गणित प्रकाश

गणित की पाठ्यपुस्तक

कक्षा
8
भाग-1

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

0875

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

0875–गणित प्रकाश
कक्षा 8 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

ISBN 978-93-5729-047-0

प्रथम संस्करण
जनवरी 2026 माघ 1947

PD 225T M

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद, 2026

एन.सी.ई.आर.टी. वॉटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशन प्रभाग में प्रकाशित तथा चन्द्रप्रभु ऑफ़सेट प्रिंटिंग वर्क्स प्रा. लि., सी-40, सैक्टर–8, नोएडा 201 301 द्वारा मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भी भाग को छापना तथा इलैक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फ़ोटो प्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुन: प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रचारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

रा.शै.अ.प्र.प. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016 फ़ोन : 011-26562708

108 ए 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरु 560 085 फ़ोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फ़ोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट धनकल बस स्टॉप पिनहटी
कोलकाता 700 114 फ़ोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगाँव
गुवाहाटी 781021 फ़ोन : 0361-2676869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : *एम. वी. श्रीनिवासन*
मुख्य संपादक : *बिज्ञान सुतार*
मुख्य व्यापार प्रबंधक : *अमिताभ कुमार*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी) : *दीपक जैसवाल*
सहायक संपादक : *मीनाक्षी*
सहायक उत्पादन अधिकारी : *प्रकाश वीर सिंह*

आवरण
किएटिव आर्ट स्टूडियो

चित्रांकन
चेतन शर्मा और मधुश्री बासु

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आमुख

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.ई.पी.) 2020 देश में एक ऐसी शिक्षा प्रणाली की परिकल्पना करती है जो भारतीय ज्ञान, लोकाचार और मानव प्रयासों के सभी क्षेत्रों में सभ्यतागत उपलब्धियों पर आधारित हो। साथ ही इसका उद्देश्य विद्यार्थियों को इक्कीसवीं सदी के अवसरों और चुनौतियों से रचनात्मक रूप से जुड़ने के लिए तैयार करना है। इस आकांक्षात्मक दृष्टि का आधार विद्यालयी शिक्षा हेतु राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.एस.ई.) 2023 द्वारा सभी स्तरों में पाठ्यक्रम को सभी क्षेत्रों में विधिवत निर्धारित किया गया है। इसका उद्देश्य आधारभूत और प्रारंभिक स्तर पर बच्चों का (पंचकोशीय) विकास सुनिश्चित करते हुए मध्य स्तर पर उसका विकासात्मक स्वरूप अग्रसर किया जाएगा। इस प्रकार मध्य स्तर कक्षा 6 से 8 तक तीन वर्षों को समाहित करते हुए आरंभिक और माध्यमिक स्तरों के मध्य एक सेतु के रूप में कार्य करता है।

मध्य स्तर पर विद्यालयी शिक्षा हेतु राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थियों को ऐसे आवश्यक कौशलों में दक्ष करना है जो विद्यार्थियों को जीवन में आगे बढ़ने के लिए विश्लेषणात्मक, वर्णनात्मक और सृजनात्मक क्षमताओं को प्रोत्साहित करें और उन्हें आने वाली चुनौतियों एवं अवसरों के लिए तैयार करें। मध्य स्तर हेतु राष्ट्रीय पाठ्यचर्या के आधार पर विकसित बहुआयामी पाठ्यक्रम में ऐसे नौ विषय सम्मिलित किए गए हैं जो विद्यार्थियों के समग्र विकास को प्रोत्साहन देते हैं। इन विषयों के अंतर्गत तीन भाषाओं (कम से कम दो भारतीय मूल की भाषाएँ) सहित विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, गणित, कला, शिक्षाशास्त्र, शारीरिक शिक्षा एवं आरोग्य और व्यावसायिक शिक्षा सम्मिलित है।

ऐसी परिवर्तनकारी शिक्षण संस्कृति के लिए कुछ अत्यावश्यक नियम अपेक्षित होते हैं। इन्हें मूर्त रूप देने के लिए विभिन्न पाठ्यचर्या क्षेत्रों में उपयुक्त पाठ्यपुस्तकों का होना क्योंकि यह पाठ्यपुस्तकें विषयवस्तु और शिक्षणशास्त्र की भूमिका के मध्य मध्यस्थता में एक केंद्रीय भूमिका निभाने के लिए अभिप्रेत हैं। इससे प्रत्यक्ष निर्देश और अन्वेषणों के अवसरों के मध्य एक विवेकपूर्ण संतुलन बनाने में सहायता प्राप्त होगी। इसके साथ ही कक्षा नियोजन और शिक्षकों की तैयारी पाठ्यचर्या क्षेत्रों के अंतर्गत उनके अवधारणात्मक संबंध स्थापित करने हेतु अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (रा.शै.अ.प्र.प.) अपनी ओर से विद्यार्थियों को उच्च गुणवत्ता वाली पाठ्यपुस्तकें उपलब्ध कराने के लिए प्रतिबद्ध है। इस उद्देश्य के लिए गठित विभिन्न पाठ्यचर्या क्षेत्र समूहों (सी.ए.जी.) जिनमें प्रख्यात विषय विशेषज्ञ, शिक्षाविद और कार्यरत शिक्षक सदस्य हैं। इन सभी ने पाठ्यपुस्तकों के विकास के लिए प्रत्येक संभव प्रयास किया है। *गणित प्रकाश*, भाग-1, कक्षा 8 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक सीखने को आनंददायक, आकर्षक और सार्थक बनाने के लिए तैयार की गई है। एन.ई.पी. 2020 और एन.सी.एफ.एस.ई 2023 के अनुरूप यह पाठ्यपुस्तक अनुभवात्मक और जिज्ञासा आधारित सीखने की यात्रा को आगे बढ़ाती है, जिसका आरंभ कक्षा 6 और 7 की गणित की पाठ्यपुस्तकों में पहले ही किया जा चुका है। इस यात्रा के दौरान अवधारणाएँ एवं प्रश्न दैनिक जीवन की स्थितियों से निकलकर आते

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

हैं। अत: यह आशा की जाती है कि विद्यार्थी उनसे आसानी से जुड़ सकेंगे। पुस्तक विद्यार्थियों को अपने आस-पास के पैटर्न देखने एवं तलाशने और गणितीय अवधारणाओं को स्वयं खोजने हेतु प्रोत्साहित करने के प्रयास करती है। विषय-सामग्री गणित को अन्य विषय क्षेत्रों, जैसे— विज्ञान, सामाजिक विज्ञान के साथ-साथ अन्य मिश्रित विषयों (क्रॉस कटिंग थीम्स), जैसे— पर्यावरण शिक्षा, मूल्य शिक्षा, समावेशी शिक्षा, भारतीय ज्ञान पद्धति (आई.के.एस.) से एकीकृत करने का प्रयत्न करती है। अधिकांश स्थानों पर अवधारणा किसी कहानी अथवा पहेली से आरंभ होती है, जो कि न केवल विद्यार्थियों को सोचने पर विवश करती है बल्कि अपितु अवधारणा के महत्व का भी अनुभव कराती है।

इस पाठ्यपुस्तक के अतिरिक्त इस स्तर पर विद्यार्थियों को अन्य विभिन्न शिक्षण संसाधनों का पता लगाने हेतु भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। ऐसे संसाधन उपलब्ध कराने में विद्यालय के पुस्तकालय महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसके साथ ही विद्यार्थियों को ऐसा करने के लिए मार्गदर्शन देने और प्रोत्साहित करने में अभिभावकों और शिक्षकों की भूमिका भी महत्त्वपूर्ण होगी।

मैं इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण में सम्मिलित सभी व्यक्तियों का आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने इस उत्कृष्ट प्रयास को साकार किया है और आशा करता हूँ कि यह पुस्तक सभी हितधारकों की अपेक्षाओं को पूर्ण करेगी। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों को निरंतर परिष्कृत करने हेतु वचनबद्ध है। हम आपकी टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करते हैं जो भावी संशोधनों में सहायक हो सकते हैं।

@NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

दिनेश प्रसाद सकलानी
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली

पुस्तक के विषय में

गणित, विद्यार्थियों को न केवल बुनियादी अंकगणितीय कौशलों को विकसित करने में सहायता करता है अपितु तार्किकता, रचनात्मकता, समस्या-समाधान एवं स्पष्ट और सटीक संचार (मौखिक और लिखित) की महत्त्वपूर्ण क्षमताएँ विकसित करने में भी सहयोग प्रदान करता है। गणितीय ज्ञान अन्य विद्यालयी विषयों की अवधारणाओं को समझने में भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है, जैसे — विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, यहाँ तक कि कला, शारीरिक शिक्षा एवं व्यवसायिक शिक्षा। गणित अधिगम, सुविचारित विकल्पों एवं निर्णयों के लिए क्षमताओं को विकसित करने में भी अपना योगदान प्रदान करता है। संख्याओं और मात्रात्मक तर्कों की समझ, प्रभावी एवं सार्थक लोकतांत्रिक और आर्थिक भागीदारी के लिए भी आवश्यक है। इस प्रकार गणित, विद्यालयी शिक्षा के समस्त उद्देश्यों को प्राप्त करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मध्य स्तर पर गणित एक बड़ी चुनौती है और यह विद्यार्थी के अनुभव और परिवेश के समीप होने के साथ-साथ अमूर्त होने की दोहरी भूमिका भी निभाता है। यह अंतर्ज्ञान विकसित करने के साथ-साथ जटिलता को बनाए रखने और उस पर बल देने की भूमिका भी निभाता है। यह आलोचनात्मक और तार्किक सोच को बढ़ावा देता है। इसके साथ ही कलात्मकता, रचनात्मकता, लालित्य और सौंदर्यबोध का भी विकास करता है। गणित, विद्यार्थियों को स्वयं अवधारणाओं का अन्वेषण करने के भरपूर अवसर प्रदान करता है साथ ही गणित के वैश्विक भंडार में सर्वश्रेष्ठ ज्ञात विधियों को भी सिखाता है।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में गणित को सीखने के उपर्युक्त लक्ष्यों और चुनौतियों का समाधान करने का प्रयास किया गया है। इस पुस्तक के लेखकों का लक्ष्य विद्यार्थियों में अंतर्ज्ञान और दृढ़ता दोनों को विकसित करने के लिए औपचारिक एवं अनौपचारिक परिभाषाओं और तरीकों के बीच विवेकपूर्ण संतुलन बनाना है। यह पुस्तक सक्रिय और अनुभवात्मक अधिगम को बढ़ावा देने के लिए कक्षा में विद्यार्थी-विद्यार्थी और विद्यार्थी-शिक्षक के मध्य गणितीय वार्तालाप के कई अवसर भी प्रदान करती है। निरंतर अन्वेषण को प्रोत्साहित करने हेतु संपूर्ण पाठ्यपुस्तक में अनेकों प्रश्न, पहेलियाँ और अंत: क्रियात्मक अभ्यास दिए गए हैं। कक्षा में चर्चा को प्रोत्साहित करने हेतु कई खुले अंत वाले (ओपन एंडेड) प्रश्न भी दिए गए हैं।

अध्याय 1— 'वर्ग और घन' विशिष्ट अन्वेषणों और संदर्भों के माध्यम से वर्ग और घन नामक विशेष प्रकार की संख्याओं का परिचय प्रदान करता है। अध्याय 2—'घातों का खेल' बहुत बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए संक्षिप्त और तार्किक प्रकारों पर विचार करता है और चर्चा करता है कि उन्हें बिना किसी अस्पष्टता के कैसे लिखा और पढ़ा जा सकता है। अध्याय 3— 'संख्याओं की कहानी' यह बताता है कि कैसे संख्या और संख्या निरूपण का विचार समय के साथ, विश्व के विभिन्न स्थानों में विकसित हुआ और अंतत: अपने आधुनिक और कुशलतापूर्वक रूप में पहुँचा। अध्याय 4— 'चतुर्भज' इस अध्याय के अंतर्गत कुछ रोचक प्रकार की चतुर्भुजीय आकृतियों और उन पर आधारित समस्याओं पर चर्चा की गई है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अध्याय 5— 'संख्याओं का खेल' विद्यार्थियों द्वारा अध्ययन किए गए संख्याओं के विभिन्न गुणों को रुचिकर गतिविधियों के संतुलन के साथ दृश्यावलोकन और कठिन गणितीय तर्क के माध्यम से प्रदर्शित करता है। अध्याय 6— 'जितना बाँटेंगे उतना बढ़ेगा' बीज गणित से संबधित पहलुओं और विशेष रूप से वितरण गुणधर्म को सम्मिलित करता है। अध्याय 7— 'समानुपातिक तर्कण-1' दैनिक जीवन की स्थितियों का उपयोग करके दो राशियों की तुलना का नया प्रकार खोजता है। सभी अध्यायों में कला, इतिहास और विज्ञान सहित अन्य विषयों के साथ संबंधों पर बल प्रदान करने का प्रयास किया गया है।

हम आशा करते हैं कि कहानी सुनाने और व्यावहारिक क्रियाकलापों को एक साथ क्रियान्वित करके सीखना, जैसा कि कक्षा 6 और 7 में किया गया था, एक गहन अधिगम अनुभव निर्मित करेगा जो कि जिज्ञासा जगाएगा और गणित के प्रति रुचि को बढ़ावा प्रदान करेगा। यह आशा की जाती है कि शिक्षक विद्यार्थियों को चर्चा करने, खेलने, परस्पर सामंजस्य बनाने, विभिन्न विचारों के लिए तार्किक तर्क देने और प्रस्तुत तर्कों में कमियाँ ढूँढ़ने का अवसर देंगे। यह आवश्यक है कि विद्यार्थी अंततः यह समझने की क्षमता विकसित कर सकेंगे कि किसी नियम को सिद्ध करने का क्या अर्थ है और अंतर्निहित अवधारणाओं के विषय में आश्वस्त भी हो सकेंगे। गणित की कक्षा में एल्गोरिदम के अधिक अनुप्रयोग की अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए अपितु विद्यार्थियों को समस्याओं को हल करने के कई अलग-अलग प्रकार खोजने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.ई.पी.) 2020 के अनुसार पाठ्यपुस्तक में पहेलियों, खेलों और संवादात्मक अभ्यासों के माध्यम से अभिकलनात्मक विचार को भी धीरे-धीरे प्रस्तुत किया गया है। यह पुस्तक विद्यार्थियों को इन सभी पहलुओं पर प्रोत्साहित करती है। विभिन्न अवधारणाओं का संदर्भ प्रदान करते समय भारतीय जड़ों को भी ध्यान में रखा गया है। विद्यार्थियों को भारत की समृद्ध गणितीय विरासत और गणित में वैश्विक योगदान से अवगत कराने के लिए भारतीय गणितज्ञों की भूमिका को भी समस्या समाधान दृष्टिकोण के एक भाग के रूप में सम्मिलित किया गया है।

अवधारणाएँ और समस्याएँ दैनिक जीवन की परिस्थितियों से जुड़ी हुई हैं। पुस्तक में उन संदर्भों और सामग्रियों का उपयोग करने का प्रयास किया गया है जिनसे विद्यार्थी परिचित हैं। पुस्तक के अंत में अधिगम सामग्री पत्रक दिए गए हैं जिनकी छायाप्रति (फोटोकॉपी) करके कक्षा में उपयोग किया जा सकता है। अनेक स्थानों पर सहकर्मी समूह के प्रयासों और चर्चाओं को प्रोत्साहित करने के लिए अभ्यास और क्रियाकलाप दिए गए हैं। यह पाठ्यपुस्तक कक्षा में विविध विद्यार्थियों की अधिगम आवश्यकताओं को संबोधित करने का उद्देश्य रखती है।

हमने प्रारंभिक अध्यायों में सीखी गई अवधारणाओं को आगे के अध्यायों के विचारों से जोड़ने का प्रयास किया है ताकि गणित की संबद्धता और एकता को प्रदर्शित किया जा सके। हम आशा करते हैं कि शिक्षक इन अवधारणाओं को क्रमिक रूप से दोहरा सके ताकि विद्यार्थी गणित की संपूर्ण अवधारणात्मक संरचना को समझ सकें। हमें विश्वास है कि पाठ्यपुस्तक के द्वारा शिक्षक महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं, जैसे— वर्ग और घन, घातांक, संख्याओं के विकास आदि पर अधिक ध्यान केंद्रित कर सकेंगे। यह विद्यार्थियों के लिए नई हैं जो कि भविष्य की गणितीय शिक्षा के लिए आधारभूत हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अंततः इस पाठ्यपुस्तक का उद्देश्य केवल एक पाठ्यपुस्तक से कहीं अधिक है। यह गणितीय खोज और अन्वेषण विश्व का एक पासपोर्ट है। इसका कक्षा और घर, दोनों जगह उपयोग किया जा सकता है। हम आशा करते हैं कि यह विद्यार्थियों को अपने स्वयं के गणितीय रोमांच पर निकलने के लिए सशक्त बनाने में प्रोत्साहित करेगी एवं उन्हें प्रत्येक वस्तु में गणित के सौंदर्य और प्रासंगिकता को देखने में सहायता करेगी। अपने रुचिकर दृष्टिकोण और कक्षा 8 की गणित अवधारणाओं के व्यापक व्याख्या के साथ इस पाठ्यपुस्तक का उद्देश्य युवा मन को आकर्षित और उन्हें गणितीय खोज की आजीवन यात्रा में अग्रसर करता है।

मैं इस पुस्तक के सभी लेखकों और योगदानकर्ताओं को इस महत्त्वपूर्ण और मूल्यवान योगदान हेतु और राष्ट्र के गणित शिक्षकों, विद्यार्थियों और जिज्ञासुओं के लिए की गई सेवा के लिए पुनः धन्यवाद देता हूँ।

हम इस पुस्तक के संबंध में आपकी टिप्पणियों और सुझावों की उम्मीद करते हैं और आशा करते हैं कि शिक्षण और सीखने के समय आपने जो रुचिपूर्ण अभ्यास, क्रियाकलाप और कार्य विकसित किए हैं उन्हें प्रेषित करेंगे। आपके सुझावों को आगामी संस्करणों में सम्मिलित किया जाएगा।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

आशुतोष वझलवार
आचार्य एवं *शैक्षणिक संयोजक*
गणित एवं विज्ञान शिक्षा विभाग
रा.शै.अ.प्र.प.

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम और शिक्षण अधिगम सामग्री समिति (एन.एस.टी.सी.)

1. महेश चंद्र पंत, *कुलाधिपति*, राष्ट्रीय शैक्षिक योजना एवं प्रशासन संस्थान ***(अध्यक्ष)***
2. मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय ***(सह-अध्यक्ष)***
3. सुधा मूर्ति, प्रतिष्ठित *लेखिका* एवं *शिक्षाविद*
4. बिबेक देबरॉय, *अध्यक्ष*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद् (ई.ए.सी.-पी.एम.)
5. शेखर मांडे, पूर्व *महानिदेशक*, सी.एस.आई.आर. एवं प्रतिष्ठित *आचार्य*, सावित्रीबाई फुले पुणे विश्वविद्यालय, पुणे
6. सुजाता रामदोरई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय, कनाडा
7. शंकर महादेवन, संगीत विशेषज्ञ, मुंबई
8. यू. विमल कुमार, *निदेशक*, प्रकाश पादुकोण बैडमिंटन अकादमी, बेंगलुरु
9. मिशेल डैनिनो, *अतिथि आचार्य*, आई.आई.टी., गांधीनगर
10. सुरीना राजन, *आई.ए.एस.* (सेवानिवृत्त), पूर्व *महानिदशेक*, हिपा, हरियाणा
11. चमू कृष्ण शास्त्री, *अध्यक्ष*, भारतीय भाषा समिति, शिक्षा मंत्रालय
12. संजीव सान्याल, *सदस्य*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद (ई.ए.सी.-पी.एम.)
13. एम.डी. श्रीनिवास, *अध्यक्ष*, सेंटर फॉर पॉलिसी स्टडीज, चेन्नई
14. गजानन लोंढ़े, हेड, प्रोग्राम ऑफिस, एन.एस.टी.सी.
15. रबिन छेत्री, *निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., सिक्किम
16. प्रत्यूष कुमार मंडल, *आचार्य*, सामाजिक विज्ञान शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
17. दिनेश कुमार, *आचार्य*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
18. कीर्ति कपूर, *आचार्य*, भाषा शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
19. रंजना अरोड़ा, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, पाठ्यचर्या अध्ययन और विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली ***(सदस्य-सचिव)***

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

पाठ्यपुस्तक विकास समूह

योगदानकर्ता

अमर्त्य कुमार दत्ता, *आचार्य*, सांख्यिकी-गणित यूनिट, भारतीय सांख्यिकी संस्थान (आई.एस.आई.), कोलकता

अंजलि गुप्ते, *प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत), विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर

आशुतोष केदारनाथ वझलवार, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली — **सीएजी (गणित) सदस्य समन्वयक (अंग्रेजी संस्करण)**

एच. एस. शारदा, *सहायक अध्यापिका*, राजकीय उच्च विद्यालय, एम. सी. थलालू, एच. डी. कोट तालुक, मैसूरु, कर्नाटक

माधवन मुकुंद, *निदेशक*, चेन्नई गणितीय संस्थान चेन्नई – सीएजी *अध्यक्ष* (गणित)

मधु बी., *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.) मैसूरु

मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय और *सह-अध्यक्ष*, एन.सी.टी.सी.

पद्माप्रिया शिराली, पूर्व *प्रधानाचार्य*, सहयाद्रि स्कूल के.एफ.आई., पुणे

पंतजलि शर्मा, *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), अजमेर

रामचंद्र कृष्णमूर्ति, *प्रधानाचार्य*, अज़ीम प्रेमजी स्कूल, बेंगलूरु

शिव कुमार के.एम., *वरिष्ठ सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

श्रवण एस. के., *सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

समीक्षक

आलोक कान्हेरे, *परियोजना वैज्ञानिक अधिकारी*, होमी भाभा केंद्र, विज्ञान शिक्षा, मुंबई

अपर्णा लालिंगाकर, *निदेशक*, अक्षरब्रहम परामर्श केंद्र, पुणे

राखी बनर्जी, *सह-आचार्य*, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय

सुजाता रामदोराई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय कनाडा, सदस्य, एन.एस.टी.सी.

विजयन के., *आचार्य*, पाठ्यक्रम अध्ययन एवं विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (हिंदी संस्करण)

टी.पी. शर्मा, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अनुवादक

अंजू रंजना, *ए.आर.पी.* औरास, उन्नाव, उत्तर प्रदेश

उमंग कुमार पण्ड्या, आर.पी., सी.बी.ई.ओ., झल्लारा सलुंबर, उदयपुर, राजस्थान

ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

प्रकाश सांगवान, *पी.जी.टी.* (गणित), जी.एस.एस.एस., झोझू कलां, दादरी, हरियाणा

प्रदीप कुमार जैन, *प्रवक्ता* गणित (सेवानिवृत्त) आर.पी.वी.वी., सूरजमल विहार, दिल्ली

भूपेश कुमार त्रिपाठी, *आचार्य* (गणित), सी.एम.पी., इलाहाबाद विश्वविद्यालय, प्रयागराज

सुधा पाटीदार, *संसाधन विशेषज्ञ*, नई दिल्ली

सुनील कुमार तिवारी, *ए.आर.पी.*, प्राथमिक शिक्षा, हरजिंदर नगर, कानपुर

अनुवाद समीक्षक

उपासना तिवारी, *सहायक आचार्य*, दौलत राम कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

कमल अरोड़ा, *प्रवक्ता*, रा.उ.मा.वि. सुआवतो का गुड़ा, सायरा, उदयपुर, राजस्थान

प्रशांत कुमार, *पी.जी.टी.* (गणित), जी.एस.एस.एस. पुथी समन, हिसार, हरियाणा

प्रवेश व्यास, *सहायक आचार्य*, वास्तुशास्त्र विभाग, श्री लाल बहादुर शास्त्री राष्ट्रीय संस्कृत विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

पुरुषोत्तम झरोटिया, *सहायक आचार्य*, एस.पी.सी. राजकीय महाविद्यालय, अजमेर, राजस्थान

मनोज पुरी, *प्रवक्ता*, डी.आई.ई.टी., डींग सिरसा, हरियाणा

विजय राज सिंह शेखावत, *सहायक निदेशक*, वैज्ञानिक एवं तकनीकी शब्दावली आयोग, शिक्षा मंत्रालय, नई दिल्ली

संजय कुमार बोल्या, *वरिष्ठ अध्यापक*, एम.जी.जी.एस. बड़गाँव, उदयपुर, राजस्थान

संजीव कुमार, *पी.जी.टी.* (गणित), जी.एम.एस.एस.एस.एस. सोहना, गुरुग्राम, हरियाणा

सुनील बजाज, *अतिरिक्त निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., गुरुग्राम, हरियाणा

स्वस्ति शर्मा, *वरिष्ठ परामर्शदाता*, प्रोग्राम ऑफिस, राष्ट्रीय पाठ्यक्रम एवं शिक्षण-अधिगम सामग्री समिति

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आभार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (रा.शै.अ.प्रै.प.) इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में मिश्रित विषयों (Cross-Cutting Themes) पर दिशा निर्देशों के लिए पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूह (CAG) और गणित एवं अन्य संबद्ध पाठ्यचर्यात्मक क्षेत्र समूहों (CAGs) के सम्मानित अध्यक्ष एवं सदस्यों का उनके मार्गदर्शन एवं समर्थन के लिए आभार व्यक्त करती है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास के समय विभिन्न कार्यशालाओं का आयोजन किया गया और विभिन्न संस्थानों के विषय विशेषज्ञों को आमंत्रित किया गया। रा.शै.अ.प्र.प., विषय विशेषज्ञों— श्रीलथा अयंगर, *टी.जी.टी.* गणित बेंगलुरु; जसपाल कौर *टी.जी.टी.* (गणित) स्कूल ऑफ एक्सीलेंस, दिल्ली; सुनीता शर्मा, *टी.जी.टी.* गणित, द हेरिटेज स्कूल, दिल्ली; संगीता सोलंकी, *टी.जी.टी.* गणित, द हेरिटेज स्कूल, दिल्ली; ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य,* विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली द्वारा दिए गए बहुमूल्य विचारों और सुझावों के लिए आभार व्यक्त करती है।

परिषद्, निधि एम. शास्त्री और तरुण चौबीसा, कार्यक्रम कार्यालय; स्नेहा टाइटस, *मुख्य संपादक*, राइट एंगल्स, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलुरु का आभार प्रकट करती है। इसके साथ ही लुप्तप्राय प्रजातियों के टिकटों के चित्र उपलब्ध कराने के लिए रायू एम. एस. फिलेटलिस्ट; इन्फोग्राफिक उपलब्ध कराने के लिए श्वेता राव, बैनियन ट्री, नई दिल्ली; तथा विश्व मानचित्र बनाने के लिए अर्काप्रोवो दास के प्रयासों की सराहना करती है।

परिषद्, सुनीता फरक्या, *आचार्य* एवं *अध्यक्ष*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प. के शैक्षणिक एवं प्रशासनिक सहयोग के लिए आभार व्यक्त करती है।

परिषद्, इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में सहयोग प्रदान करने के लिए सुष्मिता जोशी, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; मानवेन्द्र प्रताप सिंह राठौर, *कनिष्ठ परियोजना अध्येता*; चेतना सिंह, *कनिष्ठ परियोजना अध्येता*; आशा कुमारी, *कनिष्ठ परियोजना अध्येता*; विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., के योगदानों की सराहना करती है।

इसके साथ ही परिषद्, विशाल शर्मा, *टंकक हिंदी* (संविदा); अभिलाष कुमार, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा), डी.ई.एस.एम. का योगदान भी प्रशंसनीय हैं। अंततः परिषद्, पुस्तक की रूपरेखा तैयार करने एवं पुस्तक को अंतिम रूप देने हेतु पवन कुमार बरियार, *प्रभारी, डी.टी.पी. प्रकोष्ठ*, मोहन सिहँ, विवेक मंडल, अनीता कुमारी और उपासना सिंह, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा), प्रकाशन प्रभाग, रा.शै.अ.प्र.प. का आभार व्यक्त करती है। परिषद्, संपादन कार्य के लिए पारुल त्यागी, *सहायक संपादक* (संविदा) का आभार व्यक्त करती है। प्रूफरीडिंग कार्य के लिए अलका दिवाकर, कमल भाटी, ज्योति सेमवाल, जयप्रकाश नारायण, ज्योती बांगडे एवं सुनील कुमार *प्रूफरीडर* (संविदा) का आभार ज्ञापित करती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

भारत का संविधान

भाग-3 (अनुच्छेद 12-35)
(अनिवार्य शर्तों, कुछ अपवादों और युक्तियुक्त निर्बंधन के अधीन)
द्वारा प्रदत्त

मूल अधिकार

समता का अधिकार

- विधि के समक्ष एवं विधियों के समान संरक्षण;
- धर्म, मूलवंश, जाति, लिंग या जन्मस्थान के आधार पर;
- लोक नियोजन के विषय में;
- अस्पृश्यता और उपाधियों का अंत।

स्वातंत्र्य-अधिकार

- अभिव्यक्ति, सम्मेलन, संघ, संचरण, निवास और वृत्ति का स्वातंत्र्य;
- अपराधों के लिए दोष सिद्धि के संबंध में संरक्षण;
- प्राण और दैहिक स्वतंत्रता का संरक्षण;
- छः से चौदह वर्ष की आयु के बच्चों को निःशुल्क एवं अनिवार्य शिक्षा;
- कुछ दशाओं में गिरफ्तारी और निरोध से संरक्षण।

शोषण के विरुद्ध अधिकार

- मानव के दुर्व्यापार और बलात श्रम का प्रतिषेध;
- परिसंकटमय कार्यों में बालकों के नियोजन का प्रतिषेध।

धर्म की स्वतंत्रता का अधिकार

- अंतःकरण की और धर्म के अबाध रूप से मानने, आचरण और प्रचार की स्वतंत्रता;
- धार्मिक कार्यों के प्रबंध की स्वतंत्रता;
- किसी विशिष्ट धर्म की अभिवृद्धि के लिए करों के संदाय के संबंध में स्वतंत्रता;
- राज्य निधि से पूर्णतः पोषित शिक्षा संस्थाओं में धार्मिक शिक्षा या धार्मिक उपासना में उपस्थित होने के संबंध में स्वतंत्रता।

संस्कृति और शिक्षा संबंधी अधिकार

- अल्पसंख्यक-वर्गों को अपनी भाषा, लिपि या संस्कृति विषयक हितों का संरक्षण;
- अल्पसंख्यक-वर्गों द्वारा अपनी शिक्षा संस्थाओं का स्थापन और प्रशासन।

सांविधानिक उपचारों का अधिकार

- उच्चतम न्यायालय एवं उच्च न्यायालय के निर्देश या आदेश या रिट द्वारा प्रदत्त अधिकारों को प्रवर्तित कराने का उपचार।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

शिक्षक के लिए शब्द

हम आशा करते हैं कि *गणित प्रकाश* पाठ्यपुस्तक गणित जैसे रोमांचक विषय को सीखने के आनंद को अगली पीढ़ी तक पहुँचाने के महत्त्वपूर्ण कार्य को पूर्ण करने में सुदृढ़ समर्थक और मार्गदर्शक के रूप में आपकी सहायता करेगी।

इस कार्य के लिए एक अनुकूल वातावरण प्रदान करना आवश्यक है जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क के गणितीय सोच को विकसित करने में सहायता करेगा। कक्षाओं में विद्यार्थियों को जो भी बताया जाता है उसे वह केवल सुनते हैं अथवा श्यामपट्ट पर जो भी लिखा जाता उसे उत्तर या लेखन पुस्तिका में लिख लेते हैं। इस तरह की कक्षाओं में गणित सीखने के लिए आवश्यक परिस्थितियों का अभाव रहता है। कक्षाएँ ऐसे स्थान पर होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी गणितीय अवधारणाओं के साथ खेलने, प्रतिरूपों को खोजने, चर्चा करने और समस्याओं को हल करने के लिए रचनात्मक रणनीतियों को अपने मित्रों के साथ मिलकर क्रियान्वित करने में व्यस्त रहें। निश्चित तौर पर ये वहीं परिस्थितियाँ हैं जिनके कारण गणित के संपूर्ण क्षेत्र का विकास हुआ है। अत: अनुकूल परिस्थितियों के बिना विद्यार्थियों से गणितीय चिंतन और समझ विकसित करने की आशा नहीं की जा सकती है।

सौभाग्य से कक्षा में ऐसी परिस्थितियाँ बनाना कठिन नहीं है। इसके लिए विद्यार्थियों के सामने नियमित रूप से रुचिकर प्रश्न, समस्या, प्रतिरूप अथवा चुनौती रखी जानी चाहिए और उन्हें कक्षा में जोड़ें में अथवा समूहों में, उस पर खेलने, चर्चा करने और कार्य करने के लिए पर्याप्त समय देना चाहिए।

इसके साथ ही एक ऐसा वातावरण विकसित करने की आवश्यकता है जहाँ विद्यार्थियों की त्रुटियों की समझा जाए और सीखने में उनके महत्त्व को स्वीकार किया जाए।

कक्षाओं में गणितीय सोच को आरंभ करने के लिए उत्साह पैदा करना कठिन कार्य नहीं है यद्यपि उसे बनाए रखना चुनौतीपूर्ण हो सकता है। यह उत्साह बनाए रखने के लिए इसमें आपकी ओर से प्रयास सम्मिलित हो सकते हैं। यदि आप किसी प्रश्न, समस्या, प्रतिरूप या चुनौती को सप्ताह में कम से कम एक या दो बार आरंभ करते हैं और साथ ही विद्यार्थियों को उस पर खेलने, चर्चा करने और कार्य करने लिए पर्याप्त समय देते हैं तो इसका विद्यार्थियों के गणित के प्रति दृष्टिकोण पर अत्यधिक सकारात्मक प्रभाव हो सकता है।

यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि यह सकारात्मक प्रभाव त्वरित नहीं होगा। इसके लिए समय की आवश्यकता है। यह सीखने की एक धीमी प्रक्रिया है जो कि विभिन्न कारकों पर निर्भर करती है, जैसे—आप समस्या समाधान के लिए कितने अवसर विद्यार्थियों को प्रदान करते हैं, आपका धैर्य और आप विद्यार्थियों को कितना प्रोत्साहन प्रदान करते हैं।

समस्या प्रस्तुत करने में आपकी सहायता करने के लिए इस पुस्तक में सभी समस्याओं अथवा प्रश्नों को ? और (?) चिह्न द्वारा चिह्नित किया गया है। यह चिह्न कक्षा में समस्या

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

समाधान और अन्वेषण की प्रक्रिया आरंभ करने के संभावित अवसर का संकेतक है। आप देखेंगे कि कुछ समस्याओं को '

' का नाम दिया गया है। इस प्रकार के प्रश्नों को कक्षा में चर्चा करने के लिए बनाया गया है।

पाठ्यपुस्तक में महत्त्वपूर्ण गणितीय प्रक्रियाओं, चिंतन के तरीकों एवं समस्या-निदान दृष्टिकोणों को प्रमुखता से दिखाने के लिए उल्लू का शुभंकर (मैस्कॉट) कई स्थानों पर दिया गया है। जहाँ उल्लू का शुभंकर विद्यमान हो एवं ऐसी अन्य स्थितियों में भी इन्हें कक्षाओं में चर्चाओं के दौरान स्पष्ट किया जा सकता है।

इस कक्षा में गणितीय कथनों के औचित्य अथवा प्रमाण का प्रचलन बढ़ जाता है। विद्यार्थियों को स्वयं निर्णय लेने के लिए धीरे-धीरे प्रोत्साहित किया जाना चाहिए न कि उन्हें ऐसा करने के लिए विवश किया जाना चाहिए। जब भी विद्यार्थियों को ऐसा करने पर चुनौतियों का सामना करना पड़े तो उन्हें प्रयोग और अवलोकन करने के लिए प्रोत्साहित करें और निर्णय लेने में अपने अंतर्ज्ञान का उपयोग करें। औचित्य प्रमाण प्रदान करना एक ऐसा कौशल है जिसे विकसित करने में समय लगता है।

विद्यार्थियों की गणितीय सोच और अवधारणाओं की समझ विकसित करने लिए पाठ्यपुस्तक में पर्याप्त समस्याएँ दी गई हैं। उन सभी को 'हल करने' का प्रयास इस मूल्य पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को हल करने और विचार करने का पर्याप्त समय ही न मिलें।

यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि अन्वेषणात्मक समस्याएँ केवल समस्याओं को हल करने के कौशल को बढ़ावा प्रदान करने के लिए ही नहीं है अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना प्रारंभ करते हैं तो वे प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाने में भी सहायता करती है।

विद्यार्थियों को आत्मनिर्भर शिक्षार्थी बनाने के प्रयास अवश्य होने चाहिए। इसके लिए एक आवश्यक अनिवार्य पहलू गणितीय पाठ को पढ़ने और समझने की क्षमता है। इस कौशल को बढ़ावा देने के लिए विद्यार्थियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। वे जो पढ़ते हैं उसकी व्याख्या करने और उसे दूसरों के समक्ष व्यक्त करने के पर्याप्त अवसर उन्हें प्रदान किए जाने चाहिए। यह उस एक बड़ी समस्या का भी समाधान करेगा जिसका सामना विद्यार्थी गणित को बोलने और शब्द समस्याओं की व्याख्या करने मे करते हैं।

इस पाठ्यपुस्तक में अनेक खुले अंत वाले (open-ended) प्रश्न दिए गए हैं। इसमें कुछ अवधारणाओं को समझने के नए प्रकार भी सम्मिलित हैं। यदि आप उन्हें हल करने में सक्षम नहीं हैं अथवा उनमें से कुछ का त्वरित अनुसरण नहीं कर पा रहे हैं तो यह कोई जटिल समस्या नहीं है। प्रत्येक व्यक्ति को संपूर्ण ज्ञान नहीं होता है। ऐसी सामग्री को समझना और उस पर विचार करने के लिए इसे कक्षा में ले जाना और प्रस्तुत करना बहुत उपयोगी होगा। परिचर्चा के पश्चात जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत किया जा सकता है। यह प्रक्रिया स्वतः ही पाठ्यसामग्री को समझने में सुगम बना सकती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इन चर्चाओं में आप एक सहयोगी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं और जब विद्यार्थी शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए खोजते एवं उन्हें सोचते हुए देखते हैं तब यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।

आशा है कि आप और विद्यार्थी इस पुस्तक का उपयोग करके एक बहुत अच्छा और उपयोगी समय व्यतीत करेंगें।

प्रमुख बिंदुओं का सारांश

अन्वेषण के लिए समय

1. विद्यार्थियों के लिए नियमित रूप से नई समस्याओं, प्रश्नों, प्रतिरूपों या चुनौतियों को प्रस्तुत करना महत्वपूर्ण है। व्यक्तिगत रूप से और समूहों में उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने और उन पर कार्य करने के लिए पर्याप्त समय दीजिए।
2. एक ऐसे वातावरण को निर्मित करने की आवश्यकता है जो त्रुटियों को समझता है और सीखने में उनके महत्व को स्वीकारता है।
3. एक ऐसी पाठ्य संस्कृति होनी चाहिए जहाँ विद्यार्थी एक-दूसरे के लिए समस्याएँ प्रस्तुत करें और समस्याओं को हल करने की विधियों पर परस्पर चर्चा करें।

पाठ्यपुस्तक में समस्याओं के विषय में

1. पुस्तक में अन्वेषणात्मक समस्याएँ न केवल समस्याओं के समाधान के स्तर में वृद्धि करती हैं अपितु जब विद्यार्थी अन्वेषण में संलग्न होना शुरू करते हैं तो इन समस्याओं का उद्देश्य प्रक्रियात्मक प्रवाह को सुदृढ़ बनाना भी है।
2. पुस्तक में सभी समस्याओं को हल करने का प्रयास इस कीमत पर नहीं होना चाहिए कि विद्यार्थियों को उन प्रश्नों को समझने, चर्चा करने एवं हल करने के लिए पर्याप्त समय ही न मिले।

पढ़ना

1. विद्याथियों को स्वयं और समूहों में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित कीजिए।
2. विद्यार्थी जो पढ़ते हैं, उसकी व्याख्या करने और दूसरों के सामने व्यक्त करने का उन्हें अवसर प्रदान करें।

न जानने का अधिकार!

1. यदि विद्यार्थी को पढ़ते समय कुछ पाठ्य सामग्री त्वरित समझ में नहीं आती है तो इसमें कोई जटिल समस्या नहीं है। ऐसी पाठ्य सामग्री को समझने और उस पर विचार करने के साथ-साथ इसे कक्षा में प्रस्तुत किया जा सकता है और उस पर चर्चा की जा सकती है। चर्चा के पश्चात जो अवधारणाएँ स्पष्ट हैं और जो अभी तक स्पष्ट नहीं हैं, उन्हें स्पष्ट रूप से संक्षेप में प्रस्तुत

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

किया जा सकता है। इन चर्चाओं में आप एक साथी अन्वेषक के रूप में भाग ले सकते हैं। जब विद्यार्थी शिक्षक को किसी विषय को समझने के लिए खोजते एवं सोचते हुए देखते हैं तो यह उनके लिए एक अद्भुत उदाहरण स्थापित करता है।

2. सीखना एक सतत प्रक्रिया है। निश्चित रूप से गणित में इतना कुछ है जो अभी भी ज्ञात नहीं है और जिसके लिए और अधिक अन्वेषण की आवश्यकता है।

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

विद्यार्थियों के लिए शब्द!

गणित कला को सराहने के लिए केवल निष्क्रिय दर्शक बने रहना पर्याप्त नहीं हैं अपितु इसमें आपकी सक्रिय भागीदारी की भी आवश्यकता है, जैसे—कोई अन्वेषक किसी भी रहस्य को सुलझाने के लिए प्रक्रिया में अनुरत रहता है।

इस भागीदारी की आवश्यकता विशेषतः तब होती है जब आप कोई नया प्रश्न देखते हैं अथवा कोई प्रश्न आपकी जिज्ञासा से उत्पन्न होता है अथवा जब आप संख्याओं या आकृतियों के किसी नए आकर्षक प्रतिरूप को देखते हैं। जब ऐसी अवधारणाओं से आपका सामना हो तो आप अपने अध्ययन कार्य को विराम दीजिए एवं अपनी रचनात्मकता का उपयोग प्रश्न का परिणाम निकालने या प्रतिरूप को समझने में कीजिए।

आपको ज्ञात होगा कि इस पाठ्यपुस्तक में अध्यायों के अंर्तगत कुछ प्रश्नों के साथ उनके उत्तर भी दिए गए हैं। उनके उत्तर देखने से पूर्व प्रश्नों को स्वयं या समूह में हल करना या उन पर चर्चा करना, अधिगम के लिए सार्थक सिद्ध होगा।

ऐसा करने से आपका अनुभव गणित की पुस्तक को पढ़ने मे अत्यंत सहायक सिद्ध होगा!

अध्ययन करते समय जब भी पाठ्यपुस्तक में प्रश्न आपके सामने आएँगे तो आप ? और ? चिह्न देखेंगे। जो कि दर्शाता है कि यह विचार करने और समझने का समय है।

यह ? मुख्य प्रश्न को और यह ? उप-प्रश्न को दर्शाता है।

उल्लू के चिह्न एवं गणितीय अधिगम में कुछ महत्त्वपूर्ण प्रक्रियाओं का सुझाव देते हैं।

कभी-कभी आप शीर्षक 'आइए पता लगाएँ' के अंतर्गत एक ही स्थान पर कई प्रश्न एक साथ देखेंगे।

इस पुस्तक में कुछ प्रश्न

के अंतर्गत सम्मिलित हैं। ये प्रश्न आपको आपके सहपाठियों के साथ चर्चा करने एवं हल करने के लिए दिए गए हैं।

अंतत: पाठ सामग्री को रोचक बनाने हेतु कुछ प्रश्न

के अंतर्गत सम्मिलित किए गए हैं। इन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए अधिक रचनात्मक सोच की आवश्यकता है। अत: इनका उत्तर देना आपके लिए अत्यंत रोचक होगा।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

NOT TO BE REPUBLISHED

विषय-सूची

आमुख *iii*

पुस्तक के विषय में *v*

शिक्षक के लिए शब्द *xiii*

विद्यार्थियों के लिए शब्द *xvii*

अध्याय 1
वर्ग और घन 1

अध्याय 2
घातों का खेल 19

अध्याय 3
संख्याओं की कहानी 48

अध्याय 4
चतुर्भुज 82

अध्याय 5
संख्याओं का खेल 112

अध्याय 6
जितना बाँटेंगे उतना बढ़ेगा 136

अध्याय 7
समानुपातिक तर्कण-1 159

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता और अखंडता**] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोक**तंत्रात्मक** गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीस**वां संशोधन**) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर **प्रतिस्थापित**।

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

1 वर्ग और घन

0875CH01

रानी रत्नामंजुरी ने एक इच्छापत्र (वसीयतनामा) लिखा था जिसमें उनके रत्नों के विवरण के साथ-साथ एक पहेली भी सम्मिलित थी। इच्छापत्र पढ़ने के समय रानी के पुत्र खोईसनाम और उनके 99 संबंधियों को आमंत्रित किया गया। रानी अपने सभी रत्न अपने पुत्र को देना चाहती थी परंतु रानी को ज्ञात था कि यदि मैंने ऐसा किया तो मेरे सभी 99 संबंधी मेरे पुत्र को सदैव कष्ट देते रहेंगे। रानी जानती थी कि उसने अपने पुत्र को वे सभी बातें सिखा दी हैं जो उसे इच्छापत्र में दी गई पहेली को हल करने में आवश्यक होंगी। रानी ने अपने इच्छापत्र में जो लिखा वह इस प्रकार है—

"मैंने एक पहेली बनाई है। यदि आप सभी 100 व्यक्ति इसे एक साथ हल कर लेते हैं तो रत्नों को सभी समान रूप से बाँट लेंगे। आप में से यदि कोई भी व्यक्ति इसे सबसे पहले हल कर लेता है तो वह सभी रत्नों का उत्तराधिकारी होगा। आप सभी को शुभकामनाएँ!"

खोईसनाम एवं उसके 99 संबंधियों को मंत्री एक गुप्त कक्ष में ले गए जिसमें 100 लॉकर थे।

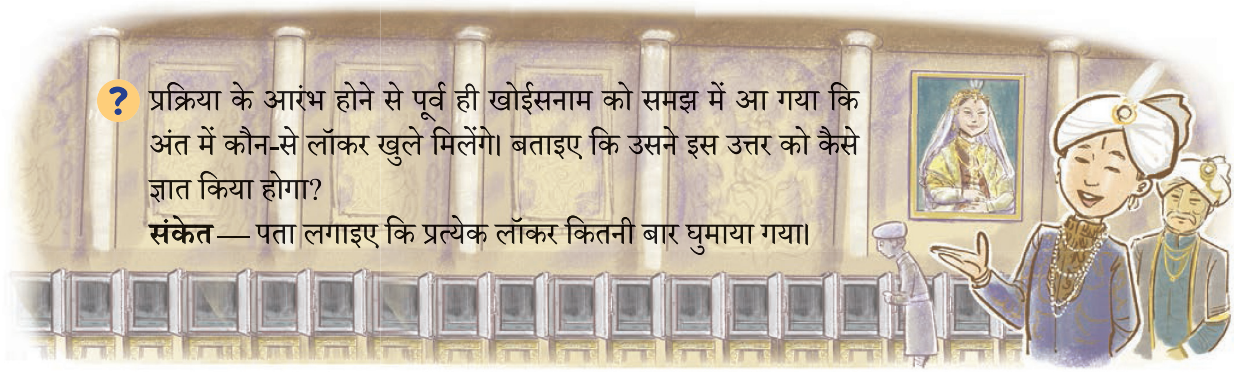
मंत्री ने पहेली की व्याख्या इस प्रकार की—

"प्रत्येक व्यक्ति को 1 से 100 तक की संख्याओं में से एक संख्या दी जाती है।"

- संख्या 1 वाला व्यक्ति प्रत्येक लॉकर को खोलता है।
- संख्या 2 वाला व्यक्ति प्रत्येक दूसरे लॉकर (दूसरा, चौथा, छठवाँ) को घुमाता है (अर्थात यदि लॉकर खुला है तो उसे बंद कर देता है और यदि लॉकर बंद है तो उसे खोल देता है)।
- संख्या 3 वाला व्यक्ति प्रत्येक तीसरे लॉकर (तीसरा, छठवाँ, नौवाँ…) को घुमाता है।
- संख्या 4 वाला व्यक्ति प्रत्येक चौथे लॉकर को घुमाता है (चौथा, आठवाँ, बारहवाँ…)

यह प्रक्रिया तब तक निरंतर चलती रहेगी जब तक सभी 100 व्यक्तियों की बारी नहीं आ जाती है।

अंत में कुछ ही लॉकर खुले रह जाते हैं जिन पर अंकित संख्या रत्नों के विषय में गुप्त संकेत (कोड) बताती है।"



? प्रक्रिया के आरंभ होने से पूर्व ही खोईसनाम को समझ में आ गया कि अंत में कौन-से लॉकर खुले मिलेंगे। बताइए कि उसने इस उत्तर को कैसे ज्ञात किया होगा?

संकेत— पता लगाइए कि प्रत्येक लॉकर कितनी बार घुमाया गया।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

यदि एक लॉकर को विषम संख्या में घुमाया (खोला या बंद) जाए तो वह खुल जाएगा। अन्यथा वह बंद रहेगा। एक लॉकर को जितनी बार घुमाया गया है वह उस लॉकर संख्या के गुणनखंडों की संख्या के समान होता है। उदाहरण के लिए लॉकर संख्या 6 के लिए संख्या 1 वाला व्यक्ति इसे खोलता है, संख्या 2 वाला व्यक्ति इसे बंद करता है, संख्या 3 वाला व्यक्ति इसे खोलता है और संख्या 6 वाला व्यक्ति इसे बंद करता है। संख्याएँ 1, 2, 3 और 6 यह सभी 6 के गुणनखंड हैं। यदि गुणनखंडों की संख्या सम है तो लॉकर सम संख्या में घुमाया जाएगा और अंत में यह बंद रहेगा।

संख्या 6 के लिए —
1×6
2×3
1, 2, 3 और 6 गुणनखंड हैं।

ध्यान दीजिए कि किसी भी संख्या के प्रत्येक गुणनखंड का एक 'सह-गुणनखंड' है जिन्हें परस्पर गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। यहाँ संख्या 6 के लिए 1 और 6 सह-गुणनखंडों का एक युग्म बनाते हैं। इसके साथ ही 2 और 3 इसी संख्या का एक अन्य सह-गुणनखंड युग्म बनाते हैं।

? क्या प्रत्येक संख्या के गुणनखंडों की संख्या सम संख्या होती है?

संख्या 1 के लिए —
1×1
एकमात्र गुणनखंड 1 है।

संख्या 4 के लिए —
1×4
2×2
गुणनखंड 1, 2 और 4 हैं।

संख्या 9 के लिए —
1×9
3×3
गुणनखंड 1, 3 और 9 हैं।

कुछ स्थितियों में हम देखते हैं कि गुणनखंड युग्म में संख्याएँ समान होती हैं, जैसे — 2×2

? क्या आप उपर्युक्त समझ का उपयोग करके अन्य संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं जिनके गुणनखंडों की संख्या विषम हो?

उदाहरण के लिए 36 का एक गुणनखंड युग्म 6×6 है, यहाँ दोनों संख्याएँ 6 हैं। क्या इस संख्या के गुणनखंडों की संख्या विषम है? यहाँ 6 के अतिरिक्त 36 के प्रत्येक गुणनखंड का सह-गुणनखंड भिन्न है तब हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि 36 के गुणनखंडों की संख्या विषम होगी। क्या यह कथन सत्य है? जाँच कीजिए।

अतः उपर्युक्त समझ के आधार पर 1, 4, 9, 16 इत्यादि संख्याओं के गुणनखंडों की संख्या विषम है —

$$1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \ldots$$

किसी संख्या को स्वयं से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को **वर्ग संख्या** या **वर्ग** कहते हैं। केवल वर्ग ही वे संख्याएँ होती हैं जिनके गुणनखंडों की संख्या विषम होती है क्योंकि उनमें से प्रत्येक का एक गुणनखंड ऐसा होता है जिसे स्वयं से गुणा करने पर वह संख्या प्राप्त होती है। अत: प्रत्येक लॉकर जिसकी संख्या एक वर्ग है वह खुला रहेगा।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? उन लॉकर की संख्याएँ लिखिए जो खुले रहते हैं।

खोईसनाम अविलंब इन 10 लॉकर से शब्द संकेत एकत्र करता है और इन्हें पढ़ता है, "गुप्त संकेत (passcode) में पहले पाँच लॉकर की संख्याएँ सम्मिलित हैं जिन्हें ठीक दो बार घुमाया गया था।"

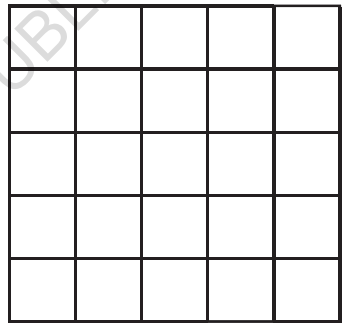
? ये पाँच लॉकर कौन-से हैं?

जिन लॉकरों को दो बार घुमाया गया है वे अभाज्य संख्याओं वाले लॉकर हैं क्योंकि प्रत्येक अभाज्य संख्या के दो गुणनखंड 1 और वह संख्या स्वयं होते हैं। अत: गुप्त संकेत (कोड) 2-3-5-7-11 है।

1.1 वर्ग संख्याएँ

1, 4, 9, 16, … जैसी संख्याओं को वर्ग क्यों कहा जाता है? हम जानते हैं कि एक वर्ग (वर्ग का क्षेत्रफल) में इकाई वर्गों की संख्या उसकी भुजाओं के गुणनफल के समान होती है। नीचे दी गई तालिका विभिन्न भुजाओं वाले वर्गों के क्षेत्रफल को दर्शाती है।

भुजा की लंबाई (इकाइयों में)	क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में)
1	$1 \times 1 = 1$ वर्ग इकाई
2	$2 \times 2 = 4$ वर्ग इकाई
3	$3 \times 3 = 9$ वर्ग इकाई
4	$4 \times 4 = 16$ वर्ग इकाई
5	$5 \times 5 = 25$ वर्ग इकाई
10	$10 \times 10 = 100$ वर्ग इकाई



© KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

हम वर्गों के लिए निम्नलिखित संकेत पद्धति का उपयोग करते हैं।

$$1 \times 1 = 1^2 = 1$$
$$2 \times 2 = 2^2 = 4$$
$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$
$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$
$$5 \times 5 = 5^2 = 25$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$

सामान्यत: किसी भी संख्या n के लिए हम $n \times n = n^2$ लिखते हैं जिसे 'n का वर्ग' पढ़ा जाता है।

क्या हम $\frac{3}{5}$ या 2.5 इकाई भुजा वाला वर्ग बना सकते हैं?

हाँ, उनका क्षेत्रफल वर्ग इकाइयों में $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{25}\right)$

और $(2.5)^2 = (2.5) \times (2.5) = 6.25$ होगा।

प्राकृत संख्याओं के वर्गों को **पूर्ण वर्ग** कहते हैं। उदाहरण के लिए 1, 4, 9, 16, 25, … सभी पूर्ण वर्ग हैं।

पूर्ण वर्गों के प्रतिरूप (पैटर्न) और गुण

प्रथम 30 प्राकृत संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए और उन्हें निम्न तालिका में अंकित कीजिए।

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 =$	$22^2 =$
$3^2 = 9$	$13^2 =$	
$4^2 = 16$	$14^2 =$	
$5^2 = 25$	$15^2 =$	
$6^2 =$	$16^2 =$	
$7^2 =$	$17^2 =$	
$8^2 =$	$18^2 =$	
$9^2 =$	$19^2 =$	
$10^2 =$	$20^2 =$	

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आपने उपर्युक्त तालिका में किन प्रतिरूपों का अवलोकन किया? अपने अवलोकनों को अपने सहपाठियों के साथ साझा कीजिए एवं अनुमान लगाइए।

गणित चर्चा

उर्पयुक्त तालिका में दिए गए वर्गों का अध्ययन कीजिए। इन वर्ग संख्याओं के इकाई के अंक क्या हैं? ये सभी संख्याएँ 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती हैं। इनमें से कोई भी संख्या 2, 3, 7 या 8 पर समाप्त नहीं होती है।

? यदि कोई संख्या 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती है तो क्या वह सदैव एक वर्ग संख्या होगी।

गणित चर्चा

16 और 36 दोनों वर्ग संख्याएँ हैं जिनमें इकाई का अंक 6 है। यद्यपि 26 का भी इकाई अंक 6 है परंतु यह एक वर्ग नहीं है। अत: हम केवल इकाई के अंक को देखकर यह निर्धारित नहीं कर सकते हैं कि कोई संख्या वर्ग है या नहीं। परंतु इकाई का अंक हमें यह बता सकता है कि कोई संख्या कब वर्ग नहीं होगी। यदि कोई संख्या 2, 3, 7 या 8 पर समाप्त होती है तो हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि वह एक वर्ग नहीं है।

? ऐसी 5 संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई अंक को देखकर आप यह निर्धारित कर सकें कि वे वर्ग नहीं हैं।

वर्ग 1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2 और 29^2 इन सभी संख्याओं का इकाई अंक 1 है। अब आप ऐसे अगले दो वर्ग और लिखिए। ध्यान दीजिए यदि किसी संख्या का इकाई अंक 1 या 9 है तो उसके वर्ग का इकाई अंक 1 होता है।

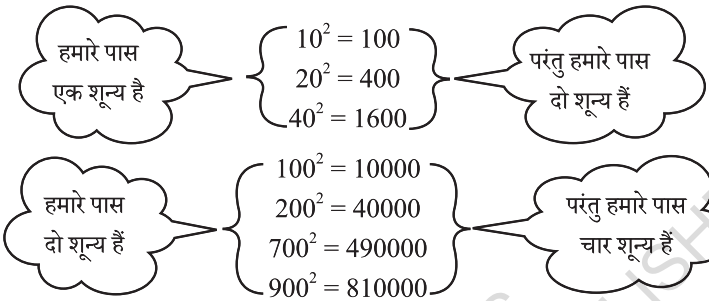
? आइए, 6 पर समाप्त होने वाली वर्ग संख्याओं पर विचार करें — $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, $196 = 14^2$, $256 = 16^2$, $576 = 24^2$ और $676 = 26^2$

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याओं में इकाई का अंक 6 है?

(i) 38^2 (ii) 34^2 (iii) 46^2 (iv) 56^2 (v) 74^2 (vi) 82^2

? आपके द्वारा पूरित तालिका से संख्याओं और उनके वर्गों का अवलोकन करके ऐसे और अधिक प्रतिरूप खोजिए।

निम्नलिखित संख्याओं और उनके वर्गों पर विचार कीजिए।



? यदि किसी संख्या के अंत में 3 शून्य हैं तो उसके वर्ग के अंत में कितने शून्य होंगे?

? आपने किसी संख्या के अंत में शून्यों की संख्या और इसके वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या के विषय में क्या अवलोकन किया? क्या ऐसा सदैव होता रहेगा? क्या हम कह सकते हैं कि वर्गों के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम संख्या ही हो सकती है?

? किसी संख्या और उसके वर्ग की अनुरूपता के विषय में आपके क्या विचार हैं?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

पूर्ण वर्ग और विषम संख्याएँ

आइए, क्रमागत वर्गों के मध्य अंतर देखें। आपने क्या अवलोकन किया?

$4 - 1 = \mathbf{3}$ $9 - 4 = \mathbf{5}$ $16 - 9 = \mathbf{7}$ $25 - 16 = \mathbf{9}$

ध्यान दीजिए कि क्या यह प्रतिरूप अगली कुछ वर्ग संख्याओं तक बना रहता है?

इस प्रतिरूप से हम देखते हैं कि 1 से आरंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ने पर क्रमागत वर्ग संख्याएँ प्राप्त होती हैं जैसा कि नीचे दर्शाया गया है।

$1 = \mathbf{1}$

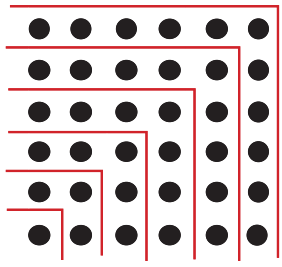
$1 + 3 = \mathbf{4}$

$1 + 3 + 5 = \mathbf{9}$

$1 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{16}$

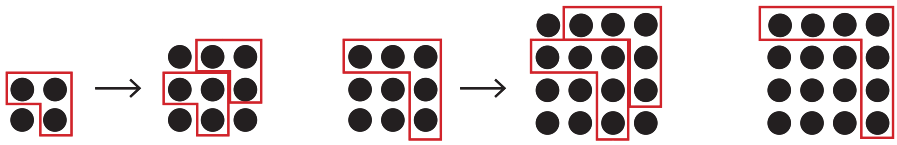
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \mathbf{36}$



क्या आपको कक्षा 6 में पढ़ा गया यह प्रतिरूप स्मरण है?

नीचे दिया गया चित्र स्पष्ट करता है कि प्रत्येक व्युत्क्रमित (उल्टा हुआ) अगली विषम संख्या क्यों देता है—



हम देखते हैं कि पहली n विषम संख्याओं का योग n^2 है। वैकल्पिक रूप से प्रत्येक वर्ग 1 से आरंभ होने वाली क्रमिक विषम संख्याओं का योग होता है।

गणित में कभी-कभी तर्क और युक्तियाँ किसी शब्द के बिना भी प्रस्तुत की जा सकती हैं। दृश्य प्रमाण स्वयं में पूर्ण हो सकते हैं।

इसके अतिरिक्त हम विषम संख्याओं को क्रमिक रूप से घटाकर यह ज्ञात कर सकते हैं कि कोई संख्या पूर्ण वर्ग है या नहीं। संख्या 25 पर विचार कीजिए इसमें से क्रमिक रूप से 1,3,5… तब तक घटाइए जब तक कि आपको 0 न प्राप्त हो जाए या वह उससे आगे न निकल जाए।

$25 - 1 = 24$ $24 - 3 = 21$ $21 - 5 = 16$ $16 - 7 = 9$ $9 - 9 = 0$

इसका अर्थ है कि $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ है, साथ ही यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है। चूँकि हमने पहली पाँच विषम संख्याओं को घटा दिया है अत: $25 = 5^2$ होगा।

? उपर्युक्त प्रतिरूप का उपयोग करके 36^2 ज्ञात कीजिए जबकि $35^2 = 1225$ है।

प्रश्न के अनुसार हम जानते हैं कि 1225 पहली 35 विषम संख्याओं का योग है। 36^2 ज्ञात करने के लिए हमें 1225 में 36 वीं विषम संख्या को जोड़ना होगा।

? हम 36वीं विषम संख्या कैसे ज्ञात करेंगे?

पहली विषम संख्या 1 है दूसरी विषम संख्या 3 है तीसरी विषम संख्या 5 है…, छठवीं विषम संख्या 11 है और इसी प्रकार आगे भी।

? nवीं विषम संख्या क्या है?

nवीं विषम संख्या $2n-1$ है।

अत: 36वीं विषम संख्या 71 है।

1225 में 71 जोड़ने पर हमें 1296 प्राप्त होता है जो 36^2 है।

एक संख्या, जैसे — 38 पर विचार कीजिए जो वर्ग नहीं है और उसमें 1 से आरंभ करके लगातार विषम संख्याओं को घटाइए।

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

$38 - 1 = 37$ $37 - 3 = 34$ $34 - 5 = 29$ $29 - 7 = 22$ $22 - 9 = 13$
$13 - 11 = 2$ $2 - 13 = -11$

इससे ज्ञात होता है कि 38 को 1 से आरंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक प्राकृत संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होती है, यदि यह 1 से आरंभ होने वाली क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त न की जा सके। हम इस परिणाम का उपयोग यह ज्ञात करने हेतु कर सकते हैं कि क्या एक प्राकृत संख्या एक पूर्ण वर्ग है।

? ज्ञात कीजिए कि दो क्रमागत पूर्ण वर्गों के मध्य कितनी प्राकृत संख्याएँ आती हैं? क्या आपने किसी प्रतिरूप का अवलोकन किया?

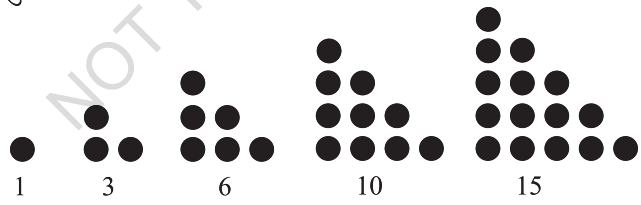
? 1 और 100 के मध्य कितनी वर्ग संख्याएँ हैं? 101 से 200 के मध्य कितनी वर्ग संख्याएँ हैं? आपने पूर्व में जिस वर्ग तालिका में संख्याएँ अंकित की थी उस तालिका का उपयोग करके नीचे दिए गए स्थानों में मान अंकित कीजिए और 100 के प्रत्येक तालिका के खंड में वर्गों की संख्या को सारणीबद्ध कीजिए। इसके साथ यह भी बताइए कि 1000 से छोटा सबसे बड़ा वर्ग कौन-सा है?

1 –100	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500
501 – 600	601 – 700	701 – 800	801 – 900	901 – 1000

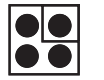
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पूर्ण वर्ग और त्रिभुजाकार संख्याएँ

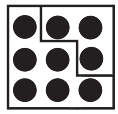
क्या आपको त्रिभुजाकार संख्याएँ स्मरण हैं?



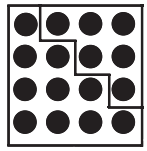
? क्या आप त्रिभुजाकार संख्याओं और वर्ग संख्याओं में कोई संबंध देख सकते हैं? दर्शाए गए प्रतिरूप को आगे बढ़ाइए और अगले चरण को रेखांकित कीजिए।



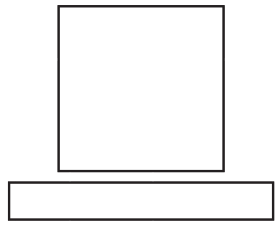
$1 + 3 = 4 = 2^2$



$3 + 6 = 9 = 3^2$



$6 + 10 = 16 = 4^2$



वर्गमूल

? एक वर्ग का क्षेत्रफल 49 वर्ग सेंटीमीटर है। बताइए इसकी एक भुजा की लंबाई क्या है?

हमें ज्ञात है $7 \times 7 = 49$ या $7^2 = 49$ है।

अत: 49 वर्ग सेंटीमीटर क्षेत्रफल वाले वर्ग की एक भुजा 7 सेंटीमीटर है।

हम कहते हैं कि 49 का **वर्गमूल** 7 है।

सामान्यत: यदि $y = x^2$ तो y का **वर्गमूल** x है।

? 64 का वर्गमूल क्या है?

