | $45 + 8 = 53$                                |

उपरोक्त बंटन से **कम प्रकार का संचयी बारंबारता बंटन** कहलाता है। यहाँ 10, 20, 30, ... 100, संगत वर्ग अंतरालों की *उपरि सीमाएँ* हैं।

हम इसी प्रकार उन विद्यार्थियों की संख्याओं के लिए भी जिन्होंने 0 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं, 10 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं, 20 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं, इत्यादि के लिए एक सारणी बना सकते हैं। सारणी 13.12 से हम देख सकते हैं कि सभी 53 विद्यार्थियों ने 0 से अधिक या 0 के बराबर अंक प्राप्त किए हैं। चूँकि अंतराल 0 - 10 में 5 विद्यार्थी हैं, इसलिए  $53 - 5 = 48$  विद्यार्थियों ने 10 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं। इसी प्रक्रिया को जारी रखते हुए हम 20 से अधिक या उसके बराबर  $48 - 3 = 45$ , 30 से अधिक या उसके बराबर  $45 - 4 = 41$ , इत्यादि विद्यार्थी प्राप्त करते हैं, जिन्हें सारणी 13.14 में दर्शाया गया है।

सारणी 13.14

| प्राप्तांक               | विद्यार्थियों की संख्या<br>(संचयी बारंबारता) |
|--------------------------|----------------------------------------------|
| 0 से अधिक या उसके बराबर  | 53                                           |
| 10 से अधिक या उसके बराबर | $53 - 5 = 48$                                |
| 20 से अधिक या उसके बराबर | $48 - 3 = 45$                                |
| 30 से अधिक या उसके बराबर | $45 - 4 = 41$                                |
| 40 से अधिक या उसके बराबर | $41 - 3 = 38$                                |
| 50 से अधिक या उसके बराबर | $38 - 3 = 35$                                |
| 60 से अधिक या उसके बराबर | $35 - 4 = 31$                                |
| 70 से अधिक या उसके बराबर | $31 - 7 = 24$                                |
| 80 से अधिक या उसके बराबर | $24 - 9 = 15$                                |
| 90 से अधिक या उसके बराबर | $15 - 7 = 8$                                 |

उपरोक्त सारणी या बंटन अधिक प्रकार का संचयी बारंबारता बंटन कहलाता है। यहाँ 0, 10, 20, . . . , 90 संगत वर्ग अंतरालों की निम्न सीमाएँ हैं।

अब, वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने के लिए, हम उपरोक्त दोनों प्रकार के संचयी बारंबारता बंटनों में से किसी बंटन का प्रयोग कर सकते हैं।

हम सारणी 13.12 और सारणी 13.13 को मिलाकर एक नयी सारणी 13.15 बना लें जो नीचे दी गई है :

सारणी 13.15

| प्राप्तांक | विद्यार्थियों की संख्या ( $f$ ) | संचयी बारंबारता ( $cf$ ) |
|------------|---------------------------------|--------------------------|
| 0 - 10     | 5                               | 5                        |
| 10 - 20    | 3                               | 8                        |
| 20 - 30    | 4                               | 12                       |
| 30 - 40    | 3                               | 15                       |
| 40 - 50    | 3                               | 18                       |
| 50 - 60    | 4                               | 22                       |
| 60 - 70    | 7                               | 29                       |
| 70 - 80    | 9                               | 38                       |
| 80 - 90    | 7                               | 45                       |
| 90 - 100   | 8                               | 53                       |

अब, वर्गीकृत आँकड़ों के सबसे मध्य के प्रेक्षण को हम केवल संचयी बारंबारताएँ देख कर ही नहीं ज्ञात कर सकते, क्योंकि सबसे मध्य का प्रेक्षण किसी अंतराल में होगा। अतः, यह आवश्यक है कि इस मध्य प्रेक्षण को उस वर्ग अंतराल में खोजा जाए, जो आँकड़ों को दो बराबर भागों में विभक्त करता है। परंतु यह वर्ग अंतराल कौन-सा है?

इस अंतराल को ज्ञात करने के लिए, हम सभी वर्गों की संचयी बारंबारताएँ और  $\frac{n}{2}$  ज्ञात करते हैं। अब, हम वह वर्ग खोजते हैं जिसकी संचयी बारंबारता  $\frac{n}{2}$  से अधिक और उसके निकटतम है। इस वर्ग को **माध्यक वर्ग (median class)** कहते हैं। उपरोक्त बंटन में,  $n = 53$  है। अतः,  $\frac{n}{2} = 26.5$  हुआ। अब, 60 - 70 ही वह वर्ग है जिसकी संचयी बारंबारता 29,  $\frac{n}{2}$  अर्थात् 26.5 से अधिक और उसके निकटतम है।

अतः, 60 - 70 **माध्यक वर्ग** है।

माध्यक वर्ग ज्ञात करने के बाद, हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यक ज्ञात करते हैं :

$$\text{माध्यक} = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h,$$

जहाँ  $l$  = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा  
 $n$  = प्रेक्षणों की संख्या  
 $cf$  = माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता  
 $f$  = माध्यक वर्ग की बारंबारता  
 $h$  = वर्ग माप (यह मानते हुए कि वर्ग माप बराबर हैं)

अब  $\frac{n}{2} = 26.5$ ,  $l = 60$ ,  $cf = 22$ ,  $f = 7$ ,  $h = 10$

को सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \text{माध्यक} &= 60 + \left( \frac{26.5 - 22}{7} \right) \times 10 = 60 + \frac{45}{7} \\ &= 66.4 \end{aligned}$$

अतः, लगभग आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से कम अंक प्राप्त किए हैं और शेष आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं।

**उदाहरण 7 :** किसी स्कूल की कक्षा X की 51 लड़कियों की ऊँचाइयों का एक सर्वेक्षण किया गया और निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए :

| ऊँचाई (cm में) | लड़कियों की संख्या |
|----------------|--------------------|
| 140 से कम      | 4                  |
| 145 से कम      | 11                 |
| 150 से कम      | 29                 |
| 155 से कम      | 40                 |
| 160 से कम      | 46                 |
| 165 से कम      | 51                 |

माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल :** माध्यक ऊँचाई ज्ञात करने के लिए, हमें वर्ग अंतराल और उनकी बारंबारताओं की आवश्यकता है।

चूँकि दिया हुआ बंटन **कम प्रकार का** है, इसलिए हमें वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ 140, 145, 150, ..., 165 प्राप्त होती हैं तथा इनके संगत वर्ग अंतराल क्रमशः 140 से कम, 140-145, 145-150, ..., 160-165 हैं। दिए हुए बंटन से, हम देखते हैं कि ऐसी 4 लड़कियाँ हैं जिनकी ऊँचाई 140 से कम है, अर्थात् वर्ग अंतराल 140 से कम की बारंबारता 4 है। अब 145 cm से कम ऊँचाई वाली 11 लड़कियाँ हैं और 140 cm से कम ऊँचाई वाली 4 लड़कियाँ हैं। अतः, अंतराल 140 - 145 में ऊँचाई रखने वाली लड़कियों की संख्या  $11 - 4 = 7$  होगी। अर्थात् वर्ग अंतराल 140 - 145 की बारंबारता 7 है। इसी प्रकार, 145 - 150 की बारंबारता  $29 - 11 = 18$  है, 150 - 155 की बारंबारता  $40 - 29 = 11$  है, इत्यादि। अतः संचयी बारंबारताओं के साथ हमारी बारंबारता बंटन सारणी निम्नलिखित रूप की हो जाती है:

**सारणी 13.16**

| वर्ग अंतराल | बारंबारता | संचयी बारंबारता |
|-------------|-----------|-----------------|
| 140 से कम   | 4         | 4               |
| 140 - 145   | 7         | 11              |
| 145 - 150   | 18        | 29              |
| 150 - 155   | 11        | 40              |
| 155 - 160   | 6         | 46              |
| 160 - 165   | 5         | 51              |

अब  $n = 51$  है। अतः,  $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$  है। यह प्रेक्षण अंतराल 145 - 150 में आता है। तब,

$$l \text{ (निम्न सीमा)} = 145,$$

माध्यक वर्ग 145 - 150 के ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता (cf) = 11,

माध्यक वर्ग 145 - 150 की बारंबारता  $f = 18$  तथा वर्ग माप  $h = 5$  है।

$$\text{सूत्र, माध्यक} = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h \text{ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :}$$

$$\begin{aligned} \text{माध्यक} &= 145 + \left( \frac{25.5 - 11}{18} \right) \times 5 \\ &= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03 \end{aligned}$$

अतः, लड़कियों की माध्यक ऊँचाई 149.03 cm है।

इसका अर्थ है कि लगभग 50% लड़कियों की ऊँचाइयाँ 149.03 cm से कम या उसके बराबर हैं तथा शेष 50% की ऊँचाइयाँ 149.03 cm से अधिक हैं।

**उदाहरण 8 :** निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 525 है। यदि बारंबारताओं का योग 100 है, तो  $x$  और  $y$  का मान ज्ञात कीजिए।

| वर्ग अंतराल | बारंबारता |
|-------------|-----------|
| 0 - 100     | 2         |
| 100 - 200   | 5         |
| 200 - 300   | $x$       |
| 300 - 400   | 12        |
| 400 - 500   | 17        |
| 500 - 600   | 20        |
| 600 - 700   | $y$       |
| 700 - 800   | 9         |
| 800 - 900   | 7         |
| 900 - 1000  | 4         |

हल :

| वर्ग अंतराल | बारंबारता | संचयी बारंबारता |
|-------------|-----------|-----------------|
| 0 - 100     | 2         | 2               |
| 100 - 200   | 5         | 7               |
| 200 - 300   | $x$       | $7 + x$         |
| 300 - 400   | 12        | $19 + x$        |
| 400 - 500   | 17        | $36 + x$        |
| 500 - 600   | 20        | $56 + x$        |
| 600 - 700   | $y$       | $56 + x + y$    |
| 700 - 800   | 9         | $65 + x + y$    |
| 800 - 900   | 7         | $72 + x + y$    |
| 900 - 1000  | 4         | $76 + x + y$    |

यह दिया है कि  $n = 100$  है।

अतः,  $76 + x + y = 100$  अर्थात्  $x + y = 24$  (1)

माध्यक 525 है, जो वर्ग 500-600 में स्थित है।

अतः,  $l = 500$ ,  $f = 20$ ,  $cf = 36 + x$ ,  $h = 100$  है।

सूत्र  $\text{माध्यक} = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h$ , का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$525 = 500 + \left( \frac{50 - 36 - x}{20} \right) \times 100$$

या  $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

या  $25 = 70 - 5x$

या  $5x = 70 - 25 = 45$

अतः  $x = 9$

इसलिए (1) से हमें प्राप्त होता है कि  $9 + y = 24$

अर्थात्

$$y = 15$$

अब जब हमने तीनों केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का अध्ययन कर लिया है, तो आइए इस बात की चर्चा करें कि एक विशिष्ट आवश्यकता के लिए, कौन-सा मापक अधिक उपयुक्त रहेगा।

केंद्रीय प्रवृत्ति का अधिकतर प्रयोग होने वाला मापक माध्य है, क्योंकि यह सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है तथा दोनों चरम मानों के बीच में स्थित होता है। अर्थात्, यह संपूर्ण आँकड़ों में सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। यह हमें दो या अधिक दिए हुए बंटनों की तुलना करने में भी सहायक है। उदाहरणार्थ, किसी परीक्षा में, विभिन्न स्कूलों के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों के औसत (माध्य) की तुलना करके हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किस स्कूल का प्रदर्शन बेहतर रहा।

परंतु आँकड़ों के चरम मान माध्य पर प्रभाव डालते हैं। उदाहरणार्थ, लगभग एक-सी बारंबारताओं वाले वर्गों का माध्य दिए हुए आँकड़ों का एक अच्छा प्रतिनिधि होगा। परंतु यदि एक वर्ग की बारंबारता मान लीजिए 2 हो और शेष पाँच वर्गों की बारंबारताएँ 20, 25, 20, 21 और 18 हों, तो इनका माध्य आँकड़ों का सही प्रतिबिंब प्रदान नहीं करेगा। अतः ऐसी स्थितियों के लिए, माध्य आँकड़ों का एक अच्छा प्रतिनिधित्व नहीं करेगा।