हमें ज्ञात है कि $8 \times 8 = 64$ होता है। अत: 64 का वर्गमूल 8 है। -8×-8 के विषय में आप क्या कहेंगे?

$$8^2 = 64 \text{ और } (-8)^2 = 64$$

अत: 64 के वर्गमूल + 8 और – 8 हैं।

प्रत्येक पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल दो पूर्णांक संख्याएँ होती हैं। इनमें एक धनात्मक संख्या तथा दूसरी ऋणात्मक संख्या होती है। किसी संख्या का वर्गमूल $\sqrt{\ }$ चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है। इसलिए $\sqrt{64} = \pm 8$ और $\sqrt{100} = \pm 10$ होता है।

ध्यान दीजिए कि $\sqrt{8^2} = \pm 8$ और $\sqrt{10^2} = \pm 10$ होंगे एवं व्यापक रूप से $\sqrt{n^2} = \pm n$ होगा।

इस अध्याय में हम केवल धनात्मक वर्गमूल पर विचार करेंगे।

? यदि 327 या 576 जैसी कोई संख्या दी गई हो हम कैसे ज्ञात करेंगे कि यह एक पूर्ण वर्ग है? यदि यह एक पूर्ण वर्ग है तो हम इसका वर्गमूल किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं?

गणित चर्चा

हमें ज्ञात है कि पूर्ण वर्ग संख्याएँ 1, 4, 9, 6, 5 या शून्य के युग्मों पर समाप्त होती हैं परंतु यह निश्चित नहीं है कि यदि कोई इस गुण को संतुष्ट करे तो वह वर्ग ही हो।

हम स्पष्ट रूप से कह सकते हैं कि 327 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। यद्यपि हम निश्चित रूप से नहीं कह सकते कि 576 एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

1. हम सभी पूर्ण वर्ग संख्याओं को क्रम से सूचीबद्ध कर सकते हैं और ज्ञात कर सकते हैं कि 576 इनमें है या नहीं। हम जानते हैं कि $20^2 = 400$ हम 21, 22, 23, ... आदि के वर्ग ज्ञात कर सकते हैं और यह तब तक करते रहेंगे जब तक कि 576 या उससे बड़ी संख्या प्राप्त नहीं हो जाती है।

   $20^2 = 400 \quad 21^2 = 441 \quad 22^2 = 484 \quad 23^2 = 529 \quad 24^2 = 576$

   यद्यपि यह प्रक्रिया बड़ी संख्याओं हेतु उपयुक्त नहीं है।

2. स्मरण कीजिए प्रत्येक वर्ग संख्या को 1 से आरंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में दर्शाया जा सकता है।

   $\sqrt{81}$ पर विचार कीजिए।

$81 - 1 = 80 \quad 80 - 3 = 77 \quad 77 - 5 = 72 \quad 72 - 7 = 65 \quad 65 - 9 = 56$

$56 - 11 = 45 \quad 45 - 13 = 32 \quad 32 - 15 = 17 \quad 17 - 17 = 0$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

81 में से हमने 1 से आरंभ करके क्रमागत विषम संख्याएँ उत्तरोत्तर रूप से घटाईं जब तक कि 9वें चरण में शेषफल 0 नहीं हो गया। अत: $\sqrt{81} = 9$ है।

क्या हम इस विधि के माध्यम से 729 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, परंतु इसमें अधिक समय व्यतीत होगा।

3. हम जानते हैं कि किसी एक पूर्णांक को स्वयं से गुणा करके एक पूर्ण वर्ग प्राप्त किया जा सकता है। क्या किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन उसके पूर्ण वर्ग के निर्धारण में हमारी सहायता करेगा?

हाँ, यदि हम किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडों को दो समान भागों में बाँट देते हैं तो किसी भी भाग के अभाज्य गुणनखंडों की गुणा संख्या का वर्गमूल दर्शाती है।

? क्या 324 एक पूर्ण वर्ग है?

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

इन्हें इस प्रकार समूहों में बाँटा जा सकता है—

$$324 = (2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3)$$

$$= (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2$$

हम अभाज्य गुणनखंडों को युग्मों के रूप में इस प्रकार से भी लिख सकते हैं—

$$324 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$$

जो यह दर्शाता है कि 324 एक पूर्ण वर्ग है।

$$324 = (2 \times 3 \times 3)^2 = 18^2$$

अत: $18^2 = 324$

इसलिए $\sqrt{324} = 18$

? क्या 156 एक पूर्ण वर्ग है?

156 का अभाज्य गुणनखंडन $2 \times 2 \times 3 \times 13$ है।

हम इन गुणनखंडों के युग्म नहीं बना सकते हैं।

इसलिए 156 एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

? अभाज्य गुणनखंडन का उपयोग करके ज्ञात कीजिए कि 1156 और 2800 पूर्ण वर्ग है या नहीं।

हम निकटतम ज्ञात पूर्ण वर्गों को देखकर अंतराल को सीमित करके बड़े पूर्ण वर्गों के वर्गमूल का अनुमान लगा सकते हैं।

उदाहरण के लिए $\sqrt{1936}$ ज्ञात करने हेतु हम निम्न प्रकार से तर्क कर सकते हैं—

(i) 1936, 1600 (40) और 2500 (50) के मध्य है इसलिए $40 < \sqrt{1936} < 50$

(ii) 1936 का अंतिम अंक 6 है। अत: वर्गमूल का अंतिम अंक 4 या 6 होना चाहिए। यह 44 या 46 भी हो सकता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) यदि हमें 45^2 की गणना करना है तो हम 1936 के लिए 40–50 को आधे अंतराल, 40–45 या 45–50 से तुलना करके ज्ञात कर सकते हैं।
हम 45^2 को $(40 + 5)\ (40 + 5) = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

(iv) $2025 > 1936$ है। अत: $40 < \sqrt{1936} < 45$ है।

(v) उपर्युक्त तर्क (ii) से हम अनुमान लगा सकते हैं और जाँच कर सकते हैं कि $\sqrt{1936} = 44$ है।

निम्नलिखित स्थितियों पर विचार कीजिए।

अरिबम और बिजॉय एक खेल खेलते हैं। उनमें से एक संख्या बोलता है और दूसरा उसका वर्गमूल बताता है। अरिबम आरंभ करता है और वह 25 कहता है एवं बिजॉय 5 बोलकर तुरंत उत्तर देता है। इसके पश्चात बिजॉय 81 कहता है और अरिबम 9 बोलकर उत्तर देता है। यह खेल तब तक चलता रहता है जब तक अरिबम 250 नहीं कह देता। बिजॉय उत्तर नहीं दे पाता क्योंकि 250 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। अरिबम, बिजॉय से पूछता है कि वह ऐसी संख्या भी बता सकता है जो 250 के वर्गमूल के निकटतम हो।

इसके लिए बिजॉय को 250 के वर्गमूल का अनुमान लगाना होगा।

हम जानते हैं कि $100 < 250 < 400$ तथा $\sqrt{100} = 10$ और $\sqrt{400} = 20$

अत: $10 < \sqrt{250} < 20$ है।

परंतु अभी भी हम उस संख्या के समीप नहीं हैं जिसका वर्ग 250 है।

हम जानते हैं कि $15^2 = 225$ और $16^2 = 256$ होता है।

अत: $15 < \sqrt{250} < 16$ है। चूँकि 256, 225 की तुलना में 250 के अधिक निकट है अत: $\sqrt{250}$ लगभग 16 है। हम यह भी जानते हैं कि यह 16 से कम है।

यहाँ एक और समस्या है जिसमें वर्गमूल का अनुमान लगाना है।

अखिल के पास 125 वर्ग सेंटीमीटर क्षेत्रफल वाला एक वस्त्र है। वह जानना चाहता है कि क्या वह 15 सेंटीमीटर भुजा वाला एक वर्गाकार रुमाल काट सकता है। यदि नहीं तो वह इस टुकड़े से अधिकतम कितनी लंबी पूर्णांक भुजा वाला वर्गाकार रुमाल काट सकता है।

125 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। निकटतम पूर्ण वर्ग $11^2 = 121$ और $12^2 = 144$ हैं। अत: हम कह सकते हैं कि इस कपड़े के टुकड़े से काटे जा सकने वाले पूर्णांक भुजा वाले सबसे बड़े वर्गाकार रुमाल की भुजा 11 सेंटीमीटर है।

? आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं?
   (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089
2. $64^2, 108^2, 292^2, 36^2$ में से किसका इकाई अंक 4 है?
3. यदि $125^2 = 15625$ तो 126^2 का मान क्या है?
   (i) $15625 + 126$ (ii) $15625 + 26^2$ (iii) $15625 + 253$
   (iv) $15625 + 251$ (v) $15625 + 51^2$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

4. 441 वर्ग मीटर क्षेत्रफल वाले वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
5. वह छोटी से छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 और 10 से विभाजित होती हो।
6. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 9408 से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग प्राप्त हो। प्राप्त गुणनफल का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।
7. निम्नांकित संख्याओं के वर्गों के मध्य कितनी संख्याएँ हैं?

   (i) 16 और 17 (ii) 99 और 100
8. निम्नलिखित प्रतिरूप में विलुप्त संख्या अंकित कीजिए।

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$

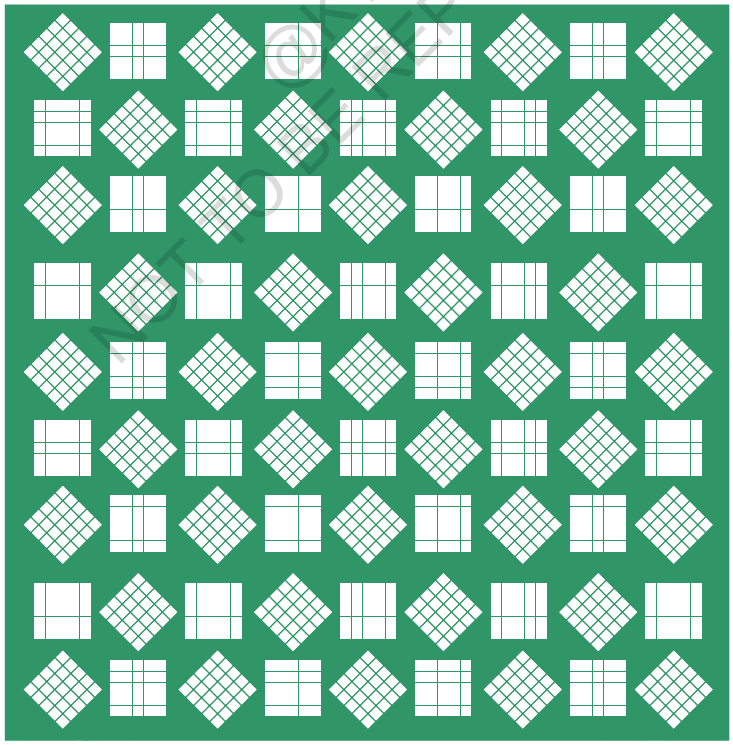
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

$$4^2 + 5^2 + 20^2 = (___)^2$$

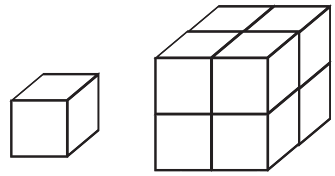
$$9^2 + 10^2 + (___)^2 = (___)^2$$

9. निम्नांकित चित्र में छोटे वर्गों की संख्या कितनी हैं? छोटे वर्गों की संख्या का अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

1.2 घन संख्याएँ

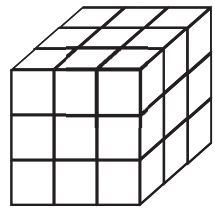


आप ज्यामिति विषय से संबंधित **घन** शब्द से पूर्व परिचित हैं। घन एक ठोस आकृति होती है जिसकी सभी भुजाएँ समकोण पर मिलती हैं और एक समान होती हैं। 1 सेंटीमीटर भुजा वाले कितने घनों से 2 सेंटीमीटर भुजा वाला एक घन बनता है?

? 1 सेंटीमीटर भुजा वाले कितने घनों से 3 सेंटीमीटर भुजा वाला एक घन बनता है?

आइए, संख्या 1, 8, 27, … पर विचार करते हैं।

ये संख्याएँ **पूर्ण घन** कहलाती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इन्हें ये नाम क्यों दिया गया? इनमें से प्रत्येक संख्या किसी संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करके प्राप्त की जाती है। हम देखते हैं कि

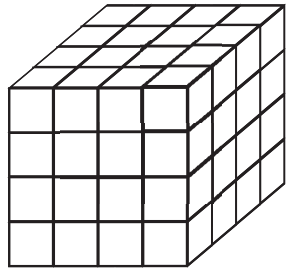


$$1 = 1 \times 1 \times 1$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

? क्या 9 एक पूर्ण घन है?

हम देखते हैं कि $2 \times 2 \times 2 = 8$ और $3 \times 3 \times 3 = 27$ होता है। इससे ज्ञात होता है कि 9 एक पूर्ण घन नहीं है एवं न ही 10 से 26 तक कोई भी संख्या पूर्ण घन है।

? क्या आप 4 इकाई की भुजा वाले घन में इकाई घनों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?



इसमें 64 घन इकाई हैं! यदि आप ध्यानपूर्वक देखें तो इस घन की प्रत्येक परत में 4×4 इकाई घन हैं। प्रत्येक वर्गाकार परत में 16 इकाई घन (4×4) हैं और ऐसी 4 परतें हैं।

अत: इकाई घनों की कुल संख्या $4 \times 4 \times 4 = 64$ है।

इसी प्रकार $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, 125 घन हैं।

सामान्यत: किसी भी संख्या n के लिए हम घन $n \times n \times n$ को n^3 लिखते हैं।

? नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए।

$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$
$2^3 = 8$	$12^3 =$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$
$5^3 = 125$	$15^3 =$
$6^3 =$	$16^3 =$

गणित चर्चा

© PSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

$7^3 =$	$17^3 = 4913$
$8^3 =$	$18^3 = 5832$
$9^3 =$	$19^3 = 6859$
$10^3 =$	$20^3 =$

? उर्पयुक्त तालिका में आप क्या प्रतिरूप देखते हैं?

? हम जानते हैं कि वर्गों के लिए 0, 1, 4, 5, 6, 9 ही संभावित इकाई अंक होते हैं। बताइए कि पूर्ण घनों के संभावित इकाई अंक क्या होंगे?

? क्या आप वर्गों के समान 1 अंक, 2 अंक और 3 अंक वाले पूर्ण घनों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं? आप क्या अवलोकन करते हैं?

? क्या एक पूर्ण घन के अंत में दो शून्य (00) हो सकते हैं? व्याख्या कीजिए।

जिस प्रकार हम भिन्नों या दशमलवों $\left(\frac{4}{6}\right)^2$, $(13.08)^2$ और $(-6)^2$ के वर्ग कर सकते हैं उसी प्रकार हम $\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $(13.08)^3$,और $(-6)^3$ जैसी संख्याओं के घनों की गणना भी कर सकते हैं।

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) \times \left(\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{64}{216}\right)$$

$$(13.08)^3 = 13.08 \times 13.08 \times 13.08 = 2237.810112$$

$$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$$

टैक्सीकैब संख्याएँ

एक बार जब श्रीनिवास रामानुजन कैंब्रिज विश्वविद्यालय में जी.एच. हार्डी के साथ कार्य कर रहे थे, उस समय हार्डी अस्वस्थ रामानुजन से मिलने चिकित्सालय आए थे। हार्डी 1729 संख्या वाली टैक्सी में सवार थे जिसके विषय में उन्होंने कहा कि 1729 'अत्यंत नीरस संख्या है' साथ ही आशंका प्रकट की कि कहीं यह कोई बुरा संकेत तो नहीं। रामानुजन ने अचानक उत्तर दिया, "नहीं, हार्डी यह एक बहुत ही रोचक तथा वह न्यूनतम प्राकृत संख्या है जिसे दो घनों के योग के रूप में दो भिन्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।"

$$1729 = 1^3 + 12^3$$
$$= 9^3 + 10^3$$

इस कहानी के परिणामस्वरूप 1729 को **हार्डी-रामानुजन** संख्या के रूप में जाना जाता है। तभी से ऐसी संख्याएँ जिन्हें दो घनों के योग के रूप में दो अलग-अलग प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है वह **टैक्सीकैब संख्याएँ** कहलाती हैं।

© IOT TO BE REPUBLISHED

? 1729 के पश्चात अगली दो टैक्सीकैब संख्याएँ 4104 और 13832 हैं। इनमें से प्रत्येक को दो धनात्मक घनों के योग के रूप में व्यक्त करने की दो विधियाँ से ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

रामानुजन को यह कैसे पता चला? रामानुजन को संख्याओं से बहुत लगाव था। वह जीवनपर्यंत संख्याओं के साथ खेलते रहे। कैंब्रिज में रामानुजन के समय में उनके सहकर्मी प्राय: संख्याओं में गहन प्रतिरूप देखने की उनकी क्षमता पर आश्चर्यचकित होते थे। परंतु यह अन्य व्यक्तियों को विवेकहीन लगता था। उनके सहयोगी जॉन लिटिलवुड ने एक बार कहा था, "प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक उनके अभिन्न मित्रों में से एक था।"

पूर्ण घन संख्याएँ और क्रमागत विषम संख्याएँ

घनों के साथ क्रमागत विषम संख्याओं की भी भूमिका होती है। निम्नलिखित प्रतिरूप को ध्यान से देखिए—

$$1 = 1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216 = 6^3$$

आगे बढ़ते हुए इस श्रेणी में हमें क्रमागत विषम संख्याओं का निम्नलिखित योग प्राप्त होता है—

$$91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109$$

? क्या आप गणना किए बिना ज्ञात कर सकते हैं कि उपर्युक्त का योगफल कितना है?

घनमूल

हम जानते हैं कि $8 = 2^3$ है।

हम 2 को 8 का घनमूल कहते हैं और इसे $2 = \sqrt[3]{8}$ से दर्शाते हैं।

सामान्यत: यदि $y = x^3$ तो y का घनमूल x होगा। इसे $x = \sqrt[3]{y}$ से दर्शाया जाता है।

अत: $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ है।

इसी प्रकार $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ और $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$ होगा। सामान्यत: $\sqrt[3]{n^3} = n$ होता है।

हम कैसे पता लगाएँ कि कोई संख्या घन है या नहीं? आइए, वर्गों के उदाहरण से प्रेरणा लेते हुए देखें कि क्या हम अभाज्य गुणनखडों का प्रयोग कर सकते हैं?

? आइए, देखें कि क्या 3375 एक पूर्ण घन है?

$$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$$

क्या गुणनखंडों को एक समान तीन समूहों में विभाजित किया जा सकता है? 3375 के लिए हम (3×5) के तीन समूह बना सकते हैं।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अत:

$$3375 = (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^3 = 15^3$$

दूसरी विधि के माध्यम से यह जाँचना है कि क्या गुणनखंडों को त्रिक (तीन) समूहों में बाँटा जा सकता है— $3375 = (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5) = 3^3 \times 5^3 = (15)^3$

इसका अर्थ है— $\sqrt[3]{3375} = 15$

? क्या 500 एक पूर्ण घन है?

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ है। अत: हम देखते हैं कि गुणनखंडों को एक समान तीन समूहों में विभाजित नहीं किया जा सकता है। अतः 500 एक पूर्ण घन नहीं है।

एक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन	इसके घन का अभाज्य गुणनखंडन
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

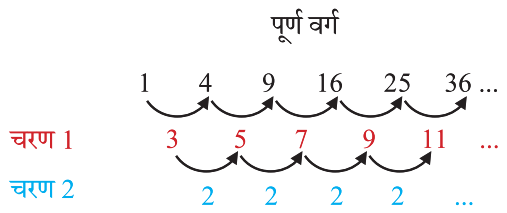
अवलोकन कीजिए कि किसी संख्या का प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड उसके घन के अभाज्य गुणनखंडों में तीन बार आता है।

? निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए।

(i) $\sqrt[3]{64}$ = (ii) $\sqrt[3]{512}$ = (iii) $\sqrt[3]{729}$ =

क्रमागत अंतर

हम जानते हैं कि क्रमागत पूर्ण वर्गों का अंतर हमें विषम संख्याओं का अनुक्रम प्रदान करता है। नीचे दी गई आकृति का अवलोकन कीजिए। इस आकृति में पूर्ण वर्गों के अनुक्रम में अंतर ज्ञात किया गया है। यहाँ दो चरण के पश्चात सभी अंतर एकसमान हैं।



? क्रमागत पूर्ण घनों के अंतर उस चरण तक ज्ञात कीजिए जब तक कि अंतर एकसमान न हो जाए।

पूर्ण घन

1 8 27 64 125 216 ...

1.3 इतिहास की एक झलक

पूर्ण वर्ग और पूर्ण घन की प्रथम सूची बेबिलोन निवासियों द्वारा सामान्य संवत् पूर्व 1700 में संकलित की गई थी। मिट्टी की पट्टिकाओं पर पाई जाने वाली इन सूचियों का उपयोग एक वर्गमूल और घनमूल को शीघ्रता से ज्ञात करने के लिए किया जाता था। इसमें भूमि मापन, वास्तुशिल्प अभिकल्पना (डिजाइन) तथा अन्य ज्यामितीय गणना की समस्याएँ आवश्यकतानुसार हल की जाती थी।

प्राचीन संस्कृत ग्रंथों में वर्ग शब्द का प्रयोग वर्गाकार आकृति या उसके क्षेत्रफल एवं वर्ग दोनों के लिए किया जाता था। इसी प्रकार घन शब्द का प्रयोग ठोस घन के साथ-साथ किसी संख्या के स्वयं से तीन बार गुणनफल के लिए भी किया जाता था। चतुर्थ घात को वर्ग-वर्ग कहा जाता था। ये शब्द भारत में कम से कम सामान्य संवत् तीसरी शताब्दी पूर्व से प्रयोग में लाए जाते थे।

आर्यभट्ट (सामान्य संवत् 499) के अनुसार

"चार एकसमान भुजाओं वाली एक वर्गाकार आकृति और उसके क्षेत्रफल को दर्शाने वाली संख्या को वर्ग कहते हैं। दो समान संख्याओं के गुणनफल को भी वर्ग कहते हैं।"

इस प्रकार वर्ग शब्द की उत्पत्ति वर्ग घात के लिए एक वर्गाकार आकृति के आलेखी निरूपण से हुई है।

गणितीय संक्रिया √ (वर्गमूल, घनमूल आदि) के लिए 'मूल' (पौधे की जड़) शब्द का प्रयोग क्यों किया जाता है?

यह इसलिए किया जाता है क्योंकि प्राचीन भारत में संस्कृत शब्द 'मूल' (जिसका अर्थ — पौधे की जड़, आधार, कारण उत्पत्ति आदि होता है) का प्रयोग वर्गमूल लेने की गणितीय संक्रिया के लिए किया जाता था।

संस्कृत में वर्गमूल के लिए वर्ग-मूल (आधार, कारण, उत्पत्ति) और घनमूल के लिए घन-मूल का प्रयोग किया जाता था। तत्पश्चात संस्कृत शब्द 'मूल' की गणितीय अवधारणा का अनुकरण अरबी और लैटिन में पौधे की जड़ के लिए प्रयुक्त उनके शब्दों क्रमश: जिघ्र और मूलांक (radix) के माध्यम से किया गया था। भारत में 'मूल' शब्द का प्रयोग कम से कम पहली शताब्दी सामान्य संवत् पूर्व से होता आ रहा है। एक अन्य प्रयुक्त शब्द पाद (पाद, आधार, कारण, उत्पत्ति) था। ब्रह्मगुप्त (628 सामान्य संवत्) के अनुसार, "किसी कृति (वर्ग) का पाद (मूल) वह है जिसका वह वर्ग होता है।"

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. 27000 और 10648 का घनमूल ज्ञात कीजिए।
2. 1323 को घन संख्या बनाने के लिए आप किस संख्या से गुणा करेंगे?
3. निम्न में से सत्य या असत्य बताइए। साथ ही अपने तर्क की व्याख्या कीजिए।
   (i) किसी विषम संख्या का घन सम होगा
   (ii) ऐसा कोई पूर्ण घन नहीं जो 8 पर समाप्त होता है।
   (iii) 2 अंकीय संख्या का घन 3 अंकीय संख्या हो सकता है।
   (iv) 2 अंकों वाली संख्या के घन में सात या अधिक अंक हो सकते हैं।
   (v) घन संख्याओं के गुणनखंडों की संख्या विषम होती है।
4. आपको बताया जाता है कि 1331 एक पूर्ण घन संख्या है। इस संख्या का गुणनखंड किए बिना क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि इसका घनमूल क्या है? इसी प्रकार 4913, 12167 और 32768 के घनमूलों का अनुमान लगाइए।
5. निम्नलिखित में से सबसे बड़ा कौन है? अपने तर्क की व्याख्या कीजिए।
   (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- किसी संख्या को स्वयं से गुणा करने पर प्राप्त संख्या को **वर्ग संख्या** कहते हैं। प्राकृत संख्याओं के वर्गों को **पूर्ण वर्ग** कहते हैं।
- सभी पूर्ण वर्ग संख्याएँ 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती हैं। वर्गों के अंत में केवल सम संख्या में शून्य हो सकते हैं।
- **वर्गमूल** वर्ग की व्युत्क्रम संक्रिया है। प्रत्येक पूर्ण वर्ग के दो पूर्णांक वर्गमूल होते हैं। किसी संख्या का धनात्मक वर्गमूल $\sqrt{}$ चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है। उदाहरण के लिए $\sqrt{9} = 3$ है।
- किसी **संख्या** को स्वयं से तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या को **घन** कहते हैं। उदाहरण के लिए 1,8,27,... घन हैं।
- एक संख्या पूर्ण वर्ग होती है यदि उसके अभाज्य गुणनखंडों को दो समान समूहों में विभाजित किया जा सके।
- एक संख्या पूर्ण घन होती है यदि उसके अभाज्य गुणनखंड़ों को तीन समान समूहों में विभाजित किया जा सके।
- $\sqrt[3]{}$ का चिह्न घनमूल को दर्शाता है। उदाहरण के लिए $\sqrt[3]{27} = 3$ है।

पहेली का समय!

वर्गाकार युग्म!

दी गई संख्याओं को देखिए— 3 6 10 15 1

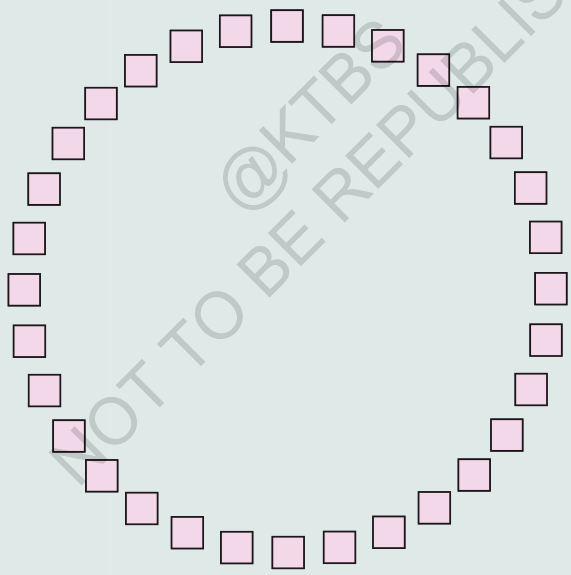
ये इस प्रकार व्यवस्थित की गई हैं कि संलग्न संख्याओं का युग्म जोड़ने पर एक वर्ग प्राप्त होता है।

$$3 + 6 = 9,\ 6 + 10 = 16,\ 10 + 15 = 25,\ 15 + 1 = 16$$

1 से 17 तक की संख्याओं को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित करने का प्रयास कीजिए कि प्रत्येक संलग्न संख्या युग्म जोड़ने पर एक वर्ग प्राप्त हो।

क्या आप इन संख्याओं को एक से अधिक प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं? यदि नहीं तो क्या आप इसकी व्याख्या कर सकते हैं?

क्या आप इसी प्रकार की व्यवस्था 1 से 32 तक (पुन: बिना पुनरावृत्ति) की संख्याओं से कर सकते हैं परंतु इस बार सभी संख्याएँ एक वृत्त पर व्यवस्थित करनी हैं?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2 घातों का खेल

0875CH02

2.1 घात के खेल का अनुभव

एक असंभव उपक्रम!

एक अधिकतम संभव आकार का कागज लीजिए। सर्वप्रथम इसे एक बार मोड़िए। इसे पुन: मोड़िए और इसे निरंतर मोड़ते रहिए।

? आप कागज को कितनी बार मोड़ सकते हैं?

एस्तु कहता है, " मैंने सुना है कि कागज को 7 बार से अधिक नहीं मोड़ा जा सकता।"

रॉक्सी कहती है, "क्या होगा यदि हम एक पतला कागज, जैसे— एक समाचार पत्र या टिशू पेपर का उपयोग करते हैं?"

इस प्रक्रिया को विभिन्न प्रकार के कागजों के साथ करके देखिए कि क्या होता है।

? आप कागज को जितनी बार मोड़ना चाहते हैं उतनी बार मोड़ सकते हैं। मान लीजिए आपने कागज को 30 बार मोड़ा। 30 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई क्या होगी? अनुमान लगाइए।

आइए, पता लगाएँ कि कागज को 46 बार मोड़ने के पश्चात उसकी मोटाई कितनी होगी। मान लीजिए कि कागज की मोटाई 0.001 सेंटीमीटर है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? निम्न तालिका में कागज को प्रत्येक बार मोड़ने के पश्चात उसकी मोटाई को सूचीबद्ध किया गया है। ध्यान से देखिए कि प्रत्येक मोड़ के पश्चात मोटाई दोगुनी हो जाती है।

मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई
1	0.002 cm	7	0.128 cm	13	8.192 cm
2	0.004 cm	8	0.256 cm	14	16.384 cm
3	0.008 cm	9	0.512 cm	15	32.768 cm
4	0.016 cm	10	1.024 cm	16	65.536 cm
5	0.032 cm	11	2.048 cm	17	≈ 131 cm
6	0.064 cm	12	4.096 cm		

(हम चिह्न '≈' का उपयोग 'लगभग समान' को दर्शाने के लिए करते हैं।)

10 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई अभी 1 सेंटीमीटर से अधिक अर्थात 1.024 सेंटीमीटर है। 17 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई लगभग 131 सेंटीमीटर अर्थात 4 फुट से थोड़ी-सी अधिक होगी।

? आपके विचारानुसार कागज को 30 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई क्या होनी चाहिए? इसे 45 बार मोड़ने के पश्चात मोटाई क्या होनी चाहिए? एक अनुमान लगाइए।

गणित चर्चा

? नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए।

मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई
18	≈ 262 cm	21		24	
19	≈ 524 cm	22		25	
20	≈ 10.4 m	23		26	

कागज को 26 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई लगभग 670 मीटर है। अतः आप समझ गए होंगे कि यहाँ कागज की मोटाई विश्व की सबसे ऊँची मीनार दुबई में स्थित 'बुर्ज खलीफा' (जिसकी ऊँचाई 830 मीटर है) से केवल 140 मीटर ही कम है।

मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई
27	≈ 1.3 km	29	
28		30	

30 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई लगभग 10.7 किलोमीटर के समान है। यह एक ऐसी प्रतिरूपी ऊँचाई है जिस पर हवाई जहाज उड़ते हैं। इसके साथ ही आप देखेंगे कि यहाँ कागज की मोटाई महासागरों में खोजा गया सबसे गहरा बिंदु मारियाना ट्रेंच (जिसकी गहराई 11 किलोमीटर है) से कुछ ही मीटर कम है।

मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई	मोड़	मोटाई
31		36		41	
32		37		42	
33		38		43	
34		39		44	
35		40		45	

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इस तथ्य को समझना अत्यधिक कठिन है कि कागज को मात्र 46 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई 7,00,000 किलोमीटर से अधिक होगी। यह एक **गुणनात्मक वृद्धि** की घात है। इसे **चरघातांकी वृद्धि** भी कहा जाता है। आइए, हम इस वृद्धि का विश्लेषण करें।

पूर्व में हम देख चुके हैं कि प्रत्येक मोड़ के पश्चात कागज की मोटाई दोगुनी हो जाती है।

4 बार मोड़ना	0.016 cm	9 बार मोड़ना	0.512 cm	4 बार मोड़ना	0.016 cm
5 बार मोड़ना	0.032 cm	10 बार मोड़ना	1.024 cm	6 बार मोड़ना	0.064 cm

दो बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई में हुए परिवर्तन पर ध्यान दीजिए। इसमें कितनी वृद्धि हुई है?

कागज को तीन बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई में 8 (= 2 × 2 × 2) गुना वृद्धि हो जाती है। यदि यह सत्य है तो इसकी जाँच कीजिए। सामान्यत: किसी कागज को 10 बार मोड़ने के पश्चात कागज की मोटाई में 1024 (= 2 की स्वयं से 10 बार) गुना की वृद्धि होती है जैसा कि नीचे तालिका में दर्शाया गया है।

मोड़	मोटाई	गुना वृद्धि
0 से 10	1.024 cm – 0.001 cm = 1.023 cm	1.024 cm ÷ 0.001 = 1024
10 से 20	10.485 m – 1.024 cm ≈ 10.474 m	10.485 m ÷ 1.024 cm = 1024
20 से 30	10.737 km – 10.485 m ≈ 10.726 km	10.737 km ÷ 10.485 m = 1024
30 से 40	10995 km – 10.737 km ≈ 10984.2 km	10995 km ÷ 10.737 km = 1024

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

2.2 चरघातांकी संकेतन और संक्रियाएँ

कागज की प्रारंभिक मोटाई 0.001 सेंटीमीटर थी।

कागज को 1 बार मोड़ने के पश्चात इसकी मोटाई 0.001 सेंटीमीटर × 2 = 0.002 सेंटीमीटर हो जाती है।

इसी कागज को 2 बार मोड़ने पर इसकी मोटाई—

0.001 सेंटीमीटर × 2 × 2 = 0.004 सेंटीमीटर या 0.001 सेंटीमीटर × 2^2 = 0.004 सेंटीमीटर (लघु रूप में) हो जाती है—

अब कागज को 3 बार मोड़ने के पश्चात इसकी मोटाई —

0.001 सेंटीमीटर × 2 × 2 × 2 या 0.001 सेंटीमीटर × 2^3 = 0.008 सेंटीमीटर हो जाती है।

जब कागज को 4 बार मोड़ा जाता है तो इसकी मोटाई 0.001 सेंटीमीटर × 2 × 2 × 2 × 2 या 0.001 सेंटीमीटर × 2^4 = 0.016 सेंटीमीटर हो जाती है।

कागज को 7 बार मोड़ने पर मोटाई के लिए व्यंजक 0.001 सेंटीमीटर × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 या 0.001 सेंटीमीटर × 2^7 = 0.128 सेंटीमीटर होगा।

अतः हम समझ चुके हैं कि वर्ग संख्याओं को n^2 से तथा घन संख्याओं को n^3 से निरूपित किया जा सकता है।

$n \times n = n^2$ (को n का वर्ग या n की घात 2 पढ़ा जाता है।)

$n \times n \times n = n^3$ (को n का घन या n की घात 3 पढ़ा जाता है।)

$n \times n \times n \times n = n^4$ (को n की घात 4 या n की चौथी घात पढ़ा जाता है।)

$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^7$ (को n की घात 7 या n की सातवीं घात पढ़ा जाता है।)

इसी प्रकार यह प्रक्रिया निरंतर चलती रहेगी।

सामान्यत: n को स्वयं से a बार गुणा करने को हम n^a लिखकर प्रदर्शित करते हैं।

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

5^4, 625 का घातांकीय रूप है। यहाँ संख्या 4 **घात** और संख्या 5 **आधार** है। 5^n के रूप में अंकित घातांकों को 5 की घातें कहा जाता है, जैसे — 5^1, 5^2, 5^3, 5^4 आदि।

5^4 को पढ़ा जाता है—
'5 की घात 4' या
'5 की चौथी घात'

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$$

पूर्व पृष्ठ पर अंकित 1024 का स्मरण कीजिए। वहाँ कागज को 10 बार मोड़ने के पश्चात मोटाई में 1024 गुना वृद्धि होती थी।

? बताइए कि कागज को 10 बार मोड़ने के पश्चात निम्नलिखित में कौन-सा व्यंजक कागज की मोटाई को व्यक्त करता है? प्रारंभिक मोटाई को अक्षर संख्या v द्वारा निरूपित किया गया है।

(i) $10v$ (ii) $10 + v$ (iii) $2 \times 10 \times v$

(iv) 2^{10} (v) $2^{10}v$ (vi) 10^2v

घातांकीय संकेतन के कुछ और उदाहरण निम्न हैं —

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

$(-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3 = -64$

इसी प्रकार

$a \times a \times a \times b \times b$ को a^3b^2 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का घन b का वर्ग के रूप में पढ़ा जाता है)। $a \times a \times b \times b \times b \times b$ को a^2b^4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का वर्ग b की घात 4 के रूप में पढ़ा जाता है)।

स्मरण रखिए कि $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$ जबकि $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ है।

? संख्या 32400 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए और अभाज्य गुणनखंडों को उनके चरघातांकी रूप में प्रदर्शित कीजिए।

$$32400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

इसका चरघातांकी रूप इस प्रकार है —

$$32400 = 2^4 \times 5^2 \times 3^4$$

2	32400
2	16200
2	8100
2	4050
5	2025
5	405
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

? $(-1)^5$ का मान क्या होगा? यह संख्या धनात्मक है या ऋणात्मक? $(-1)^{56}$ के विषय में आपका क्या विचार है?

0^2 एवं 0^5 का मान क्या है?
0^n का मान क्या है?

? क्या $(-2)^4 = 16$ होता है? सत्यापित कीजिए।

NOT TO BE REPUBLISHED @NCERT

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $y \times y$

   (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

   (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

2. नीचे दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडन कीजिए तथा इन्हें चरघातांकी रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

3. नीचे दिए गए प्रत्येक व्यंजकों का संख्यात्मक मान लिखिए।

   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^3$ (iii) 3×4^4

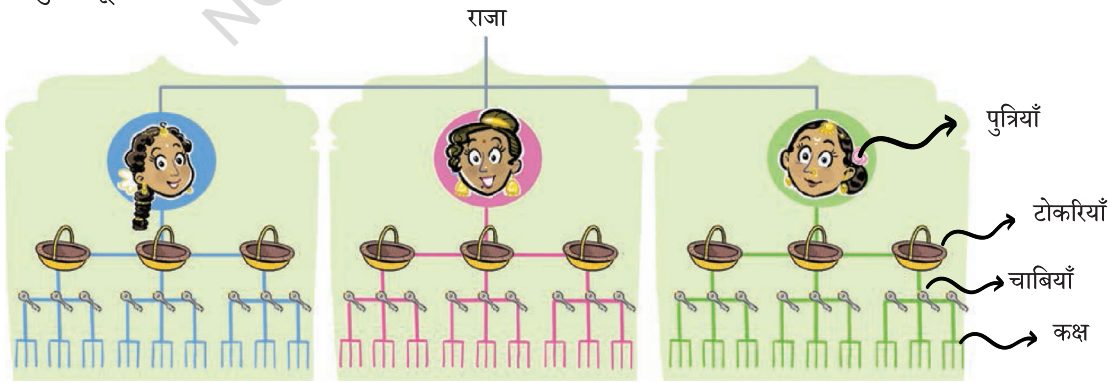
   (iv) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (v) $3^2 \times 10^4$ (vi) $(-2)^5 \times (-10)^6$

चमकते पत्थर...

आँखों में उत्सुकता लिए तीन पुत्रियाँ
राजसी पुरस्कार के रूप में मिली प्रत्येक को तीन टोकरियाँ
प्रत्येक टोकरी में थी चाँदी की तीन चाबियाँ
प्रत्येक पुत्री सरलता से खोलती है तीन बड़े कक्ष
प्रत्येक कक्ष में मेज हैं एक, दो, तीन
देखिए प्रत्येक पर तीन चमचमाते हुए गले के हार हैं।
प्रत्येक गले के हार में तीन उत्कृष्ट हीरे हैं।
क्या आप इन चमकीले रत्नों की गणना कर सकते हैं?
संकेत — टोकरियों और कक्षों की संख्या का पता लगाइए।

वहाँ कुल कितने कक्ष थे?

उपर्युक्त सूचना को निम्न चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है।



चित्र के अनुसार कक्षों की संख्या 3^4 है। इसकी गणना 3 को स्वयं से चार-बार गुणा करके की जा सकती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

$3 \times 3 = 9$
$9 \times 3 = 27$
$27 \times 3 = 81$
$81 \times 3 = 243$

? वहाँ कुल कितने हीरे थे? क्या हम उपर्युक्त गुणनफल का उपयोग करके केवल एक गुणन द्वारा यह ज्ञात कर सकते हैं?

हीरों की संख्या $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$ है।

हम लिख सकते हैं —

$$3^7 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$$

हमने 3^4 तक गणना की थी। 3^7 ज्ञात करने के लिए हम $3^4 (= 81)$ को 3^3 (=27) से गुणा कर सकते हैं।

$= 3^4 \times 3^3$
$= 81 \times 27 = 2187$

$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3^4} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3^3}$

? 3^7 को $3^2 \times 3^5$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। क्या आप इस प्रकार लिखने का कारण बता सकते हैं?

इसे सरलता से गुणनफल में बढ़ाया जा सकता है जहाँ घातांक के समान अक्षर संख्याएँ होती हैं।

? गुणनफल $p^4 \times p^6$ को चरघातांकी रूप में लिखिए।

$$p^4 \times p^6 = (p \times p \times p \times p) \times (p \times p \times p \times p \times p \times p) = p^{10}$$

हम इसे व्यापकीकृत कर सकते हैं —

$n^a \times n^b = n^{a+b}$ जहाँ a और b गणन संख्याएँ हैं।

? उपर्युक्त अवलोकन के आधार पर निम्नलिखित व्यंजकों की गणना कीजिए।

(i) 2^9 (ii) 5^7 (iii) 4^6

गणित चर्चा

4^6 को दो विधियों से ज्ञात किया जा सकता है।

$(4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^3 \times 4^3$ $= 64 \times 64$ $= 4096$ 4^3 का वर्ग है — $4^3 \times 4^3$ अर्थात $4^3 \times 4^3$ को $(4^3)^2$ के रूप में भी लिख सकते हैं।	$(4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$ $= 16 \times 16 \times 16$ $= 4096$ 4^2 का घन है — $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ अर्थात $4^2 \times 4^2 \times 4^2$ को $(4^2)^3$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

इसी प्रकार $7^4 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^2 \times 7^2 = (7^2)^2$ और

$2^{10} = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$
$= (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$
$= (2^2)^5$

© RTDS NOT TO BE REPUBLISHED

? क्या 2^{10} तथा $(2^5)^2$ एक समान हैं? आप इसे एक गुणनफल के रूप में लिखिए।

$2^{10} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (2^5) \times (2^5)$

$= (2^5)^2$

सामान्यत: $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b} = n^{ab}$ जहाँ a और b गणन संख्याएँ हैं।

? निम्नलिखित व्यंजकों को कम से कम दो विधियों से घात की घात के रूप में लिखिए।

(i) 8^6 (ii) 7^{15} (iii) 9^{14} (iv) 5^8

जादुई तालाब

? एक सुंदर जादुई तालाब के मध्य में एक चमकीला गुलाबी कमल का फूल खिला हुआ है। इस तालाब में प्रत्येक दिन कमल की संख्या दोगुनी हो जाती है। 30 दिन के पश्चात संपूर्ण तालाब कमल के फूल से भर जाता है।

वह कौन-सा दिन था जब तालाब आधा भरा हुआ था?

यदि 30वें दिन तालाब पूरी तरह कमल के फूलों से भरा हुआ है तो 29वें दिन इसका कितना भाग कमल के फूलों से भरा होगा?

चूँकि प्रत्येक दिन कमल के फूलों की संख्या दोगुनी हो जाती है इसलिए 29वें दिन तालाब आधा भरा होना चाहिए।

? कमल के फूलों की संख्या (चरघातांकी रूप में) लिखिए जब तालाब —

(i) पूर्ण भरा हो (ii) आधा भरा हो

? वहाँ एक अन्य तालाब भी है जिसमें प्रतिदिन कमल के फूलों की संख्या तिगुनी हो जाती है। जब दोनों तालाबों में कोई फूल नहीं है तब दमयंती प्रतिदिन तालाब में (जिसमें कमल के फूल दुगुने हो जाते हैं) एक कमल रखती है। चार दिन के पश्चात वह वहाँ से सभी कमल के फूल लेकर उन्हें तिगुने होने वाले तालाब में डाल देती है। चार दिन के पश्चात दूसरे तालाब में (जिसमें कमल के फूल तिगुने हो जाते हैं) कितने कमल होंगे?

पहले 4 दिन के पश्चात कमल के फूलों की संख्या $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ है।

अगले 4 दिन के पश्चात कमल के फूलों की संख्या $2^4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$ है।

? यदि दमयंती ने तालाब में फूलों को रखने के क्रम में परिवर्तन कर दिया होता तो क्या होता? वहाँ कितने कमल होते?

$$1 \times 3^4 \times 2^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

? क्या इस गुणनफल को घातांक m^n में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ m और n गणन संख्याएँ हैं?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

संख्याओं को पुन: समूहित करने पर

$$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$$
$$= (3 \times 2)^4 = 6^4$$

व्यापकीकृत रूप में

$m^a \times n^a = (mn)^a$ जहाँ a एक गणन संख्या है।

उपर्युक्त का अवलोकन कीजिए। इस अवलोकन का प्रयोग $2^5 \times 5^5$ का मान ज्ञात करने की गणना में कीजिए।

? $\frac{10^4}{5^4}$ को सरल कीजिए और इसे चरघातांकी रूप में लिखिए।

सामान्यत: हम दर्शा सकते हैं कि $\frac{m^a}{n^a} = \left(\frac{m}{n}\right)^a$ है।

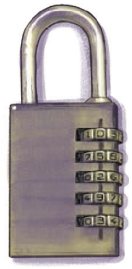
कितने संयोजन

? एस्तु के पास 4 वेशभूषा और 3 टोपियाँ हैं। एस्तु वेशभूषा और टोपियों का संयोजन कितने प्रकार से कर सकता है?

प्रत्येक टोपी के लिए वह 4 वेशभूषा में से कोई भी एक वेशभूषा का चयन कर सकता है। अत: 3 टोपियों के लिए $4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$ संयोजन संभव हैं। हम इसे इस प्रकार भी समझ सकते हैं, जैसे— प्रत्येक वेशभूषा के लिए एस्तु तीन में से कोई भी एक टोपी का चयन कर सकता है। अत: 4 वेशभूषा के लिए $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$ संयोजन संभव हैं।

? रॉक्सी के पास 7 वेशभूषा, 2 टोपी और 3 जोड़ी जूते हैं। रॉक्सी इन्हें कितने प्रकार से पहन कर सुसज्जित हो सकती है?

संकेत — उपर्युक्त चित्र की भाँति एक अन्य चित्र बनाने का प्रयास कीजिए।



? एस्तु और रॉक्सी को एक तिजोरी प्राप्त हुई जिसमें इनके परदादा द्वारा संग्रहीत की गई पुरानी टिकटें और सिक्के थे। यह तिजोरी 5 अंकीय गुप्त संकेत वाले ताले से सुरक्षित थी। किसी को भी गुप्त संकेत के विषय में कुछ भी ज्ञात नहीं था। इन दोनों के पास प्रत्येक गुप्त संकेत को प्रयास करने के अतिरिक्त कोई विकल्प नहीं था जब तक कि वह खुल न जाए। संयोगवश ताला केवल अंतिम गुप्त संकेत का उपयोग करके खुला जबकि वे सभी संभव संयोजनों का प्रयोग कर चुके थे। उन्होंने कितने गुप्त संकेतों की जाँच की?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

यदि आप एक समस्या को हल नहीं कर सकते हैं तो समस्या को सरल करने का प्रयास कीजिए जिससे आप समस्या को हल कर सकें। यह तकनीक समस्या समाधान हेतु उपयोगी सिद्ध हो सकती है।

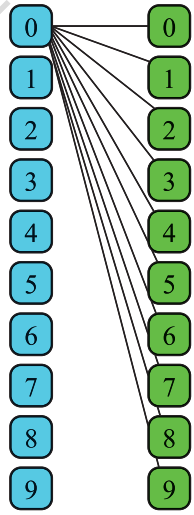
मान लीजिए 5 अंकों वाले ताले के स्थान पर हमारे पास एक 2 अंकों वाला ताला है। यह ज्ञात करने का प्रयास कीजिए कि इस ताले को खोलने के लिए कितने गुप्त संकेत संभव हैं।

यहाँ प्रथम अंक के लिए 10 विकल्प (0 से 9) हैं। इनमें से प्रत्येक विकल्प के लिए दूसरे अंक के 10 विकल्प (यदि 0 प्रथम अंक है तो 00, 01, 02, 03, ...09 संभव है) होंगे। अत: 2 अंकों वाले ताले के लिए संयोजन की कुल संख्या $10 \times 10 = 100$ होगी।

अब मान लीजिए हमारे पास 3 अंकों वाला ताला है। ऊपर बताए गए 100 गुप्त संकेतों (2 अंकीय) में से प्रत्येक के लिए तीसरे अंक के 10 विकल्प हैं। अत: 3 अंकों वाले ताले के लिए कुल संयोजन $100 \times 10 = 1000$ होंगे। आप इन सभी की सूची भी बना सकते हैं, जैसे— 000, 001, 002,....., 997, 998, 999

5 अंकों वाले कितने गुप्त संकेत संभव हैं?

प्रत्येक अंक के लिए 10 विकल्प हैं अत: एक 5 अंकों वाले ताले के लिए $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 = 1,00,000$ गुप्त संकेत होंगे। यह 99,999 तक की संख्याओं को सभी 5 अंकों के साथ लिखने के समान है जैसे—00000, 00001, 00002, …, 00010, 00011, …, 00100, 00101, …, 00999, …, 30456, …, 99998, 99999



एस्तु कहता है, "अगली बार मैं एक ऐसा ताला खरीदूँगा जिसमें A से Z तक अक्षरों वाले 6 खाँचे हों। मेरे विचार से यह अधिक सुरक्षित है।"

? ऐसे ताले के कितने गुप्त संकेत संभव हैं?

? विचार कीजिए कि अलग-अलग संदर्भों में कितने संयोजन संभव हैं। इस संदर्भ में कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं—

प्रयास कीजिए

(i) भारत में स्थानों के पिनकोड — मध्यप्रदेश में विदिशा का पिनकोड 464001 है। मिजोरम में जेमाबाक का पिनकोड 76017 है।

(ii) मोबाइल संख्या

(iii) वाहन पंजीकरण संख्या

यह समझने का प्रयास कीजिए कि संख्याएँ या कोड कैसे आवंटित किए जाते हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

2.3 घातों का दूसरा पक्ष

एक 16 इकाई वाली लंबी रेखा की कल्पना कीजिए। इसके आधे भाग को मिटाने पर परिणाम

$$2^4 \div 2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \text{ इकाई होगा।}$$

एक और बार इसके आधे भाग को मिटाने पर परिणाम

$$(2^4 \div 2) \div 2 = 2^4 \div 2^2 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2 = 4 \text{ इकाई होगा।}$$

16 सेंटीमीटर को तीसरी बार आधा करने पर परिणाम

$$2^4 \div 2^3 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 = 2^1 = 2 \text{ इकाई होगा।}$$

इससे हम यह ज्ञात कर सकते हैं कि

$$2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 2^1$$

? 2 की घात में $2^{100} \div 2^{25}$ क्या होगा?

व्यापकीकृत रूप में

$$n^a \div n^b = n^{a-b},$$

जहाँ $n \neq 0$ और a तथा b गणन संख्याएँ है और $a > b$

? n शून्य क्यों नहीं हो सकता?

गणित चर्चा

? हमने वह स्थिति नहीं समझी है जिसमें घातांक 0 हो। उदाहरण के लिए 2^0 क्या है?

आइए, हम 2^0 को इस प्रकार परिभाषित करें कि उपर्युक्त व्यापकीकृत रूप सत्य हो।

$$2^0 = 2^{4-4} = 2^4 \div 2^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 1$$

वस्तुत: किसी अक्षर संख्या a के लिए

$$2^0 = 2^{a-a} = 2^a \div 2^a = 1$$

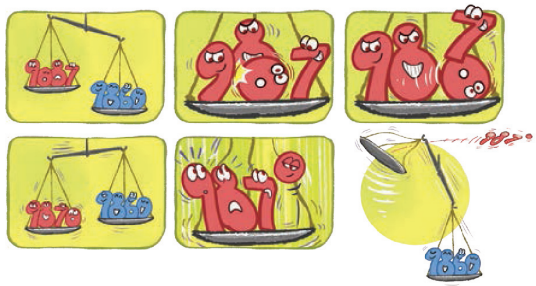
व्यापक रूप से

$$x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0$$

अत: $x^0 = 1$

जहाँ $x \neq 0$ और a एक गणन संख्या है।

जब घात में शून्य हो!



NOT TO BE REPUBLISHED © KTES

जब 2^4 इकाई वाली एक लंबी रेखा को 5 बार आधा किया जाता है—

$$2^4 \div 2^5 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ इकाई}$$

व्यापकीकृत रूप में उपयोग करने पर हमें $2^4 \div 2^5 = 2^{(4-5)} = 2^{-1}$ प्राप्त होता है।

अत: $2^{-1} = \frac{1}{2}$

जब 2^4 इकाई वाली एक लंबी रेखा को 10 बार आधा किया जाता है तो हमें $2^4 \div 2^{10} = 2^{(4-10)} = 2^{-6}$ इकाई प्राप्त होती है।

विस्तारित करने पर $2^4 \div 2^{10} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$, इसे 2^{-6} के रूप में भी लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$, $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$ इत्यादि।

? क्या हम $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$ लिख सकते हैं?

हम लिख सकते हैं—

$$\frac{1}{10^{-3}} = \frac{1}{1/10^3} = 1 \div \frac{1}{10^3} = 1 \times 10^3 = 10^3$$

इसी प्रकार $7^2 = \frac{1}{7^{-2}}$ और $4^a = \frac{1}{4^{-a}}$

व्यापकीकृत रूप में

$$n^{-a} = \frac{1}{n^a} \text{ और } n^a = \frac{1}{n^{-a}}, \text{ जहाँ } n \neq 0$$

गणित चर्चा

हमारे द्वारा पहचाने गए निम्नलिखित व्यापकीकृत रूपों पर विचार कीजिए।

$n^a \times n^b = n^{a+b}$	$(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$	$n^a \div n^b = n^{a-b}$

? हमें a और b गणन संख्या लेने की आवश्यकता थी। क्या a और b कोई भी पूर्णांक हो सकते हैं? क्या व्यापकीकृत रूप अभी भी सत्य होगा?

? निम्नलिखित के समतुल्य रूप लिखिए।

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) $(-7)^{-2}$

(iv) $(-5)^{-3}$ (v) 10^{-100}

? नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए एवं उत्तरों को चरघातांकी रूप में लिखिए।

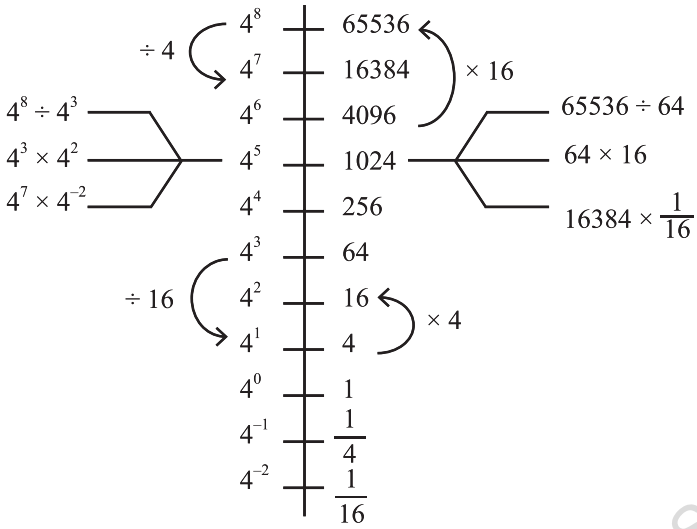
(i) $2^{-4} \times 2^7$ (ii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$ (iii) $p^3 \times p^{-10}$

(iv) $2^4 \times (-4)^{-2}$ (v) $8^p \times 8^q$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

घात रेखाएँ

आइए, 4 की घातों को एक रेखा के अनुदिश व्यवस्थित करें।

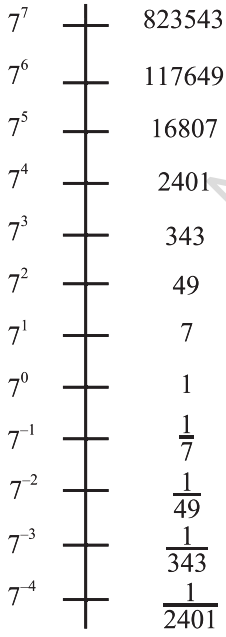


? क्या हम यह कह सकते हैं कि संख्या 16384 (4^7) संख्या 1024 (4^5) से 16 (4^2) गुना बड़ी है?

हाँ, चूँकि $4^7 \div 4^5 = 4^2$ है।

? 4^2, 4^{-2} से कितने गुना बड़ा है?

? निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने के लिए 7 की घात रेखा का उपयोग कीजिए।



$2,401 \times 49 =$

$49^3 =$

$343 \times 2,401 =$

$\frac{16,807}{49} =$

$\frac{7}{343} =$

$\frac{16,807}{8,23,543} =$

$1,17,649 \times \frac{1}{343} =$

$\frac{1}{343} \times \frac{1}{343} =$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2.4 10 की घात

हमने भारतीय अंकों को विस्तारित रूप में लिखते समय संख्याओं, जैसे — 10, 100, 1000, ... इत्यादि का उपयोग किया है। उदाहरण के लिए—

$$47561 = (4 \times 10000) + (7 \times 1000) + (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1$$

उपर्युक्त संख्या को 10 की घात का उपयोग करके निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$(4 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$$

? इन संख्याओं को उपर्युक्त विधि से लिखिए — (i) 172 (ii) 5642 (iii) 6374

? हम 561.903 को किस प्रकार लिख सकते हैं?

$$561.903 = (5 \times 100) + (6 \times 10) + 1 + \left(9 \times \frac{1}{10}\right) + \left(0 \times \frac{1}{100}\right) + \left(3 \times \frac{1}{1000}\right)$$

इसे 10 की घात का उपयोग करके लिखने पर हमें प्राप्त होता है।

$$561.903 = (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1}) + (0 \times 10^{-2}) + (3 \times 10^{-3})$$

वैज्ञानिक संकेतन

आइए, बड़ी संख्याओं से संबंधित कुछ तथ्यों पर ध्यान दें—

(i) सूर्य हमारी मिल्की वे आकाशगंगा के केंद्र से 30,00,00,00,00,00,00,00,00,000 मीटर दूर स्थित है।

(ii) हमारी आकाशगंगा में तारों की संख्या 1,00,00,00,00,000 हैं।

(iii) पृथ्वी का द्रव्यमान 59,76,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 किलोग्राम है।

जैसे-जैसे अंकों की संख्या बढ़ती जाती है संख्याओं को सही प्रकार से पढ़ना कठिन होता जाता है। शून्यों की संख्या की गणना में हमसे त्रुटि हो सकती है या अल्पविराम का प्रयोग हम गलत स्थान पर कर सकते हैं। ऐसी स्थिति में मान को पढ़ने में भी त्रुटि हो सकती है। इसे इस उदाहरण से समझ सकते हैं, जैसे — आपको 50,000 रुपए मिलने चाहिए थे लेकिन आपको 5,000 रुपए मिले। कुछ स्थितियों में प्रारंभिक अंक की अपेक्षा शून्यों की संख्या अधिक महत्त्वपूर्ण होती है।

क्या हम इन बहुत बड़ी संख्याओं को सरल बनाने और सही ढंग से पढ़ने के लिए चरघातांकी संकेतन का उपयोग कर सकते हैं?

उदाहरण के लिए — संख्या 5900 को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned} 5900 &= 590 \times 10 = 590 \times 10^1 \\ &= 59 \times 100 = 59 \times 10^2 \\ &= 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3 \\ &= 0.59 \times 10000 = 0.59 \times 10^4 \end{aligned}$$

1 और 10 के बीच की किसी भी संख्या को 10 की घात के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरण के लिए—

$5900 = 5.9 \times 10^3$ $\quad$ $20800 = 2.08 \times 10^4$ $\quad$ $80,00,000 = 8 \times 10^6$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? पूर्व में पढ़ी गई बड़ी संख्याओं के विषय में ज्ञात तथ्यों को लिखिए।

वैज्ञानिक संकेतन या वैज्ञानिक रूप (जिसे **मानक रूप** भी कहा जाता है।) में हम संख्याओं को $x \times 10^y$ के रूप में लिखते हैं जहाँ $x \geq 1$ और $x < 10$ एक गुणांक है और घातांक y पूर्णांक है। प्रायः घातांक y गुणांक x से अधिक महत्त्वपूर्ण होता है। जब हम मुंबई की 2 करोड़ जनसंख्या को 2×10^7 लिखते हैं तो 7, 2 से अधिक महत्त्वपूर्ण होता है। निश्चित रूप से यदि 2 को 3 से परिवर्तित कर दिया जाए तो जनसंख्या में आधे की वृद्धि होती है अर्थात 2 करोड़ से 3 करोड़ दूसरी ओर यदि 7 को 8 से परिवर्तित कर दिया जाए तो जनसंख्या में 10 गुना परिवर्तन होगा अर्थात जनसंख्या 2 करोड़ से 20 करोड़ हो जाएगी। अतः मानक रूप में घातांक का स्पष्ट रूप से वर्णन आवश्यक होता है जो कि किसी संख्या में अंकों की संख्या को दर्शाता है।

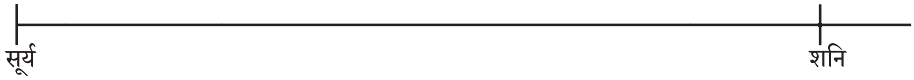
यदि हम कहते हैं कि कोहिमा की जनसंख्या 1,42,395 है तो इससे यह प्रतीत होता है कि हम इस संख्या के इकाई के स्थान तक पूरी तरह आश्वस्त हैं। जब हम बड़ी संख्याओं का उपयोग करते हैं तो अधिकांश स्थितियों में हम सटीक मान की अपेक्षा इस बात का विशेष ध्यान रखते हैं कि मात्रा या माप कितना बड़ा है। यदि हम आश्वस्त हैं कि जनसंख्या लगभग 1 लाख 42 हजार है तो हम इसे 1.42×10^5 के रूप में भी लिख सकते हैं। यदि जनसंख्या लगभग 1 लाख 40 हजार है तो हम इसे 1.4×10^5 के रूप में लिख सकते हैं। गुणांक में अंकों की संख्या दर्शाती है कि हमें संख्या की कितनी सटीक जानकारी है। मानक रूप में लिखी गई किसी भी संख्या का सबसे महत्त्वपूर्ण भाग घातांक होता है और इसके पश्चात गुणांक के पहले अंक का महत्त्व होता है। गुणांक के पश्चात के अंक पूर्व अंक के छोटे संशोधन होते हैं।

© RTES NOT TO BE REPUBLISHED

प्रायः ये मान पूर्णांकित अनुमान, औसत या सन्निकट होते हैं जो उद्देश्य की पूर्ति करते हैं।
सूर्य और शनि के मध्य दूरी 14,33,50,00,00,000 मीटर = 1.4335×10^{12} मीटर है।
शनि और अरुण के मध्य दूरी 14,39,00,00,00,000 मीटर = 1.439×10^{12} मीटर है।
सूर्य और पृथ्वी के मध्य दूरी 1,49,60,00,00,000 मीटर = 1.496×10^{11} मीटर है।

? क्या आप बता सकते हैं कि तीनों दूरियों में सबसे कम दूरी किसकी है?

? नीचे दी गई संख्या रेखा सूर्य और शनि के मध्य दूरी (1.435×10^{12} मीटर) को दर्शाती है। इस संख्या रेखा पर पृथ्वी की सापेक्ष स्थिति को चिह्नित कीजिए। ध्यान दीजिए कि सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11} मीटर है।



? निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 59,853 (ii) 65,950
(iii) 34,30,000 (iv) 70,04,00,00,000

2.5 क्या आपने कभी विचार किया है?

कक्षा 7 की पाठ्यपुस्तक *गणित प्रकाश* में हमने बड़ी संख्याओं वाले अध्याय में रोचक विचार एवं प्रयोगों पर ध्यान आकर्षित किया था। आइए, इस यात्रा को बनाए रखें।

नंजनदुप्पा, रॉक्सी के भार के समान गुड़ और एस्तु के भार के समान गेहूँ दान करना चाहता है। वह सोचता है कि इसका मूल्य कितना होगा।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? बताइए कि दान किए गए गुड़ का मूल्य (रुपयों में) क्या होगा? दान किए गए गेहूँ का मूल्य (रूपयों में) क्या होगा?

उपर्युक्त को ज्ञात करने के लिए आइए, हम सबसे पहले उपस्थित मात्राओं के मध्य संबंधों का वर्णन करें।

गुड़ की कीमत (रूपयों में) = रॉक्सी का भार (किलोग्राम में) × 1 किलोग्राम गुड़ का मूल्य
गेहूँ की कीमत (रूपयों में) = एस्तु का भार (किलोग्राम में) × 1 किलोग्राम गेहूँ का मूल्य

? ज्ञात करने के लिए आवश्यक और तार्किक धारणाएँ बनाइए और उत्तर ज्ञात कीजिए। याद रखिए रॉक्सी की आयु 13 वर्ष और एस्तु की आयु 11 वर्ष है।

मान लीजिए कि रॉक्सी का भार 45 किलोग्राम है और 1 किलोग्राम गुड़ का मूल्य ₹70 है। दान किए गए गुड़ का मूल्य 45×70 = ₹3150 है। इसके साथ ही मान लीजिए कि एस्तु का भार 50 किलोग्राम है और 1 किलोग्राम गेहूँ का मूल्य ₹50 है तो दान किए गए गेहूँ का मूल्य 50×50 = ₹2500 है।

व्यक्ति के भार के समान वस्तु विनिमय की प्रथा को तुलाभार या तुलाभारम कहा जाता है। यह एक पुरातन पद्धति है। यद्यपि यह दक्षिण भारत में कई स्थानों पर वर्तमान समय में भी प्रचलित है। यह भक्ति (आत्मसमर्पण) और कृतज्ञता का प्रतीक है। इसके साथ यह समुदाय का भी समर्थन करता है।

? रॉक्सी विचार करती है, "यदि हम गुड़ के स्थान पर 1 रुपए के सिक्के प्रयोग करें तो मेरे भार के समान कितने सिक्कों की आवश्यकता होगी?" बताइए हम यह किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं?

इस प्रकार के प्रश्नों के लिए आप सुझाए गए चरणों का पालन करने पर विचार कर सकते हैं।

1. अनुमान लगाना— किसी गणना के बिना सहज अनुमान लगाइए कि उत्तर क्या हो सकता है।
2. अनुमान और सन्निकटन का उपयोग करके गणना कीजिए।
   (i) उत्तर ज्ञात करने के लिए आवश्यक राशियों के मध्य संबंधों का वर्णन कीजिए।
   (ii) यदि आवश्यक जानकारी उपलब्ध न हो तो संभावित अभिधारणाएँ और सन्निकटन बनाइए।
   (iii) गणना करके उत्तर ज्ञात कीजिए एवं जाँचिए कि आपका आकलन कितना सटीक है।

? क्या सिक्कों की संख्या सैकड़ों, हजारों, लाखों, करोड़ों या उससे भी अधिक होगी? सहज अनुमान लगाइए।

? अज्ञात मानों के लिए आवश्यक और संभावित अभिधारणाएँ तथा सन्निकटन का उपयोग करके उत्तर ज्ञात कीजिए। ध्यान दीजिए कि हम सटीक उत्तर नहीं अपितु एक यथोचित रूप से निकट आकलन को देख रहे हैं।

एक रुपए के सिक्के का भार आप किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

प्रारंभ में आपका अनुमान उत्तर से बहुत दूर हो सकता है और यह पूर्णतया सही भी है। आप जैसे-जैसे पुन: और भिन्न-भिन्न परिस्थितियों में इसकी पुनरावृत्ति करेंगे आप इसमें श्रेष्ठ होते जाएँगे। अनुमान लगाने और आकलन करने के परिणामस्वरूप संख्याओं और विभिन्न राशियों के विषय में सहजबोध विकसित हो सकता है।

एस्तु पूछता है, "क्या होगा यदि हम इसके अतिरिक्त 5 रुपए के सिक्के या 10 रुपए के नोट का उपयोग करें? यह कितने रुपए होंगे?

? सर्वप्रथम सहज अनुमान लगाइए और इसके पश्चात ज्ञात कीजिए (अज्ञात विवरणों के विषय में आवश्यक और संभावित अभिधारणाएँ बनाइए और उत्तर ज्ञात कीजिए)।

एस्तु कहता है, "जब मैं वयस्क हो जाऊँगा तब मैं प्रत्येक वर्ष अपने भार के समान लेखन पुस्तिकाएँ दान करना चाहूँगा।" रॉक्सी कहती है, "जब मैं बड़ी हो जाऊँगी तब मैं प्रत्येक वर्ष अपने भार के समान अन्नदान (अनाज या भोजन देना) करना चाहूँगी।"

? रॉक्सी और एस्तु के उपर्युक्त प्रस्तावों से वर्ष में कितने व्यक्तियों को लाभ हो सकता है? ज्ञात करने से पूर्व पुन: अनुमान लगाइए।

गणित चर्चा

रॉक्सी और एस्तु ने किसी को कहते हुए सुना— "हमने इस स्थान तक पहुँचने के लिए 400 किलोमीटर की पदयात्रा की है। हम आज प्रात: जल्दी पहुँच गए।"

? उन्होंने अपनी यात्रा कितने समय पूर्व प्रारंभ की होगी?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? आवश्यक अभिधारणाएँ और सन्निकटन बनाकर उत्तर ज्ञात कीजिए। गणना करने से पूर्व अनुमान लगाइए और जाँचिए कि आपका अनुमान कितना सटीक था।

शिक्षक हेतु टिप्पणी— अनुमान कई बार भिन्न हो सकते हैं और इस कारण से इन अनुमानों के आधार पर गणना से प्राप्त उत्तर भी भिन्न हो सकते हैं। यह पूर्णतः सही है। स्थिति का सही प्रकार से प्रतिरूपण महत्त्वपूर्ण है जो कभी-कभी विभिन्न प्रकारों से भी किया जा सकता है। अनुमानित संख्याओं या मात्राओं की सटीकता, प्रदर्शन और अभ्यास से और अधिक श्रेष्ठ हो सकती है।

पदयात्रा धार्मिक या आध्यात्मिक साधना के अंतर्गत लंबी दूरी तक पैदल चलने की परंपरागत प्रथा है। हमारे देश में विभिन्न धर्मों का पालन करने वाले व्यक्ति तीर्थयात्रा या आध्यात्मिक पदयात्रा करते है, यद्यपि उनके नाम या उद्देश्य भिन्न-भिन्न हो सकते हैं।
अजमेर शरीफ दरगाह जियारत, पंढरपुर वारी, काँवड यात्रा, सबरीमाला यात्रा, सम्मेद शिखर जी यात्रा, लुंबिनी से सारनाथ यात्रा आदि कुछ प्रसिद्ध तीर्थयात्राएँ हैं।

आधुनिक परिवहन के आरंभ से पूर्व व्यक्ति एक स्थान से दूसरे स्थान तक पैदल ही आवागमन करते थे। कभी-कभी व्यापारी और विद्वान रेगिस्तान, पहाड़ एवं नदियों को पार करके विश्व के विभिन्न भागों में हजारों किलोमीटर तक पदयात्रा करते थे।

? यदि कोई व्यक्ति बिना रुके चले तो वह अपने जीवनकाल में पृथ्वी की कितनी बार परिक्रमा कर सकता है? मान लीजिए कि पृथ्वी के चारों ओर की दूरी 40,000 किलोमीटर है।

रैखिक वृद्धि बनाम चरघातांकी वृद्धि

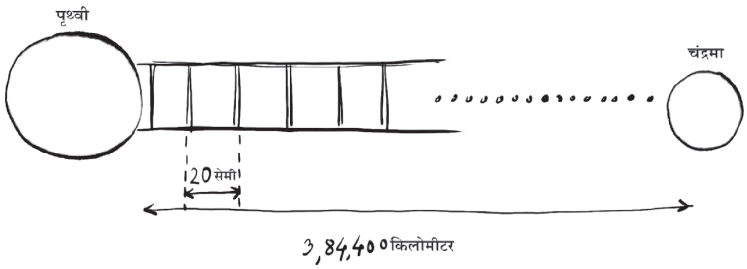
रॉक्सी, एस्तु को एक काल्पनिक विज्ञान-कथा उपन्यास के विषय में बताती है जिसमें उसने पढ़ा था कि वे चंद्रमा तक पहुँचने के लिए एक सीढ़ी बनाते हैं।
रॉक्सी कहती है, "मुझे आश्चर्य है कि यदि हमारे पास वास्तव में ऐसी सीढ़ी होती तो उसमें कितने पायदान होते?

? इसके विषय में आपका क्या विचार है? सर्वप्रथम सहज अनुमान लगाइए।

? क्या पायदानों की संख्या हजारों, लाखों, करोड़ों या उससे भी और अधिक होगी?

यह ज्ञात करने के लिए हमें दो क्रमागत सीढ़ी पायदान के मध्य की दूरी को ज्ञात करना आवश्यक है। आइए, हम 20 सेंटीमीटर की एक संभावित दूरी मान लेते हैं। चित्र में दर्शाई गई समस्या का अनुमान लगाइए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



? हमें ज्ञात करना है कि कितने 20 सेंटीमीटर मिलकर 3,84,400 किलोमीटर बनाते हैं।

यदि हम इसकी गणना करते हैं तो परिणाम के रूप में हमें 1,92,20,00,000 पायदान प्राप्त होते हैं जो कि 192 करोड़ 20 लाख पायदान हैं या 1 बिलियन 922 मिलियन पायदान। प्रत्येक पायदान के साथ पृथ्वी से दूरी में निश्चित वृद्धि (प्रत्येक पायदान के पश्चात 20 सेंटीमीटर की वृद्धि) को **रैखिक वृद्धि** कहते हैं।

पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी तय करने हेतु रैखिक वृद्धि के साथ 1,92,20,00,000 पायदानों की आवश्यकता है। जबकि ऐसी स्थिति में चरघातांकी वृद्धि के साथ कागज के एक टुकड़े को मात्र 46 बार मोड़ना पड़ता है। इसके साथ ही ध्यान रखिए कि रैखिक वृद्धि योगात्मक होती है जबकि चरघातांकी वृद्धि गुणात्मक होती है।

$\underbrace{20 + 20 + 20 + \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{1,92,20,00,000 बार}}$ $\qquad$ $\underbrace{0.001 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots\ldots}_{\text{46 बार}}$

इस अध्याय में चरघातांकी वृद्धि के कुछ उदाहरण हम पूर्व में ही समझ चुके हैं, जैसे — 'चमकते पत्थर ...', 'जादुई तालाब', 'कितने संयोजन'। इसके साथ ही हम अगले अध्याय और अगली कक्षा में भी ऐसे ही कुछ अन्य रोचक उदाहरणों पर चर्चा करेंगे।

? क्या आप रैखिक वृद्धि और चरघातांकी वृद्धि के कुछ उदाहरण दे सकते हैं?

बड़ी संख्याओं को समझना

विगत वर्ष हमने लाख और करोड़ के साथ-साथ मिलियन और बिलियन के विषय में सीखा था। एक लाख 10^5 (1,00,000), एक करोड़ 10^7 और एक अरब 10^9 (1,00,00,00,000) जबकि एक मिलियन 10^6 (1,000,000) होता है और एक बिलियन 10^9 (1,000,000,000) होता है।

आप विश्व की मानव जनसंख्या के आकार से परिचित होंगे। क्या आपने कभी विचार किया है कि विश्व में कितनी चींटियाँ होंगी या मानव का उद्भव कितने वर्ष पूर्व हुआ होगा? इस भाग में हम अरब और बिलियन से भी बड़ी संख्याओं का अध्ययन करेंगे। हम प्रत्येक स्थिति में इन संख्याओं को दर्शाने और उनकी तुलना करने के लिए 10 की घातों का उपयोग करेंगे।

10^0 2025 के मध्य तक विश्व में केवल दो उत्तरी सफेद गैंडे शेष हैं। दोनों मादा हैं और वे केन्या में ओल पेजेटा संरक्षण क्षेत्र में निवास करते हैं ($= 2 \times 10^0$)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

10^1 2024 के आरंभ तक हैनान गिब्बनस की कुल संख्या मात्र 42 ($\approx 4\times10^1$) है।

10^2 2025 के मध्य तक मात्र 242 काकापो (उल्लू, तोता) जीवित हैं ($\approx 2 \times 10^2$)।

10^3 विश्व में 3000 से भी कम कोमोडो ड्रेगन (एक प्रकार की विशाल छिपकली) शेष हैं जो इंडोनेशिया में पाई जाती हैं ($\approx 3 \times 10^3$)।

10^4 वर्ष 2005 में मेन्ड वुल्फ (भेड़िये की एक प्रजाति) की संख्या के आकलन से ज्ञात हुआ कि उनकी संख्या 17000 से अधिक है। इनमें से अधिकांश ब्राजील में पाए जाते हैं (1.7×10^4)।

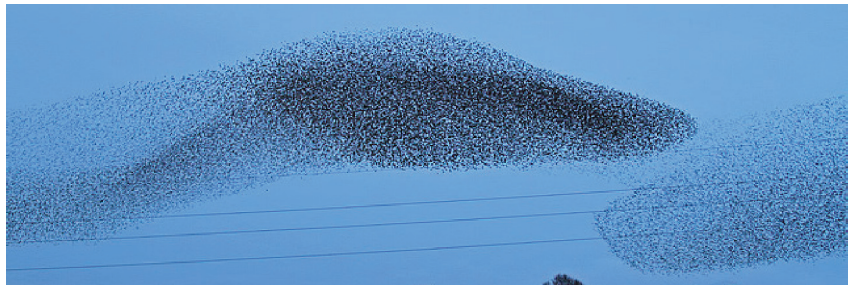
10^5 वर्ष 2018 तक विश्व में लगभग 4.15 लाख अफ्रीकी हाथी निवास करते थे ($\approx 4 \times 10^5$)।

10^6 2025 तक विश्व में अमेरिकी मगरमच्छों की आकलित संख्या 50 लाख (5 मिलियन) है (5×10^6)।

10^7 वैश्विक स्तर पर ऊँटों की संख्या 3.5 करोड़ या 35 मिलियन से अधिक (3.5×10^7) आकलित की गई है। इनमें से भारत में लगभग 2.5 लाख ऊँट पाए जाते हैं। वैश्विक स्तर पर घोड़ों की संख्या लगभग 5.8 करोड़ या 58 मिलियन (5.8×10^7) है। इनमें से लगभग आधे घोड़े अमरीका में पाए जाते हैं।

10^8 वैश्विक स्तर पर जलीय भैसों की आकलित संख्या 20 करोड़ (200 मिलियन) (2×10^8) से अधिक है इनमें से अधिकांश एशिया महाद्वीप में पाई जाती हैं।

10^9 वैश्विक स्तर पर मैना (स्टार्लिंग) पक्षी की जनसंख्या लगभग 1.3 अरब या 1.3 बिलियन आकलित की गई थी। वर्ष 2025 तक वैश्विक मानव जनसंख्या 8.2 अरब या 8.2 बिलियन (8.2×10^9) है।



ब्रिटेन के एक खेत के ऊपर उड़ते हुए मैना के झुंड की एक तस्वीर। मैना का यह झुंड हजारों मैना का एक मंत्रमुग्ध कर देने वाला हवाई प्रदर्शन है। इसे प्राय: 'निर्देशित नृत्य' भी कहा जाता है।

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

? वैश्विक स्तर पर मानव जनसंख्या लगभग 8×10^9 है एवं अफ्रीकी हाथियों की संख्या लगभग 4×10^5 है। क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक अफ्रीकी हाथी पर लगभग 20,000 व्यक्ति आकलित किए गए हैं?

10^{10} वैश्विक स्तर पर किसी समय में जीवित मुर्गियों की आकलित संख्या ≈ 33 बिलियन (3.3×10^{10}) है।

10^{12} वैश्विक स्तर पर वृक्षों की आकलित संख्या (वर्ष 2023 में) 30 खरब या 3 ट्रिलियन (3×10^{12}) है। हम जानते हैं कि 1 खरब 100 अरब के समान होता है। इसके साथ ही 1 ट्रिलियन 1000 बिलियन के समान होता है।

10^{14} संपूर्ण विश्व में मच्छरों की आकलित संख्या (वर्ष 2023 में) 11 नील या 110 ट्रिलियन है। इसके साथ ही अंटार्कटिक क्रिल की व्युत्पन्न आकलित संख्या 50 नील या 500 ट्रिलियन ((5×10^{14}) है।

10^{15} झींगुर की आकलित संख्या 1 पदम या 1 क्वाड्रिलियन (1×10^{15}) है। केंचुओं की भी आकलित संख्या 1 पदम या 1 क्वाड्रिलियन है।

10^{16} वैश्विक स्तर पर चींटियों की आकलित जनसंख्या 20 पदम 20 क्वाड्रिलियन (2×10^{16}) है। मात्र चींटियों की संख्या सभी जंगली पक्षियों और जंगली स्तनधारियों की संयुक्त संख्या से भी अधिक है।

10^{21} पृथ्वी के सभी समुद्र तटों और रेगिस्तान में रेत के कणों की संख्या मानी जाती है। यह मात्रा इतनी है कि प्रत्येक चींटी के रहने के लिए 10 छोटे-छोटे रेत के महल बनाए जा सकते हैं।

10^{23} अवलोकनीय ब्रह्मांड में तारों की आकलित संख्या 2×10^{23} है।

10^{25} पृथ्वी पर पानी की बूँदों की आकलित संख्या 2×10^{25} है। (मान लीजिए 16 बूँदे प्रति मिलीलीटर)

? गणना कीजिए और वैज्ञानिक संकेतन का उपयोग करते हुए अपना उत्तर लिखिए।

(i) विश्व में प्रत्येक मानव पर कितनी चींटियाँ हैं?

(ii) यदि मैना के एक झुंड में 10,000 पक्षी हैं तो विश्व में मैना के कितने झुंड होंगे?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) यदि प्रत्येक वृक्ष पर लगभग 10^4 पत्तियाँ हों तो विश्व में सभी वृक्षों पर कुल पत्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) यदि आप कागज को एक के ऊपर एक रखें तो चंद्रमा तक पहुँचने के लिए आपको कितने कागजों की आवश्यकता होगी?

अपनी आयु बताने की एक भिन्न विधि!

"आपकी आयु क्या है?" एस्तु ने पूछा।

"कुछ सप्ताह पूर्व ही मैंने 13 वर्ष पूर्ण किए हैं " रॉक्सी ने कहा।

"आपकी आयु क्या है?" एस्तु ने पुन: पूछा।

"मैं 4840 दिन की हूँ।" रॉक्सी ने कहा।

"आपकी आयु क्या है?" एस्तु ने पुन: पूछा।

"मेरी आयु _____ घंटे है।" रॉक्सी ने कहा।

इस संख्या को ज्ञात करने से पूर्व एक अनुमान लगाइए।

एस्तु — मैं आज 4070 दिन का हूँ। क्या आप मेरी जन्मतिथि ज्ञात कर सकते हैं?"

इस संख्या का क्या अर्थ हो सकता है? ज्ञात कीजिए!

? यदि आप 10 लाख सेकंड तक जीवित रहें तो आपकी आयु कितनी होगी?

हम कुछ घटनाओं और परिघटनाओं के सन्निकट समय और समय-सीमा पर विचार करेंगे तथा इन राशियों को दर्शाने और तुलना करने के लिए 10 की घातों का उपयोग करेंगे।

समय (सेकंड में)		वास्तविक संसार की घटनाओं परिघटनाओं से तुलना
$10^0 = 1$ सेकंड	-	ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद को वापस सतह पर पहुँचने में लगा समय (सामान्यत: कुछ सेकंड)
$10^1 = 10$ सेकंड	-	शरीर में रक्त का एक पूर्ण परिसंचरण पूरा करने में लगने वाला समय — 10 से 20 सेकंड $(1 \times 10^1 - 2 \times 10^1$ सेकंड)
	-	सामान्यतः यातायात संकेत (लाल बत्ती) पर लगने वाला समय

क्या यह आश्चर्यजनक नहीं है कि विश्व में चींटियों की संख्या या रक्त के पूर्ण परिसंचरण में लगने वाला समय जैसी परिस्थितियों का आकलन कोई कैसे कर सकता है? जब भी ऐसे तथ्य आपके सामने आते हैं तो आप आश्चर्यचकित हो सकते हैं। विज्ञान और सामाजिक विज्ञान जैसे विषयों में आपको ऐसे तथ्य देखने को मिलेंगे जहाँ ऐसे आकलनों का प्राय: अधिकतम उपयोग किया जाता है।

10^2 सेकंड ≈1.6 मिनट	-	एक कप चाय बनाने में लगने वाला समय — 5 से 10 मिनट ($\approx 4 \times 10^2 - 8 \times 10^2$ सेकंड)।
	-	सूर्य से पृथ्वी तक प्रकाश को पहुँचने में लगने वाला समय — लगभग 8 मिनट ($\approx 5 \times 10^2$ सेकंड)।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

10^3 सेकंड ≈16.6 मिनट - पृथ्वी की निम्न कक्षा में पृथ्वी की एक परिक्रमा पूरी करने में उपग्रहों को 90 मिनट ($\approx 5.5\times10^3$ सेकंड) से 2 घंटे तक का समय लगता है।

10^4 सेकंड ≈2.7 घंटे - भोजन पचाने में लगने वाला समय — भोजन को पेट से होकर जाने में लगभग 2 से 4 घंटे लगते हैं।

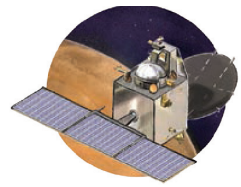
- एक व्यस्क मेफ्लाई (मक्खी की प्रजाति) का जीवन काल — लगभग 1 दिन ($\approx 9\times10^4$ सेकंड) का होता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? 10^5 सेकंड ≈ 1.16 दिन और 10^6 सेकंड ≈ 11.57 दिन कुछ घटनाओं या परिघटनाओं जिनका समय (i) 10^5 सेकंड और (ii) 10^6 सेकंड है, इस पर विचार कीजिए और इन्हें वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

10^7 सेकंड ≈115.7 दिन ≈3.8 मास - एक वर्ष में सोने में व्यतीत किया गया समय — लगभग 4 मास

- मंगलयान को मंगल ग्रह तक पहुँचने में लगा समय 298 दिन ($\approx 2.65\times10^7$ सेकंड)
- सूर्य के चारों ओर एक पूर्ण परिक्रमा करने में मंगल ग्रह द्वारा लिया गया समय — 687 पृथ्वी दिन या 1.88 पृथ्वी-वर्ष ($\approx 6\times10^7$ सेकंड)।



10^8 सेकंड ≈3.17 वर्ष - सामान्यत: कुत्तों का जीवनकाल 3 से 15 वर्ष होता है।

10^9 सेकंड ≈31.7 वर्ष - हैली धूमकेतु की परिक्रमा अवधि 75 से 79 वर्ष है। उसका अगला अपेक्षित वापसी वर्ष 2061 ($\approx 2.4 \times 110^9$ सेकंड) है। वरूण ग्रह (नेपच्यून) द्वारा सूर्य के चारों ओर एक पूर्ण परिक्रमा की अवधि- 60, 190 पृथ्वी दिन (165 पृथ्वी वर्ष) या 89,666 नेपच्यून दिन या 1

- नेपच्यून-वर्ष ($\approx 5.2\times10^9$ सेकंड)। नेपच्यून पर 1 दिन लगभग 16.1 घंटे का होता है।

ध्यान दीजिए कि चरघातांकी वृद्धि कितनी तीव्रता से होती है — 10^6 सेकंड एक पखवाड़े से कम है लेकिन 10^9 सेकंड वृहत 31 वर्ष के समान है (मानव के जीवन काल का लगभग आधा समय)।

10^{10} सेकंड ≈ 317 वर्ष
- चोल राजवंश ने तीसरी शताब्दी सामान्य संवत् पूर्व से 12वीं शताब्दी सामान्य संवत् के मध्य 900 वर्षों (≈ 3×10^{10} सेकंड) से अधिक समय तक शासन किया।

10^{11} सेकंड ≈ 3,170 वर्ष
- पुरातन ज्ञात जीवित वृक्ष की आयु लगभग 5000 वर्ष (≈ 1.57×10^{11} सेकंड)
- हिमयुग की अंतिम चरम स्थिति — 19000–26000 वर्ष पूर्व (≈ 6×10^{11} सेकंड – 8.2×10^{11} सेकंड)

10^{12} सेकंड ≈ 31,700 वर्ष
- आदिमानव (प्रारंभिक होमो सेपियंस) सर्वप्रथम 2–3 लाख वर्ष पूर्व (≈ $7\times 10^{12} - 9 \times 10^{12}$ सेकंड) दिखाई दिए थे। उस समय की संपूर्ण मानवीय जनसंख्या एक बड़े क्रिकेट स्टेडियम में समायोजित हो सकती थी।

10^{13} सेकंड ≈ 3.17 लाख वर्ष
- ऐसा माना जाता है कि स्टेपी मैमथ (हाथी) लगभग 8 से 18 लाख वर्ष पूर्व प्रकट हुआ था।

10^{14} सेकंड ≈ 3.17 मिलियन वर्ष
- केलेनकेन गिलरमॉई एक प्रकार का आतंकी पक्षी है। इसका जीवाश्म 15 मिलियन वर्ष (150 लाख वर्ष) (≈_____ सेकंड) पुराना है।

10^{15} सेकंड ≈ 3.17 करोड़ वर्ष
- हिमालय की आयु — 5.5 करोड़ वर्ष या 55 मिलियन वर्ष (≈1.7×10^5 सेकंड) इस शृंखला में प्रत्येक वर्ष कुछ मिलीमीटर की वृद्धि होती रहती है।
- डायनासोर 6.6 करोड़ वर्ष पूर्व या 66 मिलियन वर्ष पूर्व (≈ 2×10^{15} सेकंड) विलुप्त हो गए थे।
- डायनासोर सर्वप्रथम 20 करोड़ या 200 मिलियन वर्ष पूर्व (≈ 6×10^{15} सेकंड) दिखाई दिए थे।
- सूर्य को आकाशगंगा के चारों ओर एक पूर्ण परिक्रमा करने में लगभग 23 करोड़ वर्ष (≈ 7×10^{15} सेकंड) लगते हैं।

10^{16} सेकंड ≈ 31.7 करोड़ वर्ष
- पृथ्वी पर पौधों की उत्पत्ति 47 करोड़ या 470 मिलियन वर्ष पूर्व (≈ _____ सेकंड) हुई थी।

10^{17} सेकंड ≈ 3.17 करोड़ वर्ष
- सर्व पुरातन जीवाश्म के साक्ष्य के अनुसार बैक्टीरिया सर्वप्रथम लगभग 3.7 अरब वर्ष या 3.7 बिलियन वर्ष पूर्व दिखाई दिए थे। आकाशगंगा का निर्माण 13.6 बिलियन या अरब वर्ष पूर्व हुआ था। साथ ही ब्रह्मांड का निर्माण 13.8 बिलियन या अरब वर्ष पूर्व हुआ था।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ध्यान दीजिए कि एक मानव का जीवनकाल 10^9 सेकंड का है जबकि आधुनिक भौतिकी के 10^{18} सेकंड समय पूर्व ब्रह्मांड अस्तित्व में ही नहीं था! अतः चरघातांकी संकेतन द्वारा बहुत बड़ी संख्याओं को संक्षिप्त रूप में लिखा जा सकता है।

? गणना कीजिए और वैज्ञानिक संकेतन का उपयोग करते हुए उत्तर लिखिए।

(i) यदि एक तारे की गणना में 1 सेकंड का समय लगता है तो इस ब्रह्मांड में स्थित सभी तारों की गणना में कितना समय लगेगा? वैज्ञानिक संकेतन का उपयोग करते हुए उत्तर को सेकंड की संख्या के रूप में लिखिए।

(ii) यदि एक व्यक्ति एक गिलास पानी (200 मिलीलीटर) 10 सेकंड में पीता है तो पृथ्वी पर उपलब्ध संपूर्ण पानी को पीने में उसे कितना समय लगेगा?

प्रयास कीजिए

बहुत बड़ी संख्याएँ प्रायः हमारे अनुभव और समझ से परे होती हैं। इसे समझने के लिए उन्हें हम उन संख्याओं से जोड़ सकते हैं एवं उनकी तुलना कर सकते हैं जिनसे हम परिचित हैं। इससे हमें यह ज्ञात होता है कि कोई संख्या या माप कितना बड़ा है।

2.5 इतिहास की एक झलक

प्रथम शताब्दी सामान्य संवत् पूर्व के बौद्ध ग्रंथ *ललितविस्तर* में हम संख्या नाम में 10 की विषम घात 10^{53} तक देखते हैं। गणितज्ञ अर्जुन और *बोधिसत्व* राजकुमार गौतम के बीच हुए संवाद में जो घटित होता है वह निम्नलिखित है—

"100 कोटि को एक अयुत (10^9), सौ अयुत को एक नियुत (10^{11}), सौ नियुत को एक कंकार (10^{13}), … सौ सर्व-बल को एक विसंज्ञ-गति (10^{47}), सौ विसंज्ञ-गति को एक सर्वज्ञ (10^{49}), सौ सर्वज्ञ को एक विभुतंगम (10^{51}), एक सौ विभुतंगम को एक तल्लाक्षण (10^{53}) कहा जाता है।"

महावीराचार्य अपने ग्रंथ *गणित-सार-संग्रह* में 24 पदों (अर्थात् 10^{23} तक) की एक सूची प्रदान करते हैं। एक अज्ञात जैन ग्रंथ *अमलसिद्धि* में प्रत्येक 10 की घात से 10^{96} तक (दश-अनंत) की नाम के साथ एक सूची दी गई है। *कच्चायन* एक पाली व्याकरण ग्रंथ में 10^{140} तक के संख्या नामों की सूची दी गई है जिसका नाम असंख्येय है।

जैन और बौद्ध ग्रंथों में 10 की बड़ी घातों को व्यक्त करने के लिए आधार, जैसे— सहस्स (हजार) और कोटि (दस मिलियन) का उपयोग किया गया। उदाहरण के लिए प्रयुत (10^6) दस सत-सहस्स (दस सौ हजार) होगा।

आधुनिक नामकरण भी इसके समान ही है इन्हें हम कहते हैं—

एक सौ हजार, एक लाख है।	$100 \times 1000 = 1,00,000$	$10^2 \times 10^3 = 10^5$
एक सौ लाख, एक करोड़ है।	$100 \times 1,00,000 = 1,00,00,000$	$10^2 \times 10^5 = 10^7$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एक सौ करोड़, एक अरब है।	$100 \times 1,00,00,000 = 1,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^7 = 10^9$
एक सौ अरब, एक खरब है।	$100 \times 1,00,00,00,000 = 1,00,00,00,00,000$	$10^2 \times 10^9 = 10^{11}$

इसी क्रम में आगे बढ़ते हुए एक सौ खरब एक नील (10^{13}) होता है, एक सौ नील एक पद्म (10^{15}) होता है, एक सौ पद्म एक शंख (10^{17}) होता है और एक सौ शंख एक महाशंख (10^{19}) होता है।

अमरीकी या अंतरराष्ट्रीय पद्धति में हम कहते हैं—

एक हजार हजार, एक मिलियन है।	$1000 \times 1000 = 1,000,000$	$10^3 \times 10^3 = 10^6$
एक हजार मिलियन, एक बिलियन है।	$1000 \times 1,000,000 = 1,000,000,000$	$10^3 \times 10^6 = 10^9$
एक हजार बिलियन, एक ट्रिलियन है।	$1000 \times 1,000,000,000 = 1,000,000,000,000$	$10^3 \times 10^9 = 10^{12}$

इसी क्रम में आगे बढ़ते हुए एक हजार ट्रिलियन एक क्वाड्रिलियन (10^{15}) है। यह प्रतिरूप आगे भी चलता रहता है। इन नामों को ध्यान से देखिए **मि**लियन (10^6), **बि**लियन (10^9), **ट्रि**लियन (10^{12}), **क्वाड्रि**लियन (10^{15}), **क्विन**टिलियन (10^{18}), **सेक्स**टिलियन (10^{21}), **सेप्टी**लियन (10^{24}), **ओक्टि**लियन (10^{27}), **नोनि**लियन (10^{30}), **डेकि**लियन (10^{33})।

? प्रत्येक नाम का पहला भाग क्या दर्शाता है?

संख्या 10^{100} को गूगोल भी कहा जाता है। ब्रह्मांड में परमाणुओं की आकलित संख्या 10^{78} से 10^{82} है। संख्या $10^{\text{गूगोल}}$ को गूगोलप्लेक्स कहते है। यह कल्पना करना कठिन है कि यह संख्या कितनी बड़ी है।

वर्तमान समय में भारत में सबसे अधिक मूल्य का मुद्रा नोट ₹500 का है। अनुमान लगाइए कि पूरे विश्व में अब तक का सबसे अधिक मूल्य का मुद्रा नोट कौन-सा है? अब तक का सबसे अधिक मूल्य का एक विशेष बैंक नोट 1 सेक्सटिलियन पेंगो (10^{21} या 1 मिलियर्ड बिलपेंगो) है। यह वर्ष 1946 में हंगरी में मुद्रित हुआ था परंतु इसे कभी जारी नहीं किया गया। वर्ष 2009 में जिम्बावे में 100 ट्रिलियन (10^{14}) मूल्य का जिम्बावियन डॉलर का नोट मुद्रित किया गया था। छपाई के समय इसका मूल्य लगभग $30 था।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. $2^{224} \div 4^{32}$ के मान में इकाई अंक को ज्ञात कीजिए? [**संकेत** — $4 = 2^2$]
2. एक बक्से में 5 बोतलें हैं। प्रत्येक दिन एक नया बक्सा लाया जाता है। 40 दिन के पश्चात वहाँ कितनी बोतलें होंगी?
3. नीचे दी गई संख्या को दो या दो से अधिक घातों के गुणनफल के रूप में तीन भिन्न-भिन्न प्रकारों से लिखिए। घातें कोई भी पूर्णांक हो सकती हैं।
   (i) 64^3 (ii) 192^8 (iii) 32^{-5}
4. नीचे दिए गए प्रत्येक कथन की जाँच कीजिए और पता लगाइए कि 'यह सदैव सत्य है' 'कभी-कभी सत्य है' या 'कभी सत्य नहीं है'। अपने तर्क की व्याख्या कीजिए।
   (i) घन संख्याएँ भी वर्ग संख्याएँ होती हैं।
   (ii) चतुर्थ घात वर्ग संख्याएँ भी होती हैं।
   (iii) किसी संख्या की पाँचवी घात उस संख्या के घन से विभाज्य होती है।
   (iv) दो घन संख्याओं का गुणनफल एक घन संख्या होती है।
   (v) q^{46} एक चतुर्थ घात और एक छठी घात दोनों है (q एक अभाज्य संख्या है)।
5. इन्हें सरल कीजिए और घातांकीय रूप में लिखिए।
   (i) $10^{-2} \times 10^{-5}$ (ii) $5^7 \div 5^4$
   (iii) $9^{-7} \div 9^4$ (iv) $(13^{-2})^{-3}$
   (v) $m^5 n^{12} (mn)^9$
6. यदि $12^2 = 144$ तो निम्न का मान क्या है?
   (i) $(1.2)^2$ (ii) $(0.12)^2$
   (iii) $(0.012)^2$ (iv) 120^2
7. समान संख्याओं पर घेरा लगाइए।
   $2^4 \times 3^6$ $6^4 \times 3^2$ 6^{10} $18^2 \times 6^2$ 6^{24}
8. निम्नलिखित विकल्पों में से प्रत्येक बड़ी संख्या को पहचानिए
   (i) 4^3 या 3^4 (ii) 2^8 या 8^2 (iii) 100^2 या 2^{100}
9. एक डेयरी एक वर्ष में दूध के 8.5 अरब पैकेट के उत्पादन की योजना बनाती है। वह प्रत्येक पैकेट पर एक विशिष्ट पहचान कोड (आई.डी.) दर्शाना चाहती है। यदि वह इसके लिए 0 से 9 तक के अंकों का उपयोग करती है तो बताइए कि कोड कितने अंकों का होना चाहिए?
10. 64 एक वर्ग संख्या (8^2) और एक घन संख्या (4^3) है। क्या ऐसी और भी संख्याएँ हैं जो वर्ग और घन दोनों हों? क्या ऐसी संख्याओं को ज्ञात करने की कोई सामान्य विधि है?

गणित चर्चा

@KIBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. एक डिजिटल लॉकर का 5 अक्षरांकीय (एल्फान्यूमेरिक) वाला (इसमें अंक एवं अक्षर दोनों हो सकते हैं) गुप्त संकेत है जिसकी लंबाई 5 है। गुप्त संकेत (पासकोड) के कुछ उदाहरण G89PO, 38098, BRJKW और 003AZ हैं। इस प्रकार के कितने गुप्त संकेत संभव हैं?

12. वर्ष 2024 में संपूर्ण विश्व में भेड़ों की संख्या लगभग 10^9 थी और बकरियों की संख्या भी लगभग भेड़ों के समान ही थी। बताइए कि भेड़ों और बकरियों की कुल संख्या कितनी है?

(i) 20^9 (ii) 10^{11} (iii) 10^{10}

(iv) 10^{18} (v) 2×10^9 (vi) $10^9 + 10^9$

13. गणना कीजिए और अपने उत्तर को वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

(i) यदि विश्व में प्रत्येक व्यक्ति के पास 30 वस्त्र हों तो वस्त्रों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए?

(ii) विश्व में लगभग 100 मिलियन मधुमक्खियों के छत्ते हैं। यदि प्रत्येक छत्ते में 50,000 मधुमक्खियाँ हो तो मधुमक्खियों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

(iii) मानव शरीर में लगभग 38 ट्रिलियन (380 खरब) जीवाणु कोशिकाएँ होती हैं। विश्व के सभी मानवों के शरीर में रहने वाले जीवाणुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) संपूर्ण जीवनकाल में खाने में व्यतीत किया गया कुल समय सेकंडों में ज्ञात कीजिए।

14. आज से 1 बिलियन या 1 अरब सेकंड पूर्व क्या दिनांक थी?

प्रयास कीजिए

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- हमने कुछ स्थितियों का विश्लेषण किया, प्रश्न पूछे और पहले अनुमान लगाया। इसके पश्चात समस्या कथन की रूपरेखा बनाकर गणना करने के लिए अभिधारणा और सन्निकटन का प्रयोग करके उत्तर प्राप्त किए।
- हमने अनुभव किया कि कैसे तीव्र चरघातांकी वृद्धि, जिसे गुणनात्मक वृद्धि भी कहते हैं, की तुलना योगात्मक वृद्धि से की जा सकती है।
- $n \times n \times n \times n \times \ldots \times n$ *को* n^a *(*n *को स्वयं से* a *बार गुणा करने पर) और* $n^{-a} = \frac{1}{n^a}$ *लिख सकते हैं।*
- घातांक के साथ संक्रियाएँ निम्न की पुष्टि करती हैं—
  - $n^a \times n^b = n^{a+b}$
  - $(n^a)^b = (n^b)^a = n^{a \times b}$
  - $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $(n \neq 0)$
  - $n^a \times m^a = (n \times m)^a$
  - $n^a \div m^a = (n \div m)^a$ $(m \neq 0)$
  - $n^0 = 1$ $(n \neq 0)$
- संख्या 308100000 के लिए वैज्ञानिक संकेतन 3.081×10^8 है। किसी भी संख्या के **वैज्ञानिक संकेतन** के लिए **मानक रूप** $x \times 10^y$ है, जहाँ $x \geq 1$ और $x < 10$ तथा y एक पूर्णांक है।
- रोचक विचार प्रयोगों में सलंग्न होना यह समझने में उपयोग किया जा सकता है कि एक संख्या या मात्रा कितनी बड़ी है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पहेली का समय!

दस में आश्चर्यजनक!

इस खेल को खेलने के लिए एक साथी को साथ लीजिए। प्रत्येक खिलाड़ी 10 सेकंड में केवल 0 से 9 अंकों और अंकगणितीय संक्रियाओं का उपयोग करके एक संख्या या व्यंजक लिखते हैं। उनके द्वारा लिखी गई संख्याओं में जिसकी संख्या बड़ी होगी वह इस चरण का विजेता होगा।

10000000000000 999999×999999

पहले चरण में रॉक्सी ने 10000000000000 लिखा और एस्तु ने 999999×999999 लिखा। इन दोनों संख्याओं में रॉक्सी की संख्या बड़ी है। क्या आप बता सकते हैं क्यों? रॉक्सी की संख्या 10^{13} है जबकि एस्तु की संख्या $(10^6)^2$ से छोटी है।

दूसरे चरण में रॉक्सी ने $10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000} + 10^{1000}$ लिखा और एस्तु ने $(10^{1000000}) \times 9000$ लिखा। क्या आप बता सकते हैं कौन-सी संख्या बड़ी है?

$10^{1000}+10^{1000}+10^{1000}+10^{1000}$ $10^{1000000} \times 9000$

नीचे कुछ स्थितियाँ दी गई हैं जिन पर आप भिन्न-भिन्न चरणों के लिए विचार कर सकते हैं।

(i) घातांक की अनुमति नहीं है। केवल योग की अनुमति है।

(ii) घातांक की अनुमति नहीं है। केवल योग और गुणा की अनुमति है।

(iii) घातांक की अनुमति है। केवल योग की अनुमति है।

(iv) घातांक की अनुमति है। किसी भी अंकगणितीय संक्रिया की अनुमति है।

आप स्वयं के नियम बना सकते हैं या अधिक व्यक्तियों को खेल में सम्मिलित कर सकते हो।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

3 संख्याओं की कहानी

0875CH03

3.1 रीमा की जिज्ञासा

एक सुस्त दोपहरी में रीमा एक पुरानी पुस्तक के पृष्ठ पलट रही थी तभी एक पन्ना सर्र... से पुस्तक से निकलकर हवा में उड़ता हुआ जमीन पर जा गिरा। उसने उस पन्ने को उठाया और उस पर बने कुछ अलग प्रकार के प्रतीकों को एकटक देखने लगी। "ओह! यह क्या है?" वह अचंभित हुई।

रीमा उस पन्ने को लेकर अपने पिताजी की ओर दौड़ी जैसे यह कोई गुप्त खजाना हो। उसके पिताजी ने उस पन्ने को देखा और मुस्कुराने लगे। उन्होंने कहा, "लगभग 4000 वर्ष पूर्व एशिया के पश्चिमी भाग में मेसोपोटामिया नामक स्थान पर एक सभ्यता फली-फूली। यह वह स्थान था जिसमें वर्तमान समय के ईराक का एक बड़ा भाग एवं कुछ अन्य पड़ोसी देश सम्मिलित हैं। यह उनके अंक लिखने के तरीकों में से एक है।"

रीमा की आँखें चमक उठी "क्या सच में! ये विभिन्न प्रतीक संख्याएँ थीं?" उसकी जिज्ञासा और बढ़ गई और उसके मस्तिष्क में अनेक प्रश्न उठने लगे।

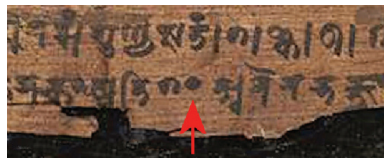
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

रीमा की जिज्ञासा को भाँपते हुए उसके पिताजी ने बताना प्रारंभ किया कि कैसे संख्या व संख्या निरूपण का विचार समय के साथ सभी भौगोलिक क्षेत्रों में विकसित होते हुए अंतत: अपने आधुनिक रूप में पहुँच गया। अब आप उनके साथ अतीत में यात्रा करने के लिए तैयार हो जाइए!

शताब्दियों पूर्व पाषाण युग से ही मनुष्य को गिनती करने की आवश्यकता हुई। वे अपने पास उपलब्ध फल, सब्जी, अनाज इत्यादि की मात्रा, अपने पशुधन की संख्या, वस्तुओं के व्यापार संबंधी विवरण, अनुष्ठानों में दी गई भेंट की संख्या आदि को निर्धारित करने के लिए किया करते थे। वे विगत दिनों की जानकारी भी रखना चाहते थे जिससे वे यह जान सकें व पूर्वानुमान कर सकें कि अमावस्या, पूर्णिमा या किसी ऋतु का आगमन जैसी महत्त्वपूर्ण घटनाएँ कब-कब घटित होंगी। यद्यपि जब वे ऐसी संख्या बोलते या लिखते थे तो वे आधुनिक संख्याओं का उपयोग नहीं करते थे जिनका हम वर्तमान में करते हैं।

वर्तमान में उपयोग की जाने वाली आधुनिक मौखिक व लिखित संख्याओं की संरचना की उत्पत्ति हजारों वर्ष पूर्व भारत में हुई थी। प्राचीन भारतीय ग्रंथ, जैसे— *यजुर्वेद संहिता* में 10 की घातों के आधार पर संख्याओं के नामों का उल्लेख लगभग वैसा ही है जैसा आज हम उन संख्याओं को मौखिक रूप में पढ़ते हैं। उदाहरण के लिए उन्होंने एक (एकक), दस (दश), सौ (शत), हजार (सहस्त्र), दस हजार (अयुत) आदि से लेकर 10^{12} और उसके आगे की संख्याओं के नाम सूचीबद्ध किए हैं।

वर्तमान में 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके जिस प्रकार हम अपनी संख्याएँ लिखते हैं उसकी उत्पत्ति व विकास भी लगभग 2000 वर्ष पूर्व भारत में ही हुआ था। अंक 0 (जिसे तब एक बिंदु के रूप में चिह्नित किया जाता था) को मिलाकर 10 अंकों का उपयोग करके लिखी गई संख्याओं का पहला ज्ञात उदाहरण *बख्शाली* पांडुलिपि (लगभग तीसरी शताब्दी सामान्य संवत्) में मिलता है। 499 सामान्य संवत् में आर्यभट्ट पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने 10 प्रतीकों वाली भारतीय पद्धति को पूर्णत: स्पष्ट किया एवं इसका उपयोग करके वैज्ञानिक गणनाओं की व्याख्या की।



बख्शाली पांडुलिपि में शून्य

भारतीय संख्या पद्धति लगभग 800 सामान्य संवत् तक अरब जगत में पहुँच गई थी। इसे महान पारसी गणितज्ञ अल-ख्वारिज्मी (जिनके नाम पर एल्गोरिद्म शब्द बना) ने अपनी पुस्तक *ऑन द कैलकुलेशन विद हिंदू न्यूमेरल्स* (825 सामान्य संवत्) और प्रसिद्ध दार्शनिक अल-किंदी ने अपनी पुस्तक *ऑन द यूज ऑफ द हिंदू न्यूमेरल्स* (830 सामान्य संवत्) के माध्यम से अरब जगत में लोकप्रिय बनाया।

लगभग 1100 सामान्य संवत् तक अरब जगत से हिंदू अंक यूरोप और अफ्रीका के कुछ भागों में पहुँच चुके थे। यद्यपि अल-ख्वारिज्मी द्वारा लिखित पुस्तक *ऑन द कैलकुलेशन विद हिंदू न्यूमेरल्स* का लैटिन में अनुवाद हो चुका था परंतु वास्तव में ये इतालवी गणितज्ञ फिबोनाची ही थे जिन्होंने लगभग 1200 सामान्य संवत् में भारतीय संख्या पद्धति को यूरोप में अपनाने के लिए तैयार किया। परंतु उस समय रोमन अंक यूरोपीय विचारधारा और लेखन में इतने गहराई से जुड़े हुए थे कि कई शताब्दियों तक भारतीय अंकों का व्यापक प्रयोग नहीं हो पाया था। किंतु यूरोपीय पुर्नजागरण के समय और 17वीं शताब्दी तक इन्हें अपनाना नितांत आवश्यक हो गया था अन्यथा इससे उस समय की वैज्ञानिक प्रगति में बाधा उत्पन्न होती।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

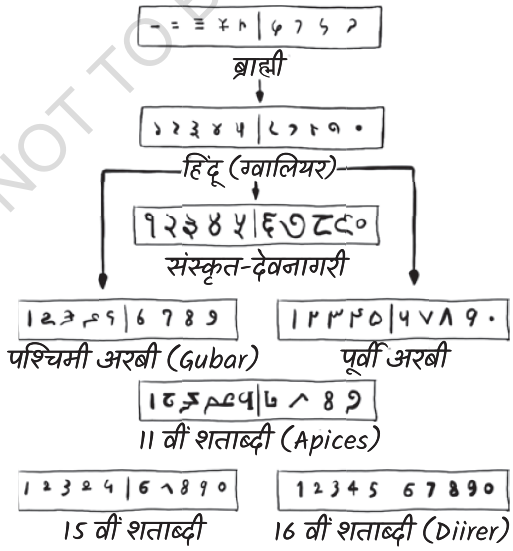
"प्रत्येक संभावित संख्या को 10 प्रतीकों (जिसमें से प्रत्येक प्रतीक का एक स्थानीय मान तथा एक निरपेक्ष मान हो) के समूह द्वारा व्यक्त करने की विशुद्ध पद्धति भारत में विकसित हुई। वर्तमान में यह विचार इतना साधारण लगता है कि इसकी उपयोगिता और अति महत्ता को अधिक महत्त्व नहीं दिया जाता। इसकी सरलता इस बात में निहित है कि इसने गणनाओं को सरल बनाया और अंकगणित को उपयोगी आविष्कारों में स्थान दिलवाया।"

—पियरे-साइमन लाप्लास (1749 – 1827)

इसके उपरांत इन दस अंकों का प्रयोग प्रत्येक महाद्वीप तक विस्तारित हो गया और वर्तमान में ये विश्व के प्रत्येक कोने में उपयोग किए जाते हैं।

चूँकि यूरोपियन विद्वानों ने भारतीय संख्यांकों की समझ अरब जगत से प्राप्त की। अत: अपने यूरोपियन परिप्रेक्ष्य में उन्होंने इन संख्यांकों को 'अरबी संख्यांक' कहा। दूसरी ओर जैसा कि ऊपर उल्लेखित है अरब विद्वानों, जैसे— अल-ख्वारिज्मी और अल-किंदी ने इन्हें 'हिंदू संख्यांक' कहा है। यूरोप में औपनिवेशिक काल में यूरोपीय शब्द 'अरबी संख्याएँ' व्यापक रूप से प्रचलित हुआ। यद्यपि वर्तमान में इस त्रुटि को यूरोप सहित विश्व की अनेक पाठ्यपुस्तकों और दस्तावेजों में सुधारा जा रहा है। वर्तमान में संख्याओं के लिए हम जिन सर्वाधिक प्रचलित शब्दावलियों का उपयोग कर रहे हैं वे 'हिंदू संख्यांक' 'भारतीय संख्यांक' एवं संक्रमणकालीन 'हिंदू-अरबी संख्यांक' हैं। यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि 'हिंदू' शब्द किसी धर्म को नहीं परंतु उस क्षेत्र या वहाँ के लोगों को संदर्भित करता है जहाँ से ये अंक आए हैं।

वर्तमान में भारतीय संख्या पद्धति में संख्याओं को लिखने के लिए प्रयुक्त अंकों 0,1,2,...,9 की संरचना एक लंबे समय में विकसित हुई जैसा कि नीचे दर्शाया गया है—



भारतीय संख्या पद्धति में प्रयुक्त होने वाले अंकों का विकास

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

भारतीय अंक प्रणाली को वैश्विक स्तर पर अपनाए जाने से पूर्व विभिन्न जन समुदाय संख्याओं को दर्शाने के लिए विभिन्न विधियों का प्रयोग करते थे। हम उनमें से कुछ विधियों की संक्षेप में चर्चा करेंगे। इन पद्धतियों को हम कालानुक्रम में नहीं परंतु एक ऐसे क्रम में देखेंगे जो संख्या निरूपण की अवधारणा के विकास के मुख्य चरणों को दर्शाता है।

आइए, सबसे पहले हम किसी दिए गए संग्रह में वस्तुओं की संख्या गिनने और निर्धारित करने के लिए आवश्यक कुछ मूलभूत विधियों की खोज करते हैं।

गणन की क्रियाविधि

कल्पना कीजिए कि हम लगभग दस हजार वर्ष पूर्व के पाषाण युग में जीवन व्यतीत कर रहे हैं। मान लीजिए कि हमारे पास गायों का एक झुंड है। यहाँ कुछ स्वाभाविक प्रश्न दिए गए हैं जो हम झुंड के विषय में पूछ सकते हैं—

? प्रश्न 1. हम यह कैसे सुनिश्चित करेंगे कि सभी गायें चरने के पश्चात अपने स्थान पर सुरक्षित वापस आ गई हैं?

? प्रश्न 2. क्या हमारे पास अपने पड़ोसी की तुलना में कम गायें हैं?

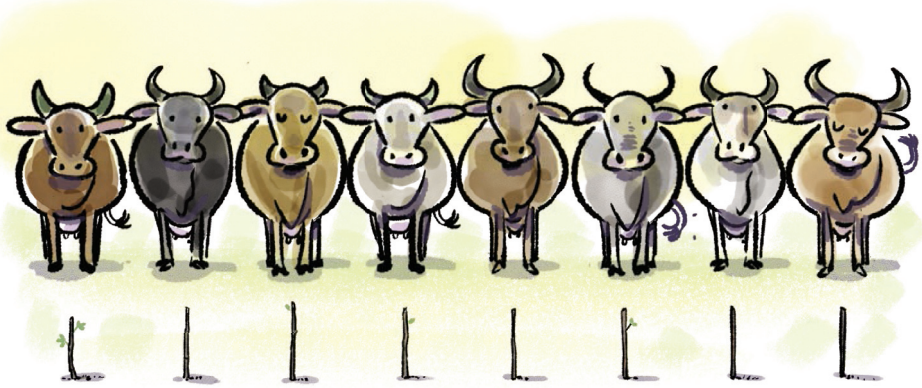
? प्रश्न 3. यदि हमारे पास गायों की संख्या कम है तो हमें कितनी और अधिक गायों की आवश्यकता होगी जिससे हमारी और हमारे पड़ोसी की गायों की संख्या एक समान हो जाए।

गणित चर्चा

हमें इन प्रश्नों को हिंदू संख्या पद्धति के अनुसार संख्या-नाम या लिखित संख्याओं का प्रयोग किए बिना हल करना होगा। बताइए कि हम इसे कैसे हल कर सकते हैं?

आगे कुछ संभावित विधियाँ दी गई हैं।

विधि 1— हम कंकड़, छड़ियाँ या कोई भी ऐसी वस्तु जो प्रचुर मात्रा में उपलब्ध हो, उनका उपयोग करके प्रश्नों को हल कर सकते हैं। आइए, छड़ियाँ लेते हैं। झुंड की प्रत्येक गाय के लिए हम एक छड़ी रख सकते हैं। अंत में संग्रहीत छड़ियाँ हमें गायों की वह संख्या दर्शाती है जिसका उपयोग यह ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है कि कोई गाय खोई तो नहीं है।



© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रत्येक गाय के संगत एक छड़ी रखने की यह विधि जिसमें कोई भी दो गायें एक ही छड़ी से संबंधित नहीं हों एकैकी प्रतिचित्रण (वन-टू-वन मैपिंग) कहलाता है। इस प्रतिचित्रण का प्रयोग संख्याओं को दर्शाने की विधि के रूप में किया जा सकता है जैसा कि निम्न तालिका में दर्शाया गया है।

संख्या	इसका निरूपण (छड़ियों के उपयोग से)
1	
2	
3	
4	
5	
.	.
.	.
.	.

? आप अन्य दो प्रश्नों (प्रश्न 2 और प्रश्न 3) के उत्तर देने के लिए छड़ियों का उपयोग किस प्रकार करेंगे?

विधि 2 — हम वस्तुओं के स्थान पर ध्वनियों या नामों के एक मानक अनुक्रम का उपयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए हम किसी भी भाषा के वर्णों की ध्वनियों का उपयोग कर सकते हैं। गिनती करते समय हम वस्तुओं और वर्णों के मध्य एकैकी प्रतिचित्रण बना सकते हैं अर्थात गणना की जाने वाली प्रत्येक वस्तु को वर्ण-क्रम का पालन करते हुए एक वर्ण से जोड़ सकते हैं। इस प्रतिचित्रण का उपयोग संख्याओं के मौखिक निरूपण की एक विधि के रूप में किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए यदि हम अंग्रेजी के वर्णों '*a*' से '*z*' तक का उपयोग करें तो हमें निम्नलिखित संख्या निरूपण प्राप्त होगा।

संख्या	इसका निरूपण (वर्ण ध्वनियों या नामों का उपयोग करके)
1	*a*
2	*b*
3	*c*
4	*d*
5	*e*
.	.
.	.
.	.
26	*z*

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

केवल अंग्रेजी वर्णमाला के वर्णों का उपयोग इस रूप में करने की एक स्पष्ट सीमा यह है कि इसका उपयोग 26 से अधिक वस्तुओं वाले समूहों की गिनती करने के लिए नहीं किया जा सकता है।

? आप अपनी भाषा के वर्णों की ध्वनियों का उपयोग करके इस प्रकार से कितनी संख्याओं को निरूपित कर सकते हैं?

गणित चर्चा

विधि 3— हम लिखित प्रतीकों के एक अनुक्रम को निम्न प्रकार से प्रयोग कर सकते हैं—

तालिका 1

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्रतीकों द्वारा निरूपण	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
संख्या	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
प्रतीकों द्वारा निरूपण	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

? क्या आप इसी प्रकार बड़ी संख्याओं को दर्शाने के लिए भी इस विधि का विस्तार कर सकते हैं? और कैसे?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

उपर्युक्त चर्चा के उपरांत हम देखते हैं कि गिनती करने के लिए या किसी संग्रह का आकार ज्ञात करने के लिए हमें वस्तुओं, नामों या लिखित प्रतीकों के एक मानक अनुक्रम की आवश्यकता होती है जिनका एक निश्चित क्रम होना चाहिए। आइए, इस मानक अनुक्रम को **संख्या पद्धति** नाम देते हैं। वस्तुओं के संग्रह की गणना, वस्तु और मानक अनुक्रम के मध्य क्रमिक अनुक्रम का पालन करते हुए एकैकी प्रतिचित्रण बनाकर की जा सकती है।

चूँकि संख्याओं का कोई अंत नहीं होता है, अत: संख्याओं को सरलता से गिनने के लिए एक अंतहीन मानक अनुक्रम या संख्या पद्धति बनाना एक चुनौती है। छड़ियों का उपयोग करने से एक अंतहीन मानक अनुक्रम या संख्या पद्धति प्राप्त होती है। परंतु इससे एक बड़े संग्रह की गणना करना सुविधाजनक नहीं है, क्योंकि हमें जितनी वस्तुओं की गणना करनी है उतनी ही छड़ियों की आवश्यकता होगी। विधि 2 में भाषा के वर्णों की ध्वनियों के उपयोग से गिनती करना सुविधाजनक है परंतु यह एक अंतहीन मानक अनुक्रम या संख्या पद्धति नहीं है। विधि 3 में दी गई मानक अनुक्रम या संख्या पद्धति वास्तव में यूरोप में प्रयोग की जाने वाली पद्धति थी जिसका स्थान बाद में हिंदू संख्या पद्धति द्वारा ले लिया गया। इसे **रोमन संख्या पद्धति** कहा जाता है। यह शताब्दियों तक यूरोप में व्यापक रूप से उपयोग की जाती थी और अनेक उद्देश्यों के लिए सुविधाजनक थी परंतु इसमें भी यही कमी थी किसी भी बड़ी से बड़ी संख्या को लिखने के लिए अत्यधिक प्रतीकों का उपयोग करने की आवश्यकता पड़ती है। हम संख्याएँ लिखने की इस पद्धति के विषय में आगे और अधिक जानेंगे।

दी गई तीनों विधियों में दर्शाया गया है कि इतिहास हमें मूर्त वस्तुओं (जैसे—छड़ी, कंकड़, शरीर के अंग आदि), नामों और लिखित प्रतीकों का उपयोग करके बनाई गई संख्या प्रणालियों के उदाहरण प्रस्तुत करता है। कुछ व्यक्ति समूहों द्वारा संख्याओं को मूर्त वस्तुओं के साथ-साथ नामों से भी दर्शाया जाता था परंतु कुछ अन्य जैसे चीनी लोगों द्वारा उपर्युक्त तीनों रूपों में दर्शाया जाता था। लिखित संख्या पद्धति में प्रयुक्त होने वाले प्रतीकों को **संख्यांक** कहा जाता है। उदाहरण के लिए 0, 1, 5, 36, 193 आदि हिंदू संख्या पद्धति में पाए जाने वाले कुछ संख्यांक हैं। 'छोटी' संख्याओं को दर्शाने वाले संख्यांकों के सदैव नाम होते थे। अत: लिखित प्रतीकों से बनी संख्या पद्धति सदैव नामों से बनी संख्या पद्धति के साथ-साथ चलती थी जैसा कि आधुनिक हिंदू संख्या पद्धति में होता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

गणित चर्चा

1. मान लीजिए आप एक संख्या पद्धति का उपयोग कर रहे हैं जिसमें संख्याओं को दर्शाने के लिए छड़ियों का उपयोग किया जाता है जैसा कि विधि 1 में बताया गया है। हिंदू संख्या पद्धति के संख्या नामों या संख्यांकों का उपयोग किए बिना दो संख्याओं या छड़ियों के दो संग्रहों के जोड़, घटाव, गुणन और विभाजन की विधि बताइए।

गणित चर्चा

2. विधि 2 में दी गई संख्या पद्धति का विस्तार करने की एक विधि यह है कि एक से अधिक वर्णों वाली शृंखला का प्रयोग किया जाए। उदाहरण के लिए हम 27 के लिए '*aa*' का प्रयोग कर सकते हैं। सभी संख्याओं को दर्शाने के लिए आप इस पद्धति को कैसे विस्तारित कर सकते हैं? ऐसा करने की अनेक विधियाँ हो सकती हैं।

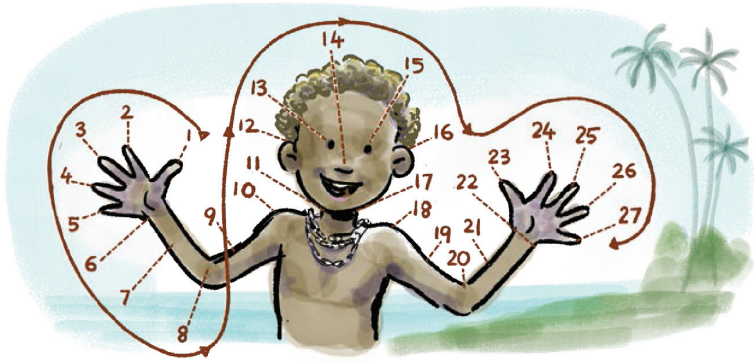
प्रयास कीजिए

3. आप स्वयं एक संख्या पद्धति बनाने का प्रयास कीजिए।

3.2 कुछ प्रारंभिक संख्या पद्धतियाँ

I. शरीर के अंगों का प्रयोग

विश्व में अनेक जन समुदायों ने गणन के लिए अपने हाथों और शरीर के अन्य अंगों का प्रयोग किया है। आइए, देखते हैं कि कैसे पापुआ न्यू गिनी के एक जन समुदाय ने इस विधि का प्रयोग किया तथा वर्तमान में भी शरीर के अंगों का मानक अनुक्रम या संख्या पद्धति के रूप में प्रयोग करते हैं।



II. हड्डियों और अन्य सतहों पर मिलान प्रतीक

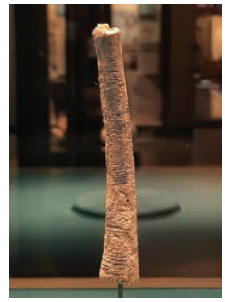
किसी सतह जैसे हड्डी पर या गुफा की दीवार पर चिह्न बनाना संख्याओं को दर्शाने की प्राचीनतम विधियों में से एक है। इन प्रतीकों को **मिलान प्रतीक** (गणना प्रतीक) भी कहा जाता है।

इस विधि में गणना की जा रही प्रत्येक वस्तु के लिए एक चिह्न बनाया जाता है। अंत में इस प्रकार प्राप्त प्रतीकों का संग्रह वस्तुओं की कुल संख्या को दर्शाता है। यह विधि छड़ियों के प्रयोग से गिनने की विधि (विधि 1) के समान ही है, अंतर मात्र यह है कि इसमें एक छड़ी जोड़ने के स्थान पर एक चिह्न बनाया जाता है।

पुरातत्वविदों ने 20,000 वर्ष पूर्व ऐसी प्राचीन हड्डियों का पता लगाया जिन पर मिलान चिह्न बने हुए प्रतीत होते हैं। ऐसी सबसे प्राचीन ज्ञात हड्डियों जिन पर बने प्रतीकों से दर्शाया गया है वे इशांगो हड्डी और लेबोम्बो हड्डी हैं। 20,000 से 35,000 वर्ष पूर्व इंशागो हड्डी कांगो गणराज्य में खोजी गई थी। इसमें प्रतीकों को स्तंभवार व्यवस्थित किया गया है। यह संभवत: कालदर्शक पद्धति का संकेत देते हैं। दक्षिण अफ्रीका में खोजी गई लेबोम्बो हड्डी उससे भी अधिक प्राचीन एक मिलान प्रतीकों वाली छड़ी है। इस पर 29 चिह्न बने हुए हैं और इसकी अनुमानित आयु लगभग 44,000 वर्ष है। इसे प्राचीनतम गणितीय कलाकृतियों में से एक माना जाता है। संभवत: इसका प्रयोग भिन्न छड़ी या चंद्र कालदर्शक के रूप में किया गया होगा।

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

लेबोम्बो हड्डी



इशांगो हड्डी

III. दो के बार-बार गणन से प्राप्त संख्याओं के नाम

ऑस्ट्रेलिया के आदिवासी समूह गुमुलगल द्वारा उनकी संख्याओं के लिए निम्नलिखित शब्द प्रयोग किए जाते थे।

गुमुलगल
(ऑस्ट्रेलिया)

1. *उरापोन (urapon)*
2. *उकासर (ukasar)*
3. *उकासर-उरापोन (ukasar-urapon)*
4. *उकासर-उकासर (ukasar-ukasar)*
5. *उकासर-उकासर-उरापोन (ukasar-ukasar-urapon)*
6. *उकासर-उकासर-उकासर (ukasar-ukasar-ukasar)*

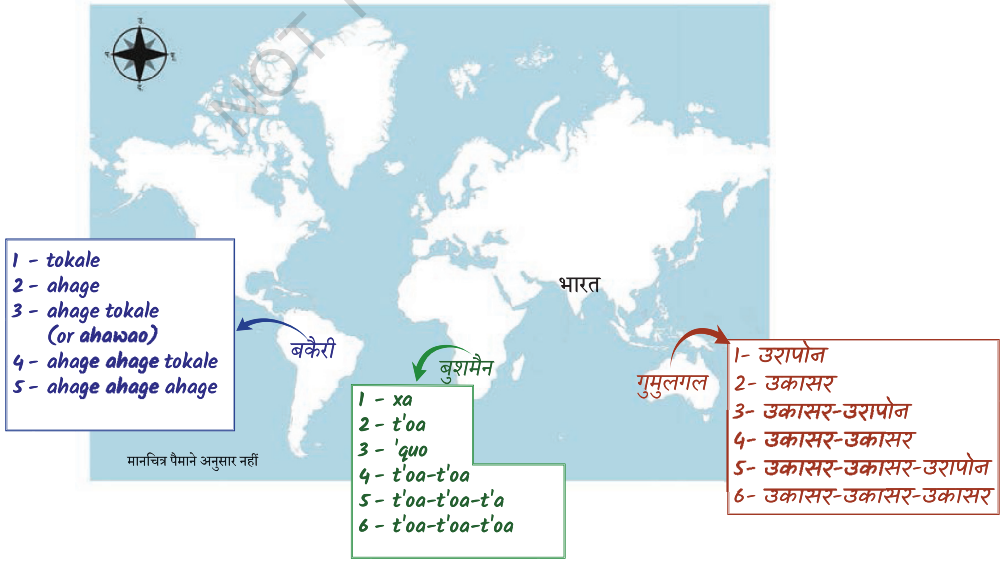
? क्या आप बता सकते हैं कि उनके संख्या नाम कैसे बनते हैं?

संख्या 3 का नाम 2 और 1 के संख्यात्मक नामों से मिलकर बना है। संख्या 4 का नाम दो बार 2 के संख्यात्मक नाम के प्रयोग से बना है।

? क्या आप देख सकते हैं कि अन्य संख्याओं के नाम कैसे बने हैं?