उन समस्याओं में, जहाँ व्यक्तिगत प्रेक्षण महत्वपूर्ण नहीं होते और हम एक 'प्रतीकात्मक' (typical) प्रेक्षण ज्ञात करना चाहते हैं, तो माध्यक अधिक उपयुक्त रहता है। उदाहरणार्थ, किसी राष्ट्र के श्रमिकों की प्रतीकात्मक उत्पादकता दर, औसत मजदूरी, इत्यादि के लिए माध्यक एक उपयुक्त मापक रहता है। ये ऐसी स्थितियाँ हैं जिनमें चरम (अर्थात् बहुत बड़े या बहुत छोटे) मान संबद्ध हो सकते हैं। अतः, इन स्थितियों में, हम माध्य के स्थान पर, केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक माध्यक लेते हैं।

ऐसी स्थितियों में, जहाँ अधिकतर आने वाला मान स्थापित करना हो या सबसे अधिक लोकप्रिय वस्तु का पता करना हो, तो बहुलक सबसे अधिक अच्छा विकल्प होता है। उदाहरणार्थ, सबसे अधिक देखे जाने वाला लोकप्रिय टीवी प्रोग्राम ज्ञात करने, उस उपभोक्ता वस्तु को ज्ञात करने, जिसकी माँग सबसे अधिक है, लोगों द्वारा वाहनों का सबसे अधिक पसंद किए जाने वाला रंग ज्ञात करने, इत्यादि में बहुलक उपयुक्त मापक है।

### टिप्पणियाँ :

1. इन तीनों केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों में एक आनुभाषिक संबंध है, जो निम्नलिखित है:

$$3 \text{ माध्यक} = \text{बहुलक} + 2 \text{ माध्य}$$

2. असमान वर्गमापों वाले वर्गीकृत आँकड़ों के माध्यक भी परिकलित किए जा सकते हैं। परंतु यहाँ हम इनकी चर्चा नहीं करेंगे।

### प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

| मासिक खपत ( इकाइयों में ) | उपभोक्ताओं की संख्या |
|---------------------------|----------------------|
| 65 - 85                   | 4                    |
| 85 - 105                  | 5                    |
| 105 - 125                 | 13                   |
| 125 - 145                 | 20                   |
| 145 - 165                 | 14                   |
| 165 - 185                 | 8                    |
| 185 - 205                 | 4                    |

2. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो  $x$  और  $y$  के मान ज्ञात कीजिए :

| वर्ग अंतराल | बारंबारता |
|-------------|-----------|
| 0 - 10      | 5         |
| 10 - 20     | $x$       |
| 20 - 30     | 20        |
| 30 - 40     | 15        |
| 40 - 50     | $y$       |
| 50 - 60     | 5         |
| योग         | 60        |

3. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परंतु 60 वर्ष से कम हो।

| आयु ( वर्षों में ) | पॉलिसी धारकों की संख्या |
|--------------------|-------------------------|
| 20 से कम           | 2                       |
| 25 से कम           | 6                       |
| 30 से कम           | 24                      |
| 35 से कम           | 45                      |
| 40 से कम           | 78                      |
| 45 से कम           | 89                      |
| 50 से कम           | 92                      |
| 55 से कम           | 98                      |
| 60 से कम           | 100                     |

4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाईयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है :

| लंबाई ( mm में ) | पत्तियों की संख्या |
|------------------|--------------------|
| 118-126          | 3                  |
| 127-135          | 5                  |
| 136-144          | 9                  |
| 145-153          | 12                 |
| 154-162          | 5                  |
| 163-171          | 4                  |
| 172-180          | 2                  |

पत्तियों की माध्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

**संकेत :** माध्यक ज्ञात करने के लिए, आँकड़ों को सतत वर्ग अंतरालों में बदलना पड़ेगा, क्योंकि सूत्र में वर्ग अंतरालों को सतत माना गया है। तब ये वर्ग 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, ..., 171.5 - 180.5 में बदल जाते हैं।

5. निम्नलिखित सारणी 400 नियोन लैंपों के जीवन कालों (life time) को प्रदर्शित करती है :

| जीवन काल ( घंटों में ) | लैंपों की संख्या |
|------------------------|------------------|
| 1500 - 2000            | 14               |
| 2000 - 2500            | 56               |
| 2500 - 3000            | 60               |
| 3000 - 3500            | 86               |
| 3500 - 4000            | 74               |
| 4000 - 4500            | 62               |
| 4500 - 5000            | 48               |

एक लैंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

6. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ :

| अक्षरों की संख्या  | 1 - 4 | 4 - 7 | 7 - 10 | 10 - 13 | 13 - 16 | 16 - 29 |
|--------------------|-------|-------|--------|---------|---------|---------|
| कुलनामों की संख्या | 6     | 30    | 40     | 16      | 4       | 4       |

कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

7. नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है। विद्यार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

| भार ( किलोग्राम में )   | 40 - 45 | 45 - 50 | 50 - 55 | 55 - 60 | 60 - 65 | 65 - 70 | 70 - 75 |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| विद्यार्थियों की संख्या | 2       | 3       | 8       | 6       | 6       | 3       | 2       |

### 13.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निम्नलिखित प्रकार ज्ञात किया जा सकता है :

(i) प्रत्यक्ष विधि:  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) कल्पित माध्य विधि  $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

(iii) पग-विचलन विधि:  $\bar{x} = a + \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$

इनमें यह मान लिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु, अर्थात् वर्ग चिह्न पर केंद्रित है।

2. वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

जहाँ संकेत अपना स्वाभाविक अर्थ रखते हैं।

3. किसी बारंबारता बंटन में किसी वर्ग की संचयी बारंबारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारंबारताओं का योग होता है।
4. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{माध्यक} = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

जहाँ संकेत अपना स्वाभाविक अर्थ रखते हैं।

### पाठकों के लिए विशेष

वर्गीकृत आँकड़ों के बहुलक और माध्यक का परिकलन करने के लिए, सूत्र का प्रयोग करने से पहले यह सुनिश्चित किया जाना चाहिए कि वर्ग अंतराल सतत हैं। इसी प्रकार का प्रतिबंध का प्रयोग तोरण की संरचना के लिए भी करते हैं। अग्रतः, तोरण की स्थिति में प्रयुक्त पैमाना दोनों अक्षों पर समान नहीं भी हो सकता है।



1063CH15

## प्रायिकता 14

*The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance*

(प्रायिकताओं के सिद्धांत और त्रुटियों के सिद्धांत अब अति गणितीय रुचि का तथा अति व्यावहारिक महत्व का एक विशाल समूह स्थापित करते हैं।)

– R.S. Woodward

### 14.1 प्रायिकता एक सैद्धांतिक दृष्टिकोण

आइए निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

मान लीजिए एक सिक्के को यादृच्छया उछाला जाता है।

जब हम एक सिक्के की बात करते हैं, तब हम यह कल्पना करते हैं कि वह न्यायसंगत (fair) है। अर्थात् वह सममित (symmetrical) है, ताकि कोई कारण न हो कि वह एक ही ओर, दूसरी ओर की अपेक्षा, अधिक गिरे। हम सिक्के के इस गुण को उसका अपक्षपातपूर्ण (unbiased) होना कहते हैं। 'यादृच्छया उछाल' (random toss) से हमारा तात्पर्य है कि सिक्के को बिना किसी पक्षपात (bias) या रुकावट के स्वतंत्रतापूर्वक गिरने दिया जाता है।

हम पहले से जानते हैं कि सिक्का दो संभव विधियों में से केवल एक ही विधि से गिर सकता है या तो चित ऊपर होगा या फिर पट ऊपर होगा [हम सिक्के के, उसके किनारे (edge) के अनुदिश गिरने की संभावना को अस्वीकार करते हैं, जो उदाहरणार्थ, तब संभव है जब सिक्का रेत पर गिरे]। हम यह तर्कसंगतरूप से मान सकते हैं कि प्रत्येक

परिणाम, चित या पट, का प्रकट होना उतनी ही बार हो सकता है जितना कि अन्य परिणाम का। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि परिणाम चित और पट समप्रायिक (equally likely) हैं। समप्रायिक परिणामों के एक अन्य उदाहरण के लिए मान लीजिए कि हम एक पासे को फेंकते हैं। हमारे लिए, एक पासे का अर्थ सदैव एक न्यायसंगत पासे से होगा। संभव परिणाम क्या है? ये 1, 2, 3, 4, 5, 6 हैं। प्रत्येक संख्या के ऊपर आने की समान संभावना है। अतः, पासे को फेंकने से प्राप्त होने वाले समप्रायिक परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं।

क्या प्रत्येक प्रयोग के परिणाम समप्रायिक होते हैं? आइए देखें।

मान लीजिए एक थैले में 4 लाल गेंदें और 1 नीली गेंद है तथा आप इस थैले में से, बिना थैले के अंदर कुछ देखें, एक गेंद निकालते हैं। इसके क्या परिणाम हैं? क्या एक लाल गेंद और एक नीली गेंद के परिणाम समप्रायिक हैं? चूँकि यहाँ 4 लाल गेंदें हैं और नीली गेंद केवल एक ही, अतः आप यह अवश्य स्वीकार करेंगे कि आपके द्वारा एक नीली गेंद की अपेक्षा एक लाल गेंद निकालने की संभावना अधिक है। अतः ये परिणाम (एक लाल गेंद और एक नीली गेंद) समप्रायिक नहीं हैं। परंतु थैले में से किसी भी रंग की गेंद निकालने के परिणाम समप्रायिक हैं।

अतः, सभी प्रयोगों के परिणामों का समप्रायिक होना आवश्यक नहीं है। परंतु, इस अध्याय में, हम आगे यह मानकर चलेंगे कि **सभी प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं।**

कक्षा IX में, हमने एक घटना E की **प्रयोगात्मक या आनुभविक** प्रायिकता  $P(E)$  को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया था :

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

प्रायिकता की आनुभविक व्याख्या का बड़ी संख्या में दोहराए जा सकने वाले किसी भी प्रयोग से जुड़े प्रत्येक घटना के लिए अनुप्रयोग किया जा सकता है। किसी प्रयोग को दोहराने की आवश्यकता एक गंभीर परिसीमा है, क्योंकि अनेक स्थितियों में यह अधिक व्यय वाला हो सकता है या यह भी हो सकता है कि ऐसा करना संभव ही न हो। निस्संदेह, सिक्का उछालने या पासा फेंकने के प्रयोगों में, इसमें कोई कठिनाई नहीं हुई। परंतु एक उपग्रह(satellite) छोड़ने के प्रयोग को यह परिकलित करने के लिए बार-बार दोहराने की छोड़ते समय उसकी असफलता की आनुभविक प्रायिकता क्या है, के बारे में आप क्या सोचते हैं अथवा यह कि एक भूकंप के कारण कोई बहुमंजिली इमारत नष्ट होगी या नहीं, की आनुभविक प्रायिकता परिकलित करने के लिए भूकंप की परिघटना के दोबारा घटित होने के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

ऐसे प्रयोगों में, जहाँ हम कुछ कल्पनाओं को सही मानने को तैयार हो जाएँ, हम एक प्रयोग के दोहराने से बच सकते हैं, क्योंकि वे कल्पनाएँ सीधे सही (सैद्धांतिक) प्रायिकता परिकलित करने में हमारी सहायता करती हैं। परिणामों के समप्रायिक होने की कल्पना (जो अनेक प्रयोगों में मान्य होती है, जैसे कि ऊपर सिक्का उछालने और पासा फेंकने के दोनों उदाहरणों में है) इन कल्पनाओं में से एक है जो हमें किसी घटना की प्रायिकता की निम्नलिखित परिभाषा की ओर अग्रसर करती है।

किसी घटना E की **सैद्धांतिक प्रायिकता (theoretical probability)** [जिसे **परंपरागत प्रायिकता (classical probability)** भी कहा जाता है।]  $P(E)$  निम्नलिखित रूप में परिभाषित की जाती है

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

यहाँ हम यह कल्पना करते हैं कि प्रयोग के परिणाम समप्रायिक हैं।

हम संक्षिप्त रूप में, सैद्धांतिक प्रायिकता को केवल प्रायिकता ही कहेंगे।

प्रायिकता की उपरोक्त परिभाषा 1795 में पियरे-साइमन लाप्लास (Pierre-Simon Laplace) ने दी थी।