संख्याओं को 2 के बार-बार प्रयोग (2 के पदों में) से गिना जाता है और जिसका प्रयोग करके संख्याओं के नाम लिखे जाते हैं— $3 = 2 + 1$, $4 = 2 + 2$, $5 = 2 + 2 + 1$, $6 = 2 + 2 + 2$
गुमुलगल ने 6 से बड़ी किसी भी संख्या को 'रास' कहा है।

इस संख्या पद्धति से जुड़ी एक बहुत ही रोचक और चकित करने वाली ऐतिहासिक घटना है। आइए, दक्षिण अफ्रीका के बुशमैन तथा दक्षिण अमेरिका के मूल निवासियों की निम्नलिखित संख्या पद्धतियों को देखते हैं।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

भौगोलिक रूप से इतने दूर होने और परस्पर संपर्क का प्रमाण न होने पर भी इन तीनों समूहों ने एक समान संख्या पद्धतियाँ विकसित की हैं। इतिहासकार इस विषय पर आश्चर्यचकित हैं कि ऐसा कैसे हुआ? एक सिद्धांत यह है कि संभवत: इन तीनों समूहों के व्यक्तियों के पूर्वज समान रहे होंगे जिन्होंने इस संख्या पद्धति का उपयोग किया होगा। समय के साथ उनके वंशज इन स्थानों पर आकर बस गए होंगे।

गुमुलगल संख्या पद्धति में मात्र 6 तक की संख्याओं के लिए संख्या नाम थे तथापि हम यहाँ एक विचार की उत्पत्ति देख सकते हैं। गणना के लिए 2 के बार-बार प्रयोग से संख्याओं को दर्शाने की पद्धति अन्य पद्धतियों, जैसे—मिलान पद्धति आदि से श्रेष्ठ है। विभिन्न संख्या पद्धतियों में इस विचार ने जो व्यापक रूप लिया है वह इस प्रकार है— एक निश्चित संख्या के समूहों में गिनना (जैसे गुमुलगल पद्धति के संदर्भ में 2) और बड़ी संख्याओं को दर्शाने के लिए इस समूह के आकार से जुड़े शब्द या प्रतीकों का उपयोग करना। विभिन्न संख्या पद्धतियों में सामान्य रूप से उपयोग किए जाने वाले कुछ समूह आकार 2, 5, 10 और 20 हैं। आप देखें कि रोमन पद्धति (तालिका 1) में 5 के समूह में गणन करने की अवधारणा निहित है।

एक निश्चित समूह आकार में गणन और संख्याओं को दर्शाने के लिए इस अवधारणा का प्रयोग करना संख्या पद्धतियों के विकास के इतिहास में एक महत्त्वपूर्ण अवधारणा है।

उस समय इस अवधारणा का एक कारण यह भी रहा होगा कि किसी दिए गए संग्रह के आकार को एक दृष्टि में तुरंत जानने की मनुष्य की भी एक सीमा है। आइए, निम्नलिखित गतिविधि को करने का प्रयास करें।

? आइए, नीचे दिए गए प्रत्येक बक्से में वस्तुओं की संख्या शीघ्रता से गिनें—

आप गणना किए बिना ही किस आकार के समूह में वस्तुओं की संख्या तुरंत देख सकते हैं? अधिकांश व्यक्तियों को एक बार में 5 या उससे अधिक वस्तुओं वाले समूहों को गिनना कठिन लगता है।

एक बार में 5 या उससे अधिक वस्तुओं को देखकर संख्या को जानने में कठिनाई के कारण ही उस समय के व्यक्तियों को 5 या उससे अधिक के समूह को एक नए प्रतीक से परिवर्तित करने के लिए प्रेरित किया होगा। जैसा कि तालिका 1 में दर्शाई गई पद्धति में दर्शाया गया है।

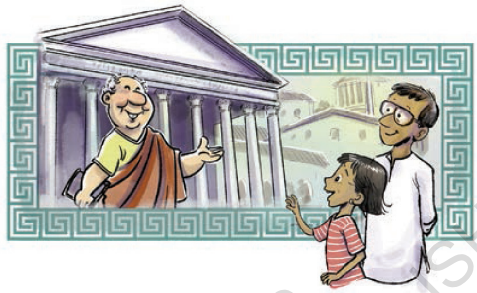
गणित चर्चा

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? ऐसी संख्या पद्धति का प्रयोग करने में क्या कठिनाइयाँ हो सकती हैं जो मात्र एक ही आकार के समूहों में गणना करती है? आप 1345 जैसी संख्या को उस पद्धति में कैसे निरूपित करेंगे जो मात्र 5 के बार-बार प्रयोग से गणना करती है?

यद्यपि एक निश्चित आकार के समूहों में गिनती करना और संख्याओं को दर्शाने के लिए इसका प्रयोग मिलान विधि की अपेक्षा अधिक सहज है परंतु यह विधि बड़ी संख्याओं के लिए अधिक कठिन हो सकती है। आइए, अब अगली पद्धति में इसका एक परिष्कृत रूप देखते हैं।

IV. रोमन संख्यांक



रोमन संख्या पद्धति में 20 तक की संख्याएँ हम पहले ही देख चुके हैं (तालिका 1)। हमने देखा कि रोमन संख्या पद्धति में 1 के लिए I, 5 के लिए V और 10 के लिए X का प्रयोग होता है।

39 तक किसी भी संख्या हेतु रोमन संख्यांक प्राप्त करने के लिए सर्वप्रथम संख्या को अधिक से अधिक यथासंभव 10-10 के समूहों में समूहीकृत किया जाता है। शेष को यथासंभव 5-5 के समूह में समूहीकृत किया जाता है। अंत में शेष के 1-1 के समूह बनाए जाते हैं।

उदाहरण — आइए, संख्या 27 लें

$$27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1$$

अत: 27 के लिए रोमन संख्यांक XXVII है।

50 को XXXXX के रूप में दर्शाने के स्थान पर एक नया प्रतीक (L) दिया गया है। जिस प्रकार संख्या 4 को 5 से 1 कम के रूप में दर्शाया जाता है अर्थात IV, इसी प्रकार 40 को 50 से 10 कम अर्थात XL के रूप में दर्शाया जाता है। यद्यपि इस पद्धति का प्रयोग करने वाले इसका अनुसरण नहीं करते थे। कभी-कभी 40 को XXXX के रूप में भी दर्शाया जाता था।

रोमन संख्या पद्धति कुछ निश्चित बड़ी संख्याओं को दर्शाने के लिए नए प्रतीकों का प्रयोग करती है। आइए, उन सभी संख्याओं को जिनके लिए एक नया मूल प्रतीक होता है उन्हें हम **सांकेतिक संख्याएँ** कहेंगे। यहाँ रोमन पद्धति की कुछ सांकेतिक संख्याएँ और उनसे संबंधित संख्यांक दिए गए हैं।

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इन प्रतीकों का प्रयोग अन्य संख्याओं को दर्शाने के लिए भी किया जाता है। उदाहरण के लिए संख्या 2367 पर विचार कीजिए आइए, इसे 1000 से प्रारंभ करते हुए सांकेतिक संख्याओं के योग के रूप में लिखते हैं। सर्वप्रथम यथासंभव 1000 लेते हैं तत्पश्चात यथासंभव 500 और इसी प्रकार आगे की सांकेतिक संख्याएँ लेते हैं तब हमें प्राप्त होता है—

$$2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1$$

अत: रोमन संख्यांकों में यह संख्या MMCCCLXVII है।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित संख्याओं को रोमन पद्धति में दर्शाइए।

(i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715

हम देखते हैं कि यह पद्धति पूर्व में चर्चा की गई कुछ संख्या पद्धतियों की अपेक्षा कितनी अधिक प्रभावशाली है। ऐसा प्रतीत होता है कि इस पद्धति का उद्भव रोम में लगभग आठवीं शताब्दी सामान्य संवत् पूर्व में प्रचलित प्राचीन यूनानी संख्या पद्धति से हुआ होगा। समय के साथ यह पद्धति विकसित होती गई। रोमन साम्राज्य के विस्तार के साथ यह पूरे यूरोप में फैल गई।

इस पद्धति की प्रभावशीलता किसी दी गई संख्या को मात्र एक समूह आकार के आधार पर समूहीकृत करने के कारण नहीं बल्कि समूह आकारों (जिन्हें सांकेतिक संख्याएँ कहते हैं) के अनुक्रम के आधार पर समूहीकृत करने और इसके पश्चात इन सांकेतिक संख्याओं के अनुक्रम द्वारा दी गई संख्या को दर्शाने से है। इतिहास में रोमन पद्धति की इस विशेषता का संख्या पद्धति के विकास में एक उल्लेखनीय योगदान है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

रोमन पद्धति अन्य पद्धतियों की तुलना में दक्ष होते हुए भी अंकगणितीय संक्रियाओं विशेषकर गुणा और भाग को सरलता से करने में इतनी सक्षम नहीं है।

उदाहरण— निम्नलिखित संख्याओं को हिंदू संख्यांकों में परिवर्तित किए बिना जोड़ने का प्रयास कीजिए।

(क) CCXXXII + CCCCXIII

आइए, प्रत्येक I, X और C की कुल संख्या ज्ञात करने का प्रयास करें और इन्हें सबसे बड़ी सांकेतिक संख्या से प्रारंभ करते हुए समूहीकृत करें। प्रथम दृष्टया देखने से ऐसा प्रतीत होता है कि सबसे बड़ी सांकेतिक संख्या 'C' है परंतु ध्यान दीजिए कि 5C (100) मिलकर एक D (500) बनाते हैं। अत: इनका योग है—

D
C C X X X I I
C C C C X I I I

XL V
DC X X X I I
X I I I = DCXLV

अब इसे स्वयं कीजिए।

(ख) LXXXVII + LXXVIII

? रोमन संख्यांकों में दी गई दो संख्याओं को हिंदू संख्यांकों में परिवर्तित किए बिना आप कैसे गुणा करेंगे? निम्नलिखित सांकेतिक संख्याओं के युग्मों का गुणनफल ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।
V × L, L × D, V × D एवं VII × IX

प्रयास कीजिए

रोमन पद्धति में व्यक्ति अपनी अंकगणितीय संक्रियाओं को करने हेतु **अबेकस** (abacus) नामक एक गणना उपकरण का उपयोग करते थे। अबेकस के विषय में हम अगले अनुभाग में जानेंगे। यद्यपि प्रशिक्षित व्यक्ति ही इस उपकरण का प्रयोग करते थे।

ऊपर चर्चा की गई संख्या पद्धतियों पर विचार करते समय यह नहीं मानना चाहिए कि ऐतिहासिक रूप से कोई एक पद्धति पूर्व में विकसित किसी अन्य पद्धति में सुधार के रूप में विकसित हुई है। अब आगे आने वाली संख्या पद्धतियों का अध्ययन करते समय भी इस बात को ध्यान में अवश्य रखना चाहिए। प्रत्येक संख्या पद्धति के विकास की वास्तविक कहानी अत्यधिक जटिल है और कई बार स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं हो पाई है। अत: इस अध्याय से हम इसे खोजने का प्रयास नहीं करेंगे।

? आइए, पता लगाएँ

1. प्रशांत महासागर के एक द्वीप में रहने वाले मूल निवासियों का एक समूह भिन्न-भिन्न वस्तुओं को गिनने के लिए संख्या नामों के विभिन्न अनुक्रम का प्रयोग करते हैं। वे ऐसा क्यों करते हैं? सोचकर बताइए।

गणित चर्चा

2. 2 के बार-बार प्रयोग से गिनती करने की इसी विधि से गुमुलगल संख्या पद्धति की 6 से आगे की संख्याओं पर विचार कीजिए। इस पद्धति में आने वाली संख्याओं के लिए हिंदू संख्यांकों का प्रयोग किए बिना विभिन्न अंकगणितीय संक्रियाएँ (+, –, ×, ÷) करने की विधियों का पता लगाइए।

गणित चर्चा

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इसका उपयोग निम्नलिखित का मूल्यांकन करने के लिए कीजिए।

(i) *(उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उरापोन) + (उकासर - उकासर - उकासर - उरापोन)*

(ii) *(उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उरापोन) – (उकासर - उकासर - उकासर)*

(iii) *(उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उरापोन) × (उकासर - उकासर)*

(iv) *(उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उकासर - उकासर) ÷ (उकासर - उकासर)*

3. हिंदू संख्या पद्धति की उन विशेषताओं की पहचान कीजिए जो इसे रोमन संख्या पद्धति की तुलना में अधिक प्रभावी बनाती हैं।

गणित चर्चा

4. इस अनुभाग में चर्चा की गई अवधारणाओं का प्रयोग करते हुए पूर्व में बनी संख्या पद्धति को परिष्कृत करने का प्रयास कीजिए।

प्रयास कीजिए

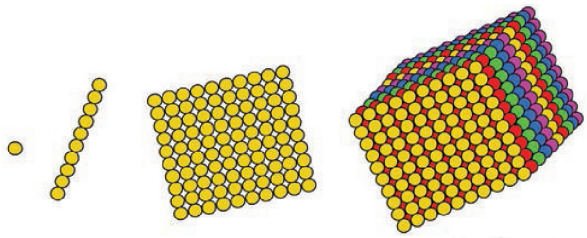
3.3 आधार की अवधारणा

I. मिस्र की संख्या पद्धति

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अब हम एक लिखित संख्या पद्धति का अवलोकन करेंगे जिसे मिस्रवासियों ने लगभग 3000 सामान्य संवत् पूर्व विकसित किया था। इस पद्धति में हम किसी दी गई संख्या को समूहीकृत करने और दर्शाने के लिए सांकेतिक संख्याओं का प्रयोग करते हैं। तथापि इस पद्धति की मुख्य विशेषता सांकेतिक संख्याओं का अनुक्रम है।

कल्पना कीजिए कि आप कंकड़ों का एक समूह बना रहे हैं। माना एक कंकड़ के लिए पहली सांकेतिक संख्या 1 है। पिछली सांकेतिक संख्या (1) के 10 संग्रहों का एक साथ समूह बनाइए। इसका आकार दूसरी सांकेतिक संख्या है जो कि 10 है। पिछली सांकेतिक संख्या (10) के 10 संग्रहों का एक साथ समूह बनाइए। इसका आकार तीसरी सांकेतिक संख्या है जो कि $10 \times 10 = 100$ है और इसी प्रकार हम अगली सांकेतिक संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।



प्रत्येक सांकेतिक संख्या पिछली संख्या की 10 गुना है। चूँकि पहली सांकेतिक संख्या 1 है इसलिए ये सभी संख्याएँ 10 की घात हैं। इन संख्याओं के लिए गए प्रतीक निम्नलिखित हैं—

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7

रोमन संख्याओं की भाँति किसी दी गई संख्या को सांकेतिक संख्याओं के समूहों में गिना जा सकता है। यह दी गई संख्या से छोटी सबसे बड़ी सांकेतिक संख्या से आरंभ होती है। इसके पश्चात इसका प्रयोग संख्यांक निरूपित करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण के लिए संख्या 324 जोकि 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4 के समान है उसे के रूप में लिखा जाता है।

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित संख्याओं को मिस्र की संख्या पद्धति में दर्शाइए।
   10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707
2. ये संख्यांक किन संख्याओं को दर्शाते हैं?

(i)

(ii)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

II. मिस्र की संख्या पद्धति में विविधताएँ और आधार की धारणा

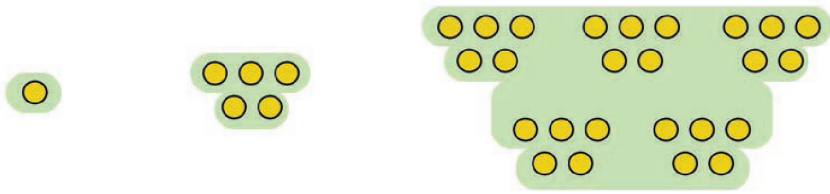
पिछली सांकेतिक संख्या के समान आकार के 10 संग्रहों को एक साथ समूहीकृत (जैसा कि मिस्र पद्धति में होता था) करने के स्थान पर क्या हम पिछली सांकेतिक संख्या के अनुरूप समान आकार के 5 संग्रहों को एक साथ समूहीकृत करके एक संख्या पद्धति प्राप्त कर सकते हैं? क्या इस 5 को किसी भी धनात्मक पूर्णांक से प्रतिस्थापित किया जा सकता है?

आइए, इस संभावना की जाँच करें। माना पहली सांकेतिक संख्या 1 है।

पिछली सांकेतिक संख्या (1) के समान आकार के 5 संग्रहों का एक साथ समूह बनाइए। इसका आकार दूसरी सांकेतिक संख्या है जो कि 5 है।

पिछली सांकेतिक संख्या (5) के समान आकार के 5 संग्रहों का एक साथ समूह बनाइए। इसका आकार तीसरी सांकेतिक संख्या जो कि $5 \times 5 = 25$ है।

पिछली सांकेतिक संख्या (25) के समान आकार के 5 संग्रहों का एक साथ समूह बनाइए। इसका आकार चौथी सांकेतिक संख्या जो कि $5 \times 25 = 125$ है।



अत: हमारे पास एक नई संख्या पद्धति है जहाँ प्रत्येक सांकेतिक संख्या पिछली सांकेतिक संख्या की 5 गुना है। चूँकि पहली सांकेतिक संख्या 1 है अत: ये सभी संख्याएँ 5 की घात हैं।

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$

△ □ ⬡ ○ ~ ↑

? संख्या 143 को इस नई संख्या पद्धति में व्यक्त कीजिए।

आइए, हम समूहन करना आरंभ करें। $5^3 = 125$ से प्रारंभ करते हैं क्योंकि यह संख्या 143 से छोटी सबसे बड़ी सांकेतिक संख्या है। हमें प्राप्त होता है—

$$143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1$$

अत: नई पद्धति में संख्या 143 के लिए संख्यांक ○□□□△△△ हैं।

संख्या पद्धतियाँ जिनमें सांकेतिक संख्याएँ होती हैं उनमें—

(क) पहली सांकेतिक संख्या 1 होती है।

(ख) प्रत्येक अगली सांकेतिक संख्या वर्तमान सांकेतिक संख्या को किसी निश्चित संख्या n से गुणा करके प्राप्त की जाती है इसे **आधार-n** संख्या पद्धति कहा जाता है।

मिस्र की संख्या पद्धति आधार-10 पद्धति है और जो संख्या पद्धति हमनें बनाई है वह आधार-5 पद्धति है। आधार-10 पद्धति को **दशमलव संख्या पद्धति** भी कहा जाता है।

© KSEEB NOT TO BE REPUBLISHED

? आइए, पता लगाएँ

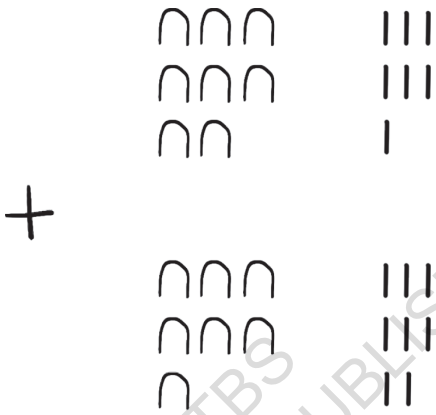
1. निम्नलिखित संख्याओं को आधार-5 पद्धति में दिए गए प्रतीकों का प्रयोग करके लिखिए
   15, 50, 137, 293, 651
2. क्या ऐसी कोई संख्या है जिसे हमारी उपर्युक्त वर्णित आधार-5 पद्धति में नहीं दर्शाया जा सकता? क्यों या क्यों नहीं?
3. आधार-7 पद्धति की सांकेतिक संख्याओं का अभिकलन कीजिए। सामान्यत: आधार-n पद्धति की सांकेतिक संख्याएँ क्या हैं?

आधार-n संख्या पद्धति की सांकेतिक संख्याएँ $n^0 = 1$ से आरंभ होने वाली n की घातें 1, n, n^2, n^3, ... हैं।

आधार-n पद्धति के लाभ

किसी संख्या की सभी घातों से बनने वाली सांकेतिक संख्याएँ लेने के क्या लाभ हैं? आइए, इसे समझने के लिए सांकेतिक संख्याओं का प्रयोग करके कुछ अंकगणितीय संक्रियाएँ करें।

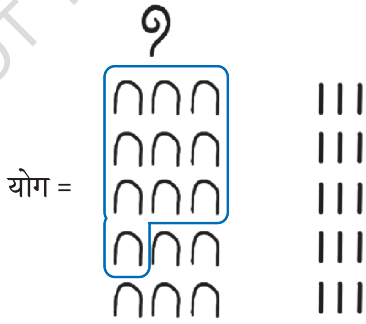
उदाहरण— निम्नलिखित मिस्र प्रयोग संख्यांकों का योग ज्ञात कीजिए।



आइए, | और ∩ की कुल संख्या ज्ञात करने का प्रयास करें और उन्हें सबसे बड़ी संभव सांकेतिक संख्या से प्रारंभ करते हुए समूहन करें। इनका योग है—

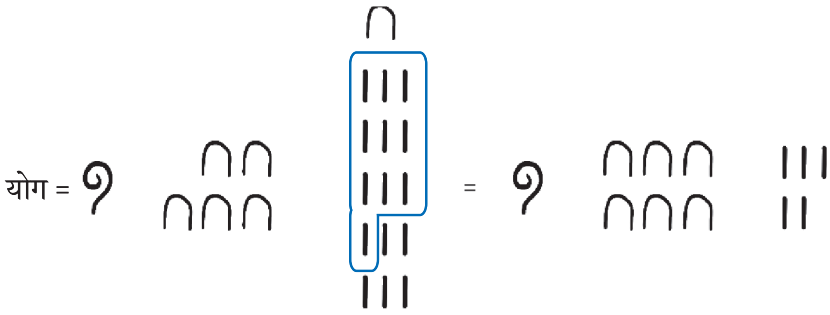
15 ∩ और 15 |

चूँकि 10 ∩ से अगली सांकेतिक संख्या ⍧ प्राप्त होती है। अत: उपर्युक्त योग का पुन: समूहन किया जा सकता है, जैसे—



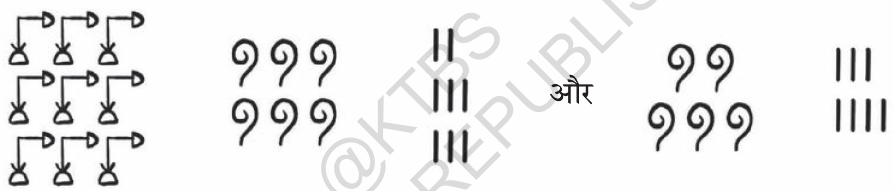
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

चूँकि 10 | से एक ∩ प्राप्त होता है अतः



आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित मिश्र संख्यांकों का योग ज्ञात कीजिए।

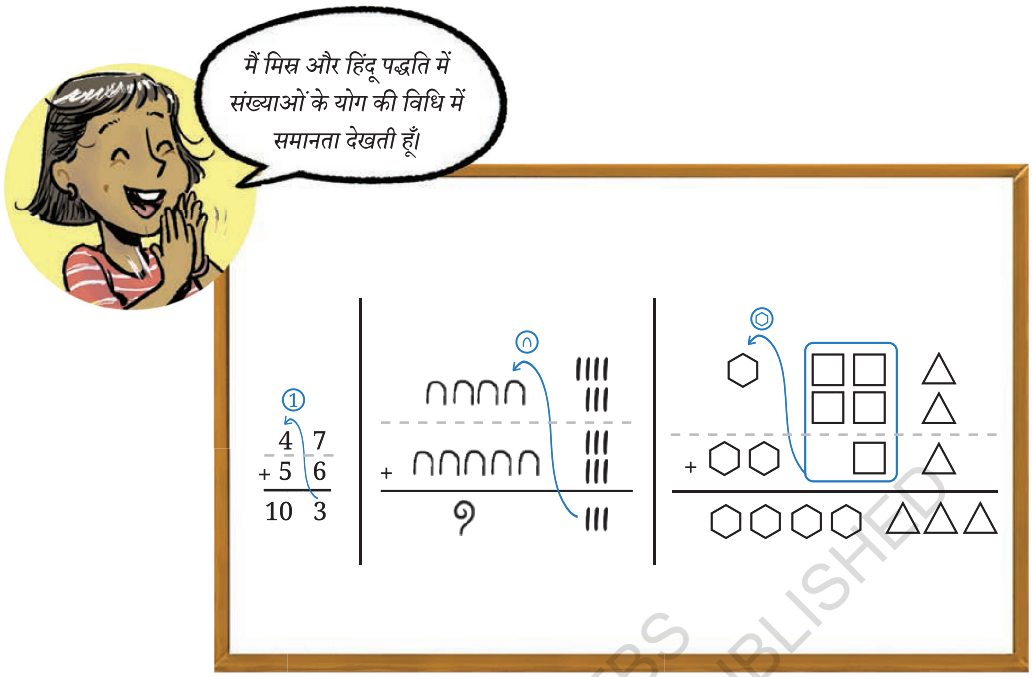
(i) 

(ii)

2. निम्नलिखित संख्यांकों का योग हिंदू संख्या पद्धति द्वारा निर्मित आधार-5 पद्धति में ज्ञात कीजिए।

स्मरण रखिए इस पद्धति में सांकेतिक संख्या का 5 गुना करने पर अगली सांकेतिक संख्या प्राप्त होती है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आधार-n वाली संख्या पद्धति में किए गए योग की पुनर्व्यवस्थापन रोमन पद्धति में किए योग से कीजिए। रोमन पद्धति में समूहन और पुनर्व्यवस्थापन सावधानीपूर्वक करना होता है क्योंकि अगली संख्या प्राप्त करने के लिए प्रत्येक सांकेतिक संख्या को सदैव एक ही आकार में समूहीकृत नहीं किया जाता है।

गुणन प्रक्रिया में आधार वाली संख्या पद्धति का लाभ और अधिक स्पष्ट हो जाता है।

? मिस्र संख्यांकों में दो संख्याओं का गुणा किस प्रकार करें?

आइए, सर्वप्रथम दो सांकेतिक संख्याओं के गुणनफल पर विचार करें।

? 1. किसी सांकेतिक संख्या को ∩ (अर्थात 10) से गुणा करने पर क्या प्राप्त होता है? निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) ∩ × ∩ (ii) 𓆐 × ∩ (iii) 𓂭 × ∩ (iv) 𓆑 × ∩

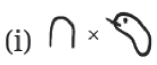
प्रत्येक सांकेतिक संख्या 10 की एक घात है अतः इसे 10 से गुणा करने पर इसमें 1 घात की वृद्धि होती है जिससे अगली सांकेतिक संख्या प्राप्त होती है।

? 2. किसी सांकेतिक संख्या को 𓆐 (10^2) से गुणा करने पर क्या प्राप्त होता है? निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) ∩ × 𓆐 (ii) 𓆐 × 𓆐 (iii) 𓂭 × 𓆐 (iv) 𓆑 × 𓆐

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i)  (ii) (iii) (iv)

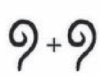
अतः किन्हीं दो सांकेतिक संख्याओं का गुणनफल एक अन्य सांकेतिक संख्या होती है।

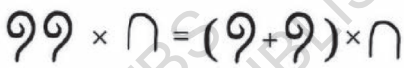
? क्या यह गुणधर्म हमारे द्वारा बनाई गई आधार-5 पद्धति में भी लागू होता है? क्या यह किसी भी आधार वाली संख्या पद्धति पर लागू होता है?

गणित चर्चा

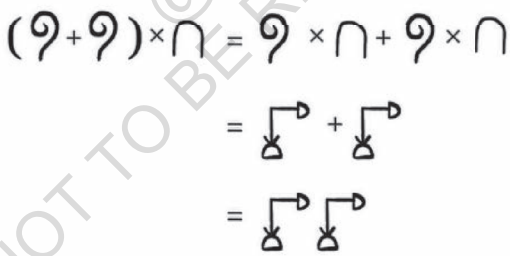
? मिस्र की पद्धति में किसी संख्या और ∩ (10) के गुणनफल के विषय में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

(i)

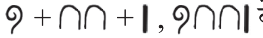
के समान है 

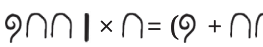
इसलिए 

चूँकि ये संख्याएँ हैं अत: यहाँ वितरण गुणधर्म लागू होता है।

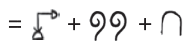


(ii)

 के समान है। अतः



क्या वितरण गुणधर्म यहाँ भी लागू होगा? जिस प्रकार यह $(a + b) \times n$ के लिए लागू होता है इसी प्रकार यह तब भी लागू होता है जब किसी एक संख्या में दो से अधिक पद हों। उदाहरण के लिए $(a + b + c) \times n = an + bn + cn$ इसलिए



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) (ii)

? किसी संख्या को ∩ से गुणा करने का एक सरल नियम क्या होगा ?

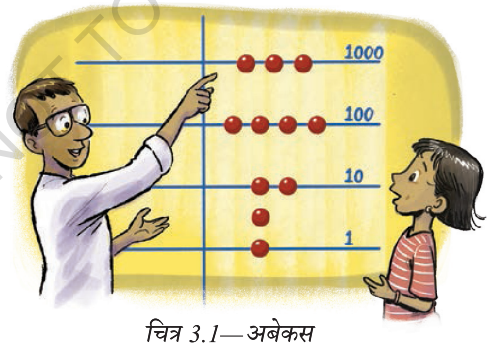
जैसा कि हमने देखा दो संख्याओं को गुणा करने की प्रक्रिया में सांकेतिक संख्याओं का गुणन सम्मिलित होता है। जब सांकेतिक संख्याएँ किसी संख्या की घात होती हैं तो उनका गुणनफल एक अन्य सांकेतिक संख्या होती है। यह तथ्य गुणन प्रक्रिया को सरल बनाता है। यद्यपि रोमन संख्यांकों के साथ ऐसा नहीं है। अत: उनके प्रयोग से गुणा करना कठिन होता है।

अतः वह संख्या पद्धति जिसकी सांकेतिक संख्याएँ किसी संख्या की घातें होती हैं अर्थात किसी आधार वाली एक संख्या पद्धति ना केवल संख्या निरूपण में अपितु अंकगणितीय संक्रियाओं को हल करने में भी प्रभावी होती है।

आधार वाली संख्या पद्धति की अवधारणा संख्या पद्धतियों के विकास के इतिहास में एक महत्त्वपूर्ण परिवर्तन था। हमारी आधुनिक हिंदू संख्या पद्धति इसी संरचना पर आधारित है।

दशमलव पद्धति का उपयोग करने वाला अबेकस

ग्यारहवीं शताब्दी के आस-पास जो भी रोमन संख्यांकों का प्रयोग करते थे वे भी दशमलव पद्धति के प्रयोग से निर्मित गणन यंत्र अबेकस का प्रयोग करने लगे। यह रेखाओं वाला बोर्ड (पट्ट) होता था, जैसा कि आकृति 3.1 में दर्शाया गया है। इस बोर्ड पर 1 को दर्शाने वाली पंक्ति से आरंभ होकर प्रत्येक उत्तरोत्तर पंक्ति को 10 की क्रमागत घात के रूप में दर्शाया गया है।



चित्र 3.1— अबेकस

इसमें संख्याओं को इस प्रकार निरूपित किया गया—

दी गई संख्या को सर्वप्रथम सांकेतिक संख्याओं (10 की घात) में समूहीकृत किया गया है ठीक उसी प्रकार जैसा हम अब तक संख्याओं का समूहन करते आए हैं।

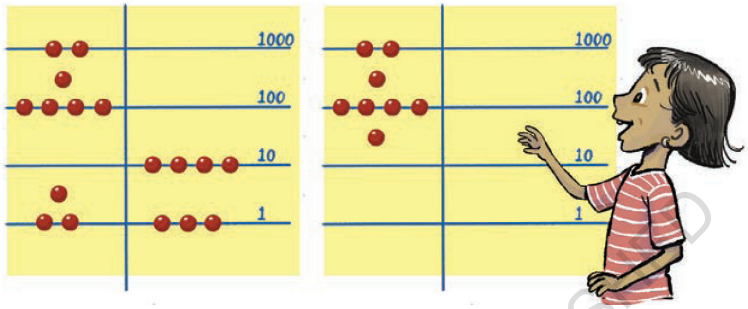
10 की प्रत्येक घात के लिए उसकी पंक्ति पर उतने ही गणक (काउंटर्स) रखे गए जितनी बार वह समूहन करते समय आया था। पंक्ति के ऊपर एक गणक की उपस्थिति उस पंक्ति में 5 का मान देती है (जैसे— 5 इकाई 5 दहाई आदि)।

© CTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण के लिए आइए, संख्या 3426 लेते हैं। इसे निम्न प्रकार से समूहीकृत किया जा सकता है—

3426 = 1000 + 1000+1000+100+100+100+100+10+10+1+1+1+1+ 1+1

यह संख्या चित्र 3.1 में दर्शाए अनुसार निरूपित की गई है। ध्यान दीजिए कि 6 इकाई को कैसे निरूपित किया गया है। गणना के लिए अबेकस का प्रयोग किस प्रकार किया गया यह समझने के लिए एक सरल योग समस्या— 2907 + 43 पर विचार कीजिए। दी हुई दो संख्याएँ अबेकस की ऊर्ध्व विभाजन रेखा के एक-एक तरफ ली गई हैं।



योगफल ज्ञात करने के लिए आप इसका उपयोग किस प्रकार करेंगे?

प्रत्येक पंक्ति के गणकों को एक साथ रखा गया। यदि किसी पंक्ति में कुल संख्या 10 से अधिक हो जाए तो क्या किया जाए?

संकेत— इस समस्या में 7 इकाई और 3 इकाई मिलकर 10 बनाते हैं जो दहाई को दर्शाने वाली पंक्ति के लिए एक गणक का मान देता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

III. मिस्र की संख्या पद्धति की सीमाएँ

एक करोड़ (10^7) तक की संख्याओं के लिए अपेक्षाकृत प्रभावी संख्या निरूपण कर सकने और अपेक्षाकृत सरल गणना करने में सक्षम पद्धति होने के पश्चात भी मिस्र की पद्धति में एक कमी थी।

यदि अधिक बड़ी संख्याओं को दर्शाना हो तो 10 की उच्चतर घातों के लिए प्रतीकों के अंतहीन अनुक्रम की आवश्यकता थी। यहाँ हम संख्याओं के निरूपण की मूल चुनौती को एक अन्य रूप में पुनः उभरते हुए देखते हैं।

संख्या पद्धतियों के विकास के इतिहास में अंतिम अवधारणा ना केवल उपर्युक्त समस्या को हल करती है बल्कि संख्या निरूपण और अभिकलन को भी उल्लेखनीय रूप से सरल बनाती है।

? आइए, पता लगाएँ

1. क्या कोई ऐसी संख्या हो सकती है जिसके मिस्र संख्यांक निरूपण में कोई एक प्रतीक 10 या उससे अधिक बार आता हो? क्यों नहीं?
2. आधार-4 की अपनी स्वयं की संख्या पद्धति बनाइए और 1 से 16 तक की संख्याओं को इसमें निरूपित कीजिए।

गणित चर्चा

3. हमारे द्वारा बनाई गई आधार-5 पद्धति में किसी दी गई संख्या को 5 से गुणा करने का एक सरल नियम दीजिए।

गणित चर्चा

3.4 स्थानीय मान निरूपण

I. मेसोपोटामिया की संख्या पद्धति

आरंभ में प्राचीन मेसोपोटामिया में प्रयोग की जाने संख्या पद्धति में भिन्न-भिन्न सांकेतिक संख्याओं के लिए भिन्न-भिन्न प्रतीक होते थे। इसके पश्चात यह आधार-60 पद्धति बन गई जिसे **षाष्टिक पद्धति** भी कहा जाता है जो कि अति प्रभावी संख्या निरूपण थी।

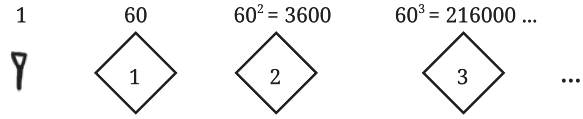
उस समय कई लोग इस असमंजस में थे कि उन्होंने आधार-60 का चयन क्यों किया। इसे स्पष्ट करने के लिए विभिन्न सिद्धांत विद्यमान हैं जिनमें 60 और कुछ महत्त्वपूर्ण घटनाओं की अवधि के मध्य संबंध (जैसे कि चंद्रमास की अवधि जिसमें 30 दिन थे या पृथ्वी को स्थिर मानते हुए सूर्य को पृथ्वी के चारों ओर एक चक्कर (परिक्रमण) पूरा करने में लगने वाला समय) से लेकर भिन्नों को दर्शाने में सरलता (हम यहाँ इस पर चर्चा नहीं करेंगे), मेसोपोटेमिया की सांकेतिक संख्याओं के पूर्व अनुक्रम— 1, 10, 60, 600, 3600, 36000... का मात्र 60 की घातों तक सिमट जाना इत्यादि सम्मिलित हैं।

मेसोपोटामिया की षाष्टिक पद्धति, जिसे **बेबीलोन की संख्या पद्धति** भी कहा जाता है, का प्रभाव वर्तमान में भी हमारी समय मापन इकाइयों में देखा जा सकता है, जैसे— 1 घंटा = 60 मिनट और 1 मिनट = 60 सेकंड। इस पद्धति में 1 के लिए प्रतीक 𒁹 और 10 के लिए प्रतीक 𒌋 का प्रयोग किया जाता था।

आइए, अब हम उनकी संख्या पद्धति पर थोड़ा ठहरें और विचार करें कि अब तक ज्ञात मेसोपोटामिया पद्धति की विशेषताओं का प्रयोग करके एक प्रभावी संख्या पद्धति कैसे बनाई जा सकती है।

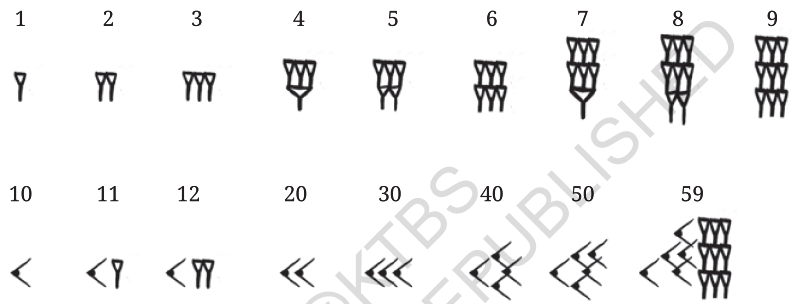
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

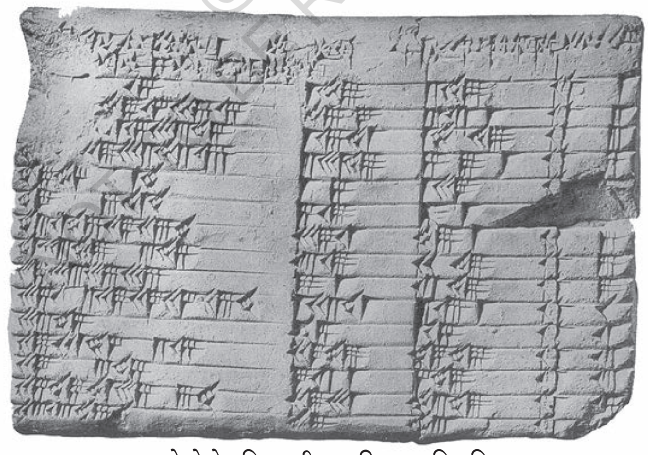
आइए, हम उनकी सांकेतिक संख्याओं को अपने प्रतीक दें—



ध्यान दीजिए कि इन प्रतीकों को बनाने में हमने भारतीय अंकों या संख्यांकों का ही प्रयोग किया है। हम स्वयं के प्रतीक भी बना सकते थे परंतु स्मरण रखने और प्रयोग की दृष्टि से हमने अपने परिचित संख्यांकों 1, 2, 3 का चयन किया है।

और का प्रयोग करके 1 से 59 तक की संख्याओं को दर्शाया या निरूपित किया जा सकता है—





मेसोपोटामिया पट्टिका की एक प्रतिकृति

उदाहरण— आइए, इस पद्धति में संख्या 640 को निरूपित करें। इसका सांकेतिक संख्याओं में समूहन करने पर हम देखते हैं कि— $640 = (10) \times 60 + 40$

यदि हम मिस्र की संख्या पद्धति का प्रयोग करते हैं तो यह संख्या 10 से निरूपित होगी और 40 को 4 का उपयोग करके निरूपित किया जाएगा।

? क्या हम इसे और अधिक संक्षिप्त रूप से निरूपित कर सकते हैं?

हम इस संख्या को इस प्रकार सरलता से निरूपित कर सकते हैं—

जिसे दस बार 60 व एक बार 40 के रूप में पढ़ा जा सकता है ठीक वैसा ही जैसा हमने समीकरण में लिखा है।

? **उदाहरण**— आइए, एक अन्य संख्या 7530 को निरूपित करने का प्रयास करें।

$$7530 = (2) \times 3600 + (5) \times 60 + 30$$

अत: इसका निरूपण होगा

ध्यान दीजिए कि जब किसी संख्या को निरूपित करने के लिए 60 की घातों में समूहीकृत किया जाता है तो 60 की घात 60 या उससे अधिक बार नहीं आ सकती। यदि ऐसा होता है तब उनमें से 60 को 60 की अगली घात के लिए समूहीकृत किया जा सकता है। उदाहरण के लिए नीचे दिए गए व्यंजक पर विचार कीजिए—

$$(1) \times 3600 + (70) \times 60 + 2 = (1) \times 60^2 + (60 + 10) \times 60 + 2$$
$$= (1) \times 60^2 + 60^2 + (10) \times 60 + 2$$
$$= (2) \times 60^2 + (10) \times 60 + 2$$

अत: किसी भी संख्या को 1–59 के बीच की संख्याओं का उपयोग करके सांकेतिक संख्याओं के लिए अंकों के साथ दर्शाया जा सकता है।

अब क्या होगा यदि हम 60 की विभिन्न घातों के लिए प्रतीकों को हटाकर संख्या निरूपण को और अधिक संक्षिप्त बना दें।

	640	7530
हमारा पूर्व निरूपण		
हमारा संक्षिप्त निरूपण		

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

यह ठीक वैसा ही निरूपण है जैसा मेसोपोटामिया के लोगों ने किया था। उनके संख्यांकों में सबसे दाईं ओर के प्रतीकों का समूह इकाई की संख्या दर्शाता था। इसके बाईं ओर के प्रतीकों का समूह 60 की आवृत्ति को दर्शाता था। इसी प्रकार अगले बाईं ओर के प्रतीकों का समूह 3600 की आवृत्ति को दर्शाता था एवं इसी क्रम में प्रतीकों के समूह चलते रहते थे। जब कभी भी संख्या में 60 की घात विद्यमान नहीं होती थी तो उस स्थान पर एक रिक्त स्थान छोड़ दिया जाता था।

ऐसा प्रतीत नहीं होता कि मेसोपोटामिया के लोग इस विचार तक वैसे ही पहुँचे होंगे जैसे कि हम पहुँचे थे। कुछ विद्वानों का सुझाव है कि उनकी पूर्ववर्ती संख्या पद्धति में सांकेतिक संख्याओं 1 व 60 को दिए गए प्रतीकों की समानता एवं उनके आकस्मिक उपयोग के कारण उन्हें यह विचार आया होगा।

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दी गई संख्याओं को मेसोपोटामिया की पद्धति में निरूपित कीजिए।

(i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605

हम देख सकते हैं कि कैसे मेसोपोटामिया की पद्धति में प्रतीकों को लिखे जाने वाले स्थानों का उपयोग करके सांकेतिक संख्याओं के लिए प्रतीकों के अंतहीन अनुक्रम को बनाने की आवश्यकता को समाप्त कर दिया। ऐसी संख्या पद्धति (जिसमें एक आधार होता है) जो प्रत्येक प्रतीक के स्थान का उपयोग उस सांकेतिक संख्या को निर्धारित करने में करती है जिससे वह संबंधित है, **स्थानिक संख्या प्रणाली** या **स्थानीय मान पद्धति** कहलाती है।

स्थानीय मान की धारणा संख्या पद्धतियों के विकास के इतिहास में महत्त्वपूर्ण बिंदु है। इस धारणा ने विभिन्न प्रतीकों को सीमित संख्या में उपयोग करके संख्याओं के अंतहीन क्रम को निरूपित करने की समस्या का एक उत्कृष्ट समाधान दिया।

तथापि मेसोपोटामिया की पद्धति को पूर्णतया विकसित स्थानीय मान पद्धति नहीं माना जा सकता है। इसके साथ ही इसमें कुछ त्रुटियाँ ऐसी हैं जो किसी संख्या को पढ़ते समय भ्रांति उत्पन्न करती हैं।

संख्या 60 के निरूपण का अवलोकन कीजिए। संख्या 3600 का निरूपण क्या होगा?

संख्यांकों को लिखते समय प्रतीकों के मध्य अंतराल (रिक्त स्थान) उस प्रकार नहीं दिया गया था जैसे हम यहाँ दे रहे हैं। भिन्न-भिन्न व्यक्तियों के द्वारा लिखी गई विभिन्न पांडुलिपियों में समान अंतराल बनाए रखना भी कठिन था। इससे अस्पष्टताएँ उत्पन्न हुईं। उदाहरण के लिए नीचे दी गई संख्याओं के निरूपण पर विचार कीजिए—

संख्याएँ	1	60	3600	12	602	36002
हमारा निरूपण	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒁹	𒌋 𒁹	𒌋 𒁹
मेसोपोटामिया पद्धति से निरूपण	𒁹	𒁹	𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹	𒌋𒁹

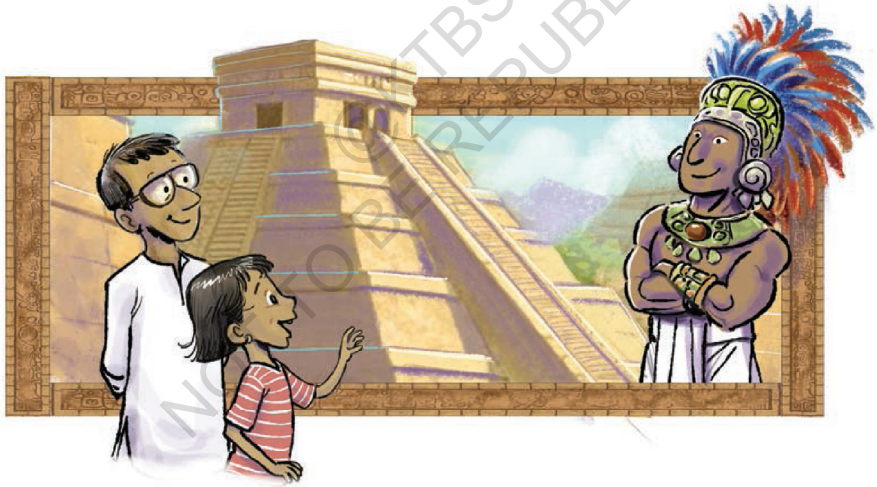
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इस अस्पष्टता के कारण कि कौन से प्रतीक 60 की किस घात के संगत स्थान पर बने हैं, एक ही संख्यांक को भिन्न-भिन्न विधियों से पढ़ा जा सकता है। यहाँ तक कि हमारे निरूपण में भी जिसमें 60 की विभिन्न घातों के लिए प्रतीकों के मध्य एक समान अंतराल का उपयोग किया जाता है, प्रतीकों के दो समूहों के मध्य अंतरालों की संख्या जानना कठिन है जैसा कि 36002 के निरूपण में देखा जा सकता है।

अंतरालों के कारण होने वाली समस्या के समाधान के लिए आगे चलकर मेसोपोटामिया के लोगों ने अंतराल को अंकित करने के लिए एक 'स्थानधारक' प्रतीक प्रयुक्त करने का अद्भुत उपाय अपनाया। यह हमारी पद्धति में प्रयुक्त 0 (शून्य) के समान है। इस प्रकार शून्य (वह प्रतीक जो शून्यता दर्शाता है) किसी भी स्थानीय मान पद्धति, जिसमें संख्याओं को स्पष्ट रूप में लिखा जाता है, में एक 'स्थानधारक' के रूप में अपरिहार्य है।

अंतरालों से उत्पन्न होने वाली समस्या के समाधान के पश्चात भी इस पद्धति में अन्य अस्पष्टताएँ अभी भी बनी हुई थी। उदाहरण के लिए स्थानधारक प्रतीक को प्राथमिक तौर पर संख्याओं के मध्य उपयोग किया गया था अंत में नहीं। अत: वे इसका उपयोग 3600 जैसी संख्या को निरूपित करने के लिए नहीं कर सकते थे।

II. माया संख्या पद्धति



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED TBS

मध्य अमेरिका में 'माया सभ्यता' नामक एक सभ्यता विकसित हुई जिसने तीसरी से दसवीं शताब्दी सामान्य संवत् तक वृहत स्तर पर बौद्धिक और सांस्कृतिक प्रगति की। उनकी बौद्धिक उपलब्धियों में उनके द्वारा एशिया के लोगों से स्वतंत्र रूप से अभिकल्पित स्थानीय मान पद्धति भी सम्मिलित है। इन्होंने आधुनिक समय के '0' के लिए एक स्थानधारक प्रतीक का भी उपयोग किया जो एक सीप जैसा दिखता था।

माया संख्या पद्धति

लगभग एक आधार-20 पद्धति

सांकेतिक संख्याएँ

1, 20, $20 \times 18 = 360$, $20^2 \times 18 = 7200$, $20^3 \times 18 = 144000$

प्रतीक 0 • 1 — 5

माया संख्या पद्धति में किसी संख्या को निरूपित करने के लिए प्रतीकों को लंबवत रखा जाता था।

संख्यांक

@KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

यह कैसे पढ़ा जाता है?

360	• • • •	4
20	—	11
1		0

सांकेतिक संख्या स्थान	उर्ध्वाधर रखे गए प्रतीक	प्रतीकों का मान

$= (4) \times 360 + (11) \times 20 + (0) \times 10$

$= 1660$

यहाँ हमें एक उलझन भरी घटना देखने को मिलती है। इनकी तीसरी सांकेतिक संख्या 400 के स्थान पर 360 क्यों थी? कुछ विद्वानों का मानना है कि इस बात का उनके तिथिपत्र के साथ कुछ संबंध हो सकता है।

माया संख्या पद्धति में 1 के लिए एक बिंदु ⬭ का और 5 के लिए एक दंड — का प्रयोग किया जाता था। इन प्रतीकों का उपयोग 1 से 19 तक की संख्याओं को निरूपित करने के लिए होता था।

विभिन्न सांकेतिक संख्याओं से संबद्ध प्रतीकों को एक के नीचे एक लिखा गया था जिसमें सबसे नीचे वाला प्रतीकों का समूह इकाई की संख्या के संगत था। इसके ऊपर वाला समूह जितनी बार 20 आए उस संख्या के अनुरूप था। इसी क्रम में ऊपर वाला समूह जितनी बार 360 आए उस संख्या के अनुरूप था। इसी प्रकार प्रतीकों के समूह ऊपर तक बने होते थे।

? माया संख्या पद्धति का प्रयोग करके दी गई संख्याओं को निरूपित कीजिए।

(i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721

चूँकि माया सभ्यता एक वास्तविक आधार-20 पद्धति नहीं है। अत: इसमें गणनाओं के लिए किसी आधार वाली पद्धति के समान अनुकूलता की कमी है। तथापि उनके स्थानीय मान संकेतन और शून्य के लिए स्थानधारक प्रतीक के प्रयोग को संख्या पद्धतियों के इतिहास में एक महत्त्वपूर्ण उन्नति मानी जाती है।

एक रोचक तथ्य यह है कि हम अभी भी कुछ यूरोपीय भाषाओं के संख्या नामों में आधार-20 का उपयोग देख सकते हैं।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

III. चीनी संख्या पद्धति

चीन के लोगों ने दो संख्या पद्धतियों का उपयोग किया— पहली राशियों को लिखने के लिए लिखित पद्धति एवं दूसरी गणना करने के लिए छड़ों का उपयोग करने वाली पद्धति। छड़ आधारित संख्या पद्धति में संख्यांक छड़ संख्यांक कहलाते हैं। यहाँ हम छड़ संख्यांकों पर चर्चा करेंगे जो चीनी लिखित पद्धति की अपेक्षा संख्याओं को लिखने व गणना करने में अधिक प्रभावी हैं।

चीन में छड़ संख्यांक लगभग तीसरी शताब्दी तक विकसित हो गए थे तथा17वीं शताब्दी तक इनका प्रयोग होता रहा। यह एक दशमलव पद्धति (आधार-10) थी। इसमें 1 से 9 तक के प्रतीक अग्रलिखित थे

चीनी संख्या पद्धति

आधार-10 या दशमलव

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
जोंग	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
हेंग	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

टिप्पणी— *जोंग* इकाई, सैकड़ों, दस हजार आदि को दर्शाता है एवं *हेंग* दहाइयों, हजार, सौ हजार आदि को दर्शाता है।

संख्यांक 𝍪 𝍮 𝍫 𝍣

इसे कैसे पढ़ा जाए?

2 (*हेंग*)	6 (*जोंग*)	3 (*हेंग*)	4 (*जोंग*)
𝍪	𝍮	𝍫	𝍣
10^3	10^2	10	1

$= (2) \times 10^3 + (6) \times 10^2 + (3) \times 10 + (4) \times 1$

$= 2634$

数学

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

मेसोपोटामिया की पद्धति की भाँति छड़ संख्यांकों में भी किसी स्थानीय मान की अनुपस्थिति को इंगित करने के लिए रिक्त स्थान का प्रयोग किया जाता था। तथापि 1 से 9 तक के प्रतीकों के आकार कुछ अधिक एकसमान होने के कारण मेसोपोटामिया की पद्धति की तुलना में चीनी पद्धति में रिक्त स्थानों को ज्ञात करना अपेक्षाकृत सरल था।

ध्यान दीजिए कि छड़ संख्यांक हिंदू पद्धति से कितने मिलते-जुलते हैं। शून्य के लिए किसी प्रतीक के साथ चीनी पद्धति एक पूर्णत: विकसित स्थानीय मान पद्धति होगी।

IV. हिंदू संख्या पद्धति

? संख्या निरूपण के विचारों के विकास में हिंदू तथा भारतीय संख्या पद्धति का क्या स्थान है? इस पद्धति की सांकेतिक संख्याएँ कौन-सी हैं? क्या इस पद्धति में स्थानीय मान प्रणाली का उपयोग किया जाता है?

हिंदू संख्या पद्धति

आधार-10 या दशमलव

दस प्रतीक 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

संख्या 375

इसे कैसे पढ़ा जाए?	3	7	5
सांकेतिक संख्याओं का स्थान	10^2	10	1

$= (3) \times 10^2 + (7) \times 10 + (5) \times 1$

$= 375$

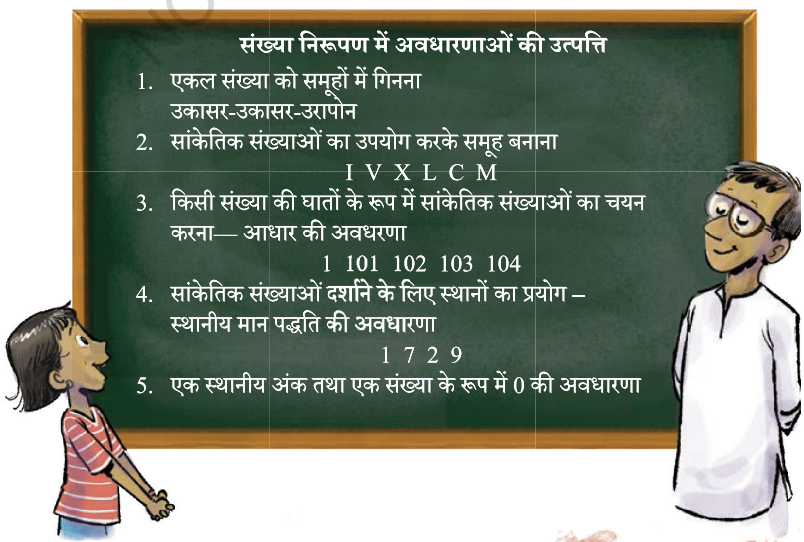
जैसा कि देखा जा सकता है कि हिंदू संख्या पद्धति एक स्थानीय मान पद्धति है। हिंदू संख्या पद्धति में 0 के लिए प्रतीक कम से कम 200 सामान्य संवत् पूर्व से ही विद्यमान है। 0 को एक अंक के रूप में उपयोग करने के कारण एवं प्रत्येक स्थान पर एकल अंक के प्रयोग के कारण संख्यांकों को पढ़ते या लिखते समय इस पद्धति में किसी भी प्रकार की अस्पष्टता नहीं है। यही कारण है कि हिंदू संख्या पद्धति का उपयोग अब संपूर्ण विश्व में किया जाता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

शून्य का एक अंक के रूप में और सही अर्थ में एक संख्या के रूप में प्रयोग एक ऐसी सफलता थी जिसने गणित और विज्ञान के जगत को वास्तव में परिवर्तित कर दिया। भारतीय गणित में शून्य का उपयोग स्थानीय मान पद्धति में केवल एक स्थानधारक के रूप में ही नहीं किया जाता था अपितु इसे अन्य संख्याओं के समान एक संख्या का पद भी दिया गया था। हिंदू संख्यांकों का प्रयोग करके गणना करने व वैज्ञानिक गणना की व्याख्या करने के लिए 499 सामान्य संवत् में आर्यभट्ट ने अपने ग्रंथ *आर्यभटीय* में संख्या 0 के अंकगणितीय गुणों (जैसे 0 में कोई भी संख्या जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है एवं 0 से किसी भी संख्या को गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है) का स्पष्ट रूप से प्रयोग किया था। जैसा कि हमने पिछली कक्षा में सीखा था। 628 सामान्य संवत् में ब्रह्मगुप्त ने अपनी रचना *ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* में 0 का किसी भी अन्य संख्या की भाँति एक संख्या के रूप में प्रयोग (जिसके प्रयोग से आधारभूत गणितीय संक्रियाएँ की जा सकती हैं) को संहिताबद्ध किया था।

ऋणात्मक संख्याओं को प्रस्तुत करने के साथ शून्य को एक संख्या के रूप में प्रस्तुत करके ब्रह्मगुप्त ने एक ऐसी रचना की जिसे आधुनिक शब्दों में **वलय** कहा जाता है अर्थात संख्याओं का एक ऐसा समूह जो योग व्यकलन व गुणन के अंतर्गत संवृत होता है। दूसरे शब्दों में समूह में से किन्हीं भी दो संख्याओं को योग व्यकलन व गुणन करने पर उसी समूह की एक अन्य संख्या प्राप्त की जा सकती है। इन नए विचारों ने आधुनिक गणित और विशेष रूप से बीजगणित व विश्लेषण के क्षेत्रों की नींव रखी।

आशा है कि इससे आपको उन सभी अवधारणाओं का बोध हो गया होगा जिन्हें हम वर्तमान में संख्याओं को लिखने एवं गणना करने में उपयोग करते हैं। 0 की खोज और इसके परिणामस्वरूप बनी भारतीय संख्या पद्धति वास्तव में अब तक के सबसे महान, सबसे रचनात्मक व सबसे प्रभावशाली आविष्कारों में से एक है, जो हमारे दैनिक जीवन में निरंतर दिखाई देती है। साथ ही ये आधुनिक विज्ञान, प्रौद्योगिकी, अभिकलन, लेखाकार्य, सर्वेक्षण आदि का आधार तैयार करती है। इसके पश्चात जब आप संख्याएँ लिखें तब उन संख्याओं के पीछे के असाधारण इतिहास के विषय में एवं उनके आविष्कार के समय आई सभी गहन अवधारणाओं के विषय में अवश्य विचार कीजिए।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. आपके विचार से चीन के लोग *जोंग* और *हेंग* प्रतीकों को एकांतर रूप से क्यों प्रयोग करते थे? यदि मात्र *जोंग* प्रतीकों का ही प्रयोग किया जाता तो 41 को कैसे प्रदर्शित किया जाता? यदि दो क्रमिक स्थानों के मध्य कोई सार्थक अंतराल न हो तो क्या इस संख्यांक की किसी अन्य प्रकार से व्याख्या की जा सकती थी?

गणित चर्चा

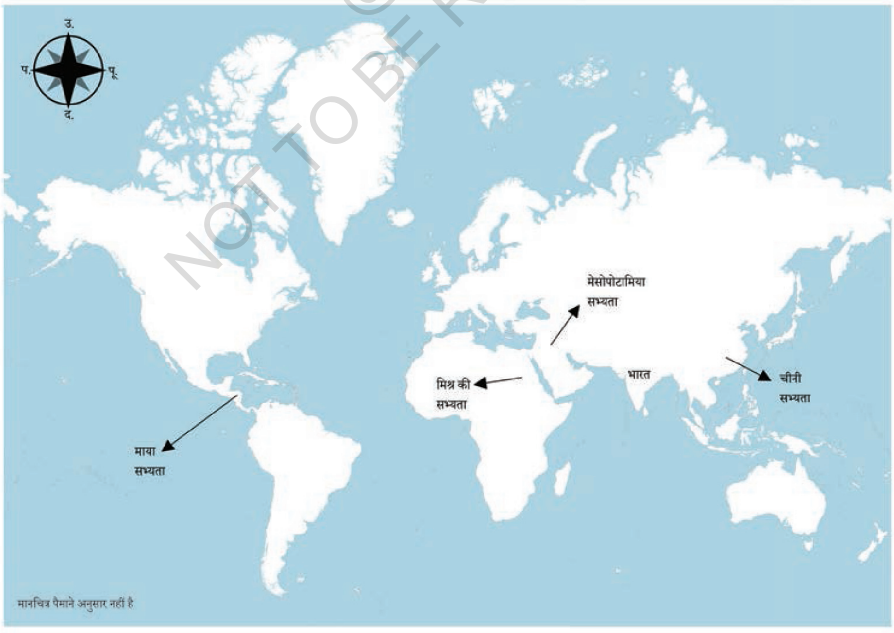
2. *उकासर* और *उरापोन* को अंकों के रूप में लेकर एक आधार-2 वाली स्थानीय मान पद्धति बनाइए। इस पद्धति की तुलना गुमुलगल पद्धति से कीजिए।

3. बताइए कि किस प्रकार आपके दैनिक जीवन में और किन व्यवसायों में हिंदू संख्यांक और 0 महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं? यदि हमारी संख्या पद्धति और 0 का आविष्कार या कल्पना नहीं हुई होती तो हमारा जीवन कितना भिन्न होता?

4. प्राचीन भारतीयों ने हिंदू संख्या पद्धति के लिए संभवत: आधार-10 का उपयोग किया होगा क्योंकि मनुष्य की दस अँगुलियाँ होती हैं और इसीलिए हम अपनी अँगुलियों से गिनती कर सकते हैं। यदि हमारी केवल 8 अँगुलियाँ होती तो क्या होता? तब हम संख्याएँ कैसे लिखते? यदि हम आधार 8 का उपयोग करते तब हिंदू संख्यांक कैसे लिखते? आधार-5 का उपयोग करने पर हिंदू संख्यांक कैसे लिखे जाते हैं? आधार 10 वाले हिंदू संख्यांक 25 को क्रमश: आधार-8 और आधार-5 वाले हिंदू संख्यांकों के रूप में लिखने का प्रयास कीजिए। क्या आप इसे आधार-2 में लिख सकते हैं?

गणित चर्चा

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED



यह मानचित्र विभिन्न सभ्यताओं के स्थानों का दर्शाता है। ये सभ्यताएँ विभिन्न काल अवधियों में विद्यमान थीं।

सारांश

- संख्याओं को निरूपित करने के लिए हमें वस्तुओं नामों या लिखित प्रतीकों के एक मानक अनुक्रम की आवश्यकता होती है जिनका एक निश्चित क्रम हो। इस मानक अनुक्रम को **संख्या पद्धति** कहा जाता है।
- लिखित संख्या पद्धति में संख्याओं को निरूपित करने वाले प्रतीकों को **संख्यांक** कहा जाता है।
- किसी संख्या पद्धति में **सांकेतिक संख्याएँ** वे संख्याएँ होती हैं जिन्हें सरलता से पहचाना जा सकता है और जिनका उपयोग अन्य संख्याओं को समझने और उनके साथ गणनाएँ आदि करने के लिए संदर्भ बिंदुओं के रूप में किया जाता है। ये संख्या पद्धति स्थिरता को प्रदान करने का काम करती हैं जिससे उपयोगकर्ताओं को स्वयं को दिशा निर्दिष्ट करने और राशियों, विशेषकर बड़ी राशियों को समझने में सहायता मिलती है।
- वह संख्या पद्धति जिसकी सांकेतिक संख्याएँ n की घातें होती है उसे **आधार-*n* संख्या पद्धति** कहा जाता है।
- ऐसी संख्या पद्धतियाँ जिनमें कोई आधार होता है और जिनमें सांकेतिक संख्या को निर्धारित करने के लिए प्रतीक की स्थिति का उपयोग किया जाता है इन्हें **स्थानिक संख्या पद्धतियाँ** या **स्थानीय मान पद्धतियाँ** कहा जाता है।
- स्थानीय मान निरूपण का उपयोग मेसोपोटामिया (बेबीलोन) की सभ्यता, माया सभ्यता, चीनी सभ्यता और भारतीय सभ्यता में किया जाता था।
- वर्तमान में पूरे विश्व में हम जिस संख्यांक पद्धति का उपयोग करते हैं वह **हिंदू संख्या पद्धति** है (जिसे कभी-कभी **भारतीय संख्या पद्धति** या **हिंदू-अरबी संख्या पद्धति** भी कहा जाता है)। यह एक स्थानीय मान पद्धति है जिसमें (सामान्यत:) 10 अंक होते हैं। इसमें अंक 0 भी सम्मिलित है जिसे अन्य अंकों के समान माना जाता है। 0 को एक संख्या के रूप में उपयोग करने के कारण यह पद्धति सीमित प्रतीकों का उपयोग करके सभी संख्याओं को स्पष्ट रूप से लिखने में हमें सक्षम बनाती है और साथ ही हमें दक्षता से गणनाएँ करने में समर्थ बनाती है। इस पद्धति की उत्पत्ति लगभग 2000 वर्ष पूर्व भारतवर्ष में हुई थी और इसके पश्चात यह संपूर्ण विश्व में फैल गई और इसे मानव इतिहास के सबसे महान आविष्कारों में से एक माना जाता है।

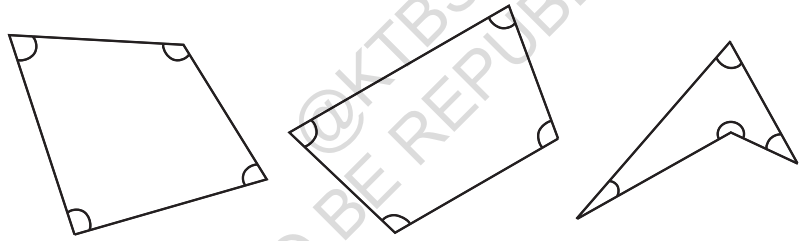
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

4 चतुर्भुज

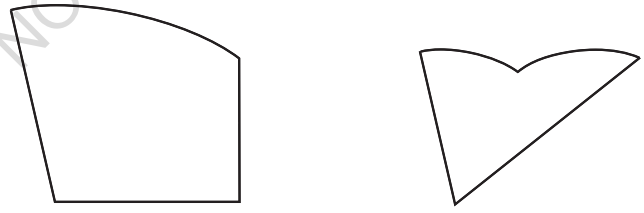
0875CH04

इस अध्याय में हम चार भुजाओं वाली आकृतियों के कुछ रोचक प्रकारों का अध्ययन करेंगे तथा उन पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे। ऐसी आकृतियों को सामान्यत: चतुर्भुज (क्वाड्रीलेटेरल) के रूप में जाना जाता है। 'क्वाड्रीलेटेरल' शब्द का उद्भव लैटिन भाषा के *क्वाड्री* शब्द से हुआ है, जिसका अर्थ है चार एवं *लैटस* अर्थात भुजाएँ। चतुर्भुज शब्द का अर्थ चार भुजाओं वाली बंद आकृति से है।

? नीचे दी गई आकृतियों का अवलोकन कीजिए।



(i) (ii) (iii)



(iv) (v)

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आकृतियाँ (i), (ii) व (iii) चतुर्भुज हैं तथा अन्य आकृतियाँ चतुर्भुज नहीं हैं। क्यों?

चतुर्भुज के **कोण** इसकी भुजाओं के मध्य बने कोण होते हैं, जैसे— आकृति (i), (ii) व (iii) में दर्शाए गए हैं।

हम सर्वाधिक परिचित चतुर्भुजों, जैसे— आयत तथा वर्ग से अध्ययन प्रारंभ करेंगे।

4.1 आयत तथा वर्ग

हम जानते हैं कि आयत किसे कहते हैं। आइए, परिभाषित करें।

आयत— आयत वह चतुर्भुज है जिसमें—

(i) समस्त कोण समकोण (90°) होते हैं।

(ii) सम्मुख भुजाओं की लंबाई एक समान होती है।

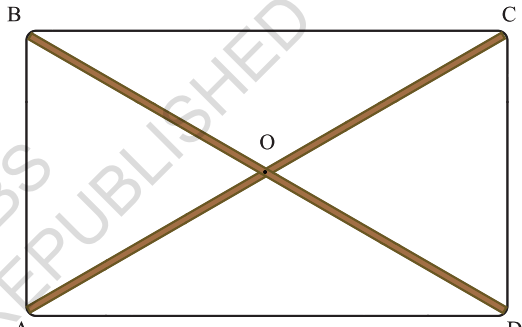
यह परिभाषा उन नियमों का सटीक रूप से वर्णन करती है जिन्हें संतुष्ट करने पर कोई चतुर्भुज आयत कहलाता है।

? क्या आयत को परिभाषित करने की अन्य विधियाँ हैं?

आइए, आयतों की रचना से संबंधित दी गई समस्या पर विचार करें।

एक बढ़ई की समस्या

? एक बढ़ई को दो पतली लकड़ी की पट्टिकाओं को चित्र 1 में दर्शाए अनुसार इस प्रकार साथ में रखना है कि जब एक धागा इनके अंतबिंदुओं से होकर जाए तो धागे से एक आयत बन सके।



चित्र 1

बढ़ई के पास एक 8 सेंटीमीटर लंबी पट्टिका पहले से ही उपलब्ध है। अन्य पट्टिका की लंबाई कितनी होनी चाहिए? यह भी बताइए कि उन दोनों पट्टिकाओं को कहाँ से जोड़ा जाना चाहिए?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

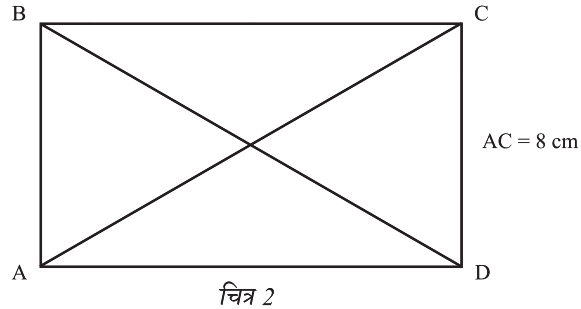
आइए, बढ़ई को जो संरचना बनानी है उसका एक प्रतिरूप बनाएँ। पट्टिकाओं का प्रतिरूप रेखाखंडों के द्वारा दर्शाया जा सकता है। पट्टिकाएँ उस चतुर्भुज के विकर्ण हैं जो पट्टिकाओं या रेखाखंडों के अंतबिंदुओं से मिलकर बनता है। इस प्रकार प्राप्त चतुर्भुज को एक आयत होने के लिए हमें निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने की आवश्यकता है—

? 1. अन्य विकर्ण की लंबाई कितनी है?

? 2. दोनों विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु कहाँ है?

? 3. विकर्णों के मध्य क्या कोण होना चाहिए?

? आइए, ज्यामितीय तर्क (निगमन) का उपयोग करके इन प्रश्नों का उत्तर देते हैं। यदि यह चुनौतीपूर्ण है तो कुछ आयतों की रचना करके मापने का प्रयत्न कीजिए।

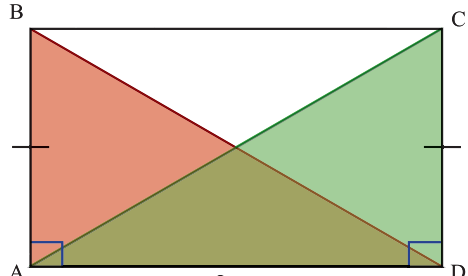


चित्र 2

आइए, इन प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने के लिए मान लेते हैं कि हमने विकर्णों की रचना इस प्रकार से की है कि उनके अंतबिंदु आयत के शीर्ष बिंदु बनें जैसा कि चित्र 2 में दर्शाया गया है।

निगमन 1 — अन्य विकर्ण की लंबाई क्या है?

सर्वांगसमता का उपयोग करके निगमन 1 का निष्कर्ष निम्नलिखित विधि से ज्ञात किया जा सकता है—



उभयनिष्ठ भुजा

चूँकि ABCD एक आयत है, अत:

AB = CD

∠BAD = ∠CDA = 90°

AD दोनों त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा है।

अत: भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता नियम से

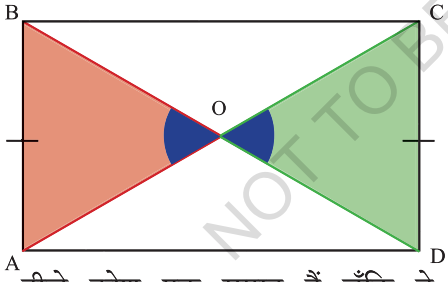
ΔADC ≅ ΔDAB है।

अत: AC = BD चूँकि यह सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि आयत के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं।

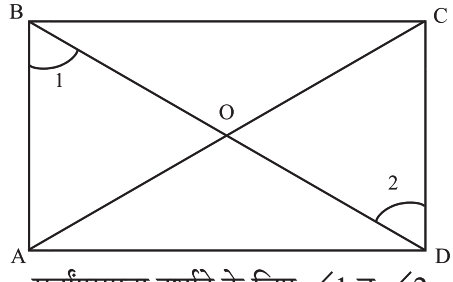
अत: सदैव अन्य विकर्ण भी 8 सेंटीमीटर लंबा ही होना चाहिए। आप कुछ आयतों की रचना करके एवं मापकर इस गुण को सत्यापित कर सकते हैं।

निगमन 2 — दोनों विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु क्या है?

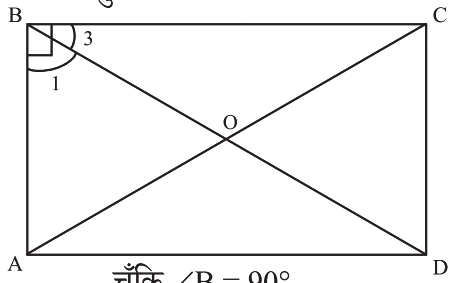
निगमन 2 को भी सर्वांगसमता से प्राप्त किया जा सकता है। चूँकि हमें OA एवं OC तथा OB एवं OD के मध्य संबंध को समझने की आवश्यकता है। इसके लिए हमें आयत ABCD के किन दो त्रिभुजों पर विचार करना चाहिए?



नीले कोण एक समान हैं चूँकि वे शीर्षाभिमुख कोण हैं।

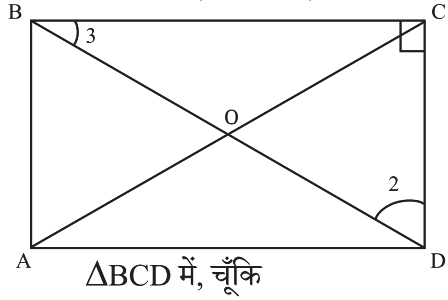


सर्वांगसमता दर्शाने के लिए ∠1 व ∠2 पर विचार कीजिए। क्या वह एक समान हैं?



चूँकि ∠B = 90°

∠3 + ∠1 = 90°



ΔBCD में, चूँकि

∠3 + ∠2 + 90° = 180°

अत: ∠3 + ∠2 = 90°

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अत: $\angle 1 = \angle 2$ $(= 90° - \angle 3)$

इस प्रकार सर्वांगसमता के नियम से कोण-कोण-भुजा (AAS) से $\Delta AOB \cong \Delta COD$

अत: OA = OC तथा OB = OD, चूँकि वह सर्वांगसमता त्रिभुजों के संगत भाग हैं।

अत: O, AC व BD का मध्यबिंदु है।

इससे यह ज्ञात होता है कि **किसी आयत के विकर्ण सदैव उनके मध्यबिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं।**

अत: एक आयत बनाने के लिए विकर्ण इस प्रकार से खींचे जाने चाहिए कि उनकी लंबाई एक समान हों तथा वह मध्यबिंदु पर प्रतिच्छेद करते हों।

जब विकर्ण मध्यबिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं तो हम कह सकते हैं कि विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। किसी लंबाई के **समद्विभाजन** का अर्थ इसे **दो समान भागों में बाँटना होता है।**

कुछ आयतों की रचना करें तथा उनके विकर्णों को मापकर और प्रतिच्छेद बिंदु से विकर्णों के भागों को मापकर इस गुण को सत्यापित कीजिए।

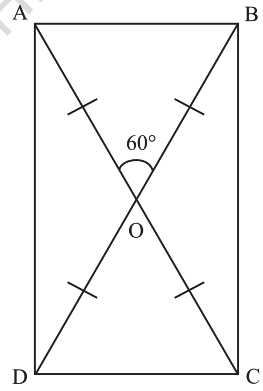
गणित चर्चा

? क्या $\Delta AOD \cong \Delta COB$ सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित समताओं का उपयोग किया जा सकता है?

AO = CO (ऊपर सिद्ध किया गया है।)

$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

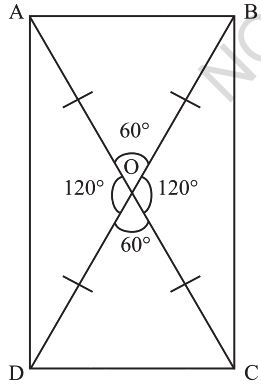
AD = CB



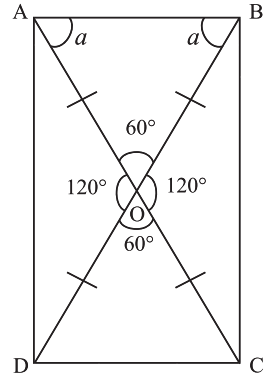
निगमन 3 — विकर्णों के मध्य बने कोण क्या हैं?

आइए, जाँच करें कि दाईं ओर दर्शाए गए चित्र अनुसार यदि हम दो विकर्ण इस प्रकार खींचते हैं कि उनकी लंबाई समान हो, वह एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों एवं उनके बीच एक 60° का यादृच्छिक कोण बनता हो। बताइए कि कौन-सा चतुर्भुज प्राप्त होता है।

? क्या आप अन्य सभी कोणों को ज्ञात कर सकते हैं?



शीर्षाभिमुख कोणों एवं रैखिक युग्मों की समझ का उपयोग करके हम विकर्णों के मध्य बने अन्य कोणों को ज्ञात कर सकते हैं।



ΔAOB में चूँकि OA = OB है अत: उनके सम्मुख कोण एक समान होंगे। माना कि वह a है।

? क्या आप a का मान ज्ञात कर सकते हैं?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

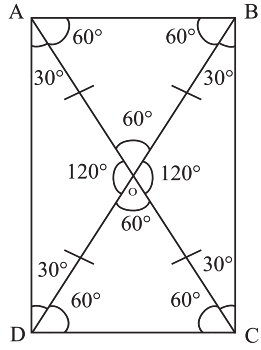
ΔAOB में

$a + a + 60 = 180$ (त्रिभुज के अंत:कोणों का योग)

अत: $2a = 120°$

इस प्रकार $a = 60°$

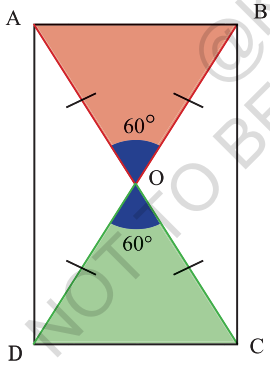
अत: उपर्युक्त विधि से हम अन्य कोणों के मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

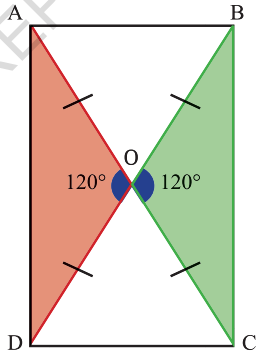


? क्या अब हम पहचान सकते हैं कि चतुर्भुज ABCD किस प्रकार का चतुर्भुज है?

ध्यान दीजिए कि इसके प्रत्येक शीर्ष कोण का योग $90° (30° + 60°)$ है।

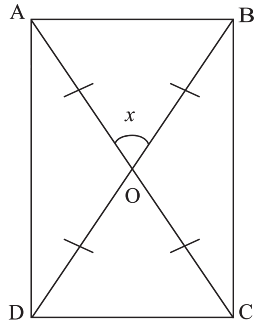
? हम इस चतुर्भुज की भुजाओं के विषय में क्या कह सकते हैं?





हम देख सकते हैं कि $\Delta AOB \cong \Delta COD$ एवं $\Delta AOD \cong \Delta COB$ है। अत: AB = CD व AD = CB है क्योंकि वह सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।

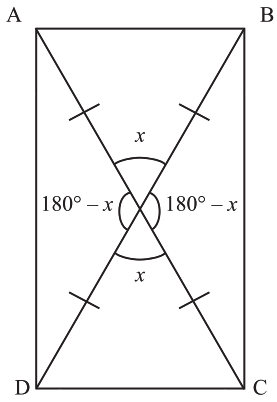
अत: ABCD एक आयत है और यह आयत की परिभाषा को संतुष्ट करता है।



? यदि विकर्णों के मध्य कोणों को परिवर्तित कर दिया जाए तो क्या ABCD एक आयत ही रहेगा? क्या हम इसका व्यापकीकरण कर सकते हैं?

विकर्णों के मध्य एक कोण को x मान लीजिए।

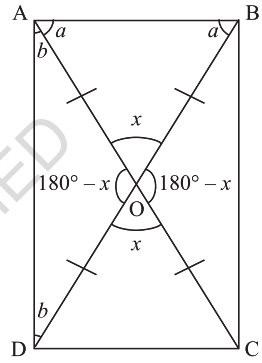
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



हम विकर्णों के बीच चार कोणों की गणना कर सकते हैं जो इस प्रकार होंगे x, x, $180 - x$ एवं $180 - x$

? क्या आप इसके अन्य कोण ज्ञात कर सकते हैं?

चूँकि हम जानते हैं कि ΔAOB एक समद्विबाहु त्रिभुज है अत: हम इसके दोनों आधार कोणों के माप को a द्वारा निरूपित कर सकते हैं।



? x के पदों में a का मान (डिग्री में) क्या है?

यहाँ,

$$a + a + x = 180$$

(त्रिभुज के अंत:कोणों का योग)

$$2a = 180 - x$$

$$a = \frac{(180 - x)}{2} = 90 - \frac{x}{2}$$

इसी प्रकार समद्विबाहु त्रिभुज ΔAOD में मान लीजिए आधार कोण b है।

$$b + b + 180 - x = 180$$

$$2b = 180 - (180 - x)$$

$$2b = 180 - 180 + x$$

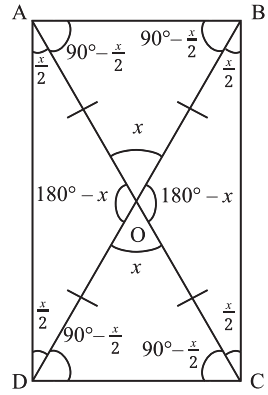
$$2b = x$$

$$b = \frac{x}{2}$$

चतुर्भुज के सभी शीर्ष कोण $a + b$ हैं जो कि

$$90 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 90$$

इस प्रकार चतुर्भज ABCD के प्रत्येक कोण का माप 90° है।



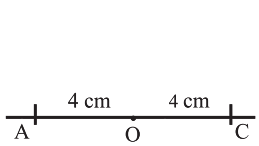
? AB व CD तथा AD व BC के विषय में हम क्या कह सकते हैं?

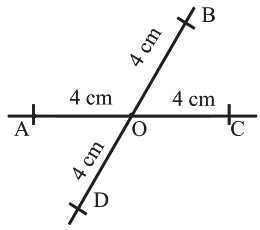
यहाँ $\Delta AOB \cong \Delta COD$ एवं $\Delta AOD \cong \Delta COB$ है। अत: AB = CD तथा AD = CB हैं, चूँकि वे सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

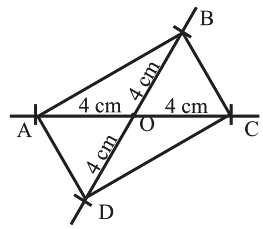
© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

अत: विकर्णों के मध्य चाहे कोई भी कोण बना हो यदि विकर्ण समान लंबाई के हों तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों तो बनने वाले चतुर्भुजों का प्रत्येक कोण 90° होगा एवं प्रत्येक युग्म की सम्मुख भुजाएँ समान होंगी। इस प्रकार यह चतुर्भुज एक आयत होगा।

अब हम समझ चुके हैं कि लकड़ी की पट्टिकाओं को किस प्रकार रखा जाए जिससे उनके अंत बिंदु आयत के शीर्ष बनें! पट्टिकाओं की लंबाई समान होनी चाहिए तथा वह मध्य बिंदु से जुड़ी होनी चाहिए।







वास्तव में इस विधि का उपयोग आयत बनाने के लिए किया जाता है। यूरोप में बढ़ई आयताकार फ्रेम बनाने में इस विधि का उपयोग करते हैं। विदित है कि अफ्रीका महाद्वीप के एक देश मोजांबिक में कृषक इस विधि का उपयोग घरों को बनाते समय घर का आयताकार आधार बनाने के लिए करते हैं।

गुणों को ज्ञात करने की विधि

जैसा कि हम पिछली कक्षाओं से देखते आ रहे हैं कि ज्यामितीय तर्क के द्वारा समांतर रेखाओं, कोणों व त्रिभुजों जैसी ज्यामितीय वस्तुओं या आकारों के गुणों का निगमन किया जा सकता है। इस अध्याय में हम विशेष प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों का निगमन सतत रखेंगे।

जब आप किसी चतुर्भुज के एक गुण का निगमन कर लेंगे तो इसे व्यावहारिक रूप से चतुर्भुज के साथ सत्यापित करना सही होगा, भले ही उस चतुर्भुज की संरचना कागज पर की गई हो या कोई सामान्य से चतुर्भुज आकार की सतह हो।

यदि आप निगमन द्वारा किसी गुण को ज्ञात करने में असमर्थ हैं तो आप व्यावहारिक रूप से कोई भी चतुर्भुज आकृति लेकर प्रयोग कर सकते हैं एवं मापन के द्वारा उस गुण का अवलोकन कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि ये अवलोकन उस गुण के विषय में महत्त्वपूर्ण दृष्टिकोण प्रदान करते हैं। यद्यपि हम उस दृष्टिकोण के साथ मात्र **अनुमान** ही लगा सकते हैं। अनुमान अर्थात **एक ऐसा कथन जिसके विषय में हम अत्यधिक आश्वस्त हैं परंतु अभी तक यह सुनिश्चित नहीं है कि यह सदैव सत्य होगा या नहीं।** उदाहरण के लिए कुछ आयतों की रचना करना एवं मापन के द्वारा यह अवलोकन करना कि उनके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों। इसका यह अर्थ नहीं है कि ऐसा सदैव ही होगा। क्या हम आवश्वस्त हो सकते हैं कि हमारे द्वारा बनाए गए 1000वें आयत में भी यह गुण होगा? इस गुण के विषय में सुनिश्चित होने की एकमात्र युक्ति उस कथन की पुष्टि या प्रमाण देना है जैसा कि हमने निगमन 2 में किया था।

© @KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

शिक्षक हेतु टिप्पणी — गुणधर्मों का निगमन करने या सत्यापित करने के लिए विद्यार्थियों को धीरे-धीरे प्रोत्साहित कीजिए। विद्यार्थी ऐसा करते हुए जब भी चुनौतियों का सामना करें तो उन्हें प्रयोग करने, अवलोकन करने एवं अपने अंतर्ज्ञान का उपयोग करते हुए गुणधर्मों को ज्ञात करने के लिए प्रोत्साहित कीजिए।

बढ़ई की समस्या से ज्ञात होता है कि आयत को निम्नलिखित प्रकार से भी परिभाषित किया जा सकता है —

आयत — आयत एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण समान होते हैं और एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

ध्यान दीजिए कि यह परिभाषा पूर्व में दी गई परिभाषा से किस प्रकार भिन्न है। तब भी दोनों परिभाषाओं में चतुर्भुजों की एक ही श्रेणी समाहित है। इसके साथ ही हमें यह भी ज्ञात होता है कि पूर्व में दी गई परिभाषा को सरल बनाया जा सकता है।

? पूर्व परिभाषा में हमने कहा था कि (i) सम्मुख भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं। (ii) सभी कोण 90° के होते हैं। क्या हमारा कथन त्रुटिपूर्ण होगा यदि हम आयत को एक ऐसे चतुर्भुज के रूप में परिभाषित करें जिसमें प्रत्येक कोण का माप 90° हो।

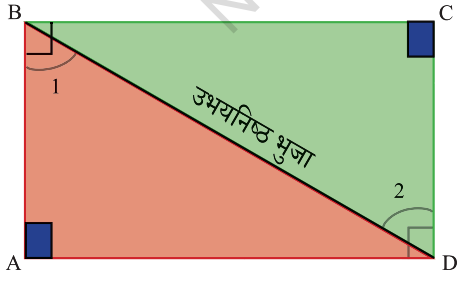
? आपके विचार से यदि यह परिभाषा पूर्ण नहीं हो तब एक ऐसे चतुर्भुज की रचना करने का प्रयास कीजिए जिसमें प्रत्येक कोण का माप 90° हो परंतु सम्मुख भुजाएँ एक समान न हों।

क्या आप ऐसा चतुर्भुज बना सकते हैं?
आइए, सिद्ध करें कि यह असंभव क्यों है?

निगमन 4 — ऐसे चतुर्भुज का आकार कैसा होगा जिसका प्रत्येक कोण 90° हो।

? एक चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए जिसके प्रत्येक कोण का माप 90° हो ऐसे चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के विषय में हम क्या कह सकते हैं?

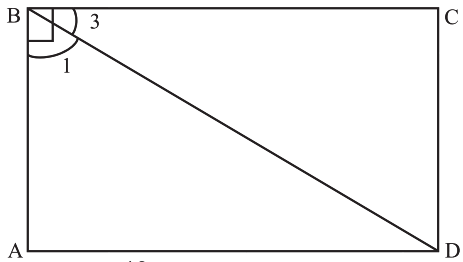
B एवं D को मिलाइए ΔBAD और ΔDCB सर्वांगसम प्रतीत होते हैं। क्या यह तथ्य तर्क संगत है?



त्रिभुजों में दो समानताएँ प्रत्यक्ष रूप से देखी जा सकती हैं। $\angle 1$ और $\angle 2$ के विषय में हम क्या कह सकते हैं?

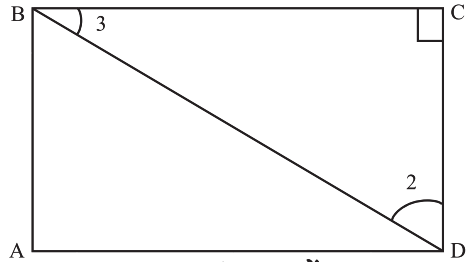
स्मरण कीजिए हमने निगमन 2 में ठीक ऐसी ही समस्या का समाधान किया था। हम यहाँ भी उस तर्क का उपयोग कर सकते हैं।

©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED



चूँकि $\angle B = 90°$

$\angle 3 + \angle 1 = 90°$



ΔBCD में,

$\angle 3 + \angle 2 + 90° = 180°$

$\angle 3 + \angle 2 = 90°$

इसलिए $\angle 1 = \angle 2$

इस प्रकार AAS सर्वांगसमता स्थिति से $\Delta BAD \cong \Delta DCB$ होगा।

अत: AD = CB और DC = BA है, चूँकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं।

? क्या $\Delta BAD \cong \Delta CDB$ लिखना त्रुटिपूर्ण होगा? यदि हाँ, तो ऐसा क्यों?

इस प्रकार हमने यह सिद्ध किया है कि जब किसी चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हों तो सम्मुख भुजाओं की लंबाई समान होती है। अत: वह चतुर्भुज एक आयत होता है। इस प्रकार आयत को सरल शब्दों में निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है—

आयत — आयत एक चतुर्भुज है जिसके प्रत्येक कोण का माप 90° होता है।

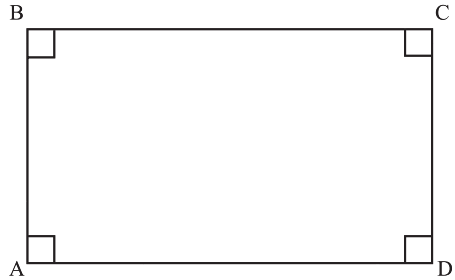
आइए, हम आयत के गुणों की सूची बनाएँ।

गुण 1— आयत के प्रत्येक कोण का माप 90° का होता है।

गुण 2— आयत की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

? क्या आयत की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं?

ऐसा निश्चित रूप से प्रतीत होता है। इस तथ्य को तिर्यक छेदी रेखा के गुणधर्म का उपयोग करके सत्यापित किया जा सकता है।



ध्यान दीजिए कि AB, AD और BC के लिए एक तिर्यक रेखा है तथा $\angle A + \angle B = 90° + 90° = 180°$ है।

जब तिर्यक रेखा के एक ही ओर के आंतरिक कोणों का योग 180° होता है तो रेखाएँ समातंर होती हैं। इस तथ्य का उपयोग करके हम यह निष्कर्ष ज्ञात कर सकते हैं कि रेखाएँ AD और BC समांतर हैं जिन्हें हम AD || BC से भी निरूपित करते हैं।

क्या आप इसी प्रकार यह दर्शा सकते हैं कि AB, DC के समांतर है (AB || DC)?

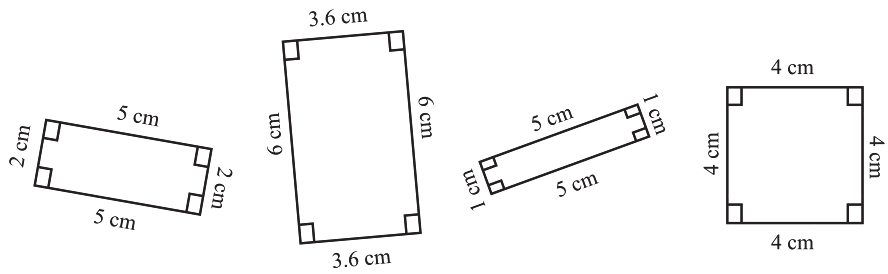
गुण 3 — आयत की सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।

गुण 4 — आयत के विकर्णों की लंबाई सदैव समान होती है। इसके साथ ही वह एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

एक विशेष आयत

नीचे दिए गए चतुर्भुजों में से कौन-से चर्तुभुज आयत नहीं हैं?



(i) (ii) (iii) (iv)

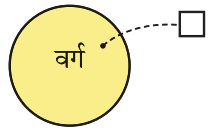
उपर्युक्त सभी चतुर्भुज आयत हैं जिनमें आकृति (iv) भी सम्मिलित है। आकृति (iv) एक आयत है क्योंकि इसका प्रत्येक कोण का माप 90° है। यद्यपि यह एक विशेष आयत है जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हैं। हम जानते हैं कि इस चतुर्भुज को वर्ग भी कहा जाता है।

वर्ग — वर्ग एक चतुर्भुज है जिसके प्रत्येक कोण का माप 90° का होता है और सभी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं।

इस प्रकार प्रत्येक वर्ग एक आयत भी है परंतु हम स्पष्ट रूप से कह सकते हैं कि प्रत्येक आयत एक वर्ग नहीं है।

इस संबंध को **वेन आरेख** का उपयोग करके चित्रात्मक रूप से दर्शाया जा सकता है। हम यह वेन आरेख पहले भी देख चुके हैं। वेन ओरख में वस्तुओं के एक समूह को एक बंद वक्र के अतंर्गत बिंदुओं के रूप में दर्शाया जाता है। सामान्यत: ये बंद वक्र अंडाकार या वृत्त होते हैं।

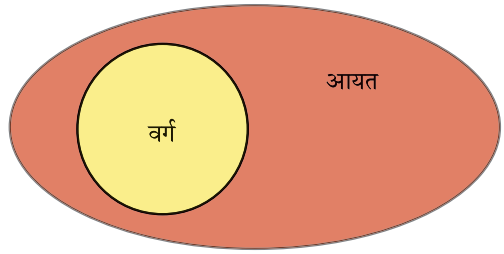
उदाहरण के लिए सभी वर्गों के समूह को इस प्रकार दर्शाया जाता है।



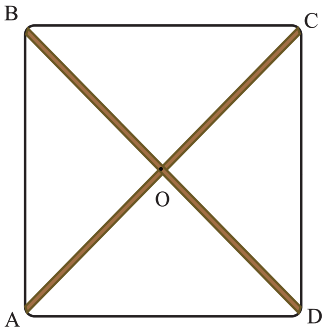
इस क्षेत्र में प्रत्येक बिंदु एक वर्ग का प्रतिनिधित्व करता है जिसमें संभावित सभी वर्ग सम्मिलित हैं।

© KTBS TO BE REPUBLISHED

चूँकि प्रत्येक वर्ग एक आयत होता है। अत: दोनों समूहों को वेन आरेख द्वारा निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकेगा—



? आइए, हम पुनः बढ़ई की समस्या पर विचार करें। यदि लकड़ी की पट्टिकाओं को इस प्रकार रखा जाए कि अंत बिंदुओं से होकर जाने वाला धागा एक वर्ग बनाता हो तो ऐसा करने के लिए हमें क्या करना होगा?



आइए, पूर्व स्थिति के समान ही एक वर्ग बनाने का प्रयास करें जिसके एक विकर्ण की लंबाई 8 सेंटीमीटर हो।

एक आयत की स्थिति में बढ़ई की समस्या को हल करते समय हमने यह अवलोकन किया कि 90° के सभी कोणों (और समान लंबाई की सम्मुख भुजाएँ) वाला एक चतुर्भुज प्राप्त करने के लिए विकर्णों को इस प्रकार खींचा जाना चाहिए कि—

(i) उन सभी की लंबाई समान हो और

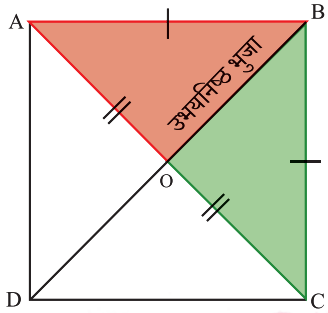
(ii) वह एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों।

? भुजाओं की समान लंबाई प्राप्त करने के लिए हमें और अधिक किसकी आवश्यकता है? क्या विकर्णों के मध्य के कोण को सही प्रकार से चयनित करके यह प्राप्त किया जा सकता है? ध्यान दीजिए क्या आप तर्क अथवा प्रयोग द्वारा इसे ज्ञात कर सकते हैं?

निगमन 5— विकर्णों के मध्य का कोण क्या होना चाहिए?

विकर्णों के मध्य का कोण सर्वांगसमता की अवधारणा का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है। मान लीजिए हम समान विकर्णों को इस प्रकार मिलाते हैं कि वे एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों और उससे एक वर्ग प्राप्त होता हो। आइए, हम इस वर्ग को ABCD से नामांकित करें।

वह दो त्रिभुज कौन-से हैं जिनकी सर्वांगसमता के द्वारा हम विकर्णों के मध्य बने कोणों को ज्ञात कर सकते हैं?



SSS सर्वांगसमता नियम द्वारा $\Delta BOA \cong \Delta BOC$ है।

© KTSS NOT TO BE REPUBLISHED

? क्या इसका उपयोग विकर्णों द्वारा बनाए गए कोणों ∠**BOA** और ∠**BOC** को ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है?

चूँकि ये कोण सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं इसलिए ये परस्पर समान हैं। इसके अतिरिक्त ये कोण मिलकर एक सरल कोण भी बनाते हैं। अत: ∠**BOA** + ∠**BOC** = **180°** होगा। इस प्रकार प्रत्येक कोण का माप 90° होना चाहिए।

यह दर्शाता है किसी वर्ग के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। अर्थात विकर्णों को इस प्रकार खींचना चाहिए कि वे समान लंबाई के हों और एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हों। चूँकि विकर्णों के अंतबिंदु एक चतुर्भुज के शीर्षों को अद्वितीय रूप से निर्धारित करते हैं अत: विकर्णों के अंत बिंदुओं को जोड़ने पर एक वर्ग प्राप्त होता है।

? इस तथ्य का उपयोग करते हुए 8 सेंटीमीटर लंबाई के एक विकर्ण के साथ वर्ग की रचना कीजिए।

वर्ग के गुण

चूँकि वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत होता है। अत: आयत के सभी गुण वर्ग के लिए भी लागू होते हैं।

? निगमन 1 और निगमन 2 के ज्यामितीय तर्क द्वारा यह सत्यापित कीजिए कि क्या उपर्युक्त तथ्य सत्य हैं? इसके साथ यह भी देखिए कि क्या वे वर्ग में भी प्रयुक्त किए जा सकते हैं?

गुण 1 — वर्ग की सभी भुजाएँ परस्पर समान होती हैं।

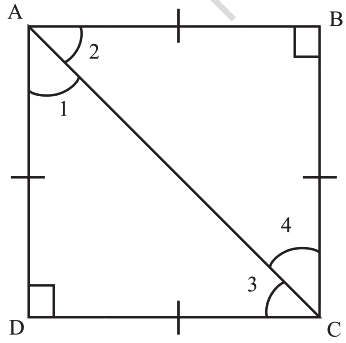
गुण 2 — वर्ग की सभी सम्मुख भुजाएँ परस्पर समांतर होती है।

गुण 3 — वर्ग के प्रत्येक कोण का माप 90° होता है।

गुण 4 — वर्ग के विकर्ण समान होते हैं और 90° पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

वर्ग का एक और विशेष गुण होता है।

? ∠1, ∠2, ∠3 और ∠4 के माप क्या है? आइए, देखते हैं कि तर्क अथवा प्रयोगों द्वारा इसे किस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।



ΔADC में

∠1 + ∠3 + 90° = 180°

चूँकि AD = DC, तो हमें प्राप्त होता है ∠1 = ∠3

अत: ∠1 = ∠3 = 45°

इसी प्रकार ∠2 और ∠4 का मान ज्ञात कीजिए।

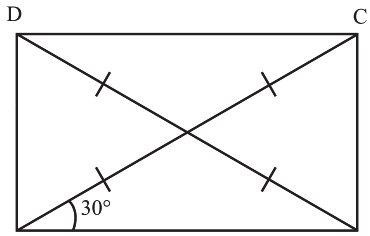
अत: स्पष्ट है कि वर्ग का एक और गुण होता है—

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

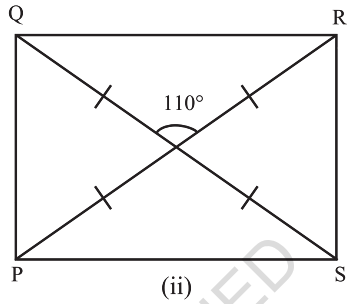
गुण 5 — वर्ग के विकर्ण शीर्षकोणों को समान रूप से विभाजित करते हैं। जिसे हम इस प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं कि किसी वर्ग के विकर्ण उसके शीर्ष कोणों को समद्विभाजित करते हैं।

आइए, पता लगाएँ

1. नीचे दिए गए आयतों के अन्य सभी आंतरिक कोणों को ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

2. एक ऐसा चतुर्भुज बनाइए जिसके प्रत्येक विकर्ण की लंबाई 8 सेंटीमीटर हो एवं वे एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों और निम्नलिखित कोण बनाते हों।
   (i) 30° (ii) 40° (iii) 90° (iv) 140°

3. माना O केंद्र का कोई वृत्त है। जहाँ पर रेखाखंड PL और AM वृत्त के दो व्यास हैं, यह परस्पर लंबवत हैं। बताइए कि APML किस प्रकार की आकृति है? कारण और/अथवा प्रयोग द्वारा इसे ज्ञात कीजिए।

4. हमने देखा कि कागज को मोड़कर 90° का कोण कैसे बनाया जाता है। हम मान लेते हैं कि हमारे पास कागज नहीं है परंतु समान लंबाई की दो छड़ियाँ और एक धागा है। इनसे हम 90° का कोण किस प्रकार बनाएँगे?

गणित चर्चा

5. हमने देखा कि आयत का एक गुण यह भी है कि उसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं। क्या इसे आयत की परिभाषा के रूप में प्रयुक्त किया जा सकता है? दूसरे शब्दों में प्रत्येक चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर और समान हों तो क्या वह एक आयत होगा?

प्रयास कीजिए

4.2 चतुर्भुज के कोण

क्या ऐसे चतुर्भुज की रचना करना संभव है जिसके तीन कोण 90° के समान हों एवं चौथा कोण 90° के समान न हो?

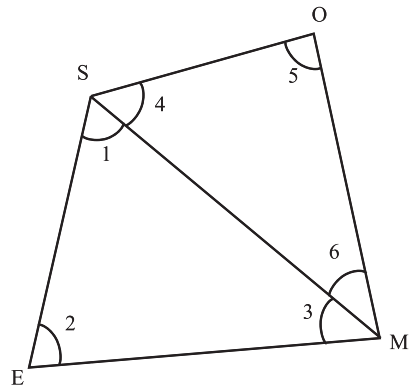
रचनाओं द्वारा आपने ध्यानपूर्वक अवलोकन किया होगा कि ऐसा करना संभव नहीं है।

परंतु क्यों नहीं?

ऐसा चतुर्भुजों के कोणों से संबंधित एक सामान्य गुण के कारण होता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हमें ज्ञात है कि त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180° होता है। चतुर्भुज के कोणों के योग में भी यही नियमितता होती है। एक चतुर्भुज SOME पर विचार कीजिए।



एक विकर्ण SM खींचिए। हमें दो त्रिभुज ΔSEM और ΔSOM प्राप्त होते हैं।

ΔSEM में $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ है।

तथा ΔSOM में $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$ है।

सभी छ: कोणों का योग करने पर हमें क्या प्राप्त होता है?

हमें प्राप्त होता है —

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180° + 180° = 360°$

अथवा $(\angle 1 + \angle 4) + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 2 + \angle 5 = 360°$

चूँकि $(\angle 1 + \angle 4)$, $(\angle 3 + \angle 6)$, $\angle 2$ एवं $\angle 5$ चतुर्भुज SOME के कोण हैं। अत: हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है—

किसी भी चतुर्भुज के सभी कोणों का योगफल 360° होता है।

उपर्युक्त कथन से यह ज्ञात होता है कि किसी चतुर्भुज में तीन कोण समकोण व चौथा कोण समकोण न होना असंभव है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.3 समांतर सम्मुख भुजाओं वाले और चतुर्भुज

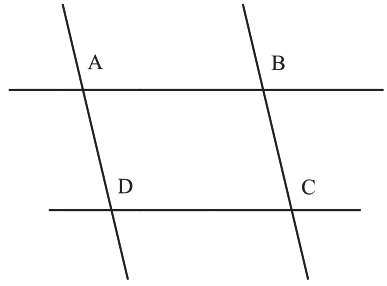
आयत (वर्ग में भी) में सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

? क्या ऐसे चतुर्भुज हैं जिनमें सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं परंतु वह आयत नहीं हैं?

आइए, इसकी रचना का प्रयास करते हैं।

यह कार्य दो समांतर रेखाओं के युग्मों को खींच कर सरलतापूर्वक किया जा सकता है। इस कार्य हेतु हमें यह ध्यान रखना होगा कि वह रेखाएँ समकोण पर न मिलती हों।

? मापक और सेट-स्कवेयर अथवा परकार (कम्पास) तथा मापक का उपयोग करके समांतर रेखाओं की रचना कैसे की जाती है? पूर्व तथ्यों को स्मरण करते हुए ऐसी एक आकृति की रचना कीजिए।



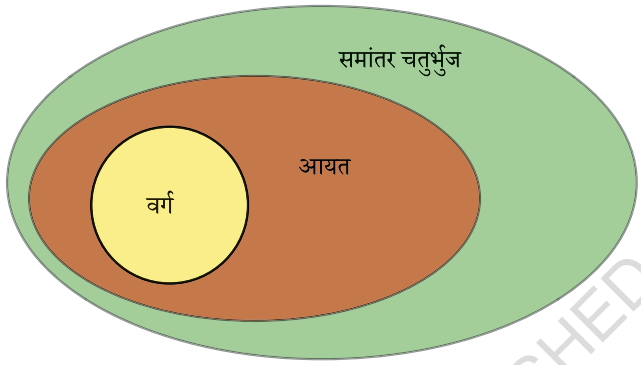
चतुर्भुज ABCD को ध्यानपूर्वक देखिए। इसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं परंतु यह एक आयत नहीं है।

अत: चतुर्भुजों का एक बड़ा समूह विद्यमान है जिनमें सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं। ऐसे चतुर्भुजों को **समांतर चतुर्भुज** कहा जाता है।

? क्या एक आयत एक समांतर चतुर्भुज है?

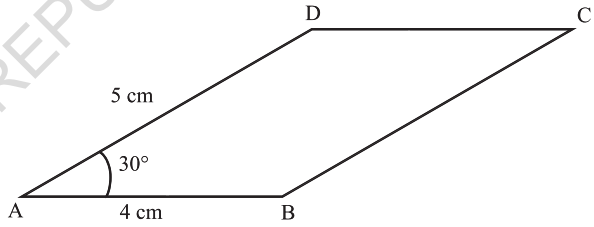
हम जानते हैं कि एक आयत में सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं। अत: यह समांतर चतुर्भुज की परिभाषा की पुष्टि करता है। अत: निश्चित ही यह एक समांतर चतुर्भुज है। विशेष रूप से एक आयत एक विशिष्ट प्रकार का समांतर चतुर्भुज है जिसके प्रत्येक कोण का माप 90° होता है।

आइए, इस संबंध को वेन आरेख का प्रयोग करके समझें।

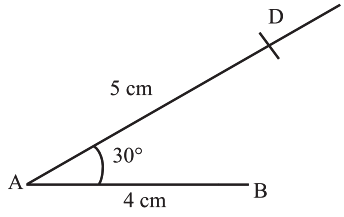


आइए, समांतर चतुर्भुज के कोणों और भुजाओं के मध्य संबंध को समझने के लिए निम्न आकृतियों की रचना करें।

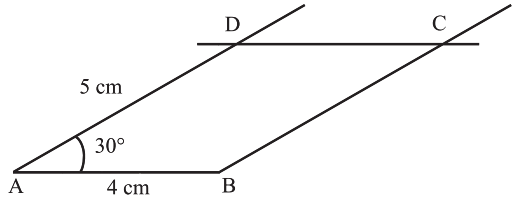
? एक समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसकी आसन्न भुजाएँ 4 सेंटीमीटर और 5 सेंटीमीटर हों तथा इनके मध्य का कोण 30° हों।



चरण 1 — एक रेखाखंड AB = 4 सेंटीमीटर और AD = 5 सेंटीमीटर इस प्रकार खींचिए कि इनके मध्य कोण 30° का हों।



चरण 2 — बिंदु D से होकर जाते हुए रेखा AB के समांतर एक रेखा खींचिए और B से होकर जाती हुई रेखा AD के समांतर एक रेखा खींचिए। वह बिंदु जहाँ दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं उसे C से चिह्नित कीजिए।



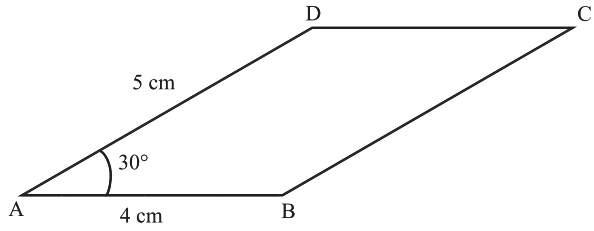
ABCD अपेक्षित समांतर चतुर्भुज है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? समांतर चतुर्भुज के शेष कोणों के माप क्या हैं? बताइए कि शेष अन्य भुजाओं की लंबाई क्या है? क्या आप तर्क देकर एवं प्रयोग करके ज्ञात कर सकते हैं?

? **निगमन 6 — हम एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के विषय में क्या कह सकते हैं?**

समांतर चतुर्भुज ABCD में AB || CD और AD उनकी तिर्यक रेखा है।



$\angle A + \angle D = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों का योग)

इसलिए

$\angle D = 180 - \angle A = 180 - 30 = 150°$ है।

इसी प्रकार AD || BC और AB तथा CD इसकी तिर्यक रेखाएँ हैं।

$$\text{इसलिए } \angle A + \angle B = 180°$$

$$\text{अत: } \angle C + \angle D = 180°$$

इन समीकरणों का उपयोग करते हुए हमें $\angle B = 150°$ और $\angle C = 30°$ प्राप्त होता है।

इस समांतर चतुर्भुज में हमने देखा कि **दोनों सम्मुख कोण युग्म समान होते हैं और आसन्न कोणों का योग 180° होता है।**

इस प्रकार

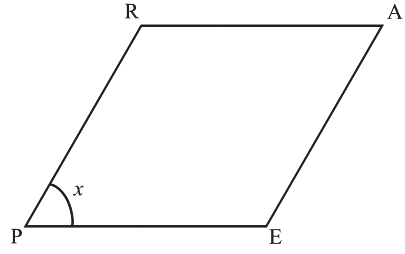
$\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ और $\angle B + \angle C = 180°$

तथा

$$\angle A = \angle C \text{ और } \angle B = \angle D$$

चूँकि आसन्न कोण समांतर रेखाओं के युग्म के लिए तिर्यक रेखा के एक ही ओर स्थित अंत: कोण होते हैं इसलिए उनका योग 180° होना चाहिए।

? सम्मुख कोणों के विषय में आपका क्या विचार है? क्या वह सभी समांतर चतुर्भुज में एक समान होंगे? यदि हाँ, तब हम कैसे आश्वस्त हो सकते हैं?



आइए, हम इनमें से एक कोण को x मान लेते हैं।

बताइए कि शेष कोण का माप कितना होगा?

चूँकि $\angle P + \angle R = 180°$,

$\angle R = 180 - \angle P = 180 - x$

इसी प्रकार, चूँकि $\angle A + \angle R = 180°$,

$\angle A = 180 - \angle R = 180 - (180 - x) = 180 - 180 + x = x$ हैं।

अत: $\angle P = \angle A = x$ है।

इसी प्रकार हम $\angle R = \angle E = 180 - x$ ज्ञात कर सकते हैं।

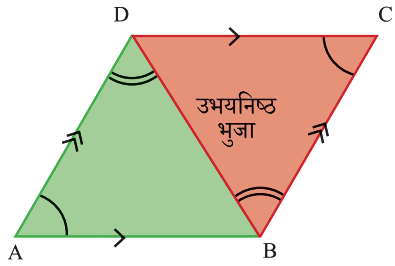
अत: इससे यह ज्ञात होता है कि **समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण सदैव समान होते हैं।**

© KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

? निगमन 7 — हम एक समांतर चतुर्भुज की भुजाओं के विषय में क्या कह सकते हैं?

एक समांतर चतुर्भुज को देखने पर ऐसा प्रतीत होता है कि सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

क्या हम इसे दर्शाने के लिए पुन: सर्वांगसमता का उपयोग कर सकते हैं? इसके लिए कौन-से दो त्रिभुजों पर विचार कर सकते हैं?



ΔABD और ΔCDB में एक चाप द्वारा चिह्नित कोण समान हैं क्योंकि वे एक समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण हैं।

चूँकि AD || BC और BD इनकी एक तिर्यक रेखा है। यहाँ दो चापों द्वारा चिह्नित कोण समान हैं क्योंकि वे एकांतर कोण हैं।

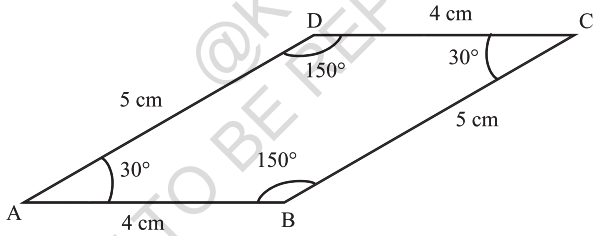
अत: AAS नियम द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम हैं अर्थात $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

अत: AD = CB और AB = CD है।

इस प्रकार **समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।**

? क्या $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ लिखना त्रुटिपूर्ण है? यदि हाँ, तो ऐसा क्यों?

पूर्व निगमनों से हम समांतर चतुर्भुज की शेष भुजाओं व कोणों को ज्ञात कर सकते हैं।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, समांतर चतुर्भुज के गुणों की सूची बनाएँ।

गुण 1 — समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

गुण 2 — समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

गुण 3 — समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण समान होते हैं और आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

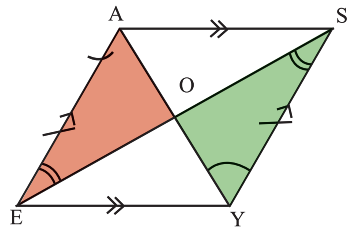
? क्या एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण सदैव समान होते हैं? अपने द्वारा बनाए गए समांतर चतुर्भुज के साथ इसकी जाँच कीजिए।

हम देखते हैं कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों का समान होना आवश्यक नहीं है।

? क्या विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं? क्या वे उनके मध्य बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं? इसे ज्ञात करने के लिए तर्क दीजिए अथवा प्रयोग कीजिए।

निगमन 8 — एक समांतर चतुर्भुज के दो विकर्णों का प्रतिच्छेदी बिंदु क्या है?

जिस प्रकार हमने आयत में किया था उसी प्रकार हम समांतर चतुर्भुज EASY में ΔAOE और ΔYOS की सर्वांगसमता की जाँच करके यह ज्ञात कर सकते हैं कि दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं अथवा नहीं।



$AE = YS$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

एक चाप एवं दो चापों द्वारा चिह्नित कोण परस्पर समान हैं क्योंकि वे समांतर रेखाओं के एकांतर कोण हैं।

इस प्रकार ASA नियम द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम हैं अत: $\Delta AOE \cong \Delta YOS$

अत: $OA = OY$ और $OE = OS$ हैं, चूँकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ हैं। इस प्रकार O दोनों विकर्णों का मध्य बिंदु है।

? क्या $\Delta AOE \cong \Delta SOY$ लिखना त्रुटिपूर्ण होगा? यदि हाँ, तो क्यों?

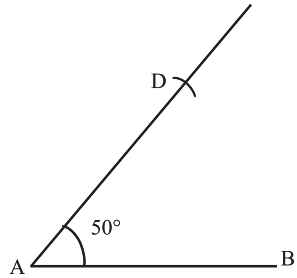
गुण 4 — एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

? क्या एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक विशेष कोण पर प्रतिच्छेद करते है?

4.4 समान लंबाई की भुजाओं वाले चतुर्भुज

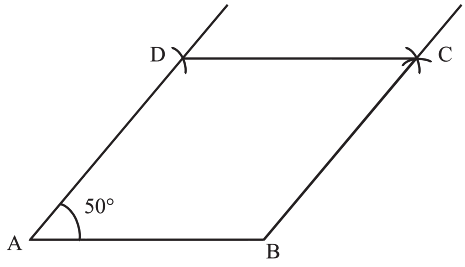
? क्या वर्ग एकमात्र ऐसा चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं? आइए, इस प्रश्न का उत्तर रचना के माध्यम से ज्ञात करें।

दो समान लंबाई की भुजाएँ AD और AB खींचिए जो एक-दूसरे पर लंबवत नहीं हों।



? क्या हम दिए गए चित्र से पूर्ण चतुर्भुज बना सकते हैं जिससे कि इसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की हों?

एक बिंदु C चिह्नित कीजिए जिसकी B और D से दूरी AB (या AD) के समान हो। ऐसा करने के लिए AB को एक परकार का उपयोग करके मापिए। इस लंबाई को त्रिज्या मानकर बिंदु B और D से चाप खींचिए।



अब हमारे पास समान लंबाई की भुजाओं वाला एक चतुर्भुज है और इसका एक कोण 50° का है। ध्यान दीजिए हम 180° से कम का कोई कोण (50° के स्थान पर) लेकर एक चतुर्भुज बना सकते हैं।

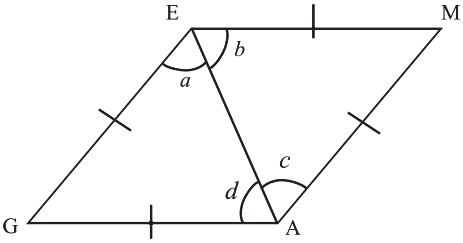
एक चतुर्भुज जिसमें सभी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं, समचतुर्भुज कहलाता है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? हमने जो समचतुर्भुज ABCD बनाया है उसके अन्य कोणों का माप ज्ञात कीजिए? यह ज्ञात करने के लिए तर्क दीजिए या प्रयोग कीजिए।

निगमन 9 — हम एक समचतुर्भुज में कोणों के विषय में क्या कह सकते हैं?

एक समचतुर्भुज GAME पर विचार कीजिए।



ΔGAE में चूँकि GE = GA, अत: $a = d$

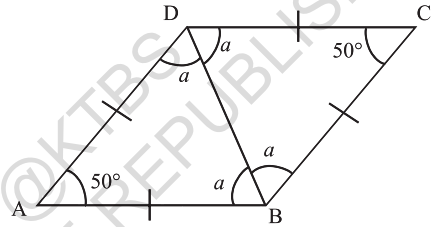
इसी प्रकार ΔMAE में चूँकि ME = MA अत: $b = c$ है।

? $\Delta GAE \cong \Delta MAE$ यह कैसे ज्ञात किया जा सकता है?

अत: $a = b$, $c = d$ और $\angle G = \angle M$ (चूँकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

अत: हमें $a = b = c = d$ प्राप्त होता है।

ये तथ्य प्रत्येक समचतुर्भुज के लिए मान्य हैं। आइए, इन तथ्यों को हमारे द्वारा पूर्व में बनाए गए समचतुर्भुज ABCD पर प्रयोग करके देखें। माना विकर्ण पर बनें चार समान कोण a माप के हैं (जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है)।

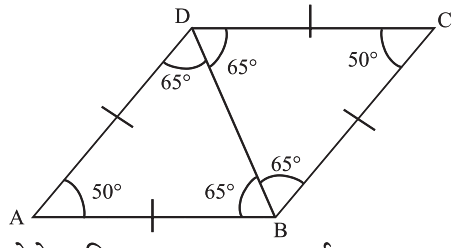


ΔADB में

$a + a + 50 = 180°$

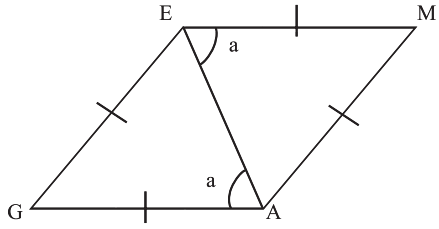
अत: $a = 65°$

इस प्रकार समचतुर्भुज *ABCD* के कोणों का माप 50°, 130°, 50° और 130° है।

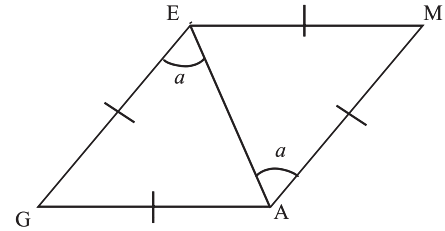


अत: **एक समचतुर्भुज में सम्मुख कोण एक-दूसरे के समान होते हैं।**

रोचक तथ्य यह है कि एक अन्य विधि का उपयोग करके भी हम समचतुर्भुज ABCD के अन्य कोणों को ज्ञात कर सकते हैं। हमने देखा कि एक सामान्य समचतुर्भुज GAME में एक विकर्ण द्वारा बने चारों कोण एक-दूसरे के समान हैं।



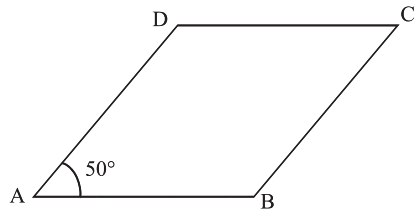
रेखाओं EM, GA और इनकी तिर्यक रेखा AE पर विचार कीजिए, चूँकि एकांतर कोण समान हैं। अत: EM || GA है।



इसी प्रकार रेखाओं GE, AM और इसकी तिर्यक रेखा AE पर विचार कीजिए, चूँकि एकांतर कोण समान हैं। अत: GE || AM है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हमें ज्ञात है कि सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं अत: GAME भी एक समांतर चतुर्भुज है। अत: प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है एवं समांतर चतुर्भुज के सभी गुण एक समचतुर्भुज हेतु भी मान्य होंगे। अत: समचतुर्भुज के आसन्न कोणों का योगफल 180° होगा और सम्मुख कोण समान होंगे (निगमन 6 में दिए गए तथ्यों को एक समचतुर्भुज पर भी प्रयोग करके सत्यापित कीजिए)।



अत: समचतुर्भुज ABCD में

$$\angle A = \angle C = 50° \text{ और}$$

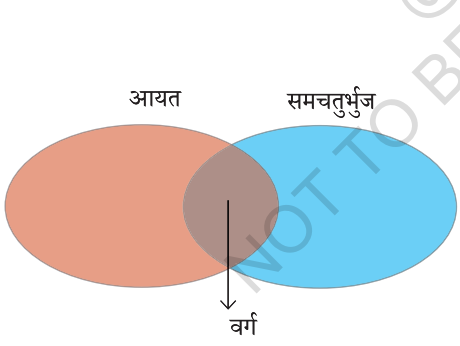
$$\angle D = \angle B = 180 - 50 = 130° \text{ है।}$$

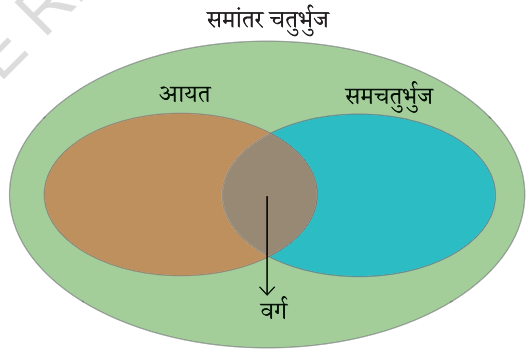
? इस प्रकार एक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है एवं एक आयत भी एक समांतर चतुर्भुज होता है। इसे एक वेन आरेख का प्रयोग करके कैसे दर्शाया जा सकता है?

? इस आरेख में वर्गों का समूह कहाँ होगा?

हम जानते हैं कि एक वर्ग एक आयत भी है। चूँकि वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं अत: एक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज भी होता है। इसके साथ ही हमें यह भी ज्ञात है कि वर्ग की सभी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं इसलिए वर्ग एक समचतुर्भुज भी होता है। अत: वेन आरेख इस प्रकार होगा।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED





आइए, हम समचतुर्भुज के गुणों की एक सूची बनाएँ।

गुण 1 — समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ एक-दूसरे के समान होती हैं।

गुण 2 — समचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।

गुण 3 — समचतुर्भुज में आसन्न कोणों का योग 180° और सम्मुख कोण समान होते हैं।

? क्या एक समचतुर्भुज के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं?

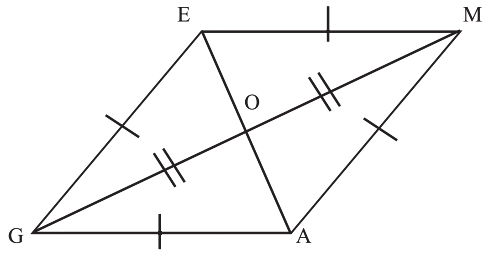
गुण 4 — समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

गुण 5 — समचतुर्भुज के विकर्ण इसके कोणों को समद्विभाजित करते हैं।

? क्या एक समचतुर्भुज के विकर्ण किसी विशेष कोण पर प्रतिच्छेद करते हैं? यह ज्ञात करने के लिए आप तर्क दीजिए अथवा प्रयोग कीजिए।

निगमन 10 — समचतुर्भुजों के विकर्णों द्वारा उनके प्रतिच्छेदी बिंदु पर बने कोणों के विषय में हम क्या कह सकते हैं?

? समचतुर्भुज GAME में हमें $\Delta GEO \cong \Delta MEO$ क्यों प्राप्त होता है?



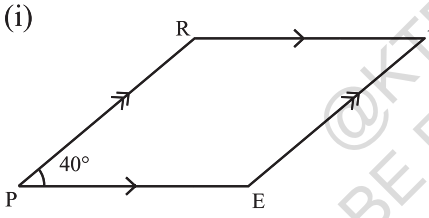
अत: $\angle GOE = \angle MOE$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत कोण) चूँकि इनका योगफल 180° होगा। अत: प्रत्येक कोण का माप 90° का होना चाहिए।

गुण 6 — एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को 90° के कोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

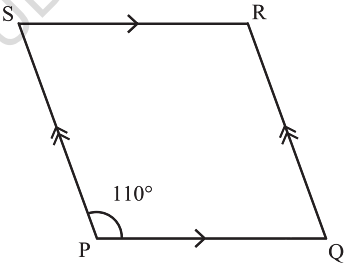
? आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित चतुर्भुजों के शेष कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

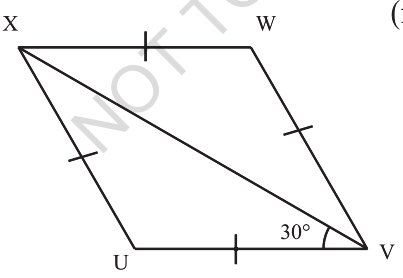
(i)



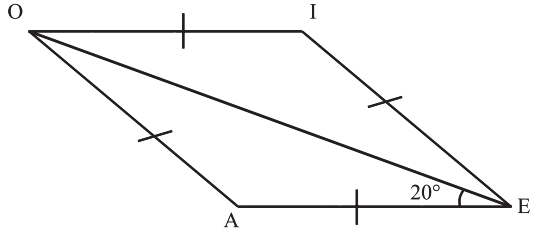
(ii)



(iii)



(iv)



2. विकर्ण के गुणों को आधार बनाते हुए एक समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसके विकर्ण की लंबाई 7 सेंटीमीटर तथा 5 सेंटीमीटर हो। इसके साथ ही ये विकर्ण 140° के कोण पर प्रतिच्छेद भी करते हों।
3. विकर्ण के गुणों का प्रयोग करके एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसके विकर्णों की लंबाई 4 सेंटीमीटर और 5 सेंटीमीटर हो।

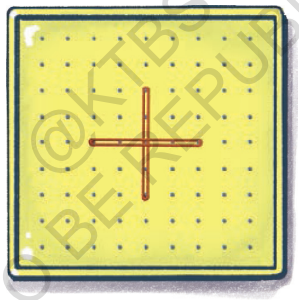
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4.5 चतुर्भुजों के साथ खेल

जियोबोर्ड गतिविधि

एक जियोबोर्ड और कुछ रबड़ बैंड लीजिए। यदि आपके पास यह उपलबध नहीं है तो आप पुस्तक के अंत में दिए गए बिंदु जाल (ग्रिड) कागज को इस गतिविधि के लिए प्रयोग कर सकते हैं।

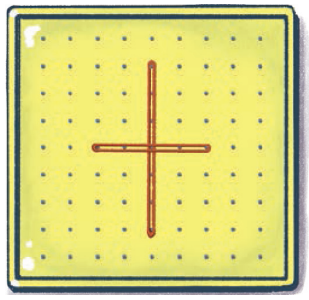
विकर्ण बनाने के लिए समान लंबाई के दो रबड़ बेंड को एक-दूसरे पर लंबवत रूप में व्यवस्थित कीजिए। इसके साथ सिरों को जोड़िए।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आपको जो चतुर्भुज प्राप्त हुआ वह किस प्रकार का है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

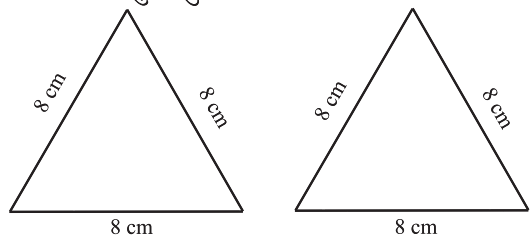
दोनों में से किसी एक विकर्ण को दोनों ओर 2 सेंटीमीटर तक विस्तारित कीजिए।



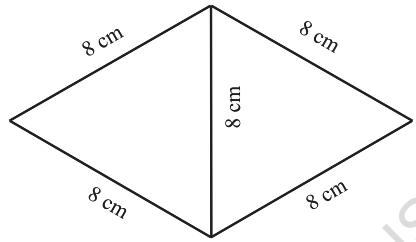
? अब आपको जो चतुर्भुज प्राप्त हुआ वह किस प्रकार का होगा? अपने उत्तर के औचित्य को सिद्ध कीजिए।

त्रिभुजों को जोड़ना

1. 8 सेंटीमीटर भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के कार्ड बोर्ड के दो कटआउट लीजिए।

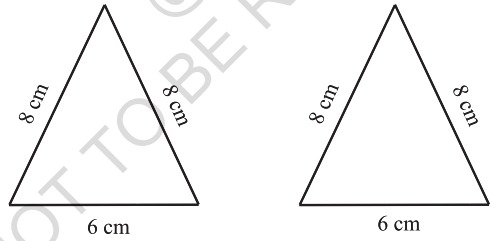


? क्या आप उपर्युक्त कार्डबोर्ड कटआउट को जोड़कर एक चतुर्भुज बना सकते हो?



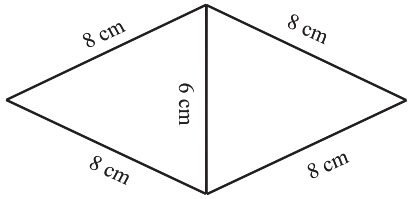
? उपर्युक्त चतुर्भुज किस प्रकार का है? अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

2. 8 सेंटीमीटर, और 6 सेंटीमीटर भुजाओं वाले समद्विबाहु त्रिभुज के कार्डबोर्ड के दो कटआउट लीजिए।

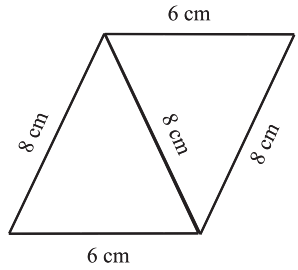


? उपर्युक्त को एक साथ जोड़कर एक चतुर्भुज बनाने के विभिन्न प्रकार क्या हैं?

इन्हें इस प्रकार जोड़ने से प्राप्त होते है—



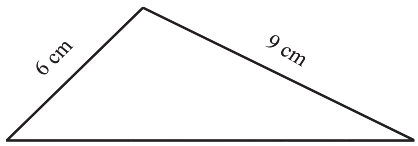
इन्हें इस प्रकार जोड़ने से प्राप्त होते है—

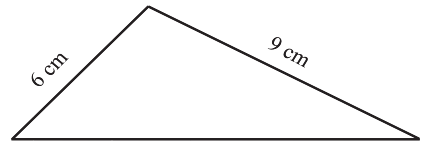


? ऊपर दर्शाए गए दोनों चतुर्भुज किस प्रकार के चतुर्भुज हैं? अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

@RTDS NOT TO BE REPUBLISHED

3. 6 सेंटीमीटर, 9 सेंटीमीटर और 12 सेंटीमीटर भुजाओं वाले एक विषमबाहु त्रिभुज के कार्डबोर्ड के दो कटआउट लीजिए।





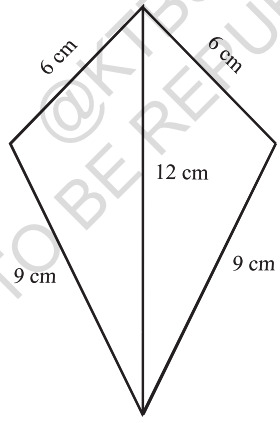
? इन्हें एक साथ जोड़कर एक चतुर्भुज बनाने के विभिन्न प्रकार क्या होंगे?