प्रायिकता सिद्धांत का सूत्रपात 16वीं शताब्दी में हुआ, जब एक इतालवी भौतिकशास्त्री एवं गणितज्ञ जे. कार्डन ने इस विषय पर पहली पुस्तक लिखी, जिसका नाम था : **The Book on Games of Chance** अपने प्रादुर्भाव से ही, प्रायिकता के अध्ययन को महान गणितज्ञों का ध्यान अपनी ओर आकर्षित किया। इन गणितज्ञों में जेम्स बर्नूली (1654-1705), ए.डी मोइवरे (1667-1754) और पियरे-साइमन लाप्लास ऐसे लोग हैं जिन्होंने इस क्षेत्र में एक सार्थक योगदान दिया। लाप्लास द्वारा 1812 में लिखी गई कृति (*Theorie Analytique des Probabilités*) को एक अकेले व्यक्ति द्वारा प्रायिकता के सिद्धांत के लिए किया गया सबसे बड़ा योगदान माना जाता है। हाल ही के कुछ वर्षों में, प्रायिकता का अनेक क्षेत्रों, जैसे कि जैविकी, अर्थशास्त्र, वंश संबंधी शास्त्र (genetics), भौतिकी, समाजशास्त्र इत्यादि क्षेत्रों में प्रचुर मात्रा में उपयोग किया जा रहा है।



पियरे-साइमन लाप्लास  
(1749 – 1827)

आइए ऐसे प्रयोगों से संबंधित कुछ घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें, जिनमें समप्रायिक होने की कल्पना मान्य है।

**उदाहरण 1 :** एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। साथ ही, एक पट प्राप्त करने की भी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**हल :** एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग में, संभव परिणामों की संख्या 2 है— चित (H) और पट (T)। मान लीजिए घटना E 'चित प्राप्त करना' है। तब, E के अनुकूल (अर्थात् चित प्राप्त करने के अनुकूल) परिणाम 1 है। अतः,

$$P(E) = P(\text{चित}) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार, यदि घटना F पट प्राप्त करना है, तो

$$P(F) = P(\text{पट}) = \frac{1}{2} \quad (\text{क्यों?})$$

**उदाहरण 2 :** एक थैले में एक लाल गेंद, एक नीली गेंद और एक पीली गेंद है तथा सभी गेंदे एक ही साइज की हैं। कृतिका बिना थैले के अंदर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद

- (i) पीली होगी?                      (ii) लाल होगी?                      (iii) नीली होगी?

**हल :** कृतिका थैले में से, उसमें बिना झाँके, गेंद निकालती है। अतः, उसके द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है।

माना 'पीली गेंद निकालना' घटना Y है, 'लाल गेंद निकालना' घटना R है तथा 'नीली गेंद निकालना' घटना B है।

अब, सभी संभव परिणामों की संख्या = 3 है।

(i) घटना Y के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

अतः 
$$P(Y) = \frac{1}{3}$$

इसी प्रकार,  $P(R) = \frac{1}{3}$  और  $P(B) = \frac{1}{3}$

**टिप्पणी :**

(1) किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो **प्रारंभिक घटना** (elementary event) कहलाती है। उदाहरण 1 में दोनों घटनाएँ E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं।

इसी प्रकार, उदाहरण 2 में, घटना Y, R और B में प्रत्येक एक प्रारंभिक घटना है।

(2) उदाहरण 1 में, हम देखते हैं कि  $P(E) + P(F) = 1$

उदाहरण 2 में, हम देखते हैं कि  $P(Y) + P(B) + P(R) = 1$

ध्यान दीजिए कि किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 है। यह व्यापक रूप में भी सत्य है।

**उदाहरण 3 :** मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं (i) 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है? (ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

**हल :** (i) यहाँ मान लीजिए कि '4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना' घटना E है। सभी संभव परिणाम छः हैं, ये 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। स्पष्टतः, घटना E के अनुकूल परिणाम 5 और 6 हैं। अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या 2 है। इसलिए

$$P(E) = P(4 \text{ से बड़ी संख्या}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) मान लीजिए '4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करना' घटना F है।

सभी संभव परिणाम = 6 हैं।

घटना F के अनुकूल परिणाम 1, 2, 3 और 4 हैं।

अतः F के अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है।

इसलिए 
$$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

क्या उपरोक्त उदाहरण में दी हुई घटना E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं? नहीं, ये प्रारंभिक घटनाएँ नहीं हैं, क्योंकि घटना E के 2 परिणाम हैं तथा घटना F के 4 परिणाम हैं।

**टिप्पणी :** उदाहरण 1 से, हम देखते हैं कि

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

जहाँ घटना E 'एक चित प्राप्त करना' है तथा घटना F 'एक पट प्राप्त करना' है।

उदाहरण 3 के (i) और (ii) से भी हम देखते हैं कि

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

जहाँ घटना E '4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना' तथा घटना F '4 के बराबर या कम संख्या प्राप्त करना' है।

ध्यान दीजिए कि 4 से बड़ी संख्या नहीं प्राप्त करने का अर्थ वही है जो 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करने का है और इसी प्रकार इसका विलोम भी यही प्रकट करता है।

उपरोक्त (1) और (2) में, क्या घटना 'F', 'E नहीं' (not E) के समान नहीं है। हाँ, ऐसा ही है। हम घटना 'E नहीं' को  $\bar{E}$  से व्यक्त करते हैं।

अतः,  $P(E) + P(E \text{ नहीं}) = 1$

अर्थात्  $P(E) + P(\bar{E}) = 1$  है, जिससे  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$  प्राप्त होता है।

**व्यापक रूप में, किसी घटना E के लिए यह सत्य है कि**

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

घटना 'E नहीं' को निरूपित करने वाली घटना  $\bar{E}$  घटना E की **पूरक (complement)** घटना कहलाती है। हम यह भी कहते हैं कि E और  $\bar{E}$  परस्पर **पूरक घटनाएँ** हैं।

आगे बढ़ने से पहले, आइए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने का प्रयत्न करें:

- (i) पासे को एक बार फेंकने पर संख्या 8 प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?
- (ii) पासे को एक बार फेंकने पर 7 से छोटी संख्या प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

**आइए (i) का उत्तर दें:**

हम जानते हैं कि पासे को एक बार फेंकने पर केवल छः ही संभावित परिणाम हैं। ये परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। चूँकि पासे के किसी भी फलक पर 8 अंकित नहीं है, इसलिए 8 के अनुकूल कोई भी परिणाम नहीं है, अर्थात् ऐसे परिणामों की संख्या शून्य (0) है। दूसरे शब्दों में, पासे को एक बार फेंकने पर, संख्या 8 प्राप्त करना **असंभव (impossible)** है।

अतः  $P(8 \text{ प्राप्त करना}) = \frac{0}{6} = 0$

अर्थात् उस घटना, जिसका घटित होना असंभव है, की प्रायिकता 0 होती है। ऐसी घटना को एक **असंभव घटना (impossible event)** कहते हैं।

**आइए (ii) का उत्तर दें:**

चूँकि पासे के प्रत्येक फलक पर ऐसी संख्या लिखी है जो 7 से छोटी है, इसलिए पासे को एक बार फेंकने पर यह निश्चित है कि प्राप्त संख्या सदैव 7 से छोटी होगी। अतः, घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या सभी संभावित परिणामों की संख्या के बराबर होगी, जो 6 है।

इसलिए  $P(E) = P(7 \text{ से छोटी संख्या प्राप्त करना}) = \frac{6}{6} = 1$

अतः उस घटना, जिसका घटित होना निश्चित (sure) है, की प्रायिकता 1 होती है। ऐसी घटना को एक **निश्चित** (sure) या निर्धारित (certain) घटना कहते हैं।

**टिप्पणी :** प्रायिकता  $P(E)$  की परिभाषा से, हम देखते हैं कि अंश (घटना  $E$  के अनुकूल परिणामों की संख्या) सदैव हर (सभी संभव परिणामों की संख्या) से छोटा होता है या उसके बराबर होता है। अतः,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

आइए अब एक उदाहरण, ताशों (playing cards) से संबंधित लें। क्या आपने ताशों की एक गड्डी देखी है? इसमें 52 पत्ते (cards) होते हैं, जो 4 समूहों में बँटे होते हैं। प्रत्येक समूह में 13 पत्ते होते हैं। ये 4 समूह हुकुम (spades) ( ), पान (hearts) ( ), ईंट (diamonds) ( ) और चिड़ी (clubs) ( ) हैं। चिड़ी और हुकुम काले रंग के होते हैं तथा पान और ईंट लाल रंग के होते हैं। प्रत्येक समूह के पत्ते : इक्का (ace), बादशाह (king), बेगम (queen), गुलाम (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 और 2 होते हैं। बादशाह, बेगम और गुलाम वाले पत्ते फेस कार्ड (face cards) कहलाते हैं।

**उदाहरण 4 :** अच्छी प्रकार से फेटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता :

- (i) एक इक्का होगा।
- (ii) एक इक्का नहीं होगा।

**हल :** गड्डी को अच्छी प्रकार से फेटने से परिणामों का सम्प्रायिक होना सुनिश्चित हो जाता है।

- (i) एक गड्डी में 4 इक्के होते हैं। मान लीजिए घटना  $E$  'एक इक्का होना' है।

$E$  के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52 (क्यों?)

अतः 
$$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

- (ii) मान लीजिए घटना  $F$  'एक इक्का नहीं' है।

माना  $F$  के अनुकूल परिणामों की संख्या =  $52 - 4 = 48$  (क्यों?)

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

अतः 
$$P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि  $F$  और कुछ नहीं बल्कि  $\bar{E}$  ही है। अतः, हम  $P(F)$  को इस प्रकार भी परिकल्पित कर सकते हैं :  $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$ .

**उदाहरण 5 :** दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलते हैं। यह ज्ञात है कि संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की क्या प्रायिकता है?

**हल :** मान लीजिए  $S$  और  $R$  क्रमशः संगीता के जीतने और रेशमा के जीतने की घटनाएँ व्यक्त करते हैं।

संगीता के जीतने की प्रायिकता  $= P(S) = 0.62$  (दिया है)

रेशमा के जीतने की प्रायिकता  $= P(R) = 1 - P(S)$

[चूँकि घटनाएँ  $R$  और  $S$  पूरक हैं]

$$= 1 - 0.62 = 0.38$$

**उदाहरण 6 :** सविता और हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों (i) के जन्म-दिन भिन्न-भिन्न हों? (ii) का जन्मदिन एक ही हो? [लीप का वर्ष (Leap year) को छोड़ते हुए]

**हल :** दोनों मित्रों में से किसी एक लड़की, मान लीजिए, सविता का जन्मदिन वर्ष का कोई भी दिन हो सकता है। इसी प्रकार, दूसरी लड़की हमीदा का जन्मदिन भी वर्ष के 365 दिनों में से कोई एक दिन हो सकता है।

(i) यदि हमीदा का जन्मदिन सविता के जन्मदिन से भिन्न है, तो उसके जन्मदिन के अनुकूल परिणामों की संख्या  $365 - 1 = 364$  होगी।

$$\text{अतः } P(\text{हमीदा का जन्मदिन सविता के जन्मदिन से भिन्न है}) = \frac{364}{365}$$

(ii)  $P(\text{सविता और हमीदा का जन्मदिन एक ही हो})$

$$= 1 - P(\text{दोनों का जन्मदिन भिन्न है})$$

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\bar{E}) = 1 - P(E) \text{ के प्रयोग से}]$$

$$= \frac{1}{365}$$

**उदाहरण 7 :** किसी स्कूल की कक्षा  $X$  में 40 विद्यार्थी हैं जिनमें से 25 लड़कियाँ हैं और 15 लड़के हैं। कक्षा अध्यापिका को एक विद्यार्थी कक्षा-प्रतिनिधि के रूप में चुनना है। वह प्रत्येक विद्यार्थी का नाम एक अलग कार्ड पर लिखती है, जबकि कार्ड एक जैसे हैं। फिर वह इन कार्डों को एक थैले में डालकर अच्छी तरह से हिला देती है। इसके बाद वह थैले

में से एक कार्ड निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि कार्ड पर लिखा हुआ नाम एक (i) लड़की का है? (ii) लड़के का है?