? क्या आप त्रिभुजों को जोड़कर प्राप्त होने वाले विभिन्न चतुर्भुजों की पहचान कर सकते हैं? चतुर्भुज की पहचान करने के पश्चात आप अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

4.6 पतंग और समलंब चतुर्भुज

पतंग

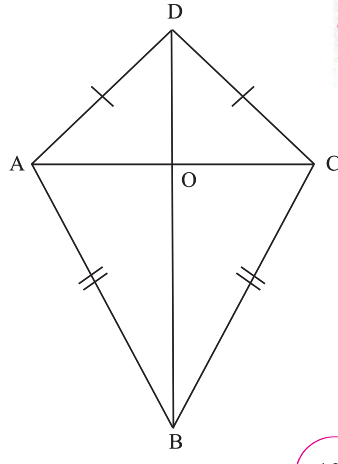
6 सेंटीमीटर, 9 सेंटीमीटर और 12 सेंटीमीटर भुजाओं वाले दो त्रिभुजों को एक साथ जोड़ने की एक विधि यह है —



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यह चतुर्भुज पतंग के समान प्रतीत होता है। ध्यान दीजिए इसकी आसन्न भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं।

पतंग – पतंग एक चतुर्भुज है जिसे ABCD से नामांकित किया जा सकता है जिसमें AB = BC और CD = DA होता है।



? **गुण 1 —** पतंग ABCB में विकर्ण BD —

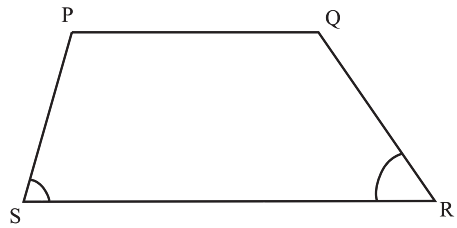
(i) ∠ABC और ∠ADC को समद्विभाजित करता है।

(ii) विकर्ण AC को समद्विभाजित करता है अर्थात AO = OC है। इसके साथ AC पर लंबवत भी है।

संकेत — क्या $\Delta AOB \cong \Delta COB$?

समलंब चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज वह चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं। यदि हम इस नियम को हटा दें तो हमें एक नए प्रकार का चतुर्भुज प्राप्त होता है। इसे समलंब चतुर्भुज कहते हैं।



समलंब चतुर्भुज — समलंब चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें कम से कम एक युग्म की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

? एक समलंब चतुर्भुज की रचना कीजिए। इसके आधार कोणों (आकृति में अंकित) को भी मापिए।

? क्या आप शेष कोणों को मापे बिना ज्ञात कर सकते हैं?

चूँकि हमारे पास PQ || SR है तो हमें ज्ञात होता है —

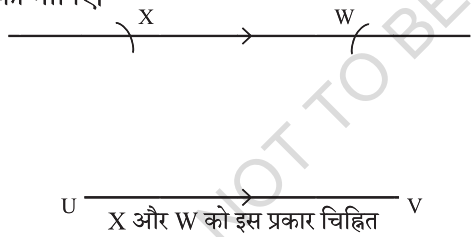
गुण 1 — $\angle S + \angle P = 180°$ और $\angle R + \angle Q = 180°$

इन तथ्यों का प्रयोग करके शेष कोण सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं। इन्हें ज्ञात करने के पश्चात अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

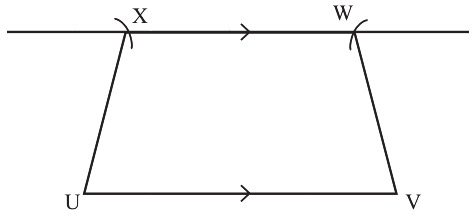
जब एक समलंब चतुर्भुज की असमांतर भुजाएँ समान लंबाई की हों तो उसे **समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज** कहा जाता है।

? हम समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज की रचना किस प्रकार करते हैं?

? एक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज UVWX की रचना कीजिए जिसमें UV || XW हो। इसके $\angle U$ को मापिए।



X और W को इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि UX = VW हो।

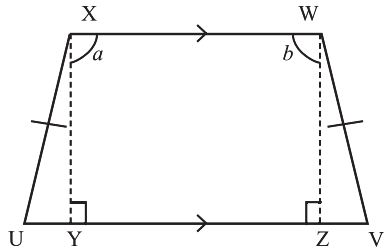


क्या आप बिना मापे शेष कोणों का मान ज्ञात कर सकते हैं?

क्या ऐसा प्रतीत होता है कि सम्मुख भुजाओं के एक ही ओर बनने वाले सम्मुख कोण $\angle U$ और $\angle V$ भी समान हैं? क्या हम यहाँ सर्वांगसम त्रिभुज को ज्ञात कर सकते हैं?

UV के लंबवत रेखाखंड XY और WZ पर विचार कीजिए।

? XWZY किस प्रकार का चतुर्भुज है?



चूँकि XW || UV

$a = 180° - \angle XYZ = 90°$ और $b = 180° - \angle WZY = 90°$

(तिर्यक रेखा के एक ओर के अंत: कोणों का योग 180° होता है।)

अत: XWZY एक आयत है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अब दर्शाया जा सकता है कि $\Delta UXY \cong \Delta VWZ$ (कैसे)?

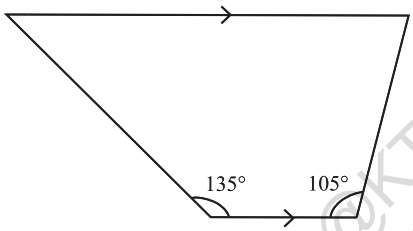
अत: $\angle U = \angle V$ है।

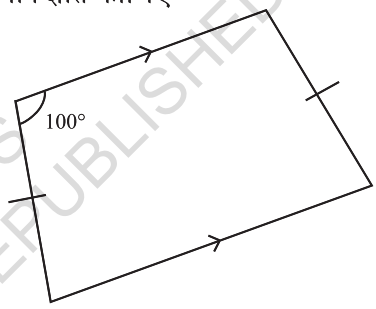
इस तथ्य का प्रयोग करके समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के शेष कोणों को ज्ञात किया जा सकता है। कोणों को मापकर अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

गुण 2 — समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज में समान भुजाओं के एक ही ओर बनने वाले सम्मुख कोण समान होते हैं।

आइए, पता लगाएँ

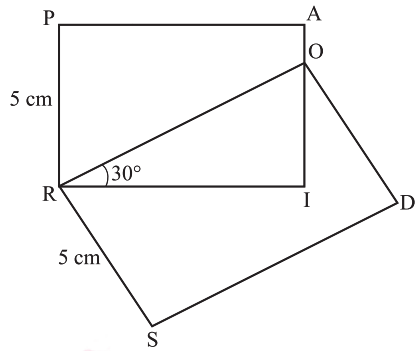
1. 4 सेंटीमीटर भुजा वाले दो समबाहु त्रिभुजों को जोड़कर प्राप्त चतुर्भुज के सभी कोणों और सभी भुजाओं को ज्ञात कीजिए।
2. एक पतंग की रचना कीजिए जिसके विकर्णों की लंबाई 6 सेंटीमीटर और 8 सेंटीमीटर हो।
3. निम्नलिखित समलंब चतुर्भुज के शेष कोणों का मान ज्ञात कीजिए—





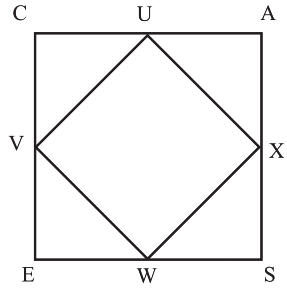
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. एक वेन आरेख बनाइए जिसमें समांतर चतुर्भुज, पतंग, समलंब चतुर्भुज आयत और वर्गों के समूह को दर्शाया गया हो। तत्पश्चात निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—
   (i) वह कौन-सा चतुर्भुज है जो पतंग और समांतर चतुर्भुज दोनों है?
   (ii) क्या ऐसा कोई चतुर्भुज हो सकता है जो एक पतंग और एक आयत दोनों हों?
   (iii) क्या प्रत्येक पतंग एक समचतुर्भुज है? यदि नहीं, तो इन दो प्रकार के चतुर्भुजों के मध्य का संबंध क्या है?
5. यदि PAIR और RODS दो आयत हों तो $\angle IOD$ ज्ञात कीजिए।

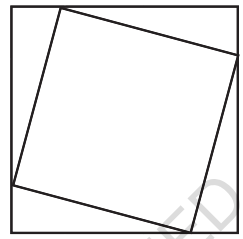


6. चाँदे (प्रोट्रेक्टर) का प्रयोग किए बिना 6 सेंटीमीटर विकर्ण वाले एक वर्ग की रचना कीजिए।

7. CASE एक वर्ग है। बिंदु U, V, W और X वर्ग की भुजाओं के मध्य बिंदु हैं। UVWX किस प्रकार का चतुर्भुज है? इसे ज्यामितीय तर्क, रचना और मापन के उपयोग द्वारा ज्ञात कीजिए। एक वर्ग के अंतर्गत एक अन्य वर्ग की रचना करने की विधियाँ ज्ञात कीजिए। ध्यान रखिए कि आंतरिक वर्ग के शीर्ष बाहरी वर्ग की भुजाओं पर स्थित हों जैसा कि आकृति (b) में दर्शाया गया है।



(a)


(b)

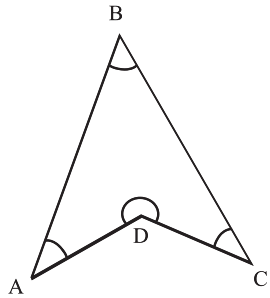
8. यदि एक चतुर्भुज की चारों भुजाएँ समान हों और एक कोण 90° का हो तो क्या यह एक वर्ग होगा? ज्यामितीय तर्क, रचना और मापन के उपयोग द्वारा उत्तर ज्ञात कीजिए।

9. वह चतुर्भुज किस प्रकार का है जिसमें सम्मुख भुजाएँ समान हों? अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

संकेत — एक विकर्ण बनाइए और सर्वांगसम त्रिभुजों की जाँच कीजिए।

10. क्या आकृति में दिए गए चतुर्भुज के सभी कोणों का योगफल 360° होगा? ज्यामितीय तर्क के साथ ही इस आकृति की रचना करके और मापन के उपयोग द्वारा अपना उत्तर ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए



11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य। अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।
    (i) एक चतुर्भुज जिसके विकर्ण समान लंबाई के हों और एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों वह निश्चित ही एक वर्ग होगा।
    (ii) एक चतुर्भुज जिसके तीन कोण समकोण हैं निश्चित ही एक आयत है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

(iii) एक चतुर्भुज जिसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं निश्चित ही एक समांतर चतुर्भुज है।

(iv) एक चतुर्भुज जिसके विकर्ण एक-दूसरे पर लंबवत हों निश्चित ही एक समचतुर्भुज है।

(v) एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख कोण समान हैं निश्चित ही एक समांतर चतुर्भुज है।

(vi) एक चतुर्भुज एक आयत होगा यदि इसका प्रत्येक कोण समान हैं।

(vii) समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज होते हैं।

सारांश

- एक **आयत** एक चतुर्भुज है जिसके प्रत्येक कोण का माप 90° होता है।

  एक आयत के गुण

  - एक आयत की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
  - एक आयत की सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।
  - एक आयत के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं और वे एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

- एक **वर्ग** एक चतुर्भुज है जिसके प्रत्येक कोण का माप 90° का होता है और सभी भुजाओं की लंबाई समान होती है।

  एक वर्ग के गुण

  - एक वर्ग की सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।
  - एक वर्ग के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं और वे एक-दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं।
  - एक वर्ग के विकर्ण वर्ग के कोणों को समद्विभाजित करते हैं।

- एक **समांतर चतुर्भुज** एक चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

  एक समांतर चतुर्भुज के गुण

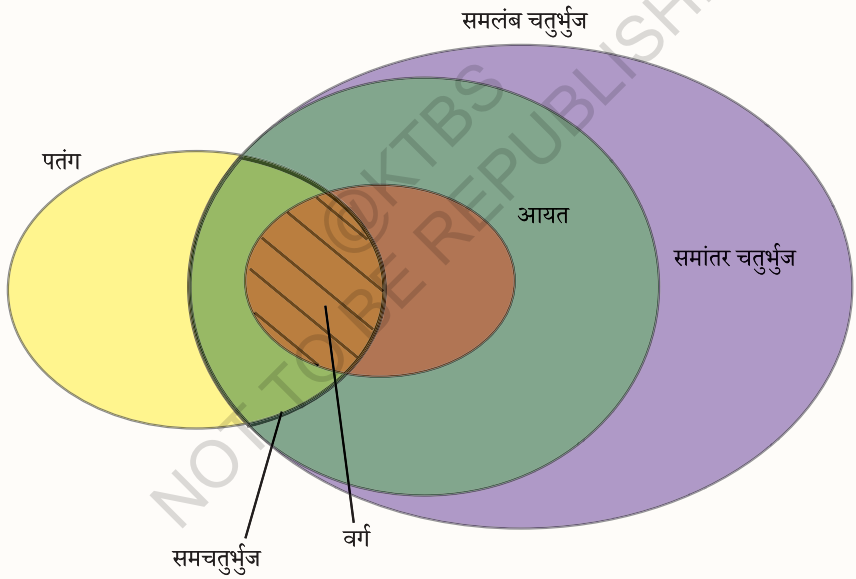
  - समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
  - एक समांतर चतुर्भुज में आसन्न कोणों का योग 180° होता है और सम्मुख कोण समान होते हैं।
  - एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

- एक **समचतुर्भुज** एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं।

  एक समचतुर्भुज के गुण

  - एक समचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।
  - एक समचतुर्भुज में आसन्न कोणों का योग 180° होता है और सम्मुख कोण समान होते हैं।
  - एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
  - एक समचतुर्भुज के विकर्ण इसके कोणों को समद्विभाजित करते हैं।
- एक **पतंग** एक चतुर्भुज है जिसमें समान लंबाई वाली दो आसन्न भुजाओं के युग्म होते हैं जो अतिव्यापी न हो।
- एक **समलंब चतुर्भुज** एक चतुर्भुज होता है जिसमें सम्मुख भुजाओं का कम से कम एक युग्म समांतर होता है।
- एक चतुर्भुज के कोणों की माप का योग 360° होता है।



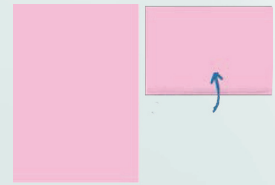
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

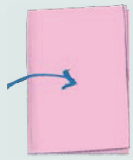
पहेली का समय!

कौन-सा चौकोर?

खेल खेलना

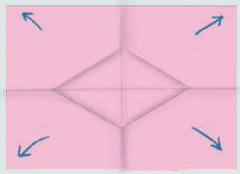
1. एक कागज को आधा मोड़िए।





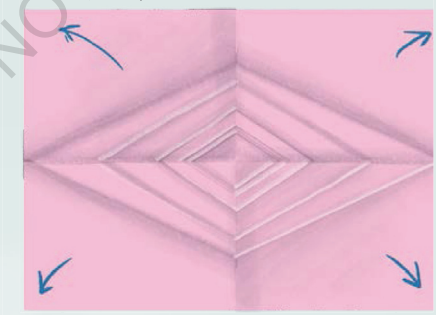
2. अब इसे एक बार पुन: एक चौथाई में मोड़िए।

3. कागज के कोने पर एक त्रिकोण बनाइए जो कि कागज के मध्य में है।



4. कागज को खोलिए और देखिए कि मोड़ के चिह्नों से क्या आकार बनता है?

5. निम्नलिखित छाया चित्र में दर्शाए अनुसार क्रीज के प्रकारों को प्राप्त करने के लिए आप एक चौथाई कागज को किस प्रकार मोड़ेंगे?



6. आप एक चौथाई कागज को किस प्रकार मोड़ेंगे कि एक वर्ग बन जाए?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5 संख्याओं का खेल

0875CH05

5.1 क्या यह गुणज है?

क्रमागत संख्याओं का योग

अंशु क्रमागत संख्याओं के योग खोज रहा है। उसने इन्हें निम्नांकित प्रकार से लिखा है—

$$7 = 3 + 4$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$12 = 3 + 4 + 5$$
$$15 = 7 + 8$$
$$= 4 + 5 + 6$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

अब वह आश्चर्यचकित है—

- "क्या मैं प्रत्येक प्राकृत संख्या को क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकता हूँ?"
- "मैं किन संख्याओं को क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में एक से अधिक प्रकार से लिख सकता हूँ?"
- "ओह! मैं समझ गया कि सभी विषम संख्याओं को दो क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है। क्या हम सभी सम संख्याओं को क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं?"
- "क्या मैं 0 को भी क्रमागत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकता हूँ? संभवत: मुझे ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग करना चाहिए।"

? इन प्रश्नों एवं आपके मस्तिष्क में आने वाले अन्य प्रश्नों को खोजिए तथा सभी प्रश्नों पर अपनी कक्षा में चर्चा कीजिए।

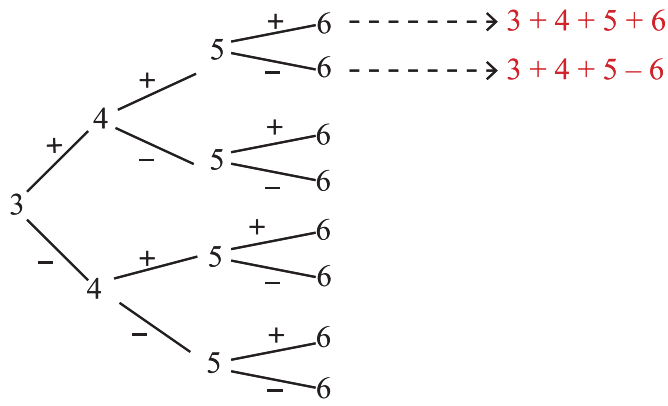
गणित चर्चा

? कोई 4 क्रमागत संख्याएँ लीजिए, उदाहरण के लिए 3, 4, 5 और 6 संख्याओं के बीच '+' एवं '–' चिह्न लगाइए। इस प्रकार संख्याओं को लिखने की कितनी विभिन्न संभावनाएँ हो सकती हैं उन सभी को लिखिए।

$$3 + 4 - 5 + 6$$
$$3 - 4 - 5 - 6$$

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ऐसे आठ व्यंजक संभव हैं। आप निम्नानुसार आरेख का उपयोग करके सभी संभावनाओं को व्यवस्थित रूप से सूचीबद्ध कर सकते हैं।



? प्रत्येक व्यंजक की गणना कीजिए एवं परिणाम को इनके सामने लिखिए। क्या आपको इसमें कुछ रोचक दिखाई देता है?

? अब चार अन्य क्रमागत संख्याएँ लीजिए। पूर्वानुसार '+' एवं '–' चिह्न लगाइए। प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए। आपने क्या अवलोकन किया?

? अब आप उपर्युक्त क्रियाकलाप को 4 क्रमागत संख्याओं के एक अन्य समूह (सेट) के साथ दोहराइए। अपने परिणामों को साझा कीजिए।

गणित चर्चा

3 + 4 – 5 + 6 = 8	5 + 6 – 7 + 8 = 12	__ + __ – __ + __ = __
3 – 4 – 5 – 6 = – 12	5 – 6 – 7 – 8 = – 16	__ – __ – __ – __ = __
. . .	. . .	. . .

कुछ योगफल सदैव समान प्राप्त होते हैं चाहे किन्हीं भी 4 क्रमागत संख्याओं का चयन किया जाए। क्या यह रोचक नहीं है?

? क्या यह प्रतिरूप तब भी बनता है जब किन्हीं भी 4 क्रमागत संख्याओं का चयन किया जाता है? क्या तर्कशक्ति द्वारा इसका उत्तर प्राप्त किया जा सकता है?

संकेत— बीजगणित का उपयोग कीजिए और इन 8 व्यंजकों को सामान्य रूप में लिखिए।

आपने ध्यान दिया होगा कि सभी व्यंजकों का परिणाम सम संख्याएँ हैं। सम संख्याओं का एक गुणनखंड 2 होता है। ऋणात्मक संख्याएँ जिनका एक गुणनखंड 2 होता है वे भी सम संख्याएँ होती हैं। उदाहरण के लिए – 2, – 4, – 6 इत्यादि। पता लगाइए कि क्या आपकी कक्षा में किसी को विषम संख्या प्राप्त हुई है।

जब 4 क्रमागत संख्याओं का चयन किया जाता है तो उनके बीच '+' और '–' चिह्न जिस भी प्रकार से लगाए जाएँ प्राप्त परिणामी व्यंजकों में सदैव सम समता (even parity) होती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

अब कोई भी 4 संख्याएँ लीजिए, उनके बीच '+' और '–' चिह्न आठ विभिन्न प्रकार से लगाइए और परिणामी व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए। आप उनकी समताओं के विषय में क्या अवलोकन करते हैं? इसी प्रक्रिया को 4 संख्याओं के अन्य समूहों के साथ इसे दोहराइए।

? क्या ऐसी कोई पद्धति है जिससे यह समझाया जा सके कि ऐसा क्यों होता है?

गणित चर्चा

संकेत— दो संख्याओं के योग या अंतर की समता के लिए नियमों पर विचार कीजिए।

व्याख्या 1— आइए, चार संख्याओं a, b, c और d से बने 8 व्यंजकों में से किसी भी व्यंजक पर विचार करें। जब इनमें से किसी भी एक चिह्न में परिवर्तन किया जाता है तो इसके मान में सदैव एक सम संख्या के समान वृद्धि होगी या कमी। आइए, देखते हैं कि ऐसा क्यों होता है।

किसी एक व्यंजक पर विचार कीजिए— $a + b – c – d$ में $+ b$ को $– b$ से परिवर्तित कर दिया जाए तो हमें प्राप्त होता है—

$$a – b – c – d$$

संख्या में कितना अंतर आया है? यह अंतर है—

$$(a + b – c – d) – (a – b – c – d)$$

$= a + b – c – d – a + b + c + d$ (ध्यान दीजिए कि जब हमने संख्याओं के समूह का दूसरा कोष्ठक खोला तो चिह्न कैसे परिवर्तित हुए)

$= 2b$ (यह एक सम संख्या है।)

यदि दो संख्याओं के मध्य अंतर सम है तो क्या उनमें समताएँ भिन्न हो सकती हैं? नहीं, अत: या तो दोनों संख्याएँ सम हैं या दोनों विषम संख्याएँ हैं।

आइए, अब देखते हैं कि जब एक ऋणात्मक चिह्न को एक धनात्मक चिह्न से परिवर्तित किया जाए तब क्या होता है?

? व्यंजक $a + b – c – d$ में किसी भी एक ऋणात्मक चिह्न को एक धनात्मक चिह्न से परिवर्तित कीजिए और दोनों संख्याओं के मध्य अंतर ज्ञात कीजिए।

? आपको अवलोकन से क्या परिणाम प्राप्त होता है?

किसी भी व्यंजक से प्रारंभ करके और एक या एक से अधिक '+' और '–' चिह्नों में परिवर्तन करके हमें 7 व्यंजक प्राप्त हो सकते हैं। इस प्रकार सभी व्यंजकों की समता समान होती है।

व्याख्या 2— हम जानते हैं कि—

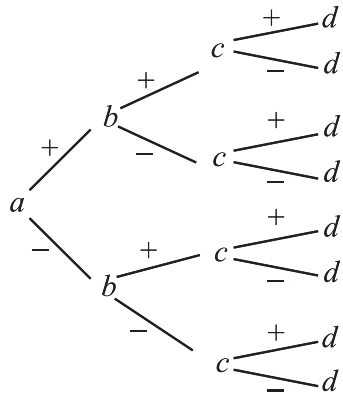
$$\text{विषम} \pm \text{विषम} = \text{सम}$$
$$\text{सम} \pm \text{सम} = \text{सम}$$
$$\text{विषम} \pm \text{सम} = \text{विषम}$$

हम समझ चुके हैं कि $a + b$ और $a – b$ की समता समान रहती है चाहे a और b की समता कुछ भी हो। संक्षेप में, $a \pm b$ की समता सदैव समान होती है। इसी तर्क द्वारा $a \pm b + c$ और $a \pm b – c$ की समता समान होती है। इसी क्रम में हम कह सकते हैं कि सभी व्यंजक $a \pm b \pm c \pm d$ की समान समता होती है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

व्याख्या 3— इसकी व्याख्या धनात्मक और ऋणात्मक टोकन प्रतिरूप का उपयोग करके भी की जा सकती है, जिसे आपने पूर्णांकों पर आधारित अध्याय में पढ़ा था। इस पर विचार करने का प्रयास कीजिए कि यह कैसे संभव है?

चार संख्याओं a, b, c, d का चयन करने और '+' एवं '–' चिह्न का उपयोग करके उन्हें संयोजित करने के अनंत प्रकार हैं। गणितीय तर्कण हमें एक-एक संयोजन को हल किए बिना यह सिद्ध करने की अनुमति देता है कि सभी $a \pm b \pm c \pm d$ संयोजनों की समता सदैव समान होती है।



गणित में अनेक समस्याओं पर विभिन्न प्रकार से विचार किया जा सकता है एवं उनका हल निकाला जा सकता है। जो विधि आपने यहाँ समझी वह आपको प्रिय हो सकती है किंतु यह जानना मनोरंजक और ज्ञानवर्धक हो सकता है कि अन्य लोग इसके विषय में क्या सोचते हैं। अत: इसके लिए दो कार्य किए जाएँ — 'साझा कीजिए' और 'सुनिए'।

? क्या सभी व्यंजकों की समान समता होने की परिघटना केवल 4 संख्याएँ लेने तक सीमित है? इस विषय में आपका क्या विचार है?

'क्या होगा यदि ... ?' 'क्या यह सदैव होगा?' – आश्चर्य चकित होना, प्रश्न पूछना और अनुमान लगाना भी गणित का उतना ही महत्त्वपूर्ण भाग है जितना किसी प्रश्न को हल करना।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

सम संख्याओं का विभंजन

हम जानते हैं कि सम संख्याओं की पहचान कैसे की जाती है। बिना गणना किए ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन-से अंकगणितीय व्यंजक सम हैं?

$43 + 37$	$672 - 348$	$4 \times 347 \times 3$	$708 - 477$
$809 + 214$	119×303	$543 - 479$	513^3

? विभिन्न संक्रियाओं के अंतर्गत समता कैसे व्यवहार करती है, हमारी इस समझ का उपयोग करके पता लगाइए कि अक्षर-संख्याओं (चर संख्याएँ) के किसी भी पूर्णांक मान के लिए नीचे दिए गए बीजगणितीय व्यंजकों में से किन व्यंजकों का मान एक सम संख्या के रूप में प्राप्त होता है।

$2a + 2b$	$3g + 5h$	$4m + 2n$	$2u - 4v$
$13k - 5k$	$6m - 3n$	$x^2 + 2$	$b^2 + 1$	$4k \times 3j$

m और q के किन्हीं पूर्णांक मानों के लिए व्यंजक $4m + 2q$ का मान सदैव एक सम संख्या होगी। हम इसे दो भिन्न विधियों से सत्यापित कर सकते हैं—

- हमें ज्ञात है कि किन्हीं भी पूर्णांकों m और q के लिए $4m$ और $2q$ सम होंगे। अत: उनका योग भी सम संख्या होगी।
- व्यंजक $4m + 2q$, व्यंजक $2\ (2m + q)$ के समान है। यहाँ व्यंजक $2\ (2m + q)$ का अर्थ $2m + q$ का 2 गुना है। अन्य शब्दों में इस व्यंजक का एक गुणनखंड 2 है। अत: किन्हीं भी पूर्णांकों m और q के लिए इस व्यंजक का मान सदैव एक सम संख्या होगी।

उदाहरण के लिए, यदि $m = 4$ और $q = -9$ हो, तो व्यंजक $4m + 2q$ का मान $4 \times 4 + 2 \times (-9) = (-2)$ होगा, जो एक सम संख्या है।

व्यंजक $x^2 + 2$ में x^2 सम होगा, यदि x सम हो तथा x^2 विषम होगा, यदि x विषम हो। अत: व्यंजक $x^2 + 2$ का मान सदैव एक सम संख्या **नहीं** होगा। व्यंजक का मान एक सम संख्या होने के लिए एक उदाहरण व एक सम संख्या ना होने के लिए एक उदाहरण— (i) यदि $x = 6$ तो $x^2 + 2 = 38$ और (ii) यदि $x = 3$ तो $x^2 + 2 = 11$

? इसी प्रकार ज्ञात कीजिए एवं व्याख्या कीजिए कि कौन-से अन्य व्यंजकों का मान सदैव सम संख्याएँ होती हैं। प्रत्येक व्यंजक के लिए मान सम संख्या होने व सम संख्या ना होने के कुछ उचित उदाहरण दीजिए।

? कुछ बीजगणितीय व्यंजक लिखिए जिनका मान सदैव सम संख्या होता है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

चार के समूह बनाने के लिए युग्म

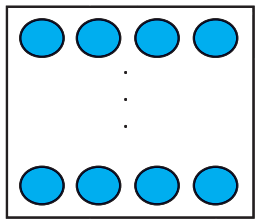
? सम संख्याओं का एक युग्म लीजिए तथा उनका योग कीजिए। क्या यह योग 4 से विभाज्य है?

इसे सम संख्याओं के विभिन्न युग्मों के लिए प्रयोग कीजिए।

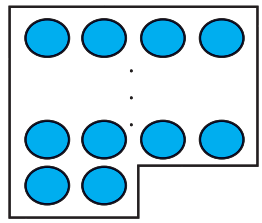
कब योगफल 4 का एक गुणज है और कब नहीं है?

क्या इसका कोई सामान्य नियम या प्रतिरूप है?

4 से विभाजित करने पर मिलने वाले शेषफलों के आधार पर सम संख्याएँ दो प्रकार की हो सकती हैं।



सम संख्याएँ जो 4 की गुणज हैं वे 4 से विभाजित करने पर 0 शेषफल देती हैं।

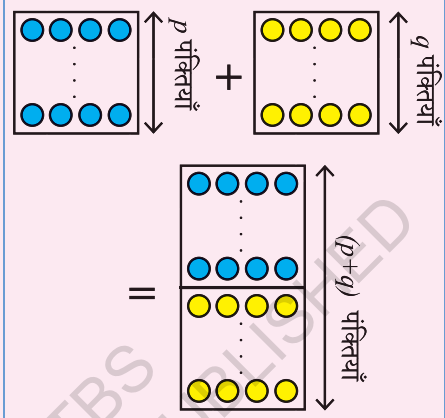
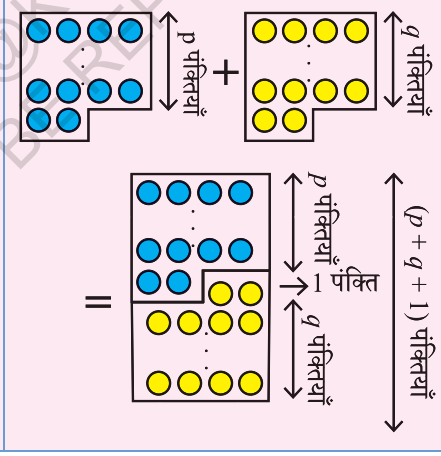


सम संख्याएँ जो 4 की गुणज नहीं हैं वे 4 से विभाजित करने पर 2 शेषफल देती हैं।

? दो सम संख्याओं का योग कब 4 के गुणज के रूप में प्राप्त होगा?

यह समस्या दो संख्याओं को जोड़ने पर परिणामत: एक सम संख्या प्राप्त होने का पता लगाने के प्रश्न के समान है। क्या आप इसे देख सकते हैं?

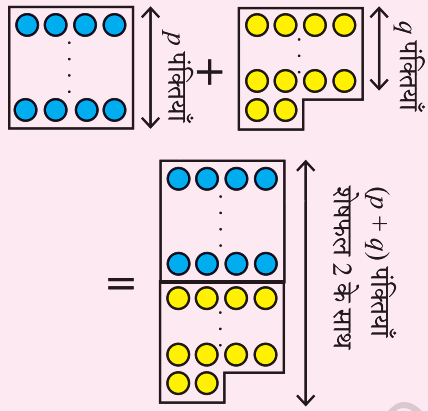
यहाँ जाँच करने की तीन स्थितियाँ हैं—

बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
दो सम संख्याएँ जो 4 की गुणज हों उन्हें जोड़ने पर सदैव 4 का गुणज प्राप्त होगा।	$4p$ और $4q$ $4p + 4q$ $= 4(p + q)$		4, 12, 16, 24, 36 $12 + 16$ $= 4(3 + 4)$ $= 28$ $16 + 28$ $= 4(4 + 7)$ $= 44$
दो सम संख्याएँ जो 4 की गुणज नहीं हैं, उन्हें जोड़ने पर सदैव 4 का गुणज प्राप्त होगा क्योंकि इनके शेषफलों जो 2 है, उसे जोड़ने पर 4 प्राप्त होगा।	$(4p + 2)$ और $(4q + 2)$ $(4p + 2) + (4q + 2)$ $= 4p + 4q + 4$ $= 4(p + q + 1)$		2, 6, 10, 18, 22, 42 $2 + 6 = 8$ $6 + 10 = 16$ $22 + 6 = 28$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

क्या होगा जब हम एक 4 की गुणज संख्या को ऐसी सम संख्या जो 4 की गुणज ना हो के साथ जोड़ते हैं? क्या यह एक सम संख्या एवं एक विषम संख्या के योग की समता के समान है?

? आगे दिए गए व्यंजकों एवं दृश्यांकन को देखिए एवं उनकी संगत व्याख्या और उदाहरण लिखिए।

बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
	$4p$ और $(4q + 2)$ $= 4p + (4q + 2)$ $= 4p + 4q + 2$ $= 4 (p + q) + 2$		

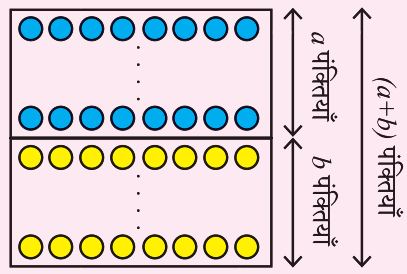
ध्यान दीजिए कि कैसे हम बीजगणित और साथ ही दृश्यांकन का उपयोग करके अंकगणित के गुणधर्मों को व्यापकीकृत एवं सिद्ध कर पाते हैं।

सदैव, कभी-कभी या कभी नहीं

? हम गुणनखंडों और गुणजों के विषय में विभिन्न कथनों को सत्यापित करते हैं एवं सुनिश्चित करते हैं कि क्या कथन 'सदैव सत्य', 'कभी-कभी सत्य' या 'कभी सत्य नहीं' हैं?

हम जानते हैं कि 2 के किन्हीं 2 गुणजों का योग भी 2 का एक गुणज होता है।

? 1. यदि 8 दो संख्याओं को भिन्न-भिन्न प्रकार से विभाजित करता है, तो यह उनके योग को भी अवश्य ही पूर्णत: विभाजित करेगा।

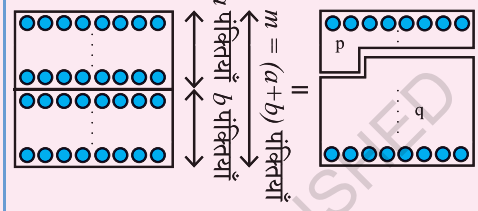
बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
दो संख्याओं का एक गुणनखंड 8 है, दूसरे शब्दों में कहें तो दोनों संख्याएँ 8 की गुणज हैं।	$8a$ और $8b$		8 और 16 16 और 56 80 और 120
चूँकि 8 का गुणज 8 को बार-बार जोड़ने पर प्राप्त होते हैं अत: 8 के दो गुणजों का योग भी 8 का एक गुणज होगा।	$8a + 8b$ $= 8 (a + b)$		$8 + 16 = 8(1 + 2)$ $= 24$ $16 + 56 = 72$ $80 + 120 = 200$

कथन 1 सदैव सत्य है। निर्धारित कीजिए कि क्या घटाव के साथ यह सत्य होगा।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

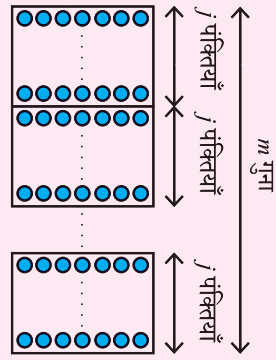
सामान्यत: **यदि *a, M* को विभाजित करता है तथा *a, N* को विभाजित करता है तो *a, M + N* को विभाजित करेगा तथा *a, M – N* को विभाजित करेगा। दूसरे शब्दों में यदि *M* व *N, a* के गुणज हैं तो *M + N* व *M – N* भी *a* के गुणज होंगे।**

? 2. यदि कोई संख्या 8 से विभाजित होती है तो 8 उन दो संख्याओं (अलग-अलग) को भी विभाजित करेगा जिनका योगफल वह संख्या हो।

बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
8 से विभाजित संख्या 8 का एक गुणज होती है।	$8m$		8, 16, 56, 72
8 से विभाजित होने वाली संख्या को 8 के दो गुणजों के योग के रूप में या दो संख्याओं के योग के रूप में जो 8 की गुणज न हों, व्यक्त कर सकते हैं।	$8m = 8a + 8b$ $8m = p + q$ (p व q, 8 के गुणज नहीं हैं।)		72 = 48 + 24 (8 × 9 = 8×6+8×3) 72 = 50 + 22

अत: कथन 2 कभी-कभी सत्य है।

? 3. यदि कोई संख्या 7 से विभाज्य है तो उस संख्या के सभी गुणज 7 से विभाज्य होंगे।

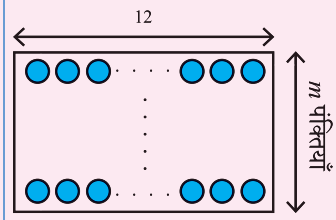
बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
7 से विभाज्य संख्याओं का एक गुणनखंड 7 होगा।	$7j$		14 = 7 × 2 (j = 2) 42 = 7 × 6 (j = 6) 98 = 7 × 14 (j = 14)
इसमें कुल mj पंक्तियाँ हैं। अत: यह भी 7 का एक गुणज है।	$(7j) \times m$		14 के कुछ गुणज — 28 = (7 × 2) × 2 70 = (7 × 2) × 5 154 = (7 × 2) × 11

संख्या $7jm$ या $(7 \times j \times m)$ का एक गुणनखंड 7 है। हम देख सकते हैं कि कथन 3 सदैव सत्य है।

सामान्यत: **यदि A, k से विभाज्य है तो A के सभी गुणज k से विभाज्य होंगे।**

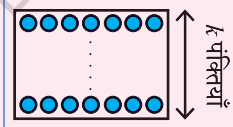
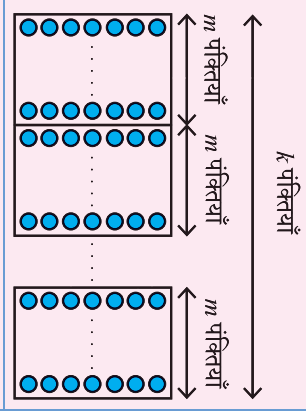
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? 4. यदि कोई संख्या 12 से विभाज्य है तो वह संख्या 12 के सभी गुणनखंडों से भी विभाज्य होगी।

बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
कोई संख्या जो 12 से विभाज्य है वह 12 का एक गुणज है।	$12m$		12, 24, 36, 48, 108, 132
12 के गुणजों के गुणनखंडों में 12 के गुणनखंड सम्मिलित होंगे।	$12m$ $= 2 \times 6 \times m$ $= 3 \times 4 \times m$	 12 का कोई गुणनखंड एक पंक्ति को पूर्णत: भरता है। अत: यह सभी पंक्तियों (12 के गुणज) को भी पूर्णत: भर देता है।	24 के गुणनखंड — 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

सामान्यत: **यदि A, k से विभाज्य है, तो A, k के सभी गुणनखंडों से भी विभाज्य होगा।**
अत: कथन 4 सदैव सत्य है।

? 5. यदि कोई संख्या 7 से विभाज्य है तो वह 7 के किसी भी गुणज से विभाज्य होगी।

बीजगणित और दृश्यांकन के साथ व्याख्या			उदाहरण
7 से विभाज्य संख्याएँ 7 की गुणज हैं।	$7k$		
7 के गुणज $7k$, $7m$ से विभाज्य होगा यदि और केवल यदि m, k का एक गुणनखंड हो।	$7m$ *यदि* $k = ym$ तो $7k \div 7m =$ $7ym \div 7m$ $= y$		42 (7×6) 7 से विभाज्य है किंतु यह 28 (7×4) से विभाज्य नहीं है। 42 (7×6) 7 से विभाज्य है और यह 14 (7×2) से विभाज्य है।

हम देख सकते हैं कि यह कथन केवल कभी-कभी सत्य है।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

नीचे दिए गए कथनों में से प्रत्येक की जाँच कीजिए एवं निर्धारित कीजिए कि यह 'सदैव सत्य है', 'कभी-कभी सत्य है' या 'कभी सत्य नहीं हैं'।

गणित चर्चा

6. यदि कोई संख्या 9 और 4 दोनों से विभाज्य है तो यह 36 से अवश्य विभाज्य होगी।

7. यदि कोई संख्या 6 और 4 दोनों से विभाज्य है तो यह 24 से अवश्य विभाज्य होगी।

सामान्यत: **यदि A, k से विभाज्य है और A, m से भी विभाज्य है, तो A, k व m के लघुत्तम समापवर्त्य से भी विभाज्य होगा।** ऐसा इसलिए है क्योंकि A, k का एक गुणज है और m का भी एक गुणज है। अत: A के अभाज्य गुणनखंड में k व m के लघुत्तम समापवर्त्य के अभाज्य गुणनखंड सम्मिलित होने चाहिए।

8. जब आप एक विषम संख्या में एक सम संख्या जोड़ते हैं तो 6 का गुणज प्राप्त होता है।

हम जानते हैं कि 6 के सभी गुणज सम संख्याएँ हैं। एक विषम संख्या व एक सम संख्या का योगफल एक विषम संख्या होगी। अत: यह कथन कभी सत्य नहीं होगा। हम बीजगणितीय रूप से भी इसकी व्याख्या कर सकते हैं। मान लीजिए—

$$(2n) + (2m + 1) = 6j,$$

जहाँ $2n$ एक सम संख्या है, $2m + 1$ एक विषम संख्या है और $6j$, 6 का एक गुणज है। तब—

$$2n + 2m = 6j - 1$$
$$2(n + m) = 6j - 1$$

इसका अर्थ है $2(n + m)$ जो एक सम संख्या है, $6j - 1$ के समान होनी चाहिए जो एक विषम संख्या है। यह कभी सत्य नहीं होगा।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

क्या शेष बचता है?

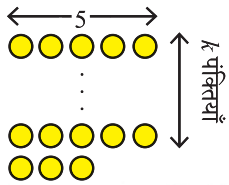
एक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 5 से विभाजित करने पर 3 शेषफल बचता हो। ऐसी ही कुछ अन्य संख्याएँ भी लिखिए।

कौन-सा बीजीय व्यंजक ऐसी सभी संख्याओं को समाहित करता है?

(i) $3k + 5$ (ii) $3k - 5$ (iii) $\frac{3k}{5}$

(iv) $5k + 3$ (v) $5k - 2$ (vi) $5k - 3$

वे संख्याएँ जिन्हें 5 से विभाजित करने पर शेषफल 0 बचता है तो वे 5 की गुणज हैं। इसके साथ ही हमें 5 से विभाजित करने पर 3 शेषफल बचाने वाली संख्याएँ चाहिए। ये संख्याएँ 5 के गुणजों से 3 अधिक हैं। 5 के गुणज $5k$ के रूप में होते हैं। अत: 5 से विभाजित करने पर 3 शेषफल बचाने वाली संख्याएँ $5k + 3$ के रूप में होंगी।



$k =$	0	1	2	3	4
$5k + 3 =$	3	8	13	18	23

आइए, अन्य व्यंजक $5k - 2$ पर विचार करें और k के विभिन्न मानों के लिए इस व्यंजक के मान देखें।

संख्याएँ जिन्हें 5 से विभाजित करने पर शेषफल 3 हो उन्हें 5 के गणकों से 2 कम के रूप में भी देखा जा सकता है, जैसे— $5k - 2$, जहाँ $k \geq 1$ हो।

$k =$	1	2	3	4	5
$5k - 2 =$	3	8	13	18	23

क्या ऐसे अन्य व्यंजक हैं जो 5 के गुणज से 3 अधिक वाली संख्याएँ बनाते हों?

आइए, पता लगाएँ

1. चार क्रमागत संख्याओं का योग 34 है। ये कौन-सी संख्याएँ हैं?
2. मान लीजिए पाँच क्रमागत संख्याओं में p सबसे बड़ा है। अन्य चार संख्याओं को p के पदों में व्यक्त कीजिए।
3. नीचे दिए गए प्रत्येक कथन के लिए निर्धारित कीजिए कि 'यह सदैव सत्य है', 'कभी–कभी सत्य है', या 'कभी सत्य नहीं है'। अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए। उपयुक्तता के आधार पर जो उदाहरण हैं तथा जो उदाहरण नहीं है उनका उल्लेख कीजिए। बीजगणित का उपयोग करके अपने तर्क की पुष्टि कीजिए।
   (i) दो सम संख्याओं का योगफल 3 का एक गुणज है।
   (ii) यदि कोई संख्या 18 से विभाज्य नहीं है तो यह 9 से भी विभाज्य नहीं होगी।
   (iii) यदि दो संख्याएँ 6 से विभाज्य नहीं हैं तो उनका योगफल 6 से विभाज्य नहीं होगा।
   (iv) 6 के एक गुणज और 9 के एक गुणज का योगफल 3 का एक गुणज होता है।
   (v) 6 के एक गुणज और 3 के एक गुणज का योगफल 9 का एक गुणज होता है।
4. ऐसी कुछ संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिन्हें 3 से विभाजित करने पर शेषफल 2 प्राप्त हो और 4 से विभाजित करने पर शेषफल 2 प्राप्त हो। ऐसी सभी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए एक बीजगणितीय व्यंजक लिखिए।
5. "मुझमें हैं कुछ कंकड़, बहुत अधिक तो नहीं,
   मैं बाँटता जब उन्हें 3 के समूहों में तो एक बच ही जाता यहीं
   यदि मैं चाहूँ उन्हें युग्मों में बाँटना, मुझसे तो हो पाता नहीं,
   क्योंकि एक जिद्दी अकेला कंकड़, रह ही जाता कहीं।
   5 के समूहों में बाँटने पर, फिर भी एक बचा है यहीं कहीं,
   किंतु 7 के समूहों में बाँटने पर, पूर्णता मिलती है सही।
   100 से अधिक रखना, नहीं है मेरे लिए आसान,
   कहलाओगे तुम चतुर, यदि कंकड़ों की संख्या गए जान।"

6. तथागत ने ऐसी अनेक संख्याएँ लिखी हैं जिन्हें 6 से विभाजित करने पर शेषफल 2 प्राप्त होता है। वह पुष्टि करता है "यदि आप ऐसी किन्हीं तीन संख्याओं का योग करें तो योगफल सदैव 6 का एक गुणज होगा।" क्या तथागत की पुष्टि सही है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7. 7 से विभाजित करने पर संख्या 661 में शेषफल 3 प्राप्त होता है और संख्या 4779 में शेषफल 5 प्राप्त होता है। गणना किए बिना क्या आप बता सकते हैं कि 7 से विभाजित करने पर नीचे दिए गए व्यंजकों में शेषफल कितना होगा? हल को बीजगणितीय एवं दृश्यांकन रूप में दर्शाइए।
   (i) 4779 + 661 (ii) 4779 – 661
8. वह संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 3 से विभाजित करने पर शेषफल 2 प्राप्त होता है एवं 4 से विभाजित करने पर शेषफल 3 प्राप्त होता है एवं 5 से विभाजित करने पर शेषफल 4 प्राप्त होता है। ऐसी सबसे छोटी संख्या कौन-सी है? क्या आप यह बता सकते हैं कि यह संख्या सबसे छोटी क्यों है?

5.2 विभाज्यता की शीघ्र जाँच

पूर्व में आप यह जाँचने की संक्षिप्त विधियाँ सीख चुके हैं कि क्या भारतीय संख्या पद्धति में दी गई कोई संख्या 2, 4, 5, 8 व 10 से विभाज्य है। आइए, इन पर पुर्नविचार करें।

10, 5 और 2 से विभाज्यता— यदि किसी संख्या का इकाई अंक 0 है तो वह 10 से विभाज्य होगी। आइए, बीजगणित के माध्यम से समझते हैं कि ऐसा क्यों होता है?

भारतीय पद्धति में हम अक्षर संख्याओं के एक समुच्चय का उपयोग करके किसी संख्या का व्यापक रूप लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए 5 अंकों की एक संख्या को edcba के रूप में दर्शाया जा सकता है जो $e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a$ से निरूपित होती है। अक्षर संख्याएँ *e, d, c, b* व a, 5 अंकों की संख्या के प्रत्येक अंक को प्रदर्शित करती हैं।

किसी भी संख्या को व्यापक रूप से ... *dcba* के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ अक्षर संख्याएँ *a, b, c* व *d* क्रमशः इकाई, दहाई, सैकड़ा व हजार एवं इसी क्रम में अन्य अंकों को प्रदर्शित करती हैं। स्थानीय मानों के योगफल के रूप में यह संख्या है—

$$\ldots + 1000d + 100c + 10b + a$$

(उदाहरण के लिए संख्या 4075 में $d = 4$, $c = 0$, $b = 7$ व $a = 5$)

हम जानते हैं कि प्रत्येक स्थानीय मान इकाई स्थान के अपवाद के साथ 10 का एक गुणज होता है। अतः 10b, 100c, ... सभी 10 के गुणज होंगे। हम कह सकते हैं कि संख्या 10 से केवल तभी विभाज्य होगी जब इकाई अंक *a*, 0 हो।

? उपर्युक्त के आधार पर बीजगणित का उपयोग करके व्याख्या कीजिए कि 5, 2, 4 व 8 से विभाज्यता की जाँच करने में संक्षिप्त विधियाँ कैसे कार्य करती हैं।

आइए, अब कुछ अन्य संख्याओं से विभाज्यता की जाँच की संक्षिप्त विधियों को समझे कि वे कैसे कार्य करती है।

9 से विभाज्यता के लिए संक्षिप्त विधि

? वास्तविक गणना किए बिना क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौन-सी संख्याएँ 9 से विभाज्य हैं— 999, 909, 900, 90, 990?

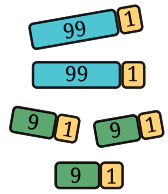
सभी संख्याएँ 9 से विभाज्य हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? क्या हम कह सकते हैं कि किसी भी क्रम में केवल '0' और '9' अंकों से बनी संख्या सदैव 9 से विभाज्य होगी?

हाँ, यदि प्रत्येक अंक या तो 0 या 9 है तो विस्तारित रूप में प्रत्येक पद 9 × □ और 0 × □ होगा (' □ ' स्थानीय मान को दर्शाते हैं)। इसका अर्थ है कि प्रत्येक पद 9 का गुणज होगा उदाहरण के लिए—

$$99009 = 9 \times 10000 + 9 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$$



ध्यान रखिए कि केवल यही संक्षिप्त विधि 9 के सभी गुणजों की पहचान नहीं कर सकती है। केवल इकाई के अंक को देख कर हम 9 के गुणजों की पहचान नहीं कर सकते हैं जो हम 2, 5, व 10 के गुणजों के लिए कर सकते हैं। 99 और 109 दोनों संख्याओं में इकाई का अंक 9 है किंतु 99, 9 से विभाज्य है जबकि 109 विभाज्य नहीं है।

? क्या 10, 9 से विभाज्य है? यदि नहीं, तो शेषफल क्या है?

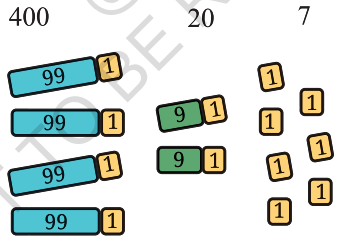
10 के अन्य गुणजों (10, 20, 30, ...) की 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

आप देखेंगे कि 10 के किसी भी गुणज के लिए शेषफल दहाई की संख्या के समान है।

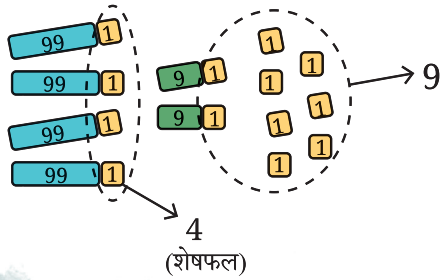
? इसी प्रकार जब 100 के गुणजों (100, 200, 300, …) को 9 से विभाजित किया जाता है तो शेषफलों को देखिए। आपने क्या अवलोकन किया?

100 के किसी भी गुणज के लिए शेषफल सैकड़ों की संख्या के समान है।

? इस अवलोकन का उपयोग करके 427 को 9 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

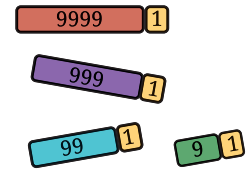


हम देखते हैं कि 427 में सैकड़े की संख्या 4 है। इस प्रकार इसका संगत शेषफल (9 से विभाजित करने पर) 4 प्राप्त होगा। 427 में दहाई की संख्या 2 है इस प्रकार संगत शेषफल 2 प्राप्त होगा। 7 भी शेष है। सभी शेषफलों का योग करने पर हमें 4 + 2 + 7 = 13 प्राप्त होता है। हम 13 के साथ 9 का एक और समूह बना सकते हैं। इसके पश्चात शेषफल 4 प्राप्त होता है। अत: 427 ÷ 9 से शेषफल 4 प्राप्त होता है।



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? क्या बड़ी संख्याओं के साथ ऐसा होगा?



आप देख सकते हैं कि यह किसी भी स्थानीय मान के लिए सत्य है।

$1 = 0 + 1$

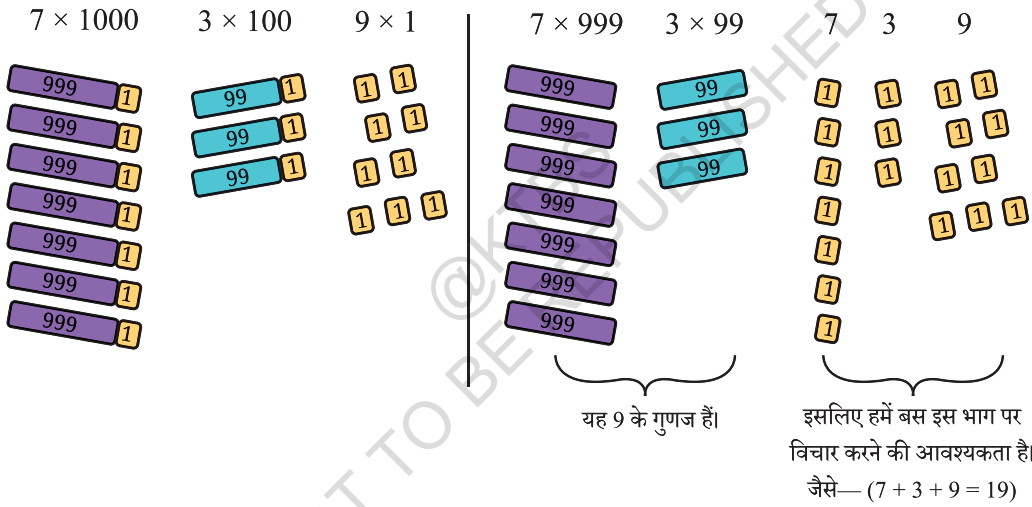
$10 = 9 + 1$

$100 = 99 + 1$

$1000 = 999 + 1$

$10000 = 9999 + 1$ और इसी प्रकार आगे भी। इस प्रकार प्रत्येक अंक शेषफल को दर्शाता है जब संगत स्थानीय मान को 9 से विभाजित किया जाता है।

उदाहरण के लिए 7309 को 9 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात करने के लिए हम केवल सभी अंकों का योग कर सकते हैं— $7 + 3 + 0 + 9$ जिससे 19 प्राप्त होता है। इसे निम्नलिखित प्रकार से देखा जा सकता है—



©KVS NOT TO BE REPUBLISHED

$7 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 9 \times 1$

$= 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 0 \times (9 + 1) + 9 \times (0+1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 + 9 \times 1)$

$= (7 \times 999 + 3 \times 99 + 0 \times 9 + 9 \times 0) + (7 + 3 + 0 + 9)$

यह 9 के गुणज हैं।

इसलिए हमें बस इस भाग पर विचार करने की आवश्यकता है।

इसका अर्थ है कि संख्या 7309, 9 के किसी गुणज से 19 अधिक है। अत: अंक 1 व 9 को आगे भी जोड़ा जा सकता है जिससे $1 + 9 = 10$ प्राप्त होता है। अब हम कह सकते हैं कि 7309, 9 के एक गुणज से 10 अधिक है। इसके साथ ही संख्या 10 के लिए इस चरण को दोहराते हुए हमें शेषफल $1 + 0 = 0$ प्राप्त होता है अर्थात 7309, 9 के एक गुणज से 1 अधिक है अत: 7309, 9 से शेषफल 1 प्राप्त होता है।

कोई संख्या 9 से केवल तभी विभाज्य होगी यदि इसके अंकों का योगफल 9 से विभाज्य हो। साथ ही हम किसी संख्या के अंकों को एक अंकीय योगफल प्राप्त होने तक जोड़ते जाएँगे। यह प्राप्त एकल अंक उस संख्या को 9 से भाग देने पर प्राप्त शेषफल को दर्शाता है।

? निम्न कथनों में से प्रत्येक कथन को देखिए। कौन-से कथन सही हैं और क्यों?

(i) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है तो इसके अंकों का योगफल 9 से विभाज्य होगा।
(ii) यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 9 से विभाज्य है तो यह संख्या 9 से विभाज्य होगी।
(iii) यदि कोई संख्या 9 से अविभाज्य है तो इसके अंकों का योगफल 9 से अविभाज्य होगा।
(iv) यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 9 से अविभाज्य है तो यह संख्या 9 से अविभाज्य होगी।

गणित अधिगम केवल कुछ संक्षिप्त विधियों को जानना और प्रक्रियाओं का अनुसरण करना नहीं है अपितु यह समझना है कि कोई विधि काम 'क्यों' करती है।

? आइए, पता लगाएँ

1. विभाजित किए बिना ज्ञात कीजिए कि क्या दी गई संख्याएँ 9 से विभाज्य हैं।
   (i) 123 (ii) 405 (iii) 8888 (iv) 93547 (v) 358095
2. 9 का सबसे छोटा गुणज ज्ञात कीजिए जिसमें कोई विषम अंक न हो।
3. 9 का वह गुणज ज्ञात कीजिए जो संख्या 6000 के सबसे समीप हो।
4. 4300 व 4400 संख्याओं के बीच 9 के कितने गुणज हैं?

3 से विभाज्यता के लिए संक्षिप्त विधि

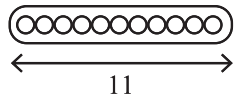
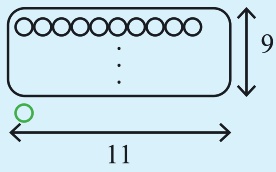
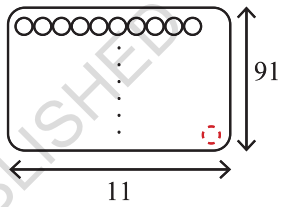
हम जानते हैं कि 9 के सभी गुणज 3 के गुणज भी हैं। अर्थात यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है तो यह 3 से भी विभाज्य होगी। इसके अतिरिक्त 3 के अन्य गुणज भी हैं जो 9 के गुणज नहीं होते हैं। जैसे— 15, 33 व 87

? 3 से विभाज्यता की संक्षिप्त विधि को ज्ञात करना 9 से विभाज्यता की विधि के समान है। कोई संख्या 3 से विभाज्य है यदि इसके अंकों का योग 3 से विभाज्य हो। जब 10 की घातें 3 से विभाजित की जाती हैं तो शेषफल ज्ञात कीजिए। व्याख्या कीजिए कि यह विधि कैसे कार्य करती है।

11 से विभाज्यता की संक्षिप्त विधि

रोचक रूप से 11 से विभाज्यता की संक्षिप्त विधि भी स्थानीय मान के साथ शेषफलों को जाँचने पर आधारित है। आइए, देखते हैं कैसे।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

इकाई स्थान (1)	$11 \times 0 = 0$ $1 = 11 \times 0 + \mathbf{1}$	1, 11 के गुणज से **एक अधिक** है।	○
दहाई स्थान (10)	$11 \times 1 = 11$ $10 = 11 \times 1 - \mathbf{1}$	10, 11 के गुणज से **एक कम** है।	
सैकड़ा स्थान (100)	$11 \times 9 = 99$ $100 = 11 \times 9 + \mathbf{1}$	100, 11 के एक गुणज से **एक अधिक** है।	
हजार स्थान (1000)	$11 \times 91 = 1001$ $1000 = 11 \times 91$ $- \mathbf{1}$	1000, 11 के एक गुणज से **एक कम** है।	
⋮	⋮	⋮	⋮

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यह 11 से अधिक व 11 से एक कम का एकांतर क्रम उच्चतर स्थानीय मानों के लिए निरंतरशील रहता है।

चूँकि 400 में 4 सैकड़ा है, अत: 400, 11 के एक गुणज से 4 अधिक (396+4) है। चूँकि 60 में 6 दहाई है, अत: 60, 11 के एक गुणज से 6 कम (66 – 6) है। चूँकि 2 में 2 इकाई है, अत: 2, 11 के एक गुणज से 2 अधिक है, जो 2 = (0 + 2) है।

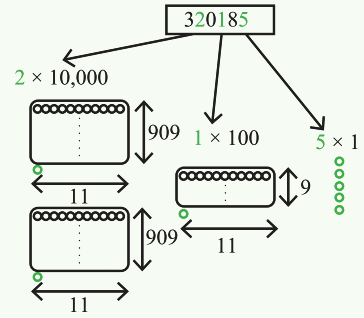
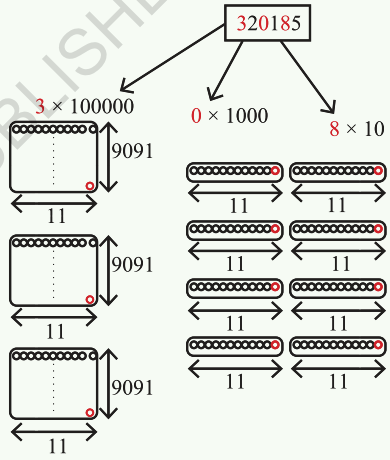
? इन अवलोकनों का उपयोग करते हुए क्या आप बता सकते हैं कि क्या संख्या 462, 11 से विभाज्य है?

गणित चर्चा

? 11 से विभाज्यता जाँचने की एक सामान्य विधि या संक्षिप्त विधि क्या हो सकती है?

गणित चर्चा

हमने देखा कि स्थानीय मान 11 के किसी गुणज से 1 अधिक या 1 कम के एकांतर क्रम में होते हैं। इस अवलोकन का उपयोग करते हुए—

चरण	उद्देश्य	संख्या 320185 के लिए उदाहरण
1. उन स्थानीय मानों के अंकों का योग कीजिए जो 1 अधिक हों (11 के किसी गुणज से), जैसे— 1, 100, 10,000 व इसी प्रकार आगे के संगत स्थानीय मान।	यह जानना कि इन स्थानीय मानों हेतु हमारे पास 11 के किसी गुणज से कितनी अधिकता है।	 कुल अधिकता 2 + 1 + 5 = 8
2. उन स्थानीय मानों के अंकों को जोड़िए जो 1 कम हो, (11 के किसी गुणज से), जैसे— 10, 1000, 10,0000 व इसी प्रकार आगे की घातों के संगत स्थानीय मान।	यह जानना कि इन स्थानीय मानों के लिए हमारे पास 11 के किसी गुणज से कितनी न्यूनता हैं।	 कुल न्यूनता 3 + 0 + 8 = 11
3. इन दोनों योगफलों के अंतर की गणना कीजिए, जैसे— (कुल अधिकता) — (कुल कमी) है।	11 से विभाजित करने पर मिलने वाले शेषफल को जानना।	8 – 11 = – 3 (11 की किसी गुणज से 3 की कमी)

इन दोनों योगफलों का अंतर 8 – 11 = –3 है। यह दर्शाता है कि संख्या 320185, 11 के किसी गुणज से 3 कम या 8 अधिक है।

? यदि यह अंतर 11 हो या 11 का कोई गुणज हो तो संख्या को 11 से विभाजित करने पर मिलने वाले शेषफल के विषय में यह क्या दर्शाता है?

@RBSE NOT TO BE REPUBLISHED

? इस संक्षिप्त विधि का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि क्या दी गई संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं। इसके साथ ही यदि संख्या 11 से अविभाज्य है तो शेषफल ज्ञात कीजिए।

(i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076

निम्नलिखित प्रक्रिया का अवलोकन कीजिए।

अनुसरण हेतु चरण	संख्या 328105 के लिए उदाहरण
1. इकाई के अंक से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक अंक के आगे एकांतर क्रम में '+' एवं '–' चिह्न लगाइए।	– 3 + 2 – 8 + 1 – 0 + 5
2. व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।	– 3 + 2 – 8 + 1 – 0 + 5 = – 3
3. यह परिणाम संख्या को 11 से विभाजित करने पर मिलने वाले शेषफल को दर्शाता है।	328105, 11 के एक गुणज से 3 कम या 8 अधिक है।

? जो विधि हमने इस विधि से ठीक पूर्व में देखी क्या यह विधि उसके समान है या उससे भिन्न है?

गणित चर्चा

? नीचे दी गई सारणी में संक्षिप्त विधि का उपयोग करते हुए नीचे दी गई सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

संख्या	से विभाज्य है								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
128	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
990									
1586									
275									
6686									
639210									
429714									
2856									
3060									
406839									

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

विभाज्यता की संक्षिप्त विधियों पर कुछ अन्य बिंदु

अन्य संख्याओं के लिए विभाज्यता की संक्षिप्त विधियाँ

? हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं कि क्या कोई संख्या 6 से विभाज्य है?

? क्या 6 से विभाज्यता की जाँच इसके गुणनखंडों 2 एवं 3 से विभाज्यता द्वारा की जा सकती है? दी गई संख्याओं पर 2 एवं 3 के लिए विभाज्यता की संक्षिप्त विधियों का उपयोग कीजिए एवं प्रत्येक संख्या को 6 से विभाजित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए— 38, 225, 186, 64

? 24 से विभाज्यता की जाँच कैसे की जाए? क्या 24 के गुणनखंडों 4 एवं 6 द्वारा विभाज्यता की जाँच से यह किया जा सकता है? क्यों या क्यों नहीं?

4 एवं 6 के द्वारा विभाज्यता की जाँच करके 24 द्वारा विभाज्यता निर्धारित नहीं की जा सकती। उदाहरण के लिए संख्या 12, 4 एवं 6 दोनों के द्वारा विभाज्य है किंतु 24 द्वारा नहीं।

इसके स्थान पर हम 24 द्वारा विभाज्यता की जाँच करने के लिए 3 व 8 द्वारा विभाज्यता की जाँच कर सकते हैं।

व्याख्या कीजिए कि क्यों 24 द्वारा विभाज्यता की जाँच 3 एवं 8 द्वारा विभाज्यता की जाँच करके की जा सकती है जबकि 24 द्वारा विभाज्यता की जाँच के लिए 4 एवं 6 द्वारा विभाज्यता की जाँच पर्याप्त नहीं है।

100 तक की सभी संख्याओं के लिए विभाज्यता की जाँच की संक्षिप्त विधियाँ विद्यमान हैं किंतु 100 से बड़ी कुछ ही संख्याओं के लिए ये विधियाँ विद्यमान हैं। आप अगली कक्षाओं में कुछ अवधारणाओं को सीखने के बाद यह समझने का प्रयत्न कर सकते हैं कि ये संक्षिप्त विधियाँ कैसे कार्य करती हैं।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अंकीय मूल

एक संख्या लीजिए। इसके अंकों को लगातार तब तक जोड़ते रहिए जब तक एक अंकीय संख्या प्राप्त न हो जाए। इस प्रकार प्राप्त एक अंकीय संख्या दी गई संख्या का अंकीय मूल कहलाती है। उदाहरण के लिए संख्या 489710 का अंकीय मूल 2 होगा—

$$2\ (4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29,\quad 2 + 9 = 11,\quad 1 + 1 = 2)$$

? आपके अनुसार इस अंकीय मूल में कौन-सी विशेषता होगी? स्मरण कीजिए 9 द्वारा विभाज्यता की संक्षिप्त विधि को ज्ञात करते समय हमने ऐसा किया था।

? संख्या 600 और 700 के मध्य किन संख्याओं का अंकीय मूल है— (i) 5 (ii) 7 (iii) 3?

? किन्हीं 12 क्रमागत संख्याओं के अंकीय मूल लिखिए। आपने क्या अवलोकन किया?

गणित चर्चा

हमने देखा कि 9 के गुणजों का अंकीय मूल सदैव 9 होता है।

? अब इन संख्याओं के कुछ क्रमागत गुणजों के अंकीय मूल ज्ञात कीजिए— (i) 3 (ii) 4 (iii) 6

? 6 के गुणजों से 1 अधिक वाली संख्याओं के अंकीय मूल क्या हैं? आपने क्या अवलोकन किया?

आपने जो प्रतिरूप देखा उसकी व्याख्या करने का प्रयत्न कीजिए।

? अंकों से हूँ मैं बना, हर एक छोटा और विषम, 1 नहीं है अंकीय मूल
मेरा, बात है ये कितनी विषम! मेरे अंक, उनका योग, जो है मेरा
मूल सारा, सभी मिलकर करते है एक सदृढ़ संख्या की ओर इशारा
गर्व से कहता हूँ मैं, वह मूल है सबसे बड़ी एकअंकीय विषम संख्या
क्या है क्या है मेरा नाम? कौन-सी हूँ मैं संख्या?

आर्यभट द्वितीय (लगभग 950 सामान्य संवत्) के ग्रंथ *महासिद्धांत* में एक संख्या के अंकीय मूल की गणना करने की विधि का वर्णन किया गया है जिसमें संख्या के अंकों का तब तक बार-बार योग किया जाता है जब तक कि एक इकाई अंक प्राप्त नहीं हो जाता। इस विधि का प्रयोग अंकगणितीय संक्रियाओं की गणनाओं की जाँच करने के लिए किया जाता रहा है।

? आइए, पता लगाएँ

1. 8 अंकों की एक संख्या का अंकीय मूल 5 है। उस संख्या से 10 अधिक संख्या का अंकीय मूल क्या होगा?
2. कोई भी संख्या लिखिए। 11 को बार-बार जोड़कर संख्याओं का अनुक्रम बनाइए। संख्याओं के इस अनुक्रम का अंकीय मूल क्या होगा? अपने अवलोकन को साझा कीजिए।
3. संख्या $9a + 36b + 13$ का अंकीय मूल क्या होगा?
4. जाँच द्वारा अनुमान लगाइए यदि निम्नलिखित के मध्य कोई प्रतिरूप बन रहा हो अथवा संबंध हो।
   (i) एक संख्या और उसके अंकीय मूल की अनुरूपता या समता
   (ii) किसी संख्या का अंकीय मूल तथा शेषफल जो संख्या को 3 अथवा 9 से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

गणित चर्चा

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

5.3 छुपे हुए अंकों की पहेली

पिछले वर्ष आपने गूढ़कलन(क्रिप्टारिथ्म) पहेलियाँ देखी थीं। जहाँ प्रत्येक अक्षर एक अंक होता है, प्रत्येक अंक को अधिकतम एक अक्षर द्वारा दर्शाया जाता है और संख्या का पहला अंक कभी भी 0 नहीं होता।

? नीचे दिए गए गूढ़कलन को हल कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} ON \\ ON \\ +\ ON \\ \hline PO \end{array}$ (iv) $\begin{array}{r} QR \\ QR \\ +\ QR \\ \hline PRR \end{array}$

आइए, अब गुणन से संबंधित कुछ गूढ़ समीकरणों को हल करने का प्रयास करते हैं।

? VPQ×8 = RS

गुना कहता है, "ओह, इसका अर्थ है कि एक 2 अंकों वाली संख्या को 8 से गुणा करने पर एक 2 अंकों वाली संख्या प्राप्त होगी। मैं जानता हूँ कि $10 \times 8 = 80$ परंतु 10 और 80 का इकाई अंक समान है, जिसकी हमें आवश्यकता नहीं हैं। इसी तर्क से PQ, 11 नहीं हो सकता क्योंकि P और Q भिन्न-भिन्न अंक हैं। $12 \times 8 = 96$ सभी प्रतिबंधों को पूरा करता है। क्या PQ, 13 हो सकता है? विचार कीजिए।

यह संभव नहीं है क्योंकि $13 \times 8 = 104$ होता है। 12 से बड़ी सभी 2 अंकों की संख्याओं का 8 के साथ गुणनफल करके 3 अंकों की संख्या प्राप्त होती है।

? इसे हल करने का प्रयास कीजिए— GH × H = 9K

इसका अर्थ है कि किसी 2 अंकों की संख्या को 1 अंक की संख्या से गुणा करने पर 90 के दशक की 2 अंकों वाली अन्य संख्या प्राप्त होती है। इस गूढ़ समीकरण में इकाई के अंकों के संगत अक्षरों को देखिए। नीचे दिए गए विकल्पों में से इस प्रश्न का उत्तर छाँटिए।

$11 \times 9 = 99$, $12 \times 8 = 96$, $46 \times 2 = 92$, $24 \times 4 = 96$, $47 \times 2 = 94$,
$31 \times 3 = 93$, $16 \times 6 = 96$

? एक अन्य प्रश्न BYE × 6 = RAY

अंशु कहता है, "चूँकि गुणनफल एक तीन अंकों वाली संख्या है अत: B, 2 या उससे अधिक नहीं हो सकता। यदि $B = 2$ अर्थात 200 तब गुणनफल 1200 से अधिक होगा। अत: $B = 1$ होगा।"

? आप 'Y' के विषय में क्या कह सकते हैं? कौन-से अंक संभव हैं या नहीं है?

Y, 7 अथवा उससे अधिक नहीं हो सकता क्योंकि, यदि Y = 7 होगा तो $170 \times 6 = 1020$ होगा परंतु हमें गुणनफल 3 अंको की संख्या चाहिए। संख्याओं और संक्रियाओं से संबंधित प्रतिरूपों, गुणधर्मों व तर्कशक्ति के प्रयोग से हम गूढ़ समीकरण हल कर सकते हैं।

Y सम संख्याओं और संक्रियाओं से संबंधित प्रतिरूप, गुणों और तर्क का उपयोग गूढ़कलन को हल करने में कर सकते हैं।

? निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) UT × 3 = PUT (ii) AB × 5 = BC (iii) L2N × 2 = 2NP

(iv) X4 × 4 = ZX (v) PP × QQ = PRP (vi) JK × 6 = KKK

? आइए, पता लगाएँ

1. यदि 31z5, 9 का गुणज है जहाँ z एक अंक है तब z का मान क्या होगा? व्याख्या कीजिए कि यहाँ इस प्रश्न के दो उत्तर क्यों हैं?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. स्नेहल पुष्टि करता है— "मैं एक संख्या लेता हूँ जिसे 12 से विभाजित करने पर शेषफल 8 प्राप्त होता है। मैं एक और संख्या लेता हूँ जो 12 के गुणज से 4 कम है। इनका योगफल सदैव 8 का गुणज होगा।" उसकी पुष्टि की जाँच कीजिए और अपने निष्कर्ष का सत्यापन कीजिए।
3. 3 के दो गुणजों का योग कब 6 का गुणज होता है और कब नहीं? विभिन्न संभावित स्थितियों को व्याख्या कीजिए और प्रतिरूप का सामान्यीकरण कीजिए।
4. श्रीलथा कहती हैं, "मेरे पास एक संख्या है जो 9 से विभाज्य है। यदि मैं इस संख्या के अंकों को उल्टे क्रम में लिखूँ तब भी वह 9 से विभाज्य है।"
   (i) जाँच कीजिए कि क्या उसका अनुमान 9 के कोई किसी भी गुणज के लिए सत्य है।
   (ii) क्या कोई अन्य अंक में परिवर्तन संभव है जिससे कि प्राप्त संख्या अभी भी 9 का गुणज है?
5. यदि $48a23b$, 18 का एक गुणज है तो a और b के सभी संभव मानों के युग्मों की सूची बनाइए।
6. यदि $3p7q8$, 44 से विभाज्य है p और q के सभी संभव मानों के युग्मों की सूची बनाइए।

प्रयास कीजिए

7. तीन क्रमागत संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनमें पहली संख्या 2 का गुणज है दूसरी संख्या 3 का गुणज है और तीसरी संख्या 4 का गुणज है।

गणित चर्चा

8. 45,000 और 47,000 के बीच 36 के पाँच गुणज लिखिए। अपनी विधि को अपनी कक्षा में साझा कीजिए।
9. पाँच क्रमागत सम संख्याओं के अनुक्रम में मध्य की संख्या $5p$ है। अनुक्रम में अन्य चार संख्याओं को p के पदों में व्यक्त कीजिए।
10. एक 6 अंकों की संख्या लिखिए जो 15 से विभाज्य है तथा अंकों को उल्टे क्रम में लिखने पर प्राप्त संख्या 6 से विभाज्य है।
11. दीपक पुष्टि करता है कि "11 के कुछ गुणज ऐसे हैं जिन्हें दोगुना करने पर भी वह 11 के गुणज रहते हैं परंतु 11 के अन्य गुणज दोगुना करने पर भी 11 के गुणज नहीं रहते हैं।" यदि उसका अनुमान सही है तो जाँच कीजिए तथा अपने निष्कर्ष की व्याख्या कीजिए।
12. निर्धारित कीजिए कि नीचे दिए गए कथन 'सदैव सत्य', 'कभी-कभी सत्य' अथवा 'कभी सत्य नहीं'। अपने तर्क को स्पष्ट कीजिए।
   (i) 6 के गुणज और 3 के गुणज का गुणनफल 9 का गुणज होता है।
   (ii) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से विभाज्य होगा।
   (iii) यदि $abcdef$, 6 का एक गुणज है तो $badcef$ भी 6 का एक गुणज होगा।
   (iv) $8(7b - 3) - 4(11b + 1)$, 12 का एक गुणज है।
13. किन्हीं 3 संख्याओं का चयन कीजिए। इनका योग कब 3 से विभाज्य होगा? सभी संभावित स्थितियों का अन्वेषण कीजिए और व्यापकीकरण कीजिए।

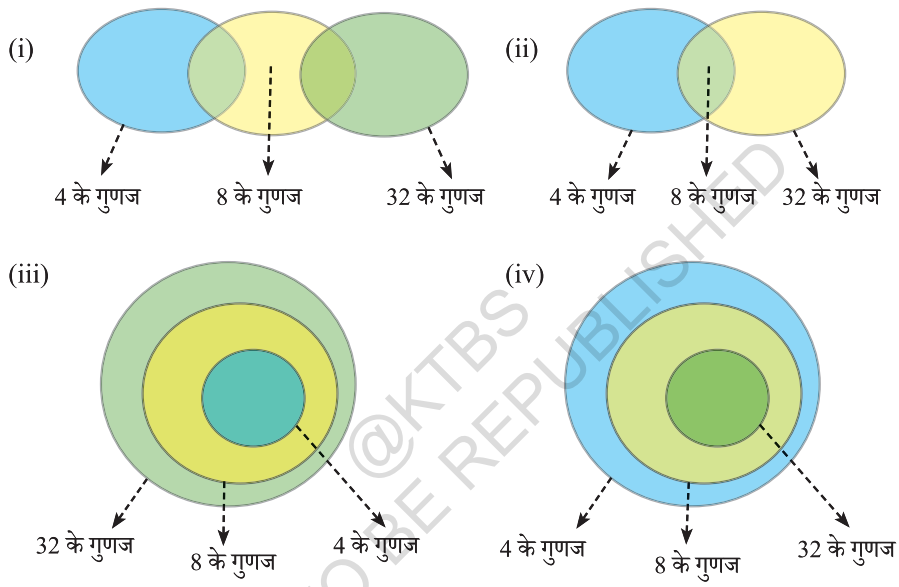
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

14. क्या दो क्रमागत पूर्णांकों का गुणनफल सदैव 2 का गुणज होता है? क्यों? तीन क्रमागत पूर्णांकों के गुणनफल के विषय में आपका क्या विचार है? क्या यह सदैव 6 का गुणज है? क्यों अथवा क्यों नहीं? आप चार क्रमागत पूर्णांकों के गुणनफल के विषय में क्या कह सकते हैं? पाँच क्रमागत पूर्णांकों के गुणनफल के विषय में आपका क्या विचार है?

15. गूढ़ समीकरण को हल कीजिए।

(i) EF × E = GGG (ii) WOW × 5 = MEOW

16. नीचे दिए गए कौन-से वेन आरेख 4, 8 और 32 के गुणजों के बीच संबंधों को दर्शाते हैं?



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

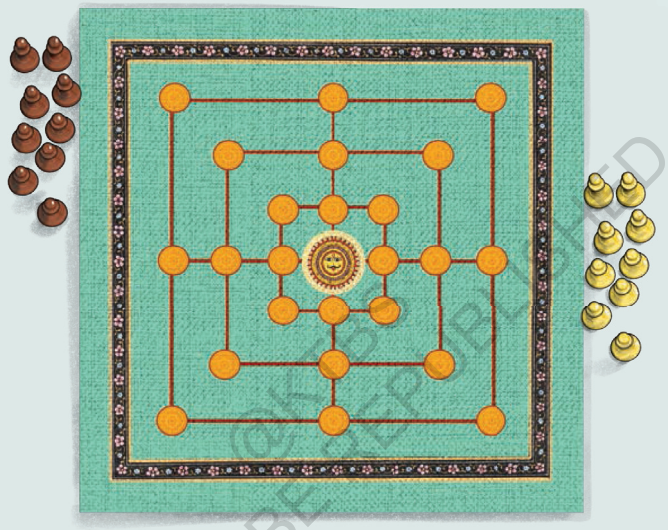
सारांश

- हमने विभाज्यता के विभिन्न गुणों को पता लगाया और सीखा कि—
  - यदि a, b से विभाज्य है, तो a के सभी गुणज b से विभाज्य होंगे।
  - यदि a, b से विभाज्य है, तो a, b के सभी गुणनखंडों से विभाज्य होगा।
  - यदि a, m को विभाजित करता है और a, n को विभाजित करता है, तो a, $m+n$ और $m-n$ को विभाजित करता है।
- हमने 3, 9 और 11 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए संक्षिप्त विधियों को सीखा और समझा कि यह कैसे कार्य करती हैं।
- उपर्युक्त सभी के माध्यम से एवं बीजगणित, दृश्यांकन, उदाहरण और प्रति उदाहरण का उपयोग करके हमें गणितीय सोच और तर्कशक्ति से हमें अवगत कराया गया।

पहेली का समय!

नवकांकरी

नवकांकरी को *सालू माने आटा*, चर-पर या *नवकांकरी* के नाम से भी जाना जाता है। यह परंपरागत भारतीय पट्ट खेल है जो 'नाइन मेन्स मोरिस' अथवा 'मिल्स इन दी वेस्ट' के समान ही है। यह दो खिलाड़ियों के लिए एक युक्ति खेल होता है जिसमें लक्ष्य तीन मोहरों की पंक्ति (एक रेखा में रखकर) बनाकर प्रतिद्वंदी के मोहरों को समाप्त करना या उसकी चाल को रोकना होता है।



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

खेल के नियम

1. प्रत्येक खिलाड़ी 9 मोहरों से प्रारंभ करता है। खिलाड़ी चिह्नित प्रतिच्छेदन (रंगीन गोले) पर बारी-बारी से अपने मोहरें रखते हैं। एक प्रतिच्छेद पर अधिकतम एक मोहरा रख सकते हैं।
2. एक बार जब सभी मोहरे रख दिए जाते हैं तो खिलाड़ी बारी-बारी से अपनी मोहरों में से एक को आसन्न रिक्त प्रतिच्छेदों (रंगीन गोले) पर ले जाकर तीन की एक रेखा बनाते हैं। यह रेखा क्षैतिज या उर्ध्वाधर हो सकती है।
3. एक बार जब कोई खिलाड़ी अपने मोहरों के साथ एक रेखा बना लेता है तो वह प्रतिद्वंदी के मोहरों में से एक को हटा सकता है जब तक कि वह उसकी पंक्तियों में से किसी एक का भाग न हो।

यदि प्रतिद्वंदी के पास 3 से कम मोहरें रह गई हों अथवा वह कोई चाल न चल सके तो वह खिलाड़ी जीत जाता है।

6 जितना बाँटेंगे उतना बढ़ेगा

0875CH06

पिछले अध्याय में हमने देखा कि किस प्रकार बीजगणित में प्रतिरूपों और संबंधों के विषय में सामान्य कथनों को संक्षिप्त रूप में लिखने के लिए अक्षर प्रतीकों का उपयोग किया जाता है। बीजगणित का उपयोग अनुमानों तथा निष्कर्षों (जैसा कि आपने पूर्व अध्याय में ऐसे अनेक गुणों को देखा था) को सही सिद्ध करने और विभिन्न प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए भी किया जा सकता है।

वितरण गुणधर्म, गुणन और योग के मध्य संबंध दर्शाने का एक गुण है जिसे बीजगणित का उपयोग करके संक्षेप में समझाया गया है। इस अध्याय में हम विभिन्न प्रकार के गुणन प्रतिरूपों का अन्वेषण करेंगे। साथ ही यह समझेंगे कि बीजगणितीय भाषा में वितरण गुणधर्म का उपयोग करके इन गुणन प्रतिरूपों को किस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

6.1 गुणन के कुछ गुणधर्म

गुणनफलों में वृद्धि

दो संख्याओं के गुणन पर विचार कीजिए, मान लीजिए यह 23×27 है।

? 1. यदि पहली संख्या (23) में 1 की वृद्धि की जाए तो गुणनफल में कितनी वृद्धि होगी?

? 2. यदि दूसरी संख्या (27) में 1 की वृद्धि की जाए तो गुणनफल में क्या परिवर्तन होगा?

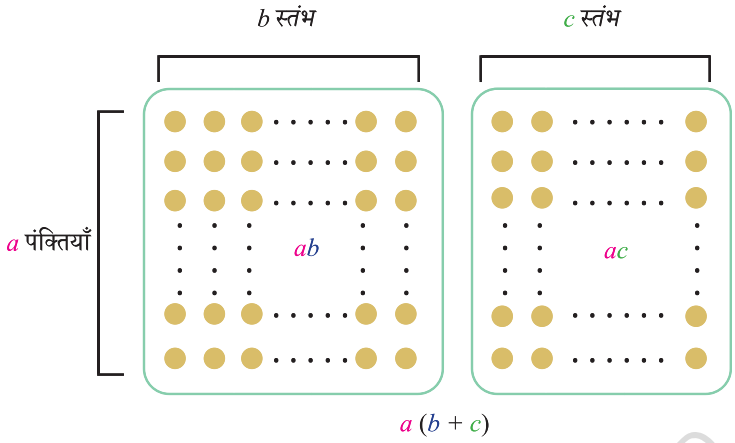
? 3. जब दोनों संख्याओं में 1 की वृद्धि की जाए तब गुणनफल में क्या परिवर्तन होगा?

? क्या आपको कोई ऐसा प्रतिरूप दिखाई देता है जो किन्हीं दो संख्याओं के गुणनफल के हमारे अवलोकन को सामान्यीकृत करने में सहायक हो?

आइए, पहले एक सरल समस्या पर विचार करते हैं— 27 में 1 की वृद्धि करने पर गुणनफल में वृद्धि ज्ञात कीजिए। गुणनफल की परिभाषा (और क्रमविनिमेय गुण) से यह स्पष्ट है कि गुणनफल में 23 की वृद्धि होती है। इसे गुणन के वितरण गुणधर्म से भी देखा जा सकता है। यदि a, b, c तीन संख्याएँ हैं तब—

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

इस गुणधर्म को एक चित्र का उपयोग करके स्पष्ट रूप में दर्शाया जा सकता है—



इसे योग पर गुणन का **वितरण गुणधर्म** कहते हैं। सर्वसमिका $a\,(b + c) = ab + ac$ के लिए $a = 23$, $b = 27$ व $c = 1$ का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$23\,(27 + 1) = 23 \times 27 + \boxed{23}$$
वृद्धि

स्मरण रखिए कि यहाँ पर $a\,(b + c)$ और $23\,(27 + 1)$ का अर्थ क्रमशः $a \times (b + c)$ एवं $23 \times (27 + 1)$ है। हम प्रायः कोष्ठकों के पूर्व अथवा बाद में '×' चिह्न नहीं लिखते हैं ठीक वैसे ही जैसे $5a$, xy आदि व्यंजकों में होता है।

इसी प्रकार हम वितरण गुणधर्म का प्रयोग करके $(a + b)\,c$ का प्रसार भी नीचे दिए अनुसार कर सकते हैं—

$$\begin{aligned}(a + b)\,c &= c\,(a + b) \text{ (गुणन की क्रमविनिमेयता)}\\ &= ca + cb \text{ (वितरणात्मकता)}\\ &= ac + bc \text{ (गुणन की क्रमविनिमेयता)}\end{aligned}$$

वितरण गुणधर्म का प्रयोग करके हम सामान्यतः यह ज्ञात कर सकते हैं कि यदि गुणनफल में एक या दोनों संख्याओं में 1 की वृद्धि कर दी जाए तो गुणनफल में कितनी वृद्धि होगी। मान लीजिए प्रारंभ में दो संख्याएँ a और b हैं। यदि उनमें से एक संख्या (मान लीजिए b) में 1 की वृद्धि कर दी जाए तो हमें प्राप्त होता है—

$$a\,(b + 1) = ab \times \boxed{a}$$
वृद्धि

आइए, अब हम देखते हैं कि क्या होगा यदि किसी गुणनफल में दोनों संख्याओं में 1 की वृद्धि कर दी जाए। हम देखते हैं कि यदि गुणनफल ab में a और b दोनों में 1 की वृद्धि कर दी जाए तो हमें $(a + 1)(b + 1)$ प्राप्त होगा।

NOT TO BE REPUBLISHED © NCERT

? हम इसका प्रसार किस प्रकार करें?

मान लीजिए $(a + 1)$ एक एकल पद है। तब वितरण गुणधर्म से हमें प्राप्त होता है—

$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)\, b + (a + 1)\, 1$

वितरण गुणधर्म का पुनःउपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$(a + 1)(b + 1) = (a + 1)\, b + (a + 1)\, 1$

$= ab + \boxed{(b + a + 1)}$

वृद्धि

यदि $a = 23$ और $b = 27$ है तो हमें प्राप्त होता है—

$(23 + 1)(27 + 1) = (23 + 1)\, 27 + (23 + 1)\, 1$

$= 23 \times 27 + \boxed{(27 + 23 + 1)}$

वृद्धि

इस प्रकार जब a और b में से प्रत्येक में 1 की वृद्धि की जाती है तब गुणनफल ab में $a + b + 1$ की वृद्धि होती है।

? यदि हम पहले $(b + 1)$ को एकल पद मानकर $(a + 1)(b + 1)$ का प्रसार करें तब हमें क्या प्राप्त होता? इसे हल करने का प्रयास कीजिए?

? यदि किसी गुणनफल की पहली संख्या में 1 की वृद्धि और दूसरी संख्या में 1 की कमी की जाए तो हमें क्या प्राप्त होगा? क्या उनके गुणनफल में कोई परिवर्तन होगा?

आइए, पुनः दो संख्याओं a और b का गुणनफल ab लेते हैं। यदि a में 1 की वृद्धि और b में 1 की कमी की जाए तो उनका गुणनफल $(a + 1)(b - 1)$ होगा। इसका प्रसार करने पर हमें प्राप्त होता है—

$(a + 1)(b - 1) = (a + 1)\, b - (a + 1)\, 1$

$= ab + b - (a + 1)$

$= ab + \boxed{b - a - 1}$

वृद्धि

यदि $a = 23$ और $b = 27$ है तब हमें प्राप्त होता है—

$(23 + 1)(27 - 1) = (23 + 1)\, 27 - (23 + 1)\, 1$

$= 23 \times 27 + 27 - (23 + 1)$

$= 23 \times 27 + \boxed{27 - 23 - 1}$

वृद्धि

? क्या गुणनफल में सदैव वृद्धि होगी? ऐसे तीन उदाहरणों का पता लगाइए जहाँ गुणनफल घटता है।

? क्या होगा जब a और b ऋणात्मक पूर्णांक हों?

उपर्युक्त प्रत्येक स्थिति में a और b के लिए विभिन्न मान प्रतिस्थापित करके जाँच कीजिए। उदाहरण के लिए $a = -5$, $b = 8$; $a = -4$, $b = -5$ इत्यादि।

हमने देखा कि पूर्णांक भी वितरण गुणधर्म को संतुष्ट करते हैं अर्थात यदि x, y और z कोई तीन पूर्णांक हैं तो $x\,(y + z) = xy + xz$ होगा।

इस प्रकार गुणनफल में वृद्धि के लिए हमारे पास जो व्यंजक हैं वे तब भी मान्य होंगे जब अक्षर-संख्याओं (चर) का मान ऋणात्मक पूर्णांक हों।

याद कीजिए कि यदि किन्हीं दो बीजीय व्यंजकों में अक्षर संख्याओं को संख्याओं से परिवर्तन करने पर उनके मान समान रहते हैं तो वे व्यंजक समान होते हैं। ये संख्याएँ कोई

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

भी पूर्णांक हो सकती हैं। दो गणितीय व्यंजकों की समानता व्यक्त करने वाले गणितीय कथनों को **सर्वसमिकाएँ** कहते हैं, जैसे —

$$a\,(b + 8) = ab + 8a,$$
$$(a + 1)\,(b - 1) = ab + b - a - 1, \text{ आदि}$$

? यदि दो संख्याओं में से एक में m और दूसरी में n की वृद्धि कर दी जाए तो उनके गुणनफल में कितना परिवर्तन होगा?

यदि a और b गुणा की जाने वाली प्रारंभिक संख्याएँ हैं तो वृद्धि के पश्चात वे $a + m$ और $b + n$ बन जाती हैं।

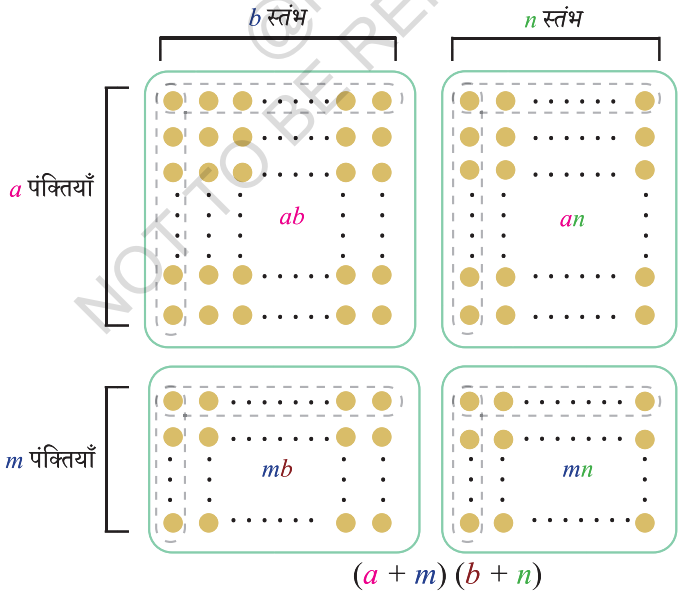
$$(a + \text{m})\,(b + n) = (a + m)b + (a + m)n$$
$$= ab + mb + an + mn$$

अत: गुणनफल में वृद्धि $an + bm + mn$ है।

ध्यान दीजिए कि यह गुणनफल $(a + m)$ के प्रत्येक पद का $(b + n)$ के प्रत्येक पद से गुणनफल का योग है।

सर्वसमिका 1 $(a + m)\,(b + n) = ab + mb + an + mn$

इस सर्वसमिका को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है—



? इस सर्वसमिका का उपयोग यह ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है कि जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में किसी भी मात्रा में वृद्धि या कमी की जाती है तो उनके गुणनफल में क्या परिवर्तन होता है। क्या आप समझ सकते हैं कि एक संख्या या दोनों संख्याओं में कमी करने पर इस सर्वसमिका का प्रयोग किस प्रकार किया जा सकता है?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, उदाहरण के लिए उस स्थिति पर पुनर्विचार करें जब एक संख्या में 1 की वृद्धि और दूसरी संख्या में 1 की कमी की जाती है। आइए, गुणनफल $(a + 1)\ (b - 1)$ को $(a + 1)\ (b + (-1))$ के रूप में लिखते हैं। सर्वसमिका 1 में $m = 1$ और $n = -1$ लेने पर हमें प्राप्त होता है —

$$ab + (1) \times b + a \times (-1) + (1) \times (-1) = ab + b - a - 1,$$

यह वही व्यंजक है जो हमें पूर्व में प्राप्त हुआ था।

? सर्वसमिका 1 का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए कि गुणनफल में किस प्रकार परिवर्तन होता है जब —

(i) एक संख्या में 2 की कमी की जाती है और दूसरी संख्या में 3 की वृद्धि की जाती है।

(ii) दोनों संख्याओं में से एक में 3 की कमी तथा दूसरी में 4 की कमी की जाती है।

? व्यवकलन (घटाव) को योग (जोड़) में परिवर्तन किए बिना गुणनफल ज्ञात कीजिए एवं उत्तरों की जाँच कीजिए।

इसे व्यापकीकृत करते हुए हम गुणनफल $(a + u)\ (b - v)$ नीचे दिए अनुसार प्राप्त कर सकते हैं—

$$\begin{aligned}(a + u)\ (b - v) &= (a + u)\ b - (a + u)\ v \\ &= ab + ub - (av + uv) \\ &= ab + ub - av - uv\end{aligned}$$

जाँच कीजिए कि यह सर्वसमिका 1 में $m = u$ और $n = -v$ लेने के समान ही है।

सर्वसमिका 1 के अनुसार गुणनफल $(a + u)\ (b - v)$, $a + u$ के प्रत्येक पद (a और u) का $b - v$ के प्रत्येक पद (b और $-v$) से गुणनफल का योग है। ध्यान दीजिए कि गुणनफल में पदों के चिह्न, पूर्णांक गुणनफल के सामान्य नियमों का उपयोग करके निर्धारित किए जा सकते हैं।

अब आप समझ गए होंगे कि पूर्णांक गुणन के नियम किस प्रकार हमें एक ही सर्वसमिका का उपयोग करके विभिन्न प्रश्नों को हल करने में सहायक सिद्ध होते हैं!

? विस्तार कीजिए (i) $(a - u)\ (b + v)$, (ii) $(a - u)\ (b - v)$

हमें प्राप्त होता है—

$$(a - u)\ (b + v) = ab - ub + av - uv \text{ और}$$
$$(a - u)\ (b - v) = ab - ub - av + uv$$

वितरण गुणधर्म एक कोष्ठक के भीतर दो पदों तक सीमित नहीं है।

? **उदाहरण 1**— $\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right)$ को विस्तारित रूप में लिखिए।

$$\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3a}{2} \times a\right) - \left(\frac{3a}{2} \times b\right) + \left(\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5}\right)$$

इन पदों को नीचे दिए गए अनुसार इस प्रकार सरलीकृत किया जा सकता है —

$$\frac{3a}{2} \times a = \frac{3}{2} \times (a \times a)$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

घातांक संकेतन का उपयोग करके हम लिख सकते हैं— $\frac{3}{2} \times (a \times a) = \frac{3}{2} a^2$

$$\frac{3a}{2} \times b = \frac{3}{2} \times (a \times b) = \frac{3}{2} ab$$

$$\frac{3a}{2} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{5}\right) a = \frac{3}{10} a$$

अत: हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{3a}{2}\left(a - b + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2} ab + \frac{3}{10} a$$

? क्या किन्हीं भी दो पदों का योग करके एकल पद प्राप्त किया जा सकता है?

उदाहरण के लिए क्या $\frac{3}{2} a^2$ और $\frac{3}{10} a$ का योग करके एकल पद प्राप्त किया जा सकता है?

हम देखते हैं कि दोनों पदों की चर संख्याएँ पूर्णतया समान न होने से उन्हें एक ही पद में सरलीकृत नहीं किया जा सकता है। अतः व्यंजक का और अधिक सरलीकरण करना संभव नहीं है।

स्मरण कीजिए कि समान चर संख्या वाले पदों को **समान पद** कहते हैं।

? **उदाहरण 2**— $(a + b)\ (a + b)$ का विस्तार कीजिए।

यहाँ $(a + b)\ (a + b) = (a + b)\ a + (a + b)\ b = a \times a + b \times a + ab + b \times b$

$$= a^2 + ba + ab + b^2$$

चूँकि $ba = ab$ हमारे पास समान चर संख्या ab वाले दो पद हैं (अथवा जो समान पद हैं) अतः उन्हें जोड़ा जा सकता है—

$$ba + ab = ab + ab = 2ab$$

अतः हमें प्राप्त होता है—

$$(a + b)\ (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

? **उदाहरण 3**— $(a + b)\ (a^2 + 2ab + b^2)$ का विस्तार कीजिए।

$(a + b)\ (a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)\ a^2 + (a + b) \times 2ab + (a + b)\ b^2$

$$= (a \times a^2) + ba^2 + (a \times 2ab) + (b \times 2ab) + ab^2 + (b \times b^2)$$

इन पदों को नीचे दिए गए प्रकार से सरलीकृत किया जा सकता है —

$$a \times a^2 = a^3 \text{ (क्यों?)}$$

$$ba^2 = a^2b$$

$$a \times 2ab = 2 \times a \times a \times b = 2a^2b$$

$$b \times 2ab = 2 \times a \times b \times b = 2ab^2$$

$$b \times b^2 = b^3$$

अत: $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

हम देखते हैं कि a^2b और $2a^2b$ में समान चर संख्याएँ (या समान पद) हैं। अतः इन्हें जोड़ा जा सकता है—

$$a^2b + 2a^2b = (1 + 2)\ a^2b = 3a^2b$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

इसी प्रकार ab^2 और $2ab^2$ समान पद हैं अतः इन्हें जोड़ा जा सकता है—

$$ab^2 + 2ab^2 = (1 + 2)ab^2 = 3ab^2$$

हमें प्राप्त होता है—

$$(a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इतिहास की एक झलक

अनेक प्राचीन सभ्यताओं विशेषकर प्राचीन मिस्र, मेसोपोटामिया, यूनान, चीन और भारत में गणितज्ञों की गणनाओं में योग पर गुणन का वितरण गुणधर्म अंतर्निहित था। उदाहरण के लिए *गणितज्ञ* यूक्लिड (ज्यामितीय रूप में) और आर्यभट्ट (बीजगणितीय रूप में) ने अपने गणितीय और वैज्ञानिक कार्यों में वितरण नियम का एक अंतर्निहित विधि से व्यापक रूप में उपयोग किया। वितरण गुणधर्म का स्पष्ट कथन सर्वप्रथम ब्रह्मगुप्त ने अपनी रचना *ब्राह्मस्फुटसिद्धांत* (श्लोक 12.55) में दिया था। इसमें उन्होंने गुणन के लिए इस गुणधर्म के उपयोग को *'खंड गुणनम'* (भागों से गुणा) कहा था। उनके श्लोक में कहा गया— "गणक को दो या दो से अधिक भागों में विभाजित किया जाता है जिनका योग इसके समान होता है; गुण्य (multiplicand) को इनमें से प्रत्येक से गुणा किया जाता है और परिणामों को जोड़ा जाता है।" अर्थात यदि दो भाग हैं तो अक्षर प्रतीकों का उपयोग करने पर यह सर्वसमिका $(a + b)\, c = ac + bc$ के समान है। आगामी श्लोक (श्लोक 12.56) में ब्रह्मगुप्त इस वितरण गुणधर्म का उपयोग करके शीघ्र गुणन करने की विधि का वर्णन करते हैं जिसका विस्तारपूर्वक अध्ययन हम अगले भाग में करेंगे।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. निम्नांकित गुणन जाल का अवलोकन कीजिए। जाल के अंतर्गत दी गई प्रत्येक संख्या दो संख्याओं के गुणन से बनी है। यदि 3×3 फ्रेम की मध्य संख्या व्यंजक pq द्वारा दर्शाई गई है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है तो जाल में अन्य संख्याओं के लिए व्यंजक लिखिए।

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3×5	3×6	3×7
4×5	4×6	4×7
5×5	5×6	5×7

	pq	

2. निम्नलिखित गुणनफलों का विस्तार कीजिए।

(i) $(3 + u)(v - 3)$ (ii) $\frac{2}{3}(15 + 6a)$

(iii) $(10a + b)(10c + d)$ (iv) $(3 - x)(x - 6)$

(v) $(-5a + b)(c + d)$ (vi) $(5 + z)(y + 9)$

3. ऐसे तीन उदाहरण दीजिए जिनमें दो सख्याओं में से एक संख्या में 2 की वृद्धि की जाए और दूसरी संख्या में 4 की कमी की जाए तो भी उनके गुणनफल अपरिवर्तित रहें।

गणित चर्चा

4. विस्तार कीजिए (i) $(a + ab - 3b^2)(4 + b)$ और (ii) $(4y + 7)(y + 11z - 3)$

5. विस्तार कीजिए (i) $(a - b)(a + b)$ (ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ और (iii) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ क्या इनमें आपको कोई प्रतिरूप दिखाई देता है? आपको दिखाई देने वाले प्रतिरूप में अगली सर्वसमिका क्या होगी? क्या आप इसकी जाँच सर्वसमिका को विस्तारित करके कर सकते हैं?

वितरण गुणधर्म के प्रयोग से शीघ्र गुणन

वितरण गुणधर्म का उपयोग विशिष्ट प्रकार की संख्याओं के गुणा के लिए शीघ्र गुणन विधियाँ विकसित करने के लिए किया जा सकता है।

जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक संख्या 11, 101, 1001,..... है।

? किसी संख्या को 11 से गुणा करने पर एक ही चरण में गुणनफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित गुणन का उपयोग कीजिए।

(i) 3874×11 (ii) 5678×11

आइए, पहला गुणन करते हैं

$$3874 \times 11 = 3874\,(10 + 1) = 38740 + 3874$$

$$\begin{array}{r} 38740 \\ +\quad 3874 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

ध्यान दीजिए कि अंक किस प्रकार जोड़े जा रहे हैं।

आइए, एक 4 अंकीय संख्या $dcba$ लेते हैं। इसमें हजार के स्थान पर d, सैकड़ा के स्थान पर c, दहाई के स्थान पर b और इकाई के स्थान पर a है।

$$dcba \times (10 + 1) = dcba \times 10 + dcba$$

इस प्रकार

$$\begin{array}{cccccc} & d & c & b & a & o \\ + & & d & c & b & a \\ \hline & d & (c+d) & (b+c) & (a+b) & a \end{array}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

गुणनफल को एक पंक्ति में प्राप्त करने में इसका प्रयोग किया जा सकता है।

चरण 1

$$\begin{array}{r} 3874 \times 11 \\ \hline 4 \end{array}$$

चरण 2

$$\begin{array}{r} \overset{1+}{\frown} \\ 3874 \times 11 \\ \hline 14 \end{array}$$

चरण 3

$$\begin{array}{r} \overset{1\,1}{\frown\!\!+} \\ 3874 \times 11 \\ \hline 614 \end{array}$$

चरण 4

$$\begin{array}{r} \overset{1\,1\,1}{\frown\!\!+} \\ 3874 \times 11 \\ \hline 2614 \end{array}$$

चरण 5

$$\begin{array}{r} \overset{1\,1\,1}{} \\ 3874 \times 11 \\ \hline 42614 \end{array}$$

? किसी संख्या (कितने भी अंकों की कोई संख्या) को 11 से गुणा करने का सामान्य नियम बताइए तथा गुणनफल को एक पंक्ति में लिखिए।

गणना कीजिए— (i) 94×11 (ii) 495×11 (iii) 3279×11 (iv) 4791256×11

गणित चर्चा

? किसी संख्या को 101 से गुणा करने के लिए भी क्या हम ऐसा ही नियम बना सकते हैं?

? 3874 को 101 से गुणा कीजिए।

आइए, एक 4 अंकीय संख्या *dcba* लेते हैं।

$$dcba \times 101 = dcba \times (100 + 1) = dcba \times 100 + dcba$$

इस प्रकार

	d	c	b	a	o	o
+			d	c	b	a
	d	c	$(b + d)$	$(a + c)$	b	a

? उपर्युक्त व्यंजक का प्रयोग 3874×101 का मान (गुणनफल) एक पंक्ति में ज्ञात करने के लिए कीजिए।

? किसी संख्या को 101 से एक ही पंक्ति में गुणा करने और गुणनफल को लिखने का सामान्य नियम क्या हो सकता है? 1001, 10001,..... से गुणा करने के लिए इस नियम का विस्तार कीजिए।

? उपर्युक्त नियम का प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

गणित चर्चा

(i) 89×101 (ii) 949×101 (iii) 265831×1001
(iv) 1111×1001 (v) 9734×99 (vi) 23478×999

दो संख्याओं को सरलता से गुणा करने के लिए वितरण गुणधर्म लागू करने की ऐसी विधियों पर ब्रह्मगुप्त (628 सामान्य संवत्), श्रीधराचार्य (750 सामान्य संवत्) और भास्कराचार्य (*लीलावती*, 1150 सामान्य संवत्) के प्राचीन गणितीय ग्रंथों में विस्तार से चर्चा की गई है। ब्रह्मगुप्त ने अपने ग्रंथ *ब्राह्मस्फुटसिद्धांत* (श्लोक 12.56) में वितरण गुणधर्म का उपयोग करके शीघ्र गुणन के लिए ऐसी विधियों को **इष्टगुणन** कहा है।

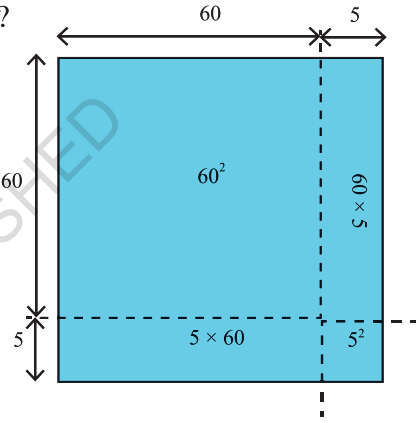
@RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.2 वितरण गुणधर्म की विशेष स्थितियाँ

दो संख्याओं के योग या अंतर का वर्ग

? 60 इकाई भुजा वाले एक वर्ग का क्षेत्रफल 3600 वर्ग इकाई (60^2) है और 5 इकाई भुजा वाले एक वर्ग का क्षेत्रफल 25 वर्ग इकाई (5^2) है। क्या हम इसका उपयोग करके 65 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

आकृति में दर्शाए अनुसार 65 इकाई भुजा वाले वर्ग को 4 भागों में विभाजित किया जा सकता है जिसमें 60 इकाई भुजा वाला वर्ग, 5 इकाई भुजा वाला वर्ग और 60 एवं 5 इकाई भुजा वाले दो आयत हैं। 65 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल उस वर्ग के सभी घटकों के क्षेत्रफलों का योग है। दी गई आकृति में क्या आप चारों भागों का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?



हमें प्राप्त होता है—

$65^2 = (60 + 5)^2 = 60^2 + 5^2 + 2 \times (60 \times 5)$

$= 3600 + 25 + 600 = 4225$ वर्ग इकाई

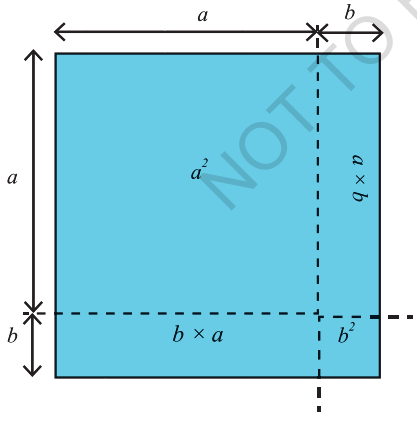
वितरण गुणधर्म का उपयोग करके $(60 + 5) \times (60 + 5)$ को गुणा कीजिए।

$(60+5)\times(60+5) = 60\times60+5\times60+60\times5+5\times5$

$= 60^2 + 2 \times (60 \times 5) + 5^2$

? यदि हम 65^2 को $(30 + 35)^2$ या $(52 + 13)^2$ लिखें तब क्या होगा? आकृतियाँ बनाइए और प्राप्त क्षेत्रफल की जाँच कीजिए।

आइए, दो संख्याओं के योग का वर्ग $(a + b)^2$ के लिए सामान्य व्यंजक देखते हैं।



वितरण गुणधर्म का उपयोग करते हुए $(a + b)^2$ को इस प्रकार विस्तारित कर सकते हैं—

$(a+b)\times(a+b) = a\times a+a\times b+b\times a+b\times b$

$= a^2 + 2ab + b^2$

इसे हम उदाहरण 2 में पहले ही देख चुके हैं।

सर्वसमिका 1A $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

? यदि a और b कोई दो पूर्णांक हैं तो क्या $(a + b)^2$ का मान $a^2 + b^2$ से सदैव बड़ा ही होगा? यदि नहीं तो यह कब बड़ा होगा?

गणित चर्चा

? 104^2, 37^2 का मान ज्ञात करने के लिए सर्वसमिका 1A का उपयोग कीजिए।

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(**संकेत**— 104 और 37 को उन संख्याओं के योग या अंतर में विघटित कीजिए जिनके वर्गों की गणना करना सरल हो।

? सर्वसमिका 1A का उपयोग करके निम्नलिखित के लिए व्यंजक लिखिए?

(i) $(m + 3)^2$ (ii) $(6 + p)^2$

? $(6x + 5)^2$ का विस्तारित रूप लिखिए।

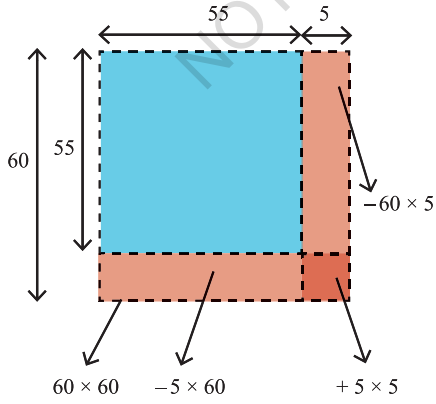
वितरण गुणधर्म का प्रयोग	सर्वसमिका का प्रयोग
$(6x + 5)^2 = (6x + 5)(6x + 5)$ $= (6x \times 6x) + (5 \times 6x) + (6x \times 5) + 5 \times 5$ $= (6x)^2 + 2(6x \times 5) + 5^2$ $= 36x^2 + 60x + 25$	$(6x + 5)^2 = (6x)^2 + 5^2 + 2 \times (6x \times 5)$ $= 36x^2 + 25 + 60x$

यदि आपको सामान्य नियम का स्मरण रखने अथवा उसका उपयोग करने में कठिनाई होती है तो ऐसी स्थिति में आप गुणा करने के लिए वितरण गुणधर्म का उपयोग कर सकते हैं और वांछित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।

? सर्वसमिका और वितरण गुणधर्म दोनों का उपयोग करके $(3j + 2k)^2$ को विस्तारित कीजिए।

? क्या हम 60^2 (= 3600) और 5^2 (= 25) का उपयोग करके $(60 - 5)^2$ अथवा 55^2 का मान ज्ञात कर सकते हैं? आइए, इसे ज्यामिति के माध्यम से एक 60 इकाई भुजा वाले वर्ग के अंतर्गत 55 इकाई भुजा के वर्ग को बनाकर हल करने का प्रयास करते हैं।

55 इकाई भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल $(60 - 5)^2 = 55^2$ है।



60 इकाई भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफल में से 60 और 5 इकाई भुजा वाले दो आयतों के क्षेत्रफलों को घटाकर हम 55 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं जो $60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60)$ है। ऐसा करने पर हम 5 इकाई भुजा वाले छोटे वर्ग के क्षेत्रफल को दो बार घटा देते हैं। वास्तविक क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिए हम इस व्यंजक का क्या उपयोग कर सकते हैं।

हम इस व्यंजक में 5 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल पुनः जोड़ सकते हैं। इस प्रकार हम इस क्षेत्रफल को केवल एक बार घटाएँगे।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अत:

$$(60 - 5)^2 = 60^2 - (60 \times 5) - (5 \times 60) + 5^2$$
$$= 3600 - 300 - 300 + 25$$
$$= 3025$$

55 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल 3025 वर्ग इकाई है।

हमने देखा कि $(a + b)^2$ का विस्तार करने पर हमें क्या प्राप्त होता है। $(a - b)^2$ का विस्तारित रूप क्या है?

वितरण गुणधर्म का उपयोग करने पर

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$$
$$= (a)^2 - ba - ab + (b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

? $(a - b)^2$ का विस्तार ज्ञात करने के लिए हम $(a + b)^2$ के विस्तार का उपयोग भी कर सकते हैं। विचार कीजिए कि कैसे?

संकेत— $(a - b)^2 = (a + (-b))^2$

अब हम प्रत्यक्ष रूप से $(a + b)^2$ के विस्तार का उपयोग कर सकते हैं।

$$(a + (-b)^2 = (a)^2 + (-b)^2 + 2 \times (a) \times (-b)$$

सर्वसमिका 1B $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

? ज्यामिति का उपयोग करके 55^2 की भाँति $(a - b)^2$ का विस्तारित रूप लिखिए।

? सर्वसमिका $(a - b)^2$ का उपयोग करके *(a)* 99^2 और *(b)* 58^2 का मान ज्ञात कीजिए।

? सर्वसमिका 1B और वितरण गुणधर्म दोनों का उपयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए।

(i) $(b - 6)^2$ (ii) $(-2a + 3)^2$ (iii) $\left(7y - \frac{3}{4z}\right)^2$

जाँच प्रतिरूप

प्रतिरूप 1

निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए।

$$2\,(2^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2$$
$$2\,(3^2 + 1^2) = 4^2 + 2^2$$
$$2\,(6^2 + 5^2) = 11^2 + 1^2$$
$$2\,(5^2 + 3^2) = 8^2 + 2^2$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? प्राकृत संख्याओं का एक युग्म लीजिए। इनके वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए। क्या आप इस योग को दो वर्गों के योग के रूप में लिख सकते हैं?

इसे अन्य संख्याओं के युग्मों के साथ ज्ञात करने का प्रयास कीजिए। क्या आपने किसी प्रतिरूप का पता लगाया?

ध्यान दीजिए— $2\,(5^2 + 6^2) = (6 + 5)^2 + (6 - 5)^2$

? क्या नीचे दी गई सर्वसमिकाएँ उपर्युक्त प्रतिरूप को समझाने में सहायक हैं?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

समान पदों को जोड़ने पर $a^2 + a^2 = 2a^2$, $b^2 + b^2 = 2b^2$ और $2ab - 2ab = 0$

हमें प्राप्त होता है—

$$2\,(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

प्रतिरूप 2

? यहाँ एक संबंधित प्रतिरूप दिया गया है। बीजगणित का उपयोग करके इस प्रतिरूप की व्याख्या करने का प्रयास यह निर्धारित करने के लिए कीजिए कि क्या यह प्रतिरूप सदैव लागू होता है?

$$9 \times 9 - 1 \times 1 = 10 \times 8$$

$$8 \times 8 - 6 \times 6 = 14 \times 2$$

$$7 \times 7 - 2 \times 2 = 9 \times 5$$

$$10 \times 10 - 4 \times 4 = 14 \times 6$$

यहाँ पर प्रतिरूप $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$ प्रतीत होता है।

क्या यह एक वास्तविक सर्वसमिका है? वितरण गुणधर्म का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - ab + ba - a^2$$

समान पदों को जोड़ने पर हम देखते हैं— $ab + (-ab) = 0$

सर्वसमिका 1C $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$

आप यह सर्वसमिका पूर्व में ही 'आइए, पता लगाएँ 5 (i)' में देख चुके थे।

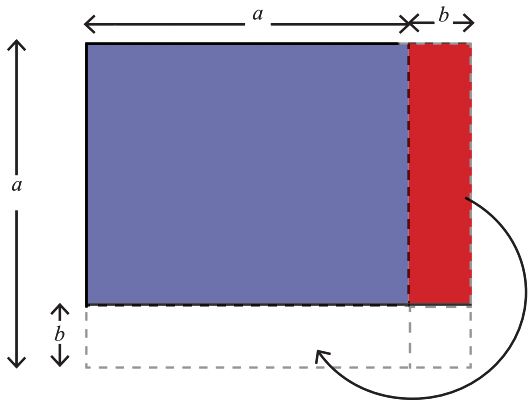
? सर्वसमिका 1C का उपयोग करके 98×102 और 45×55 की गणना कीजिए।

? ज्यामितीय रूप से दर्शाइए कि $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ है।

प्रयास कीजिए

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

संकेत—



श्रीधराचार्य (750 सामान्य संवत्) ने सर्वसमिका 1C का उपयोग करके संख्याओं के वर्गों की गणना शीघ्रता से करने की एक रोचक विधि दी है। इस सर्वसमिका के निम्नलिखित संशोधित रूप पर विचार कीजिए—

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

? यह सर्वसमिका सत्य क्यों है?

अब, उदाहरण के लिए $a = 31$ और $b = 1$ लेकर 31^2 ज्ञात किया जा सकता है।

$$31^2 = (31 + 1)(31 - 1) + 1^2$$
$$= 32 \times 30 + 1$$
$$= 961$$

$a = 197$ और $b = 3$ लेकर 197^2 ज्ञात किया जा सकता है।

$$197^2 = (197 + 3)(197 - 3) + 3^2$$
$$= 200 \times 194 + 9$$
$$= 38809$$

© IBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आइए, पता लगाएँ

1. कौन-सा व्यंजक बड़ा है— $(a - b)^2$ अथवा $(b - a)^2$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
2. 100 को दो वर्गों के अंतर के रूप में व्यक्त कीजिए।
3. अब तक सीखी गई सर्वसमिकाओं का उपयोग करके 406^2, 72^2, 145^2, 1097^2 और 124^2 का मान ज्ञात कीजिए।
4. क्या प्रतिरूप 1 और 2 केवल गणन की संख्याओं के लिए ही मान्य हैं? क्या ये ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी लागू होते हैं? भिन्नों के विषय में इन प्रतिरूपों के लिए क्या कहा जा सकता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

गणित चर्चा

6.3 त्रुटि को पहचान कर सुधारिए

निम्नलिखित कुछ बीजीय व्यंजकों को उनके सरलतम रूपों में विस्तारित और सरलीकृत किया गया है।

(i) प्रत्येक सरलीकरण की जाँच कीजिए और देखिए कि क्या कोई त्रुटि है?

(ii) यदि कोई त्रुटि है तो व्याख्या कीजिए कि क्या त्रुटि हुई है।

(iii) इसके पश्चात सही व्यंजक लिखिए।

1
$-3p(-5p+2q)$
$= -3p + 5p - 2q$
$= p - 2q$

2
$2(x-1)+3(x+4)$
$= 2x - 1 + 3x + 4$
$= 5x + 3$

3
$y + 2(y+2)$
$= (y+2)^2$
$= y^2 + 4y + 4$

4
$(5m+6n)^2$
$= 25m^2 + 36n^2$

5
$(-q+2)^2$
$= q^2 - 4q + 4$

6
$3a\ (2b \times 3c)$
$= 6ab \times 9ac$
$= 54a2bc$

7
$\frac{1}{2}(10s-6)+3$
$= 5s - 3 + 3$
$= 5s$

8
$5w^2 + 6w$
$= 11w^2$

9
$2a^3 + 3a^3 + 6a^2b$
$+ 6ab^2$
$= 5a^3 + 12a^2b^2$

10
$(x+2)(x+5)$
$= (x+2)x + (x+2)5$
$= x^2 + 2x + 5x + 10$
$= x^2 + 7x + 10$

11
$(a+2)(b+4)$
$= ab + 8$

12
$ab^2 + a^2b + a^2b^2$
$= ab(a + b + ab)$

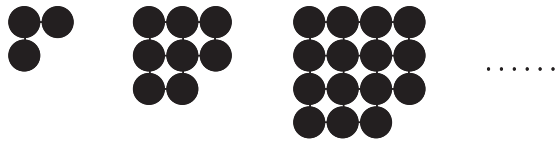
©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.4 इस ओर या उस ओर, सभी रास्ते खाड़ी की ओर

गणित चर्चा

नीचे दी गई आकृति में प्रतिरूप का अवलोकन कीजिए। इस आकृति में क्रम में आने वाली अगली आकृति बनाइए। इसमें कितने वृत्त हैं? दसवें चरण में आकृति में कुल कितने वृत्त होंगे? चरण k में प्राप्त आकृति में वृत्तों की संख्या के लिए व्यंजक लिखिए।

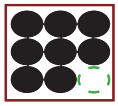
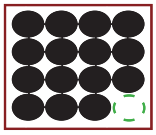
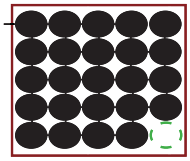
1 2 3



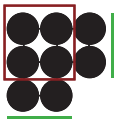
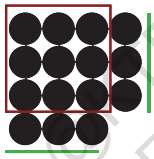
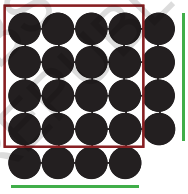
.....

इस प्रतिरूप की व्याख्या करने की अनेक विधियाँ हैं। आगे कुछ संभावनाएँ दी गई हैं—

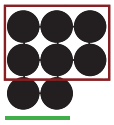
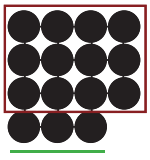
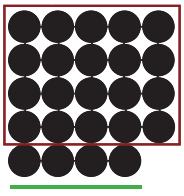
विधि 1

चरण 1	चरण 2	चरण 3	चरण 4	...	चरण k
				...	
$2^2 - 1$	$3^2 - 1$	$4^2 - 1$	$5^2 - 1$	...	$(k+1)^2 - 1$
$= (1+1)^2 - 1$	$= (2+1)^2 - 1$	$= (3+1)^2 - 1$	$= (4+1)^2 - 1$		

विधि 2

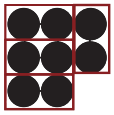
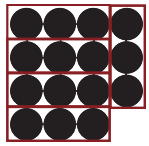
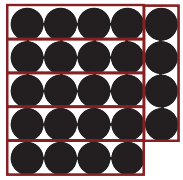
चरण 1	चरण 2	चरण 3	चरण 4	...	चरण k
				...	
$1 + 2 \times 1$	$2^2 + 2 \times 2$	$3^2 + 2 \times 3$	$4^2 + 2 \times 4$	...	$k^2 + 2 \times k$
$= 1^2 + 2 \times 1$	$= 2^2 + 2 \times 2$	$= 3^2 + 2 \times 3$	$= 4^2 + 2 \times 4$		

विधि 3

चरण 1	चरण 2	चरण 3	चरण 4	...	चरण k
				...	
$1 \times 2 + 1$	$2 \times 3 + 2$	$3 \times 4 + 3$	$4 \times 5 + 4$	...	$k \times (k+1) + k$
$= 1 \times (1+1) + 1$	$= 2 \times (2+1) + 2$	$= 3 \times (3+1) + 3$	$= 4 \times (4+1) + 4$		

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

विधि 4

चरण 1	चरण 2	चरण 3	चरण 4	...	चरण k
				...	
1×3	2×4	3×5	4×6	...	$k \times (k+2)$
$= 1 \times (1 + 2)$	$= 2 \times (2 + 2)$	$= 3 \times (3 + 2)$	$= 4 \times (4 + 2)$		

क्या आपकी विधि इनमें से किसी विधि के समान है अथवा यह भिन्न है? हमारे द्वारा पहचाना गया प्रत्येक व्यंजक भिन्न प्रतीत होता है परंतु क्या वे वास्तव में भिन्न हैं? चूँकि वे एक ही प्रतिरूप का वर्णन करते हैं अतः वे सभी समान होने चाहिए। आइए, प्रत्येक व्यंजक को हल करें और ज्ञात करें।

$(k+1)^2 - 1$	$k^2 + 2 \times k$	$k \times (k+1) + k$	$k \times (k+2)$
$= k^2 + 1 + 2k - 1$	$= k^2 + 2k$	$= k^2 + k + k$	$= k^2 + 2k$
$= k^2 + 2k$		$= k^2 + 2k$	

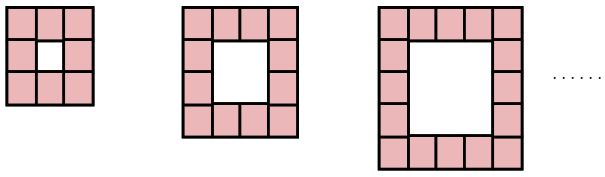
सही प्रकार से हल करने पर सभी विधियों से एक समान $k^2 + 2k$ उत्तर प्राप्त होता है। व्यंजक $k^2 + 2k$ इस प्रतिरूप के चरण k पर वृत्तों की संख्या को दर्शाता है।

गणित में किसी भी प्रतिरूप के अवलोकन के प्रायः अनेक प्रकार होते हैं और एक ही समस्या को समझने और हल करने के भी विभिन्न प्रकार होते हैं। ऐसी विधियाँ खोजने के लिए प्राय: अधिक रचनात्मकता और कल्पनाशीलता की आवश्यकता होती है। यद्यपि इनमें से एक या दो प्रकार ही आपके लिए रुचिपूर्ण हो सकते हैं परंतु अन्य प्रकारों को खोजना भी मनोरंजक और ज्ञानवर्धक हो सकता है।

? चरण 15 में वृत्तों की संख्या ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त सूत्र का उपयोग कीजिए।

? नीचे दिए गए चित्र में वर्गाकार टाइल्स से बने प्रतिरूप पर विचार कीजिए।

1 2 3



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

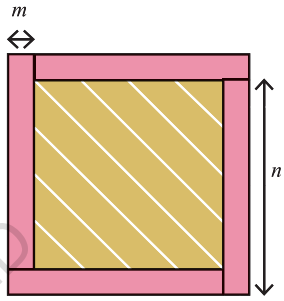
? प्रत्येक आकृति में कितनी वर्गाकार टाइल्स हैं?

? अनुक्रम के चरण 4 में कितनी वर्गाकार टाइल्स हैं? दसवें चरण में कितनी वर्गाकार टाइल्स हैं?

? चरण n में टाइल्स की संख्या के लिए एक बीजीय व्यंजक लिखिए। अपनी विधियाँ कक्षा में साझा कीजिए। क्या आप उत्तर प्राप्त करने की एक से अधिक विधियाँ खोज सकते हैं?

गणित चर्चा

? नीचे दी गई आकृति में छायांकित (आंतरिक) भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सभी 4 आयतों की विमाएँ समान हैं।



तडांग की विधि

कुल क्षेत्र एक वर्ग है जिसकी भुजा $(m + n)$ है और जिसका क्षेत्रफल $(m + n)^2$ है।

कुल क्षेत्रफल में से 4 आयतों का क्षेत्रफल घटाने पर आंतरिक छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल प्राप्त होगा जो $(m + n)^2 - 4mn$ है।

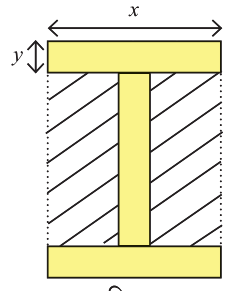
युसुफ की विधि

छायांकित क्षेत्र एक वर्ग है जिसकी भुजा की लंबाई $(n - m)$ है। अतः इसका क्षेत्रफल $(n - m)^2$ है।

? दोनों व्यंजकों का विस्तार करके जाँच कीजिए कि

$(m + n)^2 - 4mn = (n - m)^2$ है।

? आकृति में तिरछी रेखाओं वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यहाँ तीनों आयतों की भुजाएँ समान हैं (चित्र 1)।



चित्र 1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

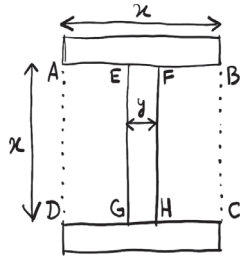
अनुषा की विधि

आवश्यक क्षेत्रफल = क्षेत्रफल (ABCD) – क्षेत्रफल (EFGH)

ABCD का क्षेत्रफल = x^2

EFGH का क्षेत्रफल = xy

आवश्यक क्षेत्रफल = $x^2 - xy$



वैष्णवी की विधि

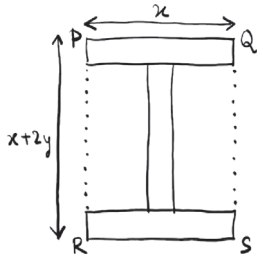
$$QS = y + x + y$$

$$= x + 2y$$

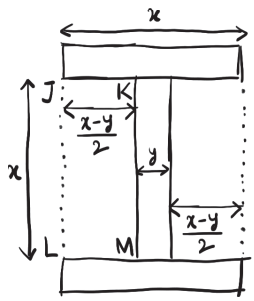
PQSR का क्षेत्रफल = $x\,(x + 2y)$

आवश्यक क्षेत्रफल = PQSR का क्षेत्रफल – (तीनों आयतों का क्षेत्रफल)

$$= x\,(x + 2y) - 3xy$$



आदित्य की विधि



आवश्यक क्षेत्रफल JKLM के क्षेत्रफल का 2 गुना है।

$$JK = \frac{x-y}{2},\ KM = x$$

$$\text{क्षेत्रफल (JKML)} = x\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

आवश्यक क्षेत्रफल = 2 × JKML का क्षेत्रफल

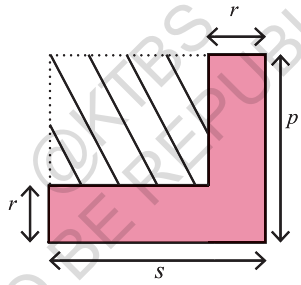
$$= 2x\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$= x\,(x-y)$$

? व्यंजकों को विस्तारित करके सत्यापित कीजिए कि तीनों व्यंजक समतुल्य हैं। यदि $x = 8$ और $y = 3$ हों तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

? दी गई आकृति में असतत रेखा अथवा बिंदीदार रेखा से घिरे भाग के क्षेत्रफल के लिए व्यंजक लिखिए। उत्तर प्राप्त करने के लिए एक से अधिक विधियों का उपयोग कीजिए। $p = 6$, $r = 3.5$ और $s = 9$ प्रतिस्थापित करके क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

गणित चर्चा



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? आइए, पता लगाएँ

1. सुझाई गई सर्वसमिका का उपयोग करके गुणनफलों की गणना कीजिए।
   (i) 46^2 का मान, $(a+b)^2$ के लिए सर्वसमिका 1A का उपयोग करते हुए
   (ii) 397×403 का मान, $(a+b)\,(a-b)$ के लिए सर्वसमिका 1C का उपयोग करते हुए
   (iii) 91^2 का मान, $(a-b)^2$ के लिए सर्वसमिका 1B का उपयोग करते हुए
   (iv) 43×45 का मान, $(a+b)(a-b)$ के लिए सर्वसमिका 1C का उपयोग करते हुए

2. निम्नलिखित प्रत्येक गुणनफल को ज्ञात करने के लिए उपयुक्त सर्वसमिका अथवा वितरण गुणधर्म का उपयोग कीजिए।
   (i) $(p-1)\,(p+11)$
   (ii) $(3a-9b)\,(3a+9b)$
   (iii) $-(2y+5)\,(3y+4)$
   (iv) $(6x+5y)^2$
   (v) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$
   (vi) $(7p) \times (3r) \times (p+2)$

3. प्रत्येक कथन के लिए उपयुक्त बीजीय व्यंजक या व्यंजकोंकी पहचान कीजिए।

(i) एक वर्ग संख्या से दो अधिक व्यंजक

$2 + s$ $(s + 2)^2$ $s^2 + 2$ $s^2 + 4$ $2s^2$ $2^2 s$

(ii) दो क्रमागत संख्या के वर्गों का योग

$m^2 + n^2$ $(m + n)^2$ $m^2 + 1$ $m^2 + (m + 1)^2$

$m^2 + (m - 1)^2$ $(m + (m + 1))^2$ $(2m)^2 + (2m + 1)^2$

4. किसी कालदर्शक में संख्याओं के 2 गुणा 2 वर्ग पर विचार कीजिए जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।

फरवरी						
रवि	**सोम**	**मंगल**	**बुध**	**गुरू**	**शुक्र**	**शनि**
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

प्रत्येक विकर्ण पर स्थित संख्याओं के गुणनफल ज्ञात कीजिए— $4 \times 12 = 48$, $5 \times 11 = 55$ ऐसा ही अन्य 2 गुणा 2 वर्गों के लिए कीजिए। विकर्णों के गुणनफल के विषय में आप क्या अवलोकित करते हैं? समझाइए कि ऐसा क्यों होता है।

गणित चर्चा

संकेत— प्रत्येक 2 गुणा 2 वर्ग में संख्याओं को इस प्रकार नामांकित कीजिए।

a	$(a + 1)$
$a + 7$	$(a + 8)$

5. सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं।

(i) $(K + 1)(K + 2) - (K + 3)$ का मान सदैव 2 होता है।

(ii) $(2q + 1)(2q - 3)$ का मान 4 का गुणज है।

(iii) सम संख्याओं के वर्ग 4 के गुणज होते हैं और विषम संख्याओं के वर्ग 8 के गुणजों से 1 अधिक होते हैं।

(iv) $(6n + 2)^2 - (4n + 3)^2$ का मान एक वर्ग संख्या से 5 कम होता है।

6. एक संख्या को 7 से भाग करने पर शेषफल 3 प्राप्त होता है और दूसरी संख्या को 7 से भाग करने पर शेषफल 5 प्राप्त होता है। इनके योग, अंतर और गुणनफल को 7 से भाग देने पर शेषफल क्या प्राप्त होगा?