**हल :** कुल 40 विद्यार्थी हैं और इनमें से केवल एक नाम का कार्ड चुनना है।

(i) सभी संभव परिणामों की संख्या = 40

कार्ड पर लड़की का नाम होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 25 (क्यों?)

$$\text{अब, } P(\text{कार्ड पर लड़की का नाम है}) = P(\text{लड़की}) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

(ii) कार्ड पर लड़के का नाम होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 15 (क्यों?)

$$\text{अतः, } P(\text{कार्ड पर लड़के का नाम है}) = P(\text{लड़का}) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

**टिप्पणी :** हम  $P(\text{लड़का})$  को इस प्रकार भी निर्धारित कर सकते हैं :

$$P(\text{लड़का}) = 1 - P(\text{लड़का नहीं}) = 1 - P(\text{लड़की}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

**उदाहरण 8 :** एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे (marbles) हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) सफेद है? (ii) नीला है? (iii) लाल है?

**हल :** यह कहना कि कंचा यादृच्छया रूप से निकाला गया है, संक्षिप्त में यह कहने के बराबर है कि सभी परिणाम समप्रायिक हैं। अतः,

$$\text{सभी संभव परिणामों की संख्या} = 3 + 2 + 4 = 9 \quad (\text{क्यों?})$$

मान लीजिए घटना W 'कंचा सफेद है' को, घटना B 'कंचा नीला है' को तथा घटना R 'कंचा लाल है' को व्यक्त करता है।

(i) घटना W के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$$\text{अतः } P(W) = \frac{2}{9}$$

$$\text{इसी प्रकार, (ii) } P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{और (iii) } P(R) = \frac{4}{9}$$

**ध्यान दीजिए** कि  $P(W) + P(B) + P(R) = 1$  है।

**उदाहरण 9 :** हरप्रीत दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालती है (मान लीजिए एक सिक्का ₹ 1 का है और दूसरा सिक्का ₹ 2 का है)। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम से कम एक चित प्राप्त करेगी?

**हल :** हम 'चित' के लिए H और 'पट' के लिए T लिखते हैं। जब दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो संभावित परिणाम (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) हैं तथा ये सभी समप्रायिक हैं। यहाँ (H, H) का अर्थ है कि पहले सिक्के (मान लीजिए ₹ 1 के सिक्के) पर 'चित' आया और दूसरे सिक्के (₹ 2 के सिक्के) पर 'चित' आया। इसी प्रकार, (H, T) का अर्थ है कि पहले सिक्के पर 'चित' आया और दूसरे सिक्के पर 'पट' आया, इत्यादि।

घटना E 'कम से कम एक चित आना' के अनुकूल परिणाम (H, H), (H, T) और (T, H) हैं। (क्यों?)

अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$$\text{इसलिए } P(E) = \frac{3}{4}$$

अर्थात् हरप्रीत द्वारा कम से कम एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता  $\frac{3}{4}$  है।

**टिप्पणी :** आप  $P(E)$  इस प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \left( \text{चूँकि } P(\bar{E}) = P(\text{कोई चित नहीं}) = \frac{1}{4} \right)$$

क्या आपने यह देखा कि अब तक के सभी उदाहरणों में, प्रत्येक प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या परिमित थी? यदि नहीं, तो अब इसकी जाँच कर लीजिए।

अनेक प्रयोग ऐसे हैं, जहाँ परिणाम दो संख्याओं के बीच में कोई भी संख्या हो सकती है या जिनमें परिणाम एक वृत्त या आयत के अंदर का प्रत्येक बिंदु होता है, इत्यादि। क्या अब आप सभी संभव परिणामों को गिन सकते हैं? जैसाकि आप जानते हैं, यह संभव नहीं है, क्योंकि दो संख्याओं के बीच में अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ होती हैं, या यह कि एक वृत्त के अंदर अपरिमित रूप से अनेक बिंदु होते हैं। अतः, आपके द्वारा अध्ययन की

गई (सैद्धांतिक) प्रायिकता की परिभाषा को वर्तमान रूप में यहाँ प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस समस्या का फिर हल क्या है? इसके उत्तर के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

**उदाहरण 10\*** : एक म्यूज़िकल चेयर (musical chair) खेल में, जो महिला संगीत बजा रही थी उसे सलाह दी गई कि वह संगीत प्रारंभ करने के बाद 2 मिनट के अंदर कभी भी संगीत बंद कर दे। इसकी क्या प्रायिकता है कि संगीत प्रारंभ होने के पहले आधे मिनट के अंदर बंद हो जाएगा?

**हल :** यहाँ संभव परिणाम 0 और 2 के बीच की सभी संख्याएँ हैं। यह संख्या रेखा का 0 से 2 तक का भाग है (देखिए आकृति 14.1)।



आकृति 14.1

मान लीजिए घटना E 'संगीत प्रारंभ होने के पहले आधे मिनट में बंद हो जाता है'।

E के अनुकूल परिणाम संख्या रेखा पर 0 से  $\frac{1}{2}$  के बीच के सभी बिंदु हैं।

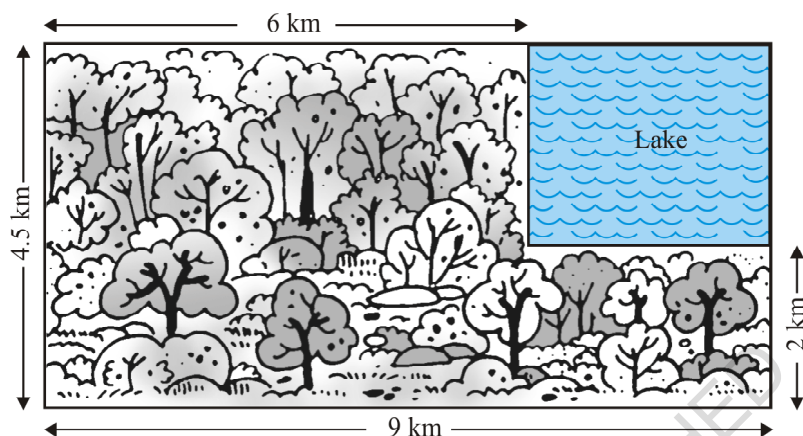
चूँकि सभी परिणाम समप्रायिक हैं, इसलिए हम यह तर्क दे सकते हैं कि कुल दूरी 2 में से दूरी  $\frac{1}{2}$  घटना E के अनुकूल है।

$$\text{अतः} \quad P(E) = \frac{\text{घटना E के अनुकूल दूरी}}{\text{पूरी दूरी जिसमें परिणाम स्थित हो सकते हैं}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

क्या हम उदाहरण 10 की अवधारणा को किसी घटना की प्रायिकता उसके अनुकूल क्षेत्रफल और संपूर्ण क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में विस्तृत कर सकते हैं।

**उदाहरण 11\*** : एक लापता हेलीकॉप्टर के बारे में सूचना मिलती है कि वह आकृति 14.2 में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में कहीं गिर गया है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह आकृति में दर्शाई गई झील में गिरा है?

\* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।



आकृति 14.2

**हल :** हेलीकॉप्टर का आयताकार क्षेत्र में कहीं भी गिरना समप्रायिक है।

संपूर्ण क्षेत्र का क्षेत्रफल, जहाँ हेलीकॉप्टर गिर सकता है

$$= (4.5 \times 9) \text{ km}^2 = 40.5 \text{ km}^2$$

झील का वास्तविक क्षेत्रफल  $= (2.5 \times 3) \text{ km}^2 = 7.5 \text{ km}^2$

$$\text{अतः, } P(\text{हेलीकॉप्टर झील में गिरा है}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27} \text{ है।}$$

**उदहारण 12 :** एक डिब्बे में 100 कमीजें हैं, जिसमें से 88 अच्छी हैं तथा 8 में थोड़ी सी खराबी है और 4 में अधिक खराबी है। एक व्यापारी जिम्मी वे ही कमीजें स्वीकार करता है जो अच्छी हैं, जबकि एक अन्य व्यापारी सुजाता उन्हीं कमीजों को अस्वीकार करती है जिनमें खराबी अधिक है। इस डिब्बे में से एक कमीज को यादृच्छया रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कमीज

(i) जिम्मी को स्वीकार हो?

(ii) सुजाता को स्वीकार हो?

**हल :** 100 कमीजों के डिब्बे में से एक कमीज यादृच्छया रूप से निकाली जाती है। अतः यहाँ 100 समप्रायिक परिणाम हैं।

(i) जिम्मी के अनुकूल (को स्वीकार) परिणामों की संख्या = 88 (क्यों?)

$$\text{अतः, } P(\text{कमीज जिम्मी को स्वीकार है}) = \frac{88}{100} = 0.88$$

(ii) सुजाता के अनुकूल परिणामों की संख्या =  $88 + 8 = 96$  (क्यों?)

$$\text{अतः, } P(\text{कमीज सुजाता को स्वीकार है}) = \frac{96}{100} = 0.96$$

**उदाहरण 13 :** एक सलेटी पासे और एक नीले पासे को एक साथ फेंका जाता है। सभी संभावित परिणामों को लिखिए। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों की संख्याओं का योग

- (i) 8 है।                      (ii) 13 है।                      (iii) 12 से छोटी या उसके बराबर है।

**हल :** जब नीला पासा '1' दर्शाता है, तो सलेटी पासे पर संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी संख्या हो सकती है। यही तब भी होगा, जब नीले पासे पर '2', '3', '4', '5' या '6' होगा। इस प्रयोग के संभावित परिणामों को नीचे सारणी में दिया गया है। प्रत्येक क्रमित युग्म की पहली संख्या नीले पासे पर आने वाली संख्या है तथा दूसरी संख्या सलेटी पासे पर आने वाली संख्या है।



नीला

|   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |



सलेटी

**आकृति 14.3**

ध्यान दीजिए कि युग्म (1, 4) युग्म (4, 1) से भिन्न है (क्यों?)

अतः, संभावित परिणामों की संख्या =  $6 \times 6 = 36$  है।

- (i) E द्वारा व्यक्त घटना 'संख्याओं का योग 8 है' के अनुकूल परिणाम (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) और (6, 2) हैं (देखिए आकृति 15.3)।

अर्थात् E के अनुकूल परिणाम = 5

इसलिए 
$$P(E) = \frac{5}{36}$$

- (ii) जैसा कि आप आकृति 15.3 से देख सकते हैं, घटना F, 'संख्याओं का योग 13 है' के अनुकूल कोई भी परिणाम नहीं है।

अतः 
$$P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

- (iii) जैसा कि आप आकृति 14.3 से देख सकते हैं, घटना G 'संख्याओं का योग  $\leq 12$  से छोटा या उसके बराबर है' के अनुकूल सभी परिणाम हैं।

अतः 
$$P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

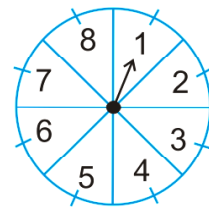
### प्रश्नावली 14.1

- निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए :
  - घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = \_\_\_\_\_ है।
  - उस घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती \_\_\_\_\_ है। ऐसी घटना \_\_\_\_\_ कहलाती है।
  - उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है \_\_\_\_\_ है। ऐसी घटना \_\_\_\_\_ कहलाती है।
  - किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग \_\_\_\_\_ है।
  - किसी घटना की प्रायिकता \_\_\_\_\_ से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा \_\_\_\_\_ से छोटी या उसके बराबर होती है।
- निम्नलिखित प्रयोगों में से किन-किन प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं? स्पष्ट कीजिए।
  - एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। कार चलना प्रारंभ हो जाती है या कार चलना प्रारंभ नहीं होती है।
  - एक खिलाड़ी बास्केटबॉल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है। वह बास्केट में बॉल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है।
  - एक सत्य-असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। उत्तर सही है या गलत होगा।
  - एक बच्चे का जन्म होता है। वह एक लड़का है या एक लड़की है।
- फुटबॉल के खेल को प्रारंभ करते समय यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सी टीम पहले बॉल लेगी, इसके लिए सिक्का उछालना एक न्यायसंगत विधि क्यों माना जाता है?

4. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?
- (A)  $\frac{2}{3}$  (B)  $-1.5$  (C)  $15\%$  (D)  $0.7$
5. यदि  $P(E) = 0.05$  है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?
6. एक थैले में केवल नीबू की महक वाली मीठी गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली
- (i) संतरे की महक वाली है?
- (ii) नीबू की महक वाली है?
7. यह दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता  $0.992$  है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो?
8. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदे हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद (i) लाल हो? (ii) लाल नहीं हो?
9. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा
- (i) लाल है? (ii) सफेद है? (iii) हरा नहीं है?
10. एक पिग्गी बैंक (piggy bank) में, 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, ₹ 1 के पचास सिक्के हैं, ₹ 2 के बीस सिक्के और ₹ 5 के दस सिक्के हैं। यदि पिग्गी बैंक को हिलाकर उल्टा करने पर कोई एक सिक्का गिरने के परिणाम समप्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का (i) 50 पैसे का होगा? (ii) ₹ 5 का नहीं होगा?
11. गोपी अपने जल-जीव कुंड (aquarium) के लिए एक दुकान से मछली खरीदती है। दुकानदार एक टंकी, जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली हैं, में से एक मछली यादृच्छया उसे देने के लिए निकालती है (देखिए आकृति 14.4)। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई मछली नर मछली है?
12. संयोग (chance) के एक खेल में, एक तीर को घुमाया जाता है, जो विश्राम में आने के बाद संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है (देखिए आकृति 14.5)। यदि ये सभी परिणाम समप्रायिक हों तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित
- (i) 8 को करेगा?
- (ii) एक विषम संख्या को करेगा?
- (iii) 2 से बड़ी संख्या को करेगा?
- (iv) 9 से छोटी संख्या को करेगा?



आकृति 14.4



आकृति 14.5

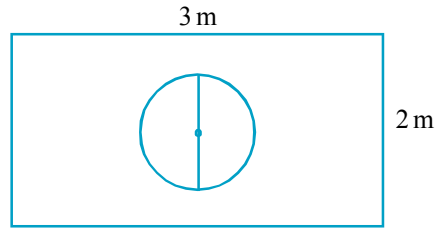
13. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :  
 (i) एक अभाज्य संख्या (ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या (iii) एक विषम संख्या
14. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :  
 (i) लाल रंग का बादशाह (ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता  
 (iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता (iv) पान का गुलाम  
 (v) हुकुम का पत्ता (vi) एक ईट की बेगम
15. ताश के पाँच पत्तों ईट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का को पलट करके अच्छी प्रकार फेटा जाता है। फिर इनमें से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है।  
 (i) इसकी क्या प्रायिकता है कि यह पत्ता एक बेगम है?  
 (ii) यदि बेगम निकल आती है, तो उसे अलग रख दिया जाता है और एक अन्य पत्ता निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दूसरा निकाला गया पत्ता (a) एक इक्का है? (b) एक बेगम है?
16. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
17. (i) 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा?  
 (ii) मान लीजिए (i) में निकाला गया बल्ब खराब नहीं है और न ही इसे दुबारा बल्बों के साथ मिलाया जाता है। अब शेष बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा?
18. एक पेटी में 90 डिस्क (discs) हैं, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी : (i) दो अंकों की एक संख्या (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या (iii) 5 से विभाज्य एक संख्या।
19. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं :

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | A |
|---|---|---|---|---|---|

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो? (ii) D प्राप्त हो?

- 20.\* मान लीजिए आप एक पासे को आकृति 14.6 में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में यादृच्छया रूप से गिराते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह पासा 1m व्यास वाले वृत्त के अंदर गिरेगा?

\* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।



आकृति 14.6

21. 144 बॉल पेनों के एक समूह में 20 बॉल पेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं। आप वही पेन खरीदना चाहेंगे जो अच्छा हो, परंतु खराब पेन आप खरीदना नहीं चाहेंगे। दुकानदार इन पेनों में से, यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि
- आप वह पेन खरीदेंगे?
  - आप वह पेन नहीं खरीदेंगे?
22. उदाहरण 13 को देखिए। (i) निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

| घटना                           | 2              | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8              | 9 | 10 | 11 | 12             |
|--------------------------------|----------------|---|---|---|---|---|----------------|---|----|----|----------------|
| दोनों पासों की संख्याओं का योग |                |   |   |   |   |   |                |   |    |    |                |
| प्रायिकता                      | $\frac{1}{36}$ |   |   |   |   |   | $\frac{5}{36}$ |   |    |    | $\frac{1}{36}$ |

- (ii) एक विद्यार्थी यह तर्क देता है कि 'यहाँ कुल 11 परिणाम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 हैं। अतः, प्रत्येक की प्रायिकता  $\frac{1}{11}$  है।' क्या आप इस तर्क से सहमत हैं? सकारण उत्तर दीजिए।
23. एक खेल में एक रुपए के सिक्के को तीन बार उछाला जाता है और प्रत्येक बार का परिणाम लिख लिया जाता है। तीनों परिणाम समान होने पर, अर्थात् तीन चित या तीन पट प्राप्त होने पर, हनीफ खेल में जीत जाएगा, अन्यथा वह हार जाएगा। हनीफ के खेल में हार जाने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।
24. एक पासे को दो बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि
- 5 किसी भी बार में नहीं आएगा?
  - 5 कम से कम एक बार आएगा?
- [संकेत : एक पासे को दो बार फेंकना और दो पासों को एक साथ फेंकना एक ही प्रयोग माना जाता है।]

25. निम्नलिखित में से कौन से तर्क सत्य हैं और कौन से तर्क असत्य हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

- (i) यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो इसके तीन संभावित परिणाम- दो चित, दो पट या प्रत्येक एक बार हैं। अतः, इनमें से प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता  $\frac{1}{3}$  है।
- (ii) यदि एक पासे को फेंका जाता है, तो इसके दो संभावित परिणाम एक विषम संख्या या एक सम संख्या हैं। अतः एक विषम संख्या ज्ञात करने की प्रायिकता  $\frac{1}{2}$  है।

## 14.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. घटना E की सैद्धांतिक (या परंपरागत) प्रायिकता  $P(E)$  को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

जहाँ हम कल्पना करते हैं कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक हैं।

2. एक निश्चित (या निर्धारित) घटना की प्रायिकता 1 होती है।
3. एक असंभव घटना की प्रायिकता 0 होती है।
4. घटना E की प्रायिकता एक ऐसी संख्या  $P(E)$  है कि
 
$$0 \leq P(E) \leq 1$$
5. वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो एक प्रारंभिक घटना कहलाती है। किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग 1 होता है।
6. किसी भी घटना E के लिए  $P(E) + P(\bar{E}) = 1$  होता है, जहाँ E घटना 'E नहीं' को व्यक्त करता है। E और E पूरक घटनाएँ कहलाती हैं।

### पाठकों के लिए विशेष

एक घटना की प्रायोगिक या आनुभविक प्रायिकता वास्तविक रूप से घटना के घटित होने पर आधारित होती है, जबकि उस घटना की सैद्धांतिक प्रायिकता में कुछ कल्पनाओं के आधार पर यह प्रागुक्ति की जाती है कि क्या घटना घटेगी। जैसे-जैसे एक प्रयोग में अभिप्रयोगों की संख्या बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे प्रायोगिक और सैद्धांतिक प्रायिकताओं की लगभग बराबर होने की प्रत्याशा की जा सकती है।

## A2.1 भूमिका

- एक वयस्क मानव शरीर में लगभग 1,50,000 किमी लंबी धमनियाँ और शिराएँ होती हैं जिनमें रक्त प्रवाहित होता है।
- मनुष्य का हृदय शरीर में प्रति 60 सेकंड में 5 से 6 लीटर तक रक्त पंप करता रहता है।
- सूर्य की सतह का तापमान लगभग  $6000^{\circ}\text{C}$  है।

क्या आपको यह जानकर आश्चर्य हुआ है कि किस प्रकार हमारे वैज्ञानिक और गणितज्ञ इन परिणामों का आकलन कर सके हैं? क्या उन्होंने कुछ वयस्कों के मृत शरीरों से धमनियों और शिराओं को बाहर निकाल कर इनकी लंबाई मापी है? क्या हृदय द्वारा प्रति सेकंड पंप किए गए रक्त की मात्रा ज्ञात करने के लिए शरीर से रक्त को बाहर निकाला है? क्या सूर्य की सतह का तापमान ज्ञात करने के लिए उन्होंने अपने साथ थर्मामीटर लेकर सूर्य तक की यात्रा की है? निश्चित ही ऐसा नहीं हुआ है। तब प्रश्न उठता है कि उन्होंने इन आँकड़ों को किस तरह प्राप्त किया है?

निश्चय ही इसका उत्तर **गणितीय निदर्शन** में निहित है, जिससे हम आपको कक्षा IX में परिचित करा चुके हैं। आपको याद होगा कि गणितीय निदर्शन वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति का गणितीय विवरण होता है और आपको यह भी याद होगा कि गणितीय निदर्शन किसी समस्या का गणितीय निदर्श प्राप्त करने का एक प्रक्रम है। साथ ही समस्या का विश्लेषण करने और हल करने में इसका प्रयोग किया जाता है।

अतः गणितीय निदर्शन में, हम वास्तविक जगत से जुड़ी किसी समस्या को लेते हैं और उसे हम एक तुल्य गणितीय समस्या में रूपांतरित कर देते हैं। तब हम गणितीय समस्या हल

करते हैं और इसके हल की व्याख्या वास्तविक जगत् से जुड़ी समस्या के साथ करते हैं। और तब यह देखना आवश्यक है कि प्राप्त हल अर्थपूर्ण है, जो निदर्श के मान्यकरण का एक चरण है। कुछ उदाहरण जहाँ गणितीय निदर्शन अत्यंत महत्वपूर्ण है, नीचे दिए हैं:

- (i) एक ऐसे स्थान पर किसी नदी की गहराई और चौड़ाई ज्ञात करना जहाँ पहुँचा नहीं जा सकता है।
- (ii) पृथ्वी और अन्य ग्रहों का द्रव्यमान आकलित करना।
- (iii) पृथ्वी और किसी अन्य ग्रह के बीच की दूरी आकलित करना।
- (iv) किसी देश में मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।
- (v) स्टॉक मार्केट की प्रवृत्ति (Trend) की प्रागुक्ति करना।
- (vi) किसी व्यक्ति के शरीर में रक्त का आयतन आकलित करना।
- (vii) 10 वर्ष बाद किसी नगर की जनसंख्या की प्रागुक्ति करना।
- (viii) किसी पेड़ की पत्तियों की संख्या आकलित करना।
- (ix) किसी नगर के वायुमंडल में उपस्थित विभिन्न प्रदूषकों का ppm आकलित करना।
- (x) पर्यावरण पर प्रदूषकों का प्रभाव आकलित करना।
- (xi) सूर्य की सतह का तापमान आकलित करना।

इस अध्याय में हम गणितीय निदर्शन के प्रक्रम पर पुनःविचार करेंगे और इसे स्पष्ट करने के लिए हम अपने आस-पास के जगत् से जुड़े कुछ उदाहरण लेंगे। अनुच्छेद A2.2 में हम एक निदर्श के निर्माण से संबंधित सभी चरणों से आपको परिचित कराएँगे। अनुच्छेद A2.3 में हम विभिन्न प्रकार के उदाहरणों पर चर्चा करेंगे। अनुच्छेद A2.4 में, हम गणितीय निदर्शन के महत्व से संबंधित कारणों पर विचार करेंगे।

यहाँ यह स्मरण रहे कि हमारा लक्ष्य उस महत्वपूर्ण विधि के प्रति आपको जागरूक करना है, जिसमें गणित वास्तविक जगत् से जुड़ी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है। फिर भी गणितीय निदर्शन के महत्व को वास्तव में समझने के लिए आपको गणित का कुछ और ज्ञान होना आवश्यक होता है। उच्च कक्षाओं में आपको इससे संबंधित कुछ उदाहरण देखने को मिलेंगे।

## A2.2 गणितीय निदर्शन के चरण

कक्षा IX में, हमने निदर्शन के प्रयोग से संबंधित कुछ उदाहरणों पर विचार किया था। क्या इन उदाहरणों से आपको प्रक्रम और इससे संबंधित चरणों की कुछ सूक्ष्म जानकारी प्राप्त हुई थी? आइए हम गणितीय निदर्शन से संबंधित मुख्य चरणों पर पुनः विचार करें।

**चरण 1 (समस्या समझना)** वास्तविक समस्या परिभाषित कीजिए और यदि आप एक समूह में काम कर रहे हैं, तो उन समस्याओं पर विचार कीजिए जिन्हें आप समझना चाहते हैं। कुछ कल्पनाएँ करके और कुछ कारकों की उपेक्षा करके समस्या को प्रबंध योग्य कीजिए जिससे कि समस्या का प्रबंधन किया जा सके।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए हमारी समस्या एक झील में मछलियों की संख्या आकलित करना है। यहाँ यह संभव नहीं है कि प्रत्येक मछली को पकड़ कर बाहर निकाला जाए और फिर उनकी गिनती की जाए। ऐसी स्थिति में हम संभवतः एक प्रतिदर्श (Sample) ले सकते हैं और इसकी सहायता से झील में उपस्थित मछलियों की कुल संख्या आकलित करने का प्रयास कर सकते हैं।

**चरण 2 (गणितीय विवरण और सूत्रण):** समस्या के विभिन्न पहलुओं का वर्णन गणितीय शब्दों में कीजिए। लक्षणों को गणितीय रूप में वर्णन करने की कुछ विधियाँ ये हैं:

- चरों को परिभाषित कीजिए
- समीकरण या असमिकाएँ लिखिए
- आँकड़े एकत्रित कीजिए और उन्हें सारणी रूप में संगठित कीजिए
- ग्राफ बनाइए
- प्रायिकताएँ परिकलित कीजिए

उदाहरण के लिए: एक प्रतिदर्श लेकर जैसा कि चरण 1 में बताया गया है, हम मछलियों की कुल संख्या का आकलन किस प्रकार करते हैं? तब हम प्रतिदर्श के रूप में ली गई मछलियों को चिह्नित करते हैं, और उन्हें शेष मछलियों के साथ रहने के लिए झील में पुनः छोड़ देते हैं। इसके बाद पुनः झील से मछलियों का एक अन्य प्रतिदर्श लेते हैं और यह देखते हैं कि इस नए प्रतिदर्श में पहले चिह्नित की गई कितनी मछलियाँ हैं। तब अनुपात और समानुपात का प्रयोग करके हम मछलियों की कुल संख्या का एक आकलन प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए आइए हम झील से 20 मछलियों का एक प्रतिदर्श लें और उन्हें चिह्नित कर तदुपरांत उन्हें उसी झील में छोड़ दें जिससे वे झील की शेष मछलियों के साथ

मिल जाएँ। तब मछलियों के इस मिश्रित समूह से हम एक अन्य प्रतिदर्श (मान लीजिए 50 मछलियों का प्रतिदर्श) लेते हैं और देखते हैं कि इस नए प्रतिदर्श में चिह्नित मछलियों की संख्या कितनी है। अतः हम अपने आँकड़े एकत्रित करते हैं और उसका विश्लेषण करते हैं।

यहाँ हम यह मान कर चलते हैं कि चिह्नित मछलियाँ अन्य मछलियों के साथ एक समान रूप से मिल जाती हैं और जो प्रतिदर्श हम लेते हैं, वह मछलियों की कुल संख्या का एक अच्छा प्रतिनिधि है।

**चरण 3 (गणितीय समस्या हल करना):** तब विभिन्न गणितीय तकनीकों को लागू करके चरण 2 में विकसित की गई सरलीकृत गणितीय समस्या को हल किया जाता है।

उदाहरण के लिए मान लीजिए कि चरण 2 के उदाहरण के दूसरे प्रतिदर्श में 5 मछलियाँ चिह्नित हैं। अतः मछलियों की कुल संख्या का  $\frac{5}{50}$  अर्थात्  $\frac{1}{10}$  चिह्नित हैं। यदि यह कुल

संख्या का प्रतिरूपी हो, तो जनसंख्या का  $\frac{1}{10} = 20$ .

अतः कुल जनसंख्या =  $20 \times 10 = 200$ .

**चरण 4 (हल की व्याख्या):** पिछले चरण में प्राप्त किए गए हल को अब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी उस स्थिति के संदर्भ में लेते हैं, जिससे हमने चरण 1 प्रारंभ की थी।

उदाहरण के लिए चरण 3 की समस्या का हल करने पर हमें मछलियों की कुल संख्या 200 प्राप्त हुई थी।

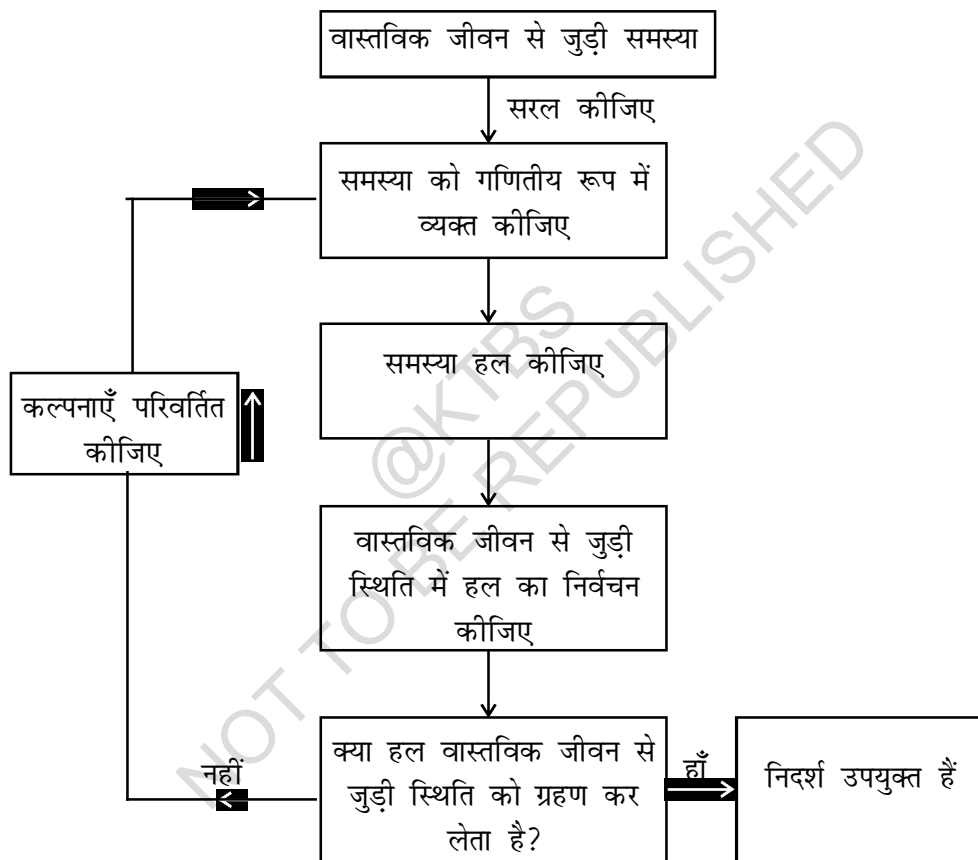
**चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण):** अब हम अपनी मूल स्थिति पर लौट आते हैं और देखते हैं कि गणितीय विधि से प्राप्त किए गए परिणाम सार्थक हैं या नहीं। यदि सार्थक हैं तो हम निदर्श का प्रयोग तब तक करते हैं जब तक कि नई सूचना उपलब्ध नहीं होती है या कल्पनाएँ परिवर्तित हो जाती हैं।

कभी-कभी सरलीकरण के संबंध में की गई कल्पनाओं के कारण गणितीय विवरण देते समय वास्तविक समस्या के अनिवार्य पहलुओं से हम वंचित रह सकते हैं। ऐसी स्थितियों में हल बहुधा वास्तविकता से हट कर होता है और वास्तविक स्थिति में इसका कोई अर्थ नहीं होता। यदि ऐसा होता है, तो हम चरण 1 में की गई कल्पनाओं पर पुनःविचार करते हैं और कुछ अन्य कारकों को लेकर जिन्हें पहले नहीं लिया गया था, इन्हें वास्तविक बना देते हैं।

उदाहरण के लिए चरण 3 में हमने मछलियों की कुल संख्या का एक आकलन प्राप्त किया था, यह झील में उपस्थित मछलियों की वास्तविक संख्या नहीं भी हो सकती है। अब

हम यह देखते हैं कि चरण 2 और 3 को कुछ बार दोहराने पर प्राप्त किए गए परिणामों का माध्य लेने पर हमें कुल संख्या का उत्तम आकलन प्राप्त होता है या नहीं इससे मछलियों की संख्या का एक उत्तम आकलन प्राप्त हो जाएगा।

गणितीय निदर्शन प्रक्रम को देखने की एक अन्य विधि आकृति A2.1 में दिखाई गई है।



आकृति A2.1

हल की सरलता बनाए रखने के लिए, निदर्शक सरलीकरण और परिशुद्धता के बीच संतुलन बनाए रखना चाहते हैं। वे आशा करते हैं कि सन्निकट वास्तविकता के इतने निकट हो, कि कुछ प्रगति हो सके। सर्वोत्तम परिणाम वह होता है जिससे यह प्रागुक्ति की जा सके कि आगे क्या होगा या जिससे सामान्य परिशुद्धता के साथ परिणाम का आकलन किया जा सके। स्मरण रहे कि समस्या को सरल बनाने के संबंध में हमारे द्वारा की गई भिन्न-भिन्न

कल्पनाओं से भिन्न-भिन्न निदर्श प्राप्त हो सकते हैं। अतः कोई भी निदर्श परिपूर्ण नहीं होता। कुछ उत्तम या इससे भी कुछ बेहतर निदर्श हो सकते हैं।

### प्रश्नावली A2.1

#### 1. निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए।

तेरहवीं शताब्दी के प्रारंभ में लियोनार्ड फिबोनशी ने एक प्रश्न किया कि उस स्थिति में कितने खरगोश हो जाएँगे जबकि आप ने केवल दो खरगोशों से प्रारंभ किया था और यहाँ यह मान लीजिए कि एक जोड़ा खरगोश हर महीने शिशुओं का एक जोड़ा पैदा करता है और खरगोश का प्रत्येक जोड़ा अपना पहला शिशु दो महीने की आयु पर पैदा करता है। माह-प्रति-माह खरगोशों के जोड़ों की संख्या शून्य और पहले महीने को छोड़कर पिछले दो महीने में खरगोशों का योग होता है।

| महीना | खरगोशों के जोड़े |
|-------|------------------|
| 0     | 1                |
| 1     | 1                |
| 2     | 2                |
| 3     | 3                |
| 4     | 5                |
| 5     | 8                |
| 6     | 13               |
| 7     | 21               |
| 8     | 34               |
| 9     | 55               |
| 10    | 89               |
| 11    | 144              |
| 12    | 233              |
| 13    | 377              |
| 14    | 610              |
| 15    | 987              |
| 16    | 1597             |

ठीक 16 महीने बाद आपके पास खरगोशों के लगभग 1600 जोड़े प्राप्त हो जाते हैं। इस स्थिति में समस्या का और गणितीय निदर्शन के विभिन्न चरणों का स्पष्ट कथन दीजिए।

### A2.3 कुछ दृष्टांत

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के कुछ उदाहरण लें

**उदाहरण 1 (एक जोड़ा पासा फेंकना):** मान लीजिए आपकी अध्यापिका आपको अनुमान लगाने के निम्नलिखित खेल की चुनौती देती है। इस खेल में वह एक जोड़ा पासा फेकेंगी। पासा फेंके जाने से पहले आपको यह अनुमान लगाना होता है कि पासों पर आई संख्याओं का योग क्या होगा। सही उत्तर होने पर आपको दो पाइंट मिलेंगे और गलत उत्तर होने पर आपके दो पाइंट कट जाएँगे। कौन-सी संख्याएँ सर्वोत्तम अनुमान होंगी?

**हल:**

**चरण 1 (समस्या समझना):** आपको कुछ ऐसी संख्याओं का ज्ञात होना आवश्यक होता है जिनका पासों पर आने का संयोग अधिक होता है।

**चरण 2 (गणितीय विवरण):** गणितीय रूप में यह समस्या पासों पर आई संख्याओं के विभिन्न संभव योगों की प्रायिकताएँ ज्ञात करने में परिवर्तित हो जाती है।

निम्नलिखित 36 संख्या-युग्मों में से एक यादृच्छिक विकल्प के रूप में व्यक्त करके हम अत्यधिक सरल रूप में स्थिति का निदर्शन कर सकते हैं।

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

प्रत्येक युग्म की पहली संख्या पहले पासे पर आने वाली संख्या होती है और दूसरी संख्या दूसरे पासे पर आने वाली संख्या होती है।

**चरण 3 (गणितीय समस्या को हल करना):** ऊपर के प्रत्येक युग्म की संख्याओं को जोड़ने पर संभावित योग के रूप में हमें 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 प्राप्त होते हैं। यह मानकर कि सभी 36 युग्म सम-संभावी (equally likely) हैं, हमें इनमें से प्रत्येक की

प्रायिकता ज्ञात करनी होती है।

इसे हम निम्नलिखित सारणी के रूप में व्यक्त करते हैं:

| योग       | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| प्रायिकता | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

यहाँ आप यह पाते हैं कि 7 का योग प्राप्त करने की प्रायिकता  $\frac{1}{6}$  है जो कि अन्य संख्याओं को योग के रूप में प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है।

**चरण 4 (हल का निर्वचन)** क्योंकि योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता अधिकतम है, इसलिए आपको संख्या सात का अनुमान बार-बार लगाना चाहिए।

**चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण)** एक जोड़ा पासों को अनेक बार उछालिए और एक सापेक्ष बारंबारता सारणी बनाइए। सापेक्ष बारंबारताओं की तुलना संगत प्रायिकताओं से कीजिए। यदि ये एक-दूसरे के निकट न हो, तो ऐसी स्थिति में पासे संभवतः अभिनत (biased) होंगे। तब, उस संख्या का मान निकालने के लिए हम आँकड़े प्राप्त कर सकते हैं जिस पर अभिनत है।

अगला उदाहरण लेने से पहले हमें इसकी कुछ पृष्ठभूमि का ज्ञान होना आवश्यक होता है।

अनेक लोगों के साथ यह सामान्य अनुभव होता है कि जब उन्हें धनराशि की आवश्यकता होती है, उनके पास आवश्यक धनराशि नहीं होती। दैनिक जीवन की आवश्यक वस्तुओं को खरीदने या आराम की वस्तुओं को खरीदने के लिए हमें धनराशि की आवश्यकता होती है। स्कूटर, रेफ्रीजरेटर, टेलीविजन, कार आदि जैसी वस्तुओं को खरीदने के संबंध में सीमित निधि वाले ग्राहकों के लिए व्यापारियों ने किस्त योजना नामक एक योजना चलाई है।

कभी-कभी इन वस्तुओं को खरीदने के संबंध में ग्राहकों को लुभाने के लिए एक विक्रेता विपणन तकनीक के अंतर्गत किस्त योजना चलाता है। किस्त योजना के अंतर्गत वस्तु खरीदते समय ग्राहक को एक समय में पूरा भुगतान नहीं करना होता। वस्तु खरीदते समय उसे वस्तु की कीमत के एक अंश का ही भुगतान करना होता है और शेष राशि का भुगतान किस्तों में किया जा सकता है जो कि मासिक, तिमाही, छमाही या वार्षिक हो सकती है। हाँ, यह बात अवश्य है कि किस्त योजना के अंतर्गत खरीददार को कुछ अधिक राशि का भुगतान करना होता है। क्योंकि बाद की तिथियों में (जिसे आस्थित भुगतान (deferred payment) कहा जाता है) भुगतान किए जाने के कारण विक्रेता कुछ ब्याज वसूल करता है।

किस्त योजना को अच्छी तरह समझने से संबंधित कुछ उदाहरण लेने से पहले आइए हम इस संकल्पना से संबंधित बार-बार प्रयुक्त होने वाले शब्दों को समझ लें।

एक वस्तु की नकद कीमत वह धनराशि होती है जिसका भुगतान ग्राहक को वस्तु खरीदते समय करना होता है।

**टिप्पणी:** यदि भुगतान योजना ऐसी हो कि शेष धनराशि का पूरा भुगतान एक वर्ष के अंदर ही कर दिया जाता हो, तब ऐसी स्थिति में आस्थिगत भुगतान पर साधारण ब्याज लगाया जाता है।

पुराने समय में ऋण के रूप में ली गई राशि पर लगाए गए ब्याज को प्रायः अच्छा नहीं माना जाता था। यहाँ तक कि ऐसा करना वर्जित माना जाता था। ब्याज के भुगतान से संबंधित कानून से बचने की एक विधि यह थी कि ऋण एक मुद्रा में लिया जाता था और भुगतान दूसरी मुद्रा में किया जाता था और इस तरह ब्याज विनियम दर छिप जाता था।

आइए अब हम एक संबंधित गणितीय निदर्शन समस्या पर विचार करें।

**उदाहरण 2:** जूही एक साइकिल खरीदना चाहती है। इसके लिए वह बाज़ार जाती है और पाती है कि जो साइकिल वह खरीदना चाहती है उसकी कीमत ₹ 1800 है। जूही के पास ₹ 600 हैं। अतः वह दुकानदार को यह बताती है कि वह इस स्थिति में नहीं है कि वह इस समय साइकिल खरीद सके। थोड़ा बहुत हिसाब लगाने के बाद वह जूही को यह बताता है कि ₹ 600 नकद देकर और शेष धनराशि ₹ 610 की दो मासिक किस्त देकर वह साइकिल खरीद सकती है। अब जूही के सामने दो विकल्प बचे रहते हैं। या तो वह किस्त योजना को मान ले या बैंक से ऋण लेकर जो कि 10% की वार्षिक साधारण ब्याज पर उपलब्ध है, नकद भुगतान कर दे तो बताइए कि आर्थिक दृष्टि से कौन-सा विकल्प अधिक उत्तम होगा?

**हल :**

**चरण 1 (समस्या समझना):** जूही को यह निर्धारित करना है कि वह दुकानदार द्वारा दिए गए विकल्प को मान ले या नहीं। इसके लिए उसे यह चाहिए कि वह दो ब्याज-दरों से परिचित हो जाए, एक तो वह जो कि किस्त योजना में लगाया जाता है और दूसरा वह जो ब्याज बैंक लगाता है (अर्थात् 10%)।

**चरण 2 (गणितीय विवरण):** योजना को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए उसे बैंक द्वारा ली जाने वाली ब्याज-दर की तुलना में दुकानदार द्वारा दी जाने वाली ब्याज-दर को देखना होता है। ध्यान रहे कि चूँकि पूरी धनराशि का भुगतान एक वर्ष के अंदर-अंदर करना है,

इसलिए राशि पर साधारण ब्याज ही देना होगा।

हम जानते हैं कि साइकिल की नकद कीमत = ₹ 1800

और किस्त योजना के अंतर्गत नकद भुगतान = ₹ 600

अतः शेष कीमत जिसका भुगतान किस्त योजना के अंतर्गत करना है = ₹ (1800 – 600)  
= ₹ 1200

मान लीजिए दुकानदार द्वारा लिया जाने वाला वार्षिक ब्याज दर  $r\%$  है।

प्रत्येक किस्त की धनराशि = ₹ 610

किस्तों में भुगतान की जाने वाली धनराशि = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

किस्त योजना के अंतर्गत भुगतान किया जाने वाला ब्याज = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

क्योंकि जूही एक महीने तक ₹ 1200 अपने पास रखती है, इसलिए

पहले महीने का मूलधन = ₹ 1200

दूसरे महीने का मूलधन = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

दूसरे महीने के मूलधन के शेष राशि ₹ 590 + लगाया गया ब्याज ₹ 20 = मासिक किस्त ₹ 610  
= दूसरी किस्त।

अतः एक महीने का कुल मूलधन = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

$$\text{अब} \quad \text{ब्याज} = ₹ \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \quad (2)$$

**चरण 3: (समस्या हल करना) :** (1) और (2) से हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

$$\text{या} \quad r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (लगभग)}$$

**चरण 4: (हल का निर्वचन) :** किस्त योजना के अंतर्गत लगाया गया ब्याज दर = 13.14 %.

बैंक द्वारा लगाया गया ब्याज दर = 10%

अतः साइकिल खरीदने के लिए उसे बैंक से ऋण लेना अधिक पसंद करना चाहिए क्योंकि आर्थिक दृष्टि से यह अधिक उत्तम है।

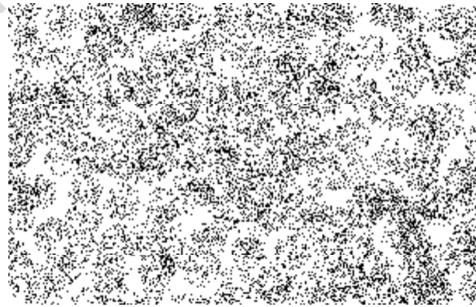
**चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण)** इस स्थिति में इस चरण का कोई विशेष महत्त्व नहीं है, क्योंकि संख्याएँ नियत हैं। फिर भी, बैंक से ऋण लेने के संबंध में स्टैंप पेपर की लागत जैसी औपचारिकताएँ निभाने के कारण प्रभावी ब्याज दर, यदि किस्त योजना की ब्याज दर से अधिक हो जाता है तो वह अपनी राय बदल भी सकती है।

**टिप्पणी :** अभी भी ब्याज दर का निदर्शन अपनी प्रारंभिक अवस्था में है और अभी भी मान्यकरण वित्तीय बाजार की एक समस्या है। यदि किस्त नियत करने में भिन्न-भिन्न ब्याज दर निगमित किया गया हो, तब मान्यकरण एक महत्वपूर्ण समस्या हो जाता है।

### प्रश्नावली A2.2

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में समस्याओं को हल करने के लिए गणितीय निदर्शन की विभिन्न अवस्थाओं को दर्शाएँ।

1. एक ऑर्निथोलॉजिस्ट एक बड़े क्षेत्र में तोतों की संख्या आकलित करना चाहती है। इनमें से कुछ को पकड़ने के लिए वह एक जाल बिछाती है और 32 तोते पकड़ लेती है, जिन्हें वह रिंग पहनाकर आज़ाद छोड़ देती है। अगले सप्ताह में वह 40 तोतों के लिए जाल बिछाती है जिनमें 8 रिंगित हो जाते हैं।
  - (i) उसके दूसरे पकड़ का कितना अंश रिंगित होता है?
  - (ii) क्षेत्र में तोतों की कुल संख्या का एक आकलन ज्ञात कीजिए।
2. मान लीजिए संलग्न आकृति एक जंगल के एक हवाई जहाज से खींची गई फोटो को दर्शाता है, जिसमें प्रत्येक बिंदु एक पेड़ निरूपित करता है। आपका उद्देश्य पर्यावरण सर्वेक्षण के एक अंश के रूप में इस मार्ग पर पेड़ों की संख्या ज्ञात करना है।
3. एक टी. वी. को या तो ₹ 24000 नकद देकर या ₹ 8000 नकद और ₹ 2800 की छः मासिक किस्तों में भुगतान करके खरीदा जा सकता है। एक टी. वी. खरीदने के लिए अली बाज़ार जाता है और इसके लिए उसके पास ₹ 8000 हैं। इस समय उसके पास दो विकल्प हैं। एक विकल्प यह है कि वह किस्त योजना के अंतर्गत टी. वी. खरीदे और दूसरा विकल्प यह है कि किसी वित्तीय सोसाइटी से ऋण लेकर नकद भुगतान



आकृति A2.2

करके टी. वी. खरीदे। सोसाइटी 18% की वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ब्याज लगाती है। अली के लिए कौन-सा विकल्प अधिक उत्तम है?

#### A2.4 गणितीय निदर्शन का महत्त्व क्यों है?

जैसाकि हमने उदाहरणों में देखा है कि गणितीय निदर्शन एक आंतर विषय शाखा है। इसमें गणितज्ञ और अन्य विषय क्षेत्रों के विशेषज्ञ वर्तमान उत्पादों में सुधार लाने, उत्तम उत्पाद विकसित करने या कुछ उत्पादों के व्यवहार की प्रागुक्ति करने में अपने ज्ञान और विशेषज्ञता का सहयोग देते हैं।

यूँ तो निदर्शन का महत्वपूर्ण होने के अनेक विशेष कारण हैं परंतु किसी न किसी रूप में अधिकांश कारणों का संबंध निम्नलिखित से होता है :

- **समझदारी बढ़ाना** : यदि एक ऐसा गणितीय निदर्श हो जो वास्तविक जगत से जुड़े तंत्र के अनिवार्य व्यवहार को प्रदर्शित करता हो, तो निदर्श का विश्लेषण करके हम तंत्र को अच्छी तरह समझ सकते हैं। और, निदर्श का निर्माण करते समय ही हम यह पता लगा लेते हैं कि तंत्र में कौन-कौन कारक अधिक महत्वपूर्ण हैं और तंत्र की भिन्न-भिन्न पहलू एक-दूसरे के साथ किस प्रकार संबंधित हैं।
- **प्रागुक्ति या पूर्वानुमान या अनुकरण करना** : प्रायः हम यह जानना चाहते हैं कि वास्तविक जगत से जुड़े तंत्र का भविष्य में क्या महत्त्व है, परंतु तंत्र के साथ सीधा प्रयोग करना खर्चीला, अव्यावहारिक या असंभव होता है। उदाहरण के लिए, मौसम की प्रागुक्ति के लिए, मानव में औषधि-दक्षता का अध्ययन करने, एक न्यूक्लीयर रिएक्टर का इष्टतम अभिकलन ज्ञात करना, आदि-आदि।

अनेक प्रकार के संगठनों में पूर्वानुमान लगाने का अधिक महत्त्व होता है, क्योंकि निर्णयन में भावी घटनाओं की प्रागुक्तियों को निर्गमित करना होता है। उदाहरण के लिए:

- विपणन विभागों में माँग के विश्वसनीय पूर्वानुमान बिक्री संबंधी तकनीकों की योजना बनाने में सहायक होते हैं।
- स्कूल बोर्ड को विभिन्न ज़िलों में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या में हो रही वृद्धि का पूर्वानुमान लगाना आवश्यक होता है, जिससे यह निर्णय लिया जा सके कि कहाँ और कब नए स्कूल खोले जा सकें।

प्रायः भविष्य की प्रागुक्ति करने के लिए पूर्वानुमान लगाने वाले पिछले आँकड़ों का प्रयोग करते हैं। सबसे पहले तो उस प्रतिरूप को पहचानने के लिए आँकड़ों का

विश्लेषण करते हैं जो इसका वर्णन कर सके। तब पूर्वानुमान लगाने के लिए इन आँकड़ों और प्रतिरूप का प्रयोग भविष्य में किया जाता है। इस आधारभूत रणनीति का प्रयोग अधिकांश पूर्वानुमान तकनीकों में किया जाता है और यह इस कल्पना पर आधारित होता है कि वह प्रतिरूप जिसे पहचान लिया गया है, भविष्य में भी लागू होता रहेगा।

- **आकलन करना :** प्रायः हमें बड़े मानों का आकलन करना होता है। इस संबंध में जंगल में वृक्षों, झील में मछलियों आदि से संबंधित उदाहरण आप देख चुके हैं। एक अन्य उदाहरण के रूप में, चुनाव के पहले चुनाव में भाग लेने वाली पार्टियाँ चुनाव में अपनी पार्टी के जीतने की प्रायिकता की प्रागुक्ति करना चाहती हैं। विशेष रूप से वे इस बात का आकलन करना चाहती हैं कि उनके निर्वाचन क्षेत्र के कितने लोग उनकी पार्टी को वोट देंगे। अपनी प्रागुक्ति के अनुसार अपने चुनाव अभियान की रणनीति के बारे में निर्णय ले सकते हैं। चुनाव में, किस पार्टी को कितनी सीटें मिलेंगी, इसकी प्रागुक्ति करने के लिए निर्गम मतानुमान (exit polls) का व्यापक प्रयोग किया जाता है।

### प्रश्नावली A2.3

1. पिछले पाँच वर्षों के आँकड़ों के आधार पर वर्ष के अंत में दसवीं कक्षा के बोर्ड परीक्षा में आपके स्कूल द्वारा गणित में प्राप्त किए जाने वाले औसत प्रतिशत अंकों का पूर्वानुमान लगाइए।

### A2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. एक गणितीय निदर्श वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति का गणितीय विवरण होता है। गणितीय निदर्शन वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं को हल करने और इसे प्रयोग करने के लिए गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रक्रम है।
2. निदर्शन में निम्नलिखित चरण लागू किए जाते हैं : समस्या समझना, गणितीय निदर्श का सूत्रण, इसे हल करना, वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में इसका निर्वचन करना और अंत में अति महत्वपूर्ण निदर्श का मान्यकरण।
3. कुछ गणितीय निदर्श विकसित करना।
4. गणितीय निदर्शन का महत्त्व।

## उत्तर/संकेत

### प्रश्नावली 8.1

1. (i)  $\sin A = \frac{7}{25}$ ,  $\cos A = \frac{24}{25}$  (ii)  $\sin C = \frac{24}{25}$ ,  $\cos C = \frac{7}{25}$
2. 0 3.  $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$  4.  $\sin A = \frac{15}{17}$ ,  $\sec A = \frac{17}{8}$
5.  $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ,  $\cos \theta = \frac{12}{13}$ ,  $\tan \theta = \frac{5}{12}$ ,  $\cot \theta = \frac{12}{5}$ ,  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$
7. (i)  $\frac{49}{64}$  (ii)  $\frac{49}{64}$  8. हाँ
9. (i) 1 (ii) 0 10.  $\sin P = \frac{12}{13}$ ,  $\cos P = \frac{5}{13}$ ,  $\tan P = \frac{12}{5}$
11. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) असत्य

### प्रश्नावली 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii)  $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$  (iv)  $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$  (v)  $\frac{67}{12}$
2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C 3.  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 15^\circ$
4. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य

## प्रश्नावली 8.3

$$1. \sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \sec A = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$$

$$2. \sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

3. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

## प्रश्नावली 9.1

1. 10m      2.  $8\sqrt{3}$  m      3. 3m,  $2\sqrt{3}$  m      4.  $10\sqrt{3}$  m  
 5.  $40\sqrt{3}$  m      6.  $19\sqrt{3}$  m      7.  $20(\sqrt{3} - 1)$  m      8.  $0.8(\sqrt{3} + 1)$  m  
 9.  $16\frac{2}{3}$  m      10.  $20\sqrt{3}$  m, 20m, 60m      11.  $10\sqrt{3}$  m, 10m      12.  $7(\sqrt{3} + 1)$  m  
 13.  $75(\sqrt{3} - 1)$  m      14.  $58\sqrt{3}$  m      15. 3 सेकंड

## प्रश्नावली 10.1

1. अपरिमित रूप से अनेक  
 2. (i) एक (ii) छेदक रेखा (iii) दो (iv) स्पर्श बिंदु      3. D

## प्रश्नावली 10.2

1. A      2. B      3. A      6. 3 cm  
 7. 8 cm      12. AB = 15 cm, AC = 13 cm

## प्रश्नावली 11.1

1.  $\frac{132}{7} \text{ cm}^2$
2.  $\frac{77}{8} \text{ cm}^2$
3.  $\frac{154}{3} \text{ cm}^2$
4. (i)  $28.5 \text{ cm}^2$  (ii)  $235.5 \text{ cm}^2$
5. (i)  $22 \text{ cm}$  (ii)  $231 \text{ cm}^2$  (iii)  $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{ cm}^2$
6.  $20.4375 \text{ cm}^2$ ;  $686.0625 \text{ cm}^2$
7.  $88.44 \text{ cm}^2$
8. (i)  $19.625 \text{ m}^2$  (ii)  $58.875 \text{ cm}^2$
9. (i)  $285 \text{ mm}$  (ii)  $\frac{385}{4} \text{ mm}^2$
10.  $\frac{22275}{28} \text{ cm}^2$
11.  $\frac{158125}{126} \text{ cm}^2$
12.  $189.97 \text{ km}^2$
13. ₹ 162.68
14. D

## प्रश्नावली 12.1

1.  $160 \text{ cm}^2$
2.  $572 \text{ cm}^2$
3.  $214.5 \text{ cm}^2$
4. सबसे बड़ा व्यास = 7 cm, पृष्ठीय क्षेत्रफल =  $332.5 \text{ cm}^2$
5.  $\frac{1}{4} l^2 (\pi + 24)$
6.  $220 \text{ mm}^2$
7.  $44 \text{ m}^2$ , ₹ 22000
8.  $18 \text{ cm}^2$
9.  $374 \text{ cm}^2$

## प्रश्नावली 12.2

1.  $\pi \text{ cm}^3$
2.  $66 \text{ cm}^3$ . मॉडल के अंदर की हवा का आयतन = आंतरिक हवा का आयतन (शंकु + बेलन + शंकु)  
 $= \left( \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \right)$ , जहाँ  $r$  शंकु तथा बेलन की त्रिज्या है,  $h_1$  शंकु की ऊँचाई और  $h_2$  बेलन की ऊँचाई (लंबाई) है।  
अभीष्ट आयतन =  $\frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$ .
3.  $338 \text{ cm}^3$
4.  $523.53 \text{ cm}^3$
5. 100
6.  $892.26 \text{ kg}$
7.  $1.131 \text{ m}^3$  (लगभग)
8. सही नहीं है। सही उत्तर  $346.51 \text{ cm}^3$  है।

## प्रश्नावली 13.1

1. 8.1 पौधे। हमने प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग किया है क्योंकि  $x_i$  तथा  $f_i$  के संख्यात्मक मूल्य कम हैं।
2. ₹ 545.20
3.  $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. ₹ 211
7. 0.099 ppm
8. 12.48 दिन
9. 69.43 %

## प्रश्नावली 13.2

1. बहुलक = 36.8 वर्ष, माध्य = 35.37 वर्ष। अस्पताल में भर्ती अधिकतम रोगी 36.8 वर्ष आयु (लगभग) के हैं। जब कि औसतन अस्पताल में भर्ती किए गए रोगियों की आयु 35.57 वर्ष है।
2. 65.625 घंटे
3. बहुलकीय मासिक खर्च = ₹ 1847.83, माध्यीय मासिक खर्च = ₹ 2662.5
4. बहुलक : 30.6, माध्य = 29.2. अधिकांश राज्यों/U.T. में छात्र और अध्यापक का अनुपात 30.6 है और औसतन यह अनुपात 29.2 है।
5. बहुलक = 4608.7 रन
6. बहुलक = 44.7 कार

## प्रश्नावली 13.3

1. माध्यक = 137 इकाई, माध्य = 137.05 इकाई, बहुलक = 135.76 इकाई  
इस स्थिति में ये तीनों मापक लगभग समान हैं।
2.  $x = 8, y = 7$
3. माध्यक आयु = 35.76 वर्ष
4. माध्यक लंबाई = 146.75 mm
5. माध्यक जीवन = 3406.98 घंटे
6. माध्यक = 8.05, माध्य = 8.32, बहुलक = 7.88
7. माध्यक भार = 56.67 kg

## प्रश्नावली 14.1

1. (i) 1 (ii) 0, असंभव घटना (iii) 1, अवश्य या निश्चित घटना
- (iv) 1 (v) 0, 1



24. (i)  $\frac{25}{36}$  (ii)  $\frac{11}{36}$
25. (i) सत्य नहीं है। हम इस प्रकार परिणामों को वर्गीकृत कर सकते हैं परंतु वे सम-संभावी नहीं हैं क्योंकि दोनों सिक्कों को उछालने पर यह हो सकता है कि पहले पर चित और दूसरे पर पट या पहले पर पट तथा दूसरे पर चित आए। इसलिए एक पर पट तथा दूसरे पर चित आने की संभावना दोनों पर चित (या दोनों पर पट) आने की संभावनाओं का दुगुना है।
- (ii) सही है। प्रश्न में विचारित दोनों परिणाम सम-संभावी हैं।

### प्रश्नावली A2.2

- (i)  $\frac{1}{5}$  (ii) 160
- 1 cm<sup>2</sup> क्षेत्रफल लीजिए तथा इसमें बिंदुओं की संख्या गिनिए। कुल पेड़ों की संख्या इस संख्या तथा क्षेत्रफल (cm<sup>2</sup>में) का गुणनफल होगा।
- किस्त योजना के अंतर्गत ब्याज की दर 17.74% है जो 18% से कम है।

### प्रश्नावली A2.3

- छात्र स्वयं अपने उत्तर ज्ञात करें।