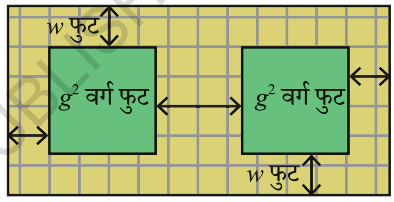
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7. तीन क्रमागत संख्याओं का चयन कीजिए। मध्य वाली संख्या का वर्ग कीजिए और शेष दो संख्याओं के गुणनफल को घटाइए। यही प्रक्रिया अन्य संख्याओं के समूहों के साथ भी दोहराइए। आपको कौन-सा प्रतिरूप दिखाई देता है? इसे बीजगणितीय समीकरण के रूप में किस प्रकार लिखेंगे? समीकरण के दोनों पक्षों का विस्तार करके जाँच कीजिए कि यह एक सही सर्वसमिका है।

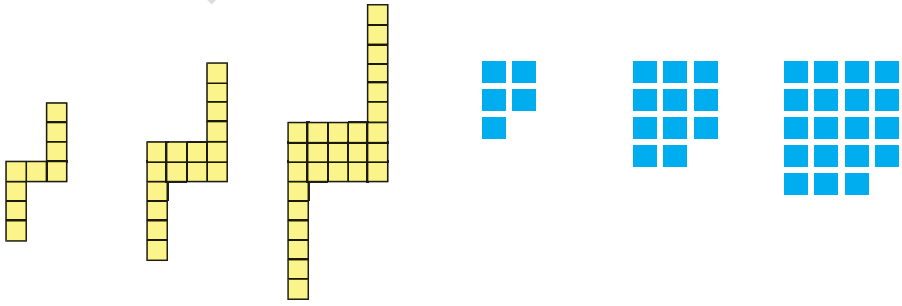
8. निम्नलिखित चरणों को दर्शाने वाला बीजीय व्यंजक क्या है?
किन्हीं दो संख्याओं को जोड़िए। इस योगफल को दोनों संख्याओं के योगफल के आधे से गुणा कीजिए। सिद्ध कीजिए कि यह परिणाम दोनों सख्याओं के योग के वर्ग का आधा होगा।

9. कौन-सा व्यंजक बड़ा है? गुणनफल की पूर्ण गणना किए बिना ज्ञात कीजिए।
   (i) 14×26 या 16×24
   (ii) 25×75 या 26×74

10. धौली में एक छोटा पार्क बनाया जा रहा है। इसकी योजना चित्र में दर्शाई गई है। दो वर्गाकार भूखंडों में जिनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल g^2 वर्ग फुट है, जहाँ हरियाली होगी। शेष संपूर्ण क्षेत्र (w फुट चौड़ा) एक पैदल मार्ग है जिस पर टाइल्स लगाने की आवश्यकता है। इस क्षेत्र के लिए एक व्यंजक लिखिए जिस पर टाइल्स लगाने की आवश्यकता है।



11. नीचे दर्शाए गए प्रत्येक प्रतिरूप के लिए—
   (i) अनुक्रम में अगली आकृति बनाइए।
   (ii) चरण 10 में कितनी मूल इकाइयाँ होंगी?
   (iii) चरण y में मूल इकाइयों की संख्या का वर्णन करने के लिए एक व्यंजक लिखिए।



NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- हमने वितरण गुणधर्म का विस्तार करके दो व्यंजकों जिनमें से प्रत्येक में दो पद हैं, का गुणनफल किया है। इसके लिए सामान्य समीकरण है $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$
- हमने उपर्युक्त सर्वसमिका के लिए कुछ विशेष स्थितियाँ देखी हैं।
  - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$
- हमने विभिन्न प्रतिरूपों पर विचार किया और बीजगणित का उपयोग करके इन्हें किस प्रकार समझा जाए, इस पर अन्वेषण किया। हमने देखा कि प्रायः किसी समस्या को हल करने और एक ही सही उत्तर पर पहुँचने की कई विधियाँ होती हैं। एक ही समस्या को विभिन्न विधियों से हल करना एक रचनात्मक प्रक्रिया है।

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पहेली का समय!

सिक्कों का एकत्रीकरण

नीचे बाईं ओर दी गई आकृति में दर्शाए अनुसार 10 सिक्कों को एक त्रिभुज में व्यवस्थित कीजिए। इसके पश्चात एक बार में एक सिक्के का स्थान परिवर्तित कर त्रिभुज को उल्टा (ऊपर से नीचे की ओर) करना है। इसके लिए कितनी चालें आवश्यक हैं? चालों की न्यूनतम संख्या क्या होगी?

3 सिक्कों के त्रिभुज को सिक्के की एक ही चाल से (ऊपर से नीचे) पलटा जा सकता है। और 6 सिक्कों के त्रिभुज को 2 सिक्कों के स्थान परिवर्तित करके पलटा जा सकता है।

10 सिक्कों वाले त्रिभुज को केवल 3 चालों में पलटा जा सकता है। क्या आपको पता चला कि यह कैसे हुआ? 15 सिक्कों वाले अगले बड़े त्रिभुज को पलटने के लिए न्यूनतम आवश्यक चालों का पता लगाइए। बड़ी त्रिभुजाकार संख्याओं के लिए भी यही प्रयास कीजिए।

क्या ऐसी किसी भी त्रिकोणीय व्यवस्था के लिए आवश्यक सिक्कों की चालों की न्यूनतम संख्या की गणना करने की कोई सरल विधि है?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7 समानुपातिक तर्कण-1

0875CH07

7.1 परिवर्तन में समानता का अवलोकन

हम नीचे दिए गए सभी डिजिटल चित्रों से परिचित हैं। प्राय: हमारी आवश्यकताओं के अनुरूप हम इन चित्रों का आकार और अभिविन्यास परिवर्तित करते रहते हैं। नीचे दिए गए चित्रों के समूह का अवलोकन कीजिए—

चित्र (क)

चित्र (ख)

चित्र (ग)

चित्र (घ)

चित्र (ङ)

हम देख सकते हैं कि सभी चित्रों के आकार भिन्न-भिन्न हैं।

? आपको उपर्युक्त चित्रों में से कौन-से चित्र एक समान और कौन-से भिन्न दिखाई दे रहे हैं?

अवलोकन के उपरांत चित्र (क, ग और घ) एक समान प्रतीत होते हैं जबकि उनके आकार भिन्न हैं।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? क्या चित्र 'ख' और 'ङ' अन्य तीन चित्रों के समान प्रतीत होते हैं?

नहीं, ये चित्र थोड़े विकृत हैं। चित्र 'ख' में बाघ लंबा दिखाई देता है और 'ङ' में संकुचित एवं मोटा!

? ऐसा क्यों?

गणित चर्चा

आप देख सकते हैं कि चित्र 'क', 'ग' और 'घ' आयताकार हैं परंतु 'ङ' वर्गाकार है। संभवत: इसी कारण से 'ङ' भिन्न आकार का प्रतीत होता है किंतु 'ख' भी आयताकार है।

यह अन्य आयताकार चित्रों से भिन्न क्यों दिखाई देता है?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए क्या हम आयतों को मापकर कोई प्रतिरूप देख सकते हैं?

चित्र	चौड़ाई (मिमी. में)	ऊँचाई (मिमी. में)
चित्र 'क'	60	40
चित्र 'ख'	40	20
चित्र 'ग'	30	20
चित्र 'घ'	90	60
चित्र 'ङ'	60	60

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? चित्र 'क', 'ग' और 'घ' एक समान क्यों दिखाई देते हैं? साथ ही 'ख' और 'ङ' भिन्न क्यों दिखते हैं?

जब हम चित्र 'क' की तुलना चित्र 'ग' के साथ करते हैं तो हमें ज्ञात होता है कि 'ग' की चौड़ाई एवं ऊँचाई 'क' से आधी है। चौड़ाई और ऊँचाई दोनों में **परिवर्तन एक समान गणक द्वारा** हुआ है। इस स्थिति में यह $\frac{1}{2}$ है। चूँकि चौड़ाई और ऊँचाई में एक समान गणक से परिवर्तन हुआ है, अत: **चित्र एक समान** दिखाई देते हैं।

जब हम चित्र 'क' की तुलना चित्र 'ख' के साथ करते हैं तो हमें ज्ञात होता हैं कि चित्र 'ख' की चौड़ाई चित्र 'क' से 20 मिलीमीटर कम है। 'ख' की ऊँचाई भी A की ऊँचाई से 20 मिलीमीटर कम है। यद्यपि अंतर (घटाव द्वारा) समान ही है तब भी चित्र भिन्न दिखाई देते हैं। क्या चौड़ाई और ऊँचाई में समान गणक से परिवर्तन हुआ है? 'ख' की ऊँचाई 'क' की ऊँचाई से आधी है, परंतु 'ख' की चौड़ाई 'क' की चौड़ाई से आधी नहीं है। चूँकि चौड़ाई और ऊँचाई में समान गणक से परिवर्तन नहीं है, अत: चित्र भिन्न दिखाई देते हैं।

? क्या आप बता सकते हैं कि चित्र 'घ' की चौड़ाई और ऊँचाई में चित्र 'क' की तुलना में किस गणक से परिवर्तन हुआ है? क्या गणक समान हैं?

चित्र 'क', 'ग' और 'घ' एक समान दिखाई देते हैं क्योंकि उनकी चौड़ाई और ऊँचाई में समान गणक से परिवर्तन है। अत: हम कह सकते हैं कि उनकी चौड़ाई और ऊँचाई में परिवर्तन **समानुपातिक** है।

7.2 अनुपात

गणित में समानुपातिक संबंधों को दर्शाने के लिए हम **अनुपात** की धारणा का उपयोग करते हैं।

हम कह सकते हैं कि चित्र 'क' की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात है— 60 : 40

संख्या 60 और 40 को इस अनुपात के **पद** कहते हैं।

चित्र 'ग' की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 30 : 20 है एवं चित्र 'घ' का अनुपात 90 : 60 है।

> यदि अनुपात $a : b$ के रूप में हो तो हम कह सकते हैं कि पहली मात्रा की प्रत्येक *'a'* इकाई के लिए दूसरी मात्रा की *'b'* इकाई होती हैं।

अत: चित्र 'क' में हम कह सकते हैं कि प्रत्येक 60 मिलीमीटर चौड़ाई के लिए 40 मिलीमीटर ऊँचाई होती है।

हम कह सकते हैं कि चित्र 'क', 'ग' और 'घ' की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात समानुपाती है क्योंकि इन अनुपातों के पदों में समान गणक में परिवर्तन होता है। आइए, देखते हैं कैसे—

चित्र 'क' — 60 : 40

दोनों पदों को $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$60 \times \frac{1}{2} : 40 \times \frac{1}{2}$$

जो कि 30 : 20 है। यह चित्र 'ग' में चौड़ाई से ऊँचाई का अनुपात है।

? 90 : 60 (चित्र 'घ') प्राप्त करने के लिए हमें अनुपात 60 : 40 (चित्र 'क') को किस गणक से गुणा करना चाहिए?

कोई अनुपात समानुपात है या नहीं यह तुलना करने के लिए एक व्यवस्थित विधि यह है कि उन्हें **सरलतम रूप** में परिवर्तित किया जाए। इसके साथ ही यह भी देखिए कि क्या यह सरलतम रूप एक समान है।

7.3 अपने सरलतम रूप में अनुपात

हम अनुपात के पदों को उनके महत्तम समापवर्तक (म.स.प.) से भाग देकर सरलतम रूप में परिवर्तित कर सकते हैं।

चित्र 'क' में पद 60 और 40 हैं। पद 60 और 40 का म.स.प. क्या है? 60 और 40 का म.स.प. 20 है। चित्र 'क' में पदों को 20 से भाग देने पर हमें 3 : 2 अनुपात प्राप्त होता है वह एक सरलतम रूप में है।

चित्र 'घ' का अनुपात 90 : 60 है। दोनों पदों को 30 (90 और 60 का म.स.प.) से विभाजित करने पर हमें सरलतम रूप 3 : 2 प्राप्त होता है। अत: चित्र 'क' और 'घ' के अनुपात समानुपाती हैं।

चित्र 'ख' और 'ङ' के अनुपातों का सरलतम रूप क्या है?

चित्र 'ख' का अनुपात 40 : 20 है, इसका सरलतम रूप 2 : 1 है।

चित्र 'ङ' का अनुपात 60 : 60 है, इसका सरलतम रूप 1 : 1 है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ये अनुपात 3 : 2 के समान नहीं है। अतः हम कह सकते हैं कि चित्र 'ख' और 'ङ' के चौड़ाई और ऊँचाई के अनुपात चित्र 'क', 'ग' और 'घ' के अनुपातों के समानुपाती नहीं हैं।

जब दो अनुपात उनके सरलतम रूप में समान होते हैं तब हम कह सकते हैं कि ये अनुपात **समानुपात** में हैं या अनुपात **समानुपातिक** हैं। यह अनुपात समानुपातिक हैं यह दर्शाने के लिए हम (::) चिह्न का प्रयोग करते हैं। अतः $a : b :: c : d$ दर्शाता है कि अनुपात $a : b$ और $c : d$ समानुपातिक हैं।

इस प्रकार

60 : 40 :: 30 : 20 और 60 : 40 :: 90 : 60

7.4 समानुपातिक तर्क के साथ समस्या समाधान

उदाहरण 1— क्या अनुपात 3 : 4 और 72 : 96 समानुपातिक हैं?

3 : 4 पहले से ही अपने सरलतम रूप में है।

72 : 96 का सरलतम रूप प्राप्त करने के लिए हमें दोनों पदों को उनके म.स.प. से भाग देने की आवश्यकता है।

72 और 96 का म.स.प. क्या है?

72 और 96 का म.स.प. 24 होता है। दोनों पदों को 24 से विभाजित करने पर हमें 3 : 4 प्राप्त होता है। चूँकि दोनों अनुपात उनके सरलतम रूप में एक समान हैं, अतः दिए गए अनुपात समानुपातिक हैं।

उदाहरण 2— केसांग एक उत्सव के लिए नींबू पानी बनाना चाहती थी। उसने एक पात्र में 6 गिलास नींबू पानी बनाया और उसमें 10 चम्मच चीनी मिला दी। उसके पिताजी को आशा थी कि उत्सव में और भी व्यक्ति उपस्थित हो सकते हैं। अतः पिताजी ने उसे 18 गिलास नींबू पानी और बनाने के लिए कहा।

केसांग को समान मिठास के नींबू पानी के घोल में कितनी चम्मच चीनी मिलानी चाहिए?

समान मिठास बनाए रखने के लिए नींबू पानी के गिलासों की संख्या तथा चीनी के चम्मचों की संख्या का अनुपात समानुपाती होना चाहिए। 6 गिलास नींबू पानी बनाने के लिए उसने 10 चम्मच चीनी ली थी। नींबू पानी के गिलासों और चीनी के चम्मचों का अनुपात 6 : 10 है। यदि उसे 18 गिलास और नींबू पानी बनाना है तो उसे कितने चम्मच चीनी का उपयोग करना चाहिए? इस समस्या को हम इस प्रकार लिख सकते हैं—

6 : 10 :: 18 : ?

हम जानते हैं कि अनुपात के समानुपातिक होने के लिए अनुपात में प्रत्येक पद को समान गणक से परिवर्तित करना होगा।

हम अनुपात में परिवर्तन का गणक कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

प्रथम पद में 6 से 18 की वृद्धि हुई है। परिवर्तन का गणक ज्ञात करने के लिए हम 18 को 6 से भाग देते हैं जिससे 3 प्राप्त होता है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

दूसरा पद भी उसी गणक से परिवर्तित होना चाहिए। जब 10 को गणक 3 से गुणा करके बढ़ाया जाता है तो यह 30 हो जाता है। इस प्रकार— 6 : 10 :: 18 : 30

अतः केसांग को पूर्व की भाँति समान मिठास वाले 18 गिलास नींबू पानी बनाने के लिए 30 चम्मच चीनी का उपयोग करना चाहिए।

उदाहरण 3— नितिन और हरी अपने घर के परिसर की दीवार बना रहे थे। नितिन 60 फुट लंबाई वाली लंबी दीवार बना रहा था और हरी 40 फुट लंबाई वाली छोटी दीवार बना रहा था। नितिन ने 3 थैले सीमेंट का उपयोग किया किंतु हरी ने मात्र 2 थैले सीमेंट का उपयोग किया। नितिन चिंतित था कि हरी ने जो दीवार बनाई है वह उतनी सुदृढ़ नहीं होगी जितनी सुदृढ़ दीवार उसने बनाई है क्योंकि हरी ने कम सीमेंट का उपयोग किया था।

क्या नितिन सही सोच रहा है?

इस स्थिति में हमें नितिन और हरी द्वारा बनाई दीवार की लंबाइयों और उनके द्वारा उपयोग किए गए सीमेंट के थैलों की संख्या के अनुपात की तुलना करनी चाहिए। इसके साथ ही समझना चाहिए कि क्या ये समानुपातिक हैं।

नितिन की स्थिति में अनुपात 60 : 3 अर्थात 20 : 1 (सरलतम रूप में)

हरी की स्थिति में अनुपात 40 : 2 अर्थात 20 : 1 (सरलतम रूप में)

चूँकि दोनों अनुपात समानुपातिक हैं अत: दोनों दीवारें समान रूप से सुदृढ़ हैं। नितिन को इस विषय में चिंता नहीं करनी चाहिए!

उदाहरण 4— मेरे विद्यालय में 5 शिक्षक और 170 विद्यार्थी हैं। यहाँ शिक्षकों और विद्यार्थियों का अनुपात 5 : 170 है। अपने विद्यालय में शिक्षकों और विद्यार्थियों की संख्या की गणना कीजिए और बताइए कि विद्यालय में शिक्षकों और विद्यार्थियों का अनुपात क्या है? इसे निम्न रिक्त स्थान पर लिखिए।

_____ : _____

क्या आपके विद्यालय के शिक्षक व विद्यार्थी का अनुपात मेरे विद्यालय के अनुपात के समानुपाती है?

उदाहरण 5— आपके कक्षा-कक्ष में श्यामपट्ट (ब्लेकबोर्ड) की चौड़ाई और ऊँचाई (निकटतम सेंटीमीटर तक) को मापिए। श्यामपट्ट की चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात क्या है?

_____ : _____

क्या आप अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक आयत बना सकते हैं जिसकी चौड़ाई और ऊँचाई श्यामपट्ट के अनुपात के समानुपाती हो?

आपके द्वारा बनाए गए आयत और आपके सहपाठियों द्वारा बनाए गए आयतों की परस्पर तुलना कीजिए। क्या ये सभी एक समान दिखाई देते हैं?

गणित चर्चा

शिक्षक हेतु टिप्पणी— इस प्रकार के कुछ और उदाहरण दीजिए जिनसे विद्यार्थी स्वयं को जोड़ सकें। साथ ही उनसे कारण बताने को कहिए कि उन्हें क्यों लगता है कि वे सही हैं। इन समस्याओं से जुड़ना और **समानुपातिक तर्क** की प्रक्रिया के माध्यम से हल ढूँढ़ना, सीखने की प्रक्रियाओं के साथ-साथ होना चाहिए।

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 6 — जब नीलिमा की आयु 3 वर्ष थी तब उसकी माताजी की आयु उससे 10 गुना थी। नीलिमा और उसकी माताजी की आयु का अनुपात क्या था? जब नीलिमा की आयु 12 वर्ष होगी तब उनकी आयु का अनुपात क्या होगा? क्या यह अनुपात एक समान रहेगा?

जब नीलिमा 3 वर्ष की है तब उसकी आयु और उसकी माताजी की आयु का अनुपात 3 : 30 (उसकी माताजी की आयु नीलिमा की आयु से 10 गुना) है। सरलतम रूप में यह 1:10 है।

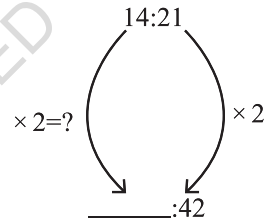
जब नीलिमा 12 वर्ष की होगी (अर्थात 9 वर्ष के पश्चात) उनकी आयु का अनुपात 12 : 39 (9 वर्ष पश्चात उसकी माताजी 39 वर्ष की होगी) होगा। सरलतम रूप में यह अनुपात 4 : 13 है।

जब हम किसी अनुपात के पदों में समान संख्या जोड़ते (या घटाते) हैं तब अनुपात परिवर्तित हो जाता है। इसके साथ ही यह आवश्यक नहीं है कि वह मूल अनुपात के समानुपाती हो।

उदाहरण 7— निम्नलिखित अनुपातों के लिए लुप्त संख्याएँ लिखिए जो 14 : 21 के समानुपाती हों।

____ : 42, 6 : ____, 2 : _____

पहले अनुपात में हमें प्रथम पद ज्ञात नहीं है किंतु द्वितीय पद 42 है। यह अनुपात 14 : 21 के दूसरे पद का दोगुना है। अत: प्रथम पद भी 14 (प्रथम पद) का दुगुना होना चाहिए। अत: समानुपातिक अनुपात 28 : 42 है।



दूसरे अनुपात के लिए प्रथम पद 6 है। 14 को किस गणक से गुणा करना चाहिए कि हमें 6 प्राप्त हो जाए। क्या यह एक पूर्णांक हो सकता है या यह एक भिन्न होना चाहिए?

इसे हम इस प्रकार लिखे सकते हैं $14y = 6$, अत: $y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

अत: हमें 21 (अनुपात 14 : 21 का दूसरा पद) को भी समान गणक $\frac{3}{7}$ से गुणा करने की आवश्यकता है।

$21 \times \frac{3}{7} = 9$ है। अत: अनुपात 6 : 9 है।

तीसरे अनुपात में प्रथम पद 2 है।

हम देख सकते हैं कि जब हम 14 (अनुपात 14 : 21 का प्रथम पद) को 7 (14 और 21 का म.स.प.) से विभाजित करते हैं तो हमें 2 प्राप्त होता है।

यदि हम 21 को भी 7 से विभाजित करते हैं तो हमें 3 प्राप्त होता है। अत: अनुपात 2 : 3 है।

फिल्टर कॉफी!

फिल्टर कॉफी एक पेय पदार्थ है जिसे कॉफी के घोल को दूध में मिलाकर इसे बनाया जाता है। मंजुनाथ सामान्यत: अपनी कॉफी की दुकान में एक कप फिल्टर कॉफी बनाने के लिए 15 मिलीलीटर कॉफी के घोल में 35 मिलीलीटर दूध मिलाकर मिश्रण तैयार करते हैं।

इस स्थिति में हम कह सकते हैं कि कॉफी के घोल और दूध का अनुपात 15 : 35 है।

यदि ग्राहक कड़क फिल्टर कॉफी पीना चाहता है तो मंजुनाथ 20 मिलीलीटर कॉफी के घोल में 30 मिलीलीटर दूध मिलाकर मिश्रण तैयार करता है। यह अनुपात 20 : 30 है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? यह कॉफी कड़क क्यों है?

गणित चर्चा

इसके साथ ही जब वे कम कड़क फिल्टर कॉफी पीना चाहते हैं तो वह 10 मिलीलीटर कॉफी और 40 मिलीलीटर दूध का मिश्रण तैयार करते हैं। यह अनुपात 10 : 40 है।

? यह कॉफी कम कड़क क्यों है?

गणित चर्चा

निम्नलिखित तालिका में मंजुनाथ द्वारा दूध के साथ कॉफी के घोल को मिलाने के विभिन्न अनुपात दर्शाए गए हैं। अंतिम स्तंभ में लिखिए कि कॉफी सामान्य कॉफी से अधिक कड़क है या कम कड़क।

कॉफी का घोल (मिली में)	दूध (मिली में)	सामान्य/कड़क/कम कड़क
300	600	
150	500	
200	400	
24	56	
100	300	

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

? आइए, पता लगाएँ

1. निम्नलिखित समानुपात के सही कथनों पर गोला बनाइए।

   (i) 4 : 7 :: 12 : 21 (ii) 8 : 3 :: 24 : 6

   (iii) 7 : 12 :: 12 : 7 (iv) 21 : 6 :: 35 : 10

   (v) 12 : 18 :: 28 : 12 (vi) 24 : 8 :: 9 : 3

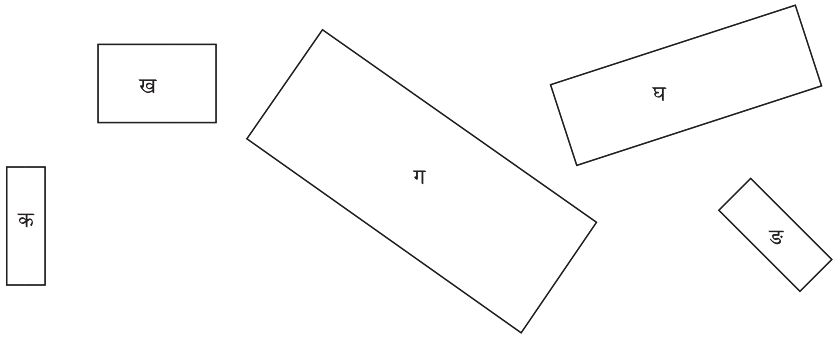
2. 4 : 9 के समानुपाती 3 अनुपात लिखिए।

   _____ : _____ _____ : _____ _____ : _____

3. दिए गए अनुपातों की लुप्त संख्याएँ लिखिए जो 18 : 24 के समानुपाती हैं।

   3 : _____ 12 : _____ 20 : _____ 27 : _____

4. दिए गए आयतों को देखिए। कौन-से आयत एक-दूसरे के समान हैं? आप एक पैमाने का उपयोग करके चौड़ाई और ऊँचाई को मापकर और उनके अनुपातों की तुलना करके इसे सत्यापित कर सकते हैं।



5. नीचे दिए गए आयत को देखिए। क्या आप अपनी अभ्यास पुस्तिका में समान चौड़ाई और ऊँचाई के अनुपात वाला एक छोटा आयत और एक बड़ा आयत बना सकते हैं? अपने आयतों की तुलना अपने सहपाठियों के चित्रों से कीजिए।

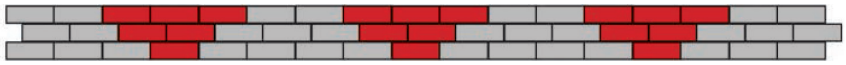
गणित चर्चा

क्या ये सभी समान हैं? यदि ये आपके चित्रों से भिन्न हैं तो आपके अनुसार ऐसा क्यों हैं? क्या वे त्रुटिपूर्ण हैं?

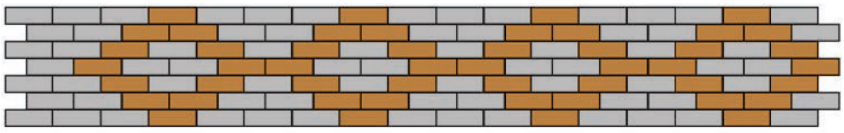
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6. नीचे दी गई आकृति रंगीन ईंटों से बने प्रतिरूप वाली एक लंबी ईंट की दीवार के एक छोटे भाग को दर्शाती है। दीवार के प्रत्येक भाग में यह प्रतिरूप निरंतर बना रहता है। आप बताइए कि भूरी ईंटों और रंगीन ईंटों का अनुपात क्या है? इस अनुपात को सरलतम रूप में लाने का प्रयास कीजिए।

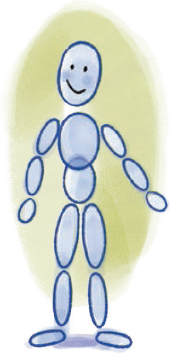
(क)



(ख)



7. आइए, कुछ मानव आकृतियाँ चित्रित करते हैं। आप अपने मित्र के शरीर की लंबाई मापिए, जैसे— उनके सिर, भुजाओं और पैरों की लंबाई। नीचे दिए गए अनुपातों को लिखिए।



सिर : धड़

_____ : _____

धड़ : भुजा

_____ : _____

धड़ : पैर

_____ : _____

उपर्युक्त अनुपात के अनुसार सिर, धड़, भुजाओं और पैरों के साथ एक आकृति बनाइए।

गणित चर्चा

? क्या अनुपात समानुपातिक होने पर चित्र अधिक वास्तविक प्रतीत होता है क्यों? क्यों नहीं?

शिक्षक हेतु टिप्पणी— इन सभी गतिविधियों में विद्यार्थियों को यह तर्क देने के लिए प्रोत्साहित कीजिए कि चित्र समानुपातिक क्यों हैं?

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

त्रैरासिका— तीन का नियम

? **उदाहरण 8**— 120 विद्यार्थियों वाले एक विद्यालय में मध्याह्न भोजन के लिए रसोइया 15 किलोग्राम चावल बनाता है। एक दिन वर्षा के कारण मात्र 80 विद्यार्थी विद्यालय में उपस्थित रहे। रसोइए को कितने किलोग्राम चावल बनाने चाहिए कि भोजन व्यर्थ ना जाए?

विद्यार्थियों की संख्या और चावल की मात्रा का अनुपात समानुपाती होना चाहिए।

अत: 120 : 15 :: 80 : ?

? प्रथम पद में परिवर्तन का गणक क्या है?

इसे प्रथम पदों को भाग देकर प्राप्त कर सकते हैं $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$

अत: विद्यार्थियों की संख्या $\frac{2}{3}$ गणक द्वारा कम हो जाती है।

चावल के भार के समान गणक से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$15 \times \frac{2}{3} = 10$$

अत: रसोइए को उस दिन 10 किलोग्राम चावल बनाने चाहिए।

उपर्युक्त स्थिति किसी समस्या का हल खोजने के लिए समानुपातिक तर्क का उपयोग करने का एक विशिष्ट उदाहरण है। चार राशियाँ समानुपातिक रूप से संबंधित हैं इनमें से तीन ज्ञात हैं और चौथी अज्ञात राशि हमें ज्ञात करनी है।

इस तरह की समस्याओं को हल करने के लिए हम दो समानुपातिक अनुपातों को बीजगणितीय रूप में निम्नानुसार लिख सकते हैं—

$$a : b :: c : d$$

हमें ज्ञात है कि दोनों अनुपातों के समानुपाती होने के लिए पद c पद a के एक गणक द्वारा गुणज होना चाहिए। माना कि गणक f है। इसी प्रकार पद d पद b का उसी गणक f द्वारा गुणज होना चाहिए। अत:,

$$c = fa \quad ...(1)$$
$$d = fb \quad ...(2)$$

(1) और (2) से हम कह सकते हैं कि

$$f = \frac{c}{a} \text{ और } f = \frac{d}{b}$$

$$\text{अत:, } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

दोनों ओर ab से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$ab \times \frac{c}{a} = ab \times \frac{d}{b}$$

$$\cancel{a}b \times \frac{c}{\cancel{a}} = a\cancel{b} \times \frac{d}{\cancel{b}}$$

$$bc = ad \text{ अथवा } ad = bc$$

इस प्रकार, जब $a : b :: c : d$, तब $ad = bc$ यह पदों का वज्र गुणन कहलाता है।

चूँकि $ad = bc$, अत: हम लिख सकते हैं

$$d = \frac{bc}{a}$$

यदि वज्र गुणन करने पर पद समान होते हैं तो दो अनुपात समानुपाती होते हैं। इस प्रकार के वज्र गुणन से चौथी अज्ञात राशि प्राप्त की जा सकती है।

प्राचीन भारत में आर्यभट्ट (199 सामान्य संवत्) एवं अन्य ने आनुपातिकता की ऐसी समस्याओं को 'तीन का नियम' समस्याएँ कहा था। इसमें 3 संख्याएँ दी गई थीं— *प्रमाण* (यहाँ यह *'a'* को इंगित करता है), *फल* (यहाँ यह *'b'* को इंगित करता है) और *इच्छा* (यहाँ यह *'c'* को इंगित करता है)। *इच्छाफल* (यहाँ यह *'d'* को इंगित करता है) को ज्ञात करने के लिए आर्यभट्ट कहते हैं, "*फल* को *इच्छा* से गुणा करें और परिणामी गुणनफल को *प्रमाण* से भाग दें।"

दूसरे शब्दों में आर्यभट्ट कहते हैं,

"प्रमाण : फल :: इच्छा : इच्छाफल"

अत: प्रमाण × इच्छाफल = फल × इच्छा

इस प्रकार

$$\text{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा}}{\text{प्रमाण}}$$

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

आर्यभट्ट द्वारा प्रस्तावित वज्र गुणन विधि का उपयोग कर प्राचीन भारतीयों ने समानुपातिकता से संबंधित जटिल समस्याओं को हल किया है।

उदाहरण 9— एक कार 150 मिनट में 90 किलोमीटर दूरी तय करती है। यदि वह इसी गति से चलती रहे तो 4 घंटे में वह कितनी दूरी तय करेगी?

यदि यह समान गति से चलती रहे तो लिए गए समय का अनुपात तय की गई दूरी के अनुपात के समानुपाती होना चाहिए।

$$150 : 90 :: 4 : ?$$

क्या यह प्रश्न निर्माण की सही विधि है?

नहीं, क्योंकि संख्या 150 मिनट में है किंतु संख्या 4 घंटों में है। दूसरे अनुपात में समय के लिए प्रथम अनुपात के समान इकाई का उपयोग किया जाना चाहिए। चूँकि 4 घंटे, 240 मिनट के समान हैं। अत: सही रूप इस प्रकार है

$$150 : 90 :: 240 : ?$$

आप 240 मिनट में तय की गई दूरी कैसे ज्ञात कर सकते हैं?

अपने सहपाठियों के साथ चर्चा कीजिए और विभिन्न युक्तियों का उपयोग कर उत्तर ज्ञात कीजिए।

शिक्षक हेतु टिप्पणी — दूरी की समस्या को हल करने हेतु एक 'विधि' बताने के अतिरिक्त विद्यार्थियों को विभिन्न युक्तियों के माध्यम से उत्तर खोजने के लिए प्रोत्साहित कीजिए। विद्यार्थी समतुल्य भिन्नों और समतुल्य अनुपात की अपनी समझ का उपयोग उत्तर प्राप्त करने में कर सकते हैं।

© CBSE NOT TO BE REPUBLISHED

उपर्युक्त समानुपात को हम इस रूप में लिख सकते हैं

$$150 : 90 :: 240 : x$$

वज्र गुणन से हमें प्राप्त होता है

$$150 \times x = 240 \times 90$$

$$x = \frac{240 \times 90}{150}$$

$$= \frac{\cancel{240}^{48} \times \cancel{90}^{3}}{\cancel{150}_{\cancel{5}_{1}}} = 144$$

अत: कार द्वारा 4 घंटे में तय की गई दूरी 144 किलोमीटर है।

उदाहरण 10— हिमाचल प्रदेश में एक किसान 200 ग्राम चाय पैकेट को ₹200 में बेचता है। मेघालय में एक बड़ा किसान 1 किलोग्राम चाय को ₹800 में बेचता है। क्या दोनों स्थानों के भार और मूल्य के अनुपात समानुपाती हैं? बताइए कौन-सी चाय अपेक्षाकृत मूल्यवान (महंगी) है?

हिमाचल की चाय के भार और मूल्य का अनुपात 200 : 200

मेघालय की चाय के भार और मूल्य का अनुपात क्या है? क्या यह 1 : 800 है?

नहीं, यह उपयुक्त नहीं होगा क्योंकि हम हिमाचल की स्थिति में भार को ग्राम में मान रहे हैं। अत: मेघालय की स्थिति में चाय के भार को ग्राम में परिवर्तित करने के पश्चात भार और मूल्य का अनुपात 1000 : 800 होगा।

दिए गए अनुपात समानुपाती हैं या नहीं यह सत्यापित करने के लिए हमें यह देखने की आवश्यकता है कि क्या ये दोनों अनुपात उनके सरलतम रूप में एक समान हैं?

हिमाचल की चाय के भार और मूल्य का अनुपात सरलतम रूप में 1 : 1 है।

मेघालय की चाय के भार और मूल्य का अनुपात सरलतम रूप में 5 : 4 है।

अत: ये अनुपात समानुपाती नहीं है।

? बताइए कि दोनों में से कौन-सी चाय अधिक मूल्यवान है? क्यों?

शिक्षक हेतु टिप्पणी — कक्षा को अधिक मूल्यवान चाय पर चर्चा करने हेतु प्रोत्साहित कीजिए। विद्यार्थियों से पूछिए कि वे इस निष्कर्ष पर कैसे पहुँचे और उस चाय के अधिक मूल्यवान होने के क्या कारण हो सकते हैं?

कौन-सी चाय अधिक मूल्यवान है इसका उत्तर देने के लिए हमें दोनों स्थानों में समान भार के लिए चाय के मूल्य की परस्पर तुलना करनी चाहिए।

मेघालय में 1 किलोग्राम चाय का मूल्य क्या है? यह ₹ 800 है।

हिमाचल में यदि 200 ग्राम चाय का मूल्य ₹ 200 है तो 1 किलोग्राम चाय का मूल्य कितना होगा?

माना कि 1 किलोग्राम चाय का मूल्य x रूपये है। 200 ग्राम, 1 किलोग्राम का 1/5 है।

अत: $\frac{1}{5} \times x = 200$

दोनों ओर 5 से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{1}{5} \times x \times 5 = 200 \times 5$$

$$\frac{1}{\cancel{5}} \times x \times \cancel{5} = 1000$$

$$x = 1000$$

अत: मेघालय में 1 किलोग्राम चाय का मूल्य ₹ 800 है और हिमाचल में यही मूल्य ₹ 1000 है। अत: हिमाचल की चाय अधिक मूल्यवान है।

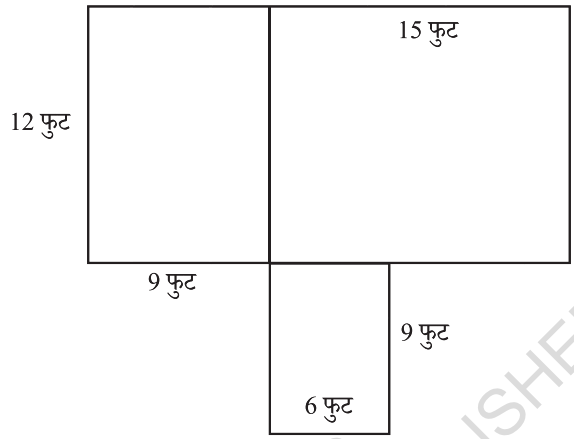
गतिविधि 1— अपनी रुचि के अनुसार किसी एक व्यंजन का चयन कीजिए। अपने परिवार हेतु यह व्यंजन बनाने के लिए इसकी सभी सामग्री और आवश्यक मात्रा ज्ञात कीजिए। मान लीजिए आप कोई उत्सव मना रहे हैं और आप 15 अतिथियों को आमंत्रित करना चाहते हैं। अतिथियों हेतु इसी व्यंजन को बनाने में उपयोग होने वाली सामग्री की मात्रा ज्ञात कीजिए।

? आइए, पता लगाएँ—

1. पृथ्वी 1 वर्ष में सूर्य के चारों ओर लगभग 940 मिलियन किलोमीटर की दूरी तय करती है। वह एक सप्ताह में कितने किलोमीटर की दूरी तय करेगी?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

2. एक राजमिस्त्री चित्र में दर्शाए गए आकार में एक घर बना रहा है। उसे ऐसी बाहरी और भीतरी दीवारों का निर्माण करना है, जो दो कक्षों को पृथक करती हैं। उसे एक 10 फुट की दीवार बनाने के लिए लगभग 1450 ईंटों की आवश्यकता है। बताइए कि उसे घर बनाने के लिए कुल कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी? माना कि सभी दीवारें समान ऊँचाई और मोटाई की हैं।



? पुनीत के पिताजी 50 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से मोटरसाइकिल चलाकर दो घंटे में लखनऊ से कानपुर पहुँचते हैं। यदि वे 75 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से मोटरसाइकिल चलाते हैं तो उन्हें कानपुर पहुँचने में कितना समय लगेगा? क्या हम इस समस्या को समानुपात के रूप में दर्शा सकते हैं—

गणित चर्चा

$$50 : 2 :: 75 : ___$$

पुनीत के पिताजी को कानपुर पहुँचने में अधिक समय लगेगा या कम? इस विषय पर ध्यान दीजिए।

यद्यपि यह समस्या पिछली समस्याओं की तरह ही प्रतीत होती है परंतु इसे तीन के नियम का उपयोग कर हल नहीं किया जा सकता है।

गति में वृद्धि होने के परिणामस्वरूप यात्रा का समय कम हो जाएगा। अत: इस समस्या को $50 : 2 :: 75 : ___$ के रूप में नहीं दर्शाया जा सकता।

? **गतिविधि 2**— बाजार जाकर एक ही शैंपू के भिन्न-भिन्न आकार के पात्र, जैसे— कोष्ठ (पाउच), छोटी बोतल, मध्यम बोतल, बड़ी बोतल के मूल्य की जानकारी एकत्रित कीजिए और नीचे दिए अनुसार एक तालिका बनाइए। पता लगाइए कि शैंपू का आयतन मूल्य के समानुपाती है या नहीं।

पात्र	आयतन	मूल्य
कोष्ठ (पाउच)	6 मिलीलीटर	₹2
छोटी बोतल	180 मिलीलीटर	₹154
मध्यम बोतल	340 मिलीलीटर	₹276
बड़ी बोतल	1000 मिलीलीटर	₹540

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, इस प्रतिदर्श सारणी के अनुपातों की तुलना करते हैं।

शैंपू के कोष्ठ और छोटी बोतल के आयतन का अनुपात 6 : 180 है। उनके मूल्यों का अनुपात 2 : 154 है। क्या ये अनुपात समानुपाती हैं?

? आपके विचार से ऐसा क्यों है कि मूल्यों का अनुपात और आयतनों का अनुपात समानुपाती नहीं हैं?

गणित चर्चा

कंपनी और ग्राहकों के लिए भिन्न-भिन्न आकार की बोतलों के लाभ और हानि पर चर्चा कीजिए। पारिस्थितिक पदचिह्न कम करने के लिए आप ग्राहक और कंपनी को क्या सुझाव देंगे? क्या अन्य उत्पादों के लिए भी यही बात लागू होती है?

बाजार में उपलब्ध अन्य उत्पादों के लिए भी ऐसी ही तालिका बनाइए जिसमें एक उत्पाद के विभिन्न मापों के लिए भिन्न-भिन्न मूल्य सम्मिलित हों, जैसे— चावल या आटा।

ऐसे उत्पादों का अवलोकन कीजिए जिनके मूल्य उनके विभिन्न मापों के समानुपातिक हैं।

कक्षा में एक ही उत्पाद के मापों और उनके लिए मूल्यों की समानुपातिकता पर चर्चा कीजिए।

शिक्षक हेतु टिप्पणी — विद्यार्थियों को एक परियोजना कार्य दीजिए। यह कार्य कक्षा को समूहों में विभाजित करके प्रारंभ कीजिए। प्रत्येक समूह एक दुकान पर किसी एक उत्पाद के विभिन्न मापों के मूल्य एकत्रित करेगा। उदाहरण के लिए उन्हें 500 ग्राम चावल, 1 किलोग्राम चावल तथा 10 किलोग्राम चावल के मूल्य अंकित करने चाहिए। विद्यार्थियों को मापों और मूल्यों की तालिका बनाकर कक्षा में अन्य सहपाठियों के सामने प्रस्तुत करना चाहिए। साथ ही विद्यार्थियों को इस बात पर भी चर्चा करनी चाहिए कि क्या मूल्य समानुपाती हैं या नहीं? और ऐसा क्यों?

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7.5 साझा कीजिए परंतु समान रूप से नहीं!

? **गतिविधि 3**— एक युग्म बनाइए। गणना योग्य 12 वस्तुएँ या गणक लीजिए। ये काउंटर्स, ये सिक्के, बीज या कंकड़ भी हो सकते हैं। अब आप दोनों इन्हें आपस में भिन्न प्रकार से बाँट लीजिए।

? यदि आप इन्हें समान रूप में बाँट लेते हैं तो आप में से प्रत्येक के पास उपलब्ध गणना योग्य वस्तुओं की संख्या का अनुपात क्या होगा?

आप में से प्रत्येक को 6 गणक प्राप्त होंगे। अत: अनुपात 6 : 6 या सरलतम रूप में 1 : 1 होगा।

आइए, हम समान रूप से साझा नहीं करते हैं।

? यदि आपके साथी को 5 गणक मिलते हैं तो आपको कितने गणक प्राप्त होंगे? बताइए कि गणक प्राप्ति का क्या अनुपात होगा?

आपके साथी का गणक अनुपात 5:7 है।

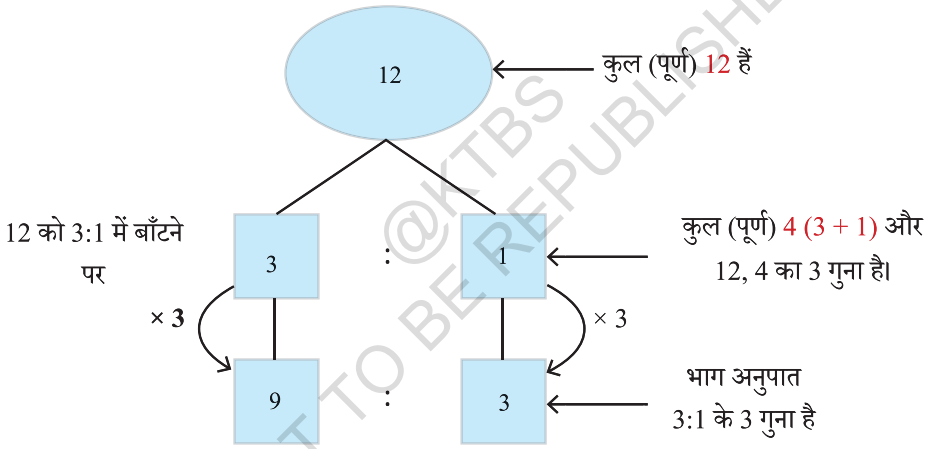
? अब यदि आप दोनों आपस में 3 : 1 के अनुपात में गणक बाँटना चाहते हैं तो आप में से प्रत्येक को कितने गणक प्राप्त होंगे?

विभिन्न प्रकार से गणकों को बाँटिए और देखिए कि कौन-सा युग्म 3 : 1 के अनुपात में है। गणकों को 3 : 1 में वितरण करने की एक विधि निम्नानुसार है—

1. आपका साथी 3 गणक लेता है और आप 1 गणक लेते हैं। तब 8 गणक शेष बचते हैं।
2. आपका साथी 3 और गणक लेता है और आप 1 और गणक लेते हैं। तब 4 गणक शेष बचते हैं।
3. आपका साथी 3 और गणक लेता है और आप 1 गणक लेते हैं। तब कोई गणक शेष नहीं रहता है।

अत: आपके साथी ने कुल 9 गणक प्राप्त किए और आपने 3 गणक प्राप्त किए हैं।

जब हम दो व्यक्तियों में 12 गणकों को 3 : 1 के अनुपात में बाँटते हैं तो पहला व्यक्ति 9 गणक प्राप्त करता है और दूसरा व्यक्ति 3 गणक प्राप्त करता है।



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? अब यदि आप दोनों व्यक्तियों में 42 गणकों को 4 : 3 के अनुपात में बाँटना चाहते हैं तो आप इसे किस प्रकार बाँटेंगे?

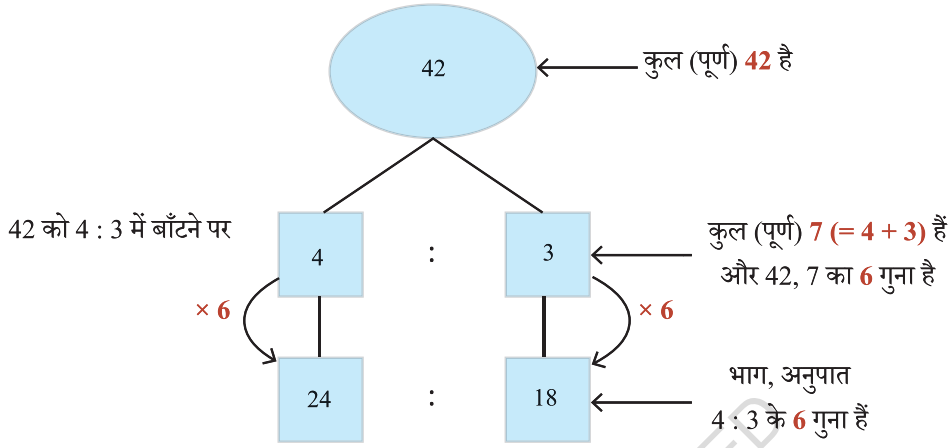
उक्त प्रक्रिया का उपयोग करने पर अधिक समय व्यतीत होगा। एक निर्दिष्ट अनुपात में 'संपूर्ण को भागों' में बाँटने की एक सरलतम विधि उपलब्ध है।

आपको 42 को समूहों में इस प्रकार बाँटना है कि आपके साथी को 4 समूह प्राप्त हों तथा आपको 3 समूह प्राप्त हों।

? प्रत्येक समूह का आकार क्या है?

यदि आपके साथी को 4 समूह प्राप्त होते हैं और आपको 3 समूह प्राप्त होते हैं तो इस प्रकार समूहों की कुल संख्या 7 है। अत: प्रत्येक समूह का आकार $42 \div 7 = 6$ होगा।

जब आप 42 गणकों को 4 : 3 के अनुपात में बाँटते हैं तब समूहों की संख्या को प्रत्येक समूह के आकार से गुणा करने पर आपके साथी को 24 गणक एवं आपको 18 गणक प्राप्त होते हैं।



सामान्यत: जब हम किसी राशि, मान लीजिए x को $m : n$ के अनुपात में बाँटना चाहते हैं तो हम निम्न प्रकार से कर सकते हैं—

1. हमें x को समूहों में बाँटने की आवश्यकता है जिससे इसे दो भागों में इस प्रकार बाँटा जा सके कि पहले भाग में m समूह हों और दूसरे भाग में n समूह हों।
2. परंतु प्रत्येक समूह का आकार क्या है? इसे x को समूहों की संख्या में भाग देकर ज्ञात किया जा सकता है। समूहों की संख्या $m + n$ है। अत: प्रत्येक समूह का आकार $\frac{x}{m+n}$ है।
3. अत: प्रथम भाग में $m \times \frac{x}{m+n}$ वस्तुएँ तथा दूसरे भाग में $n \times \frac{x}{m+n}$ वस्तुएँ हैं।

इस प्रकार यदि हम किसी एक राशि x को $m : n$ में बाँटना चाहते हैं तो उसके भाग $m \times \frac{x}{m+n}$ तथा $n \times \frac{x}{m+n}$ होंगे। हम देखते हैं कि

$$m \times \frac{x}{m+n} : n \times \frac{x}{m+n} :: m : n$$

उदाहरण 11— प्रशांति तथा भुवन ने अपने विद्यालय के समीप स्टेशनरी का व्यापार प्रारंभ किया। प्रशांति ने ₹ 75000 तथा भुवन ने ₹ 25000 का निवेश किया। पहले माह के अंत में उन्हें ₹ 4000 का लाभ हुआ। उन्होंने निर्णय लिया कि जिस अनुपात में निवेश किया है उसी अनुपात में हम लाभ को बाँट लेंगे। बताइए कि प्रत्येक व्यक्ति का लाभांश कितना है?

उनके निवेश का अनुपात 75000 : 25000 है।
इस अनुपात को सरलतम रूप में परिवर्तित करने पर हमें 3 : 1 प्राप्त होता है।
3+1 = 4 और ₹ 4000 लाभ को 4 से विभाजित करने पर ₹ 1000 प्राप्त होता है।
प्रशांति का भाग 3 × 1000 व भुवन का भाग 1 × 1000 है।
अत: प्रशांति ने लाभांश ₹ 3000 तथा भुवन ने ₹ 1000 प्राप्त किए।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 12— एक 40 किलोग्राम मिश्रण में रेत तथा सीमेंट का अनुपात 3 : 1 है। रेत और सीमेंट का अनुपात 5 : 2 करने के लिए मिश्रण में सीमेंट की कितनी और मात्रा का उपयोग करना चाहिए?

आइए, मूल मिश्रण में रेत और सीमेंट की मात्रा ज्ञात करें।

अनुपात 3 : 1 है और कुल भार 40 किलोग्राम है।

अत: रेत का भार $\frac{3}{(3+1)} \times 40 = 30$ किलोग्राम है।

सीमेंट का भार $\frac{1}{(3+1)} \times 40 = 10$ किलोग्राम है।

रेत का भार नए मिश्रण में भी पूर्व की भाँति 30 किलोग्राम ही रहता है परंतु अब रेत और सीमेंट का नया अनुपात 5 : 2 है तो प्रश्न यह है—

$$5 : 2 :: 30 : ?$$

यदि अनुपात 5 : 2 है तो दूसरा पद पहले पद का $\frac{2}{5}$ गुना होगा। चूँकि नया अनुपात 5 : 2 है इसलिए नए अनुपात में दूसरा पद भी 30 का $\frac{2}{5}$ गुना होना चाहिए।

$$\frac{2}{5} \times 30 = 12$$

यदि रेत और सीमेंट का अनुपात 5 : 2 है तो नए मिश्रण में 12 किलोग्राम सीमेंट होना चाहिए।

मिश्रण में 10 किलोग्राम सीमेंट पहले से ही है। हमें मूल मिश्रण में 2 किलोग्राम सीमेंट का और उपयोग करना चाहिए।

आइए, पता लगाएँ

1. ₹4,500 को 2 : 3 के अनुपात में दो भागों में विभाजित कीजिए।
2. एक विज्ञान की प्रयोगशाला में अम्ल और जल को 1 : 5 की मात्रा में मिलाकर एक विलयन तैयार किया जाता है। 240 मिलीलीटर विलयन वाले एक पात्र में अम्ल और जल की कितनी मात्रा होगी?
3. हरा रंग बनाने के लिए नीले और पीले रंग का 3 : 5 के अनुपात में एक मिश्रण तैयार किया गया है। 40 मिलीलीटर हरा रंग बनाने के लिए दोनों रंगों की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी? हरे रंग को कुछ हल्का बनाने के लिए मैंने मिश्रण में 20 मिलीलीटर पीला रंग मिलाया। बताइए कि इस रंग में नीले और पीले रंग का नया अनुपात क्या है?
4. नरम इडली बनाने के लिए आपको चावल और उड़द दाल को 2 : 1 में मिलाना होगा। यदि आपको कल सुबह इडली बनाने के लिए इस मिश्रण के 6 कप चाहिए तो आपको कितने कप चावल और उड़द दाल की आवश्यकता होगी?
5. मेरे पास एक नारंगी रंगलेप (पेंट) से भरी हुई बाल्टी है। इस रंगलेप को 3 : 5 की मात्रा से लाल और पीले रंग को मिलाकर बनाया गया है। मैंने इस मिश्रण में पीले रंगलेप की एक और बाल्टी मिला दी। इस मिश्रण में लाल रंगलेप और पीले रंगलेप की मात्रा का नया अनुपात क्या होगा?

7.6 इकाई रूपांतरण

हमने पहले देखा कि समानुपात से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए प्राय: हमें इकाइयों को

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

एक प्रणाली से दूसरी प्रणाली में परिवर्तित करना होता है। आपके संदर्भ के लिए यहाँ कुछ इकाई रूपांतरण दिए गए हैं।

लंबाई

1 मीटर = 3.281 फुट

क्षेत्रफल

1 वर्ग मीटर = 10.764 वर्गफुट

1 एकड़ = 43,560 वर्गफुट

1 हेक्टेयर = 10,000 वर्गमीटर

1 हेक्टेयर = 2.471 एकड़

आयतन

1 मिलीलीटर = 1 घन सेंटीमीटर

1 लीटर = 1000 मिलीलीटर या 1000 घन सेंटीमीटर

तापमान

फारेनहाइट और सेल्सियस के मध्य तापमान रूपांतरण

0° सेल्सियस = 32° फारेनहाइट

और

$$\text{फारेनहाइट} = \frac{9}{5} \times \text{सेल्सियस} + 32$$

अथवा

$$\text{सेल्सियस} = \frac{5}{9} \times (\text{फारेनहाइट} - 32)$$

उदाहरण के लिए 25° सेल्सियस, 77° फारेनहाइट है।

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आइए, पता लगाएँ

1. अनघ 600 मिलीलीटर संतरे के रस को 900 मिलीलीटर सेब के रस के साथ मिलाकर फलों का रस तैयार करता है। संतरे के रस और सेब के रस का अनुपात सरलतम रूप में लिखिए।
2. विगत वर्ष हमने शैक्षिक भ्रमण हेतु 3 बसें किराए पर ली थी। उस भ्रमण पर कुल 162 विद्यार्थी और शिक्षक थे। बसों की सभी सीटें भरी हुई थी। इस वर्ष हमारे पास विद्यार्थियों की संख्या 204 हैं। हमें कितनी बसों की आवश्यकता होगी? क्या सभी बसें भरी होंगी?
3. दिल्ली का क्षेत्रफल 1484 वर्ग किलोमीटर और मुंबई का क्षेत्रफल 550 वर्ग किलोमीटर है। दिल्ली की जनसंख्या लगभग 3 करोड़ और मुंबई की 2 करोड़ है। कौन-सा शहर अधिक जनसंख्या वाला है? यह आपने कैसे ज्ञात किया?
4. 155 सेंटीमीटर ऊँचाई वाले एक सारस की गर्दन और शेष शरीर का अनुपात 4 : 6 है। आपकी ऊँचाई के लिए यदि आपकी गर्दन और शेष शरीर का अनुपात भी यही हो तो आपकी गर्दन कितनी लंबी होगी?

5. आइए, *लीलावती* ग्रंथ की एक प्राचीन समस्या हल करें। प्राचीन समय में भार को *पलास* नामक इकाई में मापा जाता था और मुद्रा की इकाई *निष्कस* होती थी। "यदि $2\frac{1}{2}$ *पलास* केसर का मूल्य $\frac{3}{7}$ *निष्कस* हो तो अरे विद्वान व्यापारी! मुझे शीघ्रता से बताइए कि 9 *निष्कस* में केसर की कितनी मात्रा का विक्रय किया जा सकता है?"
6. हरमन एक बालिका है और उसकी आयु 1 वर्ष है। हरमन के बड़े भाई की आयु 5 वर्ष है। बताइए कि जब हरमन और उसके भाई की आयु का अनुपात 1 : 2 हो तब हरमन की आयु क्या होगी?
7. सोने और पानी के समान आयतन का द्रव्यमान 37 : 2 के अनुपात में है। यदि 1 लीटर पानी का द्रव्यमान 1 किलोग्राम है तो 1 लीटर सोने का द्रव्यमान कितना होगा?
8. एक एकड़ भूमि के लिए 10 टन गोबर की खाद का उपयोग करना एक अच्छी कृषि पद्धति मानी जाती है। एक कृषक 200 फुट लंबाई × 500 फुट चौड़ाई के आकार के एक भूखंड में टमाटर उगाने की योजना बना रहा है। उसे गोबर खाद की कितनी मात्रा आवश्यक होगी? (कृपया इस अध्याय के पूर्व खंड में वर्णित इकाई रूपांतरण वाले भाग को देखिए)।
9. एक नल एक मग पानी भरने में 15 सेकंड का समय लेता है। मग का आयतन 500 मिलीलीटर है। यदि बाल्टी की क्षमता 10 लीटर है तो वही नल एक बाल्टी पानी भरने में कितना समय लेगा?
10. एक एकड़ भूमि का मूल्य ₹ 15,00,000 है। बताइए कि उसी भूमि के 2400 वर्गफुट भूखंड का मूल्य क्या होगा?
11. एक खेत को एक ट्रैक्टर 1 जोड़ी बैलों की अपेक्षा तीव्र गति से जोत सकता है। एक कृषक अपने 20 एकड़ खेत की जुताई करना चाहता है। बैलों की एक जोड़ी को एक एकड़ जमीन जोतने में 6 घंटे का समय लगता है। यदि किसान बैलों की जोड़ी से खेत जोतता है तो बताइए कि उसे कितना समय लगेगा?
12. ₹ 10 का सिक्का ताँबे और निकल की एक मिश्रधातु 'क्यूप्रो-निकल' से निर्मित है। इस मिश्रधातु को ताँबे और निकल की 3 : 1 की मात्रा से मिलाकर प्राप्त किया जाता है। सिक्के का द्रव्यमान 7.74 ग्राम है। यदि ताँबे का मूल्य ₹ 906 प्रति किलोग्राम तथा निकल का मूल्य ₹ 1341 प्रति किलोग्राम है तो ₹ 10 के सिक्के में इन धातुओं का मूल्य क्या होगा?

प्रयास कीजिए

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

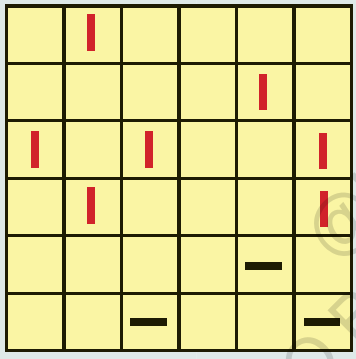
सारांश

- $a : b$ के रूप में अनुपात यह दर्शाते हैं कि पहली राशि की प्रत्येक 'a' इकाई के लिए दूसरी मात्रा की 'b' इकाइयाँ हैं। 'a' और 'b' अनुपात में पद हैं।
- दो अनुपात — $a : b$ और $c : d$ — **समानुपातिक** होते हैं ($a : b :: c : d$ के रूप में लिखा जाता है) यदि उनके पदों में समान गणक से परिवर्तन होता है, अर्थात $ad = bc$
- यदि x को $m : n$ के अनुपात में दो भागों में विभाजित किया जाए तो पहले भाग की राशि होगी $m \times \frac{x}{m+n}$ तथा दूसरे भाग की $n \times \frac{x}{m+n}$ होगी।

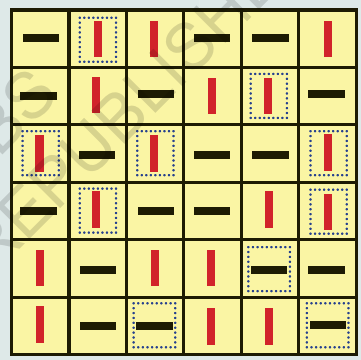
बिनौरो

बिनौरो सरल नियमों वाली एक तर्क पहेली है जिसे ताकुजू भी कहा जाता है। बिनौरो प्राय: एक वर्गाकार जाल पर खेला जाता है। इसका कोई विशेष आकार नहीं होता है। कुछ प्रकोष्ठ (बॉक्स) आरंभ में दो प्रतीकों से भरे हैं जो यहाँ क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ हैं। शेष प्रकोष्ठ रिक्त हैं। प्रकोष्ठ इस प्रकार भरते हैं कि —

1. प्रत्येक पंक्ति और प्रत्येक स्तंभ में समान संख्या में क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाएँ होनी चाहिए।
2. दो से अधिक क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रेखाएँ एक-दूसरे के समीप नहीं हो सकती।
3. प्रत्येक पंक्ति अद्वितीय हो तथा प्रत्येक स्तंभ अद्वितीय हो।



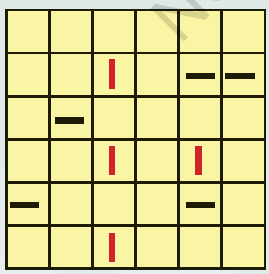
पहेली

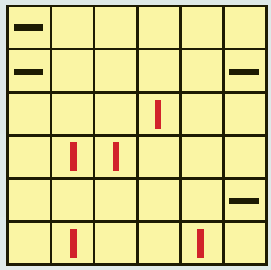


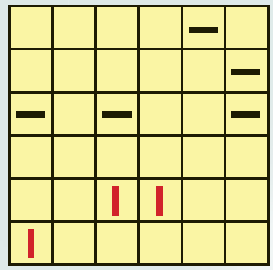
हल

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

निम्नलिखित बिनौरो पहेलियाँ हल कीजिए।







बिंदु जाल

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

बिंदु जाल

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED