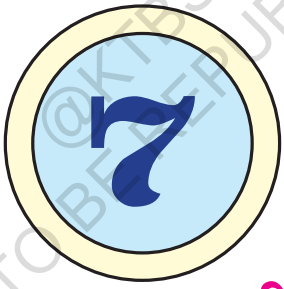
कर्नाटक सरकार

गणित प्रकाश

भाग – 1

मराठी माध्यम



इयत्ता सातवी

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राष्ट्रीय शैक्षणिक संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRANING

Karnataka Textbook Society (R.)
6th Cross, Malleshwaram, Bengaluru-560 003.

FOREWORD

The National Education Policy 2020 envisages a system of education in the country that is rooted in an Indian ethos and its civilisational accomplishments in all fields of knowledge and human endeavour. At the same time, it aims to prepare students to engage constructively with the opportunities and challenges of the 21st century. The basis for this aspirational vision has been well laid out by the National Curriculum Framework for School Education (NCF-SE) 2023 across curricular areas at all stages. By nurturing students' inherent abilities across all five planes of human existence (pañchakośhas), the Foundational and Preparatory Stages set the stage for further learning at Middle Stage. Spanning Grades 6 to 8, the Middle Stage serves as a critical three-year bridge between the Preparatory and Secondary Stages.

The NCF-SE 2023, at the Middle Stage, aims to equip students with the skills that are needed to grow, as they advance in their lives. It endeavours to enhance their analytical, descriptive, and narrative capabilities, and to prepare them for the challenges and opportunities that await them. A diverse curriculum, covering nine subjects ranging from three languages—including at least two languages native to India—to Science, Mathematics, Social Science, Art Education, Physical Education and Well-being, and Vocational Education promotes their holistic development.

Such a transformative learning culture requires certain essential conditions. One of them is to have appropriate textbooks in different curricular areas, as these textbooks will play a central role in mediating between content and pedagogy—a role that will strike a judicious balance between direct instruction and opportunities for exploration and inquiry. Among the other conditions, classrooWm arrangement and teacher preparation are crucial to establish conceptual connections both within and across curricular areas.

The National Council of Educational Research and Training, on its part, is committed to providing students with such high-quality textbooks. Various Curricular Area Groups, which have been constituted for this purpose, comprising notable subject-experts, pedagogues, and practising teachers as their members, have made all possible efforts to develop such textbooks. Ganita Prakash the textbook of Mathematics for Grade 7, Part I; aligns with the expectations of NEP 2020 and NCF-SE 2023, in respect of creating a spark for initiating mathematical thinking. This textbook designed for Grade

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

7 students, takes forward its journey through the world of mathematics that started in Grade 6. During this journey the concepts and problems emerge from daily life situations and so it is expected that students will be able to relate to them with ease. The book makes efforts to encourage the students to observe and explore the patterns around them and discover mathematical concepts on their own. The content attempts to integrate mathematics with other subject areas such as science, social science with cross-cutting themes like environmental education, value education, inclusive education, and Indian Knowledge Systems (IKS). Colourful illustrations and interactive exercises form the basis of this textbook that would develop a strong foundation among children in understanding more complex mathematical concepts. Throughout the book, stories, conversations and anecdotes have been incorporated to make abstract mathematical concepts more relatable and accessible to young learners. Puzzles and innovative problems will not only engage the students in thoughtfully relating the mathematical concepts to the world around them and help them in deepening their understanding of mathematics, but also prepare them to understand the concepts of the emerging field of computational thinking.The focus is on collaboration and active engagement through student-centered approach to education.

However, in addition to this textbook, students at this stage should also be encouraged to explore various other learning resources. School libraries play a crucial role in making such resources available. Besides, the role of parents and teachers will also be invaluable in guiding and encouraging students to do so.

With this, I express my gratitude to all those who have been involved in the development of this textbook and hope that it will meet the expectations of all stakeholders. At the same time, I also invite suggestions and feedback from all its users for further improvement in the coming years.

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

Dinesh Prasad Saklani
Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
March, 2025

ABOUT THE BOOK

Mathematics helps students develop not only basic arithmetic skills, but also the crucial capacities of logical reasoning, creative problem solving, and clear and precise communication (both oral and written). Mathematical knowledge also plays a crucial role in understanding concepts in other school subjects, such as Science and Social Science, and even Arts, Physical Education, and Vocational Education. Learning Mathematics can also contribute to the development of capacities for making informed choices and decisions. Understanding numbers and quantitative arguments is necessary for effective and meaningful democratic and economic participation. Mathematics thus has an important role to play in achieving the overall aims of school education.

Mathematics at the Middle Stage is a major challenge and has to perform the dual role of being both close to the experience and environment of the child and being abstract. It must perform the dual role of developing intuition while also maintaining and emphasising rigour. It must perform the dual role of enhancing critical and logical thinking while also developing artistry and creativity and a sense of elegance and aesthetics. Finally, Mathematics must perform the dual role of providing students plenty of opportunities for exploration and discovery of concepts on their own while also teaching best-known methods in the global repertoire of mathematics.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

The present textbook has made an attempt to address the above mentioned goals and challenges of learning mathematics. The writers of this book have aimed to strike a judicious balance between informal and formal definitions and methods to develop in students both intuition and rigour. The book also provides numerous opportunities for student-student and student–teacher interaction in the classroom to promote active and experiential learning. A number of questions, puzzles, and interactive exercises are posed throughout the book to encourage constant exploration. Many of the questions are open-ended to stimulate in-class discussion.

The first chapter of this book, 'Large Numbers Around Us', is an introduction to the world of lakhs and crores, and millions and billions through engaging explorations and contexts.

Chapter 2, 'arithmetic expressions', considers expressions having multiple operations and discusses how they can be written and read without ambiguity. Chapter 3, 'A Peek Beyond the Point', introduces the usage of decimal point and additions and subtractions involving decimal numbers. Chapter 4, 'Expressions using Letter-Numbers' builds on the chapter on Arithmetic Expressions to guide students to take the first steps into the world of algebra. The fundamental notions of letter-numbers and algebraic expressions are introduced. Chapter 5, 'Parallel and Intersecting Lines', introduces some fundamental building blocks of geometry and has a balance of engaging activities like paper folding and rigorous mathematical reasoning. Chapter 6, 'Number Play', covers aspects of computational thinking and problem solving through puzzles and concepts of parity, Virahanka-Fibonacci sequence, and cryptarithms. Chapter 7, 'A Tale of Three Intersecting Lines', explores some of the striking properties of a triangle related to the lengths of their sides and angles, through construction. Chapter 8, 'Working with Fractions', builds on the students' understanding of fractions, and explores the multiplication and division of fractions. The great Indian mathematician Brahmagupta's (628 C.E.) methods and formulas for performing these operations on fractions is brought alive with fresh examples and interesting puzzles. In all chapters, an attempt has been made to emphasis connections with other subjects including Art, History, and Science.

By weaving together storytelling and hands-on activities, we hope that an immersive learning experience will be created that ignites curiosity and fosters a love for mathematics. It is hoped that teachers would give children the opportunity to discuss, play, engage with each other, provide logical arguments for different ideas, and find loopholes in arguments presented. This is necessary for the learners to eventually develop the ability to

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

understand what it means to prove something and also become confident about underlying concepts. The mathematics classroom should not expect a blind application of algorithms but should rather encourage children to find many different ways to solve problems.

As per the NEP 2020, computational thinking has also been gently introduced through puzzles, games, and interactive exercises that encourage such thinking. Indian rootedness has also been kept in mind while giving contexts for different concepts. The contributions of Indian mathematicians have been given as part of a problem-solving approach to make students aware of India's rich mathematical heritage and its global contributions to mathematics.

The concepts and problems are related to daily life situations. An attempt has been made to use contexts and materials with which the students are familiar. Learning material sheets have been given at the back of the book that may be photocopied and used. At many places, exercises or activities are given to encourage peer group efforts and discussions. The textbook intends to address the learning needs of a diverse group of students in the classroom.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

We have tried to link concepts learnt in initial chapters with ideas in subsequent chapters to show the connectedness and unity of mathematics. We hope that teachers will use this as an opportunity to revise these concepts in a spiralling way so that children are able to appreciate the entire conceptual structure of mathematics. We hope that teachers may give more time to the ideas of fractions, negative numbers and other notions that are new to students. Many of these are the basis for further learning in mathematics.

Finally, this book aims to be more than just a textbook—it's a passport to a world of mathematical discovery and exploration. Whether used in the classroom or at home, we hope that it may inspire students to embark on their own mathematical adventures, empowering them to see the beauty and relevance of mathematics in everything around them. With its engaging approach and comprehensive coverage of Grade 7 mathematics concepts,

this book hopes and aims to captivate young minds and set them on a lifelong journey of mathematical discovery.

I thank again all the writers of and contributors to this textbook for this important and valuable contribution and service to the nation's mathematics teachers, learners and enthusiasts.

We look forward to your comments and suggestions regarding the book and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you develop during the course of teaching and learning, to be included in future editions.

Ashutosh Wazalwar
Professor, Academic Convener
Department of Education in
Science and Mathematics
National Council of Educational
Research and Training

@KTBS
NOT TO BE REPUBLISHED

NATIONAL SYLLABUS AND TEACHING LEARNING MATERIAL COMMITTEE (NSTC)

1. M.C. Pant, *Chancellor*, National Institute of Educational Planning and Administration (NIEPA), (***Chairperson***)
2. Manjul Bhargava, *Professor*, Princeton University, (***Co-Chairperson***)
3. Sudha Murty, Acclaimed Writer and Educationist
4. Bibek Debroy, *Chairperson*, Economic Advisory Council to the Prime Minister (EAC – PM)
5. Shekhar Mande, Former *Director General*, CSIR; *Distinguished Professor*, Savitribai Phule Pune University, Pune
6. Sujatha Ramdorai, *Professor*, University of British Columbia, Canada
7. Shankar Mahadevan, Music Maestro, Mumbai
8. U. Vimal Kumar, *Director*, Prakash Padukone Badminton Academy, Bengaluru
9. Michel Danino, Visiting Professor, IIT – Gandhinagar
10. Surina Rajan, IAS (Retd.), Haryana, Former *Director General*, HIPA
11. Chamu Krishna Shastri, *Chairperson*, Bharatiya Bhasha Samiti, Ministry of Education
12. Sanjeev Sanyal, Member, Economic Advisory Council to the Prime Minister (EAC – PM)
13. M.D. Srinivas, *Chairperson*, Centre for Policy Studies, Chennai
14. Gajanan Londhe, *Head*, Programme Office
15. Rabin Chhetri, *Director*, SCERT, Sikkim
16. Pratyusa Kumar Mandal, *Professor*, Department of Education in Social Sciences, NCERT, New Delhi
17. Dinesh Kumar, *Professor*, Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, New Delhi
18. Kirti Kapur, *Professor*, Department of Education in Languages, NCERT, New Delhi
19. Ranjana Arora, *Professor* and *Head*, Department of Curriculum Studies and Development, NCERT (***Member-Secretary***)

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

TEXTBOOK DEVELOPMENT TEAM

Contributors

Aaloka Kanhere, *Project Scientific Officer*, Homi Bhabha Center for Science Education, Mumbai

Amartya Kumar Dutta, *Professor*, Stat-Math Unit, Indian Statistical Institute (ISI), Kolkata

Amritanshu Prasad, *Professor*, The Institute of Mathematical Sciences, Chennai

Anjali Gupte, *Principal* (Retd.), Vidya Bhavan Public school, Udaipur

Aparna Lalingakar, *Director*, Aksharbrahma Consultancy, Pune -**Team Leader**

Geetanjali Phatak, *Professor*, S.P College, Pune

H. S. Sharada, *TGT*, Government High School, HD Kote, Karnataka

K. V. Subrahmanyam, *Professor*, Chennai Mathematical Institute (CMI), Chennai

Kiran Barve, Faculty, Bhaskaryacharya Partisthan, Pune

Madhu B., *Assistant Professor*, Regional Institute of Education (RIE), Mysuru

Manjul Bhargava, *Professor*, Princeton University, and Co-Chairperson, NSTC

Padmapriya Shirali, *Former Principal*, Sahyadri School KFI, Pune

Patanjali Sharma, *Assistant Professor*, Regional Institute of Education, (RIE), Ajmer

Rakhi Bannerjee, *Associate Professor*, Azim Premji University, Bengaluru

Ramchandar krushnamurthy, *Principal*, Azim Premji School, Bengaluru

Shivkumar K. M, *Senior Consultant*, Programme Office, NSTC

Shravan S. K., *Senior Consultant*, Programme Office, NSTC

Sujatha Ramdorai, *Professor*, University of British Columbia, Canada, Member NSTC

S. Viswanath, *Professor*, Institute of Mathematical Sciences (IMSc), Chennai

VM Shonapurkar, *Assistant Professor*, Bhaskaryacharya Pratisthan, Pune

Vijayan K., *Professor*, Department of Curriculum Studies and Development, NCERT, New Delhi

Member-Coordinator, CAG (Mathematics)

Ashutosh Kedarnath Wazalwar, *Professor*, Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, New Delhi

Reviewers

Anurag Behar, *Member*, National Curriculum Framework Oversight Committee

K. (Ravi) Subramaniam, *Professor* (Retd.), Homi Bhabha Centre for Science Education (HBCSE), Mumbai

Madhavan Mukund, *Director*, Chennai Mathematical Institute, Chennai

R. Ramanujam, *Professor* (Retd.), Institute of Mathematical Sciences (IMSc), Chennai

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

ACKNOWLEDGEMENTS

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) acknowledges the guidance and support of the esteemed Chairperson and members of the Curricular Area Group (CAG): Mathematics and other concerned CAGs for their guidelines on cross-cutting themes in developing this textbook. During the development of this textbook, various workshops were organised and subject experts in Mathematics from different Institutions were invited. The NCERT acknowledges the valuable views and inputs given by subject experts— Shailesh A. Shirali, *Director*, Teacher Education Program Valley School, KFI Priyavrat Deshpande, *Associate Professor*, CMI, Chennai; Sadik Ali Shaikh, *Head*, Department of Mathematics, Maulana Azad College of Arts, Science and Commerce, Aurangabad,Maharashtra; Jaspal Kaur, *TGT* (Maths), School of Excellence,Delhi; Bina Prakash, *Sr. PGT* (Maths), Campion School, Bhopal; Mahendra Shankar, *Senior Lecturer* (Retd.), NCERT, New Delhi; Shaily Choudhary *TGT* Maths , GGSSS, Khajoori Khas, Delhi; Ravi Raxit Sharma, *TGT* Mathematics, GCMS, New Seelampur, Delhi; Poonam Arora, *PGT* Maths, Mentor Teacher, SBV, West Patel Nagar, New Delhi; Shalini Arora Bahri, *TGT* Maths, SKV No.1, Narela, Delhi; Sangeeta Solanki, *TGT* Maths, The Heritage School, Delhi; Sunita Sharma, *TGT* Maths, The Heritage School, Delhi, Dr. Rishikesh Kumar, *Assistant Professor,* DESM, NCERT, New Delhi; Tarun Choubisa, *Director,* Pedagogy and Innovation (Science), Seed2Sapling Education Foundation, Bengaluru for improving the content and pedagogy of the textbook.

The Council acknowledges the efforts of Nidhi M Shastri and Bhawana Upadhyay from the Programme Office.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Sunita Farkya, *Professor* and *Head*, DESM, NCERT, New Delhi.

The Council appreciates the contributions of Sushmita Joshi, *Senior Research Associate*; Manju Mhar, *Senior Research Associate*; Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, for providing support in the development of the textbook.

The contribution of Ilma Nasir, *Editor* (contractual); Publication Division is also appreciated. The NCERT gratefully acknowledges the contributions of Pawan Kumar Barriar, *In charge*, DTP Cell; Kishore Singhal and Vivek Mandal *DTP Operator* (contractual), Publication Division, NCERT for all his efforts in laying out this book.

© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

CONSTITUTION OF INDIA

Part III (Articles 12 – 35)
(Subject to certain conditions, some exceptions
and reasonable restrictions)

guarantees these

Fundamental Rights

Right to Equality

- before law and equal protection of laws;
- irrespective of religion, race, caste, sex or place of birth;
- of opportunity in public employment;
- by abolition of untouchability and titles.

Right to Freedom

- of expression, assembly, association, movement, residence and profession;
- of certain protections in respect of conviction for offences;
- of protection of life and personal liberty;
- of free and compulsory education for children between the age of six and fourteen years;
- of protection against arrest and detention in certain cases.

Right against Exploitation

- for prohibition of traffic in human beings and forced labour;
- for prohibition of employment of children in hazardous jobs.

Right to Freedom of Religion

- freedom of conscience and free profession, practice and propagation of religion;
- freedom to manage religious affairs;
- freedom as to payment of taxes for promotion of any particular religion;
- freedom as to attendance at religious instruction or religious worship in educational institutions wholly maintained by the State.

Cultural and Educational Rights

- for protection of interests of minorities to conserve their language, script and culture;
- for minorities to establish and administer educational institutions of their choice.

Right to Constitutional Remedies

- by issuance of directions or orders or writs by the Supreme Court and High Courts for enforcement of these Fundamental Rights.

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

शिक्षकांसाठी सूचना

आम्हाला आशा आहे की, 'गणित प्रकाश' हे पुस्तक तुमच्यासमोर असलेले रोमांचक कार्य साध्य करण्यासाठी एक मजबूत आधार म्हणून सेवा देईल, गणित हा सुंदर विषय म्हणून अध्ययनाचा आनंद पुढील पिढीपर्यंत पोहोचविण्यास मदत करेल.

या कार्याकरिता विद्यार्थ्यांच्या मनामध्ये गणितीय विचार फुलविण्यासाठी एक सुपीक वातावरण तयार करणे आवश्यक आहे. वर्गखोली ज्यामध्ये विद्यार्थी सांगितलेले ऐकतात आणि फळ्यावर जे कांही लिहिले जाते ते लिहून घेतात, तरी गणित विषयाच्या अध्यापनामध्ये आवश्यक परिस्थितीमध्ये कांही कमतरता आहेत. त्याऐवजी वर्गखोल्या या अशी जागा असावी लागते की, ज्यामध्ये विद्यार्थी गणितीय कल्पनाशी खेळण्यात, शोधण्यात आणि चर्चा करण्यात गुंतलेले असले पाहिजेत आणि नमुने व समस्या निवारणासाठी एकत्रितपणे सर्जनशील रणनिती विकसित केली पाहिजेत. विद्यार्थ्यांना समस्या एकमेकासमोर मांडता आल्या पाहिजेत आणि त्यांनी एकमेकाशी संभाव्य उपायावर चर्चा केली पाहिजे. खरं तर या परिस्थितीमुळेच आतापर्यंत गणिताचा पूर्ण विकास झाला आहे आणि त्यामुळेच अशा परिस्थीतीविना विद्यार्थी गणितीय विचार आणि समज विकसित करु शकलीत याची अपेक्षा करता येत नाही.

सुदैवाने अशी परिस्थिती निर्माण करणे कठीण नाही. त्यासाठी फक्त एक मनोरंजक प्रश्न, समस्या, नमुना किंवा आव्हान नियमितपणे, मुक्तपणे विद्यार्थ्यांसमोर ठेवणे गरजेचे आहे, आणि त्याना वर्गामध्ये किंवा जोडीने किंवा गटामध्ये खेळण्यासाठी, चर्चा करण्यासाठी आणि त्यावर काम करण्यासाठी पुरेसा वेळ देणे गरजेचे आहे.

त्यासोबतच, चुका स्विकारणारे आणि अध्ययनाचे महत्व मान्य करणारे पोषक वातावरण जोपासले गेले पाहिजे.

वर्गामध्ये गणितीय विचारसरणी सुरु करण्याची चमक निर्माण करणे कठीण नसले तरी ते टिकवून ठेवणे आव्हानात्मक असू शकेल आणि त्यासाठी तुम्हाला अधिक परिश्रम घ्यावे लागतील. तरीपण, प्रश्न, समस्या, नमुना किंवा आव्हाने उघडण्याचा पहिला भाग आठवड्यातून किमान एक-दोन वेळा केला गेला तरी, विद्यार्थ्यांना खेळण्यासाठी, चर्चा करण्यासाठी आणि त्यावर काम करण्यासाठी तुमच्याकडून पुरेशा वाट पाहण्याचा वेळ मिळाली तरी विद्यार्थ्यांना गणिताकडे पाहण्याचा आणि लक्ष देण्याचा दृष्टीकोन यावर मोठा सकारात्मक परिणाम होऊ शकतो.

हे लक्षात घेतले पाहिजे की, हा सकारात्मक परिणाम एका रात्रीत होणार नाही. यासाठी वेळ द्यावा लागतो आणि तो तुम्ही समस्या सोडविण्यासाठी किती संधी देता, तुमचा संयम आणि विद्यार्थ्यांना किती प्रोत्साहन देता यासारख्या विविध घटकावर अवलंबून असतो.

© KIRS NOT TO BE REPUBLISHED

समस्या मांडण्यासाठी तुम्हाला मदत व्हावी यासाठी, या पुस्तकातील सर्व समस्या किंवा प्रश्न (?) हे चिन्ह वापरुन चिन्हांकित केले आहेत. हे चिन्ह वर्गामध्ये समस्या सोडविण्याची आणि शोध घेण्याची प्रक्रिया सुरू ठेवणाऱ्या संभाव्य संधींचे सूचक आहे. तुम्हाला 'गणिती बोल' असे लिहिलेल्या काही समस्या आढळतील, त्यांना विशेषतः वर्गातील चर्चेचे विषय म्हणून बनविता येते.

पाठ्यपुस्तकात विविध ठिकाणी घुबडांचे शुभंकर दिसते, जे महत्वाच्या गणितीय प्रक्रिया विचार करण्याच्या पध्दती आणि समस्या सोडविण्याच्या पध्दतीवर प्रकाश टाकते. वर्गातील चर्चेच्यावेळी (जिथे घुबड दिसते) आणि इतर सारख्याच परिस्थितीमध्ये हे लक्षात आणून द्यावे.

विद्यार्थ्यांची गणितीय विचारसरणी आणि संकल्पनांची समज विकसित करण्यासाठी पुरेशा संख्येने प्रश्न दिलेले आहेत. ते सर्व 'व्यापण्याच्या' प्रयत्नात विद्यार्थ्यांना खेळण्यासाठी आणि चर्चा करण्यासाठी वेळ दिला जाणार नाही, असे घडणार नाही याची काळजी घ्यावी.

हे समजून घेणे महत्वाचे आहे की शोधात्मक समस्या या केवळ समस्या सोडविण्याच्या कौशल्यांना चालना देण्यासाठी नसतात, तर जेव्हा मुले शोधात गुंतू लागतात, तेव्हा प्रक्रियात्मक प्रवाहाला बळकट करण्यासाठी सुद्धा मदत करतात.

विद्यार्थ्यांना स्वतंत्र अध्ययनकर्ता बनविण्याचे प्रयत्न केले पाहिजेत. यासाठी आवश्यक असलेला एक महत्वाचा पैलू म्हणजे गणिती संदर्भ वाचून आकलन करण्याची क्षमता. या कौशल्याला चालना देण्यासाठी विद्यार्थ्यांना स्वतः आणि गटामध्ये पुस्तक वाचण्यास प्रोत्साहित केले पाहिजे. ते जे वाचतात आणि समजून घेतात त्याला व्यक्त करण्याची संधी द्यावी. यामुळे उदाहरणे बोलण्यात आणि शब्दांचा अर्थ लावण्यात विद्यार्थ्यांना येणाऱ्या मोठ्या समस्यांचे देखील निरसण होईल.

या पुस्तकामध्ये अनेक खुल्या समस्या आहेत. त्यामध्ये काही नवीन संकल्पनावर उपचार सुध्दा आहेत. तुम्ही जर त्यापैकी कांही सोडवू शकला नाही, किंवा काही लगेच समजू शकल्या नाहीत तर ते पूर्णपणे ठीक आहे. सर्वांना सर्व काही माहित होत नाही. संदर्भ समजून घेवून त्यावर चिंतन करून प्रयत्न करण्याबरोबर ते वर्गात घेवून जाणे आणि चर्चेसाठी खुले ठेवणे फायद्याचे ठरेल. चर्चेनंतर स्पष्ट केलेल्या आणि स्पष्ट न झालेल्या गोष्टी स्पष्टपणे सारांशित केल्या जाऊ शकतात. असे केल्याने घटकांशावर बराच प्रकाश टाकला जाऊ शकतो.

या चर्चेमध्ये तुम्ही एक सहकारी साधक म्हणून सहभागी होऊ शकता आणि जेव्हा शिक्षकांना काहीतरी समजून घेण्याचा प्रयत्न करताना आणि विचार करताना पाहतात तेव्हा ते एक अद्भूत उदाहरण बनते.

तुम्ही आणि तुमचे विद्यार्थी या पुस्तकाचा उपयोग करून खूप छान आणि फलदायी वेळ घालवाल अशी आशा करतो.

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

मुख्य मुद्यांचा सारांश

शोधण्याची वेळ

1. विद्यार्थ्यांना नियमितपणे नवीन समस्या, नमुने किंवा आव्हाने देणे आणि त्याना वैयक्तिकपणे गटामध्ये खेळण्यासाठी चर्चा करण्यासाठी आणि त्यावर कार्य करण्यासाठी पुरेसा वेळ देणे हे महत्वाचे आहे.
2. या दरम्यान चुका स्वीकारणे आणि अध्ययनात त्याचे महत्व मान्य करणारे वातावरण जोपासले गेले पाहिजे.
3. अशी संस्कृती असायला पाहिजे, जेथे विद्यार्थी एकमेकांसमोर समस्या मांडतील आणि त्या समस्या सोडविण्यासाठी विविध प्रकारे एकमेकांशी चर्चा करतील.

पुस्तकातील समस्याविषयी

1. पुस्तकातील शोधात्मक समस्या या केवळ समस्या सोडविण्यास प्रात्साहन देत नाहीत तर मुले जेव्हा शोधात, गुंतू लागतात तेव्हा प्रक्रियात्मक प्रवाहाला बळकट करण्याचा त्यांचा उद्देश आहे.
2. पुस्तकातील सर्व समस्यांचा समावेश करुण्याचा प्रयत्न करताना, विद्यार्थ्यांना खेळण्यात चर्चा करण्यात आणि त्या सोडविताना, त्याना दर्जेदार खेळात वेळ घालविण्यापासून रोखले जाऊ नये.

वाचन

1. विद्यार्थ्यांना वैयक्तिक आणि गटामध्ये पुस्तक वाचण्यास प्रोत्साहन देणे.
2. त्याना वाचन केलेल्या गोष्टींचा अर्थ लावणे आणि इतरांना समजावून सांगण्याची संधी देणे.

न समजण्याचा अधिकार

1. जर काही घटकांश समजला नाही तर पूर्णपणे ठीक आहे! अशा घटकांशाला समजून घेण्याचा आणि त्यावर चिंतन करण्याचा प्रयत्न करण्याबरोबर त्यांना वर्गात घेऊन जाऊन चर्चेकरिता खुला ठेवणे. चर्चेत ज्या गोष्टी स्पष्ट आहेत आणि ज्या अद्याप स्पष्ट नाहीत त्यांचा सारांश स्पष्टपणे सांगता येतो. तुम्ही या चर्चेमध्ये एक सहकारी साधक म्हणून सहभागी होऊ शकता आणि ज्यावेळी विद्यार्थी शिक्षकांना कांहीतरी शोधताना आणि समजून घेताना पाहतात तेव्हा हे त्यांच्यासाठी उत्तम उदाहरण असते.
2. अध्ययन करणे ही एक सतत चालणारी प्रक्रिया आहे. खरंच गणितमध्ये असे आणखी खूप काही आहे ज्यांची माहिती नाही आणि त्यासाठी अधिक शोध लावणे आवश्यक आहे.

@KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

विद्यार्थ्यांसाठी सूचना

गणिताच्या कला समजून आनंद घेण्यासाठी फक्त निष्क्रिय प्रेक्षक असणे पुरेसे नाही. ज्याप्रमाणे एखादा गुप्तहेर रहस्य उलगडण्यासाठी कार्य करतो त्याप्रमाणे तुम्ही स्वतःला यामध्ये सामावून घेतले पाहिजे.

ज्यावेळी तुमच्या समोर नवीन प्रश्न उद्भवतो किंवा तुमच्या स्वतःच्या आश्चर्यातून प्रश्न निर्माण होतो किंवा जेव्हा तुम्हाला एखादा सुंदर नमुना दिसतो, त्यावेळी विशेष करून याची गरज असते. जेव्हा तुम्ही यांचा सामना करता तेव्हा थांबा आणि प्रश्न तयार करण्यासाठी किंवा नमुना समजून घेण्यासाठी आणि आनंद लुटण्यासाठी सृजनशीलतेचा वापर करा.

तुम्हाला असे आढळून येईल की, कांही प्रश्नासोबत त्यांची उत्तरे देखील असतात. जरी असे असले तरी, उत्तर पाहण्यापूर्वी स्वतः किंवा गटामध्ये त्या समस्येवर काम करणे फायद्याचे आहे.

हे पुस्तक वाचण्याचा तुमचा आनंद वृद्धीगत करेल!

ज्यावेळी तुमच्या समोर प्रश्न उपस्थित होतील, त्यावेळी तुम्ही (?) हे चिन्ह पाहू शकाल. हे सुचित करते ही वेळ त्या गोष्टींचा शोध घेण्याची आहे!

'शोधा पाहू' या शीर्षकाखाली कधी कधी तुम्हाला एकाच ठिकाणी एकत्रित केलेले अनेक प्रश्न आढळून येतील.

काही प्रश्नासमोर 

ही खूण आहे. या प्रश्नांचा अर्थ असा होतो की हे प्रश्न तुमच्या मित्रासोबत चर्चा करून सोडवा.

शेवटी 

अशी खूण केलेले प्रश्न आहेत. अशा प्रश्नांची उत्तरे सोडविताना अधिक सृजनशीलतेची गरज आहे आणि म्हणून बहुतेक वेळा उत्तरे अधिक मजेदार देखील असतील!

© SCERT
NOT TO BE REPUBLISHED

ಮುನ್ನುಡಿ

'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನುಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಯು 2026–27 ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಲಿನಿಂದ 7ನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದೆ. 2020 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀತಿಯು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿರುವ ಪೂರ್ವ ಸಿದ್ಧತಾ ಹಂತ ಹಾಗೂ ಪ್ರೌಢ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ಬೆಸೆಯುವಲ್ಲಿ 6–8 ನೇ ತರಗತಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಹಂತವು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ವಯೋಮಾನದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೊಂದಿಗೆ 21 ನೇ ಶತಮಾನದ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗಿ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ದಕ್ಕಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಮುಖ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ವರ್ತಮಾನದ ಹಾಗೂ ಭವಿಷ್ಯದ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಿ, ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಸದ್ಬಳಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಿದ್ಧರಿರುವಂತೆ ಅವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ, ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ನಿರೂಪಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪೋಷಿಸಿ, ಸಮಗ್ರ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗುವಂತೆ 2023ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಚೌಕಟ್ಟು (ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ) ಆಧಾರಿತವಾಗಿ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ತರಲಾಗಿದೆ. ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮಹತ್ತರವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಪಠ್ಯವಸ್ತು ಹಾಗೂ ಬೋಧನಾ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಸಮನ್ವಯಗೊಳಿಸಿರುವ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕುತೂಹಲಕ್ಕೆ ನೀರು ಎರೆಯುತ್ತಾ, ಅವರ ವಿಚಾರಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ, ಅನ್ವೇಷಣಾ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನ ಕಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳಲು ಹೇರಳ ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ತನ್ನ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಿನ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಶೋಧಿಸಿ ಅಲ್ಲಿ ಅನುಭವಿಸುವ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿರುವ ವರ್ಣರಂಜಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಸಂವಾದಾತ್ಮಕ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಬುನಾದಿಯನ್ನು ಬಲಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿ ಸಂಕೀರ್ಣ ಗಣತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಕಲಿಕೆಯನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಯಿಸಲು ಪಠ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಕಥೆಗಳು, ಸಂವಾದಗಳು ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳ ಸಹಜ, ಸರಳ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ. ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನಾವೀನ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡಿರುವುದುರಿಂದ ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳು ಗಮನವನ್ನು ಕಲಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಲು ಹಾಗೂ ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಯಿಸಿಕೊಂಡು ಅನ್ವಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂಲಕ ತಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಅಲೋಚನಾ (Mathematical Thinking) ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರೇರಣೆ ನೀಡುತ್ತವೆ. ಗಣಿತೀಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಅನ್ವಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಂವಹನ ಮಾಡಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವಂತೆ ತಮ್ಮ ಆಲೋಚನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ಇದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಪರಿಚಯಿಸಲಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಹಾಗೂ ಬಳಸಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ನಿತ್ಯಜೀವನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಅನ್ವಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸರಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲೂ ಕಲೆ, ಇತಿಹಾಸ, ವಿಜ್ಞಾನ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಮ್ಮಿಳನಗೊಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಬಹುಶಿಸ್ತೀಯ ಕಲಿಕೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಥನ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಮಾಡಿ ಕಲಿ ತತ್ತ್ವದಡಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಸಲು ಹಾಗೂ ಕಲಿಯಲು ಅವಕಾಶ ನೀಡಿರುವುದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಕುತೂಹಲ ಮತ್ತು ಆಸಕ್ತಿ ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಅವಕಾಶ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

NOT TO BE REPUBLISHED

ಇಷ್ಟೆಲ್ಲ ವಿಶೇಷ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 'ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ' ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ತರಗತಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸುಗಮಕಾರರು ತಮ್ಮ ತರಗತಿಯನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಹಾಗೂ ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಸಿದ್ಧತೆಯೊಂದಿಗೆ ತರಗತಿ ನಿರ್ವಹಣೆ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಕರುಡು ಲೆಕ್ಕಾಚರದ ಬದಲಿಗೆ ಒಗಟು, ಚರ್ಚೆ, ಸಂವಾದ, ಆಟ, ಪರಸ್ಪರ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ, ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಒಳಗೊಂಡ ಸುಗಮಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗಣಿತ ಪ್ರಕಾಶ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೇವಲ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸದೆ ಗಣಿತ ಪ್ರಪಂಚದ ಅನ್ವೇಷಣೆಗೆ ದಕ್ಕಿರುವ ಸುವರ್ಣ ಅವಕಾಶ ಎಂದು ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭಾವಿಸಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಮನಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಸುಗಮಕಾರರು ಹುಸಿ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ನಂಬಿಕೆ ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯದ್ದಾಗಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಮಟ್ಟದ ಎಲ್ಲಾ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ತನ್ನದಾಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬ ಆಶಯದೊಂದಿಗೆ 2026–27 ನೇ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಲಿನಿಂದ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅನುಮತಿ ನೀಡಿದ ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರದ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಬಳಕೆಗೆ ಅವಕಾಶ ನೀಡಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುವಾದಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಡಿ.ಟಿ.ಪಿ ಆಪರೇಟರ್‌ಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಮುದ್ರಕರಿಗೆ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

ಶ್ರೀ ಎಂ.ಪಿ. ಮಾದೇಗೌಡ
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ.)
ಬೆಂಗಳೂರು.

Marathi Translation Committee

Sri J.U. Ghadi	:	Head Master, New Girls High School, Shahapur Goaves, Belgaum 590003.
Sri A.V. Patil	:	Assistant Master, Marathi Vidyalaya, Vijaypur - 586101
Sri A.B. Patil	:	Admin, Cantonment Board Marathi High School Camp, Belgaum 590001.

Chief Advisors

Sri M. P. Madegowda	:	Managing Director, Karnataka Textbook Society(R.) Bengaluru.
Smt. M.D. Usha	:	Deputy Director, Karnataka Textbook Society(R.), Bengaluru.

Programme Co-Ordinator

Smt. Meenakshi A Ganiger	:	Assistant Director, Karnataka Textbook Society(R.), Bengaluru.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अनुक्रमणिका

P8M7R7

भाग – 1

प्रकरण	घटक	पृष्ठ क्रमांक
1	आपल्या सभोवतालच्या मोठ्या संख्या **Large Numbers Around Us**	1–25
2	अंकगणिती पदावल्या **Arithmetic Expressions**	26–50
3	बिंदूच्या पलिकडे डोकावणे **A Peek Beyond the Point**	51–89
4	बैजिक पदावल्या **Expressions using Letter-Numbers**	90–117
5	समांतर आणि छेदक रेषा **Parallel and Intersecting Lines**	118–140
6	संख्यांचा खेळ **Number Play**	141–161
7	तीन छेदक रेषांची कहाणी **A Tale of Three Intersecting Lines**	162–189
8	अपूर्णांकांवरील क्रिया **Working with Fractions**	190–218
	अध्ययन साहित्य पत्रके **Learning Material Sheets**	219–220

NOT TO BE REPUBLISHED @KEBS

1 आपल्या सभोवतालच्या मोठ्या संख्या

(Large numbers around us)

B1X1U2

1.1. लाख विविधता:



ईश्वरप्पा हे कर्नाटकामधील चिंतामणी या शहरातील एक शेतकरी आहेत. ते आपल्या भाताच्या शेतीसाठी बियाणांची खरेदी करण्यासाठी बाजारामध्ये जातात. अशाच एका भेटीच्या दरम्यान त्यांनी रामण्णा आणि लक्ष्मम्मा या दोघांमधील संभाषण ऐकले, रामण्णा म्हणाले की, ''पूर्वी आपल्या देशात सुमारे एक लाख विविध प्रकारच्या तांदळाच्या जाती होत्या. शेतकरी या वेगवेगळ्या प्रकारच्या तांदळाच्या बियाण्यांच्या जाती जपून ठेवत होते आणि त्यांचा वापर भात पिकविण्यासाठी करत होते. आता, आपल्याजवळ मोजक्याच जाती शिल्लक राहिलेल्या आहेत. आता शेतकऱ्याना बियाणांच्या खरेदीसाठी बाजारामध्ये जावे लागते.''



लक्ष्मम्मा म्हणाली, ''माझ्या घराच्या शेजारी बियाणांची एक बँक आहे. आतापर्यंत त्यांनी वेगवेगळ्या ठिकाणाहून सुमारे शंभर स्वदेशी जातीची भाताची बियाणे एकत्रित केली आहेत. तुम्ही सुद्धा येथून बियाणांची खरेदी करु शकता.''

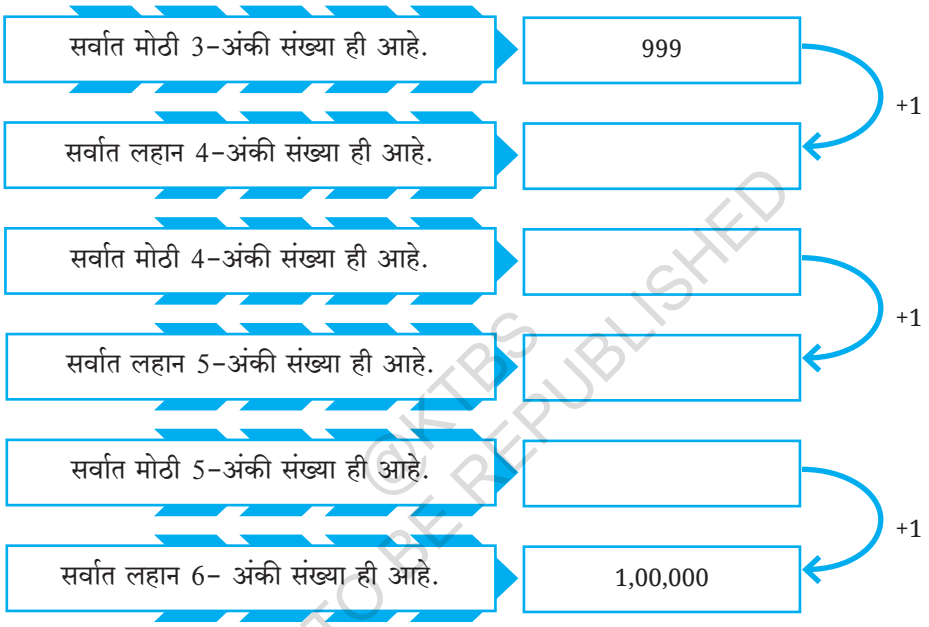
कदाचित, तुम्ही 'लाख' हा शब्द यापूर्वी सुध्दा ऐकलेला असेल. तुम्हाला माहित आहे का एक लाख किती मोठे आहेत ते?

ईश्वरप्पानी या घटनेची आपली मुलगी रॉक्सी आणि मुलगा ईस्तू सोबत चर्चा केली.

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

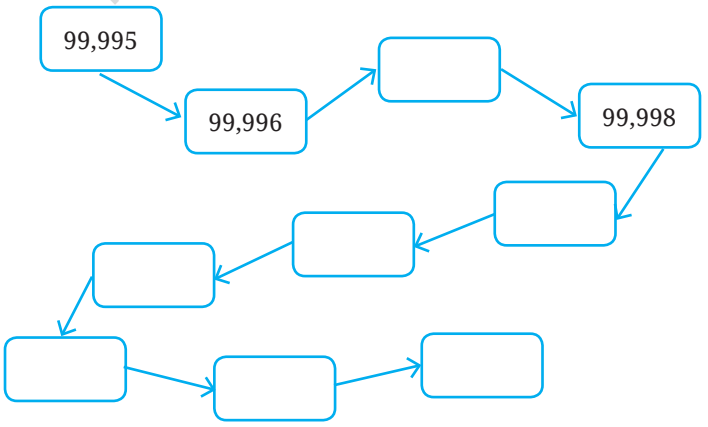
ईस्तूला आपल्या देशात सुमारे एक लाख तांदळाच्या विविध जाती आहेत हे ऐकून आश्चर्य वाटले. तो थक्क झाला, एक लाख आतापर्यंत मी फक्त 3 जातीच्या तांदळांची चव घेतली आहे. जर आपण प्रत्येक दिवशी एका नवीन तांदळाच्या जातीची चव घेतली, तरी आपल्या 100 वर्षाच्या आयुष्यामध्ये या सर्व जातींची चव घेऊ शकेन का? तुम्हाला काय वाटते? याचा अंदाज करू शकाल.

परंतु एक लाख म्हणजे किती? खालीलप्रमाणे दिलेल्या नमुन्यांचे निरीक्षण करा आणि चौकटीत भरा.



1,00,000 हे ''एक लाख'' असे वाचतात.

© MKTBS NOT TO BE REPUBLISHED





रॉक्सी आणि ईस्तू यांना असे आढळून आले की, जरी त्यांनी एका दिवशी एका जातीचा भात (तांदुळ) खाल्ला, तरी ते आपल्या पूर्ण आयुष्यात एक लाखाच्या जवळपास सुद्धा पोहचू शकणार नाहीत! रॉक्सीने सुचविले की, ''जर आपण दररोज 2 प्रकारच्या (जातीचा) भात (तांदुळ) खाल्ला तर काय? त्यावेळी आपल्या 100 वर्षाच्या आयुष्यात एक लाख तांदळाच्या (भाताच्या) जाती खाऊ शकेन का?''



? जर एखाद्या व्यक्तीने प्रत्येक दिवशी 3 प्रकारच्या भाताच्या जाती खाल्या तर काय? ते आपल्या 100 वर्षाच्या आयुष्यात सर्व एक लाख प्रकारच्या भाताची चव घेऊ शकतील का? ते शोधा पाहू.

ईस्तू म्हणाला की, ''एका वर्षामध्ये किती दिवस आहेत ते आपल्याला माहित आहे. ते 365 आहेत. जर आपण लिप वर्षाकडे दुर्लक्ष केले तर, जर आम्ही 'y' वर्षे जगलो तर आपल्या आयुष्यातील दिवसांची संख्या $365 \times y$ होईल.''

? 'y' साठी एका संख्येची निवड करा. तुम्ही निवडलेल्या 'y' वर्षामध्ये दिवसांची संख्या एक लाखाच्या किती जवळ असेल?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. 2011 च्या जणगणनेनुसार चिंतामणी शहराची लोकसंख्या सुमारे 75,000 इतकी होती. तर 75,000 ही संख्या 1,00,000 पेक्षा किती ने लहान आहे?
2. 2024 मधील चिंतामणी शहराची अंदाजे लोकसंख्या 1,06,000 आहे. तर 1,06,000 हे एक लाखपेक्षा किती ने जास्त आहेत?
3. 2011 पासून 2024 पर्यंत चिंतामणीच्या लोकसंख्येत किती ने वाढ झाली आहे?

मोठ्या संख्यांचा अनुभव घेणे.

तुम्ही अशा कांही मनोरंजक गोष्टी ऐकल्या असतील.

- सरदार वल्लभभाई पटेल यांचा जगातील सर्वात उंच पुतळा हा गुजरातमधील ''स्टॅच्यु ऑफ युनिटी'' आहे. ज्याची उंची 180 मीटर इतकी आहे.
- कर्नाटकामधील कुंचिकल धबधबा सुमारे 450 मीटर उंचीवरून पडतो.

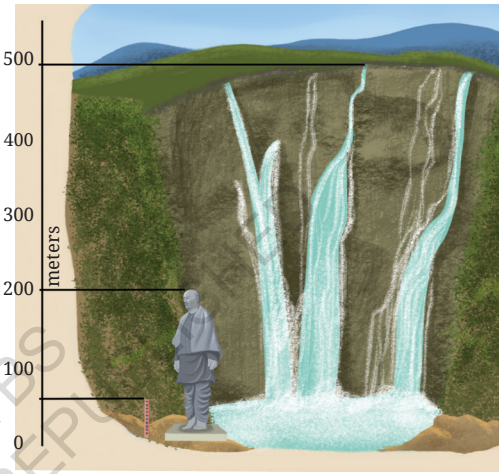
ही मोजमापे किती मोठी आहेत याची कल्पना करणे नेहमी सोपे असतेच असे नाही. परंतु जेव्हा आम्ही त्यांची तुलना एका परिचित गोष्टीशी करतो, तेव्हा आपल्याला त्यांच्या आकारांची कल्पना येते. चला तर आपण आता एक उदाहरण पाहूया.



उजवीकडील चित्राकडे पहा. सोमू हा 1 मीटर उंच आहे. जर प्रत्येक मजला हा त्याच्या उंचीपेक्षा सुमारे पाचपट आहे. तर इमारतीची अंदाजे उंची किती आहे?

? स्टॅच्यू ऑफ युनिटी किंवा ही इमारत यापैकी कोण अधिक उंच आहे? कितीने ती उंच आहे? _____ मीटर.

आपण पाहू शकतो की, स्टॅच्यू ऑफ यूनिटी ही सोमूच्या इमारतीपेक्षा जवळपास 4 पट उंचीने अधिक आहे.



? कुंचिकल धबधबा हा सोमूच्या इमारतीपेक्षा उंचीने किती जास्त आहे? _____ मी.

? धबधब्या इतकी उंची होण्यासाठी सोमूच्या इमारतीला किती मजले असावे लागतील?

_____

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एक लाख ही खूप मोठी संख्या आहे का?

ईश्वरप्पानी रॉक्सी आणि ईस्तू याना विचारले की, ''एक लाख ही मोठी आहे की लहान?''

रॉक्सीला वाटते की, 1 लाख ही मोठी संख्या आहे.



- आपल्याकडे एक लाख प्रकारच्या भाताच्या जाती आहेत. ही खूप मोठी संख्या आहे.
- 1 लाख दिवस जगणे म्हणजेच 274 वर्षे जगणे होय. हा खुप मोठा कालावधी आहे.
- ''जर 1 लाख लोक खांद्याला खांदा लावून रेषेत उभे राहिले तर 38 किलोमीटरपर्यंत ते लांब पसरु शकतात.''

तरीपण, ईस्तूला वाटते की ती फार मोठी संख्या नाही.



- तुम्हाला हे माहित आहे का? अहमदाबादमधील क्रिकेट स्टेडियमची आसन क्षमता 1 लाखापेक्षा जास्त आहे? इतक्या छोट्याशा जागेमध्ये 1 लाख लोक !''
- बहुतेकपणे मानवाच्या डोक्यावर 80,000 ते 1,20,000 इतके केस असतातः कल्पना करा की, इतक्या छोट्या जागेमध्ये 1 लाख केस आहेत?''
- ''मी असे ऐकले आहे की, माशांच्या काही प्रजातीमध्ये मादी मासा एकाचवेळी जवळपास 1 लाख अंडी सहजपणे घालू शकतात. तर कांही मासे एकाचवेळी लाखो अंडी घालतात''.

? तुम्ही एक लाखाकडे कसे पहाल, एक लाख ही लहान आहे की मोठी?

संख्या वाचणे आणि लिहिणे

आपण यापूर्वीच भारतीय स्थान मूल्य पध्दतीमध्ये 45,830 यासारख्या 5-अंकी संख्यासाठी स्वल्पविरामचा उपयोग केलेला आहे. जसजशा संख्या मोठ्या होत जातात तसतसे स्वल्पविराम वापरल्याने संख्या सहजपणे वाचता येतात. तुम्ही यापूर्वी पाहिल्याप्रमाणे 'दश सहस्त्र' आणि 'एक लाख' या स्थानातील अंकासाठी आपण स्वल्पविरामचा वापर केला आहे. जसे की (1,00,000).

12,78,830 ही संख्या अक्षरात बारा लाख अठ्ठ्याहत्तर हजार आठशे तीस अशी आहे. त्याचप्रमाणे, 15,75,000 ही संख्या अक्षरांमध्ये पंधरा लाख पंच्याहत्तर हजार आहे. खालीलप्रमाणे दिलेल्या प्रत्येक संख्या शब्दामध्ये लिहा.

a) 3,00,600
b) 5,04,085
c) 27,30,000
d) 70, 53,138

खालील प्रत्येकासाठी भारतीय स्थान मूल्य पध्दतीमध्ये संबंधित संख्या लिहा.

a) एक लाख तेवीस हजार चारशे छपन्न.
b) चार लाख सात हजार सातशे चार.
c) पन्नास लाख पाच हजार पन्नास.
d) दहा लाख दोनशे पस्तीस.

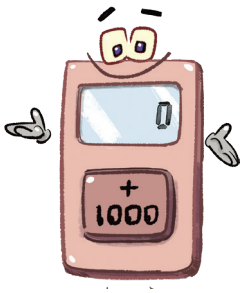
© KSEEB NOT TO BE REPUBLISHED

शिक्षकांसाठी टीप: विद्यार्थ्यांना या गोष्टीविषयी संबंध जोडण्यास मदत करा. उदाहरणार्थ, चिंतामणी शहरातील संपूर्ण लोकसंख्या स्टेडियममध्ये बसू शकेल का? एक लाख लोक, 38 कि.मी लांबीची रांग करून स्टेडियममध्ये एकमेकांच्या शेजारी बसलेले आहेत, याची आपण कशी कल्पना करू शकतो?

1.2 दहाचे जग

दहाच्या जगामध्ये, विशेष बटणे असलेली विशेष गणकयंत्रे (कॅल्क्यूलेटर) आहेत.

1. **विचारी हजारामध्ये** फक्त +1000 हे बटण आहे. तर खालील घटना दर्शविण्यासाठी ते बटण किती वेळा दाबले पाहिजेत,



   a) तीन हजार? 3 वेळा
   b) 10,000? _____
   c) त्रेपन्न हजार? _____
   d) 90,000? _____
   e) एक लाख? _____
   f) _____ 153 वेळा
   g) एक लाख तयार करण्यासाठी किती हजार लागतील?

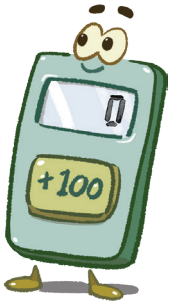
2. **कंटाळवाणे दहा** यामध्ये फक्त +10 हे बटण आहे. तर खालील संख्या दर्शविण्यासाठी ते बटण किती वेळा दाबावे लागेल,



   a) पाचशे? _____
   b) 780? _____
   c) 1000? _____
   d) 3700? _____
   e) 10,000? _____
   f) एक लाख? _____
   g) _____? 435 वेळा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. **सुलभ शंभरी** मध्ये फक्त +100 हे बटण आहे तर खालील संख्या दर्शविण्यासाठी ते बटण किती वेळा दाबावे लागेल.



a) चारशे? _____ वेळा

b) 3,700? _____

c) 10,000? _____

d) त्रेपन्न हजार? _____

e) 90,000? _____

f) 97,600? _____

g) 10,000? _____

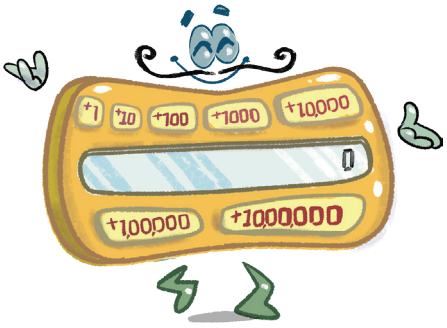
h) _____? 582 वेळा

i) दहा हजार तयार करण्यासाठी किती शंभरांची आवश्यकता आहे?

j) एक लाख तयार करण्यासाठी किती शंभरांची आवश्यकता आहे?

k) सुलभ शंभरी म्हणतो, ''तेथे काही संख्या आहेत ज्या कंटाळवाण्या दहा आणि विचारी हजारमध्ये दर्शविल्या जाऊ शकत नाहीत परंतु मी त्याना दर्शवू शकतो.'' हे विधान सत्य आहे का? विचार करून शोध घ्या.

4. सर्जनशील (निर्मितीक्षम) चिट्ठी हे वेगळ्या प्रकारचे गणकयंत्र आहे. त्यामध्ये +1, +10, +100, +1000, +10,000, + 100000 आणि 1000000 ही बटणे आहेत. ते नेहमी गोष्टीना अनेक प्रकारे करते. ''ते कसे''? असे तुम्ही विचाराल. 321 ही संख्या मिळविण्यासाठी ते +10 हे बत्तीस वेळा आणि +1हे बटण एकदा दाबावे. तेव्हा 321 मिळतील का? पर्यायीरित्या +100 हे तीन वेळा, +10 हे 2 वेळा आणि +1हे 1वेळा दाबून मिळते.



5. 5072 मिळविण्याच्या अनेक प्रकारापैकी ते मिळविण्याचे दोन प्रकार खालीलप्रमाणे आहेत. हे दोन प्रकारे असे व्यक्त केले जाऊ शकते,

a) $(50\times100)+(7\times10)+(2\times1) = 5072$

b) $(3\times1000)+(20\times100)+(72\times1) = 5072$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? 5072 हे वेगळ्या प्रकारे कसे लिहिले जाते ते शोधा आणि व्यक्त करण्याची पध्दत लिहा.

बटणे	5072	
+10,00,000		
+1,00,000		
+10,000		
+1,000		3
+100	50	20
+10	7	
+1	2	72

? शोधा पाहू. (Figure it out)

खालीलप्रमाणे दिलेल्या प्रत्येक संख्येसाठी, बटणे दाबून संख्या मिळविण्याच्या कमीतकमी दोन वेगवेगळ्या पध्दती लिहा. चिठ्ठीसारखा विचार करा आणि सर्जनशील बना.

a) 8300
b) 40629
c) 56354
d) 66666
e) 367813

सर्जनशील चिठ्ठीकडे तुमच्यासाठी कांही प्रश्न आहेत.

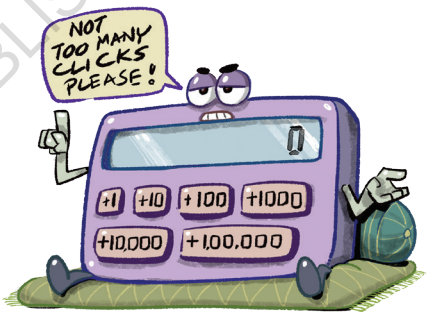
a) तुम्हाला बटणे फक्त 30 वेळा दाबायची आहेत. तर तुम्ही तयार केलेली मोठ्यात मोठी 3-अंकी संख्या कोणती? तुम्ही तयार केलेली सर्वात लहान 3-अंकी संख्या कोणती असेल?

b) 25 वेळा बटणे दाबून 997 ही संख्या तयार केली जाऊ शकते? तुम्ही 997 ही संख्या वेगवेगळ्या संख्येची बटणे दाबून बनवू शकाल का?

अशा प्रकारचे प्रश्न तयार करा तुमच्या वर्गमित्रांना आव्हान द्या.

पध्दतशीर सिप्पी हे एक वेगळ्या प्रकारचे गणकयंत्र आहे. त्यामध्ये +1, +10,+100, +1000, +10000, +100000 ही बटणे आहेत. ती शक्य तितक्या कमीतकमी वेळा वापरायची आहेत.

? शक्य तितक्या कमीतकमी वेळा बटणे दाबून a) 5072 b) 8300 या संख्या तुम्ही कशा मिळवाल?



बटणे	5072
+10,00,000	
+1,00,000	
+10,000	
+1,000	5
+100	0
+10	6
+1	12

© KIRBS NOT TO BE REPUBLISHED

कोष्टकामध्ये दिलेल्या संख्या मिळविण्यासाठी कोणते बटण किती वेळा दाबावे लागेल ते शोधा. हेतू असा आहे की, बटणाचा कमीतकमी वापर करणे. येथे 5072 ही संख्या मिळविण्याची एक पध्दत आहे. या पध्दतीमध्ये एकूण 23 वेळा बटणे दाबलेली आहेत. 23 पेक्षा कमीवेळा बटणे दाबून 5072 ही संख्या मिळविण्याची दुसरी पध्दत शक्य आहे का?
ते व्यक्त करण्याची पध्दत लिहा.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. मागील स्वाध्यायमधील उदाहरणातील प्रत्येक संख्या मिळविण्यासाठी कमीत कमी वेळा बटणे दाबून ती संख्या कशी मिळवाल याचा शोध घ्या आणि ते व्यक्त करण्याची पध्दत लिहा.
2. प्रत्येक संख्या आणि कमीतकमी बटणाचा वापर यामध्ये तुम्हाला कोणताही संबंध दिसून येतो का?
3. तुम्ही पाहिलत का, कमीतकमी बटण दाबण्याची/व्यक्त करण्याची पध्दत सुध्दा संख्याचे भारतीय स्थान मूल्यच दर्शवितात. हे असे का आहे? याविषयी विचार करा.

गणिती बोल

जर आम्ही +10,00,000 हे बटण दहा वेळा दाबले? तर कोणती संख्या येईल? त्यामध्ये शून्याची संख्या किती आहे? आम्ही त्याला काय म्हणू शकतो? ती संख्या 100 लाख असेल, त्याला कोटी सुध्दा म्हणतात. 1 कोटी हे 1,00,00,000 असे लिहितात, म्हणजेच एक नंतर सात शून्य येतात.

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

1.3 कोटीच्या कोटी !

खालील कोष्टकामध्ये कांही संख्या या भारतीय पध्दत आणि अमेरिकन पध्दत (आंतराष्ट्रीय पध्दत) या दोन्ही पध्दतीनुसार संख्याची नांवे आणि स्वल्पविराम देवून दर्शविल्या आहेत. तर दोन्ही पध्दतीतील स्वल्पविरामचे स्थान याचे निरीक्षण करा.

भारतीय पध्दत		अमेरिकन पध्दत	
1,000	एक हजार	1,000	एक हजार
10,000	दहा हजार	10,000	दहा हजार
1,00,000	एक लाख	100,000	शंभर हजार
10,00,000	दहा लाख	1,000,000	एक मिलियन
1,00,00,000	एक कोटी	10,000,000	दहा मिलियन
10,00,00,000	दहा कोटी	100,000,000	शंभर मिलियन
1,00,00,00,000	एक अरब किंवा शंभर कोटी	1,000,000,000	एक बिलियन

लक्षात घ्या की, भारतीय पध्दतीमध्ये स्वल्पविराम हे उजवीकडून डावीकडे 3-2-2-2... या नमुन्यामध्ये अंकाचा गट करण्यासाठी ठेवले जातात. (हजार, लाख कोटी इ.) अमेरिकेच्या पध्दतीमध्ये अंकाच्या सारख्याच गटामध्ये उजवीकडून डावीकडे 3-3-3-3... या नमुन्यामध्ये गट केले जातात (हजार, मिलीयन, बिलीयन इ.). संख्यांची नांवे देण्याची भारतीय पध्दत ही भुतान, नेपाळ, श्रीलंका, पाकिस्तान, बांगलादेश, मालदिव्ह, अफगाणिस्तान आणि म्यानमार या देशात सुद्धा वापरतात. लाख आणि कोटी हे शब्द संस्कृत शब्द 'लक्ष' आणि 'कोटी' यापासून घेण्यात आलेले आहेत, अमेरिकन पद्धतीचा सुध्दा वापर अनेक देशामध्ये केला जातो.

एक लाख आणि 1 कोटी यामध्ये असलेल्या शून्यांच्या संख्येचे निरीक्षण करा.

1 लाख हे संख्येमध्ये लिहिताना 1 नंतर 5 शुन्य लिहितात.

1 कोटी हे संख्येमध्ये लिहिताना 1 नंतर 7 शून्य लिहितात.

एक लाख हे हजाराच्या शंभर पट आहे, एक कोटी हे लाखाच्या शंभर पट आहे. आणि 1 अब्ज हे कोटीच्या शंभर पट आहे (म्हणजेच शंभर हजार हे 1 लाख, 100 लाख हे 1 कोटी, आणि 100 कोटी हे 1 अब्ज आहेत.)

? एक हजार लाखामध्ये किती शून्य असतात? _____

? शंभर हजारमध्ये किती शून्य असतात? _____

9876501234 ही संख्या स्वल्पविराम वापरुन सहजपणे वाचता येते.

a) 9,87,65,01,234 → 9 अब्ज 87 कोटी 65 लाख 1 हजार 234 किंवा
987 कोटी 65 लाख 1 हजार 234 (भारतीय पध्दतीमध्ये)

b) 9,876,501,234 → 9 बिलीयन 876 मिलीयन 501 हजार 234 (अमेरिकन पध्दतीमध्ये)

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील संख्या भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीत दर्शवून वाचा आणि त्या अक्षरात भारतीय पध्दत आणि अमेरिकन पध्दत या दोन्हीमध्ये लिहा.

a) 4050678 b) 48121620

c) 20022002 d) 246813579

e) 345000543 f) 1020304050

2. खालील संख्या भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीने दर्शवून लिहा.

a) एक कोटी एक लाख एक हजार दहा.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

b) एक बिलीयन एक मिलियन एक हजार एक.

c) दहा कोटी वीस लाख तीस हजार चाळीस.

d) नऊ बिलीयन ऐंशी मिलीयन सातशे हजार सहाशे.

3. तुलना करा आणि '<', '>' किंवा '=' हे चिन्ह लिहा.

a) 30 हजार – 3 लाख

b) 500 लाख – 5 मिलीयन

c) 800 हजार – 8 मिलीयन

d) 640 कोटी – 60 बिलीयन

आपण पुढील इयत्तेमध्ये या पेक्षा मोठ्या संख्या पाहू शकतो.

1.4 अचूक आणि अंदाजे मूल्ये (किंमती)



© MSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुम्ही या संभाषणाविषयी काय विचार कराल? तुम्ही अशा ठळक बातम्या किंवा विधाने ऐकली आहेत का?

बहुतेक करून येथे अचूक संख्याची गरज नाही आणि फक्त अंदाज सुध्दा पुरेसा आहे. उदाहरणार्थ, 2011 च्या जणगणनेनुसार, चिंतामणी शहराची लोकसंख्या 76,068 इतकी आहे. त्याऐवजी, ते प्रमाण किती मोठे आहे हे दर्शविण्यासाठी लोकसंख्या 75,000 आहे इतके पुरेसे आहे.



अशा कांही घटना असतात की तेथे संख्या जवळपास वाढवून सांगणे योग्य असते. (ज्यावेळी अंदाजे संख्या या वास्तविक संख्येपेक्षा जास्त असतात त्यावेळी.)

उदाहरणार्थ, एका शाळेमध्ये विद्यार्थी, शिक्षक आणि कर्मचारी मिळून 732 लोक आहेत तर मुख्याध्यापक 700 ऐवजी 750 मिठाईची ऑर्डर देऊ शकतात.

काही परिस्थिती अशा असतात की तेथे संख्या जवळपास कमी करून सांगणे चांगले असते (जेव्हा अंदाजे संख्या या वास्तविक संख्येपेक्षा कमी असतात).

उदाहरणार्थ, जर एखाद्या वस्तूची किंमत ₹470 असेल तर तो दुकानदार ₹500 असे सांगण्याऐवजी ₹450 असे सांगतो.

? अशा परिस्थितीचा विचार करा आणि सांगा की, जिथे (a) संख्या वाढवून सांगणे (b) संख्या कमी करून सांगणे. (c) जिथे दोन्हीही वाढवून सांगणे आणि कमी करून सांगणे (d) जेव्हा अचूक संख्येची गरज असते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जवळील शेजारी

मोठ्या संख्या असताना जवळील हजार, लाख किंवा कोटी हे जाणून घेणे उपयोगी पडते उदाहरणार्थ 6,72,85,183 या संख्येच्या जवळील शेजारी खालील कोष्टकामध्ये दर्शविलेले आहेत.

जवळील हजार	6,72,85,000
जवळील दहा हजार	6,72,90,000
जवळील लाख	6,73,00,000
जवळील दहा लाख	6,70,00,000
जवळील कोटी	7,00,00,000

? त्याचप्रमाणे, खालील संख्यासाठी जवळील शेजारी पाच संख्या लिहा.

(a) 3,87,69,957 (b) 29,05,32,481

? माझ्याकडे एक संख्या आहे जिचे सर्व जवळील शेजारी 5,00,00,000 आहेत ती संख्या कोणती असू शकेल? अशा किती संख्या आहेत?

गणिती बोल

रॉक्सी आणि ईस्तू साध्या राशींचे अंदाजे मुल्य काढत आहेत.

1) 4,63,128 + 4,19,682

रॉक्सी : ''यांची बेरीज 8,00,000 च्या जवळ आणि 8,00,000 पेक्षा जास्त आहे.''

ईस्तू : ''यांची बेरीज 9,00,000 च्या जवळ आणि 9,00,000 पेक्षा कमी आहे.''

a) हे अंदाज बरोबर आहेत का? कोणाचा अंदाज बेरजेच्या जवळ आहे?

b) यांची बेरीज 8,50,000 पेक्षा जास्त किंवा 8,50,000 पेक्षा कमी आहे? तुम्ही असा विचार का कराल?

c) यांची बेरीज 8,83,128 पेक्षा जास्त किंवा 8,83,128 पेक्षा कमी आहे? तुम्ही असा विचार का कराल?

d) 4,63,128 + 4,19,682 चे अचूक मूल्य = _____

2) 14,63,128 – 4,90,020

रॉक्सी : ''हा फरक 10,00,000 च्या जवळील आणि 10,00,000 पेक्षा कमी आहे.''

ईस्तू : ''हा फरक 9,00,000 च्या जवळील आणि 9,00,000 पेक्षा जास्त आहे.''

a) हे अंदाज बरोबर आहेत का? कोणाचा अंदाज फरकाच्या जवळील आहे?

b) हा फरक 9,50,000 पेक्षा जास्त किंवा 9,50,00 पेक्षा कमी आहे? तुम्ही असा विचार का कराल?

© KSEB NOT TO BE REPUBLISHED

c) हा फरक 9,63,128 पेक्षा जास्त किंवा 9,63,128 पेक्षा कमी आहे? तुम्ही असा विचार का कराल?

d) 14,63,128 – 4,90,020 चे अचूक मूल्य = _____

शिक्षकांच्यासाठी सूचना : विद्यार्थ्यांना असे प्रश्न विचारा की; बेरीज 8,50,000 पेक्षा कमी होणाऱ्या संख्या कोणत्या असतील?

शहरांची लोकसंख्या

खालीलप्रमाणे दिलेल्या कोष्टकामधील कांही भारतीय शहरांच्या लोकसंख्येचे निरीक्षण करा.

क्रमांक	शहर	लोकसंख्या (2011)	लोकसंख्या (2001)
1	मुंबई	1,24,42,373	1,19,78,450
2	नवी दिल्ली	1,10,07,835	98,79,172
3	बेंगळुरु	84,25,970	43,01,326
4	हैदराबाद	68,09,970	36,37,483
5	अहमदाबाद	55,70,585	35,20,085
6	चेन्नाई	46,81,087	43,43,645
7	कोलकत्ता	44,86,679	45,72,876
8	सुरत	44,67,797	24,33,835
9	वडोदरा	35,52,371	16,90,000
10	पुणे	31,15,431	25,38,473
11	जयपूर	30,46,163	23,22,575
12	लखनौ	28,15,601	21,85,927
13	कानपूर	27,67,031	25,51,337
14	नागपूर	24,05,665	20,52,066
15	इंदूर	19,60,631	14,74,968
16	ठाणे	18,18,872	12,62,551
17	भोपाळ	17,98,218	14,37,354
18	विशाखापट्टणम	17,28,128	13,45,938
19	पिंपरी-चिंचवड	17,27,692	10,12,472
20	पटना	16,84,222	13,66,444

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? कोष्टकामध्ये दिलेल्या माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे अंदाजावरून द्या.

1. या सामग्री विषयी तुमचे सर्वसाधारण निरीक्षण काय? तुमच्या वर्गासोबत चर्चा करा.
2. वरील कोष्टकासाठी योग्य शिर्षक काय आहे?
3. 2011 मध्ये पुण्याची लोकसंख्या किती होती? 2001 च्या तुलनेत अंदाजे किती वाढ झाली आहे.
4. 2001 ते 2011 च्या दरम्यान कोणत्या शहराच्या लोकसंख्येत जास्तीत जास्त वाढ झाली?
5. अशी कोणती शहरे आहेत ज्यांची लोकसंख्या जवळजवळ दुप्पट झाली आहे? ती कोणती आहेत?
6. मुंबईच्या लोकसंख्येच्या जवळपास येण्यासाठी आपणाला पटनाच्या लोकसंख्येला कितीने गुणले पाहिजेत?

1.5 गुणाकारातील नमुने

रॉक्सी आणि ईस्तू गुणाकारासोबत खेळत आहेत. त्याना 10,100,1000 इ. संख्याच्या गुणाकाराचे एक मनोरंजक तंत्र सापडले आहे.

गुणाकाराचा एक सोपा (लघु) मार्ग

रॉक्सीने 116×5 चे खालील प्रमाणे मुल्य सोडविले आहे.

$$116 \times 5 = \overset{58}{\cancel{116}} \times \frac{10}{\cancel{2}}$$
$$= 58 \times 10$$
$$= 580$$

ईस्तूने 824×25 चे मूल्य खालील प्रमाणे सोडविले आहे.

$$824 \times 25 = \overset{206}{\cancel{824}} \times \frac{100}{\cancel{4}}$$
$$= 20600$$

? तुम्ही गुणाकार आणि भागाकार यांचा अर्थ वापरुन 5 ने गुणाकार करणे हे 2 ने भागाकार करून 10 ने गुणाकार करणे याच्याशी सारखेच आहेत हे स्पष्ट करु शकता का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. या गुणाकाराची जलद गणना करण्याची पध्दत शोधा.

   (a) $2 \times 1768 \times 50$

   (b) 72×125 [सुचना $125 = 1000/8$]

   (c) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

2. जलदपणे खालील संख्यांचा गुणाकार करा.

   a) $25 \times 12 =$ _____

   b) $25 \times 240 =$ _____

   c) $250 \times 120 =$ _____

   d) $2500 \times 12 =$ _____

   e) _____ × _____ 12,00,00,000

गुणाकार किती मोठा आहे?

खालील प्रत्येक चौकटीतील गुणाकार हा मनोरंजक नमुने बनवितो ते सोडवा आणि नमूने शोधा, निरीक्षण केलेल्या नमुन्यावर आधारीत गुणाकार वाढवा.

$11 \times 11 =$ $111 \times 111 =$ $1111 \times 1111 =$	$66 \times 61 =$ $666 \times 661 =$ $6666 \times 6661 =$
$3 \times 5 =$ $33 \times 35 =$ $333 \times 335 =$	$101 \times 101 =$ $102 \times 102 =$ $103 \times 103 =$

प्रत्येक उदाहरणात गुणाकार केलेल्या दोन संख्यांमधील अंकांची संख्या आणि त्यांच्या गुणाकारामधील अंकांची संख्या यांचे निरीक्षण करा. गुणाकार केलेल्या संख्यांमधील अंकांची संख्या आणि त्यांच्या गुणाकारामधील अंकांची संख्या यामध्ये काही संबंध आहे का?

रॉक्सी म्हणते की, दोन अंकी संख्यांच्या गुणाकारामध्ये 3–अंकी किंवा 4–अंकी संख्या आहेत. तिने सांगितलेले बरोबर आहे का?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? रॉक्सीने केलेला दावा खरा आहे किंवा नाही हे सांगण्यासाठी आपल्याला 2-अंकी संख्याचा सर्व संभाव्य गुणाकार करणे आवश्यक आहे का? किंवा तेथे हे शोधण्याचा दुसरा उत्तम मार्ग आहे का?



ती आपल्या तर्काचे स्पष्टीकरण देते, आपल्याला 2-अंकी संख्याच्या गुणाकारातील अंकांच्या संख्येविषयी जाणून घ्यायचे आहे. असा लहानात लहान गुणाकार जाणून घेण्यासाठी मी 10×10 घेतले, त्यामुळे इतर सर्व गुणाकार हे 100 पेक्षा जास्त आहेत. असा सर्वात मोठा गुणाकार समजून घेण्यासाठी मी सर्वात लहान 3-अंकी संख्यांचा (100×100) गुणाकार करून 10,000 मिळविले, त्यामुळे सर्व 2-अंकी संख्यांचा गुणाकार 10,000 पेक्षा कमी असेल''.

? एका 3-अंकी संख्येचा दुसऱ्या 3-अंकी संख्येशी गुणाकार केला असता 4-अंकी संख्या मिळू शकते का?

? 4-अंकी संख्येचा गुणाकार 2-अंकी संख्येशी केला असता 5-अंकी संख्या मिळू शकेल का?

? खालील गुणाकाराच्या विधानाचे निरीक्षण करा. तुमच्या लक्षात एखादा नमुना आला का? पहा की अशा इतर संख्यांसाठी हा नमुना वाढवू शकतो का?

1-अंकी	×	1-अंकी	=	1-अंकी	किंवा	2-अंकी
2-अंकी	×	1-अंकी	=	2-अंकी	किंवा	3-अंकी
2-अंकी	×	2-अंकी	=	3-अंकी	किंवा	4-अंकी
3-अंकी	×	3-अंकी	=	5-अंकी	किंवा	6-अंकी
5-अंकी	×	5-अंकी	=		किंवा	
8-अंकी	×	3-अंकी	=		किंवा	
12-अंकी	×	13-अंकी	=		किंवा	

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

मोठ्या संख्या विषयी अत्यंत मनोरंजक गोष्टी.

मोठ्या संख्याविषयी कांही मनोरंजक गोष्टी खाली दडलेल्या (लपविल्या) आहेत. त्या गोष्टी उघड करण्याकरिता गुणाकार किंवा भागाकार करा, एकदा का गुणाकार किंवा भागाकार तुम्हाला मिळाला, तर भारतीय आणि अमेरिकन या दोन्ही पध्दतीमध्ये अक्षरात लिहून त्या संख्या वाचा. प्रत्येक संख्यांचा शोध घेतल्यानंतर वर्गामध्ये त्याविषयी तुमचे विचार आणि प्रश्न मांडा.

$$1250 \times 380$$

ही पुराणानुसार पुरंदरदासानी रचलेल्या किर्तनांची संख्या आहे.

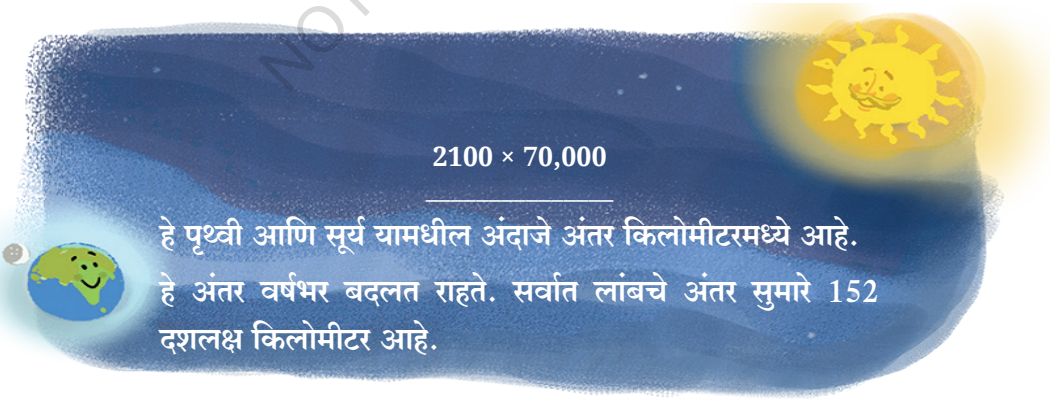


पुरंदरदास हे 15 व्या शतकातील संगीतकार आणि गायक होते. त्यांची किर्तने ही सामाजिक सुधारणा, भक्ती आणि अध्यात्मिकतेवर आधारित होती त्यानी कर्नाटक संगीत शिकविण्याच्या पध्दतीमध्ये पध्दतशीरपणा आणला तो आता सुध्दा पाळला जातो.



इतकी गाणी तयार करण्यासाठी ते किती वर्षे जगले होते? त्यांनी वयाच्या किती वर्षानी गाणी तयार करण्यास सुरवात केली? जर त्यानी एकूण 4,75,000 गाणी तयार केली तर त्याना दर वर्षाला किती गाणी बनवावी लागली?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



$$2100 \times 70,000$$

हे पृथ्वी आणि सूर्य यामधील अंदाजे अंतर किलोमीटरमध्ये आहे. हे अंतर वर्षभर बदलत राहते. सर्वात लांबचे अंतर सुमारे 152 दशलक्ष किलोमीटर आहे.



6400 × 62,500

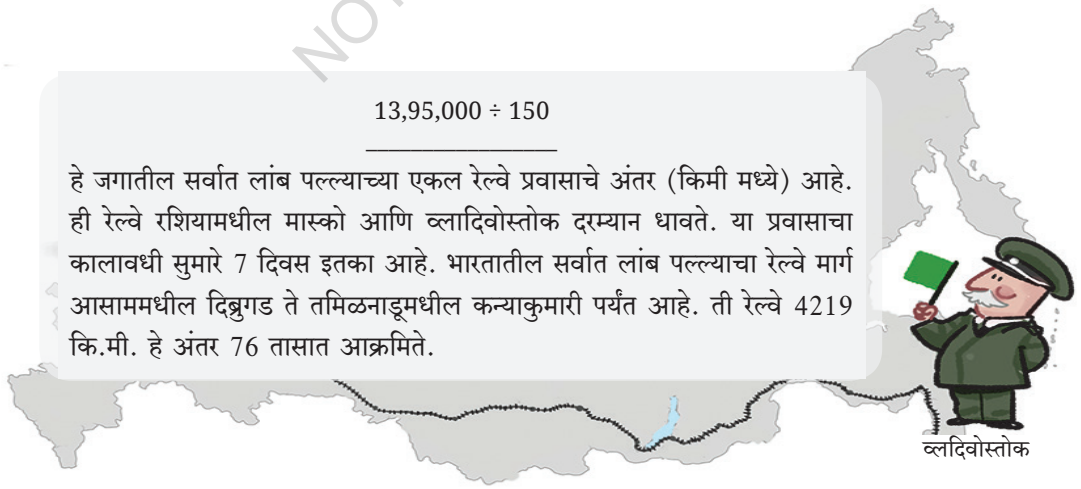
हे अमेझॉन नदीमधून अटलांटिक महासागरामध्ये दर सेकंदाला सोडल्या जाणाऱ्या पाण्याचे सरासरी प्रमाण आहे.
या नदीचा अटलांटिकमध्ये इतका प्रचंड प्रवाह आहे की पिण्यास उपयुक्त गोडे पाणी खुल्या समुद्रामध्ये सुमारे 160 किलो मीटरपर्यंत आढळून येते.

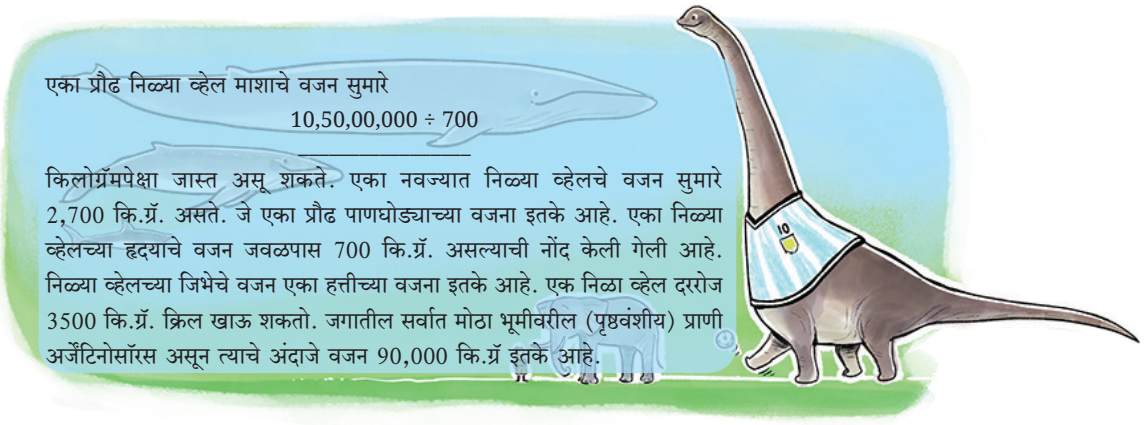
© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

तुम्ही यापूर्वी केल्याप्रमाणे भागाकाराविषयी मनोरंजक गोष्टी उघड करण्याकरिता दिलेल्या संख्यांचा भागाकार करा. प्रत्येक संख्या उघडपणे मिळविल्यानंतर तुमचे विचार आणि प्रश्न वर्गामध्ये मांडा.

13,95,000 ÷ 150

हे जगातील सर्वात लांब पल्ल्याच्या एकल रेल्वे प्रवासाचे अंतर (किमी मध्ये) आहे. ही रेल्वे रशियामधील मास्को आणि व्लादिवोस्तोक दरम्यान धावते. या प्रवासाचा कालावधी सुमारे 7 दिवस इतका आहे. भारतातील सर्वात लांब पल्ल्याचा रेल्वे मार्ग आसाममधील दिब्रुगड ते तमिळनाडूमधील कन्याकुमारी पर्यंत आहे. ती रेल्वे 4219 कि.मी. हे अंतर 76 तासात आक्रमिते.

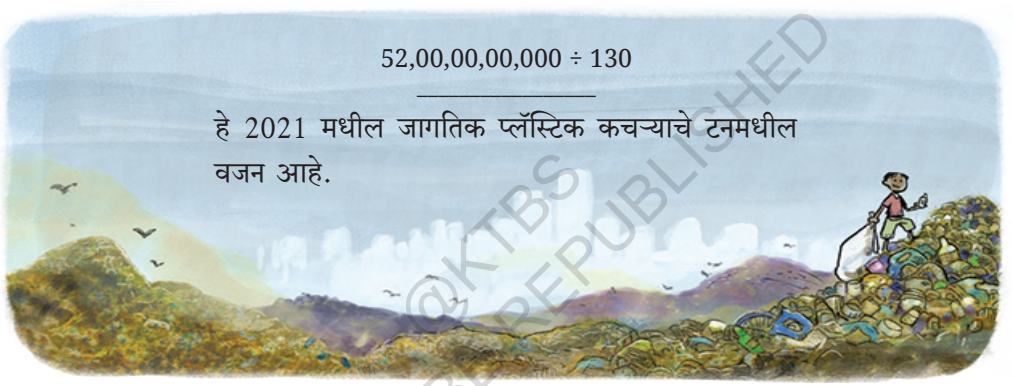




एका प्रौढ निळ्या व्हेल माशाचे वजन सुमारे

$10,50,00,000 \div 700$

किलोग्रॅमपेक्षा जास्त असू शकते. एका नवज्यात निळ्या व्हेलचे वजन सुमारे 2,700 कि.ग्रॅ. असते. जे एका प्रौढ पाणघोड्याच्या वजना इतके आहे. एका निळ्या व्हेलच्या हृदयाचे वजन जवळपास 700 कि.ग्रॅ. असल्याची नोंद केली गेली आहे. निळ्या व्हेलच्या जिभेचे वजन एका हत्तीच्या वजना इतके आहे. एक निळा व्हेल दररोज 3500 कि.ग्रॅ. क्रिल खाऊ शकतो. जगातील सर्वात मोठा भूमीवरील (पृष्ठवंशीय) प्राणी अर्जेंटिनोसॉरस असून त्याचे अंदाजे वजन 90,000 कि.ग्रॅ इतके आहे.



$52,00,00,00,000 \div 130$

हे 2021 मधील जागतिक प्लॅस्टिक कचऱ्याचे टनमधील वजन आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

मोठ्या संख्याची वस्तुस्थिती

एक ग्रॅम उत्तम (सुपिक) मातीमध्ये 100 दशलक्ष (मिलीयन) ते 1 अब्ज (बिलीयन) जिवाणू आणि । लाख ते 1 दशलक्ष (मिलीयन) बुरशी असून ते वनस्पतीच्या वाढीस आणि उत्तम आरोग्यास मदत करु शकतात.

तुम्हाला माहित असलेल्या / तुमच्या जवळपासच्या अशा मोठ्या संख्यांच्या गोष्टी तुमच्या वर्गामध्ये मांडा.

1.6 तुम्हाला कधी आश्चर्य वाटले का .....?

ईस्तूला अशा मोठ्या संख्याविषयीच्या सर्व मनोरंजक गोष्टीनी हसवले. (करमणूक केली) या सर्वा बद्दल विचार करत असताना, त्याच्या मनामध्ये असाधारण प्रश्न आला, ''मुंबईची संपूर्ण लोकसंख्या ही 1 लाख बसमध्ये बसू शकतील का?

तुम्हाला काय वाटते?

आपण हे कसे शोधू शकतो?

आपण असे मानू की, एका बसमध्ये 50 लोक बसू शकतात. तर 1 लाख बसमध्ये

1 लाख × 50 = 50 लाख लोक बसू शकतात.

मुंबईची एकूण लोकसंख्या 1 कोटी 24 लाख (हे आपण मागील कोष्टकात पाहिले आहे.) म्हणून आम्ही सांगू शकतो की मुंबईची सर्व लोकसंख्या 1 लाख बसमध्ये बसू शकत नाही.

? आर एम एस (RMS) टायटॅनिक जहाजामध्ये 2500 प्रवासी होते. तर अशा 5000 जहाजामध्ये मुंबईची संपूर्ण लोकसंख्या बसू शकेल का?



या विचित्र प्रश्नाने प्रेरित होऊन, रॉक्सीने प्रश्न विचारला की, ''जर मी दररोज 100 किलोमीटर प्रवास करते तर 10 वर्षामध्ये मी चंद्रावर पोहचू शकेन का?'' (पृथ्वी आणि चंद्र यामधील अंतर 3,84,400 कि. मी. आहे)

तिने एका वर्षामध्ये किती प्रवास केला असेल?

तिने 10 वर्षामध्ये किती प्रवास केला असेल?

हा गुणाकार टप्याटप्यात करणे हे सोपे नाही का? तुम्ही मोठ्या गुणाकारांच्या गणनेसाठी ही पद्धत वापरू शकता.

? जर तुम्ही 1000 किलोमीटर इतका प्रवास दररोज करत असाल तर तुम्ही तुमच्या आयुष्यात सूर्यावर पोहोचू शकता का? ते शोधा. (या पूर्वीच्या स्वाध्याय मध्ये तुम्ही पृथ्वी आणि सूर्य यामधील अंतर लिहिलेले आहे)

? आवश्यक असणारी उपयुक्त गृहितके तयार करा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) जर एका कागदाच्या पानाचे वजन 5 ग्रॅम आहे तर तुम्ही एकाच वेळी अशा 1 लाख कागदाच्या पानांना एकत्र करून उचलू शकता का?

(b) जर संपूर्ण जगात दर मिनिटाला 250 बाळांनी जन्म घेतला असेल तर एका दिवसामध्ये 1 दशलक्ष (मिलीयन) बाळांनी जन्म घेतलेला असेल का?

(c) तुम्ही एका दिवसात 1 दशलक्ष (1 मिलीयन) नाणी मोजू शकाल का? दर सेंकदाला एक नाणे तुम्ही मोजाल असे गृहीत धरा.

(d) विचार करा आणि असे गमतीदार प्रश्न तयार करा आणि ते तुमच्या वर्गामध्ये मांडा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. 0–9 पर्यंतचे सर्व अंक फक्त एकदाच वापरून (पहिला अंक 0 असू शकत नाही) 10–अंकी संख्या तयार करा. खालील संख्या लिहा.
   (a) 5 च्या पटीतील सर्वात मोठी संख्या.
   (b) लहानात लहान सम संख्या.
2. 10,30,285 ही संख्या शब्दामध्ये दहा लाख तीस हजार दोनशे पंच्याऐंशी आहे. ज्यामध्ये 43 अक्षरे आहेत. तर सर्वात जास्त अक्षरे असलेली 7–अंकी संख्या लिहा.
3. एक 9–अंकी संख्या लिहा, ज्यामधील कोणत्याही दोन अंकाची अदलाबदल करून एक सर्वात मोठी संख्या तयार होते. तर अशा किती संख्या अस्तित्वात आहेत?
4. 12345123451234512345 या संख्येमधून 10 अंक असे काढून टाका की राहिलेली संख्या मोठ्यात मोठी होईल.
5. 'Zero' आणि 'One' या इंग्रजी शब्दामध्ये 'e' आणि 'o' ही अक्षरे समानरीत्या आहेत. 'One' आणि 'Two' या शब्दामध्ये 'o' अक्षर समानरीत्या आहे. आणि 'Two' आणि 'three' या शब्दामध्य सुद्धा, 't' अक्षर समानरीत्या आहे. तर तुम्हाला दोन क्रमवार संख्यामध्ये कोणतीही दोन अक्षरे नसलेल्या किती संख्या असतील?
6. समजा की तुम्ही 1,2,3,4, ... 9, 10, 11 या सर्व संख्या लिहिल्या तर 10 या संख्येचा भाग असलेल्या तुम्ही लिहिलेला दहावा अंक '1' आणि अकरावा अंक '0' आहे.

   हे प्रयत्न करा

   (a) 1000 वा अंक काय असेल? तो कोणत्या संख्येवर येईल?
   (b) दशलक्षवा (मिलीयनवा) अंक कोणत्या संख्येत असेल?
   (c) तुम्ही 5000 व्या वेळी '5' हा अंक कधी लिहिला असेल?
7. गणक यंत्रामध्ये फक्त '+10,000' आणि '+100' ही बटणे आहेत तर खालील संख्या बनविण्यासाठी किती बटणे दाबावी लागतील यांची राशी लिहा.

   हे प्रयत्न करा

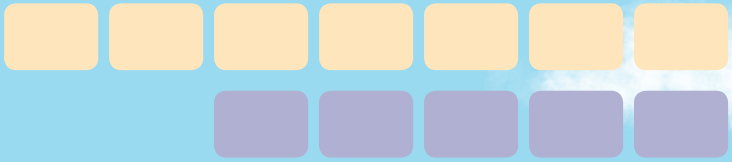
   (a) 20,800 (b) 92,100 (c) 1,20,500
   (d) 65,30,000 (e) 70,25,700
8. किती लाखापासून एक अब्ज (बिलीयन) बनतील?
9. 1–9 पर्यंत अंक लिहिलेले दोन पत्त्यांचे संच तुम्हाला दिलेले आहेत. प्रत्येक संचामधील पत्ता खाली ठेवून येणारी संख्या ही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



(a) शक्य तितकी सर्वात मोठी बेरीज

(b) दोन मिळणाऱ्या संख्यामधील फरक सर्वात लहान असेल.



10. तुम्हाला 4000, 13000, 300, 7000, 150000, 20, 5 असलेले पत्ते दिलेले आहेत वरील पत्ते वापरुन, कोणत्याही क्रिया वापरून तुम्हाला खालील संख्याच्या शक्य तितक्या जवळ जायचे आहे. एका विशिष्ट संख्येसाठी वरील पत्त्यांचा वापर फक्त एकदाच करायचा आहे.

(a) 1,10,000 च्या सर्वात जवळची मी तयार केलेली संख्या $4000\times(20+5)+13000 = 1,18,000$

(b) 2,00,000 =

(c) 5,80,000 =

(d) 12,45,000 =

(e) 20,90,800 =



11. प्रत्येक नाणे 1 मि.मी. जाडीचे आहे असे गृहित धरून स्टॅच्यू ऑफ यूनिटीच्या उंचीशी जवळपास येण्यासाठी किती नाणी एकमेकावर ठेवावी लागतील?

12. ग्रे-हेडेड अल्बाट्रॉस या पक्षाचे पंख अंदाजे 7 फूट रुंदीचे असतात. ते स्थलांतर करण्यासाठी अनेक महासागर ओलांडून जातात असे मानले जाते दररोज अल्बाट्रॉस 900-1000 कि.मी. अंतर पार करु शकतात नोंदणीकृत सर्वात लांब पल्ल्याच्या एकेरी प्रवासापैकी एक सुमारे 12,000 कि.मी. आहे तर पॅसिफिक महासागर पार करण्यासाठी अशा प्रवासाला अंदाजे किती दिवस लागतील?

13. बार-टेल्ड गॉडविट पक्षाने सर्वात लांब न थांबता उड्डाण करण्याचा विक्रम केलेला आहे. त्याने अलास्का ते ऑस्ट्रेलिया यामधील 13,650 कि.मी चा प्रवास न थांबता केलेला आहे. हा प्रवास 13 ऑक्टोबर 2022 रोजी सुरु झाला आणि नियमित सुमारे 11 दिवस सुरू होता. तर त्याने प्रत्येक दिवशी आक्रमिलेले अंदाजे अंतर काढा. तसेच त्याने प्रत्येक तासाला आक्रमिलेले अंदाजे अंतर काढा.

14. टक्कल-गरुड हा पक्षी जमिनीपासून वर सुमारे 4500-6000 मी उंचीवर उडतो असे मानले जाते. माऊंट एव्हरेस्ट हे शिखर सुमारे 8850 मी उंच आहे. विमाने सुमारे 10,000-12,800 मी. उंचीवरून उड्डाण करतात. तर सोमुच्या इमारतीच्या उंचीशी तुलना केली असता याची उंची किती पट आहे?



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- आम्ही मोठ्या संख्यांना जवळून पाहिले आहे. लाख, कोटी, अब्ज, मिलीयन आणि बिलीयन आम्ही या संख्यांचे नामकरण भारतीय / अमेरिकन पध्दतीमध्ये करून त्याना कसे लिहायचे आणि वाचायचे याचा अभ्यास केला आहे.
  - a) एक लाख म्हणजेच 1 नंतर 5 शून्य येतात : 1,00,000
  - b) 1 कोटी म्हणजेच 1 नंतर 7 शून्य येतात: 1,00,00,000
  - c) 1 दशलक्ष (मिलीयन) म्हणजेच 1 नंतर 9 शून्य येतात: 1,000,000 (जे 10 लाख सुध्दा आहेत)
  - d) 1 अरब (अब्ज) म्हणजेच 1 नंतर 9 शून्य येतात: 1,000,000,000 (जे 100 कोटी किंवा 1 बिलीयन सुध्दा आहेत)
- आम्ही सामान्यपणे मोठ्या संख्यांना जवळची मोठी आणि जवळील लहान यामध्ये घेतो. कित्येकवेळा आम्हाला एखादी संख्या किती मोठी किंवा किती लहान आहे हे जाणून घेण्यास पुरेसे आहे.
- मोठ्या संख्येची किंवा प्रमाणाची जाणीव होण्यासाठी, आपण हे तपासू शकतो की, आपल्याला परिचित असलेल्या संख्येपेक्षा किंवा प्रमाणाच्या तुलनेत किती पटीने मोठे आहेत ते समजू शकतो.
- संख्यांचे अवयव कसे काढायचे आणि त्यांचा पुन्हा गट करून गुणाकार सोपा कसा करायचा ते आम्ही पाहिले आहे.
- आम्ही मनोरंजक विचार आणि प्रयोग केलेले आहेत, जसे की, एखाद्याला एका वर्षामध्ये 1000 चित्रपट कसे पाहता येतील.

@KEPS NOT TO BE REPUBLISHED



कोड्याची वेळ !

काड्यापासून अंक

खालील चित्रात दाखविल्याप्रमाणे आपण अंक लिहू शकतो:



तुम्ही दाताच्या काड्या किंवा आगपेटीच्या काड्या किंवा काड्या दर्शविणाऱ्या रेषा वापरुन अशा प्रकारे अंक लिहू शकतो. 7 हा अंक तयार करण्यासाठी 3 काड्या लागतात.

5108 ही संख्या लिहा किंवा बनवा. त्यासाठी किती काड्या लागतील?

1. 42019 ही संख्या लिहा किंवा बनवा. ती तयार करण्यासाठी अचूकपणे 23 काड्या लागतील.
2. 42,019 पासून सुरवात करून आणखी दोन काड्या जोडा किंवा लिहा आणि मोठ्यात मोठी संख्या बनवा. यासाठी एक उदाहरण 42,078 हे आहे. अशा प्रकारे तुम्ही 42,019 पेक्षा मोठी कोणती संख्या बनवू शकाल?
3. प्रीतमला '4', '2', '0', '1' आणि '9' या अंकाच्यामध्ये 1 हा अंक लिहून सर्वात मोठी संख्या बनवायची आहे तर तो '1' हा अंक कुठे ठेवेल?
4. '1' हा अंक ठेवून तो आणखी कोणत्या संख्या बनवू शकतो?

1. 63,890 ही संख्या बनवा किंवा लिहा.
2. 63,890 पासून सुरूवात करून अगदी चार काड्यांची पुन्हा मांडणी करून एक मोठ्यात मोठी संख्या बनवा. त्याचे एक उदाहरण म्हणजे 88078 आहे. अशारितीने तुम्ही 63,890 पेक्षा मोठी कोणती संख्या बनवू शकाल?

1. बरोबर (अगदी) 24 काड्या किंवा रेषा वापरून कोणतीही संख्या बनवा.
2. 24 काड्या किंवा रेषा वापरून कोणती सर्वात मोठी संख्या तयार होते?
3. 24 काड्या किंवा रेषा वापरून सर्वात लहान कोणती संख्या तयार होते?

तुमचे स्वतःचे प्रश्न तयार करा आणि एकमेकांना आव्हान द्या.



NCERT (OKTS) NOT TO BE REPUBLISHED

2 अंकगणिती पदावल्या

(ARITHMETIC EXPRESSIONS)

U9A311

2.1 साधी (सोपी) पदावली.

तुम्ही 13+2, 20−4, 12×5 आणि 18÷3 यासारखी गणिती वाक्ये पाहिली असतील अशा वाक्यांना **अंकगणिती पदावली** असे म्हणतात.

प्रत्येक गणिती राशीला एक मूल्य असते ते त्या संख्येचे मुल्यांकन करते. उदाहरणार्थ 13+2 या राशीचे मूल्य 15 हे आहे. ही राशी '13' आधिक '2' अशी वाचली जाते किंवा '13' आणि '2' यांची बेरीज असे वाचतात.

आपण अंकगणिती पदावली आणि त्यांचे मूल्य यामधील संबंध दर्शविण्यासाठी समानता (=) या चिन्हाचा वापर करतो.

उदाहरणार्थ 13+2=15

? **उदाहरण 1:** मल्लिका दररोज शाळेमध्ये दुपारच्या जेवणासाठी ₹ 25 खर्च करते. तर एका आठवड्यामध्ये सोमवारपासून शुक्रवारपर्यंत दुपारच्या जेवणासाठी खर्च केलेल्या रक्कमेची पदावली लिहा.

एकूण रक्कमेची राशी 5×25 ही आहे.

5×25 म्हणजे ''25'' हे ''5'' वेळा किंवा ''5'' आणि ''25'' यांचा गुणाकार आहे. वेगवेगळ्या पदावलींचे मूल्य समान असू शकते. दोन संख्या आणि +, −, ×, ÷ या चार पैकी कोणतीही एक क्रिया वापरून 12 या संख्येची पदावली (राशी) व्यक्त करण्याच्या अनेक पध्दती आहेत.

10+2, 15−3, 3×4, 24÷2

? तुमच्या आवडीची संख्या घ्या आणि समान मूल्य असलेल्या जास्तीत जास्त पदावली लिहा.

पदावलींची तुलना करणे

आम्ही '=', '<' आणि '>' या चिन्हांचा वापर करून तुलना करताना पदावलींची सुद्धा तुलना करू शकतो. आपण पदावलीची तुलना त्यांच्या मुल्यावर आधारीत करतो आणि त्यानुसार 'समान' (=) 'पेक्षा मोठे' (>) किंवा 'पेक्षा लहान' (<) ही चिन्हे लिहितो.

उदाहरणार्थ, 10 + 2 > 7 + 1

NOT TO BE REPUBLISHED © KTBS

कारण 10+2=12 चे मूल्य हे 7+1=8 च्या मुल्यापेक्षा जास्त आहे.
त्याचप्रमाणे, $13-2 < 4\times3$

हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. चिन्हांच्या दोन्ही बाजूला येणाऱ्या पदावली समान होण्यासाठी मोकळ्या जागा भरा.

(a) $13 + 4 =$ ____ $+ 6$ (b) $22 +$ ____ $= 6 \times 5$

(c) $8 \times$ ____ $= 64 \div 2$ (d) $34 -$ ____ $= 25$

2. खालील पदावलीना त्यांच्या मुल्यांच्या चढत्या क्रमाने मांडा.

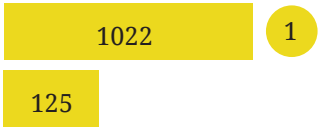
(a) $67 - 19$ (b) $67 - 20$ (c) $35 + 25$

(d) 5×11 (e) $120 \div 3$

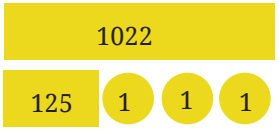
उदाहरण 2: 1023+125 किंवा 1022+128 यापैकी कोणते मोठे आहे?

परिस्थितीची कल्पना करून मुल्यांचा शोध न घेता उत्तर शोधण्यास मदत होते. राजाजवळ 1023 गोट्या आहेत आणि आज 125 त्यामध्ये मिळविल्या. आता त्याच्याकडे 1023+125 गोट्या आहेत. जॉयकडे 1022 होत्या आज त्यामध्ये 128 अधिक मिळविल्या आता त्याच्याकडे 1022+128 गोट्या आहेत. तर कुणाकडे जास्त आहेत?

राजा *(1023 + 125)*



जॉय *(1022 + 128)*

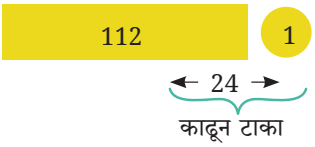


ही परिस्थिती उजव्या बाजूला दाखविलेल्या चित्राने दर्शविली आहे. सुरूवात करताना राजाजवळ एक गोटी जास्त आहे. परंतु आज जॉयकडे राजापेक्षा 3 गोट्या जास्त आहेत. तेव्हा आम्ही पाहतो की आता जॉयकडे राजापेक्षा दोन गोट्या जास्त आहेत.

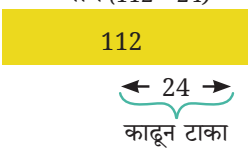
$$1023+125 < 1022+128$$

उदाहरण 3: 113−25 किंवा 112−24 यापैकी कोणते मोठे आहे? परिस्थितीची कल्पना करा की, राजाकडे 113 गोट्या होत्या त्यापैकी त्याने 25 गोट्या गमाविल्या, त्याच्याकडे 113−25 गोट्या आहेत. जॉयकडे 112 गोट्या होत्या त्यापैकी आज त्याने 24 गोट्या गमाविल्या त्याच्याकडे 112−24 गोट्या आहेत. कोणाकडे जास्त गोट्या बाकी राहिल्या आहेत.

राजा *(113 – 25)*



जॉय *(112 – 24)*



राजाकडे जॉयपेक्षा एक गोटी जास्त आहे. परंतु त्याने सुध्दा जॉयप्रमाणेच 1 गोटी गमाविली आहे. त्यामुळे त्याच्याजवळ आता समान गोट्या राहिल्या आहेत.

$$113-25=112-24.$$

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? खालील प्रत्येक पदावलींची तुलना करत असताना '>' किंवा '<' किंवा '=' या चिन्हाचा वापर करा. हे तुम्ही गुंतागुंतीच्या गणनेशिवाय करू शकाल का? खालील प्रत्येक बाबतीत तुमचे विचार स्पष्ट करा.

(a) $245 + 289 \square 246 + 285$

(b) $273 - 145 \square 272 - 144$

(c) $364 + 587 \square 363 + 589$

(d) $124 + 245 \square 129 + 245$

(e) $213 - 77 \square 214 - 76$

2.2. मिश्र (क्लिष्ट) पदावलींचे वाचन आणि सोडविणे.

कांही वेळा जेव्हा एखाद्या पदावली सोबत संबंध नसतो, तेव्हा त्यांचे मूल्य सोडविण्याचे एका पेक्षा जास्त मार्ग असू शकतात. अशा परिस्थितीत पदावली नेमकी कशी सोडवायची हे नक्की करण्यासाठी आपल्याकडे कांही साधने आणि नियम यांची गरज असते.

भाषेचे उदाहरण देण्यासाठी खालील वाक्य पहा.

a) वाक्य :''शालिनी खेळणी घेऊन मैत्रिणीच्या शेजारी बसली होती.''

अर्थ : ''मैत्रिणीकडे खेळणी आहेत आणि शालिनी तिच्या शेजारी बसली होती.''





b) वाक्य : ''शालिनी खेळणी घेवून मैत्रिणीच्या बाजूला बसली होती.''

अर्थ : शालिनीकडे खेळणी आहेत आणि ती खेळण्यासोबत मैत्रिणीच्या बाजूला बसली आहे.

या वाक्याचे विरामचिन्हाविना दोन वेगवेगळे अर्थ लावले जाऊ शकतात. स्वल्प विरामाचा योग्यरितीने वापर करून वाक्य कसे समजून घ्यायचे हे स्पष्ट होते. एक अशी पदावली पाहूया की जी एकापेक्षा जास्त पध्दतीनी सोडविली जाऊ शकते.

? **उदाहरण 4 :** मल्लेशने खेळाच्या मैदानात 30 गोट्या आणल्या. अरुणने प्रत्येकी 4 गोट्या असलेल्या 5 पिशव्या आणल्या. तर मल्लेश आणि अरुणने खेळाच्या मैदानामध्ये किती गोट्या आणल्या होत्या?

मल्लेशने गणितीय पदावली लिहून याचा सारांश दिला

$$30+5\times4$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या पदावलीमधील संदर्भ जाणून न घेता, पुर्णाने या पदावलीचे मूल्य 140 हे शोधले त्याने प्रथम 30 आणि 5 यांची बेरीज केली आणि 35 मिळविले. त्यानंतर 35 ला 4 ने गुणून 140 मिळविले.

मल्लेशने या पदावलीचे मूल्य 50 हे शोधले. त्याने प्रथम 5 आणि 4 यांचा गुणाकार करून 20 मिळविले आणि 20 व 30 यांची बेरीज करून 50 मिळविले. या घटनेमध्ये मल्लेश बरोबर आहे. परंतु पूर्णाला ते चूकीचे का वाटले? फक्त $30+5\times4$ या पदावलीकडे पाहून प्रथम बेरीज किंवा गुणाकार करायचा हे स्पष्ट होत नाही.

ज्याप्रमाणे भाषेतील गोंधळ दूर करण्यासाठी विराम चिन्हांचा वापर केला त्याचप्रमाणे गणितामधील पदावलींची किंमत (मूल्य) सोडविताना गोंधळ दूर करण्यासाठी कंस आणि पदामध्ये चिन्हे वापरतात.

पदावलीमधील कंस

पदावलीमधील गोट्यांची संख्या शोधण्यासाठी $30+5\times4$ आपल्याला प्रथम 5 आणि 4 यांचा गुणाकार करावा लागेल आणि त्यानंतर 30शी गुणाकार करावा लागेल. कंस वापरून क्रियांचा हा क्रम खालीलप्रमाणे स्पष्ट केला जातो.

$$30+(5\times4)$$

कंस असलेल्या पदावलीचे मूल्य (किंमत) काढत असताना इतर क्रिया करण्यापूर्वी आम्हाला प्रथम कंसातील पदावलीचे मूल्य काढावे लागेल, म्हणून वरील पदावलीमध्ये आम्ही प्रथम 5×4 ची किंमत काढली आणि त्यानंतर बेरीज केली. त्यामुळे ही पदावली गोट्याची संख्या स्पष्ट करते.

$$30+(5\times4)=30+20=50$$

उदाहरण 5 : इरफानने बिस्किटांचे एक पाकिट ₹15 आणि तुरडाळीचे एक पाकिट ₹56ला विकत आणले. त्याने दुकानदाराला ₹100 दिले. तर दुकानदाराकडून इरफानने परत घेतलेल्या चिल्लर रक्कमेची गणना करण्यास मदत करणारी पदावली लिहा.

इरफानने बिस्किटच्या पाकिटसाठी ₹15 आणि तुरडाळीच्या पाकिटासाठी ₹56 खर्च केले. तर रुपयामध्ये एकूण खर्च = $15+56$. त्याने दुकानदाराला ₹100 दिले. म्हणून त्याला परत मिळणारी रक्कम 100 वजा एकूण खर्च. आपण ही पदावली अशी लिहू शकतो का?

$$100-15+56?$$

आपण 100 मधून 15 वजा करू आणि येणाऱ्या किंमतीत 56 मिळू शकतो का? आम्हाला 141 मिळतात. दुकानदाराला त्याने दिलेल्या रक्कमेपेक्षा ही रक्कम जास्त आहे हे मूर्खपणाचे आहे. या घटनेमध्ये आपण कंसाचा वापर करु शकतो.

$$100-(15+56)$$

प्रथम कंसातील पदावलीचे मूल्य काढून आम्हाला 100 वजा 71 जे 29 आहे. म्हणून इरफानला ₹29 परत मिळतील.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पदावलीमधील पदे

समजा की आपल्याकडे $30 + 5 \times 4$ ही कंसरहित पदावली आहे तर त्याला अर्थ नाही का?

जेव्हा अनेक क्रिया असलेल्या पदावली असतात आणि कंसाने क्रियांचा क्रम निर्दिष्ट केलेला नसेल तर पदांचा क्रम निश्चित करण्यासाठी संकेताचा वापर करतो. पदे ही + चिन्हाने वेगळे केलेले पदावलीचे भाग आहेत.

उदाहरणार्थ, 12+7 मध्ये खाली दर्शविल्याप्रमाणे 12 आणि 7 ही पदे आहेत.

$$12 + 7 = (12) + (7)$$

आपण वरीलप्रमाणे प्रत्येक पदाला चिन्हांकीत करू. लक्षात ठेवा की, चिन्हांकीत करण्याची ही नेहमीची पध्दत नाही. जोपर्यंत या संकल्पनेशी तुम्ही जुळवून घेत नाही तोपर्यंत हे करत राहिले पाहिजे.

आता 83–14 मध्ये कोणती पदे आहेत? आपल्याला माहित आहे की संख्या वजा करणे म्हणजे त्या संख्येचा व्यस्त घेऊन बेरीज केल्यासारखे आहे. स्मरण करा की दिलेल्या संख्येच्या व्यस्तामध्ये त्याला विरुध्द चिन्ह असते. उदाहरणार्थ 14 चा व्यस्त हा–14 आहे आणि –14 चा व्यस्त 14 आहे. म्हणून 83 मधून 14 वजा करणे हे 83 मध्ये –14 मिळविल्यासारखेच आहे म्हणजेच,

$$83 - 14 = (83) + (-14)$$

म्हणून 83–14 या पदावलीची पदे 83 आणि –14 ही आहेत.

? वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन अशा रितीने वजाबाकीच्या जागी बेरीज केल्याने पदावलीचे मूल्य बदलत नाही हे तपासा.

? सहावीच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकात आपण पाहिलेल्या पूर्णांकाच्या बिल्ल्याच्या नमुनाचा वापर करून संख्या वजा करणे म्हणजेच तिचा व्यस्त भाग घेऊन बेरीज करणे याच्याशी समान आहे ते कसे याचे स्पष्टीकरण द्याल का?

या पध्दतीने पदे ओळखण्यासाठी पदावलींच्या सर्व वजाबाकीमध्ये रूपांतरीत करून बेरीज करतात.

येथे पदावली आणि त्यांची पदे यांची काही उदाहरणे आहेत.

$$-18 - 3 = (-18) + (-3)$$

$$6 \times 5 + 3 = (6 \times 5) + (3)$$

$$2 - 10 + 4 \times 6 = (2) + (-10) + (4 \times 6)$$

लक्षात घ्या की $6 \times 5, 4 \times 6$ हे एकच पद आहे कारण त्यामध्ये कोणतेही '+' चिन्ह नाही.खालील कोष्टकामध्ये काही पदावली दिलेल्या आहेत. ते कोष्टक पूर्ण करा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पदावली	पदांच्या बेरजेची पदावली	पदे
13 – 2 + 6	(13) + (– 2) + (6)	13, – 2, 6
5 + 6 × 3	(5) + (6 × 3)	
4 + 15 – 9	( ) + ( ) + ( )	
23 – 2 × 4 + 16	( ) + ( ) + ( )	
28 + 19 – 8	( ) + ( ) + ( )	

पदावलीचे मूल्य शोधताना पदांचा वापर करुन पदांचा क्रम कसा निश्चित केला जातो ते आता आपण पाहूया. आपण फक्त बेरीज असलेल्या पदावलीपासून सुरु करूया. (सर्व वजाबाकी ही योग्यरित्या बेरजेमध्ये रुपांतरीत करून)

? जर पदांच्या बेरजेचा क्रम बदलला तर वेगवेगळी मूल्ये मिळतात का?

बदलणे आणि गट करणे

फक्त दोन पदे असलेल्या पदावलींचा विचार करूया.

? **उदाहरण 6 :** मधू आपल्या गच्चीवरुन ड्रोन उडवित आहे. ड्रोन 6 मी. वर जातो आणि 4 मी खाली येतो. तर गच्चीवर ड्रोनची अंतिम उंची किती याची पदावली लिहा. ड्रोन गच्चीच्या वर 6–4=2 मी आहे. तर पदांच्या बेरजेमध्ये लिहा.

(6) + (–4) = (2)

जर पदांची अदलाबदल केली तर बेरीज बदलते का?

(–4) + (6) = (2)

या घटनेमध्ये ती बदलत नाही.

जेव्ही दोन्ही पदे धन संख्येची असतात तेव्हा अदलाबदल करून बेरीज केली असता ती बदलत नाही.

? जर पदे ऋण संख्येची असतील तेव्हा सुध्दा हे लागू पड़ते का? आणखी कांही पदावली घ्या आणि तपासा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? सहावीच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकात पाहिलेल्या पुर्णांकांच्या बिल्लांचा नमुना वापरून हे असे का घडते हे तुम्ही स्पष्ट करू शकाल का ?

म्हणून दोन पदे असलेल्या पदावलीची अदलाबदल केली तर त्याचे मुल्य बदलत नाही.

(पद 1) + (पद 2) = (पद 2) + (पद 1)

आता, तीन पदे असलेल्या पदावलीचा विचार करा, (−7)+10+(−11) ही पदे खालील दोन वेगवेगळ्या क्रमामध्ये घेऊन बेरीज करूया.

(−7 + 10) + (−11)

(पहिल्या दोन पदांची बेरीज करून नंतर त्यांच्या बेरजेची तिसऱ्या पदाशी बेरीज)

(−7) + (10 + −11)

(पहिला शेवटच्या दोन पदांची बेरीज केली आणि नंतर या बेरजेची पहिल्या पदाशी बेरीज केली)

तुम्ही काय पाहिले? दोन्ही घटनेतील बेरीज समान आहे.

पुन्हा आपल्याला माहित आहे की धन संख्यांची बेरीज करताना, वरील दोन्हीपैकी कोणत्याही प्रकारे गट बनवून त्यांची बेरीज केली असता ती समान येते.

? जेव्हा पदामध्ये ऋण संख्या असतात तेव्हा सुध्दा हे लागू पडते का? आणखी कांही पदावली घ्या आणि तपासा.

? सहावीच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकात पाहिलेल्या पूर्णांकाच्या बिल्ल्यांचा नमुना वापरून हे असे का घडते हे तुम्ही स्पष्ट करू शकाल का?

हे प्रयत्न करा

म्हणून खालीलपैकी कोणत्याही एका पध्दतीने पदावलीतील पदांचा गट करून बेरीज केली असता त्यांचे मूल्य सारखेच राहते.

(पद 1 + पद 2) + पद 3 = पद 1 + (पद 2 + पद 3)

पुन्हा (−7)+10+(−11) या पदावलीचा विचार करूया. जर आपण प्रथम −7 आणि −11 यांची बेरीज त्यांचा क्रम बदलून केली आणि नंतर यांच्या बेरजेमध्ये 10 मिळविले तर काय घडते ? आपल्याला पूर्वीप्रमाणेच सारखीच बेरीज मिळते का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आपण पाहतो की $(-7)+10+(-11)$ या पदावलीची पदे कोणत्याही क्रमामध्ये घेऊन बेरीज केली तर त्याची (-8) ही सारखीच बेरीज मिळते.

? जर पदावलीची पदे कोणत्याही क्रमामध्ये घेऊन बेरीज केली तर त्यांचे मूल्य समानच येते का? आणखी कांही पदावली घ्या आणि तपासा तीन पेक्षा जास्त पदे असलेल्या पदावलीचा सुध्दा विचार करा.

? सहावीच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकात पाहिलेल्या पुर्णांकाच्या बिल्ल्यांचा नमुना वापरून हे असे का घडले हे तुम्ही सपष्ट करू शकाल का?



म्हणून पदांची बेरीज कोणत्याही क्रमात केली तर बेरीज सारखीच मिळते.

म्हणून फक्त बेरीज असलेल्या पदावलीमध्ये पदे कोणत्या क्रमात घेतली जातात हे महत्वाचे नाही, ते सर्व समान मूल्य देतात.

आता आपण कंसात निर्दिष्ट केलेल्या क्रियांचा क्रम न घेता गुणाकार आणि भागाकार असलेल्या पदावलींचा विचार करूया. अशा पदावलींची मूल्ये, प्रथम पदे सोडवून शोधली जातात.

जेव्हा सर्व पदांची मूल्ये सोडविली जातात आणि नंतर त्यांची बेरीज केली जाते उदाहरणार्थ, $30+5\times4$ ही पदावली खालीलप्रमाणे सोडविली जाते.

$$30 + 5 \times 4 = (30) + (5 \times 4) = (30) + (20) = 50$$

$5 \times (3 + 2) + 7 \times 8 + 3$ ही पदावली खालीलप्रमाणे सोडविली जाते.

$$5 \times (3 + 2) + 7 \times 8 + 3 = (5 \times (3+2)) + (7 \times 8) + 3$$

येथे प्रथम $(3+2)$ सोडविले जाते आणि या बेरजेला 5ने गुणले जाते $(=25)$ पदावली (7×8) सोडविली जाते $(=56)$ याला $25+56+3=84$ हे सरळरूप दिले जाते.

? मनसा ही लांब अशा संख्यांच्या यादीची बेरीज करते. ती त्या सर्व संख्याची बेरीज करण्यासाठी पाच मिनिटे घेते आणि तिला 11749 हे उत्तर मिळते. नंतर तिच्या लक्षात येते की चौथी संख्या 9055 याचा त्यामध्ये समावेश करण्यास विसरली आहे. तर पुन्हा तिला पहिल्यापासून सुरूवात करावी लागेल का?

1342
774
8611
9055
1022

गणितामध्ये पदांची अदलाबदल केल्याने त्यांची बेरीज बदलत नाही, असे न म्हणता **''बेरजेचा क्रमनिरपेक्ष गुणधर्म''** हा वाक्यांश आपण वापरतो. तसेच गट केल्यामुळे बेरीज बदलत नाही याच्याऐवजी त्याला **''बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म''** म्हणतात.

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

दैनंदिन जीवनातील गोष्टीचा क्रम बदलणे



? मनसा ही खेळण्यासाठी बाहेर जाते. तिची आई तिला ''टोपी आणि बुट'' घालण्यास सांगते! तर ती प्रथम कोणते घालते? ती प्रथम टोपी घालते नंतर बूट घालते किंवा ती प्रथम बूट घातले आणि नंतर टोपी. दोन्ही घटनेमध्ये मनसा सारखीच दिसते. वेगळ्या एका परिस्थितीची कल्पना करा. मनसाची आई म्हणाली, ''तु तुझे पायमोजे (सॉक्स) आणि बुट घाल।'' येथे क्रम महत्वाचा आहे.



तिने प्रथम पायमोजे आणि नंतर बूट घालायला हवे. जर तिने प्रथम बूट घालून नंतर मोजे घातले तर तिला अस्वस्थ वाटेल आणि कांहीतरी वेगळे दिसेल.

अधिक पदावल्या आणि त्यांची पदे

? **उदाहरण 7 :** अमू, चरण, मधू आणि जॉन एका हॉटेल मध्ये गेले आणि त्यांनी चार दोसे देण्याची आज्ञा दिली. प्रत्येक दोस्याची किंमत ₹23 होती. आणि त्यानी वेटरला (कामगाराला) ₹ 5 देऊन त्याचे आभार मानले. एकूण खर्च स्पष्ट करणारी पदावली लिहा.

4 दोस्यांची एकूण किंमत = 4×23

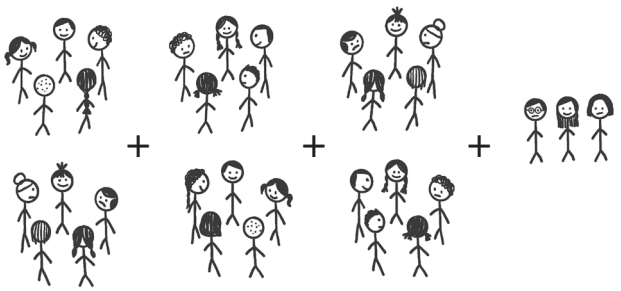
दिलेल्या बक्षिसासह एकूण रक्कम $4 \times 23 + 5$ अशी लिहिता येईल का ? सोडविल्यानंतर आपणास मिळेल,

$$4 \times 23 + 5 = (4 \times 23) + (5) = (92) + (5) = (97)$$

अशाप्रकारे, $4 \times 23 + 5$ ही पदावली लिहिण्याची योग्य पध्दत आहे.

? जर मित्रांची संख्या एकूण 7 झाली आणि टीप तीच राहिली तर त्यांना किती रक्कम द्यावी लागेल? या घटनेची पदावली लिहा आणि तिची पदे ओळखा.

? **उदाहरण 8 :** वर्गातील मुले ''डोंगरावर आग'' हा खेळ खेळत असताना पळा, पळा, पळा म्हणतात. जेव्हा जेव्हा शिक्षक एखादी संख्या म्हणतील तेव्हा विद्यार्थ्याला त्या संख्येच्या गटात व्यवस्था करावी लागते. जो कोणी घोषित केलेल्या संख्येचा भाग नाही तो खेळातून बाहेर होतो.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

रुबीला आराम करायचे होते म्हणून ती बाजूला बसते. राहिलेले इतर 33 विद्यार्थी वर्गात खेळ खेळत होते. शिक्षकानी 5 ही संख्या पुकारली. मुले स्थिरावल्यानंतर रुबीने लिहिले की 6×5+3 (6×5) पेक्षा 3 जास्त आहेत हे समजले.

? तिने असे का लिहिले याचा विचार करून चर्चा करा पदांची बेरीज अशी लिहिलेली पदावली आहे.

$$(6\times5) + 3$$

? खालील प्रत्येक घटनेसाठी पदावली लिहा आणि त्यांची पदे ओळखा.

जर शिक्षकांनी '4' पुकारले, तर रुबी असे लिहीते _____

जर शिक्षकानी '7' पुकारले, तर रुबी असे लिहीते _____

वरीलप्रमाणे तुमच्या वर्गाच्या आकाराची पदावली लिहा.

? **उदाहरण 9 :** रघुने 100 कि.ग्रॅ. तांदुळ घाऊक बाजारातून विकत घेतले आणि ते 2 कि.ग्रॅ. च्या पाकिटामध्ये बंद केले (बांधले). त्याच्याकडे अगोदरच 2 किलोची 4 पाकिटे होती. आता त्याच्याजवळ असलेल्या 2 किलो ग्रॅम तांदळाच्या पाकिटांची पदावली लिहा आणि त्याची पदे ओळखा.

त्याच्याकडे 4 पाकिटे आहेत. नवीन दोन कि.ग्रॅ. पाकिटांची संख्या ही 100÷2 आहे. ती आम्ही $\frac{100}{2}$ अशी सुद्धा लिहितो.

त्याच्या जवळील 2 कि.ग्रॅ. च्या पाकिटाची संख्या ही $4 + \frac{100}{2}$ आहे. त्याची पदे.

$$(4) + \left(\frac{100}{2}\right)$$

? **उदाहरण 10 :** कन्ननला ₹1 आणि ₹5 ची नाणी आणि ₹10, ₹20, ₹50 आणि ₹100 च्या नोटा वापरून दुकानदाराला ₹432 द्यायचे आहेत. तर तो हे कसे करू शकतो?

येथे एकापेक्षा जास्त शक्यता आहेत.

उदाहरणार्थ, 432 = 4×100+1×20+1×10+2×1

अर्थ : ₹100च्या 4 नोटा, ₹20 ची एक नोट, ₹10ची एक नोट आणि ₹ 2 ची 1नोट

$$432 = 8 \times 50 + 1 \times 10 + 4 \times 5 + 2 \times 1$$

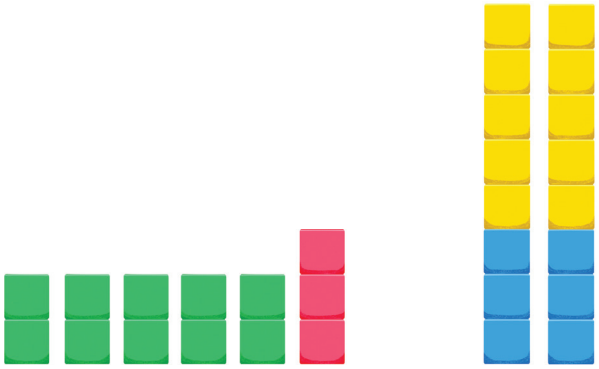
अर्थ : ₹50च्या 8 नोटा, ₹10ची 1 नोट, ₹5 च्या 4 नोटा आणि ₹1 च्या 2 नोटा.

? वरील दोन पदावलीमधील पदे ओळखा.

? एखाद्याला ₹432 देण्याच्या आणखी कांही पध्दतीचा तुम्ही विचार कराल का?

@KSEBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 11: येथे दोन चित्रे आहेत. या दोन्ही मांडणीपैकी $5\times2+3$ शी जुळणारी मांडणी कोणती?



ही पदावली आपण बेरीज अशी मानून लिहूया.

$$(5 \times 2) + (3) = (10) + (3) = (13)$$

$5 \times 2 + 3$ ही राशी 5×2 पेक्षा 3 ने जास्त आहे असे समजू शकतो. जे डावीकडील मांडणीचे स्पष्टीकरण (वर्णन) करते.

पिवळ्या आणि निळ्या चौरसांच्या संख्येचा योग्य वापर करून पदावलीची उजवी कडील मांडणी कोणती ?

तुम्हाला कंसाच्या वापराचे स्मरण आहे का? यासाठी आपल्याला कंस वापरणे गरजेचे आहे.

$$2 \times (5 + 3)$$

लक्षात घ्या की या मांडणीचे वर्णन खालील प्रमाणे सुध्दा केले जाऊ शकते

$$5 + 3 + 5 + 3$$

किंवा

$$5 \times 2 + 3 \times 2$$

हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील पदावलींची पदे लिहून प्रत्येकाची मूल्ये शोधा.

(a) $28 - 7 + 8$ (b) $39 - 2 \times 6 + 11$

(c) $40 - 10 + 10 + 10$ (d) $48 - 10 \times 2 + 16 \div 2$

(e) $6 \times 3 - 4 \times 8 \times 5$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. खालील प्रत्येक पदावलीसाठी विधान लिहा आणि त्याची मूल्ये शोधा.

(a) $89 + 21 - 10$ (b) $5 \times 12 - 6$

(c) $4 \times 9 + 2 \times 6$

3. खालील प्रत्येक उदाहरणासाठी, उदाहरणाचे वर्णन करणारी पदावली लिहा. त्यांची पदे ओळखा आणि पदावलीचे मूल्य (किंमत) शोधा.

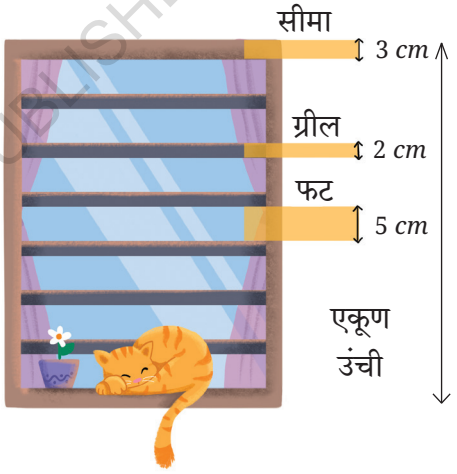
(a) राणी अलियाने राजकुमारी इल्साला 100 सोन्याची नाणी आणि 100 सोन्याची नाणी राज्यकुमारी अन्ना यांना मागील वर्षी दिली. राजकुमारी इल्सानी नाणी वापरून व्यवसाय सुरू केला आणि ती नाणी दुप्पट केली. राजकुमारी अन्नाने दागिने खरेदी केल्यामुळे तिच्याजवळ अर्धी नाणी बाकी राहिली. तर राजकुमारी इल्सा आणि राजकुमारी अन्ना यांच्याकडे एकत्रित किती नाणी आहेत ही वर्णन करणारी पदावली लिहा.

(b) दोन स्थानकामध्ये मेट्रो ट्रेन (रेल्वे) चे तिकिट दर प्रौढासाठी ₹40 आणि मुलांसाठी ₹20 आहेत. तर तिकिटांची एकूण रक्कम किती?

(i) 4 प्रौढ आणि 3 मुलांसाठी.

(ii) प्रत्येक गटामध्ये 3 प्रौढ असलेल्या दोन गटासाठी.

(c) चित्रामध्ये दाखविलेल्या मोजमापातील संबंध दर्शविणारी पदावली लिहा आणि खिडकीची एकूण उंची काढा.



कंस सोडविणे (काढणे) – I

200−(40+3) या पदावलीचे मूल्य शोधूया आपण प्रथम कंसातील पदावलीचे मूल्य सोडवू ते 43 आहे आणि नंतर ती 200 मधून वजा करू. परंतु प्रथम 200 मधून 40 वजा करणे हे सोपे आहे.

200−40=160

आणि नंतर 160 मधून 3 वजा करू.

160−3−157

हे लक्षात घ्या की, येथे आपण काय केले आहे 200−40−3

आपण 200−40+3 असे केलेले नाही.

म्हणून 200−(40+3)=200−40−3

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 12 : आम्ही याअगोदरच्या उदाहरणामध्ये पाहिल्याप्रमाणे इरफानने बिस्किटचे पाकिट (₹15) आणि तुरडाळीचे पाकिट (₹56) ला खरेदी केले होते. जेव्हा त्याने दुकानदाराला ₹100 दिले तर त्याला परत मिळालेली चिल्लर (रक्कम) रुपयामध्ये,

$100-(15+56)=29$ ही आहे.

या परत मिळालेल्या रक्कमेची गणना खालीलप्रमाणे केली जाते.

a) प्रथम ₹100 मधून बिस्किट पाकिटांची रक्कम वजा करू.

$100-15=85$

जर इरफानने फक्त बिस्किटे खरेदी केली असती तर वरील रक्कम दुकानदाराला द्यावी लागली असती. त्याने तुरडाळ सुध्दा खरेदी केलेली आहे. त्यामुळे 85 मधून त्याची रक्कम सुध्दा काढावी लागेल.

b) त्यामुळे शिल्लक (बाकी रक्कम) काढण्यासाठी 85 मधून तुरडाळीची किंमत वजा करावी लागेल.

$85-56=29$

येथे आपण असे केलेले आहे की, $100-15-56$

म्हणून $100-(15+36)=100-15-56$

लक्षात घ्या की, ऋणात्मक चिन्हाच्या आधी असलेला कंस काढून पुढे जात असताना कंसातील पदांची चिन्हे कशी बदलतात याचे निरीक्षण करा. पहिल्या उदाहरणामधील 40 आणि 3 ची चिन्हे आणि दुसऱ्या उदाहरणामधील 15 आणि 56 यांचे चिन्ह.

उदाहरण 13: $500-(250-100)$ या पदावलीचा विचार करा. कंसाचा वापर न करता ही पदावली लिहिणे शक्य आहे का?

ही पदावली सोडविताना $250-100=150$ हे 500 मधून वजा करणे गरजेचे आहे.

$500-(250-100)=500-150=350$

जर आपण प्रत्यक्षपणे 500 मधून 250 वजा केले त्यानंतर त्यामधून आणखी 100 वजा केले तर आपल्याला आवश्यक असलेले मिळतील. त्यामुळे 500–250 मध्ये, आम्हाला 100 मिळवावे

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लागतील म्हणजेच 500−(250−100) या पदावलीचे सारखेच मूल्य मिळेल. या क्रियेचा क्रम 500−250+100 हा असेल. म्हणून 500−(250−100)=500−250+100.

500−(250−100) हे 500−250−100 शी समान नाही हे तपासा. पुन्हा लक्षात घ्या की, जेव्हा कंसाच्या आधी ऋण चिन्ह असते ते काढून टाकले तर कंसातील पदांची चिन्हे बदलतात. यामुळे 250 आणि −100 ची चिन्हे बदलतात आणि −250 आणि +100 ही होतात.

? **उदाहरण 14:** हिराकडे दुर्मिळ अशा नाण्यांचा संग्रह आहे. तिच्याकडे एका पिशवीत 28 नाणी दुसऱ्या पिशवीत 35 नाणी आहेत. तिने दुसऱ्या पिशवीतील 10 नाणी आपल्या मैत्रिणीला भेट म्हणून दिली. तर हिराकडे शिल्लक राहिलेल्या नाण्यांची पदावली लिहा.

हे 28+(35−10) असे व्यक्त केले जाते.

हे 28+(35+(−10) शी सामान आहे. ज्याअर्थी पदांची बेरीज कोणत्याही क्रमाने केली जाऊ शकत. ही पदावली 28−35+(−10) किंवा 28+35−10 सोप्यारितीने लिहिली जाते.

$$28+(35-10)=28+35-10=53$$

जेव्हा कंसापूर्वी ऋणात्मक चिन्ह नसेल तेव्हा कंस काढून टाकला असता पदांच्या चिन्हामध्ये कोणताही बदल होत नाही. वरील पदावलीमधील 35 आणि −10 यांच्या चिन्हांकडे लक्ष द्या.



चिन्हे कधी बदलतात आणि कधी बदलत नाहीत यांचे नियम लक्षात ठेवण्याऐवजी तुम्ही त्या पदावलींचा विचार करून स्वतः शोध घ्या.

© KSEB NOT TO BE REPUBLISHED

पदे बदलणे I

जर आपण एखाद्या पदांची मूल्ये वाढविली किंवा कमी केली तर त्या पदावलीच्या मूल्यामध्ये काय घडून येते?

कांही पदावली खालील तीन स्तंभामध्ये दिलेल्या आहेत. प्रत्येक स्तंभातील पहिल्या पदावलीतून एक किंवा जास्त पदे बदलली आहेत. पहिल्या स्तंभातील उदाहरण पहा आणि शक्य तितकी कमीतकमी गणना करून रिकाम्या जागा भरा.

53 + (– 16) = 37	53 + (– 16) = 37	(– 87) + (– 16) = ◯
54 + (– 16) = 38 54 हे 53 पेक्षा 1ने जास्त आहे म्हणून मूल्य 37 पेक्षा 1ने जास्त असेल.	52 + (– 16) = ◯ 52 ही 53 पेक्षा 1ने कमी आहे म्हणून मूल्य 37 पेक्षा 1ने कमी असेल.	(– 88) + (– 15) = ◯
53 + (– 15) = ◯ –15 हे –16 पेक्षा 1ने कमी आहे की जास्त आहे ?	53 + (– 17) = ◯ –17 हे –16 पेक्षा 1ने कमी आहे की जास्त ?	(– 86) + (– 18) = ◯ (– 97) + (– 26) = ◯

? हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. दोन्ही बाजूच्या पदावली समान होतील अशारितीने संख्या किंवा क्रिया चिन्ह वापरून मोकळ्या जागा भरा.

   (a) 24 + (6 – 4) = 24 + 6 ☐ _____

   (b) 38 + (_____ ☐ _____) = 38 + 9 – 4

   (c) 24 – (6 +4) = 24 ☐ 6 – 4

   (d) 24 – 6 – 4 = 24 – 6 ☐ _____

   (e) 27 – (8 + 3) = 2783

   (f) 27– (_____ ☐ _____) = 27 – 8 + 3

2. कंस काढून टाका आणि मूल्य समान होतील अशा पदावली लिहा.

   (a) 14 + (12 + 10) (b) 14 – (12 + 10)

   (c) 14 + (12 – 10) (d) 14 – (12 – 10)

   (e) –14 + 12 – 10 (f) 14 – (–12 – 10)

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3. खालील पदावलींची मूल्ये काढा. प्रत्येक जोडीच्या किंमती (मूल्ये) समान आहेत का यांचा अंदाज घेण्याचा प्रयत्न करा. दोन्ही पदावली केंव्हा समान होतील?

   (a) $(6 + 10) - 2$ आणि $6 + (10 - 2)$

   (b) $16 - (8 - 3)$ आणि $(16 - 8) - 3$

   (c) $27 - (18 + 4)$ आणि $27 + (-18 - 4)$

4. खाली दिलेल्या प्रत्येक पदावलीच्या सटासाठी, समान मूल्ये असलेल्या पदावली ओळखा. ते सोडवू नका, परंतु तुमच्या पदाविषयीच्या आकलनाचा वापर करा.

   (a) $319 + 537, 319 - 537, -537 + 319, 537 - 319$

   (b) $87 + 46 - 109, 87 + 46 - 109, 87 + 46 - 109, 87 - 46 + 109,$
   $87 - (46 + 109), (87 - 46) + 109$

5. पदावलीमधील दर्शविलेली मूल्ये (किंमती) मिळविण्यासाठी योग्य ठिकाणी कंसाचा वापर करा.

   (a) $34 - 9 + 12 = 13$
   (b) $56 - 14 - 8 = 34$
   (c) $-22 - 12 + 10 + 22 = -22$

6. पदे ही त्यांची मूल्ये कशी बदलतात याचे फक्त तर्क वापरुन समान चिन्हाच्या दोन्ही बाजूच्या पदावली समान होतील अशा मोकळ्या जागा भरा.

   (a) $423 +$ _____ $= 419 +$ _____

   (b) $207 - 68 = 210 -$ _____

7. आवश्यकतेनुसार 2, 3 आणि 5 हे अंक आणि '+' आणि '–' या क्रिया आणि कंस यांचा वापर करून शक्य तितकी अनेक वेगवेगळी मूल्ये देणाऱ्या पदावली बनवा. उदाहरणार्थ,

   $2-3+5=4$ आणि $3-(5-2)=0$

8. ज्या-ज्यावेळी जसोदाला एखाद्या संख्येमधून 9 वजा करायचे आहेत त्यावेळी ती 10 वजा करते आणि 1 मिळविते.

   गणिती बोल

   उदाहरणार्थ, $36-9 = 26+1$

   (a) तुम्हाला वाटते की प्रत्येक वेळी तिला बरोबर उत्तर मिळते ? का?

   (b) तुम्ही अशाच इतर पध्दतींचा विचार करू शकाल का? कांही उदाहरणे द्या.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. (a) 73-14+1 (b) 73-14-1 या दोन पदावली विचारात घ्या.

या प्रत्येक पदावलीसाठी खालील संग्रहातून त्याच्याशी समान पदावली ओळखा.

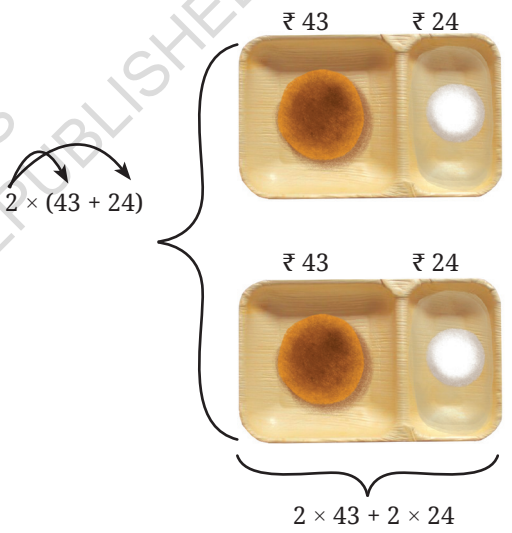
(a) 73 – (14 + 1) b) 73 – (14 – 1)

(c) 73 + (– 14 + 1) d) 73 + (– 14 – 1)

कंस काढून टाकणे (कंस काढणे) – II

? **उदाहरण 15** : ल्हामो आणि नोर्बू एका हॉटेलमध्ये गेले. त्यांनी प्रत्येकी एक भाजीपाला कटलेट आणि एक रसगुल्ला मागविला. भाजीपाला कटलेटची किंमत ₹43 आणि रसगुल्ल्याची किंमत ₹24 आहे. तर त्याना द्यावी लागणाऱ्या किंमतीची पदावली लिहा.

प्रत्येकाजवळ एक भाजीपाला कटलेट आणि एक रसगुल्ला आहे. त्यामुळे प्रत्येकाचा वाटा 43+24 असा दर्शविला जाऊ शकतो.



? त्यांना द्यावी लागणारी एकूण रक्कम किती? त्याचे 2×43+24 असे वर्णन केले जाऊ शकते का?

ते पदांच्या बेरजेमध्ये लिहील्यास मिळते की

(2×43) + (24)

या पदावलीचा अर्थ (2×43) हे 24 ने अधिक आहे. परंतु आपल्याला अशी पदावली हवी आहे की ती 43+24 च्या दुप्पट आहे.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अशी पदावली लिहीण्यासाठी आम्ही कंसाचा वापर करू शकतो. 2×(43+24)

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो त्याना एकत्रितपणे 2×(43+24) हे द्यावे लागतील. हे दोन पालेभाजी कटलेट आणि 2 रसगुल्ले यासाठी द्यावे लागणाऱ्याशी समान आहेत. 2×43+2×24

म्हणून 2×(43+24)=2×43+2×24

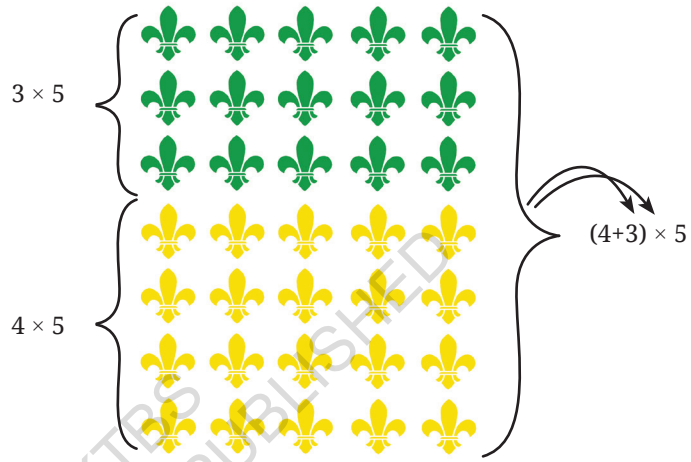
? जर आणखी एक मित्र संगमू त्याना सामील झाला आणि तेच पदार्थ मागविले. तर एकूण रक्कम द्यावी लागण्याची पदावली कोणती?

उदाहरण 16 : प्रजासत्ताक दिनाच्या कवायतीमध्ये मुलांचे स्काऊट आणि मुलींचे गाईड हे एकत्रित पथसंचलन करतात. 5 स्काऊट असलेल्या 4 ओळीमध्ये स्काऊटचे पथसंचलन आहे. प्रत्येक ओळीमध्ये 5 गाईडस असलेल्या 3 ओळीमध्ये गाईडस हे पथसंचलन करतात. (खालील आकृती पहा.) तर या कवायतीमध्ये किती स्काउट आणि गाईडस पथसंचलन करत आहेत.

स्काउट पथसंचलन करणाऱ्या मुलांची संख्या 4×5 आहे. गाईड पथसंचलन करणाऱ्या मुलींची संख्या 3×5 आहे.

स्काउट आणि गाईडची एकूण संख्या $4\times5+3\times5$ ही आहे.

हे प्रथम ओळींची एकूण संख्या म्हणजेच $4+3$ शोधून नंतर त्यांची बेरीज प्रत्येक ओळीतील मूलांच्या संख्येला गूणून सुद्धा शोधता येते. $(4+3)\times5$ ही एकूण मुलांची आणि मुलींची संख्या आहे.



©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून, $4\times5+3\times5=(4+3)\times5$

या पदावलींची गणना केली असता आपल्याला मिळते

$$4\times5+3\times5 = (4\times5) + (3\times5) = 20 + 15 = 35$$

$$(4+3)\times5 = 7\times5 = 35$$

$5\times4+3\neq5\times(4+3)$ हे असे का ते स्पष्ट करू शकाल का ?

$5\times(4+3)=5\times(3+4)=(3+4)\times5$? हे आहे का?

मागील दोन उदाहरणामध्ये आपण केलेले निरीक्षण हे खालीलप्रमाणे सामान्यरुपात पाहता येईल.

$10\times98+3\times98$ हे विचारात घ्या. 98 ची 10 वेळा बेरीज आणि 98 ची 3 वेळा बेरीज करून बेरीज करणे हा आहे.

$$\underbrace{98+98+98+98+98+98+98+98+98+98}_{\text{10 वेळा}} + \underbrace{98+98+98}_{\text{3 वेळा}}$$

याप्रमाणे हे $10+3=13$ वेळा 98 शी समान आहे.

$$10 \times 98 + 3 \times 98 = (10 + 3) \times 98.$$

दुसऱ्या प्रकारे ही समानता लिहिल्याने आपल्याला मिळते.

$$(10 + 3)\ 98 = 10 \times 98 + 3 \times 98.$$

वरील गुणाकारातील संख्याची अदलाबदल केली असता हा गुणधर्म आपण खालील स्वरुपात पाहू शकतो.

$$98 \times 10 + 98 \times 3 = 98\ (10 + 3) \text{ आणि}$$

$$98\ (10 + 3) = 98 \times 10 + 98 \times 3.$$

याचप्रमाणे $14 \times 10 - 6 \times 10$ या पदावलीचा विचार करुया. याचा अर्थ 14 वेळा 10 च्या बेरजेमधून 6 वेळा 10 ची बेरीज वजा करणे हा आहे.

$$\overbrace{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10}^{\text{14 वेळा}} + \cancel{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10}$$

स्पष्टपणे हे $14 - 6 = 8$ वेळा 10

$$14 \times 10 - 6 \times 10 = (14 - 6) \times 10,$$

किंवा

$$(14 - 6) \times 10 = 14 \times 10 - 6 \times 10$$

या गुणधर्माचा सारांश चांगल्याप्रकारे खालीलप्रमाणे देता येईल. बेरजेचा (फरक) गुणाकार हा त्यांच्या पटीच्या गुणाकाराच्या बेरजेशी (फरक) सारखाच असतो.

@MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पदे बदलणे II

जेव्हा आपण गुणाकारामध्ये येणाऱ्या संख्या बदलतो तेव्हा काय घडते हे समजून घेऊया.

उदाहरण 17 : दिलेले $53 \times 18 = 954$ तर 63×18 काढा.

जसे 63×18 म्हणजेच 63 वेळा 18

$$\begin{aligned} 63 \times 18 &= (53 + 10) \times 18 \\ &= 53 \times 18 + 10 \times 18 \\ &= 954 + 180 \\ &= 1134 \end{aligned}$$

उदाहरण 18 : 97×25 हे परिणामकारी पध्दतीने सोडविण्याचा मार्ग शोधा.

97×25 अर्थ 97 हे 25 वेळा

हे आपण (100−3)×25 असे लिहू शकतो.

आपल्याला माहित आहे की हे 100 वेळा 25 आणि 3 वेळा 25 यांच्या फरकाशी समान आहे.

$$97\times25 = 100\times25-3\times25$$

याचे मुल्य शोधा.

खालील गुणाकार काढण्यासाठी ही पध्दत वापरा.

(a) 95×8
(b) 104×15
(c) 49×50

सामान्यपणे तुम्ही वापरत असलेल्या गुणाकार प्रक्रियेपेक्षा ही जलद आहे का ?

वरील गुणाकाराप्रमाणेच इतर कोणते गुणाकार जलदगतीने शोधता येतील ?

गणिती बोल

हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील पदावली दोन्ही बाजूला समान होतील अशारितीने चौकटीमध्ये संख्या आणि चिन्हे वापरून मोकळ्या जागा भरा.

(a) $3 \times (6 + 7) = 3 \times 6 + 3 \times 7$

(b) $(8 + 3) \times 4 = 8 \times 4 + 3 \times 4$

(c) $3 \times (5 + 8) = 3 \times 5 \square 3 \times$ ____

(d) $(9 + 2) \times 4 = 9 \times 4 \square 2 \times$ ____

(e) $3 \times ($____ $+ 4) = 3$ ____ $+$ ____

(f) (____ $+ 6) \times 4 = 13 \times 4 +$ ____

(g) $3 \times ($____ $+$ ____ $) = 3 \times 5 + 3 \times 2$

(h) (____ $+$ ____ $) \times$ ____ $= 2 \times 4 + 3 \times 4$

(i) $5 \times 9 - 2 = 5 \times 9 - 5 \times 2$

(j) $5 - 2 \times 7 = 5 \times 7 - 2 \times 7$

(k) $5 \times (8 - 3) = 5 \times 8 \square 5 \times$ ____

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(l) $(8 - 3) \times 7 = 8 \times 7$ ☐ 3×7

(m) $5 \times (12 - \_\_\_\_) = \_\_\_\_$ ☐ $5 \times \_\_\_\_$

(n) $(15 - \_\_\_\_) \times 7 = \_\_\_\_$ ☐ 6×7

(o) $5 \times (\_\_\_\_ - \_\_\_\_) = 5 \times 9 - 5 \times 4$

(p) $(\_\_\_\_ - \_\_\_\_) \times \_\_\_\_ = 17 \times 7 - 9 \times 7$

2. खालीलप्रमाणे दिलेल्या चौकटीमध्ये पदावलींच्या डाव्या बाजूचे (LHS) आणि उजव्या बाजूचे (RHS) विश्लेषण केल्यानंतर '<', '>' किंवा = ही चिन्हे भरा. प्रत्यक्षपणे पदावली न सोडविता पदे आणि कंस वापरून तर्काने आणि आकलनाने शोधा.

(a) $(8 - 3) \times 29$ ☐ $(3 - 8) \times 29$

(b) $15 + 9 \times 18$ ☐ $(15 + 9) \times 18$

(c) $23 \times (17 - 9)$ ☐ $23 \times 17 + 23 \times 9$

(d) $(34 - 28) \times 42$ ☐ $34 \times 42 - 28 \times 42$

3. येथे 14 मिळविण्याची एक पध्दत आहे. $14 : 2 \times (1 + 6) = 14$ मिळविण्याच्या इतर पध्दती आहेत का ? खालीलप्रमाणे दिलेल्या जागेमध्ये भरा.

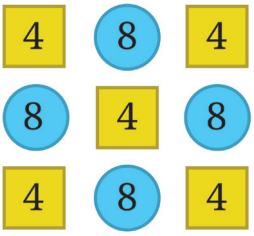
(a) _____ × (_____ + _____) = 14

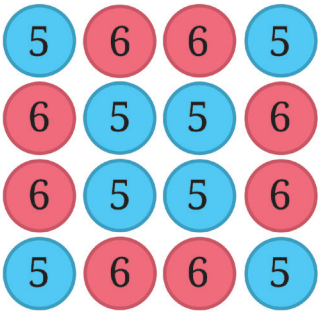
(b) _____ × (_____ + _____) = 14

(c) _____ × (_____ + _____) = 14

(d) _____ × (_____ + _____) = 14

4. खालीलप्रमाणे दिलेल्या संख्यांची बेरीज कमीतकमी दोन वेगवेगळ्या पद्धतीने शोधा. पदावलीच्या सहाय्याने तुम्ही हे कसे सोडवाल ते स्पष्ट करा.





©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील उदाहरणे वाचा प्रत्येकासाठी योग्य पदावली लिहा आणि त्यांच्या किंमती (मूल्ये) काढा.

   (a) बेगुर येथील जिल्हा बाजार आठवड्याचे सातही दिवस सुरु असतो. रहिम आपल्या बागेमधून दररोज 9 किलो आंबे आणि श्याम आपल्या बागेमधून दररोज 11 कि.ग्रॅ. आंबे या बाजारामध्ये पुरवितात. तर स्थानिक जिल्हा बाजारपेठेत त्यानी आठवड्यामध्ये पुरविलेल्या आब्यांचे प्रमाण काढा.

   (b) बिनू दर महिन्याला ₹20,000 कमविते ती ₹5,000 भाडे, ₹5000 आहार आणि ₹2000 इतर खर्चासाठी दर महिना खर्च करते. तर वर्षाच्या शेवटी बिजूने बचत केलेली रक्कम किती?

   (c) दिवसभरामध्ये एक गोगलगाय एका खांबावर 3cm वर चढते आणि रात्रीच्या वेळी झोपेत असल्यामुळे अपघाताने 2cm खाली पडते. तो खांब 10cm उंच आहे आणि त्याच्या वरील टोकावर स्वादिष्ट खाद्यपदार्थ ठेवलेला आहे तर ती गोगलगाय किती दिवसामध्ये ते स्वादिष्ट खाद्यपदार्थ मिळवेल ?

2. मेल्वीन हा मंगळवार आणि शनिवार वगळून प्रत्येक दिवशी एक दोन पानांची गोष्ट वाचतो. तर 8 आठवड्यामध्ये त्याने वाचलेल्या गोष्टीची संख्या किती? खालीलपैकी कोणती घटना याचे वर्णन करते?

   (a) $5 \times 2 \times 8$

   (b) $(7 - 2) \times 8$

   (c) 8×7

   (d) $7 \times 2 \times 8$

   (e) $7 \times 5 - 2$

   (f) $(7 + 2) \times 8$

   (g) $7 \times 8 - 2 \times 8$

   (h) $(7 - 5) \times 8$

3. खालील पदावली सोडविण्याच्या वेगवेगळ्या पध्दती काढा.

   (a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$

   (b) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4. '<', '>' किंवा '=' वापरून तर्काने खालील पदावलींच्या जोडीची तुलना करा.

(a) $49 - 7 + 8$ ☐ $49 - 7 + 8$

(b) $83 \times 42 - 18$ ☐ $83 \times 40 - 18$

(c) $145 - 17 \times 8$ ☐ $145 - 17 \times 6$

(d) $23 \times 48 - 35$ ☐ $23 \times (48 - 35)$

(e) $(16 - 11) \times 12$ ☐ $-11 \times 12 + 16 \times 12$

(f) $(76 - 53) \times 88$ ☐ $88 \times (53 - 76)$

(g) $25 \times (42 + 16)$ ☐ $25 \times (43 + 15)$

(h) $36 \times (28 - 16)$ ☐ $35 \times (27 - 15)$

5. खालील कोणत्या पदावली गणना न करता दिलेल्या पदावलीशी समान आहेत त्या ओळखा. तुम्ही पदांचा किंवा कंसाचा वापर करून पदावली पुन्हा लिहा. दिलेल्या पदावलीशी समान एकापेक्षा जास्त पदावली असू शकतात का?

(a) $83 - 37 - 12$

(i) $84 - 38 - 12$

(ii) $84 - (37 + 12)$

(iii) $83 - 38 - 13$

(iv) $-37 + 83 - 12$

(b) $93 + 37 \times 44 + 76$

(i) $37 + 93 \times 44 + 76$

(ii) $93 + 37 \times 76 + 44$

(iii) $(93 + 37) \times (44 + 76)$

(iv) $37 \times 44 + 93 + 76$

6. एक संख्या निवडा आणि त्या संख्येशी समान असणाऱ्या दहा वेगवेगळ्या पदावल्या लिहा.

@MSBSHSE NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

- आपण बऱ्याच काळापासून साध्या पदावलींचे वाचन करून सोडविल्या आहेत. येथे आपण कांही साध्या पदावलींचा अर्थ आणि मूल्ये यांची उजळणी करून सुरूवात केली आहे.
- आपण थेटपणे पदावली न सोडविता तर्काने त्यांची तुलना कशी केली जाते याचा अभ्यास केला आहे.
- गुंतागुंतीच्या पदावली कोणताही गोंधळ न करता आपणास पदे आणि कंस वापरून वाचण्यास आणि सोडविण्यास मदत केली आहे.
- जेव्हा एखादी पदावली त्यांचा क्रम बदलून किंवा गट करून त्यांची बेरीज केली तर त्यांचे मूल्य बदलत नाही याचे कारण अनुक्रमे ''बेरजेचा क्रमनिरपेक्ष गुणधर्म'' आणि ''बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म'' आहे.
- कंस असलेली पदावली सोडविताना आपण पाहिले आहे की, ऋणात्मक चिन्हाने सुरूवात केली असता कंस काढून टाकताना कंसातील पदांची चिन्हे बदलतात.
- आम्ही वितरण गुणधर्म सुद्धा शिकलो आहे. कंसात असलेल्या पदावलीने संख्येचा गुणाकार करणे म्हणजेच कंसातील प्रत्येक पदाला संख्येने गुणाकार करणे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



कोड्याची वेळ !

पदावली अभियंता!

आम्ही 3 ही संख्या तीन वेळा घेऊन चार क्रिया (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार) आणि कंस वापरून अनेक पदावल्या बनवू शकतो. उदाहरणार्थ, $(3 + 3)/3 = 2$, $3 + 3 – 3 = 3$, $3 \times 3 + 3 = 12$ इ.

चार 4 वेळा वापरून 1 ते 20 पर्यंत सर्व मूल्ये मिळणाऱ्या पदावल्या तयार करा. कोणत्याही क्रमाने 1, 2, 3, 4 आणि 5 या संख्या फक्त एकदाच वापरून –10ते +10 यामधील शक्य तितकी जास्तीत जास्त मूल्ये मिळवा.

0 ते 9 पर्यंतच्या संख्या फक्त एकदाच कोणत्याही क्रमाने वापरुन 100 मूल्य येणारी पदावली तयार करा.

तुम्ही असे आणखी कोणते मनोरंजक प्रश्न विचारु शकाल का?



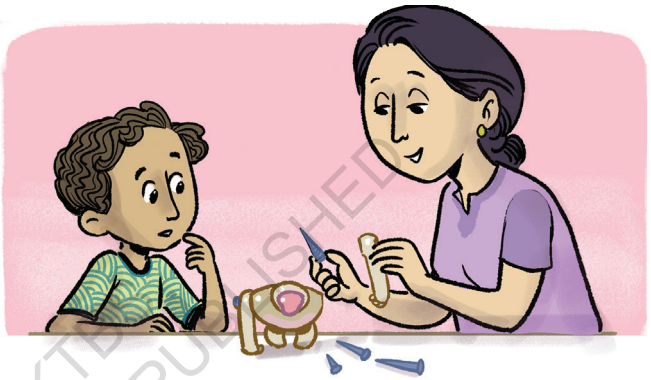
NOT TO BE @KTBS REPUBLISHED

3 बिंदूच्या पलिकडे डोकावणे

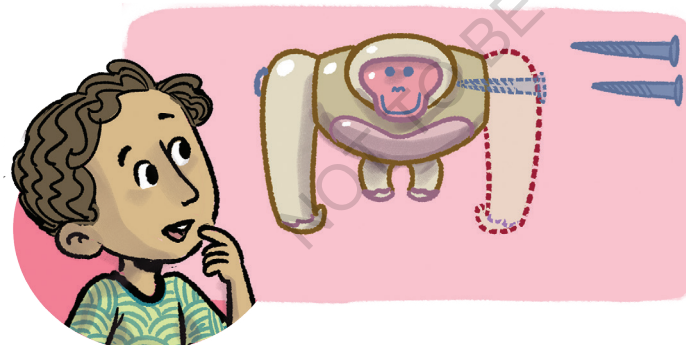
(A PEEK BEYOND THE POINT)

Q3F1S7

3.1. लहानात लहान एककांची गरज



सोनूची आई एक खेळणे जोडत होती. ती एका स्क्रूच्या सहाय्याने दोन तुकडे जोडण्याचा प्रयत्न करत होती. सोनू आपल्या आईकडे मोठ्या उत्सुकतेने पाहत होता. त्याच्या आईला हे तुकडे जोडता येत नव्हते. सोनूने का असे विचारले? त्याच्या आईने सांगितले की तो स्क्रू योग्य आकाराचा नाही.

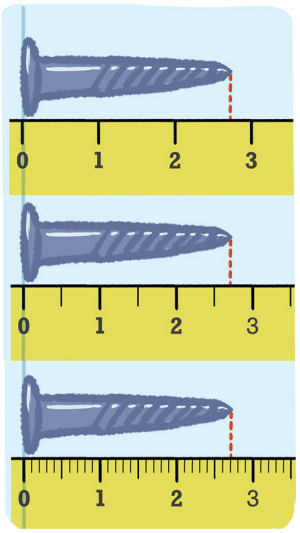


तिने डब्यातून आणखी एक स्क्रू आणला आणि ते खेळणे जोडले. सोनूला ते दोन्ही स्क्रू सारखेच वाटले. परंतु जेव्हा त्याने त्यांचे बारकाईने निरीक्षण केले, तेव्हा त्याला ते थोडे वेगवेगळ्या लांबीचे आहेत असे दिसून आले.

लांबीमधील एवढ्याशा लहा फरकामुळे इतका मोठा परिणाम होतो हे पाहून तो अचंबीत झाला. त्याला हा लांबीमधील फरक जाणून घेण्याची उत्सुकता होती. ते दोन्ही स्क्रू जवळजवळ सारखेच वाटत होते त्यामुळे त्यांच्या लांबीमधील फरक किती लहान होता हे त्याला जाणून घ्यायचे होते.

खालील चित्रामध्ये ते दोन्ही स्क्रू एका मोजपट्टीवर ठेवलेले आहेत. त्यांची लांबी मोजा आणि दिलेल्या जागेमध्ये त्याची लांबी लिहा.

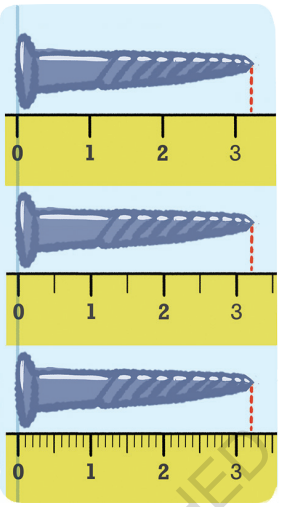
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



2 cm ते 3 cm यांच्यामध्ये

$2\frac{1}{2}$ cm पेक्षा जास्त परंतु 3 cm पेक्षा कमी

$2\frac{7}{10}$ cm



_____

_____

_____

? कोणत्या मोजपट्टीने स्क्रूची लांबी अचूकपणे मोजण्यासाठी मदत केली? का?

? (पहिल्या स्क्रू ची लांबी) $2\frac{7}{10}$ cm याचा अर्थ काय?

मोजपट्टीवर दाखविल्याप्रमाणे दोन क्रमवार संख्यामधील एकक लांबी ही 10 समान भागामध्ये विभागलेली आहे. $2\frac{7}{10}$ cm ही लांबी मिळविण्यासाठी आपल्याला 0 पासून 2 पर्यंत जावे लागते आणि त्यानंतर $\frac{1}{10}$ चे सात भाग घ्यावे लागतात. तेव्हा त्या स्क्रूची लांबी 2cm आणि $\frac{7}{10}$ cm ही मिळते. याचप्रमाणे, आपण $3\frac{2}{10}$ cm ची लांबी जाणून घेतो.

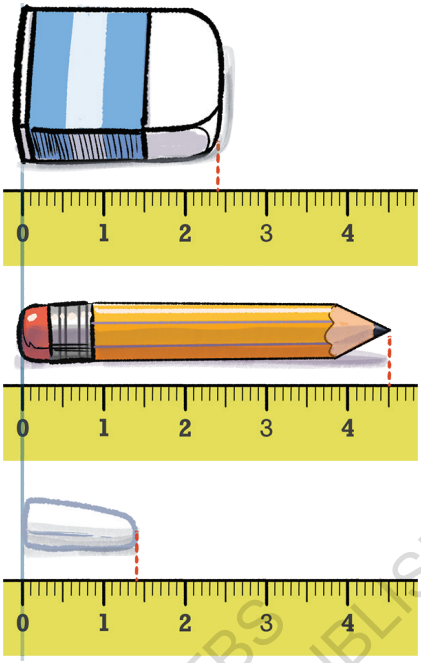
आपण $2\frac{7}{10}$ हे **दोन पूर्णांक सात दशांश cm** तसेच $3\frac{2}{10}$ cm हे **तीन पूर्णांक दोन दशांश cm** असे वाचतो.

? स्क्रूचे मोजमाप करण्यासाठी एकके ही लहान भागामध्ये का विभागलेली आहेत याचे स्पष्टीकरण तुम्ही करू शकाल का?

? मोजपट्टी वापरून खालील वस्तूंची मापे मोजा आणि ती सेंटीमीटरमध्ये लिहा. (जसे आधी स्क्रूची लांबी दाखविल्याप्रमाणे) पेन, शार्पनर आणि तुम्ही निवडलेल्या कोणत्याही इतर वस्तू घ्या.

? चित्रामध्ये दाखविलेल्या वस्तूंची मापे लिहा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



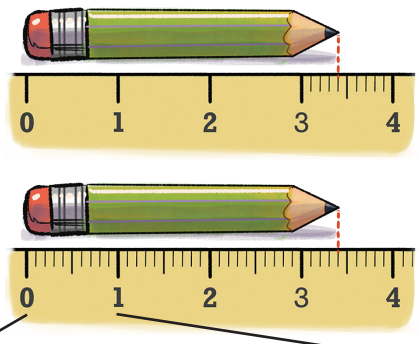
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे दाखविल्याप्रमाणे, जेव्हा अचूक मोजमापांची गरज असते, तेव्हा आम्ही लहान एककामधील मापनांचा वापर करतो.

3.2 एक दशांश भाग

खालील आकृतीमध्ये दर्शविलेल्या पेन्सिलची लांबी $3\frac{4}{10}$ एकके आहे, ते 3 एकके आणि चार एक दशांश असे सुध्दा वाचतात.

म्हणजेच $(3 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10})$ एकके



$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$

= 10 वेळा $\frac{1}{10}$ = $10 \times \frac{1}{10}$) 1 एकक

ही लांबी 34 एक दशांश एककाइतकीच आहे कारण 10 एक दशांश एकके ही एक एकक तयार करतात.

$$34 \times \frac{1}{10} = \frac{34}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{4}{10} \text{ (34 एक दशांश)}$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{4}{10} \text{ (3 आणि 4 एक दशांश)}$$

खाली कांही संख्या अपूर्णांकीय एककात त्यांच्या वाचण्याच्या पध्दतीसह दर्शविलेल्या आहेत.

$4\frac{1}{10} \longrightarrow$ 'चार पूर्णांक एक दशांश'

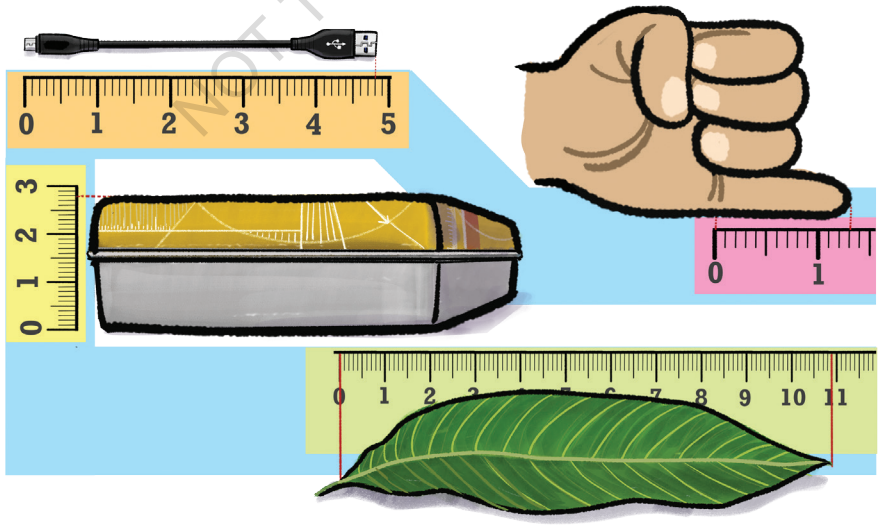
$\frac{4}{10} \longrightarrow$ 'चार एक दशांश किंवा चार दशांश'

$\frac{41}{10} \longrightarrow$ 'एक्केचाळीस एक दशांश किंवा 'एक्केचाळीस दशांश'

$41\frac{1}{10} \longrightarrow$ 'एक्केचाळीस पूर्णांक एक दशांश'

खाली दिलेल्या वस्तूंची लांबी दोन पध्दतीमध्ये लिहा आणि मोठ्याने वाचा. यूएसबी (USB) केबलचे उदाहरण दिलेले आहे. (लक्षात ठेवा की प्रत्येक आकृतीमध्ये वापरलेल्या एककांची लांबी सारखीच नसते.)

यू.एस.बी. (USB) केबलची लांबी ही 4 आणि $\frac{8}{10}$ एकके किंवा $\frac{48}{10}$ एकके आहे.



© MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? या लांबी चढत्या क्रमामध्ये मांडा.

(a) $\frac{9}{10}$ (b) $1\frac{7}{10}$ (c) $\frac{130}{10}$ (d) $13\frac{1}{10}$

(e) $10\frac{5}{10}$ (f) $7\frac{6}{10}$ (g) $6\frac{7}{10}$ (h) $\frac{4}{10}$

? $4\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{41}{10}, 41\frac{1}{10}$ या लांबी त्यांच्या चढत्या क्रमामध्ये मांडा.

? सोनू आपल्या शरीराच्या कांही भागांचे मोजमाप करत आहे. सोनूच्या कोपरापासून खालील हाताची लांबी $2\frac{7}{10}$एकके आणि वरील हाताची लांबी $3\frac{6}{10}$ एकके आहे. तर त्याच्या हाताची एकूण लांबी किती?

एकूण लांबी मिळविण्यासाठी, आपण पाहू की कोपरापासून खालच्या आणि वरच्या हाताची लांबी अनुक्रमे 2 एकके आणि 7 एक दशांश, 3 एकके आणि 6 एक दशांश आहेत.

म्हणून तेथे (2+3) एकके आणि (7+6) एक दशांश आहेत. एकत्रितपणे ते 5 एकके आणि 13 एक दशांश बनतात. परंतु 13 एक दशांश म्हणजेच 1 एकक आणि 3 एक दशांश. त्यामुळे एकूण लांबी 6 एकके आणि 3 एक दशांश आहे.

(a) $(2 + 3) + \left(\frac{7}{10} + \frac{6}{10}\right)$

$= (2 + 3) + \left(\frac{13}{10}\right)$

$= 5 + \frac{13}{10}$

$= 5 + \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 5 + 1 + \frac{3}{10}$

$= 6 + \frac{3}{10}$

$= 6\frac{3}{10}$

(b)

$$\begin{array}{r} 2\ \frac{7}{10} \\ +\ 3\ \frac{6}{10} \\ \hline = 5\ \frac{13}{10} \\ = 6\ \frac{3}{10} \end{array}$$

NOT TO BE REPUBLISHED @KTRS

किंवा दोन्ही लांबी या दशांशामध्ये रूपांतरीत करून नंतर बेरीज केली जाऊ शकते.

(c) 27 एक दशांश आणि 35 एक दशांश हे 62 एक दशांश होतात.

$$\frac{27}{10} + \frac{35}{10} = \frac{62}{10}$$

$\frac{62}{10}$ हे 60 एकदशांश $\left(\frac{60}{10}\right)$ आणि 2 एकदशांश $\left(\frac{2}{10}\right)$ शी समान आहे.

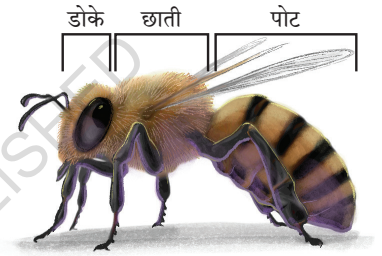
ते 6 एकके आणि 2 एक दशांशशी समान आहे, म्हणजेच $6\frac{2}{10}$ आहे.

? मधमाशीच्या शरीराच्या भागांची लांबी दिलेली आहे. तर तिची एकूण लांबी काढा.

डोके: $2\frac{3}{10}$ एकके

छाती: $5\frac{4}{10}$ एकके

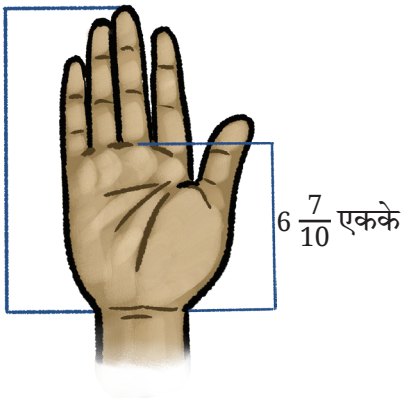
पोट: $7\frac{5}{10}$ एकके



? शैलजाच्या हाताची लांबी $12\frac{4}{10}$ एकके आणि तिच्या तळहाताची लांबी $6\frac{7}{10}$ एकके ही चित्रामध्ये दाखविल्याप्रमाणे आहे. तर सर्वात लांब (मधल्या) बोटाची लांबी किती?

$\left(12 + \frac{4}{10}\right) - \left(6 + \frac{7}{10}\right)$ हे सोडवून

बोटाची लांबी काढली जाऊ शकते. हे वेगवेगळ्या प्रकारे सोडविले जाऊ शकते. उदा.



(a) $12 + \frac{4}{10} - 6 - \frac{7}{10}$

$= (12 - 6) + \left(\frac{4}{10} - \frac{7}{10}\right)$

$= 6 - \frac{3}{10}$

$= 5 + 1 - \frac{3}{10}$

$= 5 + \frac{10}{10} - \frac{3}{10}$

$= 5 + \frac{7}{10} = 5\frac{7}{10}$

येथे काय केलेले आहे आणि का? याची चर्चा करा.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(b) $12\frac{4}{10} \longrightarrow 11\frac{14}{10}$

$-6\frac{7}{10} \qquad -6\frac{7}{10}$

$= 5\frac{7}{10}$

जसे मोजसंख्यांच्या बाबतीत होते, तसेच दशांशापासून वजाबाकी सूरु करणे सोयीस्कर होते. आपण 7 एक दशांश हे 4 एक दशांश मधून काढू शकत नाही.

म्हणून आपण 12 मधून एककाची फोड करून त्याचे 10 एकदशांश मध्ये रूपांतर करतो. आता त्या संख्येमध्ये 11 एकके आणि 14 एक दशांश आहेत. आपण 11 एककांमधून 6 एकके वजा करतो आणि 14 एक दशांशामधून 7 एक दशांश वजा करतो.

? दोन्ही लांबी या दशांशामध्ये रुपांतरीत करुन फरक काढण्याचा प्रयत्न करा.

? डॅनिओचा अवकाशीय मोती या माशाची लांबी $2\frac{4}{10}$ cm आणि फिलीपाईन गोबी या माशाची लांबी $\frac{9}{10}$cm आहे. तर त्यांच्या लांबीमधील फरक किती?

? तुमच्या बोटाशी तुलना केली असता हे मासे किती मोठे आहेत?



डॅनिओचा अवकाशीय मोती



फिलीपाईन गोबी

? दिलेल्या संख्यांच्या क्रमाचे निरीक्षण करा. प्रत्येक पदानंतर बदल ओळखा. या मांडणीतील पदापर्यंत वाढवा.

(a) $4, 4\frac{3}{10}, 4\frac{6}{10}$, _____, _____, _____, _____

(b) $8\frac{2}{10}, 8\frac{7}{10}, 9\frac{2}{10}$, _____, _____, _____, _____

(c) $7\frac{6}{10}, 8\frac{7}{10}$, _____, _____, _____, _____

© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

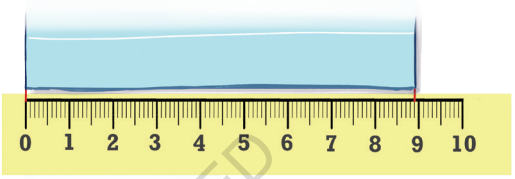
(d) $5\frac{7}{10}, 5\frac{3}{10}$, _____, _____, _____, _____

(e) $13\frac{5}{10}, 13, 12\frac{5}{10}$, _____, _____, _____, _____

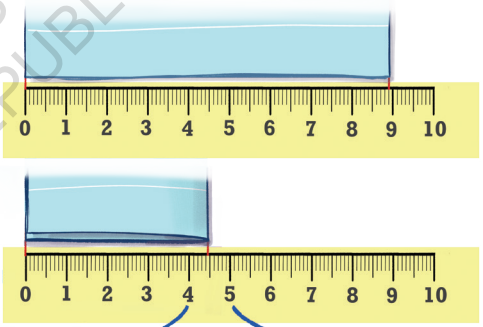
(f) $11\frac{5}{10}, 10\frac{4}{10}, 9\frac{3}{10}$, _____, _____, _____, _____

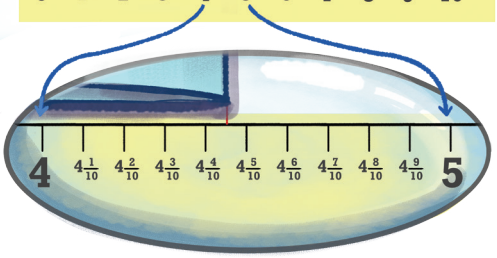
3.3 एक शतांश भाग

एका कागदाची लांबी $8\frac{9}{10}$ एकके, ते 8 एकके आणि 9 एकदशांश असे सुध्दा म्हटले जाते. तो त्याच्या लांबीवरून अर्ध्या भागात दुमडला. तर आता त्याची लांबी किती?



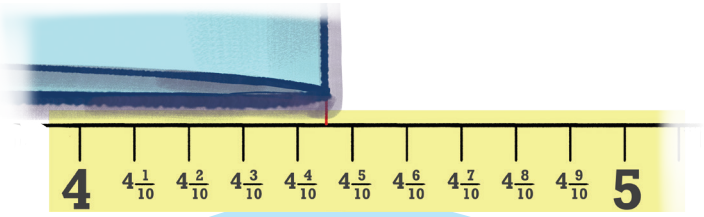
आपण सांगू शकतो की, त्याची लांबी $4\frac{4}{10}$ एकके आणि $4\frac{5}{10}$ एकके यांच्यामध्ये आहे. पण आपण त्याचे अचूक माप सांगू शकत नाही. कारण तेथे पट्टीवर खुणा नाहीत. याआधी आपण लहान लांबी मोजताना त्याच्या एककाची 10 एक दशांश भागात विभागणी करत होतो. तसेच कांहीसे पुन्हा करून आपण प्रत्येक एक दशांशची विभागणी 10 भागात करू शकतो.





? या लहान भागाची लांबी किती? एकक लांबी होण्यासाठी असे किती लहान भाग हवेत?

खालील आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रत्येक एक दशांश भागामध्ये 10 लहान लहान भाग आहेत आणि एककामध्ये 10 एक दशांश आहेत. म्हणून एककामध्ये 100 लहानात लहान भाग असतील. त्यामुळे एका भागाची लांबी $\frac{1}{100}$ एकक इतकी असेल.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

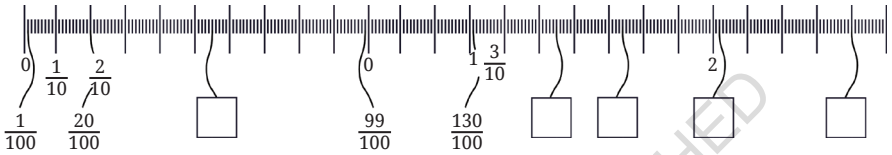
आता आपण आपल्या प्रश्नाकडे परत येऊया. दुमडलेल्या कागदाची लांबी किती?

आपण पाहतो की त्याचा शेवट $4\frac{4}{10}$ आणि $\frac{5}{100}$ एककामध्ये होतो. ते आपण **4 एकक 4 एक दशांश आणि 5 एक शतांश** असे वाचतो.

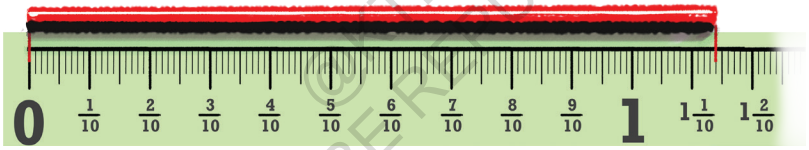
? किती एक शतांश मिळून एक दशांश होतात? आपण त्याची लांबी ही 4 एकके आणि 45 एक शतांश असे म्हणू शकतो का?

गणिती बोल

खालील आकृतीचे निरीक्षण करा. जेव्हा 0 पासून मोजले जाते, तेव्हा चौकटींमध्ये लिहिलेली संबंधित लांबी आणि खुणा याकडे लक्ष द्या. मोकळ्या चौकटीमध्ये लांबी भरा.



पहिल्या चित्रामध्ये तारेची लांबी तीन वेगवेगळ्या प्रकारे दिलेली आहे. समान लांबी कशाप्रकारे दर्शविली जाते हे तुम्ही पाहिलत का?

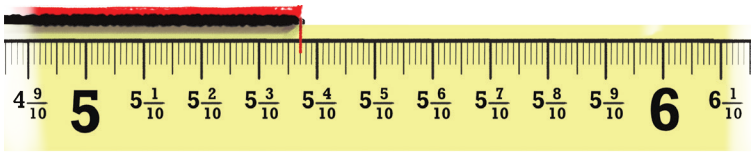


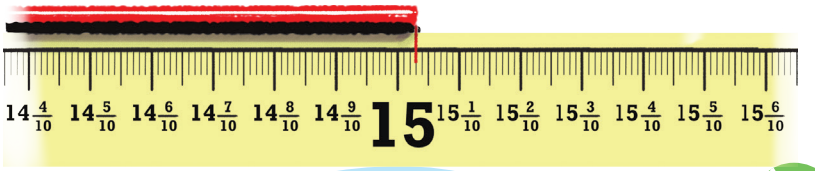
$1\frac{1}{10}\frac{4}{100}$ **एक पूर्णांक एक दशांश आणि चार शतांश**

$1\frac{14}{100}$ **एक पूर्णांक चौदा शतांश**

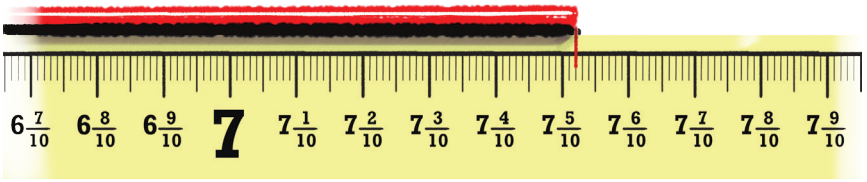
$\frac{114}{100}$ **एकशे चौदा शतांश**

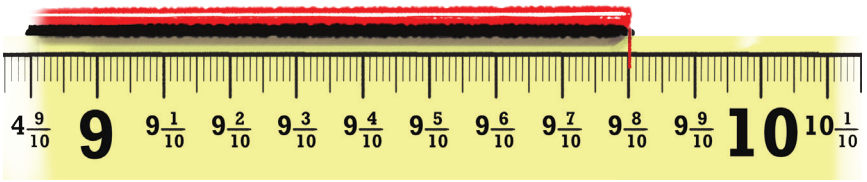
? खाली दिलेल्या लांबीची मापे लिहा आणि ही मापे वाचा.





© MSTBS NOT TO BE REPUBLISHED



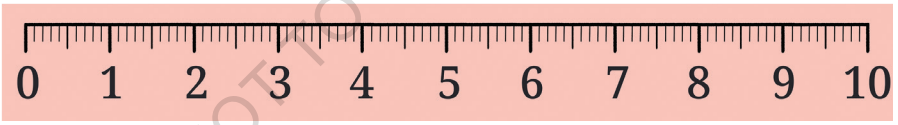


प्रत्येक गटातील सर्वात जास्त आणि सर्वात कमी लांबी ओळखा. प्रत्येक लांबीची मोजपट्टीवर खूण करा.

(a) $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{33}{100}$



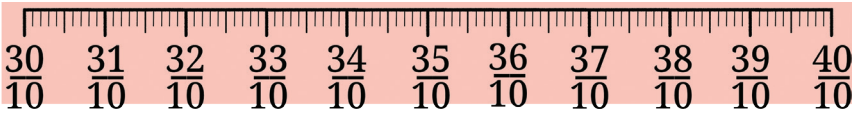
(b) $3\frac{1}{10}, \frac{30}{10}, 1\frac{3}{10}$



(c) $\frac{45}{100}, \frac{54}{100}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}$



(d) $3\frac{6}{10}, 3\frac{6}{100}, 3\frac{6}{10}, \frac{6}{100}$

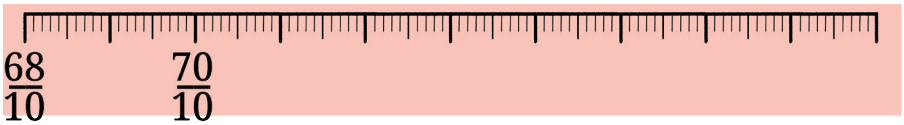


@KYBS NOT TO BE REPUBLISHED

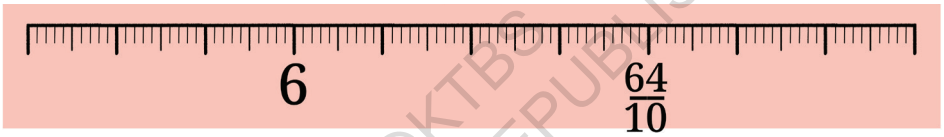
(e) $\frac{8}{10}\ \frac{2}{100}, \frac{9}{100}, 1\frac{8}{100}$



(f) $7\frac{3}{10}\ \frac{5}{100}, 7\frac{5}{10}$



(g) $\frac{65}{10}\ \frac{65}{100}, 5\frac{87}{100}, 5\frac{7}{100}$



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? $15\frac{3}{10}\frac{4}{100}$ आणि $2\frac{6}{10}\frac{8}{100}$ यांची बेरीज किती?

हे वेगवेगळ्या पध्दतीने सोडविले जाऊ शकते. कांही पध्दती खाली दाखविल्या आहेत.

(a) पध्दत 1 :

? $(15 + 2) + \left(\frac{3}{10} + \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{4}{100} + \frac{8}{100}\right)$

$= 17 + \frac{9}{10} + \frac{12}{100}$

$= 17 + \frac{9}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$

$= 17 + \frac{10}{10} + \frac{2}{100}$

$= 18\frac{2}{100}$.

10 शतांश हे 1 दशांशाशी समान आहे

(b) पध्दत 2

$$\begin{array}{rr} & 15\ \frac{3}{10}\ \frac{4}{100} \\ + & 2\ \frac{6}{10}\ \frac{8}{100} \\ \hline = & 17\ \frac{9}{10}\ \frac{12}{100} \\ = & 17\ \frac{10}{10}\ \frac{2}{100} \\ = & 18\ \frac{2}{100} \end{array}$$

? या दोन्ही पध्दती वेगवेगळ्या आहेत का?

? 483+268 या खालील बेरजेचे निरीक्षण करा. येथे वर दाखविलेल्या पद्धतीशी काही साम्य आहे का?

गणिती बोल

$$\begin{aligned} & (400 + 80 + 3) + (200 + 60 + 8) \\ = & (400 + 200) + (80 + 60) + (3 + 8) \\ = & 600 + 140 + 11 \\ = & 600 + 150 + 1 \\ = & 700 + 50 + 1 \\ = & 751 \end{aligned}$$

$15\ \frac{3}{10}\ \frac{4}{100} + 2\ \frac{6}{10}\ \frac{8}{100}$ ही बेरीज सुध्दा शतांशामध्ये रूपांतरीत करून खालीलप्रमाणे करता येते.

(c) $(15 + 2) + \left(\frac{34}{100} + \frac{68}{100}\right)$

$= 17 + \frac{102}{100}$

$= 17 + 1 + \frac{2}{100}$

$= 18\ \frac{2}{100}$

100 शतांश हे 1 एककाशी समान आहे

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(d) $\left(\frac{1534}{100}\right) + \left(\frac{268}{100}\right)$

$= \frac{1802}{100}$

$= \frac{1802}{100} + \frac{2}{100}$

$= 18\frac{2}{100}$

15 हे 1500 शतांशाशी समान आणि 2 हे 200 शतांशाशी समान आहे.

? $25\frac{9}{10} - 6\frac{4}{10}\frac{7}{100}$ यामधील फरक किती?

हे सोडविण्याची एक पध्दत खालीलप्रमाणे आहे.

$25\frac{9}{10} \longrightarrow 25\frac{8}{10}\frac{10}{100} \longrightarrow 25\frac{8}{10}\frac{10}{100}$

$-6\frac{4}{10} \qquad -6\frac{4}{10}\frac{7}{100} \qquad -6\frac{4}{10}\frac{7}{100}$

$= 19\frac{4}{10}\frac{3}{100}$

? शतांशामध्ये रूपांतरीत करुन सोडवा.

$15\frac{3}{10}\frac{4}{100} - 2\frac{6}{10}\frac{8}{100}$ यामधील फरक किती?

हे सोडविण्याची एक पध्दत पुढीलप्रमाणे आहे:

गणिती बोल

$15\frac{3}{10}\frac{4}{100} \qquad 15\frac{2}{10}\frac{14}{100} \qquad 14\frac{12}{10}\frac{14}{100}$

$-2\frac{6}{10}\frac{8}{100} \qquad -2\frac{6}{10}\frac{8}{100} \qquad -2\frac{6}{10}\frac{8}{100}$

$= 2\frac{6}{10}\frac{6}{100}$

@KTS NOT TO BE REPUBLISHED

653–268 या खालील वजाबाकीचे निरीक्षण करा. येथे वर दाखविलेल्या पध्दतीशी काही साम्य आहे का?

गणिती बोल

$$\begin{aligned}
&(600 + 50 + 3) - (200 + 60 + 8)\\
&= (600 - 200) + (50 - 60) + (3 - 8)\\
&= (600 - 200) + (40 - 60) + (13 - 8)\\
&= (600 - 200) + (40 - 60) + 5\\
&= (500 - 200) + (140 - 60) + 5\\
&= 300 + 80 + 5\\
&= 385
\end{aligned}$$

? शोधा पाहू. (Figure it out)

बेरीज आणि वजाबाकी करा.

(a) $\frac{3}{10} + 3\frac{4}{100}$

(b) $9\frac{5}{10}\frac{7}{100} + 2\frac{1}{10}\frac{3}{100}$

(c) $15\frac{6}{10}\frac{4}{100} + 14\frac{3}{10}\frac{6}{100}$

(d) $7\frac{7}{100} - 4\frac{4}{100}$

(e) $8\frac{6}{100} - 5\frac{3}{100}$

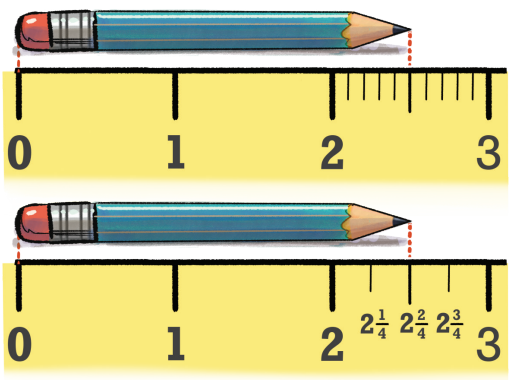
(f) $12\frac{6}{100}\frac{2}{100} - \frac{9}{10}\frac{9}{100}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.4. दशांशाचे स्थानमूल्य

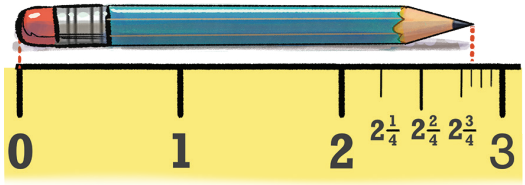
तुमच्या लक्षात आले असेल की, जेव्हा जेव्हा आम्हाला अचूकपणे मोजमाप करायचे असते तेव्हा आपण एका भागाचे 10 (लहान) समान भागात विभाजन करतो. आपण एका एककाचे 10 एक दशांशामध्ये विभाजन करतो आणि नंतर प्रत्येक एक दशांशाचे 10 एक शतांशामध्ये विभाजन करतो. त्यानंतर हे लहान भाग मोजण्यासाठी वापरतो.

? याऐवजी आपण एका एककाचे 4 समान भाग, 5 समान भाग, 8 समान भाग किंवा असे इतर कोणत्याही संख्येच्या समान भागामध्ये विभाजन करू शकत नाही का?



होय, आपण करू शकतो. जेव्हा एकक 10 समान भागामध्ये विभागले जाते, आणि जेव्हा एकक 4 समान भागामध्ये विभागले जाते तेव्हा समान लांबी कशी दर्शविली जाते हे खालील उदाहरण तुलना करून सांगते.

जर आणखी अचूक मोजमापाची गरज असेल, तर प्रत्येक पाव (एक चतुर्थांश) भाग आणखी चार समान भागामध्ये विभागला जाऊ शकतो. तेव्हा प्रत्येक भागाचे माप हे एककाच्या $\frac{1}{16}$ इतके होते म्हणजेच, असे 16 भाग मिळून 1 एकक तयार होते.



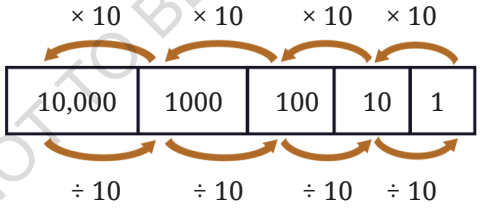
? असे असेल तर प्रत्येकवेळी एककाचे 10 समान भागामध्येच का विभाजन केले जाते?

याचे कारण म्हणजे भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीमध्ये 10 विशेष भूमिका बजावतो. भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीमध्ये दर्शविलेल्या पूर्ण संख्येकरिता उदाहरणार्थ, 281→2 चे स्थानमूल्य शतक (100), 8 चे स्थानमूल्य दशक (10) आणि 1चे स्थानमूल्य एकक (1) आहे. प्रत्येकाचे स्थानमून्य त्याच्या उजवीकडे लागून येणाऱ्या अंकापेक्षा 10 पटीने मोठे असते. त्याचप्रमाणे त्याच्या डावीकडे लागून येणाऱ्या अंकापेक्षा 10 पटीने लहान असते.

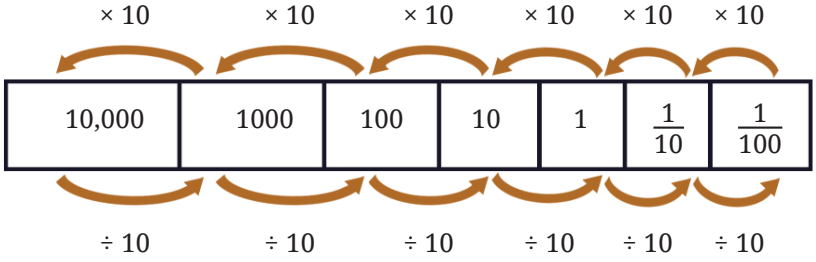
10 एकक (1) हे दशक बनवितात.

10 दशक (10) हे शतक बनवितात.

10 शतक (100) हे सहस्त्र बनवितात इ.



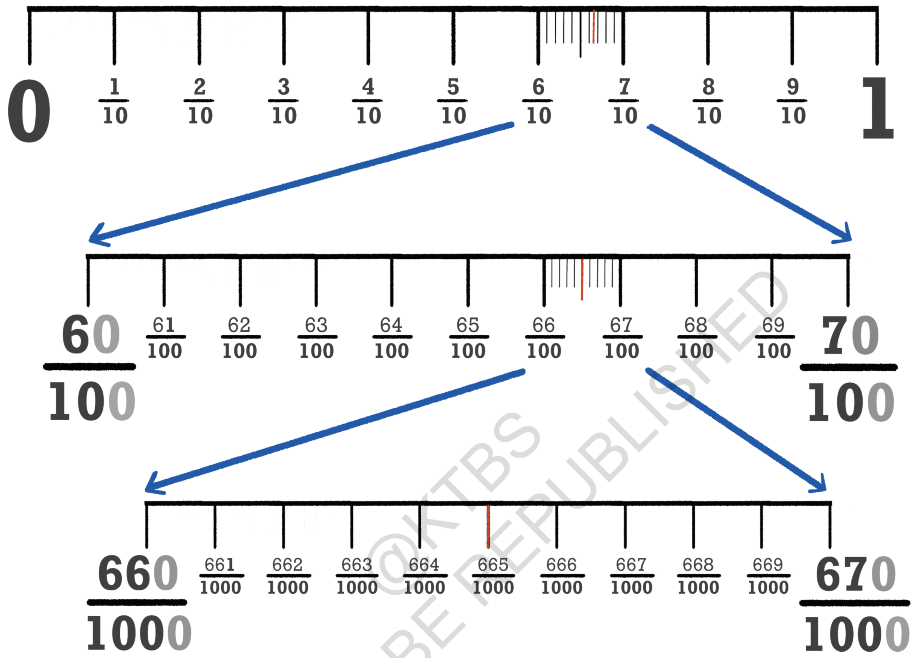
संख्या लिहिण्याची ही पध्दत 1 पेक्षा लहान संख्यांसाठी वाढविताना आपण 1 ला त्याच्या 10 समान भागात विभागतो. यामुळे काय मिळते? तेथे एक दशांश मिळतात. याचे पुन्हा 10 भागात विभाजन केले तर एक शतांश मिळतात. इत्यादी–



NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

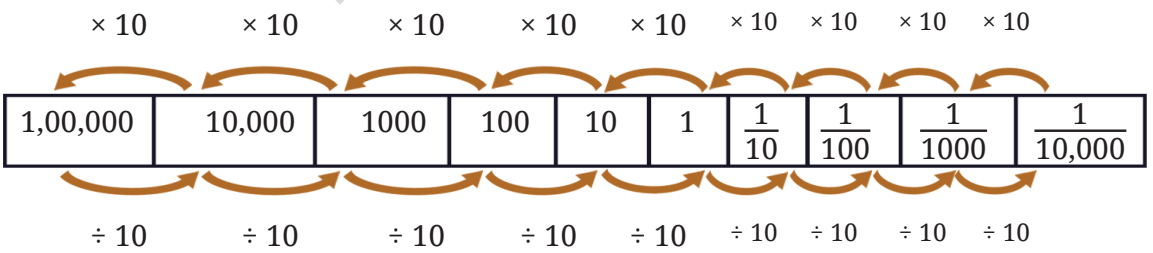
? हे आपण पुढे वाढवू शकतो का?

? जर $\frac{1}{100}$ हे समान 10 भागात विभागले तर कोणता अपूर्णांक मिळेल? तो $\frac{1}{1000}$ असेल. म्हणजेच असे हजार भाग एक एकक बनवितात.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जेव्हा आपण 10,000 च्या डावीकडे जातो तेव्हा प्रत्येक पायरीमध्ये त्याचे स्थानमूल्य मोठे होत जाते आम्ही $\frac{1}{1000}$ च्या उजवीकडेही जाऊ शकतो, तेव्हा प्रत्येक पायरीमध्ये त्याचे स्थानमूल्य लहान होत जाते.



याप्रकारे संख्या लिहिण्याच्या पध्दतीला ''दशांश पध्दत'' असे म्हणतात. कारण, ही 10 या संख्येवर आधारित आहे, ''डेसेम'' (decem) चा लॅटिन भाषेतील अर्थ दहा आहे. जे संस्कृतमध्ये ''दश'' या शब्दाशी संबंधित आहे. ज्याचा अर्थ 10 हा आहे आणि 10 साठी असेच शब्द ओडिया, कोंकणी, मराठी गुजराती,

हिंदी, काश्मीरी, बोडो आणि आसामी या भारतीय भाषांमध्ये आढळतात. आपण पुढील वर्गामध्ये संख्या लिहिण्याच्या इतर पध्दतींचा अभ्यास करूया.

किती मोठे?

आम्हाला माहित आहे की, 100 दशक 1000 बनवतात आणि 100 शतक 10,000 बनवतात.

? अपुर्णांकीय भागांविषयी आम्ही असेच प्रश्न विचारु शकतो:

(a) किती सहस्त्रांश पासून एक एकक तयार होतो?

(b) किती सहस्त्रांश पासून एक दशांश तयार होतो?

(c) किती सहस्त्रांश पासून एक शतांश तयार होतो?

(d) किती दशांश पासून एक दशक तयार होतो?

(e) किती शतांश पासून एक दशक तयार होतो?

? अशा प्रकारचे आणखी काही प्रश्न तयार करा आणि त्यांची उत्तरे लिहा.

चिन्ह, संख्यांचे लेखन आणि वाचन :



आपण संख्या एका विशिष्ट प्रकारे लिहित आलो आहेत, जसे की 4×100 (4 शतक) + 5×10 (5 दशक) + 6×1 (6 एकक) असे लिहिण्याऐवजी 456 असे लिहितात. त्याचप्रमाणे आम्ही दशांश आणि शतांश लिहिणे वगळू शकतो का?

$42\left(2\times\frac{1}{10}\right)$ हे $\left(2\times\frac{1}{10}\right.$ मधील $\frac{1}{10}$ वगळून$\left.\right)$ $4\frac{2}{10}$ असे लिहू शकतो का?

जर होय असेल तर, ते आपल्याला कसे माहित आहे की, 42 चा अर्थ हा 4 दशक आणि 2 एकक किंवा 4 एकक आणि 2 दशांश होतो?

त्याचप्रमाणे 705 चा अर्थ:

(a) 7 शतक आणि 0 दशक आणि 5 एकक (700+0+5)

(b) 7 दशक आणि 0 एकक आणि 5 दशांश $\left(70+0+\frac{5}{10}\right)$

(c) 7 एकक आणि 0 दशांश आणि 5 शतांश $\left(7+\frac{0}{10}+\frac{5}{100}\right)$

ज्याअर्थी या वेगवेगळ्या राशी आहेत त्याअर्थी त्या लिहिण्याच्या वेगवेगळ्या पध्दती आहेत.

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

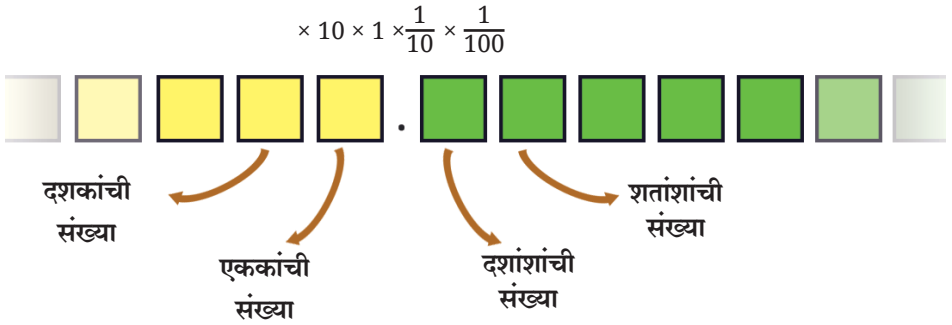
जिथे पूर्णांक संपतात आणि अपूर्णांक भाग सुरु होतो तेथे त्यांचे स्थानमूल्य ओळखण्यासाठी आपण बिंदूचा (‘.’) विभाजक म्हणून वापर करतो. त्याला **दशांश बिंदू** असे म्हणतात.

वरील राशी दशांश चिन्हामध्ये खालीलप्रमाणे आहेत.

राशी	दशांश चिन्ह (संकेत)
7 शतक आणि 5 एकक $(700 + 0 + 5)$	705
7 दशक आणि 5 दशांश $\left(70 + 0 + \frac{5}{10}\right)$	70.5
7 एकक आणि 5 शतांश $\left(7 + 0 + \frac{5}{100}\right)$	7.05

या संख्या खालीलप्रमाणे स्थानमूल्यांच्या सहाय्याने दर्शविलेल्या आहेत.

दशांश संख्या	शंभर (शतक)	दहा (दशक)	एक (एकक)	दशांश	शतांश
705	7×100	0×10	5×1		
70.5		7×10	0×1	$5 \times \frac{1}{10}$	
7.05			7×1	$0 \times \frac{1}{10}$	$5 \times \frac{1}{100}$



© MTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अशारितीने दशांश चिन्ह हे भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीच्या अपुर्णांकात असणाऱ्या संख्यांचा स्वाभाविक विस्तार आहे. जसे की 705 म्हणजे $7 \times 100 + 5 \times 1$, तसेच 70.5 म्हणजे $7 \times 10 + \frac{5}{10}$ आणि 7.05 म्हणजे $7 \times 1 + \frac{5}{100}$ आहे.

आपण दशांश चिन्ह ('.') वापरून संख्या कशा लिहायच्या ते पाहिले आहे. परंतु आपण या संख्या कशा वाचतो/म्हणतो?

आम्हाला माहित आहे की, 705 हे '**सातशे पाच**' असे वाचतात.

70.5 हे '**सत्तर पूर्णांक पाच दशांश**' असे वाचतात. थोडक्यात **सत्तर आणि पाच दशांश.**

7.05 हे '**सात पूर्णांक पाच शतांश**' किंवा **सात आणि पाच शतांश** असे वाचतात.

0.274 हे शून्य पूर्णांक दोनशे चौऱ्याहत्तर सहस्त्रांश असे वाचतात. आपण ते शून्य बिंदू दोनशे चौऱ्याहत्तर असे वाचत नाही. कारण 0.274 म्हणजे 2 दशांश, 7 शतांश आणि 4 सहस्त्रांश होय.

? वरील प्रमाणे स्थानमूल्य तक्ता तयार करा. प्रत्येक राशी दशांश स्वरुपात आणि त्यांच्या स्थान मूल्यात लिहा आणि त्या संख्या वाचा.

(a) 2 एकक, 3 दशांश आणि 5 शतांश

(b) 1 दशक, आणि 5 दशांश

(c) 4 एकक आणि 6 शतांश

(d) 1 शतक, 1 एकक आणि 1 शतांश

(e) $\frac{8}{100}$ आणि $\frac{9}{10}$

(f) $\frac{5}{100}$

(g) $\frac{1}{10}$

(h) $2\frac{1}{100}$, $4\frac{1}{10}$ आणि $7\frac{7}{1000}$

'आपल्या सभोवतालच्या मोठ्या संख्या'या पाठामध्ये 23 शतक हे कसे लिहिले जातात, हे आम्ही शिकलो आहोत.

23 शतक = 23×100 = 2000+300=2300

सहस्त्र	शतक	दशक	एकक
	23		
2	3	0	0

त्याचप्रमाणे 23 दशक हे,

23 दशक = 23×10=200+30=230

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सहस्र	शतक	दशक	एकक
		23	
	2	3	0

? आपण 234 हे दशांश स्वरूपात कसे लिहू शकतो?

$$234 \text{ दशांश } = \frac{234}{10}$$

$$= \frac{200}{10} + \frac{30}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= 20 + 3 + \frac{4}{10}$$

$$= 23.4$$

शतक	दशक	एकक	दशांश	शतांश
			234	
	2	3	4	

? या राशी दशांश स्वरूपात लिहा.

(a) 234 शतांश (b) 105 दशांश

3.5 मापनाची एकके

लांबीचे रूपांतर

आपण कांही वर्षापासून लांबी मोजण्यासाठी मोजपट्टीचा वापर करत आहोत. आपल्याला आधीच माहित आहे की 1 cm = 10 mm (मिलीमीटर)

? 1 mm म्हणजे किती cm?

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{10} \text{ cm} = 0.1 \text{ cm}$$ (म्हणजेच एक दशांश cm)

? किती cm हे (a) 5 mm आहेत? (b) 12 mm आहेत?

$$5 \text{ mm} = \frac{5}{10} \text{ cm} = 0.5 \text{ cm}$$

$$12 \text{ mm} = 10 \text{ mm} + 2 \text{ mm}$$

$$= 1 \text{ cm} + \frac{2}{10} \text{ cm}$$

$$= 1.2 \text{ cm}$$

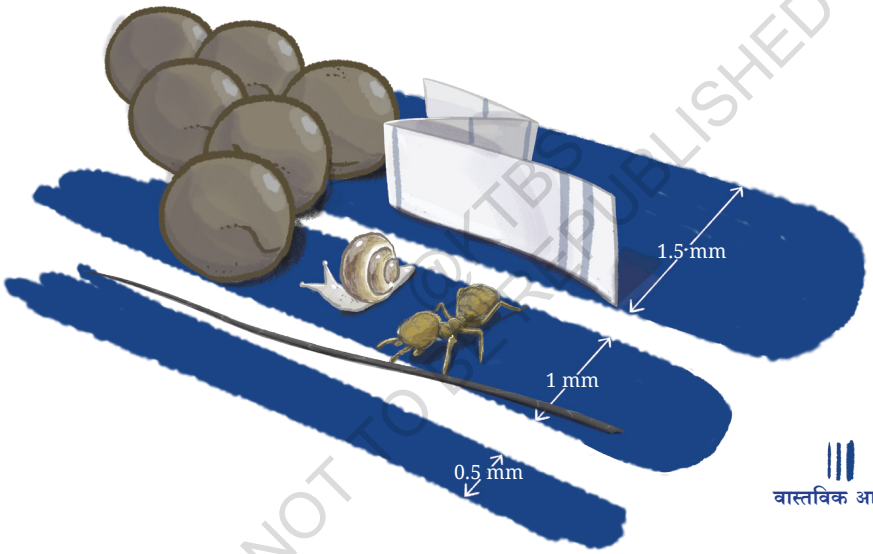
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.6 cm म्हणजे किती mm? ज्याअर्थी प्रत्येक cm मध्ये 10 mm आहेत, त्याअर्थी 5.6 cm (5 cm + 0.6 cm) हे 56 mm आहेत?

? खालील रिकाम्या जागा भरा. (mm ↔ cm)

12 mm = 1.2 cm	56 mm = 5.6 cm	70 mm = _____
_____ = 0.9 cm	134 mm =_____	_____ = 203.6 cm

खालील स्पष्टीकरण काही वस्तू किती लहान आहेत हे दर्शविते! प्रत्येकाचे अंदाजे मोजमाप घेण्याचा प्रयत्न करा.



NOT TO BE REPUBLISHED © SCERT

- तीन वेगवेगळ्या निळ्या पट्ट्या पेनाच्या ठळक सापेक्ष आकारामध्ये प्रतिनिधीत्व करतात. लहान पट्टा, मध्यम पट्टा आणि ठळक पट्टा.
- मानवी केसांची जाडी सुमारे 0.1 mm इतकी असते.
- वर्तमानपत्राची जाडी 0.05 mm पासून 0.08 mm पर्यंत असू शकते.
- मोहरीच्या बियांची जाडी 1 ते 2 mm असते.
- आतापर्यंत शोधलेल्या सर्वात लहान मुंगीच्या प्रजाती, कॅराबेरा ब्रुनी यांची लांबी 0.8 ते 1 mm इतकी असते. त्या श्रीलंका आणि चीनमध्ये आढळतात.

- आतापर्यंत शोधलेल्या सर्वात लहान जमिनीवरील गोगलगायीच्या प्रजाती अक्मेला नाना, यांच्या शंखाचा व्यास 0.7 mm आहे. त्या मलेशियामध्ये आढळतात.

आपल्याला हे ही माहित आहे की, 1 m = 100 cm या आधारे आम्ही असे म्हणू शकतो की,

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0.01 \text{ m}.$$

? (a) 10 cm (b) 15 cm हे किती m (मीटर) आहेत.

$10 \text{ cm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0.1 \text{ m}$

ज्याअर्थी प्रत्येक cm हा मीटरचा एक शतांश भाग आहे, त्याअर्थी 15 cm हे असे लिहिले जाऊ शकतात.

$$=15 \text{ cm} = \frac{15}{100} \text{ m}$$

$$= \frac{10}{100} \text{ m} + \frac{5}{100} \text{ m}$$

$$= \frac{1}{10} \text{ m} + \frac{5}{100} \text{ m}$$

$$= 0.15 \text{ m}$$

? खालील रिकाम्या जागा भरा. (cm ↔ m)

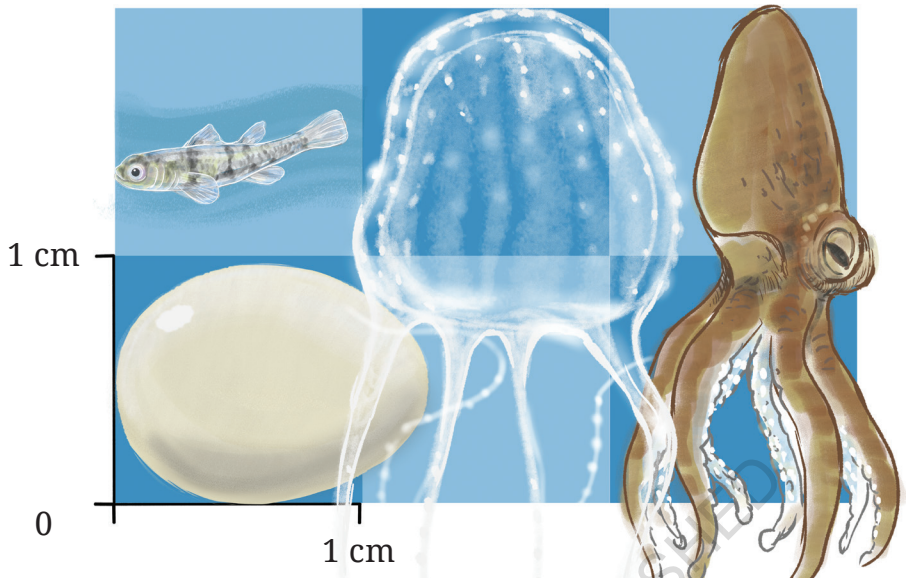
36 cm = _____	50 cm = _____	_____ = 0.89 m
4 cm = _____	325 cm = _____	_____ = 2.07 m

? 1 मीटरमध्ये किती मिलीमीटर असतात?

? आम्ही $1\text{mm} = \frac{1}{1000} \text{ m}$ असे लिहू शकतो का?

येथे निसर्गातील लहान वस्तूंविषयी कांही मनोरंजक गोष्टी आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

- हमिंगबर्डच्या अंड्याची साधारण लांबी 1.3 cm आणि रूंदी 0.9 cm असते.
- फिलीपाईन गोबीची लांबी सुमारे 0.9 cm असते. तो फिलीपाईन्स आणि इतर दक्षिण-पूर्व (आग्नेय) आशिया या देशामध्ये आढळतो.
- सर्वात लहान जेलिफिश, इरुकांडजी यांच्या घंटेचा आकार 0.5-2.5 cm इतका असतो. त्यांचे तंतूमय बाहू 1 मीटर इतके लांब असू शकतात. ते ऑस्ट्रेलियामध्ये आढळून येतात. त्याचे विष हे मानवासाठी घातक असते.
- वुल्फी ऑक्टोपसला स्टार-सकर पिग्मी ऑक्टोपस असेही म्हणतात. हा जगातील प्रसिद्ध लहान ऑक्टोपस आहे. त्याचा साधारण आकार जवळपास 1 ते 2.5 cm आणि त्याचे वजन 1 g पेक्षा कमी आहे. ते पॅसिफिक महासागरात आढळतात.

वजनाचे रूपांतर

आपण किलोग्रॅम पाहूया. आपल्याला माहित आहे की, 1 kg =1000 g त्यामुळे आपण म्हणू शकतो की,

$$1\ g = \frac{1}{1000}\ kg = 0.001\ kg$$

? 5 g मध्ये किती kg आहेत?

$$5\ g = \frac{5}{1000}\ kg = 0.005\ kg$$

? 10 g म्हणजे किती kg ?

$$10\ g = \frac{10}{1000}\ kg = \frac{1}{100}\ kg = 0.010\ kg$$

प्रत्येक g हा kg चा एक सहस्त्रांश भाग असल्यामुळे 254 g हे पुढीलप्रमाणे लिहिले जातात,

$$254\ g = \frac{254}{1000}\ kg$$

$$= \left(\frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{4}{1000}\right) kg$$

$$= \left(\frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}\right) kg$$

$$= 0.254\ kg$$

? खालील रिकाम्या जागा भरा (g↔kg)

465g = _____ 68g = _____ 1560g = _____

704g = _____ _____ = 0.56kg _____ = 2.5kg

खाली दिलेल्या चित्रामध्ये तांदळाचे वेगवेगळे प्रमाण दर्शविलेले आहे. 1 g राशीपासून सुरूवात करून पुढील प्रत्येक रास ही मागील रास/पाकिटापेक्षा 10 पटीने अधिक जड असल्याचे आढळून येते. या चित्रातील तांदळाचे एकत्रित वजन 11.111 kg आहे.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्याचप्रमाणे, 1 ग्रॅम (g) = 1000 मिलीग्रॅम (mg) म्हणून 1 mg = $\frac{1}{1000}$ g = 0.001 g

रुपये–पैसे यांचे रूपांतर



तुम्ही 'पैसे' याविषयी ऐकले असेल. 100 पैसे म्हणजेच 1 रुपया. जसे आपल्याकडे रुपयांची नाणी आणि नोटा आहेत, तशीच पैशांची सुध्दा नाणी आहेत जी अलीकडच्या काळात सुध्दा वापरली जात आहेत. पूर्वी 1 पैसा, 2 पैसे, 3 पैसे, 5 पैसे, 10 पैसे, 20 पैसे, 25 पैसे आणि 50 पैसे यांची नाणी होती. 2011 साली 25 पैसे आणि त्यापेक्षा कमी मूल्यांची सर्व नाणी काढून टाकण्यात आली, परंतु अजून सुध्दा आपण खाते विवरण, बिले इ. मध्ये पैसे पाहतो.

1 रुपया = 100 पैसे

1 पैसा = $\frac{1}{100}$ रुपये = 0.01 रुपये

प्रत्येक पैसा हा रुपयाचा एक शतांश भाग असल्यामुळे,

75 पैसे = $\frac{75}{100}$ रुपये

= $\left(\frac{70}{100} + \frac{5}{100}\right)$ रुपये

= $\left(\frac{7}{100} + \frac{5}{100}\right)$ रुपये

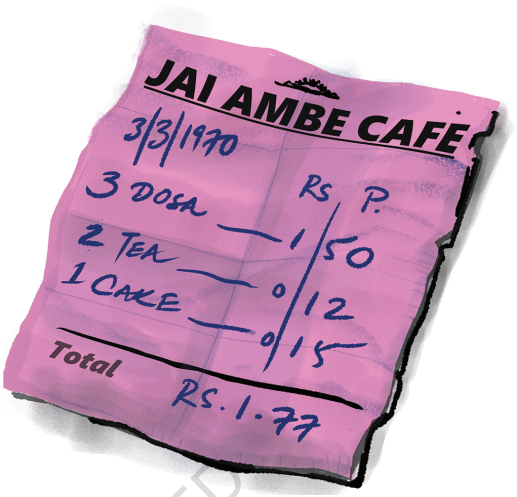
= 0.75 रुपये

@KSBSB NOT TO BE REPUBLISHED

खालील रिकाम्या जागा भरा. (पैसे ↔ रुपये)?

10 पैसे = _____	_____पैसे = ₹0.05	_____पैसे= ₹0.36
_____ = ₹ 0.50	99 पैसे = _____	250 पैसे = _____

1970 च्या दरम्यान मसाला दोसा फक्त 50 पैशाला मिळत होता, 20–25 पैशाला एक केळे विकत घेतले जात होते, पेपरमिंटच्या मुठभर गोळ्या 2 पैशाला किंवा 3 पैशाला मिळत होत्या, ₹2.45 ला एक किलो तांदूळ मिळत होते.



तुमच्या घरातील/शाळेतील प्रौढ व्यक्ती अशी त्यांच्या बालपणीच्या विविध उत्पादने आणि सेवा यांच्या किंमतीविषयी चर्चा करा. जुनी नाणी आणि पोस्टाची तिकिटे शोधण्याचा प्रयत्न करा.

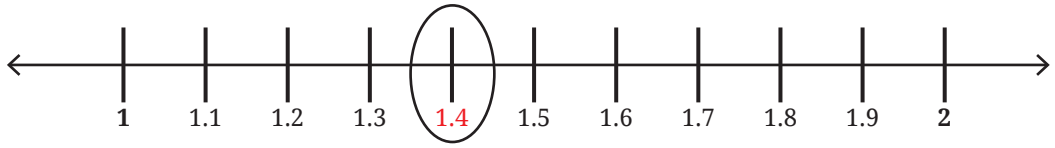
हे प्रयत्न करा



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.6 दशांशांची तुलना आणि स्थान दर्शविणे

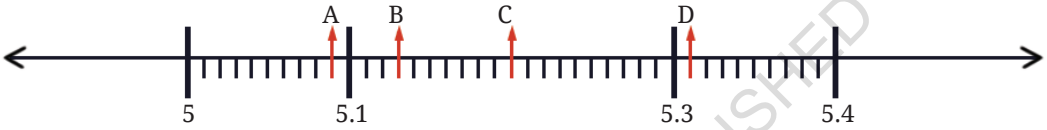
आपण 1.4 या दशांश संख्येचा विचार करूया. ती 1 एकक आणि चार दशांशाशी समान आहे. याचा अर्थ 1 आणि 2 यामधील एकक 10 समान भागात विभागले आहे आणि त्यातील चार भाग घेतलेले आहेत. म्हणून 1.4 हे 1 आणि 2 यांच्यामध्ये येतात. एक संख्यारेषा काढा आणि 1 आणि 2 मधील एकक 10 भागात विभागा. त्याचा चौथा भाग घ्या तेव्हा तुम्हाला संख्यारेषेवर 1.4 मिळतील.



? संख्यारेषेवर 1 आणि 1.1 मधील सर्व भाग दर्शवा.



? अक्षरावरील दशांश संख्या ओळखा आणि लिहा.



शून्याचा संभ्रम आहे!

? सोनू म्हणते की 0.2 हे 0.20, 0.200 असेही लिहिले जाऊ शकते. झाराला वाटते की, उजव्या बाजूला शून्य लिहील्याने दशांश संख्येचे मूल्य बदलू शकते. याविषयी तुम्हाला काय वाटते?

या संख्यानी दर्शविलेल्या प्रमाणांकडे पाहून स्थानमूल्य वापरून आपण याचा शोध घेऊ शकतो.

दशांश संख्या	एकक	दशांश	शतांश	सहस्त्रांश
0.2	0	2		
0.20	0	2	0	
0.200	0	2	0	0
0.02	0	0	2	
0.002	0	0	0	2

आपण पाहू शकतो की, 0.2, 0.20, 0.200 हे सर्व समान आहेत कारण ते समान राशी दर्शवितात. म्हणजेच 2 दशांश. परंतु 0.2, 0.02, 0.002 या सर्व भिन्न आहेत.

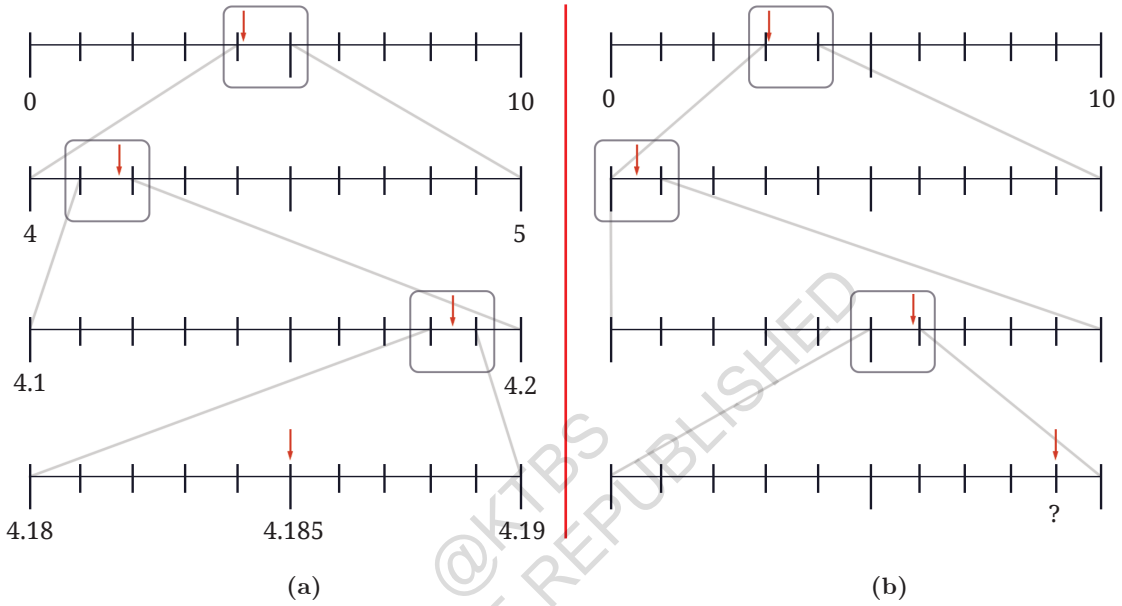
? तुम्ही यापैकी कोणते सर्वात मोठे आणि कोणते सर्वात लहान आहेत ते सांगू शकाल का?

? 4.5, 4.05, 0.405, 4.050, 4.50, 4.005, 04.50 यापैकी कोणते समान आहेत?

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

खालील आकृती (a) मधील संख्यारेषांचे निरीक्षण करा. प्रत्येक पायरीमध्ये 4.186 या संख्येचे स्थान निश्चित करत असताना संख्यारेषेचा एक विशिष्ट भाग मोठा करून दाखविण्यात आला आहे.

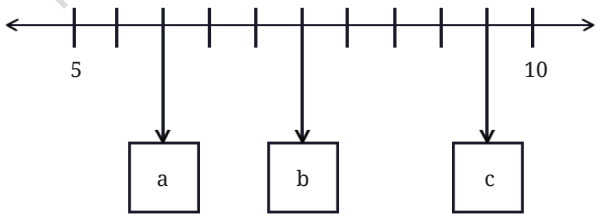
? आकृती (b) मधील शेवटच्या संख्यारेषेवर '?' ने दर्शविलेली दशांश संख्या शोळखा.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

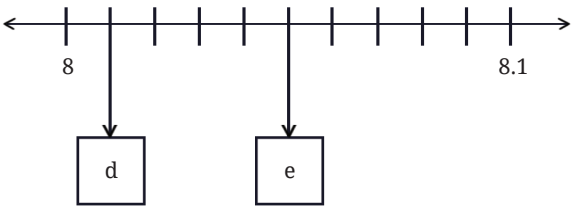
? (a) 9.876 (b) 0.407 या दशांश संख्यासाठी अशा संख्यारेषा तयार करा.

? खाली दाखविलेल्या संख्यारेषेवर 'a', 'b' आणि 'c' चौकटीमध्ये दर्शविलेल्या दशांश संख्या कोणत्या आहेत?



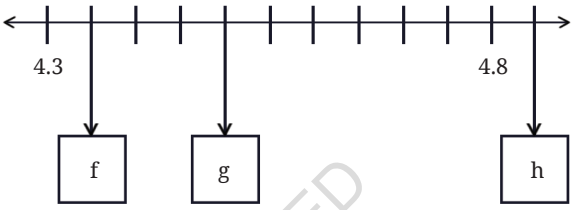
'b' या चौकटीमध्ये 7.5 ही दशांश संख्या येते; हे कसे ते तुम्ही पाहू शकाल का? 5 आणि 10 यांच्यामध्ये 5 एकक आहेत, जी समान 10 भागामध्ये विभागलेली आहेत. त्यामुळे प्रत्येक दोन भाग मिळून एक एकक बनते. म्हणजेच प्रत्येक भाग हा ½ एकक आहे. 'a' आणि 'c' कोणत्या संख्या दर्शवितात?

? याचप्रमाणे तर्क करून खालील चौकटीमधील दशांश संख्या शोधा.



? 6.456 आणि 6.465 यापैकी कोणते मोठे आहे?

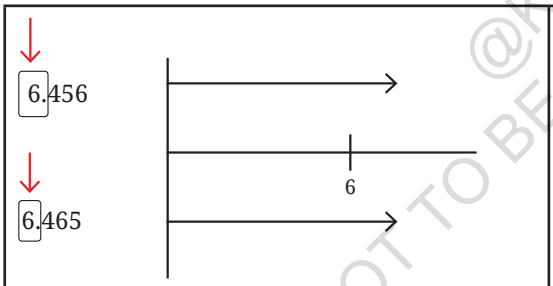
याचे उत्तर देण्यासाठी आपण संख्यारेषेचा वापर करून दोन्ही दशांश संख्यांचे स्थान निश्चित करून कोणते माठे आहे हे पाहू शकतो.

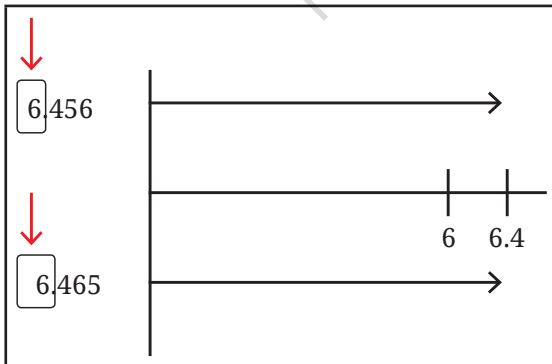


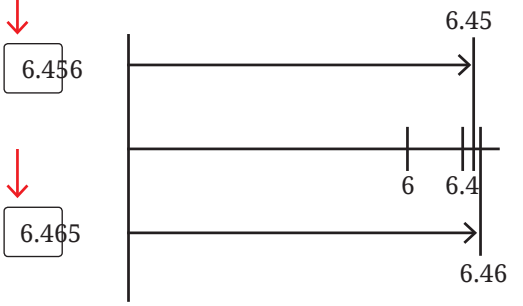
जसे आपण पूर्ण संख्यांसाठी केले आहे. त्याच पध्दतीने हे प्रत्येक संख्येच्या स्थानमूल्यातील संबंधित अंकांची तुलना करून देखील केले जाऊ शकते.

ही तुलना खालीलप्रमाणे टप्प्या-टप्प्याने दर्शविलेली आहे. लक्षात घ्या की, खालील दृश्यरूप हे प्रमाणानुसार नाही.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

	दोन्ही संख्यामध्ये 6 एकक आहेत.

	दोन्ही संख्यामध्ये 6 एकक आणि 4 दशांश आहेत.



दोन्ही संख्यामध्ये 6 एकक आणि 4 दशांश आहेत, परंतु पहिल्या संख्येमध्ये 5 शतांश आहेत आणि दुसऱ्या संख्येमध्ये 6 शतांश आहेत.

आपण दोन संख्यांच्या तुलनेची सुरूवात त्यांचे अत्यंत महत्वपूर्ण अंक (सर्वात जास्त स्थान मूल्य असलेला अंक) घेऊन करू शकतो. जर अंक समान असतील तर आपण पुढील लहान स्थानमूल्यांची तुलना करतो जोपर्यंत समान अंक नसलेले स्थान सापडत नाही तोपर्यंत ही क्रिया आपण पुढे चालू ठेवतो. ज्या संख्येच्या स्थानावर अंक मोठा असतो ती संख्या मोठी असते.

? या बिंदूवर आपण तुलना करणे का थांबवितो? यानंतर येणारे अंक आपल्या निष्कर्षावर कोणताही परिणाम करणार नाहीत याची खात्री आपण करू शकतो का?

गणिती बोल

खालीलपैकी कोणत्या दशांश संख्या मोठ्या आहेत?

(a) 1.23 किंवा 1.32

(b) 3.81 किंवा 13.800

(c) 1.009 किंवा 1.090

©KSEB NOT TO BE REPUBLISHED

अत्यंत जवळील दशांश

0.9, 1.1, 1.01 आणि 1.11 या दशांश संख्या विचारात घ्या. 1 ला जवळ असलेली दशांश संख्या ओळखा.

दशांश संख्यांची तुलना करू. या संख्याना त्यांच्या चढत्या क्रमात मांडल्यास आपल्याला $0.9<1<1.01<1.1<1.11$ हे मिळते. 1 च्या शेजारील संख्यापैकी 1.01 ही 1 पासून 1/100 दूर आहे. तर 0.9 ही 1 पासून 10/100 दूर आहे. त्यामुळे 1.01 ही 1 च्या जवळ आहे.

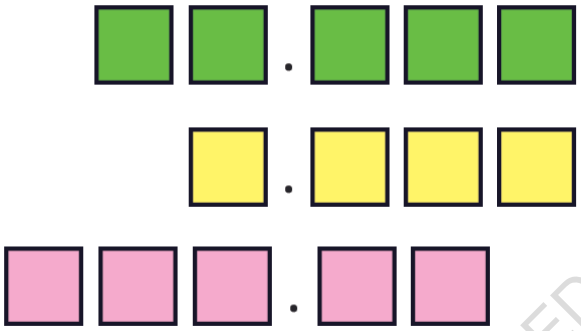
? वरील पैकी कोणती संख्या 1.09 च्या जवळ आहे?

? खालीलपैकी कोणती संख्या 4 च्या जवळ आहे: 3.56, 3.65, 3.099?

? 0.8, 0.69, 1.08 यापैकी 1 च्या जवळील संख्या कोणती?

? खालील प्रत्येक घटनेत 4,1,8,2 आणि 5 हे अंक फक्त एकदाच वापरून 25 च्या शक्य तितक्या जवळील दशांश संख्या बनविण्याचा प्रयत्न करा.

गणिती बोल



3.7. दशांशाची बेरीज आणि वजाबाकी

? प्रियाला तिच्या स्कर्टसाठी 2.7 m कापड लागते आणि शैलजाला तिच्या कुर्त्यासाठी 3.5 m कापड लागते. तर त्या दोघींसाठी किती कापडाची गरज आहे?

आपल्याला 2.7 m आणि 3.5 m यांची बेरीज करावी लागेल.

यापूर्वी आपण $2\frac{7}{10} + 3\frac{5}{10}$ यांची बेरीज कशी केली जाते हे पाहिले आहे. (ते खाली देखील दाखविले आहे) दशांश चिन्ह वापरुन आपण हे त्याच प्रकारे करू शकतो का? हे खालील प्रमाणे दाखविले आहे.

तुमची निरीक्षणे इतरांना सांगा

एकूण 6.2 m कपडा गरज आहे.

$$\begin{array}{r} 2\ \frac{7}{10} \\ +\ 3\ \frac{5}{10} \\ \hline =\ 5\ \frac{12}{10} \\ =\ 6\ \frac{2}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2.7 \\ +\ 3.5 \\ \hline =\ 6.2 \end{array}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? शैलजाचे कापड प्रियाच्या कापडापेक्षा किती मोठे आहे?

आपल्याला 3.5 m आणि 2.7 m यामधील फरक शोधायचा आहे.

$3\frac{5}{10} - 2\frac{7}{10}$ आणि 3.5 m −2.7 m यांमधील फरक कसा काढला आहे ते पहा.

$3\frac{5}{10} \longrightarrow 2\frac{15}{10}$

$-2\frac{7}{10}$ $\quad -2\frac{7}{10}$

$= 0\frac{8}{10}$

$3.5 \longrightarrow \overset{2}{\cancel{3}}\overset{1}{.}5$

$-2.7 \quad -2.7$

$= 0.8$

तुम्ही पाहू शकता की, पूर्ण संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी जी प्रमाणित पध्दत वापरली जाते तीच पध्दत दशांशाची बेरीज आणि वजाबाकी करण्यासाठी सुद्धा वापरली जाऊ शकते.

75.345 + 86.691 यांच्या बेरजेसाठी मूलभूत स्थानमूल्य गणनेचे दृष्य खालीलप्रमाणे दर्शविलेले आहे. तसचे त्याचे संक्षिप्तरूप पुढीलप्रमाणे दर्शविलेले आहे.

1×100	1×10	1×1	$1 \times \frac{1}{10}$		
	7×10	5×1	$3 \times \frac{1}{10}$	$4 \times \frac{1}{100}$	$5 \times \frac{1}{1000}$
+	8×10	6×1	$6 \times \frac{1}{10}$	$9 \times \frac{1}{100}$	$1 \times \frac{1}{1000}$
$= 1 \times 100$	16×10	12×1	$10 \times \frac{1}{10}$	$13 \times \frac{1}{100}$	$6 \times \frac{1}{1000}$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ 1} \\ 75.345 \\ +86.691 \\ \hline =162.036 \end{array}$$

? 84.691−77.345 साठी सविस्तर स्थानमूल्य गणना लिहा आणि त्याचे अमूर्त, (संक्षिप्त) रूप लिहा.

हे प्रयत्न करा

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1) बेरीज करा.

(a) 5.3 + 2.6 (b) 18 + 8.8

(c) 2.15 + 5.26 (d) 9.01 + 9.10

(e) 29.19 + 9.91 (f) 0.934 + 0.6

(g) 0.75 + 0.03 (h) 6.236 + 0.487

2) वजाबाकी करा.

(a) 5.6 – 2.3 (b) 18 – 8.8

(c) 10.4 – 4.5 (d) 17 – 16.198

(e) 17 – 0.05 (f) 34.505 – 18.1

(g) 9.9 – 9.09 (h) 6.236 – 0.487

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

दशांश क्रम :

दशांश संख्यांच्या या क्रमाचे निरीक्षण करा आणि प्रत्येक पदानंतरचा बदल ओळखा.

4.4, 4.8, 5.2, 5.6, 6.0, ...

आम्हाला असे दिसून येते की, एका पदामध्ये 0.4. मिळविले असता पुढील पद मिळते.

हा क्रम पुढे चालू ठेवा आणि पुढील 3 पदे लिहा.

याचप्रमाणे बदल ओळखा आणि खाली दिलेल्या प्रत्येक क्रमाची पुढील 3 पदे लिहा. हे मनातल्या मनात सोडविण्याचा प्रयत्न करा.

(a) 4.4, 4.45, 4.5, ... (b) 25.75, 26.25, 26.75, ...

(c) 10.56, 10.67, 10.78, ... (d) 13.5, 16, 18.5, ...

(e) 8.5, 9.4, 10.3, ... (f) 5, 4.95, 4.90, ...

(g) 12.45, 11.95, 11.45, ... (h) 36.5, 33, 29.5, ...

तुमचा स्वतःचा क्रम तयार करा आणि ही मांडणी पुढे चालू ठेवण्यासाठी तुमच्या वर्गमित्रांना आव्हान द्या.

अंदाजे बेरीज आणि वजाबाकी :

सोनू दशांश संख्यांच्या बेरीज आणि वजाबाकीचे निरीक्षण करतो आणि म्हणतो की ''जर आम्ही दोन दशांश संख्यांची बेरीज केली तर बेरीज ही नेहमी त्यांच्या पूर्ण संख्यांच्या भागांच्या बेरजेपेक्षा जास्त असते. तसेच ती बेरीज ही नेहमी त्यांच्या पूर्ण संख्यांच्या भागांच्या बेरजेपेक्षा 2 ने जास्त असणाऱ्या संख्येपेक्षा कमी आहे.''

त्याचे म्हणणे काय आहे हे समजून घेण्यासाठी आपण एक उदाहरण पाहूया.

जर 25.936 आणि 8.202 या दोन संख्यांची बेरीज केली तर म्हणणे असे आहे की, त्यांची बेरीज 25+8 (पूर्ण संख्या भाग) पेक्षा जास्त आहे आणि 25+1+8+1 पेक्षा कमी आहे.



? या म्हणण्याबद्दल तुम्ही काय विचार करू शकता? या संख्यासाठी जर हे सत्य असेल तर त्याचा पडताळा करा. कोणत्याही 2 दशांश संख्यांसाठी ते शक्य असू शकेल का?

? 25.93603259 आणि 8.202 च्या बेरजेविषयी काय असू शकते?



? त्याचप्रमाणे दोन दशांश संख्यांची वजाबाकी कोणत्या पूर्ण संख्यांच्या दरम्यान येईल हे ठरविण्याची पद्धत शोधा.

शिक्षकांसाठी सूचना : जर हिशोबात कांही चूक झाली तर ती ओळखण्यासाठी उदाहरण सोडविण्यापूर्वी उत्तराच्या अंदाजीकरणाची मदत होते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

3.8 दशांश संख्यापद्धतीबद्दल अधिक माहिती :

दशांश आणि मापनातील चुका:

दशांश बिंदू आणि एककाच्या रूपांतराची चूक ही कांही वेळेला अत्यंत लहान दिसते; परंतु त्यामुळे गंभीर समस्या होतात. येथे कांही वास्तविक घटना आहेत ज्यामध्ये अशा चुकांमुळे मोठ्या समस्या निर्माण झाल्या.

- 2013 मध्ये ॲमस्टरडम शहर परिषदेच्या (नेदरलँडच्या) वित्त कार्यालयाने प्रोग्रामिंगच्या चुकीमुळे गृहनिर्माण भत्त्यासाठी अपेक्षित €1.8 दशलक्ष ऐवजी €188 दशलक्ष पाठविले. कारण देयके युरो ऐवजी युरो-सेंट मध्ये प्रक्रिया केली. (1 युरो सेंट = 1/100 युरो)
- 1983 मध्ये एअर कॅनडाच्या बोईंग 757 विमानात दशांश तृटीमुळे जवळजवळ आपत्ती ओढविली होती. भूदल कर्मचाऱ्यानी इंधनाची चुकीची गणना केली आणि किलो ग्रॅमऐवजी 22,300 पौंड इंधन भरले. जे आवश्यकतेपेक्षा निम्म्या इतके होते. (1 पौंड ~ 0.453 kg) विमानाचे हवेतच इंधन संपले. ज्यामुळे वैमानिकांना एका बंद असलेल्या विमानतळावरील आपत्कालीन धावपट्टीवर उतरावे लागले. सुदैवाने सर्वजण वाचले.

औषध देताना दशांश संख्या चुकीच्या पध्दतीने वाचल्यामुळे अनेक घटना घडल्या आहेत. उदाहरणार्थ 0.05 मिली ग्रॅम हे 0.5 मिली ग्रॅम म्हणून वाचल्याने औषध निर्धारीत प्रमाणापेक्षा 10 पट जास्त वापरावे लागू शकते. म्हणून एकके आणि दशांश चिन्हांच्या स्थानाकडे लक्ष देणे महत्वाचे आहे.

भ्रामक दशांश संकेत :

शरयुला एक संदेश मिळतो: ''बस दुपारी 4.5 वाजता बस स्थानकावर पोहोचेल.'' मग बस स्टेशनवर कधी पोहोचेलः दुपारी 4.05, 4.50 की 4.25 वाजता? यापैकी कांहीही नाही! येथे 0.5 तास म्हणजे एका तासाचे 10 समान भाग करणे आणि त्यातील 5 भाग घेणे. प्रत्येक भाग 6 मिनिटे (60 मिनिटे/10) इतका असेल. अशा 5 भागांची 30 मिनिटे होतात. म्हणजे बस 4.30 वाजता स्थानकावर पोहोचेल.

दशांशातील एका चुकीची थोडक्यात कहाणी येथे आहे. एक मुलगी एका सुरूवातीच्या खुल्या भागाची रूंदी 2 फूट 5 इंच मोजते; परंतु सुताराला 2.5 फूट रूंदीचा दरवाजा बनविण्यास सांगते. सुतार 2 फूट 6 इंच रूंदीचा दरवाजा बनवितो (1 फूट = 12 इंच, 0.5 फूट = 6 इंच असल्याने) आणि तो पूर्णपणे बंद होत नाही.



जर तुम्ही क्रिकेट पाहात असाल तर तुम्हाला 'शिल्पक ओव्हर्स: 5.5' या सारख्या दशांश संख्या दिसल्या असतील. याचा अर्थ 5 ओव्हर्स आणि 5 चेंडू की 5 ओव्हर्स आणि 3 चेंडू? येथे 5.5 ओव्हर्स म्हणजे 5 $\frac{5}{6}$ ओव्हर्स (1 ओव्हर = 6 चेंडू) म्हणजेच 5 ओव्हर्स आणि 5 चेंडू.

? अशा प्रकारची दशांशासारख्या चिन्हासह लिहिलेली पण 'दशांशात नसलेली' उदाहरणे आपल्याला आणखी कोठे दिसतील?

गणिती बोल

ऐतिहासिक संदर्भ:

दशांश अपूर्णांक (म्हणजेच $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ आणि $\frac{1}{1000}$ असे छेद असणारे अपूर्णांक) अनेक प्राचीन भारतीय खगोल शास्त्रज्ञ आणि गणिततज्ञ वापरत होते. ज्यामध्ये 8 व्या शतकातील श्रीधराचार्य यांच्या अंकगणित आणि बीजगणितावरील महत्वाच्या कार्याचा समावेश आहे. दशांश संकेतांचे मुलतः त्यांच्या आधुनिक स्वरूपात अरब गणिततज्ञ अबुल हसन अल-उक्लिदिसी यांनी किताब अल-फुसुल फि अल-हिसाब अल हिंदी (भारतीय अंकगणितावरील अध्यायांचे पुस्तक) मध्ये तपशीलवार इ.स. 950 च्या सुमारास वर्णन केले आहे. त्यानी 0.059375 ही संख्या 0059375 अशी दर्शविली.

15 व्या शतकामध्ये पूर्ण संख्या या अपूर्णांकीय भागापासून वेगळ्या करण्यासाठी वेगवेगळ्या संकेत वापरले गेले.

- पूर्ण संख्येच्या भागाच्या शेवटच्या अंकावर एक उभी खूण करणे. (वर दर्शविल्याप्रमाणे)
- वेगवेगळ्या रंगांचा वापर आणि
- अपूर्णांकातील दशांश स्थानांची संख्या दाखवण्यासाठी वर छोटा अंक वापरणे.

(0.36 हे 36^2 असे लिहीतात.)

16 व्या शतकामध्ये जॉन नेपियर या स्कॉटीश गणिततज्ञानी आणि क्रिस्टोफर क्लेव्हियस या जर्मन गणिततज्ञानी पूर्ण संख्या आणि अपूर्णांकीय भाग वेगळे करण्यासाठी बिंदू/अवधी (.) वापरला आहे तर त्याऐवजी फ्रॉन्कोइस व्हिएट या फ्रेंच गणिततज्ञाने, स्वल्पविराम (',') चा वापर केला.

सध्या अनेक देश हे पूर्णांक भाग आणि अपूर्णांकीय भाग वेगळे करण्यासाठी स्वल्पविराम वापरतात. या देशामध्ये 1,000.5 ही संख्या 1 000,5 (येथे हजारासाठी मोकळी जागा व दशांशासाठी स्वल्पविराम) अशी लिहीली जाते. परंतु भारतीय स्थानमूल्य प्रणालीमध्ये अपूर्णांक भाग असलेल्या संख्या लिहिण्यासाठी दशांश बिंदू सर्वात लोकप्रिय संकेत म्हणून टिकून आहे.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील अपूर्णांकांचे दशांशात रूपांतर करा.

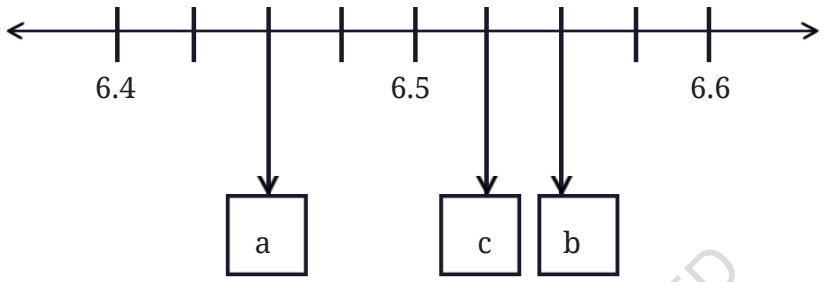
(i) $\frac{5}{100}$ (j) $\frac{16}{1000}$ (k) $\frac{12}{10}$ (l) $\frac{254}{1000}$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. खालील दशांश अपूर्णांकाचे दशांश, शतांश आणि सहस्त्रांश यांच्या बेरजेत रूपांतर करा.

(a) 0.34 (b) 1.02 (c) 0.8 (d) 0.362

3. खालील संख्यारेषेवरील प्रत्येक मूळाक्षर कोणती दशांश संख्या दर्शविते?



4. खालील राशी उत्तरत्या क्रमात मांडा.

a) 11.01, 1.011, 1.101, 11.10, 1.01

b) 2.567, 2.675, 2.768, 2.499, 2.698

c) 4.678 ग्रॅम, 4.595 ग्रॅम, 4.600 ग्रॅम, 4.656 ग्रॅम, 4.666 ग्रॅम

d) 33.13 मी., 33.31 मी., 33.133 मी., 33.331 मी., 33.313 मी.

5. 1,4,0,8 आणि 6 या अंकांचा उपयोग करून खालील संख्या बनवा.

a) 30 ला जवळची असणारी दशांश संख्या

b) 100 आणि 1000 मधील शक्य असलेली सर्वात लहान दशांश संख्या

6. एखादी जास्त अंक असलेली दशांश संख्या ही कमी अंक असलेल्या दशांश संख्येपेक्षा मोठी असू शकेल का?

7. माहीने 0.25 कि.ग्रॅ. बिनीस, 0.3 कि.ग्रॅ. गाजर, 0.5 कि. ग्रॅ. बटाटे, 0.2 कि.ग्रॅ. शिमला मिरची आणि 0.05 कि.ग्रॅ. आल्ले खरेदी केले आहे. तिने विकत घेतलेल्या वस्तूंचे एकूण वजन काढा.

8. पिंटोने 3.79 लि., 4.2 लि. आणि 4.25 लिटर इतके दूध डेअरीला पहिल्या तीन दिवसात पुरवठा केले आहे. सहा दिवसात तो 25 लिटर इतके दूध पुरवितो. तर दूध डेअरीला शेवटच्या तीन दिवसात पुरवठा केलेले एकूण दूध किती ते काढा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. टिंकूचे वजन जानेवारी मध्ये 35.75 कि.ग्रॅ. आणि फेब्रुवारीमध्ये 34.50 कि.ग्रॅ. आहे तर त्याचे वजन वाढले आहे की कमी झाले आहे? वजनात किती बदल झाला आहे?

10. 5.5, 6.4, 6.39, 7.29, 7.28, 6.18, 6.17, ____, ____ हा क्रम पुढे वाढवा.

11. 1 किलोमीटरमध्ये किती मिलीमीटर असतात?

12. जे प्रवासी ई-तिकीटची नोंदणी करतात त्याना भारतीय रेल्वेने ऐच्छिक प्रवास विमा योजना देऊ केली आहे. प्रत्येक प्रवाशाला त्यासाठी 45 पैसे इतकी किंमत आहे. जर एका दिवसात 1 लाख लोकांनी विमा सुविधा घेतली, तर विमा सुविधेसाठी दिलेली एकूण रक्कम किती?

13. कोणते मोठे आहे?

a) $\frac{10}{1000}$ किंवा $\frac{1}{10}$?

b) एक शतांश किंवा 10 सहस्त्रांश?

c) एक सहस्त्रांश किंवा 90 शतांश?

14. दिलेल्या राशींचे दशांश रूप लिहा. (एक उदाहरण दिलेले आहे.)

a) 87 एकक, 5 दशांश आणि 60 शतांश = 88.10

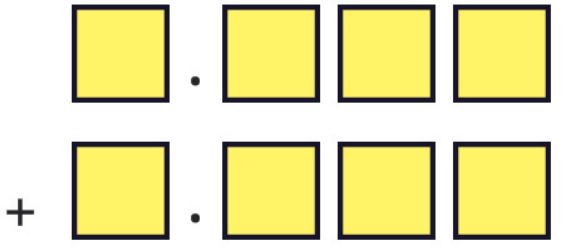
b) 12 दशक आणि 12 दशांश

c) 10 दशक, 10 एकक, 10 दशांश आणि 10 शतांश

d) 25 दशक, 25 एकक, 25 दशांश आणि 25 शतांश

15. 0 ते 9 या अंकांचा वापर करून कोणताही अंक एकापेक्षा अधिक वेळा न घेता खालील रकाने असे भरा की बेरीज ही 10.5 च्या जवळपास असली पाहिजेत.

हे प्रयत्न करा



©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

16) खालील अपूर्णांक दशांशात लिहा.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{4}{5}$

सारांश

- आपण अधिक अचूक मापे मिळविण्यासाठी एक एकक लहानात लहान भागात विभागू शकतो.
- आम्ही भारतीय स्थानमूल्य पध्दत पुढे वाढविली आणि पाहिले की,
  - 1 एकक = 10 दशांश
  - 1 दशांश = 10 शतांश
  - 1 शतांश = 10 सहस्त्रांश
  - 10 शतांश = 1 दशांश
  - 100 शतांश = 1 एकक
- एका संख्येचा पूर्ण संख्या भाग त्याच्या अपर्णांकाच्या भागापासून वेगळा करण्यासाठी भारतीय स्थानमूल्य पध्दतीत दशांश बिंदू (.) चा उपयोग करतात.
- आपण दशांश संख्यांची तुलना, संख्यारेषेवर स्थान निश्चित करणे आणि त्यांची बेरीज आणि वजाबाकी यांचे सुध्दा अध्ययन केले आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

4 बैजिक पदावल्या

(EXPRESSIONS USING LETTER NUMBERS)

T2K8Y6

4.1 मूळाक्षर – संख्यांची धारणा :

या प्रकरणात आपण गणितीय संबंध आणि नमुने करण्याच्या एका संक्षिप्त पध्दतीकडे पाहू. हे संबंध आणि नमुन्याबद्दल विचार करण्यास आणि ते खरे का असू शकतात हे स्पष्ट करण्यास आपल्याला कसे मदत करते ते आपण पाहू.

? **उदाहरण 1:** शबनम ही आफताबपेक्षा 3 वर्षानी मोठी आहे. जेव्हा आफताबचे वय 10 वर्षे असेल तेव्हा शबनमचे वय 13 वर्षे असेल आता आफताबचे वय 18 वर्षे आहे तर शबनमचे वय किती असेल?

? आफताबचे वय दिलेले आहे शबनमचे वय तुम्ही कसे काढाल ?

सोपे : आफताबच्या वयात 3 वर्षे मिळविल्यास आम्हाला शबनमचे वय मिळते.

? हे आम्ही राशीमध्ये लिहू शकतो का ?

शबनमचे वय हे आफताबच्या वयापेक्षा 3 वर्षे अधिक आहे. थोडक्यात हे असे लिहीता येते.

शबनमचे वय = आफताबचे वय +3

असे गणितीय संबंध सामान्यपणे संक्षिप्त रूपात दर्शविले जातात. वरील संबंधात 'आफताबचे वय' हे, वाक्यांश लिहीण्याऐवजी सोयीस्कर चिन्ह / संकेत वापरणे हे सोयीचे आहे. सामान्यपणे मूळाक्षरे किंवा लघु वाक्ये यासाठी वापरली जातात. समजा आफताबचे वय दर्शविण्यासाठी 'a' हे मूळाक्षर आम्ही वापरू शकतो. (आम्ही इतर कोणतेही मूळाक्षर वापरू शकतो.) आणि शबनमचे वय दर्शविण्यासाठी 'S' हे मूळाक्षर वापरतो तर शबनमचे वय काढण्यासाठी $a+3$ ही राशी असेल जी अशी लिहीता येईल.

आफताबचे वय	शबनमच्या वयाची राशी
4	4 + 3
10	10 + 3
23	23 + 3
?	? + 3
a	a + 3

आकृती 4.1

$$s = a+3$$

जर a हे 23 (आफताबचे वय वर्षामध्ये) असेल तर शबनमचे वय किती असेल ?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

a+3 या राशीमध्ये/पदावलीमध्ये a ची किंमत 23 घेतल्यास आपल्याला $s = 23+3=26$ वर्षे मिळते. संख्या दर्शविण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या a आणि त्या सारख्या अक्षरांना मूळाक्षर-संख्या असे म्हणतात. मूळाक्षर संख्या असणाऱ्या a+3 सारख्या गणितीय राशींना बैजिक राशी असे म्हणतात.

? शबनमचे वय दिलेले आहे. आफताबचे वय काढण्यासाठी राशी लिहा.

आपल्याला माहित आहे की आफताबचे वय हे शबनमच्या वयापेक्षा 3 वर्षानी लहान आहे. म्हणून आफताबचे वय हे शबनमच्या वयाच्या 3 वर्षानी कमी आहे. याचे असे वर्णन करू शकतो.

आफताबचे वय = शबनमचें वय −3

जर आपण पुन्हा आफताबचे वय दर्शविण्यासाठी a मूळाक्षर आणि 'S' हे मूळाक्षर शबनमचे वय दर्शविण्यासाठी वापरले तर बैजिक राशी अशी असेल $a = s - 3$ म्हणजे S पेक्षा 3ने कमी आहे.

? जर शबनमचे वय 20 असेल तर आफताबचे वय काढण्यासाठी या राशीचा वापर करा.

? **उदाहरण 2 :** पार्थिव हा माचिसच्या काड्यांची एक रचना बनवित आहे. तो काड्याना वारंवार L रूपात एकमेकांच्या शेजारी ठेवतो. आकृती 4.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रत्येक L मध्ये दोन माचिसच्या काड्या आहेत.



आकृती 4.2

5L बनविण्यासाठी किती माचिसच्या काड्या लागतील ? त्या 5×2 असतील.

7L बनविण्यासाठी किती माचिसच्या काड्या लागतील ? त्या 7×2 असतील.

45 L बनविण्यासाठी किती माचिसच्या काड्या लागतील ? त्या 45×2 असतील.

आता L ची संख्या आणि काड्यांची संख्या यामध्ये काय संबंध आहे.

प्रथमतः येथे संबंध किंवा नमुन्याचे वर्णन करूया. प्रत्येक L ला 2 काड्या लागतात म्हणून लागणाऱ्या काड्यांची संख्या L च्या संख्येच्या 2 पट असेल.

हे असे लिहीता येईल, माचिसच्या काड्यांची संख्या = 2×L ची संख्या. आता L ची संख्या दर्शविण्यासाठी कोणतेही मुळाक्षर आम्ही वापरू शकतो. चला 'n' वापरू.

माचिसच्या काड्यांच्या संख्येसाठी बैजिक पदावली **2×n** अशी होईल.

या पदावलीवरून आपल्याला nL बनविण्यासाठी किती माचिसच्या काड्या आवश्यक आहेत ते समजते. माचिसच्या काड्यांची संख्या आम्ही फक्त n ला L ने गुणून काढू शकतो.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 3 : केतकी नारळ-गुळाचे लाडू तयार करते आणि पुरवठा करते. एका नारळाची किंमत ₹35 आहे. आणि एक किलो गुळाची किंमत ₹60 आहे.

जर तिने 10 नारळ आणि 5 किलो गूळ खरेदी केले तर तिला किती पैसे द्यावे लागतील ?

10 नारळांची किंमत = 10 × ₹35

5 किलो गुळाची किंमत = 5× ₹60

एकुण किंमत = 10×₹ 35+5× ₹60 = ₹350+₹ 300 =₹ 650

जर तिने 8 नारळ आणि 9 किलो गुळ खरेदी केले. तर तिला किती पैसे द्यावे लागतील ?

दिलेल्या नारळांच्या संख्येसाठी आणि गुळाच्या प्रमाणाची द्यावी लागणारी एकूण रक्कम काढण्यासाठी बैजिक पदावली लिहा.

चला संबंध ओळखा आणि नंतर पदावली लिहा.

आवश्यक प्रमाण	संबंध	पदावली
नारळांची किंमत	नारळांची संख्या × ₹35	c × 35
गुळाची किंमत	गुळाच्या किलोंची संख्या ×₹ 60	j × 60

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे *'c'* ही नारळांची संख्या आणि *'j'* ही 1 किलो गुळाची संख्या दर्शविते.

द्यावी लागणारी एकूण रक्कम अशी असेल नारळांची किंमत + गुळाची किंमत

संबंधित बैजिक पदावली अशी लिहीता येते.

$$c \times 35 + j \times 60$$

7 नारळ आणि 4 किलो गूळासाठी द्यावी लागणारी एकूण रक्कम काढण्यासाठी या पदावलीचा (किंवा सूत्राचा) वापर करा.

लक्षात घ्या की *'c'* आणि *'j'* च्या वेगवेगळ्या किंमतीसाठी पदावलीची किंमत सुध्दा बदलते. ही पदावली पदांची बेरीज म्हणून लिहील्यास आम्हाला मिळते.

c × 35 + j × 60

उदाहरण 4 : साध्या आकाराची परिमिती काढण्याविषयी आम्ही परिचीत आहोत. परिमितीसाठी पदावली लिहा.

एका चौरसाची परिमिती ही त्याच्या बाजूच्या लांबीच्या 4 पट असते. हे पदावलीमध्ये $4 \times q$ असे लिहीले जाऊ शकते जेथे q ही बाजूची लांबी आहे.

7 से.मी. बाजूची लांबी असणाऱ्या एका चौरसाची परिमिती किती ? परिमिती काढण्यासाठी पदावलीचा उपयोग करा. तुमच्या हे लक्षात आले असेलच की मूळाक्षर संख्या आणि बैजिक पदावलींचा वापर आपल्याला सामान्य गणितीय संबंध कसे व्यक्त करण्यास अनुमती देतो.

या प्रकारे व्यक्त केलेल्या गणितीय संबंधाना अनेकदा **सूत्रे** असे म्हणतात.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. परिमितीसाठी सूत्रे लिहा.
   a) सर्व बाजू समान असणारा त्रिकोण.
   b) एक नियमित पंचकोन (गेल्या वर्षी आम्ही शिकलो आहोत की सर्व बाजूंची लांबी आणि कोन समान आहेत हे सांगण्यासाठी आपण 'नियमित' हा शब्द वापरतो.)
   c) एक नियमित षटकोन.
2. मुनिरत्नाकडे 20 मी. लांबीचा एक पाईप आहे. त्याला त्याच्या उद्यानाला पाणी देण्यासाठी एक जास्त लांबीचा पाईप हवा आहे. तथापि यासाठी तो कांही लांबीचा एक दुसरा पाईप जोडतो. पाईपच्या एकत्रित लांबीसाठी पदावली द्या. दुसऱ्या पाईपची असणारी मीटरमधील लांबी दर्शविण्यासाठी 'k' ही मूळाक्षर-संख्या वापरा.
3. जर कृतिकाकडे ₹100, ₹20 च्या आणि ₹5 च्या नोटांची संख्या असेल तर तिच्याकडे एकूण किती रक्कम आहे? खालील कोष्टक पूर्ण करा.

₹100 च्या नोटांची संख्या	₹20 च्या नोटांची संख्या	₹5 च्या नोटांची संख्या	पदावली आणि एकूण रक्कम
3	5	6	
			$6 \times 100 + 4 \times 20 + 3 \times 5 = 695$
8	4	z	
x	y	z	

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

4. वेंकटलक्ष्मी यांच्याकडे एक पिठाची गिरणी आहे. रोलर गिरणी चालू होण्यास 10 सेकंद लागतात. एकदा ती चालू झाली की प्रत्येक किलो धान्य भुकटीमध्ये दळण्यासाठी 8 सेकंद लागतात. सुरूवातीला यंत्र बंद आहे असे गृहीत धरल्यास खालीलपैकी कोणती पदावली y किलो धान्य दळण्यासाठी लागणारा पूर्ण वेळ दर्शविते?

a) $10 + 8 + y$ b) $(10 + 8) \times y$

c) $10 \times 8 \times y$ d) $10 + 8 \times y$

e) $10 \times y + 8$

5. तुमच्या पसंतीच्या मूळाक्षरांचा वापर करून बैजिक पदावली लिहा.

a) एका संख्येपेक्षा 5ने अधिक (जास्त) आहे.

b) एका संख्येपेक्षा 4ने कमी आहे.

c) एका संख्येच्या 13 पटीपेक्षा 2ने कमी आहे.

d) एका संख्येच्या दुप्पटीपेक्षा 13ने कमी आहे.

6. खालील बैजिक पदावलीसाठी संबंधित परिस्थितीचे वर्णन करा.

a) $8 \times x + 3 \times y$

b) $15 \times j - 2 \times k$

7. कॅलेंडर महिन्यात चित्रामध्ये दर्शविल्याप्रमाणे तारखांनी भरलेला कोणता 12×3 चौकटी रकाना निवडला तर खालील रकान्यात w तारीख असेल तर रिकाम्या रकान्यात तारखांसाठी पदावली लिहा.

नोव्हेंबर 2024

सोम	मंगळ	बुध	गुरू	शुक्र	शनि	रवि
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

w – 1	w	

4.2 अंकगणितीय पदावलींची पुनर्भेट:

आम्ही पदांची बेरीज करून राशी पदे लिहायला शिकलो आणि त्यामुळे अंकगणिती पदावली वाचणे हे सोपे झाले. बऱ्याचदा ते अनेक प्रकारे वाचता आले असते आपण ते गोंधळात टाकणारे होते. आम्ही अदलाबदल करण्याचा (दोन संख्या कोणत्याही क्रमात मिळविणे) आणि गट करण्याचा (सोयीस्करीत्या गट करून संख्या मिळविणे) वापर करतो त्यामुळे जेणेकरून पदावलीच्या मूल्यांकन करण्याचे सोपे मार्ग

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

काढता येतील. पदांची अदलाबदल आणि गटबध्द केल्याने पदावलीची किंमत बदलत नाही. पदावलीमध्ये कंसाचा वापर करणे हे देखील किंवा कंसाच्या बाहेर ऋण चिन्ह असलेले कंस समाविष्ट करुन सुद्धा आम्ही शिकलो आहे. आम्ही **वितरण गुणधर्माचा** अभ्यास केला आहे. (बेरजेचा गुणाकार हा गुणाकारांच्या बेरजेइतका असतो.)

या संकल्पनेची उजळणी करा आणि खालील पदावलीच्या किंमती काढा.

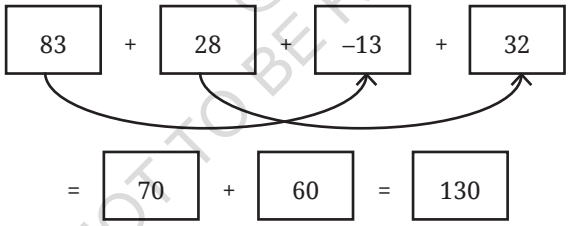
1. $23 - 10 \times 2$
2. $83 + 28 - 13 + 32$
3. $34 - 14 + 20$
4. $42 + 15 - (8 - 7)$
5. $68 - (18 + 13)$
6. $7 \times 4 + 9 \times 6$
7. $20 + 8 \times (16 - 6)$

$23-10\times2$ या पहिल्या पदावलीचे मूल्यांकन करू. पहिल्यांदा आम्ही पदावलींची पदे लिहु शकतो. लक्षात घ्या की एक पद हे संख्या आहे. तर दुसरे पद हे दोन पदांची बेरीज करण्यापूर्वी रूपांतरीत करावे लागेल.

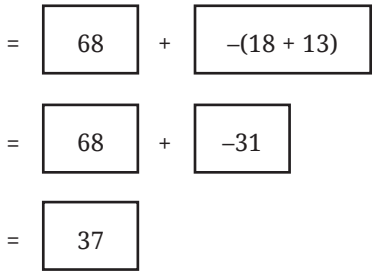
$$23 - 10 \times 2 = 23 + (-10 \times 2) = 23 + (-20) = 3$$

आता आपण दुसऱ्या पदाचे मूल्यांकन करूया. या पदावलीची सर्व पदे संख्या आहेत. जर आपण पदांकडे लक्ष दिले तर आपल्याला असे आढळून येईल की, आपण पदांची अदलाबदल आणि गट केले तर मूल्यांकन करणे सोपे होईल.

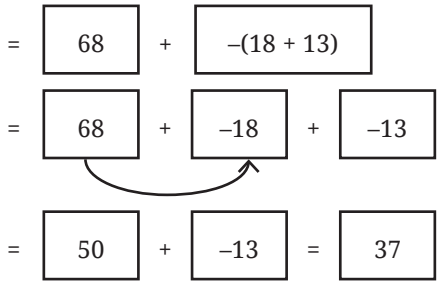
$83 + 28 - 13 + 32 =$



आता आपण पाचवी पदावली पाहू. त्यात कंसाच्या बाहेर ऋण चिन्ह असलेले कंस आहेत. त्यांचे दोन प्रकारे मूल्यांकन करता येते. प्रथमतः कंस सोडवून (डाव्या बाजूच्या उकली प्रमाणे) किंवा योग्यरित्या कंस काढून (उजव्या बाजूच्या वर) मूल्यांकन करता येते.



किंवा



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आता इतर अंकगणितीय पदावलींच्या किंमती काढा. जेव्हा त्यामध्ये असलेल्या चलपदांची किंमत अंकामध्ये घातली जाते तेव्हा बैजिक राशीची खरी किंमत सापडते. उदाहरण 1 मध्ये आफताब 23 वर्षे वयाचा असताना शबनमचे वय काढण्यासाठी आम्ही a+3 या राशीमधील अक्षर संख्या 'a' ला 23 ने बदलले आणि त्याची किंमत 26 घेतली.

4.3 बैजिक पदावलीमधील गुणाकाराचे चिन्ह वगळणे :

या संख्या क्रमाकडे पहा.

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.....

आम्ही या क्रमाचे किंवा रचनेचे कसे वर्णन करू शकतो? सोपे आहे, या संख्या 4 च्या गुणाकाराच्या सारणीत दिसणाऱ्या संख्या आहेत. (4 चे गुणक हे चढत्या क्रमात आहेत.)

या क्रमाचे तिसरे पद किती आहे? ते 4×3 आहे.

या क्रमाचे 29 वे पद किती आहे? ते 4×29 आहे.

? या क्रमाचे n वे पद मिळविण्यासाठी बैजिक राशी शोधा. n हे चलपद असून क्रमातील स्थान दर्शविते.

हा 4च्या पटीतील क्रम असल्याने तेथे असे दिसून येते की कितीवे पद हे n ची 4 पट आहे.

$$4 \times n$$

एका प्रमाणित पध्दतीने आम्ही $4 \times n$ मधील गुणाकार चिन्ह वगळून $4n$ पर्यंत संक्षिप्त रुप देऊ शकतो. आम्ही प्रथमतः संख्या लिहीतो त्यानंतर मूळाक्षर (मुळाक्षरे) लिहीतो. $7k$ या पदावलीची किंमत काढा. जेथे k=4. किंमत 7×4 = 28 आहे. जेव्हा m = 2 असताना $5m$+3 या पदावलीची किंमत काढा.

5m म्हणजे $5 \times m$, जेव्हा m=2 असेल तेव्हा राशीची/पदावलीची किंमत 5×2+3=13

चूक लक्षात घ्या, चूक सुधारा

खाली कांही सरळरूपे दर्शविलेली असून जेथे मूळाक्षर-संख्या या संख्यांनी बदलल्या जातात आणि पदावलींची किंमत मिळविता येते.

1. त्या प्रत्येकाचे निरीक्षण करा आणि कांही चूक आहे का ते ओळखा.
2. जर तुमची चूक झाली आहे असे वाटत असेल तर काय चूक झाली आहे याचे वर्णन करण्याचा प्रयत्न करा.
3. नंतर ती चूक दुरूस्त करा आणि पदावलीची किंमत काढा (द्या.)

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

1. जर a = – 4, तर 10 – a = 6.
2. जर d = 6, तर 3d = 36.
3. जर s = 7, तर 3s – 2 = 15.
4. जर r = 8, तर 2r + 1 = 29.
5. जर j = 5, तर 2j = 10.
6. जर m = –6, तर 3 (m + 1) = 19.
7. जर f = 3, g = 1 तर 2f – 2g = 2.
8. जर t = 4, b = 3 तर 2t + b = 24.
9. जर h = 5, n = 6 तर h – (3 – n) = 4.

4.4 बैजिक पदावलींचे सरळरूप (सोडविणे)

यापूर्वी आम्ही वेगवेगळ्या नियमित आकृत्यांची त्यांच्या बाजूंची परिमिती काढण्याची पदावली शोधून काढली आहे. आता आपण एका आयताची परिमिती काढण्यासाठी पदावली काढू.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

या अगोदरच्या घटनेत प्रथमतः आम्ही जेव्हा आयताची लांबी आणि रूंदी माहित असताना परिमिती कशी मिळवायची यांचे वर्णन करू.

लांबी + रूंदी + लांबी + रूंदी यांची बेरीज काढा.

लांबी आणि रूंदी यांच्या जागी अनुक्रमे l आणि b ही मूळाक्षरे – संख्या वापरू p ही आयताची परिमिती म्हणून दर्शवू. तर आपल्याकडे.

$$p = l+b+l+b$$

आपल्याला माहिती आहे की या संख्या आणि पदावलीची पदे ही कोणत्याही क्रमाने मिळविता येतात. म्हणून वरील पदावली अशी लिहीता येते.

$$p = l+l+ b+b$$

$l+l = 2\times l = 2l$ आणि $b+b = 2\times b = 2b$ आपल्याकडे आहे.

$$p= 2l+2b$$

लक्षात घ्या की परिमितीसाठी आम्हाला मिळालेली (पदावली) सुरूवातीची राशी *(l+b+l+b)* आणि शेवटची राशी (पदावली) *(2l+2b)* वेगवेगळी दिसते. तथापि संख्यांसाठी जे नियम आणि क्रिया करतो तेच नियम आणि क्रिया लागू करून सुरूवातीच्या राशीपासून राशी मिळविली असल्याने त्या समान आहेत. जेव्हा मूळाक्षर संख्या या संख्यांनी बदलल्या जातात तेव्हा त्या दोन्ही समान किंमती घेतात या अर्थाने ते समान आहेत.

उदाहरणार्थ जर आपण $l=3, b=4$ असे दिले तर आपल्याला मिळेल.

$$l + b + l + b = 3 + 4 + 3 + 4 = 14, \text{ आणि}$$
$$2l + 2b = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$$

आपण $2l+2b$ या पदावलीला $l+b+l+b$ असे **सरळरूप** म्हणू शकतो.

चला सरळरूपातील आणखी काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 5 : एका दुकानात विकल्या गेलेल्या पेन्सिली आणि खोडरबरची संख्या दर्शविणारे हे कोष्टक आहे. प्रत्येक पेन्सिलची किंमत c आहे आणि प्रत्येक खोडरबरची किंमत d आहे. तीन दिवसामध्ये दुकानदाराने कमाविलेली एकूण रक्कम काढा.

	दिवस 1	दिवस 2	दिवस 3
पेन्सिली (किंमत c)	5	3	10
खोडरबर (किंमत d)	4	6	1

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

प्रथम पेन्सिलीच्या विक्रीतून मिळालेली रक्कम काढूया.

पहिल्या दिवशी पेन्सिली विकून मिळालेली रक्कम 5c आहे. त्याचप्रमाणे दुसऱ्या दिवशी पेन्सिली विकून मिळालेली रक्कम _____ आहे आणि तिसऱ्या दिवशी पेन्सिली विकून मिळालेली रक्कम _____ आहे.

पेन्सिली विकून मिळालेली एकूण रक्कम 5c+ 3c +10c आहे. पुढे या पदावलीचे सुलभरूप आपण करू शकतो का? आणि पदांची संख्या कमी करू शकतो का ?

पदावलीचा अर्थ असा की c ची 5 पट, c ची 3 पट आणि c ची 10 पट यांची बेरीज करणे होय. म्हणून एकूण c हे चलपद (5+3+10) पट मिळविली पाहिजे. हा आपण संख्यांचा वितरण गुणधर्म म्हणून पाहिला आहे.

अशाप्रकारे $5\times C+ 3\times C+10\times C = (5+3+10)\ C$

$(5+3+10)\times C$ हे $18\times C = 18C$ असे संक्षिप्तपणे लिहीता येते.

? जर C = ₹50 तर पेन्सिलीच्या विक्रीतून मिळालेली एकूण रक्कम काढा.

? खोडरबरच्या विक्रीतून मिळालेल्या एकूण रक्कमेसाठी पदावली लिहा.

नंतर पदावलीला सुलभरूप द्या. तीन दिवसात विक्रीतून मिळालेल्या पेन्सिली आणि खोडरबरच्या एकूण रक्कमेची पदावली 18c+11d ही आहे.

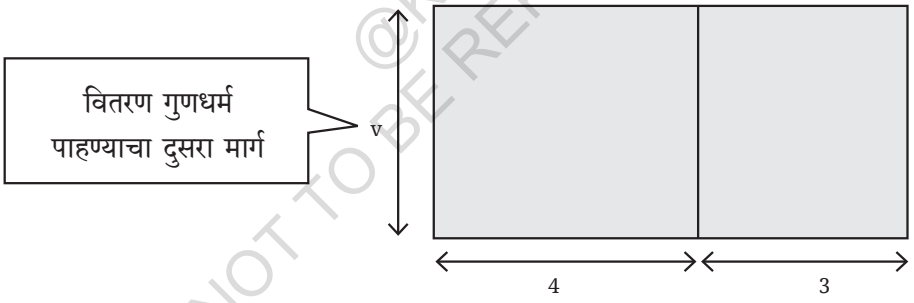
? 18c +11d या पदावलीचे पुढे सुलभीकरण करता येते?

या पदावलीचे आणखी सुलभीकरण करण्याचा कोणताही मार्ग नाही कारण त्यात वेगवेगळ्या चलपद आहेत. हे त्याच्या साध्या रूपात आहे.

या समस्येमध्ये आपण 5c + 3c + 10c ही पदावली 18c या पदावलीत संक्षिप्तरित्या मिळालेली पाहतो.

? जेव्हा c ची वेगवेगळ्या संख्यानी अदलाबदल होते, तेव्हा दोन्ही पदावली सारख्याच किंमती घेतात हे तपासून पहा.

उदाहरण 6: एक मोठा आयत हा दोन लहान आयतामध्ये आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे विभागलेला आहे. मोठ्या आयताच्या क्षेत्रफळाचे वर्णन करणारी पदावली लिहा.



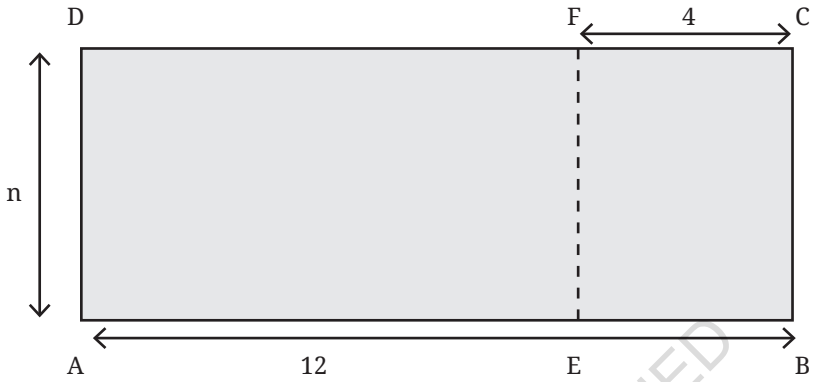
© KSEEB NOT TO BE REPUBLISHED

लहान आयतांची क्षेत्रफळे 4V चौ. एकके आणि 3V चौ एकके आहेत. मोठ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे दोन प्रकारे काढता येते. (i) त्याच्या बाजूची लांबी V आणि (4+3) प्रत्यक्षपणे वापरून किंवा (ii) लहान आयतांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज करून.

पहिल्या क्षेत्रफळ प्रकारात 7V आणि दुसऱ्या प्रकारात 4V+3V=7V मिळते. आपल्याला माहित आहे की ते समान आहे. 4V+3V =7V आणि मोठ्या आयताच्या क्षेत्रफळासाठी ही आवश्यक पदावली आहे.

अगोदर दर्शविल्याप्रमाणे एक मोठा आयत हा दोन लहान आयतामध्ये विभागला जातो. AEFD आयताचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी एक पदावली लिहा.

या घटनेमध्ये AEFD या आयताचे क्षेत्रफळ हे दोन प्रकारे काढता येते. (i) प्रत्यक्षपणे बाजूंची लांबी n आणि (12–4) वापरून किंवा (ii) ABCD या आयताच्या क्षेत्रफळातून EBCF आयताचे क्षेत्रफळ वजा करून.



पहिली पध्दत, आपल्याला 4 आणि दुसरी पध्दत $12n$ - $4n$ देते आणि ते समान आहेत कारण $12n$-$4n$=$8n$. AEFD आयताच्या क्षेत्रफळाची ही पदावली आहे. (5c, c, 10c), (12n-4n) या सारख्या समान चलपदे असलेल्या पदांच्या सटाला **सजातीय पदे** असे म्हणतात. (18c, 11d) यासारख्या पदांच्या सटाला **विजातीय पदे** असे म्हणतात कारण त्यामध्ये वेगवेगळी चलपदे आहेत.

सजातीय पदांची बेरीज करता येते आणि एका पदामध्ये संक्षिप्तपणे लिहीता येते, हे आम्ही पाहिले आहे.

? **उदाहरण 7:** एक दुकान एका दिवसभराच्या वापरासाठी खुर्च्या आणि टेबल भाड्याने देते. ते भाड्याने देण्यासाठी एखाद्याला प्रत्येक नगासाठी प्रथम खालील रक्कम भरावी लागेल.

तपशील	रक्कम
खुर्ची	₹40
टेबल	₹75

जेव्हा लाकडी साहित्य परत केल्यावर दुकानदार कांही रक्कम खालीलप्रमाणे परत करतो. जर x खुर्च्या आणि y टेबल भाड्याने घेतले असतील तर द्याव्या लागणाऱ्या एकूण रक्कमेसाठी पदावली लिहा.

	परत केलेली रक्कम
खुर्ची	₹6
टेबल	₹10

x खुर्च्या आणि y टेबलांसाठी सुरूवातीला दिलेली एकूण रक्कम आणि लाकडी साहित्य परत केल्यानंतर परत मिळणारी रक्कम काढा.

? ही रक्कम मिळविण्याच्या प्रक्रियेचे वर्णन करा.

सुरूवातीला दिलेली एकूण रक्कम $40x+ 75y$ आहे आणि परत केलेली एकूण रक्कम $6x+10y$ आहे. म्हणून एकूण दिलेली रक्कम = $(40x + 75y) – (6x + 10y)$.

NOT TO BE REPUBLISHED @KSCERT

? ही पदावली आम्ही सोडवू शकतो का? जर होय तर कशी? जर नाही तर का नाही?

गणिती बोल

अंकगणिती पदावलीमध्ये कंस कसे सोडवावेत याचे स्मरण केल्यास आम्हाला मिळते.

$$(40x + 75y) – (6x + 10y) = (40x + 75y) – 6x – 10y$$

म्हणून पदे कोणत्याही क्रमाने मिळविता येतात त्यामुळे उर्वरीत कंस सोडविता येतात आणि पदावली ही $40x + 75y + – 6x + – 10y$ होईल.

सजातीय पदे एकत्र घेऊन आम्ही गट करू शकतो. याचा परिणाम असा होतो की,

$$40x + – 6x + 75y + – 10y$$

$$= (40 – 6)x + (75 – 10)y$$

$$= 34x + 65y.$$

गणिती बोल

$(40x + 75y) – (6x + 10y)$ या पदावलीला सरळरूप दिल्यास $34x+65y$ मिळते, जी रूपयामध्ये दिलेली एकूण रक्कम आहे.

? आपण सुरूवातीची पदावली $(40x + 75y) + (–6x – 10y)$ अशी लिहु शकतो का?

? **उदाहरण 8:** चारूने एका प्रश्नमंजुषेच्या तीन फेऱ्या पार केल्या आहेत. तीन फेऱ्यातील तिचे गुण $7p – 3q$, $8p – 4q$ आणि $6p – 2q$ आहेत. येथे p हे बरोबर उत्तरासाठी गुण दर्शवितो आणि q हे चुकीच्या उत्तरासाठी दंड दर्शविते.

? प्रत्येक पदावलीचा अर्थ काय आहे?

जर बरोबर उत्तरासाठी गुण 4 ($P=4$) असतील आणि चुकीच्या उत्तरासाठी दंड 1 ($q = –1$) असेल तर पहिल्या फेरीतील चारूचे गुण काढा.

चारूचे गुण $7 \times 4 – 3 \times 1$ आहे. ही पदावलीच्या पदांची बेरीज म्हणून लिहून त्याची किंमत काढू शकतो.

$$7 \times 4 – 3 \times 1 = 7 \times 4 + – 3 \times 1 = 28 + – 3 = 25$$

दुसऱ्या आणि तिसऱ्या फेरीतील तिचे गुण किती आहेत?

जर दंड नसेल तर काय होईल? त्या स्थितीत q ची किंमत किती असेल ?

तीन फेऱ्यानंतर तिचे अंतिम गुण किंती आहेत? तिचे अंतिम गुण हे तीन फेरीतील गुणांची बेरीज असतील.

$$(7p – 3q) + (8p – 4q) + (6p – 2q).$$

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून पदांची बेरीज कोणत्याही क्रमाने करता येते, आम्ही कंस काढू शकतो आणि लिहीतो.

$7p + -(3q) + 8p + -(4q) + 6p + -(2q)$

$= 7p + 8p + 6p + -(3q) + -(4q) + -(2q)$ (अदलाबदल आणि गट करून)

$= (7 + 8 + 6)p + -(3 + 4 + 2)q$

$= 21p + -9q$

$= 21p - 9q.$

तीन फेऱ्यानंतर चारूचे एकूण गुण 21P - 9q आहेत. तिचा मित्र कृषिताचे तीन फेऱ्यानंतरचे गुण 23P - 7q आहेत.

? कृषितासाठी कांही संभाव्य गुण असे द्या की तीन फेरीतील गुणांची बेरीज केल्यास 23P - 7q असेल.

? कोणाचे गुण अधिक आहेत हे आम्ही सांगू शकतो का? त्याचे वर्णन तुम्ही करू शकता का ? चारूपेक्षा कृषिताचे किती गुण अधिक/जास्त आहेत? दोन गुणातील फरक काढून हे शोधता येईल?

$$23p - 7q - (21p - 9q)$$

? या पदावलीला पुढे सरळरूप द्या.

? **उदाहरण 9:** 4 $(x+y)-y$ या पदावलीला सरळरूप द्या.
वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून या पदावलीला संक्षिप्तरूप देता येते.

$$4(x + y) - y = 4x + 4y - y$$

$$= 4x + 4y + -y$$

$$= 4x + (4 - 1)y$$

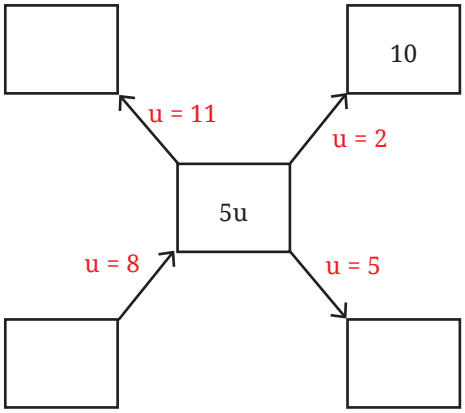
$$= 4x + 3y$$

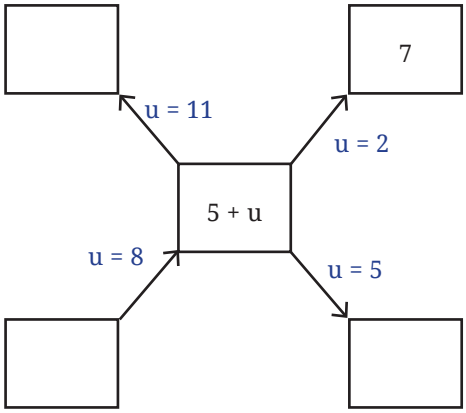
? **उदाहरण 10 :** 5u आणि 5+u या पदावली एकमेकांशी समान आहेत काय?
पदावली 5u म्हणजे संख्या u ची 5 पट आणि पदावली 5+u म्हणजे संख्या u पेक्षा 5 ने अधिक होय. या दोन्ही वेगवेगळ्या क्रिया आहेत. 4 च्या बहुतेक किंमतीसाठी त्या वेगवेगळया किंमती देत असतात.

चला हे तपासूया.

? उदाहरणामध्ये दर्शविल्याप्रमाणे खालील रिकाम्या जागा भरा. नंतर 5u आणि 5+u ने घेतलेल्या किंमतींची तुलना करा.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED





जर 5u आणि 5 + u या पदावली समान असतील तर u च्या कोणत्याही दिलेल्या किंमतीसाठी सारख्याच किंमती त्या घेऊ शकतात. परंतु आपण पाहु शकतो की ते तसे नाहीत म्हणून या दोन पदावली समान नाहीत.

10y – 3 आणि 10(y – 3) या पदावली समान आहेत का?

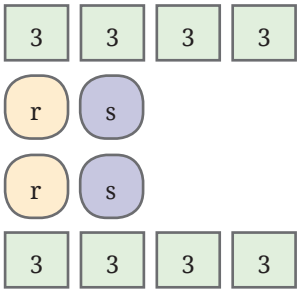
10y – 3 चा संक्षिप्त अर्थ 10 × y – 3 म्हणजे y ची 10 पट 3 ने कमी असा होतो.

10 (y – 3) चा संक्षिप्त अर्थ 10 × (y – 3) म्हणजे 10 पट (y पेक्षा 3ने कमी)

y च्या वेगवेगळ्या किंमती घेऊन या पदावलींच्या किंमतीची तुलना करूया.

? दोन आकृत्यामधील रिकाम्या जागा भरून नंतर दोन पदावली समान आहेत का याचा तुम्ही विचार कराल का ?

? **उदाहरण 11:** आकृतीमधील संख्यांची बेरीज किती आहे ? (अव्यक्त किंमती या मूळाक्षर – संख्यांनी दर्शविल्या जातात.)



''बाहेर जाण्याचे अनेक मार्ग आहेत. येथे आम्ही त्यापैकी कांही दर्शवू

1) पंक्तीनुसार बेरीज केल्यास मिळते.

(4 × 3) + (r + s) + (r + s) + (4 × 3)

2) सजातीय पदांची बेरीज केल्यास मिळते.

(8 × 3) + (r + r) + (s + s)

3) वरील अर्ध्या भागाची बेरीज करून दुप्पट केल्यास मिळते.

2 × (4 × 3 + r + s)

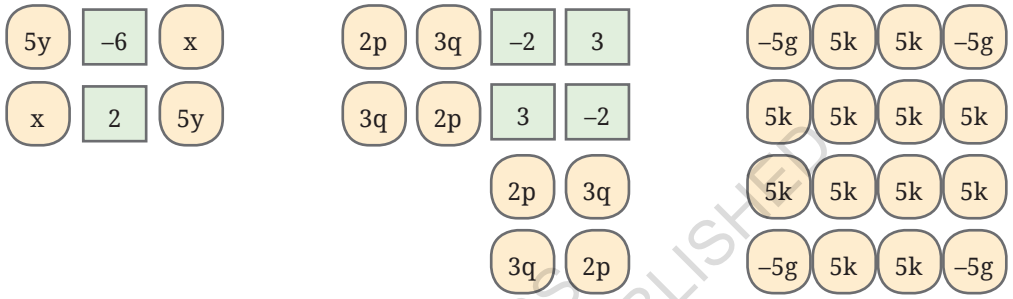
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तिन्ही पदावली वेगवेगळ्या दिसू लागतात. आम्ही प्रत्येकाला सरळरूप देऊ शकतो आणि ते सर्व सारखेच आहेत. $2r + 2s + 24$.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

गणिती बोल

1. खालील प्रत्येक चित्रातील संख्येंची बेरीज करा. त्याच्याशी संबंधित पदावली लिहा आणि तिला सरळरूप द्या. प्रत्येक चित्रातील संख्यांची दोन वेगवेगळ्या प्रकारे बेरीज करण्याचा प्रयत्न करा आणि तुम्हाला सारख्याच गोष्टी मिळतात हे पहा.



2. खालील प्रत्येक पदावलीला सरळरूप द्या :

(a) $p + p + p + p$, $p + p + p + q$, $p + q + p - q$,
$p - q + p - q$, $p + q - p + q$,
$p + q - (p + q)$, $p - q - p - q$

(b) $2d - d - d - d$, $2d - d - d - c$,
$2d - d - (d - c)$, $2d - (d - d) - c$,
$2d - d - c - c$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

चूक लक्षात घ्या, चूक सुधारा.

बैजिक पदावलीचे कांही संक्षिप्त रूपे खाली दिलेली आहे. उजव्या बाजूची पदावली ही तिचे संक्षिप्त/साधे रूप आहे.

- त्या प्रत्येकाचे निरीक्षण करा आणि कांही चूक आहे का ते पहा.
- जर तुम्हाला चूक आहे असे वाटत असेल तर काय चूक आहे याचे वर्णन करण्याचा प्रयत्न करा.
- नंतर बरोबर करून सरळरूप द्या.

	पदावली	संक्षिप्त रूप	बरोबर साधे रूप
1.	3a + 2b	5	
2.	3b – 2b – b	0	
3.	6 (p + 2)	6p + 8	
4.	(4x + 3y) – (3x + 4y)	x + y	
5.	5 – (2 – 6z)	3 – 6z	
6.	2 + (x + 3)	2x – 6	
7.	2y + (3y – 6)	– y + 6	
8.	7p – p + 5q – 2q	7p + 3q	
9.	5 (2w + 3x + 4w)	10w + 15x + 20w	

? सर्व सोडविलेल्या संक्षिप्त रूपावर एक नजर टाका. (म्हणजेच कंस काढून सोडविणे), सजातीय पदांची बेरीज करणे आणि फक्त संख्यांची सुध्दा बेरीज करणे.) या पदाची संख्या आणि या पदावलींच्या चलपदामध्ये कांही संबंध आहेत का?

4.5 पदबंध समजून घेऊन संबंध स्पष्ट करा.

पहिल्या भागात आपल्याला बैजिक पदावलींची पुसटशी कल्पना आली आहे आणि त्यांचा वापर करून साधे पदबंध आणि संबंधाचे संक्षिप्त आणि सुंदर पध्दतीने वर्णन कसे करायचे ते शिकायला मिळाले आहे. येथे आपण वेगवेगळ्या परिस्थितीमध्ये प्रमाणामधील सामान्य संबंध शोधत राहतो, पदबंध शोधतो आणि हे पदबंध का होतात हे देखील स्पष्ट करतो.

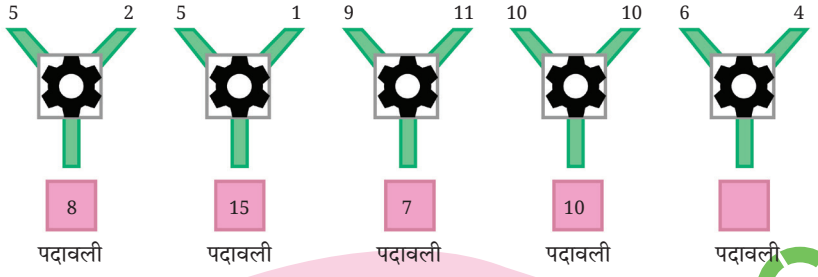
गणितीय संबंधाना पदावली म्हणून लिहीण्याचा प्रयत्न करण्यापूर्वी सोप्या भाषेत वर्णन करण्याचे किंवा कल्पना करण्याचे महत्व लक्षात ठेवा.

© MSCERT NOT TO BE REPUBLISHED

सूत्र शोधून काढणे :

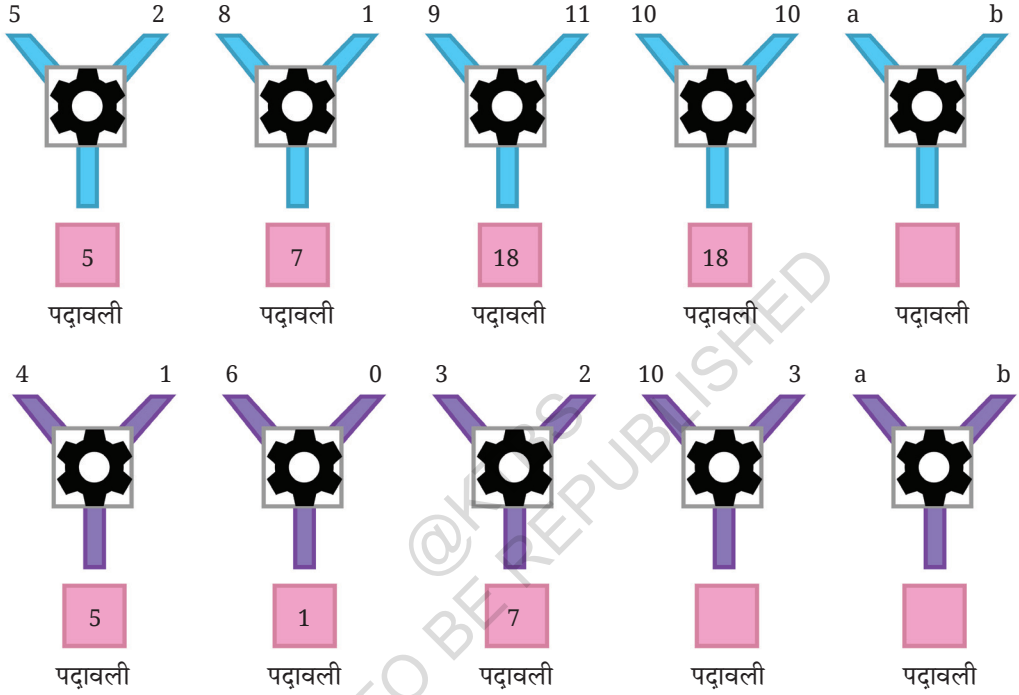
दिलेल्या चित्राकडे पहा. प्रत्येक घटनेमध्ये Y च्या वरच्या बाजूला असलेल्या 2 संख्या इनपूट म्हणून घेते कांही क्रिया करते आणि तळाशी निकाल देते. यंत्र प्रत्येक घटनेमध्ये त्याच्या इनपुटवर समान क्रिया करते.

? या संख्या यंत्राचे सूत्र काढा.



वरील संख्या यंत्राचे सूत्र ''पहिल्या संख्येच्या दुप्पटीतून दुसरी संख्या वजा करणे'' असे आहे. जेव्हा बैजिक पदावली म्हणून लिहील्यास $2a-b$ हे सूत्र आहे. इनपुटच्या पहिल्या संचासाठीची पदावली ही $2\times5-2=8$ ही आहे. प्रत्येक इनपुटच्या संचासाठी सूत्र लागू पडते का ते तपासा.

? खालील संख्या यंत्रांची सूत्रे काढा आणि प्रत्येक इनपुट सटासाठी पदावली लिहा.

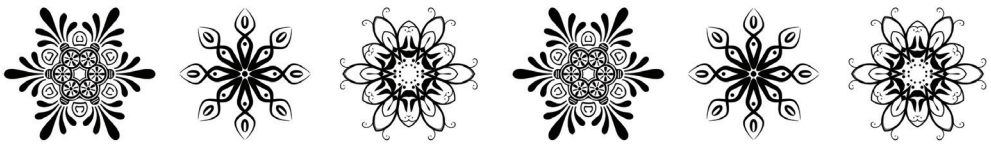


? आता स्वतः एक सूत्र तयार करा. त्या सूत्राचा उपयोग करून कांही संख्या यंत्राची उदाहरणे म्हणून लिहा. तुमच्या वर्गमित्राना ते शोधण्याचे आव्हान द्या.

शिक्षकांसाठी सूचना: केवळ समस्या सोडविणेच नाही तर नवीन प्रश्न तयार करणे देखील गणित शिकण्याचा आणि करण्याचा एक भाग आहे!

नमुन्यांच्या वर्णनासाठी बैजिक पदावली

? **उदाहरण 12 :** सोमजीतला एका साडीच्या काठावर एक पुनरावर्तीत होणारा नमुना दिसला.



@KSSB NOT TO BE REPUBLISHED

? सोमजीतला आश्चर्य वाटते की जर i) नक्षीकाम A आढळते, ii) नक्षीकाम B आढळते आणि iii) नक्षीकाम C आढळते या सर्व स्थितींचे वर्णन करण्याचा कांही मार्ग आहे का?

चला नक्षीकाम C पासून सुरूवात करूया. ते पहिल्यांदाच दिसते. स्थान 3 वर दिसते, दुसऱ्यांदा स्थान 6 वर दिसते.

? n व्या वेळा नक्षीकाम C वर कोठे दिसेल ?

आम्हाला असे दिसून येते की नक्षीकाम हे 3 च्या पटीतील स्थानावर आढळते म्हणून नक्षीकाम C चे n वे अस्तित्व हे $3n$ स्थानावर आढळते.

? त्याचप्रमाणे n व्या वेळा कोठे इतर नक्षीकाम दिसते त्याच्या स्थानाचे सूत्र काढा.

जेथे B स्थान आढळते ते 2,5,8,11,14 इत्यादी आहेत.

आपणाला असे दिसून येते की नक्षीकाम B च्या n व्या अस्तित्वाचे स्थान हे नक्षीकाम C च्या n व्या वेळी दिसणाऱ्या स्थानापेक्षा एक ने कमी आहे.

$$3n - 1$$

अशाप्रकारे नक्षीकाम Bचे n व्या स्थानावरील अस्तित्व $3n - 2$ हे आहे. त्याचप्रमाणे n व्या वेळा नक्षीकाम A ज्या स्थानावर दिसते त्याचे वर्णन करणारी पदावली ही $3n - 2$ आहे.

? एक स्थान संख्या दिल्यास तिथे दिसणारे नक्षीकाम आपण काढू शकतो का ? 122 व्या स्थानावर कोणते नक्षीकाम दिसते?

जर स्थान हे 3 च्या पटीत असेल तर स्पष्टपणे आपल्याकडे नक्षीकाम C आहे. अगोदर पाहिल्याप्रमाणे जर स्थान हे 3 पटीपेक्षा 1 ने कमी असेल तर त्याचे नक्षीकाम B आहे आणि जर ते 3 च्या पटीपेक्षा 2 में कमी असेल तर ते नक्षीकाम A आहे.

? स्थान क्रमांकाला (संख्येला) 3 ने भागून मिळणारी बाकी यासाठी वापरली जाऊ शकते का? खालील सारणीचे निरीक्षण करा.

स्थान संख्या	3 ने भागल्यास मिळणारा भागाकार	बाकी
99	33	0
122	40	2
148	49	1

? 99, 122 आणि 148 या स्थानावर दिसणारे नक्षीकाम याचा उपयोग करून काढा.

@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

दिनदर्शिकेतील रचना पदबंध

येथे नोहेंबर 2024 ची दिनदर्शिका आहे. जर दिनदर्शिकेमध्ये चिन्हांकीत 2×2 चौरसांचा विचार केला तर, या चौरसातील संख्या एक मनोरंजक गुणधर्म दर्शवितात.

नोव्हेंबर 2024

सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि	रवि
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

चिन्हांकीत केलेला 2×2 चौरस घ्या आणि कर्णांवर असलेल्या 12 आणि 20, 13 आणि 19 या संख्यांचा विचार करा. 12+20, 13+19 यांची बेरीज करा. तुमचे निरीक्षण काय आहे? ते समान आहेत.

12	13
19	20

दिनदर्शिकेमध्ये संख्या 30 च्या पुढे वाढवून अंत्य नसलेल्या पंक्ती तयार करा.

नोव्हेंबर 2024

सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि	रवि
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

? या अंत्य नसलेल्या चौकटीतील प्रत्येक 2×2 चौरसांच्या कर्णांची बेरीज समान असेल का? आम्ही याची खात्री कशी करू शकतो?

NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS

याची खात्री करण्यासाठी आपण सर्व 2×2 चे चौरस तपासू शकत नाही कारण तेथे अमर्यादित संख्येने आहेत.

एक 2×2 चौरस विचारात घेऊ. त्याची डावीकडील वरील संख्या कोणतीही असू शकते. चला तिला 'a' असे संबोधू शकतो.

? आपल्याला वरील डावी संख्या माहित असल्याने या 2×2 चौरसातील इतर संख्या आम्ही कशा काढू शकतो?

a	?
?	?

जसे आपण केलेले आहे, तसेच प्रथमत: आपण दुसऱ्या संख्यांचे शब्दात वर्णन, करूया.

- 'a' च्या उजवीकडील संख्या ही त्यापेक्षा 1 ने अधिक असेल.
- 'a' च्या खालील संख्या ही त्यापेक्षा 7 ने अधिक असेल.
- कर्णाच्या बाजूची संख्या 'a' ही त्यापेक्षा 8 ने अधिक असेल.

a	a + 1
a + 7	a + 8

म्हणून 2×2 चौरसातील इतर संख्या चौकटीत दर्शविल्याप्रमाणे आहेत. a + (a + 8) आणि (a + 1) + (a + 7) ही कर्णांची बेरीज काढा.

चला ते आपण सोडवूया.

म्हणून, पदांची बेरीज ही कोणत्याही क्रमाने करता येते. तसेच कंस सोडविले जातात.

a + (a + 8) = a + a + 8 = 2a + 8

(a + 1) + (a + 7) = a + 1 + a + 7 = a + a + 1 + 7 = 2a + 8

आम्हाला असे दिसून येते की, दोन्ही कर्णांची बेरीज ही 2a+8 इतकी आहे. (a च्या दुपट्टीपेक्षा 8 ने जास्त)

? कोणत्याही 2×2 चौरसासाठी त्यांच्या वरच्या डाव्या बाजूला a संख्या विचारात घेऊन कर्णांच्या बेरजेचा या पदावलीचा पडताळा करा.

अशाप्रकारे आम्ही असे दर्शविले आहे की 2×2 च्या चौरसासाठी 'a' च्या कोणत्याही किंमतीसाठी कर्णाची बेरीज समान असते.



ही समस्या एक उदाहरण आहे जी बैजिक नमुन्याची शक्ती नेहमीच रचना टिकविणारी आहे किंवा नाही याचा पडताळा करते.

खालील आकारात तयार झालेल्या दिनदर्शिकेच्या एका संख्यांच्या सटाचा विचार करा. (अंत्य नसलेल्या पंक्ती असताना)

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

	8	
14	15	16
	22	

? सर्व संख्यांची बेरीज काढा. मध्यभागी असलेल्या 15 या संख्येशी तुलना करा. असा आकार तयार होणाऱ्या दुसऱ्या संख्यांच्या सटासाठी हे पुन्हा करा. तुम्ही काय निरीक्षण कराल?

आम्हाला असे दिसून येते की एकूण बेरीज ही नेहमी केंद्रस्थानी असलेल्या संख्येच्या 5 पट असते.

गणिती बोल

? हे नेहमीच घडेल का? हे तुम्ही कसे दर्शवाल?

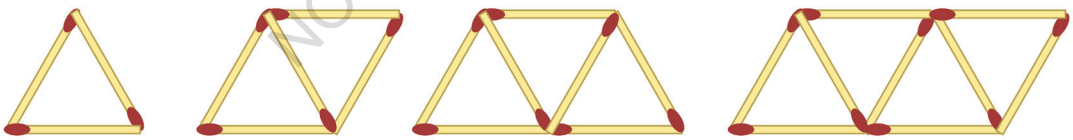
(**सूचना:** हा आकार तयार करणाऱ्या एका सामान्य संख्यांच्या सटाचा विचार करा. केंद्रस्थानी असलेली संख्या 'a' घ्या. इतर संख्या 'a' च्या स्वरूपात व्यक्त करा.

आकृतीमधील संख्यांची बेरीज ही नेहमीच एका संख्येच्या पटीत असेल असे इतर आकार काढा.

गणिती बोल

माचीसच्या काड्याचे नमुने :

खालील, चित्र पहा. माचिसच्या काड्या वापरून बनविलेला एक नमुना आहे. हा नमुना कोणता आहे हे तुम्ही ओळखू शकता का ?



आम्हाला असे दिसून येते की पायरी 1 मध्ये 1 त्रिकोण, पायरी 2 मध्ये 2 त्रिकोण, पायरी 3 मध्ये 3 त्रिकोण आणि इत्यादी असेच पुढे चालु आहे.

पुढील 5 व्या पायरीतील माचिसच्या काड्यांची संख्या किती ते तुम्ही सांगू शकाल का ? त्या 11 आहेत. तुम्ही हे सुध्दा काढू शकता आणि पाहू शकता.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? पायरी 33, पायरी 84 आणि पायरी 108 मध्ये किती माचिसच्या काड्या असू शकतील? अर्थात आम्ही काढू शकतो आणि मोजू शकतो. परंतु येथे दिलेल्या नमुन्याचा वापर करून उत्तरे शोधण्याचा जलद मार्ग आहे का?

? पुढील पायरीमध्ये माचिसच्या काड्यांची संख्या काढण्याचा सामान्य नियम काय आहे? आम्हाला असे दिसून येते की प्रत्येक पायरीवर 2 माचिसच्या काड्या ठेवल्या असता पुढील पायरी मिळते म्हणजेच प्रत्येक वेळी माचिसच्या काड्यांची संख्या 2 ने वाढत जाते.

पायरीची संख्या	1	2	3	4	5	6
माचिसच्या काड्यांची संख्या	3	5	7	9	11	13

याच्या मदतीने पायरी 33 मध्ये किती माचिसच्या काड्या आहेत हे काढण्याच्या एका मार्गाचा विचार करा. (संख्या लिहीणे सुरू न ठेवता)

प्रत्येक वेळी 2 माचिसच्या काड्या मिळविल्या पाहिजेत पायरी 33 मध्ये किती माचिसच्या काड्या आहेत हे काढण्यासाठी किती वेळा 2 मिळविले आहेत याची मदत होईल. खालील कोष्टक पहा आणि काढण्याचा प्रयत्न करा.

पायरीची संख्या	1	2	3	4	5	6
माचिसच्या काड्यांची संख्या	3	5	7	9	11	13
		3 + 2	3 + 2 + 2	3 + 2 + 2 + 2	3 + 2 + 2 + 2 + 2	

33 त्रिकोण बनविण्यासाठी लागणाऱ्या माचिसच्या काड्यांची संख्या (पायरी 33)____ आहे. त्याचप्रमाणे पायरी 84 आणि पायरी 108 साठी लागणाऱ्या माचिसच्या काड्यांची संख्या काढा.

? कोणत्याही पायरीवरील माचिसच्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी नियम / सूत्राचे वर्णन करणारी पदावली कोणती असू शकते ?

पायरी 10 मध्ये असा नमुना आहे की, 9 ची दुप्पट आणि 3 मिळविणे म्हणजेच माचिसच्या काड्यांची संख्या $(3+2\times9)$ मिळते, पायरी 11 मध्ये 10 ची दुप्पट आणि 3 मिळविणे म्हणजेच $(3+2\times10)$ माचिसच्या काड्यांची संख्या मिळते. तर पायरी y साठी कोणती पदावली आहे?

@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

ते y पेक्षा 1 ने कमी आहे (म्हणजेच y-1) 2 वेळा आणि 3.

म्हणून पदावली $3 + 2 \times (y - 1)$ आहे.

ही पदावली पायरी y मधील माचिसच्या काड्यांची संख्या देते. आता आपण कोणत्याही पायरीवर जलदपणे माचिसच्या काड्यांची संख्या काढू शकतो.

तुमच्या कदाचित आधीच लक्षात आले असेल की, पहिल्या पायरीतही 2 आहे. 3=1+2

या पदावलीचा उपयोग केल्यास आम्हाला मिळते 2y+1

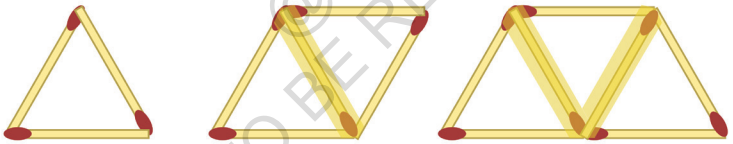
? वरील पदावली प्रत्येक पायरीतील माचिसच्या काड्यांची संख्या सुध्दा बरोबर देते का ? या पदावली सारख्याच आहेत का?

आम्ही $3 + 2 \times (y - 1)$ या पदावलीला सरळरूप देऊन तपासू शकतो.

$$3 + 2 \times (y - 1) = 3 + 2y - 2$$

$= 2y + 1$ दोन्ही पदावली सारख्याच आहेत. (समान)

मोजण्याची किंवा नमुना पाहण्याची तेथे एक वेगळी पध्दत आहे. चला चित्राकडे पुन्हा एकदा पाहू.



© KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

माचिसच्या काड्या दोन दिशामध्ये ठेवल्या जातात.

a) वरच्या आणि खालच्या बाजूला आडव्या काड्या आहेत.

b) मध्यभागी कर्णावर काड्या ठेवलेल्या आहेत.

उदाहरणार्थ, पायरी 2 मध्ये 2 माचिसच्या काड्या आडव्या आणि 3 माचिसच्या काड्या कर्णानुसार ठेवलेल्या आहेत.

? पायरी 3 आणि पायरी 4 मधील संख्या कोणत्या आहेत?

? पायऱ्या वाढत असताना प्रत्येक दिशेमध्ये माचिसच्या काड्यांची संख्या कशी बदलते ? प्रत्येक दिशेमधील y पायरीतील माचिसच्या काड्यांच्या संख्येसाठी एक पदावली लिहा. दोन्ही पदावलींची बेरीज 2y+1 आहे का?

शोधा पाहू. (Figure it out)

योग्य पदावली काढण्यासाठी विचारलेल्या प्रश्नांसाठी प्रथम वर्णन केलेल्या परिस्थितीतील वेगवेगळ्या राशीमधील संबंध जाणून घेण्याचा प्रयत्न करा. जर आवश्यकता भासल्यास अव्यक्तासाठी कांही किंमती गृहीत धरा आणि संबंध काढण्याचा प्रयत्न करा.

1. जोंधळ्याच्या भाकरीच्या एका ताटाची किंमत ₹30 आणि पुलावाच्या एका ताटाची किंमत ₹20 आहे. जर एका दिवसांत जोंधळ्याच्या भाकरीची x ताटे आणि पुलावाची Y ताटे मागविल्यास त्या दिवशी कमाविलेल्या एकूण रक्कमेचे वर्णन कोणती पदावली करते ?

   (a) $30x + 20y$ (b) $(30 + 20) \times (x + y)$

   (c) $20x + 30y$ (d) $(30 + 20) \times x + y$

   (e) $30x - 20y$

2. पुष्पिता स्वातंत्र्यदिनी चाफा आणि झेंडू अशी दोन प्रकारची फुले विकते. P ग्राहकाने फक्त चाफ्याची फुले खरेदी केली, q ग्राहकाने फक्त झेंडूची फुले खरेदी केली आणि r ग्राहकाने दोन्ही फुले खरेदी केली. त्याच दिवशी तिने प्रत्येक ग्राहकांना एक लहान राष्ट्रध्वज दिला तर त्या दिवशी तिने किती झेंडे दिले?

   (a) $p + q + r$ (b) $p + q + 2r$

   (c) $2 \times (p + q + r)$ (d) $p + q + r + 2$

   (e) $p + q + r + 1$ (f) $2 \times (p + q)$

3. एका खोल विहीरीच्या भिंतीवरून एक गोगलगाय चढण्याचा प्रयत्न करीत आहे. दरम्यान दिवसाच्या वेळी ती 4 सें.मी. वर चढते आणि रात्री ती हळूहळू d सें.मी. खाली सरकते हे 10 दिवस आणि 10 रात्री घडते तर.

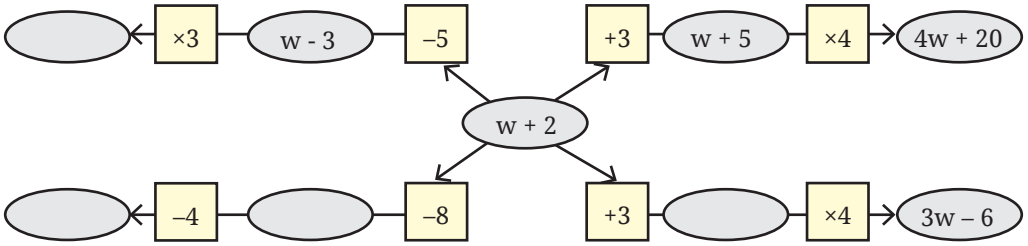
   a) गोगलगाय तिच्या सुरूवातीच्या स्थानापासून किती दूर आहे याचे वर्णन करणारी पदावली लिहा.

   b) जर $d > u$ असेल तर गोगलगायीच्या हालचालीबद्दल आम्ही काय म्हणू शकतो ?

4. राधा सायकलीच्या शर्यतीची तयारी करीत आहे आणि दररोज सराव करते. पहिल्या आठवड्यात प्रत्येक दिवशी ती 5 कि.मी. चालविते. दर आठवड्याला ती सायकल चालविण्याचे अंतर प्रत्येक दिवशी 'Z' कि.मी. ने वाढविते. तर 3 आठवड्यानंतर राधाने किती कि.मी. सायकल चालविली?

5. खालील आकृतीमध्ये एका मार्गावर $W+2$ ही पदावली $4W+20$ कशी होते ते पहा. उर्वरीत मार्गावरील गाळलेल्या रिकाम्या जागा भरा अंडाकृतीमध्ये पदावली आहेत आणि चौकटीमध्ये क्रिया आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



6. एक स्थानिक आगगाडी याहापूर ते वाहापूर दरम्यान वाटेत समान अंतरावर तीन स्थानकावर थांबते. एका स्थानकापासून दुसऱ्या स्थानकापर्यंत प्रवास करण्यासाठी मिनिटामध्ये लागणारा वेळ समान आहे आणि तो 't' ने दर्शविला जातो. आगगाडी तिन्ही स्थानकावर प्रत्येकी 2 मिनिटे थांबते.

   a) जर t= 4 असेल तर याहापूर ते वाहापूर प्रवासासाठी लागलेला वेळ किती आहे?

   b) याहापूर ते वाहापूर प्रवासासाठी लागलेल्या वेळेची बैजिक पदावली कोणती आहे? (सूचना : स्थितीचे दृश्यीकरण करणारी एक कच्ची आकृती काढा.)

7. खालील पदावलीना सरळरूप द्या.

   a) $3a + 9b – 6 + 8a – 4b – 7a + 16$
   b) $3 (3a – 3b) – 8a – 4b – 16$
   c) $2 (2x – 3) + 8x + 12$
   d) $8x – (2x – 3) + 12$
   e) $8h – (5 + 7h) + 9$
   f) $23 + 4(6m – 3n) – 8n – 3m – 18$

8. खाली दिलेल्या पदावलींची बेरीज करा.

   a) $4d – 7c + 9$ आणि $8c – 11 + 9d$
   b) $– 6f + 19 – 8s$ आणि $– 23 + 13f + 12s$
   c) $8d – 14c + 9$ आणि $16c – (11 + 9d)$
   d) $6f – 20 + 8s$ आणि $23 – 13f – 12s$
   e) $13m – 12n$ आणि $12n – 13m$
   f) $– 26m + 24n$ आणि $26m – 24n$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

9. खाली दिलेल्या पदावलींची वजाबाकी करा.
   a) $6a + 9b - 18$ मधून $9a - 6b + 14$
   b) $7y - 10 + 3x$ मधून $-15x + 13 - 9y$
   c) $11 - 10g + 3h$ मधून $17g + 9 - 7h$
   d) $6a - (9b + 18)$ मधून $9a - 6b + 14$
   e) $-3y + 8 - 3x$ मधून $10x + 2 + 10y$
   f) $7h - 8g + 20$ मधून $8g + 4h - 10$

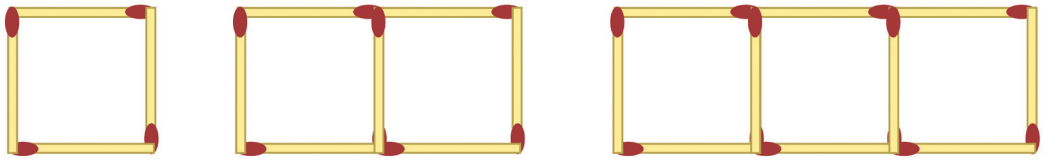
10. खालील बैजिक पदावलींशी संबंधित स्थितीचे वर्णन करा.
   a) $8x + 3y$
   b) $15x - 2x$

11. एका सरळ दोरीची कल्पना करा. जर ती दोरी चित्रात दर्शविल्याप्रमाणे एकदा कापली तर आम्हाला 2 तुकडे मिळतात. जर दोरीची एकदा घडी घालून चित्रात दर्शविल्याप्रमाणे कापल्यास आम्हाला 3 तुकडे मिळतात.
   नमुन्याचे निरीक्षण करा आणि जर दोरीच्या 10 वेळा घड्या घालून कापल्यास मिळणाऱ्या तुकड्यांची संख्या काढा. जेव्हा दोरीच्या r वेळा घड्या घालून कापल्यास मिळणाऱ्या तुकड्यांच्या संख्येसाठीची पदावली काय आहे?

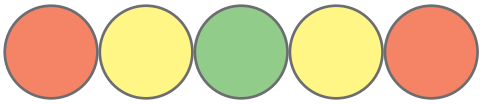


12. खालील माचिसच्या काड्यांच्या नमुन्याकडे पहा. निरीक्षण करा आणि नमुना ओळखा. असे 10 चौरस बनविण्यासाठी आवश्यक (लागणाऱ्या) असणाऱ्या माचिसच्या काड्यांची संख्या किती आहे? w चौरस बनविण्यासाठी माचिसच्या किती काड्या लागतील ?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

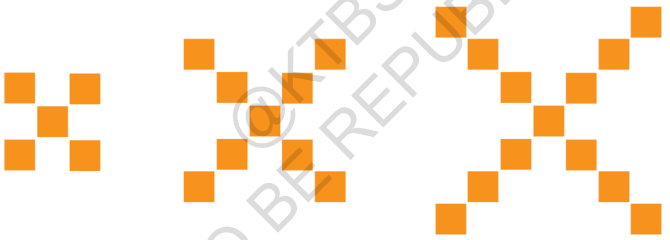


13. रहदारी इशाऱ्यामधील रंग कसे बदलतात हे तुम्ही पाहिले आहे का ? रंग बदलाचा क्रम खाली दर्शविलेला आहे. 90, 190 आणि 343 या स्थानावरील रंग काढा. प्रत्येक रंगाच्या स्थानाचे वर्णन करण्यासाठी पदावली लिहा.



.....

14. खालील नमुन्याचे निरीक्षण करा. पायरी 4, पायरी 10, पायरी 50 मध्ये किती चौरस आहेत? एक सामान्य सूत्र लिहा. जर आम्हाला सर्व चौरसांच्या शिरोबिंदूची संख्या मोजायची असेल तर सूत्र कसे बदलेल?



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

15. या अंत्य नसलेल्या 4-स्तंभाच्या चौकटीदार चौकटीमध्ये संख्या या एका विशिष्ट क्रमाने लिहीलेल्या आहेत.

1	2	3	4
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

a) दिलेल्या स्तंभातील सर्व संख्या निर्माण करण्यासाठी पदावली लिहा. (1.2,3,4)

b) खालील संख्या कोणत्या पंक्ती आणि स्तंभात दिसतात.
i) 124 ii) 147 iii) 201

c) कोणती संख्या पंक्ती 'r' आणि 'c' स्तंभमध्ये दिसते?

d) 3च्या पटीतील स्थानांचे निरीक्षण करा. तुम्हाला त्यामध्ये कोणताही नमुना दिसतो का?

तुम्हाला दिसणाऱ्या इतर नमुन्यांची यादी करा.

गणिती बोल

सारांश

- आदर्श नमुने आणि राशीमधील गणितीय संबंध आणि भाकित करण्यासाठी सूत्रातील बैजिक पदावल्या वापरल्या जातात.
- बैजिक पदावल्या केवळ संख्याच नाहीत तर मूळाक्षर – संख्या देखील वापरतात. अंकगणितीय राशीमध्ये फेरफार करण्याचे नियम बैजिक पदावलींना सुध्दा लागू होतात. हे नियम बैजिक पदावलींना त्याच्या साध्या रूपात आणण्यासाठी वापरले जाऊ शकतात.
- बैजिक पदावलींचे सामान्य भाषेत वर्णन करता येते आणि उलटही शक्य आहे. बीजगणित वापरून सहजपणे लिहीता येणारे नमुने किंवा संबंध सामान्य भाषेत बऱ्याचदा लांब आणि गुंतागुंतीचे असू शकतात. हा बीजगणिताचा एक फायदाच आहे.

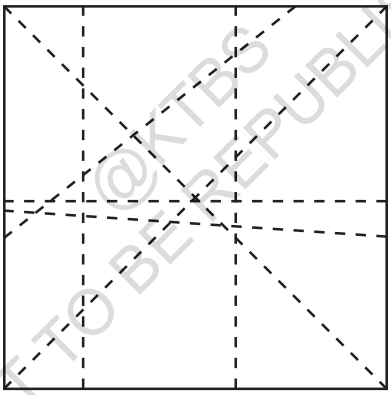
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5 समांतर आणि छेदक रेषा
(PARALLEL AND INTERSECTING LINES)

G6R2E8

5.1 रेषेच्या पलीकडे (Beyond the line)

चौरसाकृती कागदाचा एक तुकडा घ्या आणि त्याची वेगवेगळ्या प्रकारे घडय़ा घाला. आता घडय़ामुळे पडलेल्या दुमडीवर पेन्सिल आणि मोजपट्टीचा वापर करून रेषा काढा. कोणतीही रेषेची जोडी घ्या आणि त्यांचा एकमेकांशी असलेला संबंध पहा. त्या छेदतात का? जर त्या कागदामध्ये छेदत नसतील तर त्या कागदाच्या पलीकडे वाढविल्या तर त्या मिळतील/ छेदतील असे तुम्हाला वाटते का?



आकृती 5.1

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

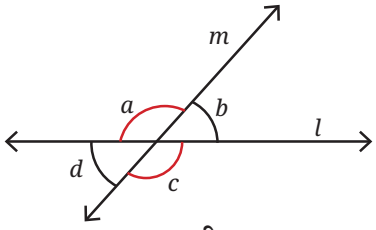
या प्रकरणामध्ये आम्ही सपाट पृष्ठभागावरील रेषामधील संबंधाचा शोध घेऊ. टेबलाचा पृष्ठभाग, तुमचा कागदाचा तुकडा, काळा फलक आणि वार्ता फलक ही सर्व सपाट पृष्ठभागाची उदाहरणे आहेत.

एकमेकीना छेदणाऱ्या रेषांच्या जोडीचे निरीक्षण करू. तुम्हाला असे दिसून येईल की त्या एका बिंदूत मिळतात/छेदतात. जेव्हा एक रेषांची जोडी सपाट पृष्ठभागावर एका बिंदूत मिळत असेल तर त्या रेषांना एकमेकींच्या छेदक रेषा म्हणतात.

जेव्हा दोन रेषा छेदतात तेव्हा काय होते याचे निरीक्षण करूया.

? त्या किती कोन तयार करतात?

आकृती 5.2 मध्ये जेथे रेषा l ही रेषा m ला छेदल्याने चार कोन तयार झाल्याचे आम्हाला दिसून येते.



आकृती 5.2

? दोन सरळरेषा एका पेक्षा अधिक बिंदूत छेदू शकतील काय?

कृती 1

दोन सरळरेषा एका सपाट कागदाच्या तुकड्यावर अशा काढा की त्या एकमेकीना छेदतील. कोन मापकाचा उपयोग करून तयार झालेले चार कोन मोजा. अशा चार छेदणाऱ्या रेषांच्या जोड्या काढा आणि छेदन बिंदू भोवती तयार झालेले कोन मोजा.

? या कोनामध्ये तुम्हाला कोणती रचना आढळून येते?

? आकृती 5.2 मध्ये जर $\angle a$ हा 120^0 आहे, तर $\angle b$, $\angle c$ आणि $\angle d$ ची मापे कोन न काढता आणि न मोजता शोधून काढू शकाल काय?

आम्हाला माहित आहे की, $\angle a$ आणि $\angle b$ चे माप एकत्रितपणे 180^0 आहे, कारण जेव्हा त्यांची बेरीज केली जाते तेव्हा तो, 180^0 माप असणारा सरळकोन तयार होतो. म्हणून जर $\angle a$ हा 120^0 चा असेल तर $\angle b$ हा 60^0 चा होईल.

त्याचप्रमाणे $\angle b$ आणि $\angle c$ ची मापे एकत्रितपणे 180^0 आहेत. म्हणून जर $\angle b$ हा 60^0 आहे, तर $\angle c$ चे माप 120^0 आहे. तसेच $\angle c$ आणि $\angle d$ ची मापे एकत्रितपणे 180^0 आहेत म्हणून $\angle c$ हा 120^0 आहे, तर $\angle d$ हा 60^0 चा असला पाहिजेत.

म्हणून आकृती 5.2 मध्ये $\angle a$ आणि $\angle c$ ची मापे 120^0 आणि $\angle b$ आणि $\angle d$ चे माप 60^0 आहे. जेव्हा दोन रेषा एकमेकीना छेदतात आणि चार कोन तयार होतात जे आकृती 5.2 मध्ये a, b, c आणि d अशी नांवे देऊन दर्शविलेले आहेत, तर $\angle a$ आणि $\angle c$ हे समान आहेत आणि $\angle b$ व $\angle d$ हे समान आहेत!

? कोणत्याही छेदणाऱ्या रेषांच्या जोडीसाठी हे नेहमी सत्य आहे?

$\angle a$ च्या वेगवेगळ्या मापासाठी हे तपासून पहा. या मापांचा उपयोग करून $\angle a$ च्या कोणत्याही मापासाठी हा गुणधर्म लागू पडतो का याचे कारण तुम्ही सांगू शकाल का?

$\angle a$ च्या किंमती गृहीत न धरता आकृती 5.2 साठी आमच्या तर्काचे सामान्यीकरण आम्ही करू शकतो.

©KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

सरळ कोनाचे माप 180^0 असल्याने, आपल्याकडे $\angle a+\angle b = \angle a+\angle d$ असणे आवश्यक आहे. म्हणून $\angle b$ आणि $\angle d$ हे नेहमी समान आहेत. त्याचप्रमाणे $\angle b+\angle a = \angle b+\angle c=180^0$ म्हणून $\angle a$ आणि $\angle c$ देखील समान असले पाहिजेत.

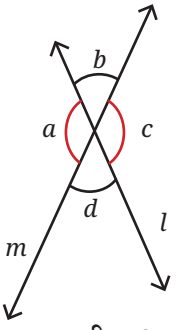
दोन रेषा एकमेकीना छेदत असतील तर $\angle a$ आणि $\angle b$ प्रमाणे तयार झालेल्या संलग्न कोनांना रेषीय जोडी असे म्हणतात. रेषीय जोडीची बेरीज नेहमी 180^0 असते.

दोन रेषा एकमेकीना छेदत असतील तर $\angle b$ आणि $\angle d$ प्रमाणे तयार झालेल्या विरुद्ध कोनांना शिरोविरुद्ध कोन असे म्हणतात. शिरोविरुद्ध कोन हे नेहमी एकमेकांशी समान असतात.

? हे शोधा पाहू. (Figure it out)

आकृती 5.3 मध्ये तुम्ही निरीक्षण केलेल्या सर्व रेषीय जोड्या आणि शिरोविरूद्ध कोनांची यादी करा.

रेषीय जोड्या	$\angle a$ आणि $\angle b$, ...
शिरोविरुद्ध कोनांच्या जोड्या	$\angle b$ आणि $\angle d$, ...



आकृती 5.3

मापने आणि भूमिती (Measurements and Geometry)

जेव्हा तुम्ही रेषीय जोड्यांचे मापन करता तेव्हा कांही वेळेला त्यांची बेरीज 180^0 येत नसल्याचे तुमच्या लक्षात आले असेल किंवा कांही वेळेला तुम्ही जेव्हा शिरोविरुद्ध कोनांचे मापन करता तेव्हा कांही वेळेला ते असमान असल्याचे तुमच्या लक्षात आले असेल. याची कारणे कोणती आहेत?
वेगवेगळी कारणे असू शकतात?

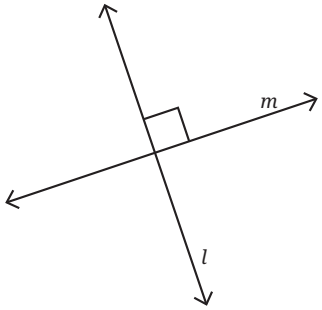
- या घटनेमध्ये कोनमापक या साधनाच्या अयोग्य मोजमापाच्या कारणामुळे मापनामध्ये त्रुटी येतात.
- काढलेल्या रेषांच्या जाडीमध्ये फरक/बदल असतो. भूमितीमध्ये 'आदर्श' रेषेला कोणतीही जाडी नसते! परंतु जाडी शिवाय रेषा काढणे हे आपणासाठी अशक्य आहे.

भूमितीमध्ये आम्ही आपल्या सभोवताली दिसणाऱ्या रेषा आणि इत्तर आकारांच्या आदर्श आकृत्या तयार करतो आणि त्यांच्यामधील संबंधाचे विश्लेषण करतो. उदाहरणार्थ, एका सरळ रेषेने तयार झालेला कोन 180^0 चा असतो हे आम्हाला माहित आहे. म्हणून जर या कोनाला दुसऱ्या रेषेने विभागले तर दोन्ही भागांची बेरीज 180^0 असते. आम्ही साध्या तर्काने हे सांगू शकतो आणि ते मोजमापात नाहीत. जेव्हा आम्ही मोजतो तेव्हा ते वर नमूद केलेल्या कारणामुळे अचूक असू शकत नाही. तरीही मोजमापे ही आपण भाकित करतो जी त्यांच्या अगदी जवळपास असतात. म्हणून भूमिती ही भौतिकशास्त्र, कला, अभियांत्रिकी आणि वास्तु कला यासारख्या शाखामध्ये व्यापकपणे वापरली जाते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.2 लंब रेषा (Vertical Lines)

? सर्व चार कोन समान असणाऱ्या छेदणाऱ्या रेषेंची एक जोडी तुम्ही काढू शकाल का? प्रत्येक कोनाचे माप किती असेल ते तुम्ही काढू शकता का?



आकृती 5.4

जर दोन रेषा एकमेकीना छेदतात आणि चारही कोन समान असतील तर प्रत्येक कोन काटकोन (90^0) असला पाहिजेत.

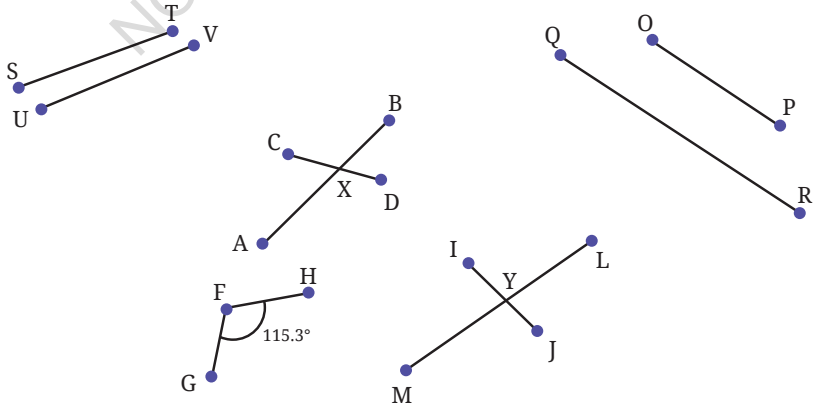
लंब रेषा म्हणजे एकमेकांना काटकोनात (90^0) छेदणाऱ्या रेषेंची जोडी होय. आम्ही असे सांगू शकतो की, आकृती 5.4 मधील l आणि m या रेषा एकमेकीना लंब आहेत.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

5.3 मध्य रेषा (Middle Lines)

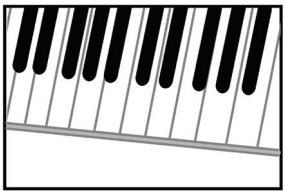
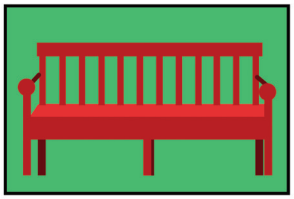
आकृती 5.5 पहा आणि प्रत्येक बाबतीत योग्य गणितीय शब्दांसह रेषाखंड एकमेकांना कसे मिळतात किंवा छेदतात याचे वर्णन करा. (बिंदू, अंत्यबिंदू, मिळणे, छेदणे) आणि प्रत्येक कोनाचे माप मोजा.

उदाहरणार्थ, रेषाखंड FG आणि FH हे अंत्यबिंदू F मध्ये 115.3^0 चा कोन करून छेदतात.



आकृती 5.5

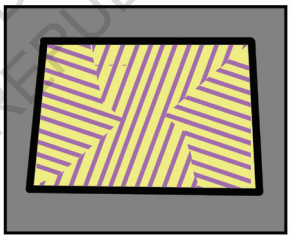
जर ST आणि UV हे रेषाखंड वाढविले तर एकत्र छेदतात का? जर OP आणि QR हे रेषाखंड वाढविले तर एकत्र छेदतात का? आपल्या आजूबाजूला दिसणाऱ्या रेषांची कांही उदाहरणे येथे आहेत.


वरील चित्रामधील रेषामध्ये काय साम्य आहे? त्या एकसारख्या दिसत नाहीत एकमेकांना छेदण्याची शक्यता नाही. अशा रेषांना समांतर रेषा असे म्हणतात.

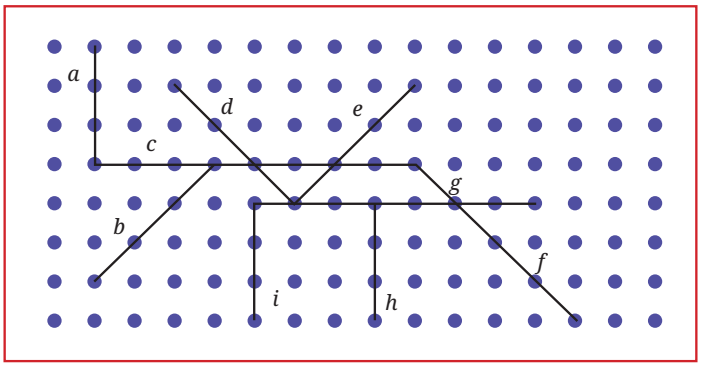
समांतर रेषा म्हणजे एकाच प्रतलावर असलेली रेषेंची जोडी होय आणि या रेषा दोन्ही बाजूनी कितीही वाढविल्या तरी त्या एकमेकीना छेदत नाहीत.

तुम्हाला तुमच्या वर्गात आढळणाऱ्या कांही समांतर रेषा लिहा.

समांतर रेषा या बहुतेक वेळा कलाकृती आणि छायांकीत कार्यात वापरल्या जातात.

? खालील आकृती 5.6 मध्ये कोणत्या रेषा समांतर दिसतात?



आकृती 5.6

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शिक्षकांना सूचना : रेषा ही एकाच सपाट प्रतलावर असणे महत्वाचे आहे. टेबलावर काढलेली रेषा आणि फळ्यावर काढलेली रेषा या एकमेकीना कधीही छेदत नाहीत परंतु त्यामुळे त्या समांतर रेषा होऊ शकत नाहीत.

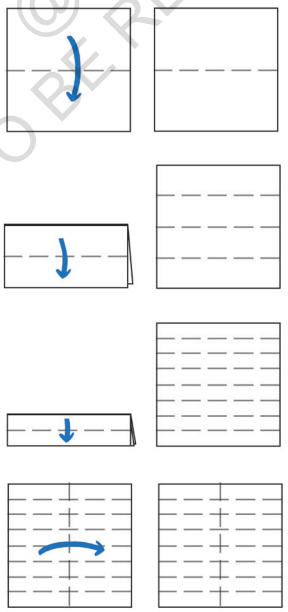
5.4. कागदाच्या घडीतील समांतर आणि लंब रेषा

? कृती 2:

एक चौरस आकाराचा सपाट कागद घ्या. (या कृतीसाठी एक वर्तमानपत्र वापरा.)

- कागदाच्या संमुख कडांचे तुम्ही कसे वर्णन कराल? ते एकमेकांना _____ आहेत.
- कागदाच्या संलग्न कडांचे तुम्ही कसे वर्णन कराल? संलग्न बाजू एकमेकांना _____ आहेत. त्या एका बिंदूत छेदतात, त्या काटकोन तयार करतात.
- कागदाची क्षितीज समांतर (आडवी) अर्धी घडी करा. एक नवीन रेषा तयार होते. (आकृती 5.7 पहा.)
- आता तुम्हाला किती समांतर रेषा दिसतात? नवीन रेषाखंड हा लंब बाजूला कसा संबंधित आहे?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



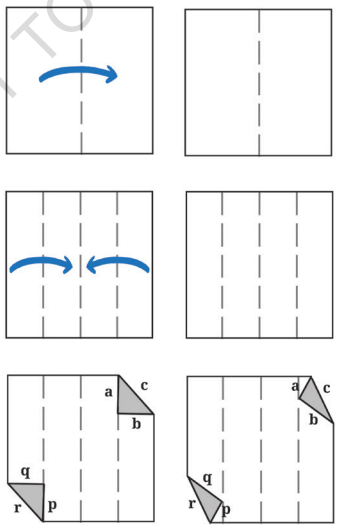
आकृती 5.7

- घड्या घातलेल्या कागदामध्ये आणखी एक आडवी घडी घाला. आता तुम्हाला किती समांतर रेषा दिसून येतात?
- जर तुम्ही ते पुन्हा एकदा केले तर काय होईल? तुम्हाला किती समांतर रेषा मिळतील?
- तुम्ही दुसरी आडवी घडी घातली तर तो नमुना आणखी वाढतो का ते तपासून पहा.
- चौरसाकृती कागदामध्ये एक ऊभी घडी घाला. ही नवीन लंब रेषा ही मागील आडव्या रेषेला _____ आहे.
- कागदाची एका कर्णामधून घडी घाला. कर्णाच्या रेषेला समांतर अशी तयार झालेली घडी तुम्ही काढू शकाल का?

येथे तुमच्यासाठी दुसरी कृती आहे तिचा प्रयत्न करा.

- एक चौरस आकाराचा कागद घ्या, त्याला मधून घडी घाला आणि घडी सोडा.
- मध्यवर्ती रेषेकडे कडांची घडी करा आणि घडी उलगडा.
- त्रिकोण तयार करण्यासाठी वरील उजव्या आणि खालील डाव्या कोपऱ्याच्या दुमडलेल्या रेषेवर घडी घाला. आकृती 5.8 पहा.
- त्रिकोणांनी दुमडलेल्या रेषा ओलांडू नये.
- a, b आणि c हे अनुक्रमे p, q आणि r ला समांतर आहेत का? का किंवा का नाही?

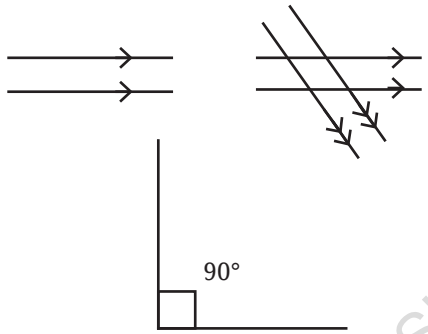
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



आकृती 5.8

संकेत (Codes)

गणितामध्ये रेषांचा संच समांतर आहे हे दर्शविण्यासाठी आम्ही बाणाच्या खुणांचा वापर करतो. जर एकापेक्षा जास्त समांतर रेषांचे संच असतील (आकृती 5.9 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे) तर दुसरा संच दोन बाणाच्या खुणांनी दर्शविला जातो आणि असेच पुढे चालू राहते. लंब रेषा या त्यांच्यामध्ये एका चौरस कोनाने चिन्हांकीत केल्या जातात.

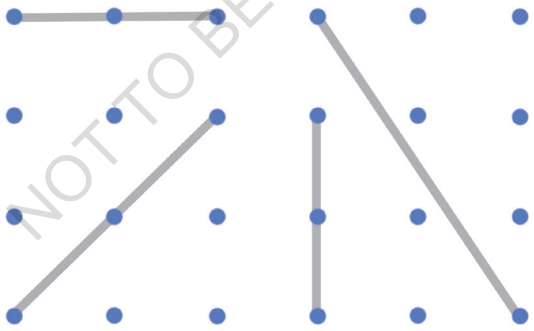


आकृती 5.9

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

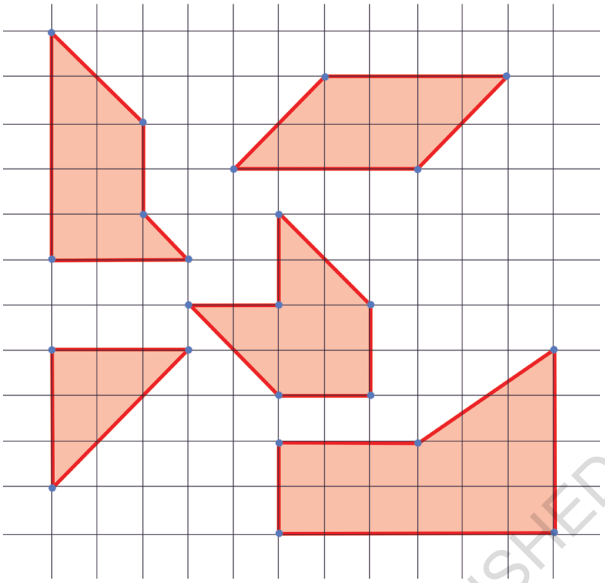
? हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. आकृती 5.10 मधील बिंदू कागदावर दिलेल्या रेषांना लंब असतील अशा कांही रेषा काढा.



आकृती 5.10

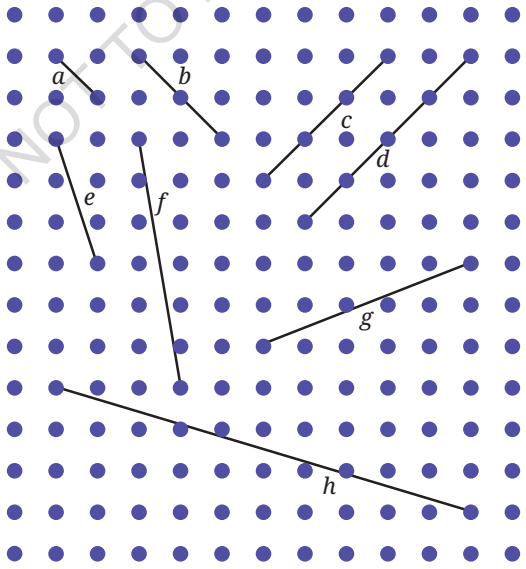
2. आकृती 5.11 मध्ये वर दिलेल्या संकेताचा उपयोग करून समांतर रेषा चिन्हांकीत करा. (एकेरी बाण, दुहेरी बाण इत्यादी) लंब रेषामधील कोन हा एक चौरस कोनाने चिन्हांकीत करा.
   a) लंब रेषांचे स्थान तुम्ही कसे केले?
   b) समांतर रेषांचे स्थान तुम्ही कसे केले?



आकृती 5.11

3. बिंदू कागदामध्ये खालील समांतर रेषांचे वेगवेगळे संच काढा. रेखाखंड वेगवेगळ्या लांबीचे असू शकतात परंतु त्यांना अंत्यबिंदू म्हणून बिंदू असावेत.

4. तुमच्या आकलनाचा उपयोग करून समांतर रेषा कशा दिसतात, या बिंदू कागदावर रेषाखंडाला समांतर रेषा काढण्याचा प्रयत्न करा.



आकृती 5.12

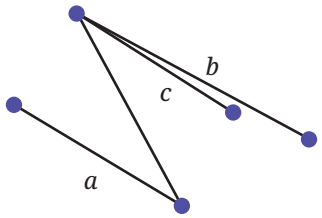
© KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

a) त्यापैकी कांही रेखाटणे हे तुम्हाला आव्हानात्मक वाटले का?

b) कोणते?

c) तुम्ही ते कसे केले?

5) आकृती 5.13 मध्ये कोणती रेषा, रेषा a, रेषा b किंवा रेषा c ला समांतर आहे? हे तुम्ही कसे निर्धारीत कराल?



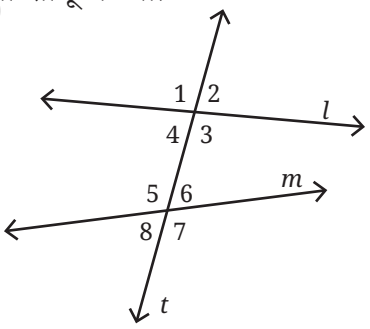
आकृती 5.13

शिक्षकासाठी सूचना : उभ्या आणि आडव्या रेषा आणि 45^0 वर झुकलेल्या रेषा (आयताकार बिंदू कागदावर) काढणे सोपे आहे. परंतु वेगवेगळ्या दिशा असलेल्या रेषेंच्या समांतर रेषा काढणे थोडे कठीण आहे. यासाठी विद्यार्थ्यांनी त्यांच्या अंतर्ज्ञानाचा वापर करावा.

मागील स्वाध्यायामध्ये आपण पाहिले आहे की, कधी कधी दोन रेषा समांतर आहेत की नाहीत हे निश्चित करणे कठीण असते. हे निश्चित करण्यासाठी आपण छेदिकेची कल्पना वापरतो.

5.5 छेदिका (Secant)

जेव्हा दोन रेषा वेगवेगळ्या प्रकारे छेदल्यास काय होते हे आम्ही पाहिले आहे. जेव्हा दोन वेगवेगळ्या रेषांना एक रेषा छेदते तेव्हा काय होते याचा शोधू घेऊया.



आकृती 5.14

आकृती 5.14 मध्ये रेषा l आणि m ला रेषा 't' छेदते. 't' ला **छेदिका** असे म्हणतात. लक्षात घ्या की जेव्हा एक रेषा ही दोन रेषांना छेदते तेव्हा 8 कोन तयार होतात.

© KSEB NOT TO BE REPUBLISHED

? आठही कोनांचे माप वेगवेगळे असणे शक्य आहे का? का? का नाही?

? 6,5,4,3 आणि 2 या पाच वेगवेगळ्या कोनाबद्दल काय सांगू शकाल?

आकृती 5.14 मध्ये $\angle 1$ आणि $\angle 3$ हे शिरोविरुध्द कोन. आहेत म्हणून ते समान आहेत. शिरोविरुद्ध कोनांच्या इतर जोड्या तेथे आहेत काय? आम्हाला असे दिसून येते की तेथे एकूण शिरोविरुद्ध कोनांच्या चार जोड्या आहेत आणि प्रत्येक जोडीतील कोन एकमेकांशी समान आहेत.

अशाप्रकारे जेव्हा दोन रेषांना एक छेदिका छेदते तेव्हा ती जास्तीत जास्त चार वेगवेगळ्या मापासह 8 कोन तयार करते.

5.6 संगत कोन (Corresponding Angles)

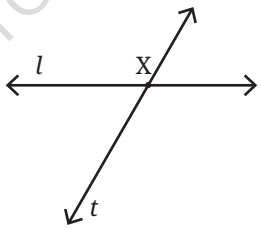
आकृती 5.14 मध्ये आपल्याला असे दिसून येते की छेदिका t ही एक रेषा m आणि दुसरी रेषा n येथे दोन कोनांचे संच बनविते. पहिल्या संचातील कोन हे दुसऱ्या संचातील कोनांशी त्यांच्या स्थानानुसार जुळतात. $\angle 1$ आणि $\angle 5$ या कोनांना संगत कोन असे म्हणतात. त्याचप्रमाणे $\angle 2$ आणि $\angle 6$, $\angle 3$,$\angle 7$, $\angle 4$ आणि $\angle 8$ हे छेदिका t तसेच ही रेषा l आणि m ला छेदून तयार झालेले संगत कोन आहेत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? कृती 3

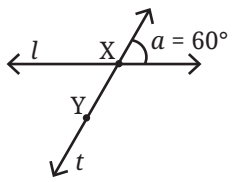
रेषांची एक जोडी आणि एक छेदिका अशी काढा की ज्यामुळे दोन वेगवेगळे कोन तयार होतील.

पायरी 1: बिंदू × मध्ये छेदणारी एक रेषा l व एक छेदिका t काढा.



आकृती 5.15

पायरी 2: रेषा l आणि t ने तयार झालेला $\angle a$ मोजा. (समजा तो 60^0 चा आहे.)



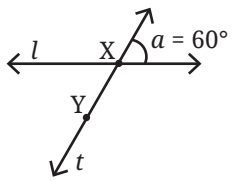
आकृती 5.16

आता किती वेगवेगळे कोन तयार झाले आहेत?

जर एक कोन 60^0 चा असेल तर रेषीय जोडीचा दुसरा कोन 120^0 असला पाहिजेत. म्हणून आपल्याकडे अगोदरच 2 वेगवेगळे कोन आहेत.

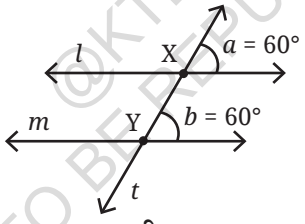
म्हणून जेव्हा आम्ही छेदिका t ला छेदणारी दुसरी रेषा काढतो तेव्हा आम्हाला फक्त 60^0 आणि 120^0 हे दोन कोन बनवायचे आहेत.

पायरी 3 : रेषा t वर y या बिंदूची खुण करा.



आकृती 5.17

पायरी 4 : बिंदू y मधून रेषा t ला 60^0 चा कोन तयार करणारी एक रेषा m काढा. $\angle a$ ची नक्कल रेखीव कागदाने किंवा तुम्ही कोनमापकाचा वापर कोन मोजण्यासाठी करून हे काढू शकता.



आकृती 5.18

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED

l आणि m रेषेविषयी तुम्ही काय निरीक्षण केले आहे? त्या रेषा एकमेकांना समांतर आहेत अशा दिसतात का? होय, त्या एकमेकीना समांतर असल्याचे दिसून येते.

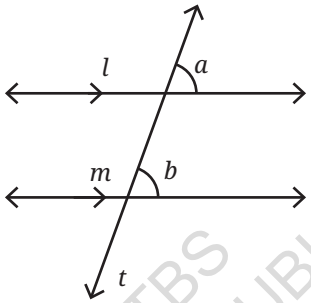
रेषा l आणि m वर t या छेदिकेने तयार झालेले $\angle a$ आणि $\angle b$ हे संगत कोन आहेत. हे संगत कोन एकमेकांशी समान आहेत.

जेव्हा एका रेषेंच्या जोडीला एका छेदिकेने छेदल्याने तयार झालेले संगत कोन एकमेकांशी समान असतील तर ती रेषांची जोडी ही एकमेकांना समांतर असते.

समजा आपल्याकडे दोन समांतर रेषांना एक छेदिका छेदते आहे. तर संगत कोनाबद्दल काय सांगू शकाल?

कृती : 4

आकृती 5.19 मध्ये l आणि m या समांतर रेषांची एक जोडी आहे. (त्या समांतर आहेत हे दर्शविण्यासाठी आकृतीमध्ये कोणते संकेत वापरलेले आहेत?) दोन रेषांना छेदणारी t रेषा ही एक छेदिका आहे. $\angle a$ आणि $\angle b$ हे संगत कोन आहेत. एक रेखीव कागद घ्या आणि त्यावर $\angle a$ रेखाटा. आता हा रेखीव कागद $\angle b$ वर ठेवा आणि हे कोन अचूकपणे जुळतात का ते पहा. तुम्हाला असे दिसून येईल की हे कोन जुळतात. कोनमापकाचा वापर करून आकृतीतील इतर संगत कोन तपासा. सर्व संगत कोन एकमेकांशी समान आहेत काय?



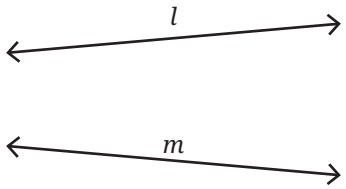
आकृती 5.19

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

एका समांतर रेषेंच्या जोडीला व एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारे संगत कोन हे नेहमी एकमेकांशी समान असतात.

कृती : 5

आकृती 5.20 मध्ये l आणि m या रेषांना एक छेदिका t अशी काढा की ज्यामुळे संगत कोनांची एक जोडी समान होईल. कोनमापकाने तुम्ही कोन मोजू शकता.



आकृती 5.20

संगत कोन समान असणारी अशी एक छेदिका तुम्हाला काढणे कठीण जाते का?

जेव्हा एका रेषांची एक जोडी एकमेकांना समांतर नसते तेव्हा एका छेदिकेने तयार झालेले संगत कोन कधीही एकमेकांशी समान नसतात.

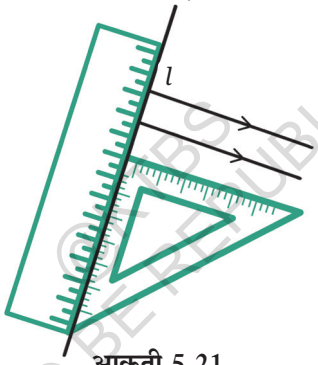
5.7 समांतर रेषा काढणे :

मोजपट्टी आणि त्रिकोणी गुण्याच्या संचाचा उपयोग करून समांतर रेषांची एक जोडी तुम्ही काढू शकाल का?

आकृती 5.21 मध्ये तुम्ही ते कसे करू शकता ते दर्शविते.

मोजपट्टीचा उपयोग करून एक रेषा l काढा. त्रिकोणी गुण्या सरकवत l रेषेला दोन लंब रेषा काढू शकता.

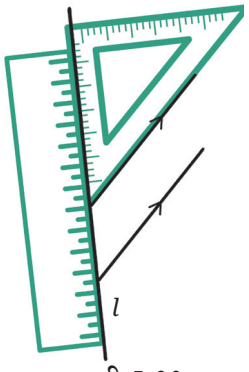
या दोन रेषा एकमेकीना समांतर आहेत का? त्या एकमेकीना समांतर आहेत याची खात्री तुम्ही कशी कराल? या रेषा आणि रेषा l मध्ये कोणते कोन तयार होतात?



आकृती 5.21

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आम्ही काटकोनी गुण्या वापरल्याने कोन 90^0 चा मोजला जातो. रेषेंचे स्थान वेगवेगळे आहे परंतु ते l शी समान कोन बनवितात. जर रेषा l ही दोन नवीन रेषांची एक छेदिका असेल तर संगत कोनांचे माप 90^0 असते.



आकृती 5.22

आम्हाला माहित आहे की, हे संगत कोन आहेत आणि ते समान आहेत, आपण खात्री बाळगू शकतो की रेषा समांतर आहेत.

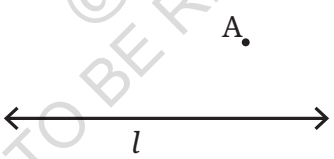
आकृती 5.22 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे त्रिकोणी गुण्याच्या मोठ्या बाजूचा उपयोग करून दोन अधिक समांतर रेषा काढा.

या दोन रेषा समांतर आहेत हे तुम्ही कसे ओळखाल? संगत कोन समान असतील तर तुम्ही. तपासू शकता?

शिक्षकांसाठी सूचना : विद्यार्थ्यांना रेखीव कागदाच्या पध्दतीचा वापर आणि कोन मोजण्यासाठी कोनमापकाचा वापर करून संगत कोनांची समानता तपासण्यास प्रोत्साहित केले पाहिजे.
संगत कोन आणि समांतर रेषामधील संबंध स्पष्ट करण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या रेषेकडे लक्ष द्या. रेषांची जोडी एकमेकांना समांतर राहण्यासाठी संगत कोनांची समानता आवश्यक आणि पुरेशी आहे.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

A बिंदूतून जाणारी l रेषेला समांतर अशी रेषा तुम्ही काढू शकाल का? तुमच्या कंपास पेटीतील साहित्याने तुम्ही ते कसे काढू शकाल? तुमच्या पध्दतीचे वर्णन करा.



आकृती 5.23

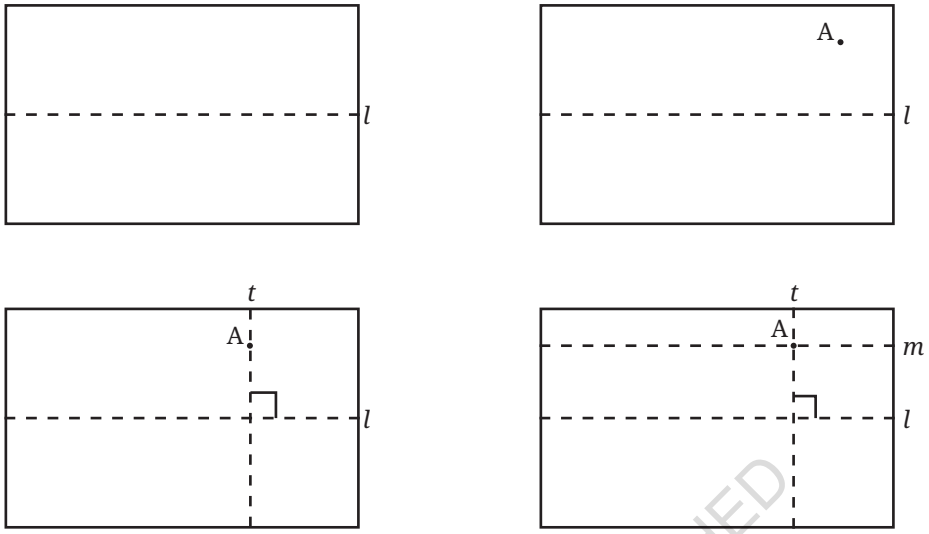
@KSTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कागदाच्या घडीद्वारे समांतर रेषा बनविणे

कागदाच्या घडीसह समांतर रेषा बनविण्याचा आता प्रयत्न करूया. रेषा l साठी (दिलेल्या दुमडी प्रमाणे) आपण l ला समांतर रेषा अशी बनवू शकतो की ती बिंदू A मधून जाईल?

l ला लंब रेषा मिळविण्यासाठी कागदाच्या तुकड्याची घडी कशी करायची हे आपल्याला माहित आहे. आता A बिंदूमधून जाणारी l ला एक लंब अशी घडी घालण्याचा प्रयत्न करा. या नव्या दुमडीला t असे म्हणू शकतो.

आता पुन्हा A मधून जाणारी t ला एक लंब रेषेची घडी घाला. याला रेषा m असे म्हणू शकतो. रेषा l आणि m या एकमेकीना समांतर आहेत.

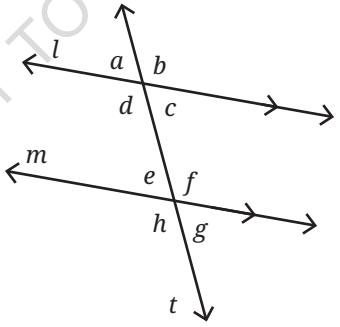


आकृती 5.24

? l आणि m या रेषा एकमेकीना समांतर का आहेत?

5.8 व्युत्क्रम कोन (Alternate Angles)

आकृती 5.25 मध्ये $\angle d$ ला $\angle f$ चा व्युत्क्रम कोन आणि $\angle c$ ला $\angle e$ चा व्युत्क्रम कोन असे म्हणतात.



आकृती 5.25

दिलेल्या एका कोनाचा व्युत्क्रम कोन उदाहरणार्थ $\angle f$ चा पहिल्यांदा संगत कोन $\angle b$ काढू आणि नंतर $\angle b$ चा शिरोविरुद्ध कोन $\angle d$ हा तुम्ही काढू शकता.

@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

कृती : 6

आकृती 5.25 मध्ये, जर $\angle f$ हा 120^0 चा असेल तर त्याचा व्युत्क्रम कोन $\angle d$ चे माप किती आहे?

जर आम्हाला $\angle b$ माहित असेल तर आम्ही $\angle d$ चे माप काढू शकतो कारण ते शिरोविरूद्ध कोन आहेत. लक्षात ठेवा की शिरोविरुद्ध कोन समान असतात.

$\angle b$ चे माप किती आहे? ते 120^0 आहे कारण तो $\angle f$ चा संगत कोन आहे.

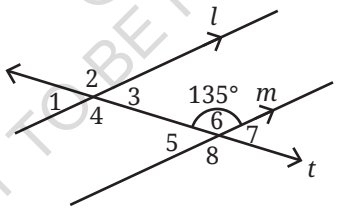
म्हणून $\angle d$ चे माप सुध्दा 120^0 आहे. अर्थात $\angle f = \angle b$, $\angle f$ चे माप कांहीही असले तरी, का?

कारण $\angle b$ हा $\angle f$ चा संगत कोन आहे. त्याचप्रमाणे $\angle b = \angle d$, $\angle b$ चे माप कांहीही असले तरी, का?

कारण $\angle d$ हा $\angle b$ चा शिरोविरुध्द कोन आहे. म्हणून नेहमीच असे असले पाहिजेत की $\angle f = \angle d$ कोणतेही मापन न करता संगत कोनाबद्दलच्या आपल्या आकलनाचा उपयोग करून आम्ही हे सिद्ध केले आहे की **व्युत्क्रम कोन हे नेहमी समान असतात.**

समांतर रेषांच्या एका जोडीला एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारे व्युत्क्रम कोन नेहमी एकमेकांशी समान असतात.

उदाहरण 1: आकृती 5.26 मध्ये l आणि m या समांतर रेषांना t छेदिकेने छेदल्या आहेत. जर $\angle 6$ हा 135^0 चा असेल तर इतर कोनांची मापे किती आहेत?



आकृती 5.26

उकल : $\angle 6$ हा 135^0 आहे, म्हणून $\angle 2$ हा सुध्दा 135^0 आहे. कारण तो $\angle 6$ चा संगत कोन आहे आणि l आणि m या रेषा समांतर आहेत.

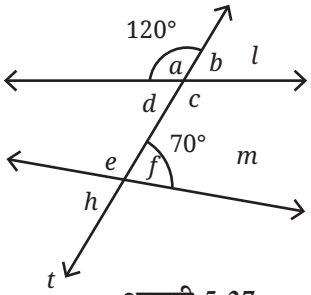
$\angle 8$ हा 135^0 आहे कारण तो $\angle 6$ चा शिरोविरुद्ध कोन आहे. $\angle 4$ हा 135^0 आहे कारण तो $\angle 8$ चा संगत कोन आहे.

$\angle 2$ हा 135^0 आहे कारण तो $\angle 4$ चा शिरोविरुद्ध कोन आहे. म्हणून $\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 6$ आणि $\angle 8$ हे सर्व 135^0 चे आहेत.

$\angle 5$ आणि $\angle 6$ ही एक रेषीय समीकरणाची जोडी आहे. त्यांची एकत्रित बेरीज 180^0 आहे.
जर $\angle 6$ हा 135^0 चा आहे तर $\angle 5 = 180^0 - 135^0 = 45^0$ आहे. त्याचप्रमाणे $\angle 1$, $\angle 3$ आणि $\angle 7$ ची मापे 45^0 असे आम्ही काढू शकतो.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 2 : आकृती 5.27 मध्ये l आणि m या रेषांना t ही छेदिका छेदत आहे. जर $\angle a$ हा 120^0 चा आणि $\angle f$ हा 70^0 चा आहे तर l आणि m या रेषा एकमेकांना समांतर आहेत का?

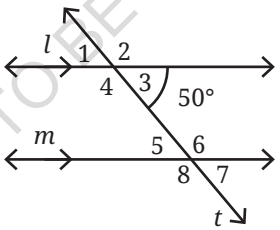


आकृती 5.27

उकल : $\angle a$ हा 120^0 आहे म्हणून $\angle b$ हा 60^0 चा होतो. कारण $\angle a$ आणि $\angle b$ मुळे एक रेषीय जोडी तयार होते. $\angle b$ हा $\angle f$ चा संगत कोन आहे. जर l आणि m समांतर रेषा असतील तर $\angle b$ हा $\angle f$ शी समान असला पाहिजे तथापि ते समान नाहीत.

छेदिका t ने तयार झालेले संगत कोन हे एकमेकांशी समान नाहीत म्हणून l आणि m या रेषा एकमेकीना समांतर नाहीत.

उदाहरण 3 : आकृती 5.28 मध्ये l आणि m या समांतर रेषांना t या छेदिकेने छेदले आहे. जर $\angle 3$ हा 50^0 चा आहे. तर $\angle 6$ चे माप किती आहे?



आकृती 5.28

उकल : $\angle 3$ हा 50^0 चा आहे म्हणून $\angle 2$ हा 130^0 चा होतो. कारण $\angle 2$ आणि $\angle 3$ हे एक रेषीय जोडी तयार करतात आणि रेषीय जोडीची बेरीज नेहमी 180^0 असते.

$\angle 2$ आणि $\angle 6$ हे संगत कोन आहेत आणि ते समान असणे आवश्यक आहे. म्हणून l आणि m या समांतर रेषा आहेत.

म्हणून $\angle 6$ हा 130^0 चा आहे.

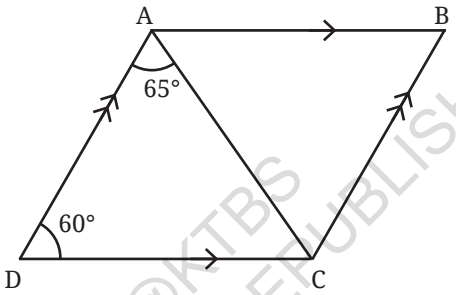
$\angle 3$ आणि $\angle 6$ यांना आंतरकोन असे म्हणतात.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

∠3 आणि ∠6 मध्ये कोणता संबंध आहे का? ∠3 च्या वेगवेगळ्या किंमती घेऊन तुम्ही संबंध काढण्याचा प्रयत्न करू शकता आणि ∠6 हा किती आहे ते पाहू शकता. एकदा तुम्हाला एखादा संबंध सापडला की त्याचे समर्थन करण्याचा प्रयत्न करा किंवा हे संबंध नेहमीच सत्य असतात हे सिध्द करा. तुम्हाला असे आढळून येईल की छेदिकेच्या एकाच बाजूस असलेल्या **आंतरकोनांची बेरीज ही नेहमी** 180^0 असते.

? **उदाहरण 4:** आकृती 5.29 मध्ये रेषाखंड AB हा CD ला समांतर आहे आणि AD हे BC ला समांतर आहे. ∠DAC हा 65^0 आणि ∠ADC हा 60^0 चा आहे. तर ∠CAB, ∠ABC आणि ∠BCD ची मापे किती आहेत?

उकल : AB आणि CD या समांतर रेषेंचे निरीक्षण करूया. AD ही या दोन रेषांची छेदिका आहे.



आकृती 5.29

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आपल्याला माहित आहे की समांतर रेषेंच्या एका जोडीवर एका छेदिकेमुळे तयार झालेल्या आंतरकोनांची बेरीज 180^0 असते म्हणून ∠ADC + ∠DAB = 180°

60° + ∠DAB = 180°

म्हणून ∠DAB = 120°

यापासून तुम्ही ∠CAB काढू शकाल का?

∠DAB = ∠DAC + ∠CAB

म्हणून 120° = 65° + ∠CAB

म्हणून ∠CAB = 55°

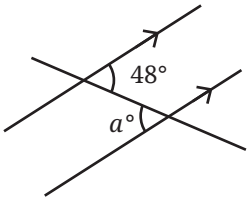
AD आणि BC या समांतर रेषांच्या रेषाखंडाचे निरीक्षण करूया. ते CD या एका छेदिकेने छेदले आहेत. म्हणून ∠ADC +∠BCD=180° कारण ते छेदिकेच्या एकाच बाजूस (अंगास) असणारे आंतरकोन आहेत. म्हणून ∠ADC हा 60° दिलेला आहे. ∠BCD = 120°

त्याचप्रमाणे ∠ABC= 60° आम्ही काढू शकतो.

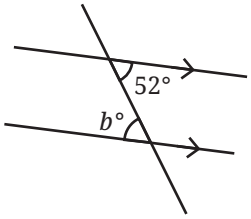
म्हणून आकृती 5.29 मध्ये ∠CAB = 55°, ∠ABC = 60° आणि ∠BCD = 120°.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

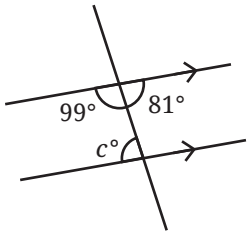
1. खाली चिन्हांकीत केलेले कोन काढा.



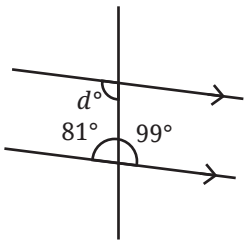
a= ☐



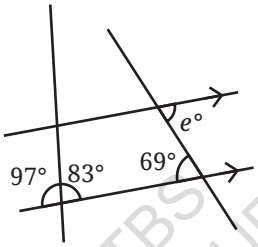
b= ☐



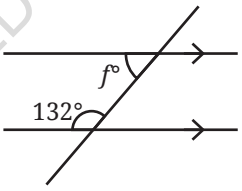
c= ☐



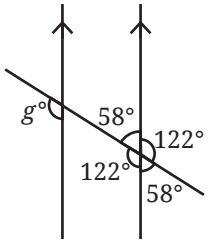
d= ☐



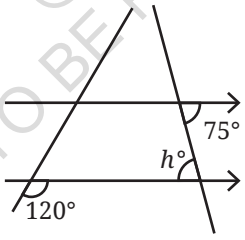
e= ☐



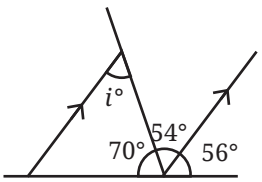
f= ☐



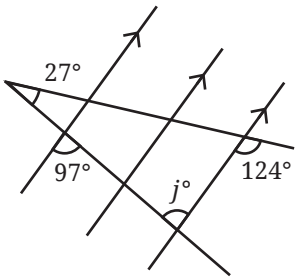
g= ☐



h= ☐



i= ☐

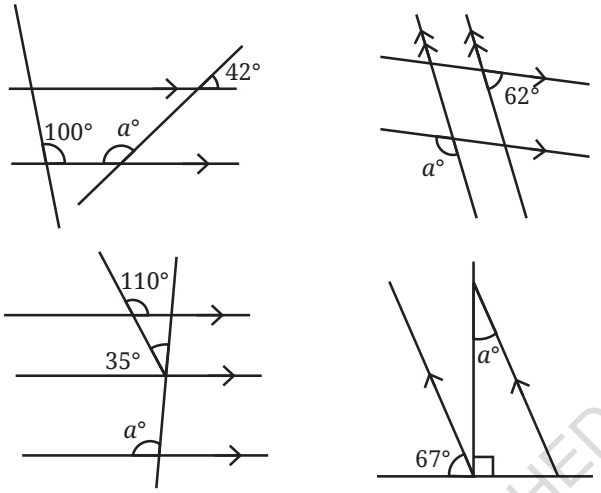


j= ☐

आकृती 5.30

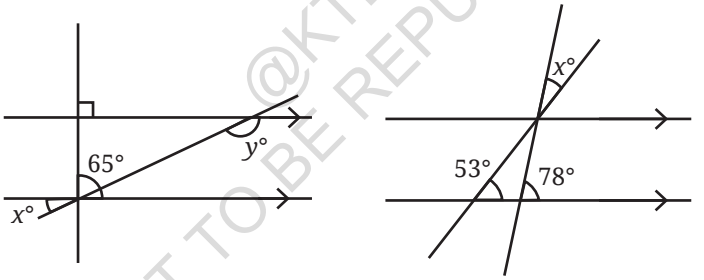
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

2. प्रत्येक आकृतीमधील a ने दर्शविलेला कोन काढा.



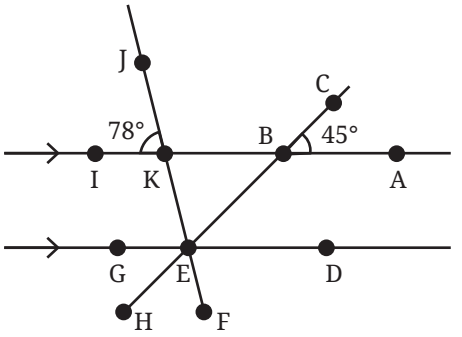
आकृती 5.31

3. खालील आकृतीमध्ये x आणि y ने दर्शविलेल्या किंमती काढा.



आकृती 5.32

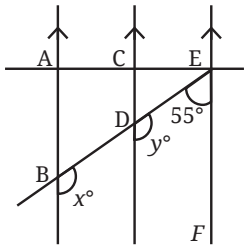
4. आकृती 5.33 मध्ये $\angle ABC=45^0$ आणि $\angle IKJ=78^0$, तर $\angle GEH, \angle HEF, \angle FED$ हे कोन काढा.



आकृती 5.33

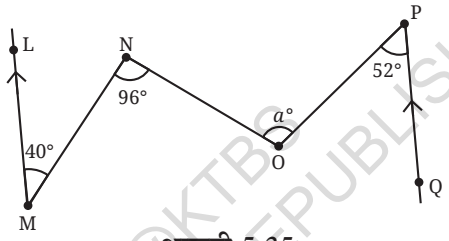
@KTDS NOT TO BE REPUBLISHED

5. आकृती 5.34 मध्ये AB ही CD ला समांतर आहे आणि CD ही EF ला समांतर आहे. EA ही AB ला लंब सुद्धा आहे. जर $\angle BEF = 55^0$ तर x आणि y च्या किंमती काढा.



आकृती 5.34

6 आकृती 5.35 मधील $\angle NOP$ या कोनाचे माप किती आहे?

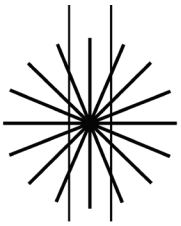


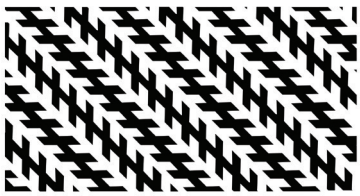
आकृती 5.35

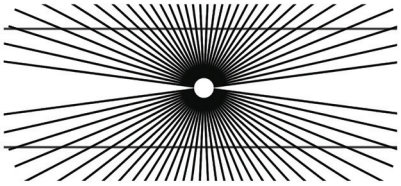
(**सूचना :** N आणि O बिंदूमधून LM आणि PQ ला समांतर रेषा काढा)

5.9 समांतर भ्रम (Parallel Illusions) :

येथे कोणत्याही समांतर रेषा दिसत नाहीत किंवा तेथे आहेत का?







या भ्रमाची कारणे कोणती?

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

सारांश

- जेव्हा दोन रेषा एकमेकीना छेदतात तेव्हा चार कोन तयार होतात. शिरोविरुद्ध कोन समान असतात आणि रेषीय जोडीची बेरीज 180^0 असते.
- जेव्हा दोन रेषा छेदतात आणि बनलेले (तयार झालेले) कोन 90^0 चे असतात, (म्हणजेच सर्व चार कोन समान आहेत.) तेव्हा त्या रेषा एकमेकीना लंब असतात.
- जेव्हा एका प्रतलावर दोन रेषा कधीही छेदत नसतील तर त्या रेषांना समांतर रेषा असे म्हणतात.
- एक रेषा t इतर रेषांच्या जोडीला छेदत असेल तर तिला छेदिका असे म्हणतात आणि ती 2 संचाचे 4 कोन बनविते. पहिल्या संचातील प्रत्येकी चारही कोनांचे दुसऱ्या संचात संगत कोन असतात.
- एका समांतर रेषांच्या जोडीला एका छेदिकेने छेदल्यास संगत कोन समान असतात. जेव्हा एक छेदिका एका रेषेच्या जोडीला छेदत असेल आणि संगत कोन समान असतील तर रेषेची जोडी ही समांतर असते.
- जेव्हा एका समांतर रेषेच्या जोडीला एक छेदिका छेदत असेल तर व्युत्क्रम कोन समान असतात.
- एका समांतर रेषेच्या जोडीला एका छेदिकेने छेदले असता छेदिकेच्या एकाच बाजूस असलेल्या आंतरकोनांची बेरीज 180^0 असते.

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

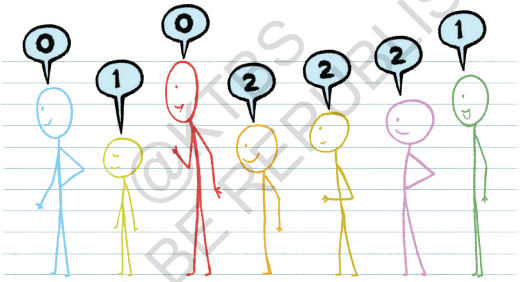
6 संख्यांचा खेळ
(NUMBER PLAY)

P6J5D1

6.1 संख्या आपल्याला वस्तू किती ते सांगतात

? खालील आकृतीमधील संख्या आपल्याला काय सांगतात?

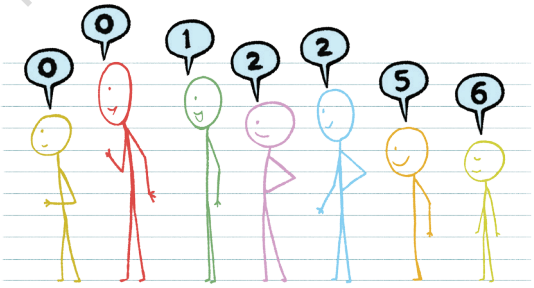
इयत्ता सहावीच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकामधील मुलांचे स्मरण कराल? आता ते वेगवेगळया नियमांचा वापर करून संख्या म्हणतील.



© NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

? या संख्याचा अर्थ म्हणजे तुम्ही कोणता विचार कराल?

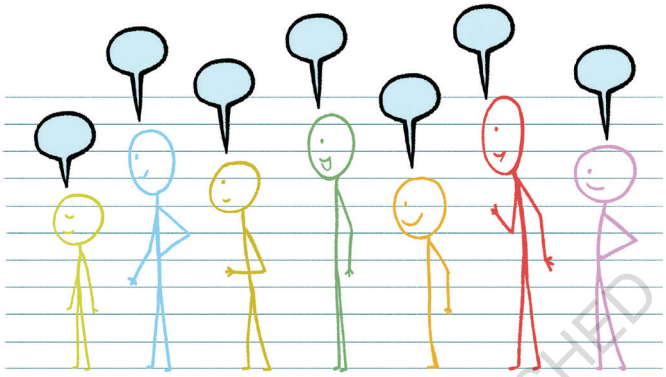
मुले स्वतःची पुनर्रचना करतात आणि प्रत्येक जण नवीन मांडणीच्या आधारे एक संख्या सांगतो.



? या संख्या काय दर्शवितात ते तुम्ही शोधू शकाल का? निरीक्षण करा आणि शोधण्याचा प्रयत्न करा.

नियम असा आहे की प्रत्येक बालक हे त्याच्या समोर असलेल्या त्याच्यापेक्षा उंच मुलाची संख्या उच्चारते. दोन्ही मांडणीमध्ये प्रत्येक मुलाने सांगितलेली संख्या या नियमाशी जुळते का ते तपासा.

? खाली दर्शविलेल्या मांडणीसाठी या नियमाच्या आधारे प्रत्येक मुलाने सांगितलेली अशी संख्या लिहा



? हे शोधा पाहू. (Figure it out)

1. पुस्तकाच्या शेवटी दिलेल्या काड्यांच्या आकृतीच्या कापलेल्या चित्राची मांडणी (रचना) करा किंवा क्रमाचे वाचन होईल अशी उंचीची रचना (मांडणी) करा.

   (a) 0, 1, 1, 2, 4, 1, 5
   (b) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
   (c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
   (d) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0
   (e) 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
   (f) 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3

2. खाली दिलेल्या प्रत्येक विधानासाठी ते जर नेहमी सत्य आहे का, फक्त काही वेळेला सत्य किंवा कधीही सत्य नाही याचा विचार करा. तुमचा तर्क सांगा.

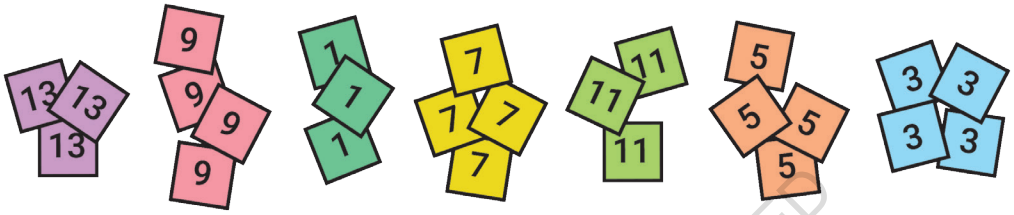
   (a) जर एखाद्या व्यक्तीने '0' म्हटले तर तो गटातील सर्वात उंच आहे.
   (b) जर एखादी व्यक्ती सर्वात उंच असेल तर त्याची संख्या '0' आहे.
   (c) पहिल्या व्यक्तीची संख्या '0' आहे.
   (d) जर एखादी व्यक्ती रांगेत पहिल्या किंवा शेवटच्या क्रमांकावर नसेल (म्हणजेच जर ती मध्ये कुठेतरी उभी असेल) तर ती '0' म्हणू शकत नाही.
   (e) सर्वात मोठी संख्या उच्चारणारी व्यक्ती ही सर्वात लहान असते.
   (f) 8 लोकांच्या गटातील शक्य असणारी सर्वात मोठी संख्या कोणती?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.2 समानता निवडणे (Picking Parity)

किशोरकडे काही संख्यांचे पत्ते आहेत आणि तो एका कोड्यावर काम करीत आहे. तेथे 5 पेट्या आहेत आणि प्रत्येक पेटीमध्ये फक्त एका संख्येचा पत्ता असायला हवा. पेटीतील संख्यांची बेरीज 30 असणार आहे. तुम्ही त्याला हे शोधण्याची पद्धत काढण्यास मदत करू शकाल का?

☐ + ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = 30



बेरीज 30 येण्यासाठी कोणते 5 पत्ते निवडाल ते तुम्ही शोधू शकाल काय? हे शक्य आहे!

या संग्रहातून 5 पत्ते निवडण्याचे अनेक प्रकार आहेत. सर्व शक्यतांची तपासणी न करता उकल काढण्याचा मार्ग तेथे आहे का?

चला शोधून काढू.

? काही सम संख्या एकत्र करून मिळवा तुम्हाला कोणत्या प्रकारची संख्या मिळते? किती संख्या मिळविल्या (जोडल्या) तर काही फरक पडतो का?



कोणतीही संख्या शिल्लक न ठेवता कोणत्याही सम संख्येच्या जोडीची रचना करता येते.



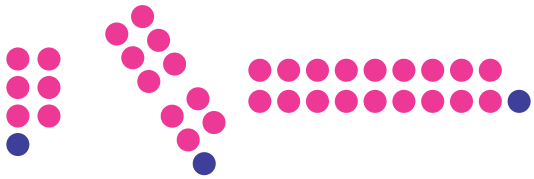
जोडीमध्ये मांडणी केलेल्या काही सम संख्या येथे दर्शविलेल्या आहेत.

आकृतीत पाहिल्याप्रमाणे कोणत्याही सम संख्यांची बेरीज केल्यास कोणतीही संख्या शिल्लक राहणार नाही अशी परिणामी, संख्या जोडीमध्ये मांडता येईल. दुसऱ्या शब्दात बेरीज ही नेहमीच समसंख्या असते.

? आता काही विषम संख्या एकत्रितपणे मिळवा. कोणत्या प्रकारची संख्या तुम्हाला मिळेल? किती संख्या मिळविल्या (जोडल्या) तर काही फरक पडतो का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

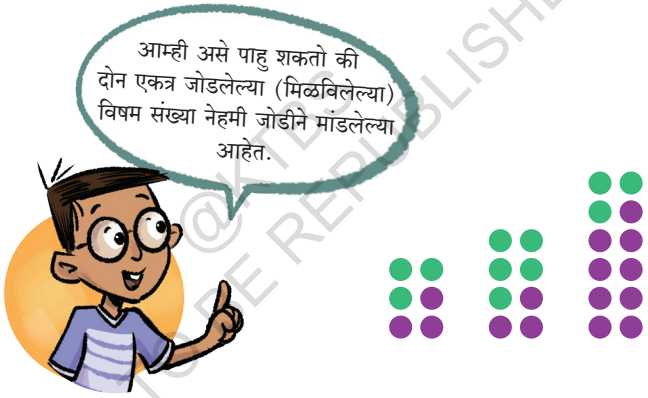
विषम संख्येची मांडणी (रचना) जोडीमध्ये करता येत नाही. एक विषम संख्या ही जोड्यांच्या संग्रहापेक्षा एकने अधिक असते. काही विषम संख्या खाली दर्शविलेल्या आहेत.



विषम संख्या ही जोड्यांच्या संग्रहापेक्षा एकने कमी असते असा सुद्धा तर्क आम्ही करू शकतो?



ही आकृती असे दर्शविते की दोन विषम संख्यांची बेरीज ही नेहमी सम संख्या असते. येथे इतर आकृत्यासह काही अधिक पुराव्यानिशी उदाहरणे आहेत!



© KTDC NOT TO BE REPUBLISHED

? 3 विषम संख्या मिळविल्यास काय होते? परिणामी बेरीज ही जोडीमध्ये मांडता येईल का? नाही.

? (a) 4 विषम संख्या (b) 5 विषम संख्या आणि (c) 6 विषम संख्यांची बेरीज काय होईल याचा शोध घ्या.

किशोर सोडविण्याचा प्रयत्न करत असलेल्या कोड्याकडे परत माघारी जाऊया. तेथे 5 रिकाम्या पेट्या आहेत. म्हणजेच त्याच्याकडे विषम संख्येच्या पेट्या आहेत. सर्व संख्येच्या पत्त्याना विषम संख्या आहेत.

त्यांची बेरीज 30 करावी लागेल जी एक सम संख्या आहे. कोणत्याही 5 विषम संख्येंच्या बेरीजेचा निकाल हा कधीही सम संख्या देणार नाही. किशोर हे पत्ते 30 ची बेरीज करण्यासाठी/मिळविण्यासाठी पेटीमध्ये ठेवू शकणार नाही.

? मार्टिन आणि मारीया या दोन भावंडांचा जन्म अगदी एका वर्षाच्या अंतराने झाला आहे. आज ते त्यांचा वाढदिवस साजरा करीत आहेत. त्यांच्या वयांची बेरीज 112 आहे असे मारीया सांगते हे शक्य आहे का? का किंवा का नाही?

त्यांचा जन्म एका वर्षांच्या अंतराने झाला असल्याने त्यांच्या वयांच्या (दोन) क्रमगत संख्या असतील. त्यांची वये जर 51 आणि 52 ही असू शकतील का? 51+52=103. इतर काही क्रमगत संख्या वापरुन त्यांची बेरीज 112 आहे का ते पहा.

1, 2, 3, 4, 5,.....या मोजसंख्या पर्यायाने सम आणि विषम संख्यांच्या दरम्यान आहेत. कोणत्याही दोन क्रमगत संख्यामध्ये एक नेहमी सम आणि दुसरी विषम संख्या असते !

सम संख्या आणि विषम संख्या यांची बेरीज काय होईल? आम्हाला असे दिसून येते की त्यांची बेरीज जोडीमध्ये मांडता येत नाही आणि म्हणून ती विषम संख्या असणार आहे.

112 ही सम संख्या असल्याने, मार्टिन आणि मारीया यांची वये क्रमगत संख्या असल्याने त्यांची बेरीज 112 होऊ शकत नाही.

सम आणि विषम संख्या असण्याचा गुणधर्म दर्शविण्यासाठी आपण समानता हा शब्द वापरतो. उदाहरणार्थ कोणत्याही दोन क्रमगत संख्यांची बेरीज ही समानता विषम असते.

(?) शोधा पाहू. (Figure it out)

1. सम आणि विषम संख्यांच्या चित्रमय प्रतिनिधीत्वाच्या तुमच्या आकलनाचा उपयोग करून खालील बेरजेची समानता काढा.

   (a) 2 सम संख्या आणि 2 विषम संख्यांची बेरीज शोधा. (उदा. सम + सम + विषम + विषम)

   (b) 2 विषम संख्या आणि 3 सम संख्येची बेरीज शोधा.

   (c) 5 सम संख्यांची बेरीज शोधा.

   (d) 8 विषम संख्यांची बेरीज शोधा.

2. लकपाकडे त्याच्या पिगी बँकेत विषम संख्या असणारी ₹1 ची नाणी, विषम संख्या असणारी ₹5 ची नाणी आणि सम संख्या असणारी ₹10 ची नाणी आहेत. त्याने एकूण हिशेब केला आणि त्याला ₹ 205 मिळाले. त्याने चूक केली आहे का? जर त्याने चूक केली असेल तर का ते स्पष्ट करा. जर त्याने चूक केली नसेल तर त्याच्याकडे प्रत्येक प्रकारची किती नाणी असू शकतात?

3. आपल्याला माहित आहे की,

   (a) सम + सम = सम

   (b) विषम + विषम = सम

   (c) सम + विषम = विषम

   त्याचप्रमाणे खालील घटनांची समानता काढा.

   (d) सम − सम = _____

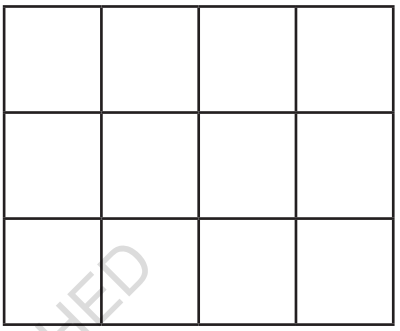
© KIRBS NOT TO BE REPUBLISHED

(e) विषम – विषम =_____

(f) सम – विषम =_____

(g) विषम – सम= _____

चौकटीमधील लहान चौरस



3×3 च्या चौकटीमध्ये 9 लहान चौरस असून ती विषम संख्या आहे. तथापि 3×4 च्या चौकटीमध्ये 12 लहान चौरस असून ती सम संख्या आहे.

? चौकटीची परिमाणे दिली असता गुणाकार न करता तुम्ही लहान चौरसांच्या संख्येंची समानता सांगू शकता का?

? या चौकटीतील लहान चौरसांच्या संख्येची समानता काढा.

a) 27×13

b) 42×78

c) 135×654

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

राशींची समानता

$3n+4$ ही बैजिक राशी विचारात घ्या. n च्या वेगवेगळ्या किंमतीसाठी राशीची समानता वेगवेगळी असते.

n	$3n+4$ ची किंमत	किंमतीची स्थिती
3	13	विषम
8	28	सम
10	34	सम

? नेहमी सम स्थिती असलेली राशी शोधा. (काढा.) 100p आणि 48w−2 ही काही उदाहरणे आहेत. अधिक उदाहरणे शोधण्याचा प्रयत्न करा.

? नेहमी विषम स्थिती असलेली राशी काढा.

? 3n+4 प्रमाणे विषम किंवा सम स्थिती असणाऱ्या इतर राशी काढा.

? 6k+2 ही पदावली सोडविल्यास हे 8, 14, 20, (k=1,2,3..... साठी) मिळतात. अनेक सम संख्या गाळलेल्या आहेत.

? आम्ही सर्व सम संख्यांची यादी पदावलींचा उपयोग करून काढू शकतो का?

सूचना : सर्व सम संख्यांचा 2 हा एक अवयव आहे.

? आम्ही सर्व विषम संख्यांची यादी पदावलीचा उपयोग करून काढू शकतो का?

4 च्या पटीतील क्रमाचे n वे पद कसे व्यक्त करता येते हे आम्ही यापूर्वी पाहिले आहे. जेथे n ही मूळाक्षर संख्या असून क्रमातील स्थान दर्शविते. (उदा. पहिले, तेविसावे, शंभरावे आणि सतरावे इ.)

? 2 च्या पटीतील n वे पद कोणते असू शकेल? किंवा n वी सम संख्या किती आहे?

विषम संख्या विचारात घेऊ.

? 100 वी विषम संख्या कोणती?

या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी खालील क्रम विचारात घ्या.

? 100वी सम संख्या कोणती?

हे $2\times100= 200$ आहे.

100 वी विषम संख्या काढण्यासाठी याची मदत होईल काय?

पदानुसार क्रमाच्या सम आणि विषम संख्यांची तुलना करूया.

सम संख्या: 2, 4, 6, 8, 10, 12,.....

विषम संख्या: 1, 3, 5, 7, 9, 11,.....

आम्हाला असे दिसून येते की कोणत्याही स्थानावर विषम संख्या क्रमातील किंमत ही सम संख्या क्रमातील किंमतीपेक्षा एक ने कमी असते. अशाप्रकारे 100 वी विषम संख्या ही $200-1 = 199$ आहे.

? n वी विषम संख्या काढण्याचे सूत्र लिहा. प्रथमतः दिलेल्या एका स्थितीवर विषम संख्या काढण्यासाठी आम्ही शिकलेल्या पध्दतीचे वर्णन करूया.

a) स्थानावरील सम संख्या काढा. हे स्थान संख्येच्या दुप्पट (2 वेळा) असते.

b) नंतर सम संख्येमधून 1 वजा करा. हे पदावलीमध्ये लिहील्यास आम्हाला मिळते.

(a) $2n$ (b) $2n$-1

अशाप्रकारे n वी सम संख्या मिळवून देणारे 2n हे सूत्र आहे आणि n वी विषम संख्या देणारे $2n$-1 हे सूत्र आहे.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

6.3 चौकटीमधील काही शोध

4	7	5	16
6	1	2	9
3	9	8	20
13	17	15	

3×3 या चौकटीचे निरीक्षण करा. हे एका साध्या नियमानुसार केलेले आहे. त्यामधील कोणत्याही अंकाची (संख्यांची) पुनरावृत्ती न करता 1–9 पर्यंतच्या संख्यांचा उपयोग करा. चौकटीच्या बाहेर वर्तुळाकार संख्या आहेत.

? वर्तुळाकार संख्या काय दर्शवितात हे तुम्ही पाहू शकाल का?

पिवळ्या वर्तुळातील संख्या ही संगत पंक्ती आणि स्तंभाची बेरीज आहे.

वर नमूद केलेल्या नियमांच्या आधारे खालील चौकटीमध्ये भरा.

9			13
			14
		5	18
24	9	12	

			24
4			15
		3	6
12	16	17	

? यासारख्या काही प्रश्नांची जोडी तुम्ही स्वतः तयार करा आणि तुमच्या समवयस्कांना (वर्गमित्रांना) आव्हान द्या.

खालील समस्या सोडविण्याचा प्रयत्न करा.

? तुमच्या कदाचित हे लक्षात आले असेल की, या चौकटीसाठी उकल काढणे शक्य नाही? या घटनेसाठी असे का?

			5
		6	21
			19
9	11	26	

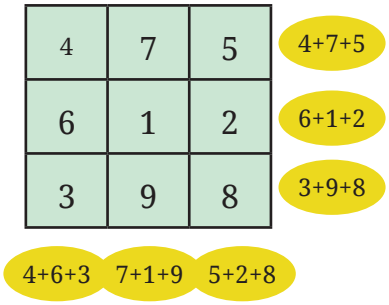
लहानात लहान शक्य बेरीज 6=1+2+3 ही आहे. मोठ्यात मोठी शक्य बेरीज 24=9+8+7 ही आहे. वर्तुळातील कोणतीही संख्या 6 पेक्षा लहान किंवा 24 पेक्षा मोठी नाही हे स्पष्ट करा. चौकटीची बेरीज 5 आणि 26 ही आहे. म्हणून हे अशक्य आहे.



आम्ही अगोदर सोडविलेल्या चौकटीमध्ये किशोरच्या लक्षात आले आहे की वर्तुळामधील सर्व संख्यांची बेरीज 90 आहे. विद्याने हे सुद्धा निरीक्षण केले आहे की, सर्व तिन्ही पंक्ती किंवा सर्व तिन्ही स्तंभातील वर्तुळाकार संख्यांची बेरीज नेहमीच 45 आहे. जर हे सत्य असेल तर तुम्ही मागील/अगोदर सोडविलेल्या चौकटीसाठी तपासून पहा.

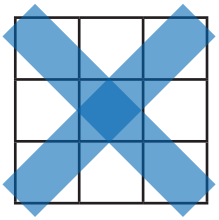
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? पंक्ती आणि स्तंभांची बेरीज मिळविल्यास नेहमीच 45 का असते?



या चौकटीवरून आम्हाला असे दिसून येते की सर्व पंक्तींची एकत्रित बेरीज ही 1–9 या संख्यांच्या बेरजेइतकी असते. हे स्तंभांच्या बेरजेसाठी देखील पाहू शकतो. 1–9 या संख्यांची बेरीज.

1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 ही आहे.



जर प्रत्येक पंक्ती, प्रत्येक स्तंभ आणि प्रत्येक कर्ण यांची बेरीज समान संख्या येत असेल तर संख्यांच्या चौरसाकृती चौकटीला **जादूई चौरस** असे म्हणतात. या संख्येला **जादुई बेरीज** असे म्हणतात.

चित्रामध्ये कर्ण दर्शविलेले आहेत. चौकटीमध्ये संख्या यादृच्छिकपणे भरून जादूचा चौरस तयार करण्याचा प्रयत्न करणे कठीण असू शकते! कारण अंकांची पुनरावृत्ती न करता 1 ते 9 संख्या वापरून 3×3 चौकट भरण्याचे मोठ्या प्रमाणात अनेक मार्ग आहेत. खरं तर असे आढळून येते की असे अगदी 3,62,880 इतके मार्ग आहेत. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे चौकट भरण्याचे किती मार्ग आहेत हे सर्व यादीशिवाय आढळून येते. हे कसे करायचे ते आम्ही नंतरच्या वर्षात पाहूया.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

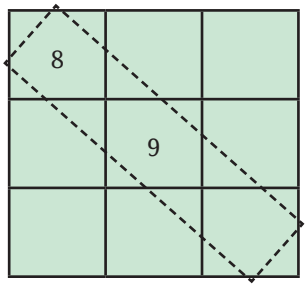
त्याऐवजी आम्ही एक जादुई चौरस बनविण्यासाठी पध्दतशीरपणे पुढे जायला हवे. यासाठी आपण स्वतःला काही प्रश्न विचारूया.

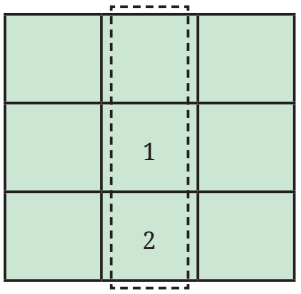
? जादूई बेरीज किती असू शकते? ती कोणतीही संख्या असू शकते का?

सध्या आपण फक्त पंक्तींच्या बेरजेवर लक्ष केंद्रित करूया. आपण पाहिले आहे की 1–9 संख्या असलेल्या 3×3 चौकटीमध्ये पंक्तीची एकूण बेरीज नेहमीच 45 असू शकते. जादूई चौरसामध्ये पंक्तींची बेरीज समान असते आणि त्यांची बेरीज 45 असल्याने प्रत्येक पंक्तीची 15 ही बेरीज असू शकते. अशाप्रकारे आम्हाला खालील निरीक्षण मिळते.

निरीक्षण 1:

1. 1–9 या संख्या वापरून बनविलेल्या जादूई चौरसामध्ये, जादूई चौरसाची बेरीज 15 असावी लागते.
2. जादूई चौरसाच्या केंद्रभागी कोणत्या संख्या येण्याची शक्यता आहे?





एका नंतर एक शक्यतांचा विचार करूया, केंद्रस्थानी संख्या 9 असू शकते का? जर होय तर 8 हा इतर चौरसात आला पाहिजे. उदाहरणार्थ यामध्ये आपल्याकडे 8+9+ दुसरी संख्या = 15 असणे आवश्यक आहे परंतु हे शक्य नाही! आपण कुठेही ठेवले तरी तीच समस्या उद्भवेल.

म्हणून 9 ही संख्या केंद्रस्थानी असू शकत नाही. केंद्रस्थानाची संख्या 1 आहे काय?

जर होय तर 2 हा इतर चौरसात आला पाहिजे.

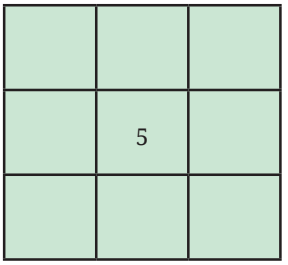
येथे आपल्याकडे 2+1+ इतर संख्या = 15 असणे आवश्यक आहे.

परंतु हे शक्य नाही कारण आम्ही फक्त 1–9 या संख्यांचा वापर करतो. आपण 1 कुठेही ठेवले तरी तीच समस्या उद्भवेल. म्हणून 1 ही केंद्रस्थानी असू शकत नाही.

? अशा तर्काचा वापर करून केंद्रस्थानी 1–9 या इतर कोणत्या संख्या येऊ शकत नाहीत ते काढा.

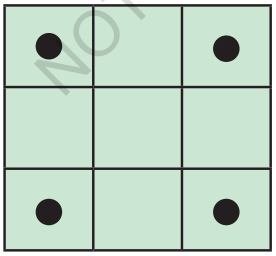
या शोधामुळे आम्हाला खालील मनोरंजक निरीक्षणा पर्यंत पोहोचता येईल.

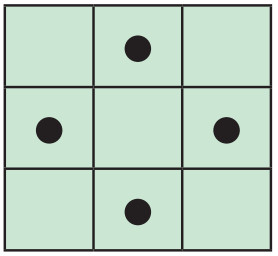
NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS



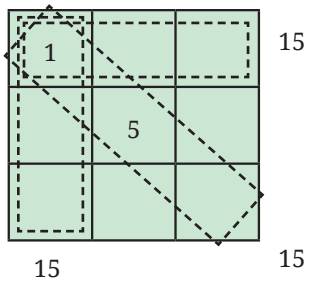
निरीक्षण 2 : 1–9 या संख्यांचा वापर करून जादूई चौरसांच्या केंद्रस्थानी असणे आवश्यक असलेली संख्या 5 आहे.

आता आपण जादूई चौरसाच्या कोठे लहानात लहान संख्या । आणि मोठ्यात मोठी संख्या 9 येईल ते पाहुया. आपले दुसरे निरीक्षण आम्हाला असे सांगते की त्यांना सीमा स्थानापैकी एकामध्ये येणे आवश्यक आहे. आपण या स्थानांचे दोन प्रकारात वर्गीकरण करूया.





1 ही संख्या कोपऱ्याच्या स्थितीत येऊ शकते का? उदाहरणार्थ ते खालीलप्रमाणे ठेवता येईल का?



? जर होय तर 15 मिळविण्यासाठी 1 हे इतर दोन संख्यांमध्ये मिळविण्याचे तीन प्रकार आहेत. आपल्याकडे 1+5+9 = 1+6+8=15 आहे. इतर कोणतेही संयोजन शक्य आहे का?

? त्याचप्रमाणे 9 हे कोपऱ्याच्या स्थानात ठेवता येईल का?

निरीक्षण 3: 1 आणि 9 या संख्या कोणत्याही कोपऱ्यात येऊ शकत नाहीत म्हणून ते मधल्या एका स्थितीत / स्थानात असले पाहिजेत.

? 1 आणि 9 साठी इतर शक्य स्थाने तुम्ही काढू शकाल का?

1	5	9

	1	
	5	
	9	

आता आपणाकडे जादूई चौरसाची एक पूर्ण पंक्ती किंवा स्तंभ आहे.
ते पूर्ण करण्याचा प्रयत्न करा.
(**सूचना :** प्रथमतः 1 आणि 9 असलेली पंक्ती किंवा स्तंभ भरा.)

? हे शोधा पाहू. (Figure it out)

गणिती बोल

1. 1–9 या संख्या वापरून किती वेगवेगळे जादूई चौरस बनविता येतात?
2. 2–10 या संख्या वापरून एक जादूई चौरस तयार करा यासाठी तुम्ही कोणती युक्ती वापराल? 1–9 या संख्या वापरून बनविलेल्या जादूई चोरसाशी त्याची तुलना करा.
3. एक जादूई चौरस घ्या आणि
   a) प्रत्येक संख्या 1 ने वाढवा. b) प्रत्येक संख्या दुप्पट करा.
   प्रत्येक घटनेतील परिणामी चौकटी ही सुध्दा एक जादूई चौरस आहे का? प्रत्येक घटनेत जादूई बेरीज कशी बदलते?
4. एका जादूई चौरसावर कोणती इतर क्रिया करून दुसरा जादूई चौरस मिळविता येईल?

गणिती बोल

5. क्रमगत a संख्याच्या कोणत्याही संचाचा वापर करून एक जादूई चौरस तयार करण्याच्या प्रकाराची चर्चा करा. (जसे की 2–10, 3–11, 9–17 इत्यादी)

3×3 च्या जादूई चौरसाचे सामान्यीकरण

जादूई चौरसातील संख्या एकमेकांशी कशा संबंधित आहेत म्हणजेच जादूई चौरसाची रचना याचे आपण वर्णन करू.

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? तुम्ही आतापर्यंत बनविलेला कोणताही जादुई चौरस निवडा. जर केंद्रस्थानी m ही मूळाक्षर संख्या असेल तर इतर संख्या m शी कशा संबंधित आहेत, m पेक्षा किती जास्त किंवा कमी आहे ते व्यक्त करा.

(**सूचना :** बैजिक राशीच्या प्रकरणात आपण कॅलेंडर (दिनदर्शिका) महिन्याच्या 2×2 चौकटीचे वर्णन कसे केले आहे याचे स्मरण करा.)

	m	

? एकदा सामान्यीकरण स्वरूप प्राप्त झाले की तुमच्या निरीक्षणाची वर्गामध्ये देवाण घेवाण करा.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

गणिती बोल

1. या सामान्यीकरण नमुन्याचा उपयोग करून केंद्रस्थानी 25 संख्या असणारा एक जादूई चौरस काढा.
2. कोणत्याही पंक्ती, स्तंभ किंवा कर्णाची 3 पदे मिळवून कोणती राशी मिळते?
3. यापासून मिळणारा निकाल लिहा.
   a) सामान्यीकरण नमुन्यातील प्रत्येक पदामध्ये 1 मिळवून.
   b) सामान्यीकरण नमुन्यातील प्रत्येक पद दुप्पट करून.

गणिती बोल

4. जादूई बेरीज 60 असणारा एक जादूई चौरस तयार करा.
5. 9 क्रमगत नसलेल्या संख्या भरून एक जादूई चौरस मिळविणे शक्य आहे का?



7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

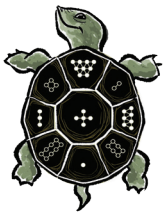
© KSB NOT TO BE REPUBLISHED

पहिला 4×4 चा जादूई चौरस :

भारतातील खजुराहो येथील पार्श्वनाथ जैन मंदिरात 10 व्या शतकातील एका शिलालेखात 4×4 आकाराच्या पहिल्या जादूई चौरसाची नोंद आहे आणि त्याला चौतीस यंत्र असे म्हणतात.

भारतातील खजूराहो येथे पहिला नोंद केलेला 4×4 जादूई चौरस यंत्र म्हणजे 34. त्याला चौतीस यंत्र असे का म्हटले जाते? याबद्दल तुम्ही काय विचार कराल? या जादूई चौरसातील प्रत्येक पंक्ती, स्तंभ आणि कर्ण यांची बेरीज 34 आहे. चौरसामध्ये चार संख्या मिळविल्यास बरीज 34 येणारे इतर नमुने तुम्ही काढू शकाल का?

इतिहास आणि संस्कृतीमधील जादूई चौरस :



आतापर्यंत नोंदविलेला पहिला जादूई चौरस लो शु चौरस 2000 वर्षापूर्वीचा प्राचीन चीनमधील आहे. दंतकथा अशी, सांगते की लो नदीवर आलेल्या पुरातून लोकांना वाचविण्यासाठी देवतांनी एका कासवाला पाठविले होते. त्या कासवाच्या पाठीवर 3×3 आकाराचे चौकटीदार चौरस होते ज्यामध्ये 1 ते 9 हे अंक जादूई पध्दतीने रचलेले होते.

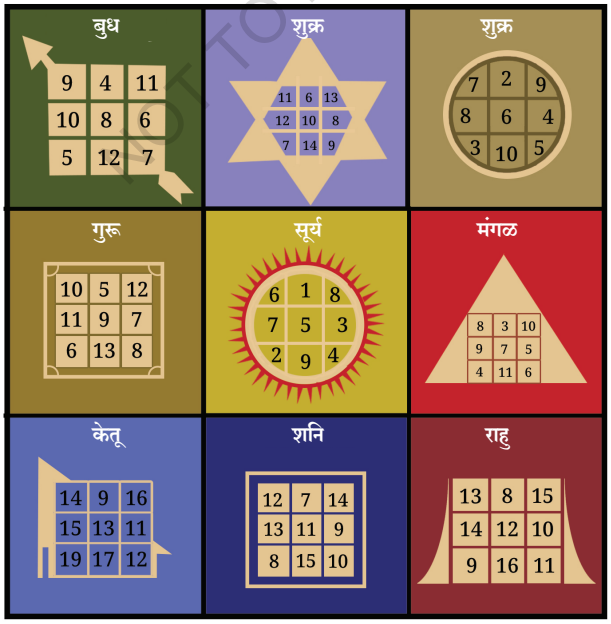
2	7	6
9	5	1
4	3	8

भारत, जपान, मध्य आशिया आणि यूरोपसह जगाच्या वेगवेगळ्या भागात वेगवेगळ्या वेळी जादूई चौरसाचा अभ्यास केला गेला. भारतीय गणित तज्ञानी जादूई चौरसावर मोठ्या प्रमाणात कार्य करून बांधकामाच्या सामान्य पध्दतीचे वर्णन त्यांनी केले. भारतीय गणित तज्ञाचे कार्य केवळ 3×3 आणि 4×4 चौकटी पुरते मर्यादित नसून आपण वर विचार केल्याप्रमाणे 5×5 आणि इतर मोठ्या चौकटीदार चौरसापर्यंत देखील विस्तारीत होतो. आपण पुढील इयत्तामध्ये याबद्दल अधिक जाणून घेऊ.



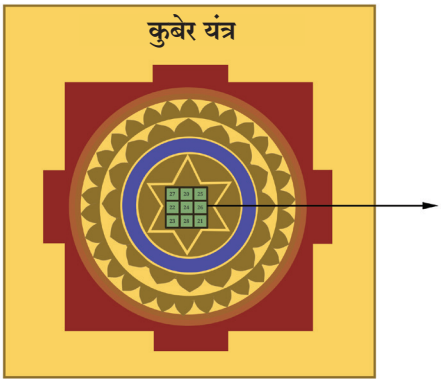
जादूई चौरसाचे अस्तित्व केवळ विद्वतापूर्ण गणितीय कामापुरते मर्यादित नाही ते भारतात अनेक ठिकाणी आढळते. उजवीकडील चित्र हे तामिळनाडूमधील पलानी येथील आहे. ते एका मंदिरातील खांबावर आढळलेल्या 3×3 जादूई चौरसाचे आहे. हे मंदिर 8 व्या शतकातील आहे.

भारतातील घरे आणि दुकानामध्ये 3×3 आकाराचे जादूई चौरस देखील आढळतात. नवग्रह जे खाली दर्शविलेले आहेत हे असेच एक उदाहरण आहे.



© KSTB NOT TO BE REPUBLISHED

एक वेगवेगळी जादूई बेरीज ही प्रत्येक ग्रहाशी निगडीत आहे. असे लक्षात येते. कुबेर यंत्राचे एक चित्र खाली दर्शविले आहे.



27	20	25
22	24	26
23	28	21

6.4 निसर्गाचा आवडता क्रम : विरहंक – फिबोनसीची संख्यांचा क्रम

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... (विरहंक-फिबोनसीची संख्या) हा एक गणितातील सर्वात जास्त प्रसिद्ध क्रमापैकी एक आहे तो कला, विज्ञान आणि गणिताच्या विश्वात आढळतो. जरी या संख्या वारंवार विज्ञानामध्ये आढळत असल्या तरी उल्लेखनीय बाब ही आहे की या संख्या प्रथम कलेच्या संदर्भात शोधल्या आहेत. (विशेषत कविता)

अशाप्रकारे विरहंक – फिबोनसीची संख्या ही कला, विज्ञान आणि गणित यांच्यामधील जवळच्या संबंधाचे एक सुंदर उदाहरण देते.

विरहंक संख्यांचा शोध :

विरहंक संख्या प्रथमत: हजारो वर्षापूर्वी संस्कृत आणि प्राकृत भाषा शास्त्रज्ञांना त्यांच्या कवितेच्या अभ्यासात आढळल्या.

प्राकृत, संस्कृत, मराठी, मल्याळी तामिळ आणि तेलगु यासारख्या अनेक भारतीय भाषेमधील कवितेमध्ये प्रत्येक अक्षर दिर्घ किंवा लघु असे वर्गीकृत केलेले आहे.

एका मोठ्या अक्षराचा उच्चार लहान अक्षरापेक्षा जास्त कालावधीसाठी केला जातो. खरं तर अगदी दुप्पट वेळा केला जातो. अशी कविता जेव्हा गायिली जाते तेव्हा एका लहान अक्षराचा उच्चार एका ठोक्यापर्यंत टिकतो आणि एका मोठ्या अक्षराचा उच्चार दोन ठोक्यापर्यंत असतो.

यामुळे असंख्य गणितीय प्रश्न निर्माण होतात त्यामुळे या भाषामधील प्राचीन कवीनी सखोल विचार केला आहे. कवितेबद्दल असे प्रश्न विचारण्याच्या आणि त्यांची उत्तरे देण्याच्या प्रक्रियेत अनेक महत्वाचे गणितीय शोध लागले.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यापैकी एक विशेषतः महत्वाचा प्रश्न खालील प्रमाणे होता.

लघु अक्षरे (1 ठोका) आणि दिर्घ अक्षरे (2 ठोके) असणाऱ्या 8 ठोक्यासह किती ताल आहेत? म्हणजेच एक व्यक्ती किती प्रकारे 8 ठोके लघु आणि दिर्घ अक्षरांनी भरू शकेल, जेथे एका लहान अक्षरासाठी एक ठोका वेळ आणि एका मोठ्या अक्षरासाठी दोन ठोके वेळ लागतो.

येथे काही शक्यता आहेत

दिर्घ दिर्घ दिर्घ दिर्घ

लघु लघु लघु लघु लघु लघु लघु लघु

लघु दिर्घ दिर्घ लघु दिर्घ

दिर्घ दिर्घ लघु लघु दिर्घ

तुम्ही इतर शोधू शकाल का?

अधिक गणितीय स्तरामध्ये एखादी व्यक्ती किती वेगवेगळ्या प्रकारे 1 आणि 2 ची बेरीज 8 अशी लिहील?

उदाहरणार्थ ;

$8 = 2+2+2+2$

$8 = 1+1+1+1+1+1+1+1$

$8 = 1+2+2+1+2$

$8 = 2+2+1+1+2$ इत्यादी

तुम्हाला इतर प्रकार आढळतात का?

1,2,3 आणि 4 या प्रत्येकी संख्यांची 1च्या पटीत आणि 2च्या पटीत अशी संख्याची बेरीज लिहीण्याचे येथे सर्व प्रकार आहेत.

	वेगवेगळे प्रकार	प्रकारांची संख्या
n = 1	1	1
n = 2	1 + 1 2	2
n = 3	1 + 1 + 1 1 + 2 2 + 1	3
n = 4	1 + 1 + 1 + 1 1 + 1 + 2 1 + 2 + 1 2 + 1 + 1 2 + 2	5

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुमच्या वहीमध्ये सर्व शक्य प्रकारानी 1 आणि 2 ची बेरीज करून 5 ही संख्या लिहीण्याचा प्रयत्न करा. तुम्हाला किती प्रकार सापडले आहेत? (तुम्हाला 8 वेगवेगळे प्रकार/मार्ग सापडले पाहिजेत) सर्व शक्यतांची यादी न करता तुम्ही उत्तर शोधू शकता का? n=8 साठी तुम्ही प्रयत्न करू शकता का?

5 ठोके असलेल्या लहान आणि मोठ्या अक्षरांचे सर्व/ताल लिहीण्याची पध्दतशीर पध्दत येथे आहे. 4 ठोके असलेल्या सर्व ताली समोर '1+' लिहा आणि नंतर 3 ठोके असलेल्या सर्व ताली समोर '2+' लिहा. यामुळे 5 ठोके असलेल्या सर्व ताली आपल्याला मिळतात.

n = 5	1 + 1 + 1 + 1 + 1 1 + 1 + 1 + 2 1 + 1 + 2 + 1 1 + 2 + 1 + 1 1 + 2 + 2	2 + 1 + 1 + 1 2 + 1 + 2 2 + 2 + 1

अशाप्रकारे 5 ठोके असलेल्या 8 ताली आहेत.

ही पध्दत काम करण्याचे कारण म्हणजे प्रत्येक 5 ठोके ताल 1+ आणि 2+ ने सुरू होणे आवश्यक आहे. जर ती 1+ ने सुरू झाली तर उर्वरीत संख्या 4 ठोके ताल होतील आणि आपण त्या सर्व लिहू शकतो.

जर ते 2+ ने सुरू होत असेल तर उर्वरीत संख्या 3 ठोके ताल दिले पाहिजे आणि आपण त्या सर्व लिहु शकतो. म्हणून 5 ठोके तालीची संख्या ही 4 ठोके तालची संख्या आणि 3 ठोके तालची संख्या आहे.

6 ठोके ताल किती आहेत? त्याच तर्कानुसार ठोके तालांची संख्या अधिक 4 ठोके तालांची संख्या म्हणजेच 8+5=13 असेल. अशाप्रकारे 6 ठोके असलेल्या 13 ताल आहेत.

? सर्व 6 ठोके ताल लिहीण्यासाठी पध्दतशीर पध्दतीचा वापर करा. म्हणजेच शक्य तितक्या सर्व प्रकारे 1 आणि 2ची बेरीज म्हणून 6 लिहा. तुम्हाला 13 मार्ग मिळाले का? लहान अक्षरे आणि लांब अक्षराच्या सर्व ताली मोजण्यासाठी ही सुंदर पद्धत इ.स.700 च्या सुमारास महान प्राकृत विद्वान विरहंक यांनी दिली होती. त्यांनी त्यांची पध्दत प्राकृत काव्याच्या स्वरूपात दिली. या कारणास्तव 1,2,3,5, 8,13,21,34..... या क्रमाला विरहंक क्रम असे म्हणतात आणि त्या क्रमातील संख्याना विरहंक संख्या असे म्हणतात विरहंक हा इतिहासातील पहिला ज्ञात व्यक्ती होता ज्याने या महत्वाच्या संख्यांचा स्पष्टपणे विचार केला आणि त्यांच्या निर्मितीचा नियम लिहीला.

भारतातील इतर विद्वानानीही या संख्यांचा विचार त्याच काव्यात्मक संदर्भात केला. विरंहक हे संस्कृत विद्वान पिंगळा यांच्या पूर्वीच्या कामापासून प्रेरित होते. जे सुमारे 300 इ.स. पूर्व जगले होते. विरहकानंतर गोपाळ (सुमारे 1135 इ.स. पूर्व) आणि नंतर हेमचंद्र (सुमारे 1150 इ.स.पूर्व) यांनीही या संख्या लिहील्या आहेत.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

पश्चिमेकडे या संख्यांना फिबोनसीची संख्या असे म्हणतात. इ.स. 1202 मध्ये विरहंकानंतर सुमारे 500 वर्षानी इटालियन गणिततज्ञानी लिहीले आहे. हे आपण पाहु शकतो. या संख्याबद्दल लिहीणारा फिबोनसी हा पहिला किंवा दुसरा किंवा अगदी तिसराही नव्हता. कधी कधी विरहंक फिबोनसीची संख्या' हा शब्द वापरला जातो जेणेकरून प्रत्येकाला काय संदर्भ दिलेला आहे ते समजेल. 8 ठोके असलेल्या लहान आणि दिर्घ अक्षरामध्ये किती ताली आहेत? विरंहक क्रमाचा 8 वा घटक घेऊन आम्ही सोडवूया.

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,.....

अशाप्रकारे 8 ठोके असणारे तेथे 34 ताल आहेत.

55 नंतरच्या क्रमातील पुढील संख्या लिहा.

आम्ही हे पाहिले आहे की क्रमातील पुढील संख्या ही मागील दोन संख्या मिळवून दिली जाते. वर दिलेल्या संख्यासाठी हे सत्य आहे का ते तपासा. पुढील संख्या 34+55=89 आहे.

? क्रमातील 3 पुढील संख्या लिहा.

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ___, ___, ___, ...

जर तुम्हाला वरील क्रमात आणखी एक संख्या लिहायची असेल तर ती संख्या विषम असेल की सम असेल हे तुम्ही सांगू शकाल का? (मागील दोन संख्या न मिळविता)

? क्रमातील प्रत्येक संख्येची समानता किती आहे? क्रमाच्या मांडणीमध्ये तुम्हाला काही समानता दिसून येतात का?

आज विरहंक फिबोनसीची संख्या ही कविता ते ढोलकी वाजविणे, दृश्यीय कला आणि वास्तुकला, विज्ञान अशा अनेक गणितीय आणि कलात्मक सिध्दांताचा आधार बनतात. कदाचित या संख्यापैकी सर्वात आश्चर्यकारक घटना निसर्गात घडतात. उदाहरणार्थ डैझी (daisy) वरील पाकळ्यांची संख्या ही सामान्यतः एक विरहंक संख्या असते.

या प्रत्येक फुलामध्ये तुम्हाला किती पाकळ्या दिसतात?



13 पाकळ्यांचे डैझी फुल



21 पाकळ्यांचे डैझी फुल



34 पाकळ्यांचे डैझी फुल

© KSTRPS NOT TO BE REPUBLISHED

विरहंक फिबोनसीच्या संख्याचे इतरही अनेक उल्लेखनीय गुणधर्म आहेत ते आम्ही गणितात तसेच इतर विषयामध्ये नंतर पाहुया.

या संख्या खरोखरच कला, विज्ञान आणि गणित यांच्यातील जवळच्या संबंधाचे उदाहरण आहे.



6.5 वेषांतरातील अंक

तुम्ही संख्यासह अंकगणिती क्रिया केल्या आहेत. मुळाक्षरासाठीही हे सारखेच कसे करायचे?

खालील हिशेबामध्ये अंकाऐवजी मुळाक्षरे घेतलेली आहेत. प्रत्येक मुळाक्षर हे (0–9) यामधील एका विशिष्ट अंकाचे प्रतिनिधीत्व करते. प्रत्येक मुळाक्षर कोणत्या अंकाचे प्रतिनिधीत्व करते ते तुम्हाला काढावयाचे आहे.

```
  T
+ T
  T
 --
 UT
 --
```

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

येथे, आपल्याकडे एक अंकी संख्या आहे जी स्वतःमध्ये दोनदा मिळविल्यास 2–अंकी बेरीज मिळते. बेरजेच्या एकम स्थानाचा अंक हा मिळविलेल्या एकम अंकासारखाच आहे.

? U आणि T हे काय असू शकतात? T हे 2 आहे का? ते 3 असू शकते का?

एकदा तुम्ही शोध घेतल्यास तुम्हाला T=5 आणि UT=15 असे दिसून येते.

उजवीकडे दर्शविलेल्या आणखी एका उदाहरणाकडे पहा. येथे K2 चा अर्थ असा आहे की ती संख्या ही 2–अंकी संख्या असून सुटे स्थानात 2 अंक आहेत आणि K हे दशक/दशम स्थानात आहेत. K 2 हे स्वतःमध्ये मिळविल्यास HMM ही 3–अंकी बेरीज मिळते. M मुळाक्षराशी संबंधीत अंक कोणता आहे? बेरजेचे दशम आणि एकम स्थान हे दोन्ही सारखेच आहेत.

```
  K 2
+ K 2
 ----
 HMM
 ----
```

? H बद्दल कोणता अंक आहे? तो 2 असू शकतो का? तो 3 असू शकतो का?

या प्रकारचे प्रश्न सोडविणे हे मनोरंजक आणि मजेदार असू शकते! येथे यासारखे अधिक काही प्रश्न असून तुम्ही ते सोडविण्याचा प्रयत्न करू शकता.

प्रत्येक प्रश्नबद्दल तुम्ही काय विचार केला आहे. याची तुमच्या वर्गमित्रासोबत देवाणघेवाण करा.

तुम्ही काही नवीन पध्दती काढू शकाल.

YY	B5	KP	C1
+ Z	+ 3D	+ KP	+ C
ZOO	ED5	PRR	1FF

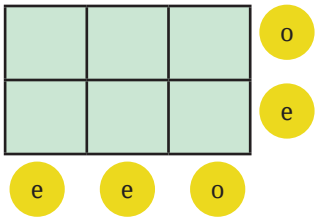
या प्रकारच्या प्रश्नांना क्रिप्टॉरिथम्स किंवा अल्फामेटीक्स असे म्हणतात.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. एक विद्युत दिवा चालू आहे. दोर्जी त्याचे बटण 77 वेळा चालू बंद करतो तर दिवा चालू किंवा बंद आहे? का?

2. लिस्वीनीकडे एक मोठा जुना शब्दकोश आहे. जेव्हा तिने तो उघडला तेव्हा त्यातून अनेक मोकळी पाने पडली. दोन्ही बाजूला मुद्रित असलेली प्रत्येकी एकूण 50 पाने तिने मोजली. मोकळी पाने असलेल्या पानांच्या संख्येची बेरीज 6000 असू शकेल काय? का किंवा का नाही?

3. येथे 2×3 आकाराचा एक चौकट आहे. प्रत्येक पंक्ती आणि स्तंभासाठीच्या बेरजेची समानता सम संख्येसाठी *'e'* आणि विषम संख्येसाठी '0' वर्तुळामध्ये लिहीलेली आहे. पंक्ती आणि स्तंभाच्या बेरजेच्या समानतेची पूर्तता करण्यासाठी 6 चौरस 3 विषम संख्या (*'0'*) आणि 3 सम संख्या (*'e'*) ने भरा.



4. जादूई चौरस '0' असणारे एक 3×3 चे जादूई चौरस तयार करा. सर्व संख्या '0' असू शकणार नाहीत. गरज असल्यास ऋण संख्याचा वापर करा.

5. सम किंवा विषम संख्यानी खालील रिकाम्या जागा भरा.

   a) सम संख्यांची विषम संख्येशी बेरीज _____ आहे.

   b) विषम संख्यांची सम संख्येशी बेरीज _____ आहे.

   c) सम संख्यांची सम संख्येशी बेरीज _____ आहे.

   d) विषम संख्यांची विषम संख्येशी बेरीज _____ आहे.

© KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

6. 1 ते 100 पर्यंतच्या संख्यांच्या बेरजेची समानता किती आहे?

7. विरहंक क्रमातील दोन क्रमगत संख्या 987 आणि 1597 आहेत. क्रमातील पुढील दोन संख्या कोणत्या आहेत? क्रमातील मागील (अगोदरच्या) दोन संख्या कोणत्या आहेत?

8. अंगनला 8 पायऱ्यांचा जिना चढावयाचा आहे. त्याचा खेळकर नियम असा आहे की तो एकावेळी एक किंवा 2 पायऱ्या चढू शकतो. उदाहरणार्थ, त्याचा एक मार्ग 1,2,2,1,2 आहे. तर तो किती वेगवेगळ्या मार्गानी शिखरावर (माथ्यावर) पोहोचू शकतो?

9. विरहंक क्रमाच्या 20 व्या पदाची समानता किती आहे?

10. सत्य असलेली विधाने ओळखा.
    a) $4m-1$ ही राशी नेहमी विषम संख्या देते.
    b) सर्व सम संख्या $6j-4$ मध्ये व्यक्त करता येतात.
    c) $2P+1$ आणि $2q-1$ या दोन्ही राशी सर्व विषम संख्यांचे वर्णन करतात.
    d) $2f+3$ ही राशी सम आणि विषम या दोन्ही संख्या देते.

11. क्रिप्टॅरिथम सोडवा.

$$\begin{array}{r} \text{UT} \\ +\ \text{TA} \\ \hline \text{TAT} \end{array}$$

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

सारांश

या प्रकरणात आम्ही खालील गोष्टीचा अभ्यास केलेला आहे.

- पहिल्या कृतीमध्ये आपण प्रत्यक्ष संख्या जाणून घेतल्या शिवाय संख्यांचा क्रम (उदा. उंचीचे माप) कसा मांडला जातो याबद्दल माहिती कशी दर्शवावयाची हे पाहिले.
- आपण समानतेची संकल्पना शिकलो, जोडीमध्ये मांडता येणाऱ्या संख्या (सम संख्या) आणि जोडीमध्ये मांडता न येणाऱ्या संख्या (विषम संख्या).
- आपण बेरीज आणि उत्पादनाची समानता कशी ठरवायची हे शिकलो.
- चौकोटीमधील बेरजेचा शोध घेताना पंक्ती आणि स्तंभ यांची बेरीज आपण चौकोटीदार चौरस भरणे अशक्य आहे की नाही हे ठरवू शकतो. आम्ही हे जादूचे चौरस बनविण्यासाठी वाढविली.
- आपण पाहिले की इतिहासात विरहंक संख्या पहिल्यांदा कलाद्वारे कशा शोधल्या गेल्या आहेत. विरहंक क्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,..... आहे.
- आपण क्रिप्टॅरिथम्सद्वारे गणित शोधक बनलो जिथे अंकाची जागा मुळाक्षरांनी घेतली आहे.

© KTES NOT TO BE REPUBLISHED



7 तीन छेदक रेषांची कहाणी

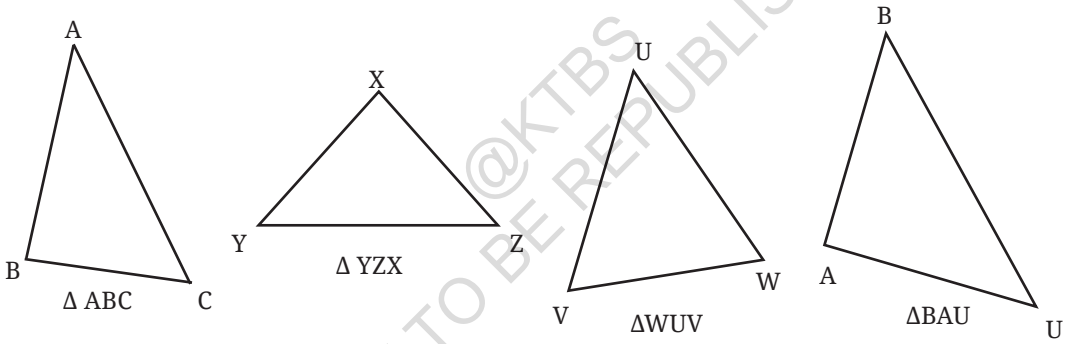
(A TALE OF THREE INTERSECTING LINES)

F9V5Z2

त्रिकोण हा सर्वात मूलभूत बंदिस्त आकार आहे. आपल्याला ही माहिती आहे की, त्यामध्ये खालील बाबी समाविष्ट आहेत.

- त्रिकोणाचे तीन बिंदू म्हणजेच शिरोबिंदू, आणि
- शिरोबिंदूंना जोडणारे रेषाखंड म्हणजेच त्रिकोणाच्या बाजू.

त्रिकोण विविध आकारात असतात. त्यापैकी काही आकृत्या खाली दिलेल्या आहेत.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

त्रिकोण दर्शविण्यासाठी वापरलेले चिन्ह आणि त्यांचे शिरोबिंदू वापरून त्रिकोणांची नावे कशी दिली जातात ते पहा. त्रिकोणाला नावे देताना, शिरोबिंदू कोणत्याही क्रमाने लिहू शकता.

तीन बाजूं एकमेकांना जोडल्या असता त्याच्या मध्ये तीन कोन तयार होतात त्यालाच आपण **त्रिकोणचे कोन** म्हणतो. उदाहरणार्थ, ΔABC मध्ये, हे कोन ∠CAB, ∠ABC, ∠BCA आहेत, जे आपण फक्त अनुक्रमे ∠A, ∠B, ∠C असे ही दर्शवितो.

? जेव्हा तीन शिरोबिंदू एका सरळ रेषेत असतात तेव्हा काय होते?

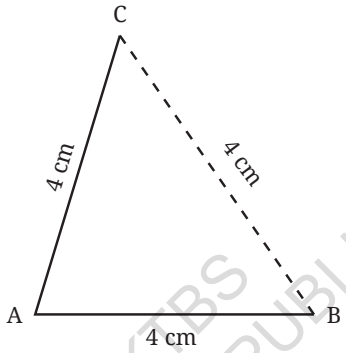
7.1 समभूज त्रिकोण (Equilateral Triangles)

सर्व त्रिकोणांमध्ये समभूज त्रिकोण हे सर्व बाजुनी सममित असतात. हा असा त्रिकोण आहे ज्यांच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या आहेत. आपण तो रचण्याचा प्रयत्न करूया.

? सर्व बाजूंची लांबी 4cm असणाऱ्या त्रिकोणाची रचना करा.

तुम्ही हा त्रिकोण कसा रचला आणि कोणत्या साधनांचा वापर केला? ही रचना फक्त मोजपट्टी (आणि पेन्सिल) वापरून करता येते का?

फक्त मोजपट्टीचा वापर करून हा त्रिकोण तयार करणे निश्चितच शक्य आहे. परंतु यासाठी अनेक वेळा प्रयत्न करावा लागू शकतो. समजा आपण 4cm लांबीचा पाया काढून त्याला AB म्हणू (खालील आकृती पहा) आणि तिसरा बिंदू C मोजपट्टीचा वापर करून असा चिन्हांकीत करू की AC = 4cm असेल. यामुळे BC ची लांबी देखील 4cm होणार नाही. जर असे झाले तर आपल्याला BC ची लंबी 4cm होईपर्यंत चिन्हांकीत करण्याचा प्रयत्न करत राहावा लागेल.

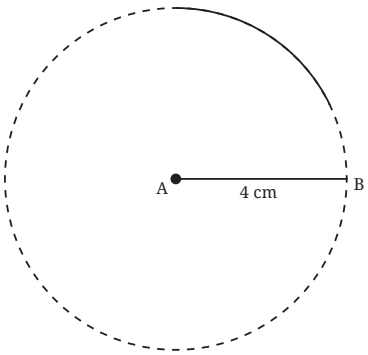


? ही रचना आपण अधिक सहजपणे कशी करू शकतो?

मागील वर्षी कंपास (कैवार) वापरून अशाच प्रकारची समस्या सोडविल्याचे आठवा (''रचनेचा खेळ'' या प्रकरणात). आपल्याला एका 'घराचा' वरचा बिंदू चिन्हांकीत करायचा होता जो इतर दोन बिंदूपासून 5cm अंतरावर होता. तो बिंदू मिळविण्यासाठी आपण वापरलेली पध्दत येथे देखील वापरली जाऊ शकते.

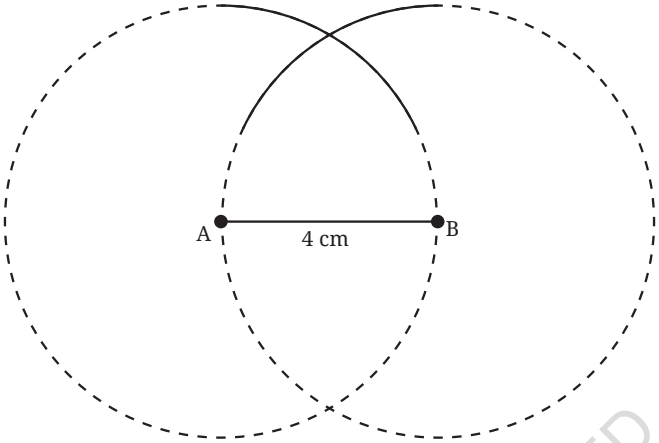
AB = 4cm काढल्यानंतर आपण पुढील गोष्टी करू शकतो.

पायरी 1: आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कंपासचा वापर करून A पासून 4cm. त्रिज्या असलेला पुरेसा लांब कंस तयार करा. बिंदू C हा या कंसावर कुठेतरी असेल.
आपण ते कसे चिन्हाकीत करू?



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

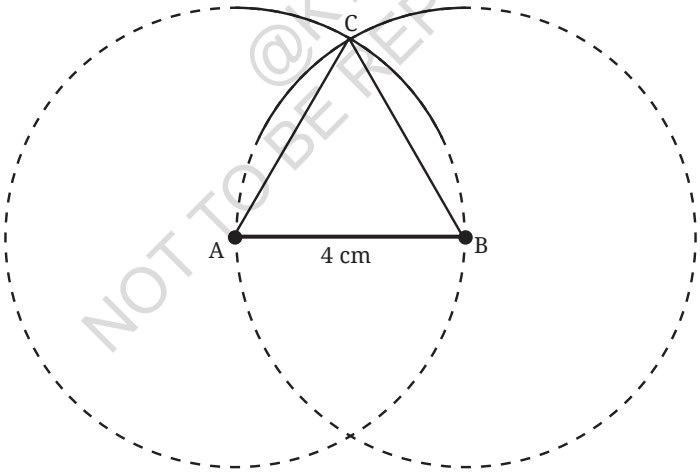
पायरी 2: B या बिंदूपासून 4cm त्रिज्येचा दुसरा कंस रचा.



समजा C हा बिंदू कंसांचा छेदनबिंदू आहे.

? या रचनेमुळे AC आणि BC या दोन्हींची लांबी 4cm आहे. तुम्हाला याचे कारण समजले का?

पायरी 3: अपेक्षित समभुज त्रिकोण मिळविण्यासाठी AC आणि BC जोडा.



@KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

7.2 त्रिकोणाच्या बाजू दिल्या असता त्रिकोणाची रचना करणे

आपण समभूज नसलेल्या त्रिकोणाची रचना कशी करू शकतो?

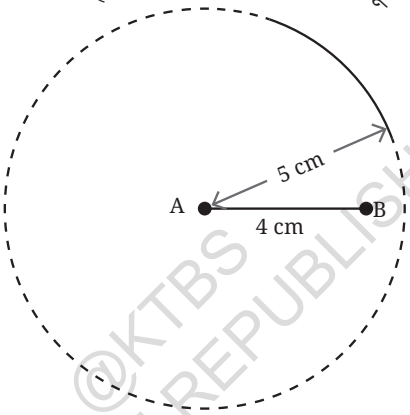
? 4cm, 5cm आणि 6cm लांबी असलेल्या बाजुंचा त्रिकोण रचा. मागील घटनेप्रमाणे हा त्रिकोण फक्त एका चिन्हांकीत मोजपट्टीचा वापर करून देखील तयार केला जाऊ शकतो परंतु यामध्ये अनेक वेळा प्रयत्न करावा लागेल.

? आपण हा त्रिकोण अधिक सहजतेने कसा रचू शकतो? त्रिकोणाच्या पायासाठी दिलेल्या लांबीपैकी एक बाजू निवडा. समजा ती 4cm. घेऊन पाया AB काढा. A आणि B हे पायाचे शिरोबिंदू समजा आणि तिसऱ्या शिरोबिंदूला C असे नांव द्या. AC=5cm आणि BC=6cm असे समजा.



आकृती 7.1

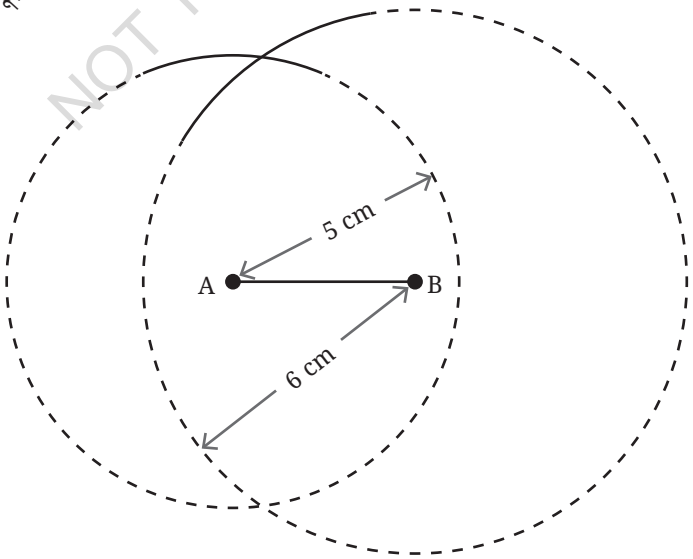
समभुज त्रिकोणांच्या बाबतीत आपण जसे केले त्याप्रमाणे प्रथम आपण A पासून 5cm अंतरावर असलेला कंस काढू. हा बिंदू A च्या केंद्रस्थानी असलेल्या आणि 5cm त्रिज्या असलेल्या वर्तुळावर आहे. बिंदू C हा या वर्तुळावर कुठेतरी असला पाहिजे. आपण तो कसा शोधू शकतो?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

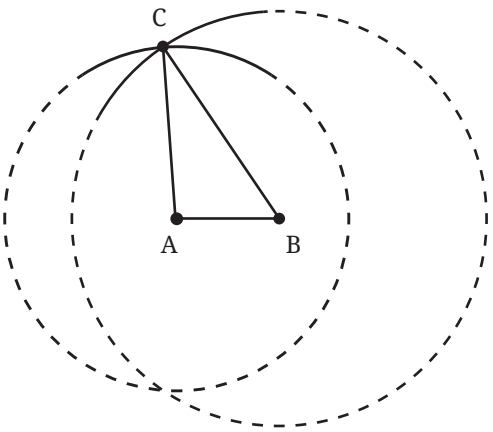
आकृती 7.2

आपण हा बिंदू B पासून 6cm अंतरावर आहे या वस्तुस्थितीचा वापर करून B पासून 6cm त्रिज्या असलेला एक कंस काढू.



आकृती 7.3

आवश्यक बिंदू C हा दोन वर्तुळांच्या छेदनबिंदूपैकी एक आहे. छेदनबिंदू हा तिसरा शिरोबिंदू असण्याचे कारण समभुज त्रिकोणासारखेच आहे. हा बिंदू दोन्ही वर्तुळांवर आहे. म्हणून त्याचे A पासूनचे अंतर A वर केंद्रित असलेल्या वर्तुळाच्या त्रिज्ये (5cm) इतके आहे आणि B पासूनचे त्याचे अंतर B वर केंद्रित असलेल्या वर्तुळाच्या त्रिज्ये (6cm) इतके आहे.



चला रचनेच्या पायऱ्यांचा सारांश घेऊया. तिसरा शिरोबिंदू मिळविण्यासाठी पूर्ण वर्तुळ रचने आवश्यक नाही. (आकृती 7.2 आणि 7.3 पहा)

पायरी 1: एका बाजूच्या लांबीने पाया AB रचा. AB = 4cm (आकृती 7.1 पहा) घ्या.

पायरी 2: A पासून 5cm त्रिज्या असलेला पुरेसा लांब कंस काढा. (आकृती 7.2 पहा).

पायरी 3: B पासून 6cm त्रिज्येने एक कंस काढा जेणे करून तो मागील कंसाला छेदेल (आकृती 7.3 पहा).

पायरी 4: दोन्ही चाप (कंस) जिथे मिळतात तो C हा तिसरा शिरोबिंदू आहे. ΔABC मिळविण्यासाठी AC व BC ला जोडा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

रचना करा

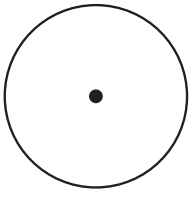
? खालील प्रमाणे त्रिकोणाच्या बाजू दिलेल्या आहेत त्यावरून त्रिकोण रचा. (सर्व एकके cm मध्ये आहेत.)

(a) 4, 4, 6
(b) 3, 4, 5
(c) 1, 5, 5
(d) 4, 6, 8
(e) 3.5, 3.5, 3.5

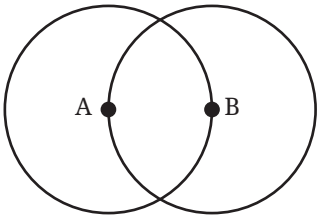
आपण पाहिले की, ज्या त्रिकोणांच्या तिन्ही बाजू समान असतात त्यांना **समभूज त्रिकोण** असे म्हणतात. ज्या त्रिकोणांच्या दोन बाजू समान असतात त्यांना **समद्विभूज त्रिकोण** असे म्हणतात.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

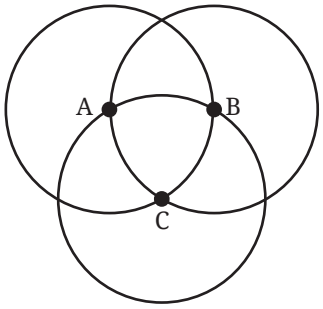
1. समद्विभूज त्रिकोण तयार करण्यासाठी वर्तुळावरील आणि (किंवा) केंद्रावरील बिंदूचा वापर करा.



2. वर्तुळांवरील आणि त्यांच्या केंद्रावरील बिंदू वापरून समद्विभूज आणि समभूज त्रिकोण तयार करा. वर्तुळे समान आकाराची आहेत.



A आणि B हे समान आकाराच्या वर्तुळांचे मध्य आहेत.



A, B आणि C हे समान आकाराच्या वर्तुळांचे मध्य आहेत.

कोणत्याही लांबीचे त्रिकोण रचने शक्य आहेत का?

दिलेल्या कोणत्याही लांबीच्या बाजूंचे त्रिकोण रचणे शक्य आहे का? अशा काही लांबी आहेत की ज्यासाठी त्रिकोण रचने अशक्य आहे? त्यांचा शोध घेऊया.

? 3cm, 4cm आणि 8cm बाजू असलेला त्रिकोण रचा.
येथे काय घडते आहे? तुम्ही त्रिकोण रचू शकता का?

? 2cm, 3cm आणि 6cm येथे लांबीचा आणखी एक संच आहे. या बाजूंच्या लांबीसाठी त्रिकोण रचने शक्य आहे का ते तपासा.

? त्रिकोण रचने अशक्य असलेल्या लांबीचे अधिक संच शोधण्याचा प्रयत्न करा. त्यामध्ये तुम्हाला काही सहसंबंध सापडतो का ते पहा.

गणिती बोल

आपल्याला असे दिसून येते की, कांही लांबीच्या संचासाठी त्रिकोण रचणे शक्य आहे आणि कांहीसाठी शक्य नाही. दिलेल्या लांबीच्या संचासाठी त्रिकोण अस्तित्वात आहेत की नाहीत हे आपण कसे तपासू शकतो? एक मार्ग म्हणजे प्रत्यक्षात त्रिकोण रचण्याचा प्रयत्न करणे आणि ते शक्य आहे का ते तपासणे. हे तपासण्याचा आणखी एखादा सोपा मार्ग आहे का?

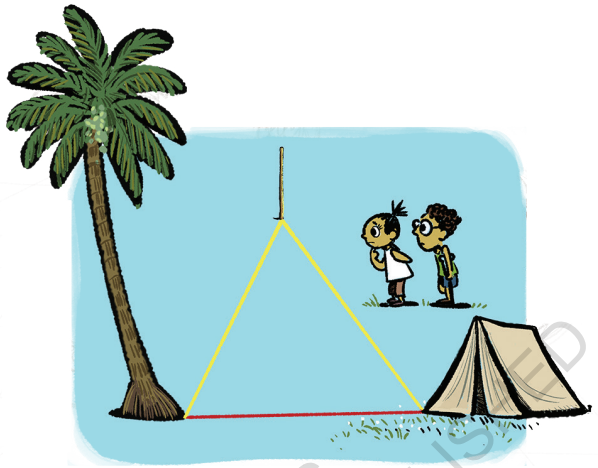
त्रिकोणांची असमानता

10cm, 15cm आणि 30cm या लांबी विचारात घ्या. अशा बाजू असलेला त्रिकोण अस्तित्वात आहे का?

या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी आपण त्रिकोणांच्या गुणधर्माचा अभ्यास करूया. कल्पना करा की एका लहान सपाट जमिनीवर एक तंबू, एक झाड आणि खांब आहेत समजा की तुम्ही तंबूच्या प्रवेशद्वारावर आहात

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

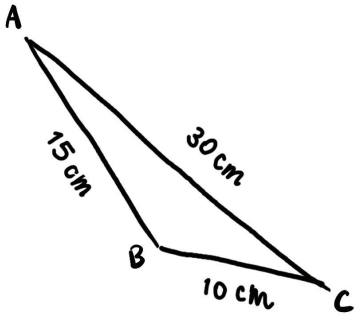
आणि झाडाकडे जाण्याची इच्छा आहे. तर सर्वात जवळचा मार्ग कोणता आहे? (i) झाडाकडे जाणारा सरळ रेषेचा मार्ग (लाल मार्ग) किंवा (ii) तंबूपासून खांबाकडे जाणारा सरळ रेषेचा मार्ग, त्यानंतर खांबापासून झाडाकडे जाणारा सरळ रेषेचा मार्ग (पिवळा मार्ग)?



स्पष्टपणे, तंबूपासून झाडापर्यंतचा सरळ मार्ग खांबावरून जाणाऱ्या चौक मार्गापेक्षा लहान आहे. खर तर थेट सरळ मार्ग हा तंबूपासून झाडापर्यंतचा सर्वात लहान मार्ग आहे.कोणत्याही दोन बिंदूमधील थेट मार्ग तिसऱ्या बिंदूतून जाणाऱ्या वर्तुळाकार मार्गापेक्षा लहान असेल का? स्पष्टपणे याचे उत्तर हो, हे आहे.

? या आकलनाचा वापर करून 10cm, 15cm आणि 30cm लांबी असलेल्या त्रिकोणाच्या अस्तित्वाबद्दल कांही सांगता येईल का?

समजा या लांबीच्या संचासाठी एक त्रिकोण आहे. लक्षात ठेवा की या टप्यावर आपल्याला त्रिकोणाच्या अस्तित्वाबद्दल खात्री नाही. परंतु आपण फक्त असे गृहीत धरू शकतो की तो अस्तित्वात आहे. चला एक कच्ची आकृती काढूया.



आकृती 7.4

या त्रिकोणात सर्व कांही ठीक दिसते का?

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

जर हा त्रिकोण शक्य असेल, तर कोणत्याही दोन शिरोबिंदूमधील थेट मार्ग तिसऱ्या शिरोबिंदूतून जाणाऱ्या वळणदार मार्गापेक्षा लहान असावा. हे आपल्या कच्च्या आकृतीसाठी पुरेसे आहे का?

B आणि C मधील मार्गाचा विचार करूया. सरळ मार्गाची लांबी = BC = 10cm.

शिरोबिंदू A मधून जाणाऱ्या वर्तुळाकार मार्गाची लांबी किती आहे? ही रेषाखंड BA आणि AC च्या लांबीची बेरीज आहे का?

वर्तुळाकार मार्गाची लांबी = BA + AC = 15cm+30cm = 45cm. सरळ मार्गाची लांबी वळणदार मार्गाच्या लांबीपेक्षा कमी आहे का? हो, आता आपण A आणि B मधील मार्गाचा विचार करूया. सरळ मार्गाची लांबी = AB = 15cm.

शिरोबिंदू C द्वारे वळणदार मार्गाची लांबी काढल्यास, आपल्याला वर्तुळाकार मार्गाची लांबी = AC+CB=30cm+10cm=40cm मिळते.

सरळ मार्गाची लांबी वळणदार मार्गाच्या लांबीपेक्षा कमी आहे का? हो शेवटी, C आणि A मधील मार्गाचा विचार करा.

सरळ मार्गाची लांबी = CA=30cm.

वळणदार मार्गाची लांबी = CB + BA = 10cm+15cm = 25cm. सरळ मार्गाची लांबी वळणदार मार्गाच्या लांबीपेक्षा कमी आहे का? या घटनेत, सरळ मार्ग लांब आहे, जो हास्यास्पद आहे. असा त्रिकोण अस्तित्वात असू शकतो का? नाही.

म्हणून, 10cm, 15cm आणि 30cm बाजूंची लांबी असलेला त्रिकोण अस्तित्वात असू शकत नाही.

अशाप्रकारे आपण रचनेशिवाय पाहू शकतो की 10cm, 15cm आणि 30cm लांबीच्या संचासाठी त्रिकोण अस्तित्वात असू शकत नाही. अवकाशीय अंतर्ज्ञान आणि तर्कशक्तीच्या माध्यमातून आपण हे शोधू शकलो आहे.

छेदनबिंदू आणि समांतर रेषांचे गुणधर्म शोधण्यासाठी आपण यासारखेच अंतर्ज्ञान आणि तर्क कसे वापरले ते आठवा. भूमितीचा अभ्यास करत असताना आपण हे करत राहू.



? 3cm, 3cm आणि 7cm बाजू लांबी असलेल्या त्रिकोणाच्या अस्तित्वाबद्दल आपण काही सांगू शकतो का? तुमचे उत्तर रचने नुसार पडताळून पहा.

? ''आकृती 7.4 मधील कच्च्या आकृतीमध्ये, लांबी वेगळ्या क्रमाने देणे शक्य आहे का जेणेकरून सरळ मार्ग नेहमीच वळणदार मार्गापेक्षा लहान असतील? जर ते शक्य असेल तर त्रिकोण अस्तित्वात असू शकतो.

? त्रिकोणात लांबीची अशी पुनर्रचना शक्य आहे का?

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. आम्ही रचनेनुसार तपासले आहे की 3cm, 4cm आणि 8cm आणि 2cm, 3cm आणि 6cm अशा बाजूंच्या लांबीचे त्रिकोण नाहीत. त्रिकोण रचनेचा प्रयत्न न करता तुम्हाला हे शोधता येते का ते तपासा.

2. खालील प्रत्येक लांबीच्या संचासाठी त्रिकोणाच्या अस्तित्वाबद्दल आपण काही सांगू शकतो का?
   a) 10km, 10km आणि 25km
   b) 5mm, 10mm आणि 20 mm
   c) 12cm, 20cm आणि 240 cm

तुमच्या हे लक्षात आले असेल की एक ढोबळ (कच्ची) आकृती वापरून आणि थेट मार्गाच्या लांबीची त्यांच्या संबंधित वळणदार मार्गाच्या लांबीशी तुलना करणे म्हणजे प्रत्येक लांबीची इतर दोन लांबीच्या बेरजेशी तुलना करण्यासारखेच आहे. अशा तीन तुलना करायच्या आहेत.

3. 'आतापर्यत पाहिलेल्या प्रत्येक लांबीच्या संचासाठी, तुमच्या कदाचित लक्षात आले असेल की किमान दोन तुलनामध्ये इतर दोन्हीच्या बेरजेपेक्षा थेट लांबी कमी होती. (जर नसेल तर पुन्हा तपासा !). उदाहरणार्थ, 10cm 15cm आणि 30cm लांबीच्या संचासाठी असे घडते तेव्हा दोन तुलना आहेत.

हे प्रयत्न करा

$$10 < 15+30$$
$$15 < 10 + 30$$

पण तिसऱ्या लांबीसाठी हे घडत नाही. $30>10+15$.

? हे नेहमीच घडेल का? म्हणजेच, कोणत्याही लांबीच्या संचासाठी, किमान दोन तुलना असतील का जिथे थेट लांबी इतर दोन्हींच्या बेरजेपेक्षा कमी असेल? वेगवेगळ्या लांबीच्या संचांचा शोध घ्या.

? शिवाय दिलेल्या लांबीच्या संचासाठी, गणना न करता, कोणत्या लांबी इतर दोन्हींच्या बेरजेपेक्षा लगेच कमी असतील हे ओळखणे शक्य आहे का?
(**सूचना :** चढत्या क्रमाने थेट लांबी विचारात घ्या)

? तीन बाजूंच्या लांबी दिल्यास त्रिकोणाचे अस्तित्व तपासण्यासाठी आपल्याला कशाची तुलना करावी लागेल?

जेव्हा प्रत्येक लांबी इतर दोन्हींच्या बेरजेपेक्षा लहान असते, तेव्हा आपण म्हणतो की लांबी त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करते. उदाहरणार्थ, संच 3,4,5 त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करते तर संच 10, 15, 30 त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करत नाही.

©RTBS NOT TO BE REPUBLISHED

आपण पाहिले की 10,15,30 सारख्या बाजूंची लांबी त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी ही त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी असू शकत नाही.

4cm, 5cm आणि 8cm बाजू लांबी असलेला त्रिकोण अस्तित्वात आहे का? हा त्रिकोण अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करतो.

$$8<4+5=9$$

? आपल्याला इतर दोन्ही बाजू तपासण्याची गरज का नाही?

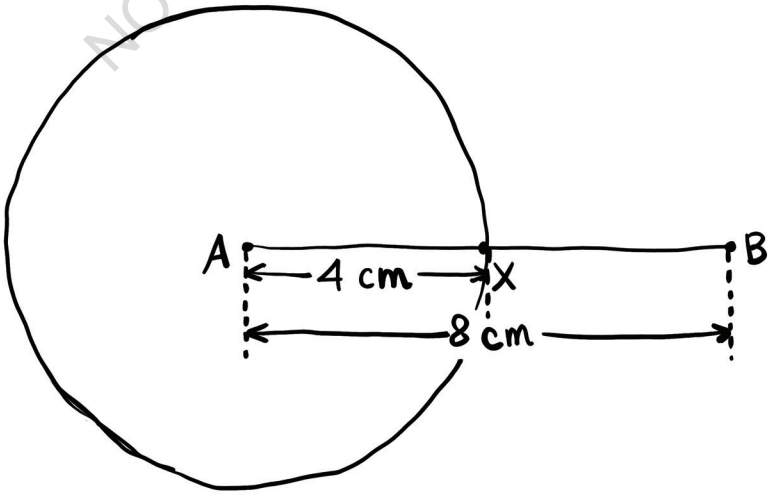
याचा अर्थ असा की सर्व थेट मार्गाची लांबी वळणदार मार्गाच्या लांबीपेक्षा कमी आहे. हे त्रिकोणाच्या अस्तित्वासाठी पूरक आहे का? जर थेट मार्गाची लांबी जास्त असती तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकलो असतो की त्रिकोण नक्कीच अस्तित्वात नाही. परंतु या प्रकरणात आपण फक्त एवढेच म्हणू शकतो की त्रिकोण अस्तित्वात असू शकतो किंवा असू शकत नाही.

त्रिकोण अस्तित्वात राहण्यासाठी, तिसरा शिरोबिंदू मिळविण्यासाठी आपण रचलेल्या कंसांना छेदणे आवश्यक आहे. प्रत्यक्षात रचना न करता हे घडेल हे निश्चित करणे शक्य आहे का?

वर्तुळांच्या रचनेने दर्शविणे

आपण कल्पना करूया की, रचनेची सुरूवात सर्वात लांब बाजू ही पाया समजून करतो. AB हा 8cm लांबीचा पाया आहे असे समजा. पुढची पायरी म्हणजे इतर दोन लांबींच्या चापांची रचना करणे. 4cm आणि 5cm. फक्त चाप काढण्याऐवजी वर्तुळ पूर्ण काढूया.

समजा, आपण A ला केंद्रस्थानी ठेवून 4cm त्रिज्या असलेले वर्तुळ काढले.

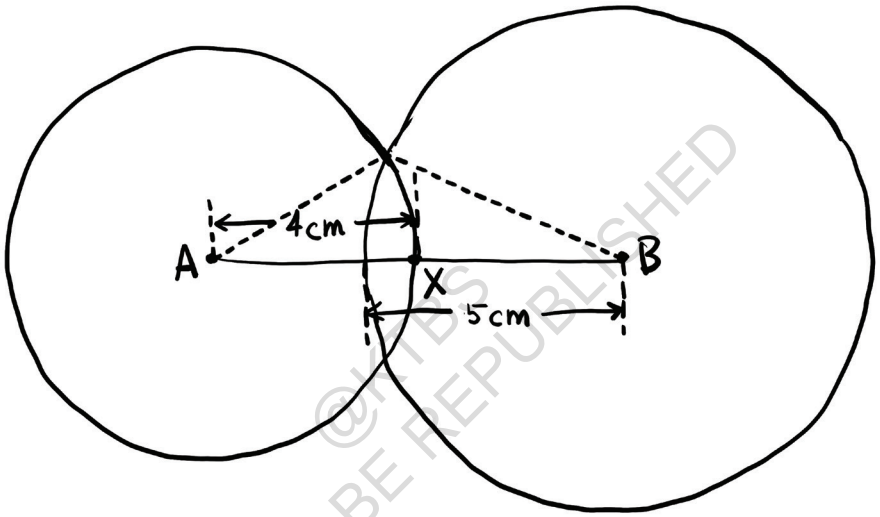


NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

? आता, समजा B केंद्र घेऊन 5cm त्रिज्या असलेले एक वर्तुळ तयार केले आहे. तुम्ही परिणामी आकृतीची कच्ची आकृती काढू शकता का?

खालील आकृती लक्षात घ्या की, AX =4cm आणि AB=8cm. तर BX = किती होईल? ही लांबी दर्शविलेली होणारी आकृती पाहण्यास मदत करते का?

BX = 4cm आणि B केंद्र असलेल्या वर्तुळांची त्रिज्या 5cm असल्याने ते हे स्पष्ट करते की वर्तुळे एकमेकाना दोन बिंदूत छेदतील.



आकृती 7.5 एकमेकांना दोन बिंदूमध्ये छेदणारी वर्तुळे

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

यावरून आपल्याला त्रिकोणाच्या अस्तित्वाबद्दल काय समजते? बिंदू A आणि B वर्तुळांच्या छेदन बिंदूपैकी कोणत्याही एका बाजूला आपल्याला आवश्यक त्रिकोण मिळेल. अशाप्रकारे 4cm, 5cm आणि 8cm बाजूंची लांबी असलेला त्रिकोण अस्तित्वात आहे.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालीलपैकी कोणती लांबी त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांबीइतकी असू शकते? तुमची उत्तरे स्पष्ट करा. लक्षात ठेवा की प्रत्येक संचासाठी तिन्ही बाजूंच्या लांबीची एकके समान आहेत.

(a) 2, 2, 5 (b) 3, 4, 6

(c) 2, 4, 8 (d) 5, 5, 8

(e) 10, 20, 25 (f) 10, 20, 35

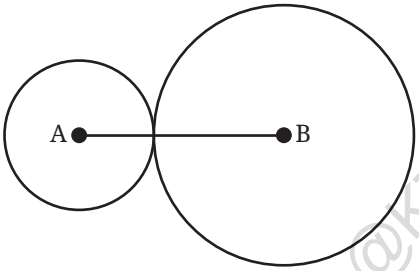
(g) 24, 26, 28

मागील उदाहरणावरून आपल्याला असे दिसून येते की, ज्या ज्या वेळी त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करणारा संच (प्रत्येक बाजूची लांबी < इतर दोन बाजुंची बेरीज) अशा तीन बाजुंचा असेल तेव्हा तो त्रिकोण अस्तित्वात असतो.

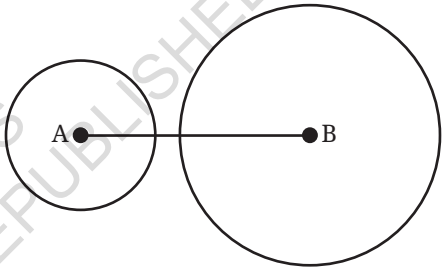
? जेव्हा लांबीचा संच त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करतो तेव्हा त्रिकोण नेहमीच अस्तित्वात असतील का? आपण खात्री कशी करू शकतो?

जेव्हा त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण होते तेव्हा वर्तुळे एकमेकांना छेदतात हे दाखविता आले तरच आपण त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची खात्री बाळगू शकतो. (आकृती 7.5 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे) परंतु जेव्हा दोन वर्तुळे तयार होतात तेव्हा इतर कांही शक्यता असतात का? त्यांची कल्पना करून अभ्यास करूया.

खालील वेगवेगळ्या आकृत्यांची कल्पना करता येते.

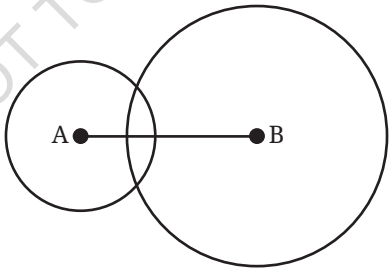


स्थिती 1: वर्तुळे एकमेकांना स्पर्श करतात.



स्थिती 2: वर्तुळे एकमेकांना छेदत किंवा स्पर्श करत नाहीत.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



स्थिती 3: वर्तुळे एकमेकांना अंतर्गतरित्या छेदतात.

लक्षात घ्या की वर्तुळ रचताना आपण,

a) पाया AB ची लांबी = दिलेल्या लांबीपैकी सर्वात मोठी लांबी निवडतो.

b) वर्तुळांच्या त्रिज्या या लहान दोन बाजूंच्या लांबी आहेत.

वरीलपैकी कोणत्या स्थितीत त्रिकोण तयार होईल? स्थिती 3, जेव्हा वर्तुळे एकमेकांना अंतर्गत छेदतात तेव्हाच त्रिकोण तयार होतात.

? त्रिज्या (दोन लहान लांबी) आणि AB (सर्वात कमाल लांबी) यांच्यातील संबंध शोधून या प्रत्येक स्थितीचा अभ्यास करूया.

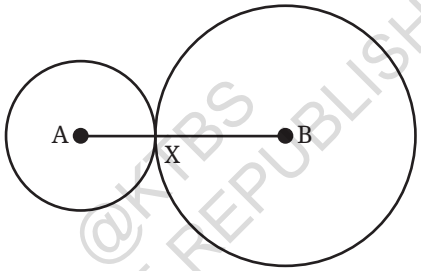
स्थिती 1: वर्तुळे एका बिंदूत एकमेकांना स्पर्श करतात

ही स्थिती घडण्यासाठी,

दोन्ही त्रिज्यांची बेरीज = AB

किंवा

दोन लहान लांबीची बेरीज = सर्वात मोठी लांबी



@KYBS
NOT TO BE REPUBLISHED

स्थिती 2: वर्तुळे एकमेकांना छेदत नाहीत.

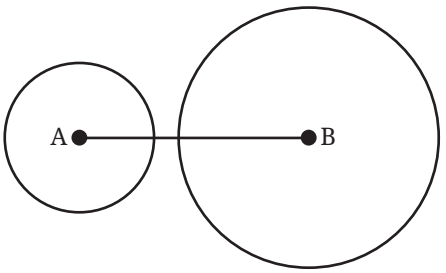
? ही स्थिती घडण्यासाठी त्रिज्या आणि AB मधील संबंध काय असावा लागेल?

आकृतीवरून असे दिसून येते की,

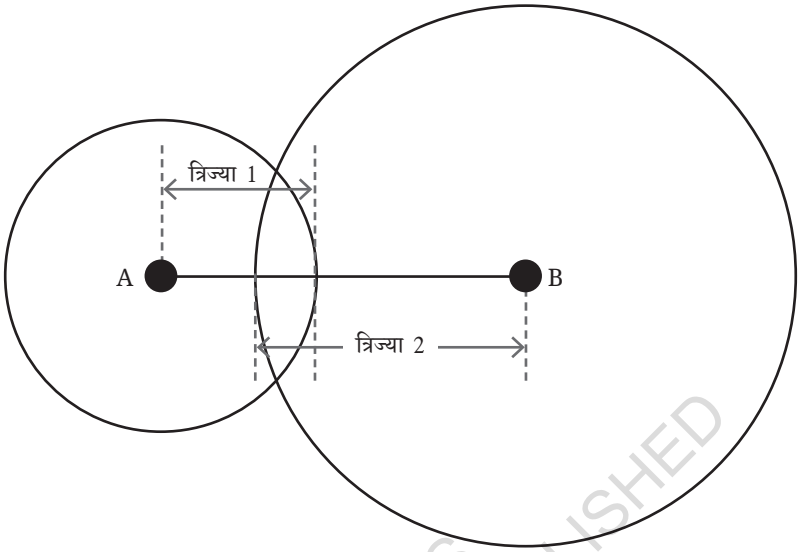
दोन त्रिज्यांची बेरीज < AB

किंवा

दोन लहान लांबीची बेरीज < सर्वात मोठी लांबी



स्थिती 3: वर्तुळे एकमेकांना छेदतात.



AB ही एका त्रिज्येपासून घेतलेली आणि दुसऱ्या त्रिज्येचा कांही भाग मिळून असते. तर,

दोन त्रिज्यांची बेरीज > AB

किंवा

दोन लहान लांबीची बेरीज > सर्वात मोठी लांबी.

@KTPS NOT TO BE REPUBLISHED

? जेव्हा लांबी या त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची कसोटी पूर्ण करतात, तेव्हा त्रिकोण अस्तित्वात आहेत का हे सांगण्यासाठी आपण या विश्लेषणाचा वापर करू शकतो का?

जर दिलेल्या लांबी त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पूर्तता करत असतील तर दोन लहान लांबीची बेरीज सर्वात मोठ्या लांबीपेक्षा जास्त असेल. याचा अर्थ असा की स्थिती 3 मध्ये जेथे वर्तुळे एकमेकांना छेदतात आणि म्हणून त्रिकोण अस्तित्वात असेल.

? त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पूर्तता न करणाऱ्या लांबीच्या संचासाठी दोन वर्तुळे कशी असतील? ज्या लांबीच्या संचांसाठी वर्तुळे आहेत त्यांची 3 उदाहरणे शोधा

a) एका बिंदूत एकमेकांना स्पर्श करतात.

b) एकमेकांना छेदत नाहीत.

? त्रिकोणाचे अस्तित्व तपासण्यासाठी वापरता येईल अशी संपूर्ण प्रक्रिया तयार करा.

निष्कर्ष :

जर दिलेला तीन लांबींचा संच त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पुर्तता करतो, तर अशा बाजूंची लांबी असलेला त्रिकोण अस्तित्वात असतो. जर संच त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पुर्तता करत नसेल, तर त्या बाजूंची लांबी असलेला त्रिकोण अस्तित्वात नाही.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील प्रत्येक लांबीच्या संचासाठी त्रिकोण अस्तित्वात आहेत का ते तपासा.

   a) 1, 100, 100 b) 3, 6, 9 c) 1, 1, 5 d) 5, 10, 12

2. 50, 50, 50 बाजू असलेला समभुज त्रिकोण अस्तित्वात आहे का? सर्वसाधारपणे, कोणत्याही बाजूंच्या लांबीचा समभुज त्रिकोण अस्तित्वात आहे का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

3. खालीलपैकी प्रत्येकबाबतीत तिसऱ्या लांबीसाठी किमान 5 संभाव्य मूल्ये द्या म्हणजे एक त्रिकोण असेल ज्यामध्ये ही बाजूची लांबी असेल (दशांश मूल्ये देखील निवडता येतील).

   a) 1, 100 b) 5, 5 c) 3, 7

   तिसऱ्या भागाच्या सर्व संभाव्य लांबीचे वर्णन तुम्ही करू शकता का ते पहा. प्रत्येक बाबतीत बाजू, जेणेकरून त्या बाजूंच्या लांबीचा एक त्रिकोण अस्तित्वात असेल. उदाहरणार्थ, स्थिती (a) मध्ये फक्त 99 आणि 101 मधील सर्व संख्या शक्य असतील.

हे प्रयत्न करा

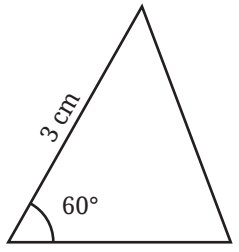
© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

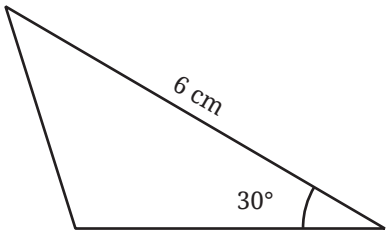
7.3 कांही बाजू आणि कोन दिलेले असताना त्रिकोणांची रचना करणे.

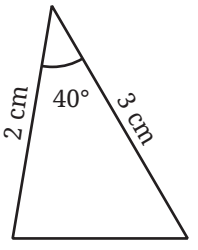
त्रिकोणांच्या बाजू दिल्या असता त्यांची रचना कशी करायची हे आपण पाहिले. आता आपण अशी रचना करू जेथे कांही बाजूऐवजी कोनांची मापे दिली आहेत.

दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन

जर दोन बाजू आणि त्यांच्यामधील कोन दिलेला असेल तर आपण त्रिकोण कसा रचू शकतो? समाविष्ट कोन दर्शविणाऱ्या मोजमापांची कांही उदाहरणे येथे आहेत.

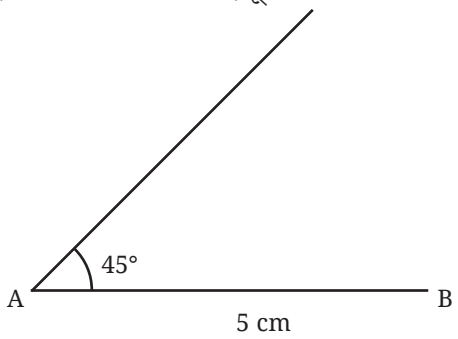






? AB=5cm, AC=4cm आणि $\angle A = 45^0$ असा त्रिकोण ABC रचा.

दिलेल्या बाजूंपैकी AB, हा त्रिकोणाचा पाया म्हणून घेऊ.

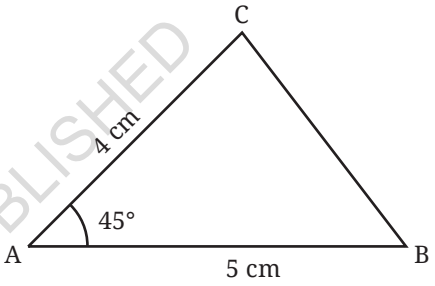


पायरी 1: AB ही 5cm लांबीची बाजू काढू.

पायरी 2: $\angle A = 45^0$ काढा आणि कोनांची दुसरी भूजा काढा.

पायरी 3: दुसऱ्या भुजावर बिंदू C चिन्हांकीत (खूण) करा म्हणजे AC=4cm होईल.

पायरी 4: आवश्यक त्रिकोण मिळविण्यासाठी BC जोडा.



? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील मोजमापांचे त्रिकोण रचा जेथे बाजूमधील कोन समाविष्ट आहे.
   a) 3cm, 75^0, 7cm
   b) 6 cm, 25^0, 3cm
   c) 3cm, 120^0, 8cm

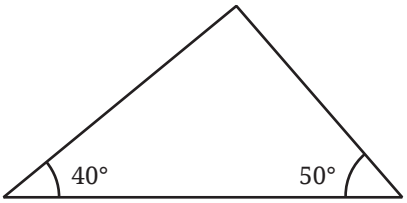
? आपण पाहिले आहे की, सर्व बाजूंच्या लांबीच्या संचांसाठी त्रिकोण अस्तित्वात नाहीत. दोन बाजू आणि समाविष्ट कोनाच्या बाबतीत मोजमापांचे तसे संयोजन आहे का, जेथे त्रिकोण शक्य नाही? रचनेदरम्यान तुम्ही जे निरीक्षण करता ते वापरून तुमचे उत्तर सिध्द करा.

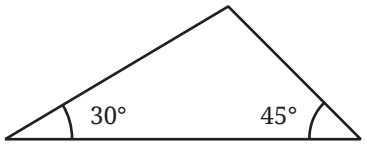
गणिती बोल

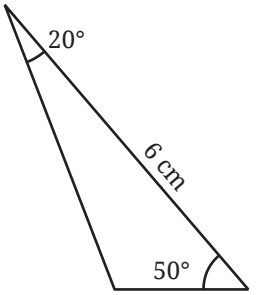
दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू असलेला त्रिकोण रचने.

या घटनेत आपल्याला दोन कोन आणि दोन्ही कोनांमधील बाजू दिली आहे, ज्याला आपण समाविष्ट बाजू म्हणतो. अशा मोजमापांची कांही उदाहरणे येथे आहेत.

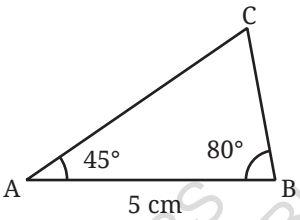
@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED







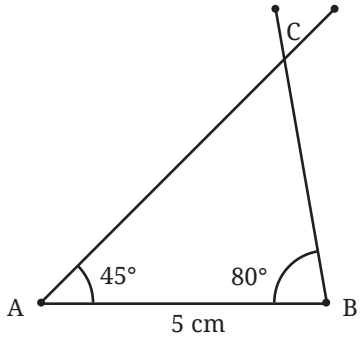
? ΔABC असा रचा की, जेथे $AB = 5cm$, $\angle A = 45^0$ आणि $\angle B = 80^0$ दिलेल्या बाजूवरून कच्ची आकृती काढू.



पायरी 1: पाया AB हा 5cm लांबीचा काढा.

पायरी 2: $\angle A = 45^0$ आणि $\angle B = 80^0$ काढा.

पायरी 3: दोन नवीन रेषाखंडांचा छेदनबिंदू हा तिसरा शिरोबिंदू C आहे.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील मोजमापाचे त्रिकोण रचा.
   a) 75^0, 5cm, 75^0
   b) 25^0, 3cm, 60^0
   c) 120^0, 6cm, 30^0

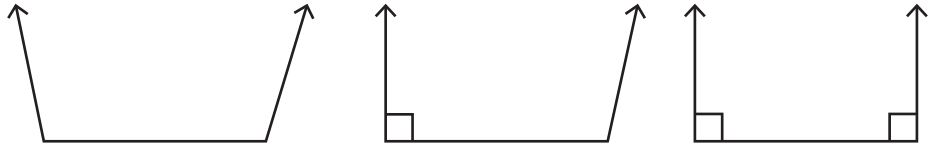
त्रिकोण नेहमीच अस्तित्वात असतात का?

गणिती बोल

? दोन कोन आणि त्यांच्या समाविष्ट बाजूच्या प्रत्येक संयोजनासाठी त्रिकोण अस्तित्वात आहेत का? निरीक्षण करा.

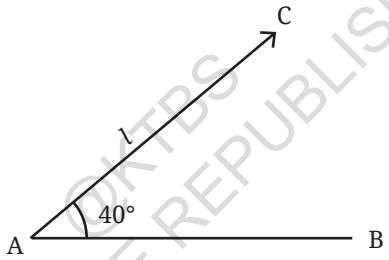
? जेव्हा आपल्याला तिन्ही बाजू दिल्या जातात, तेव्हा असे दिसून येते की दोन कोनांच्या आणि समाविष्ट बाजूच्या प्रत्येक संयोजनासाठी नेहमीच त्रिकोण नसतो.

? जेथे त्रिकोण शक्य नाही, अशा बाजूसह दोन कोनांच्या मोजमापांची उदाहरणे शोधा. अशा परिस्थितीची कल्पना करण्याचा प्रयत्न करूया. एकदा पाया काढला की, कल्पना करा की इतर बाजू कशा असाव्यात जेणेकरून त्या एकमेकांना छेदू नयेत. येथे कांही स्पष्ट उदाहरणे आहेत.



जर दोन्ही कोन काटकोन (90^0) किंवा काटकानापेक्षा मोठे असतील तर ते त्रिकोण होणे शक्य नाही हे स्पष्ट आहे.

आता आपण एका पायाच्या कोनाला लघुकोन बनवू. समजा 40^0 घेऊ. रेषा एकमेकांना न मिळण्यासाठी किंवा न छेदण्यासाठी दुसऱ्या कोनाची मूल्ये कोणती घ्यावीत?

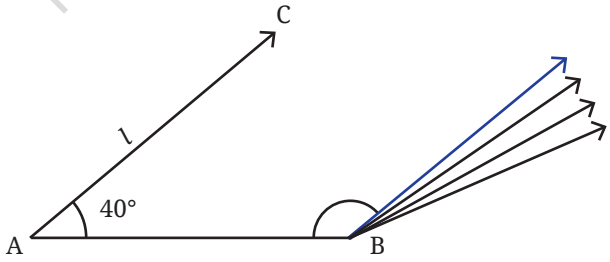


© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

? हे स्पष्ट आहे की जर B कडून येणारी रेषा उजवीकडे पुरेशी ''कलत'' असेल तर ती रेषा *l* ला छेदणार नाही.

a) यासाठी संभाव्य ∠B (आकृतीत चिन्हाकीत) शोधण्याचा प्रयत्न करा.

b) रेषा न जुळण्यासाठी ∠B चे सर्वात लहान मूल्य काय असू शकते?



निळी रेषा म्हणजे सर्वात कमी उजवीकडे कलणारी रेषा जी '*l*' रेषेला छेदत नाही.

कल्पकतेने हे स्पष्ट आहे की, सर्वात लहान ∠B तयार करणारी रेषा '*l*' ला समांतर असली पाहिजे. या समांतर रेषेला आपण m म्हणू.

या घटनेत $\angle B$ ची खरी किंमत किती असायला हवी ते तुम्ही सांगू शकाल का?

(**सूचना :** लक्षात घ्या की AB ही छेदिका आहे.)

आपण पाहिले आहे की, जेव्हा दोन रेषा समांतर असतात तेव्हा छेदन बिंदूच्या एकाच बाजूच्या अंतर्गत कोनांची बेरीज 180^0 होते. म्हणून $\angle B = 140^0$.

तर $\angle B$ च्या या मुल्यांसाठी त्रिकोण अस्तित्वात नाही का? AB ची लांबी येथे कांही भूमिका बजावेल का?

वरील चर्चेवरून असे दिसून येते की त्रिकोणाचे अस्तित्व निश्चित करण्यात AB ची लांबी कोणतीही भूमिका बजावित नाही. आपण असे म्हणू शकतो की जेव्हा $\angle B$ हा 140^0 किंवा त्यापेक्षा मोठा असतो तेव्हा त्रिकोण अस्तित्वात नसतो.

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील प्रत्येक कोनासाठी, दुसरा असा कोन शोधा ज्यासाठी त्रिकोण a) शक्य आहे, b) शक्य नाही प्रत्येक श्रेणीसाठी किमान दोन वेगवेगळे कोन शोधा.

   a) 30^0 b) 70^0

   c) 54^0 d) 144^0

2. खालीलपैकी कोणत्या जोड्या त्रिकोणाचे कोन असू शकतात आणि कोणत्या असू शकत नाहीत ते निश्चित करा.

   a) $35^0, 150^0$ b) $70^0, 30^0$

   c) $90^0, 85^0$ d) $50^0, 150^0$

त्रिकोणाच्या असमानतेनेप्रमाणे तुम्ही असा नियम बनवू शकता का जो दोन कोनांचे वर्णन करतो ज्यासाठी त्रिकोण शक्य आहे?

हा नियम तयार करण्यासाठी दोन्ही कोनांची बेरीज वापरता येईल का?

जेव्हा दोन दिलेल्या कोनांची बेरीज 180^0 पेक्षा कमी असते, तेव्हा या कोनांसह एक त्रिकोण अस्तित्वात असतो. जर बेरीज 180^0 पेक्षा जास्त किंवा समान असेल तर या कोनांसह कोणताही त्रिकोण अस्तित्वात नाही.

चला दोन कोन घेऊ, समजा 60^0 आणि 70^0, ज्यांची बेरीज 180^0 पेक्षा कमी आहे. समाविष्ट बाजू 5cm घेऊ.

तिसऱ्या कोनाचे माप काय असू शकते? जर पायाची लांबी दुसऱ्या कोणत्याही मुल्यामध्ये बदलली उदाहरणार्थ, 7cm तर हे माप बदलते का? रचना करा व शोधा.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

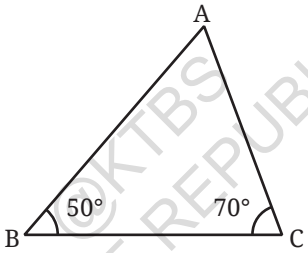
? सर्वसाधारपणे, एकदा दोन कोन निश्चित झाले की, तिसरा कोन समाविष्ट केलेल्या बाजूच्या लांबीवर अवलंबून असतो का? वेगवेगळ्या कोनांच्या आणि लांबीच्या जोड्यांसह प्रयत्न करा.

मोजमापांवरून असे दिसून येईल की बाजूच्या लांबीचा तिसऱ्या कोनावर कोणताही परिणाम (किंवा खूपच कमी परिणाम) होत नाही. या निरीक्षणासह रचना आणि मापन न करता आपण तिसरा कोन शोधू शकतो का ते पाहू.

? कोणत्याही दोन कोनांमध्ये आणि तिसऱ्या कोनात काही संबंध आहे का हे पाहण्यासाठी वेगवेगळ्या त्रिकोणांसह प्रयोग करून पहा. हा संबंध शोधण्यासाठी, तुम्ही कोणत्या माहितीचा मागोवा घ्याल आणि तुम्ही गोळा केलेल्या माहितीचे नियोजन कसे कराल?

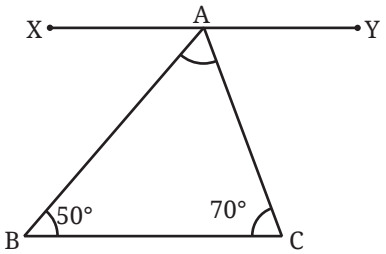
गणिती बोल

? $\angle B=50^0$ आणि $\angle C = 70^0$ असलेला त्रिकोण ABC विचारात घ्या. रचनेशिवाय $\angle A$ कसे शोधायचे ते पाहू.



हे समांतर रेषांची संकल्पना निश्चित करण्यासाठी उपयुक्त आहे हे आपण पाहिले आहे की, त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज 180^0 पेक्षा कमी असते. समांतर रेषांचा वापर करून तिसरा कोन $\angle BAC$ देखील शोधता येतो.

समजा आपण शिरोबिंदू A मधून BC ला समांतर XY रेषा काढली.



आकृती 7.6

? येथे आपण नवीन कोन तयार होताना पाहू शकतो: $\angle XAB$ आणि $\angle YAC$. त्यांची मूल्ये काय आहेत?

रेषा XY ही BC ला समांतर असल्याने, $\angle XAB = \angle B$ आणि $\angle YAC = \angle C$, कारण ते रेषेचे व्युत्क्रम कोन आहेत. AB आणि AC चे छेदनबिंदू म्हणून $\angle XAB = 50^0$ आणि $\angle YAC = 70^0$. यावरून आपण $\angle BAC$ शोधू शकतो का?

आपल्याला माहित आहे की, $\angle XAB$, $\angle YAC$ आणि $\angle BAC$ मिळून 180^0 तयार होतील.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$\therefore \angle XAB + \angle YAC + \angle BAC = 180^0$$

$$50^0 + \angle BAC + 70^0 = 180^0$$

$$120^0 + \angle BAC = 180^0$$

$$\angle BAC = 180^0 - 120^0$$

$$\angle BAC = 60^0$$

आता एक त्रिकोण रचा (BC ला कोणत्याही योग्य लांबीचा मानून) आणि हे खरोखरच होते का ते पडताळून पहा.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. समांतर रेषेचा वापर करून त्रिकोणाचा तिसरा कोन शोधा जेव्हा त्याचे दोन कोन, खालील प्रमाणे दिलेले आहेत.
   a) 36^0, 72^0
   b) 150^0, 15^0
   c) 90^0, 30^0
   d) 75^0, 45^0

2. सर्व कोन 70^0 असलेला त्रिकोण तुम्ही काढू शकाल का? जर दोन कोन 70^0 आहेत तर तिसरा कोन किती असेल? जर त्रिकोणातील सर्व कोन समान असतील तर त्यांचे माप किती असेल?

3. येथे एक त्रिकोण आहे ज्यामध्ये $\angle B = \angle C$ आणि $\angle A = 50^0$. तुम्हाला $\angle B$ आणि $\angle C$ ची किंमत काढता येईल का?

हे प्रयत्न करा

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म:

? कोणत्याही त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेबद्दल आपण काय म्हणू शकतो?

ABC त्रिकोणाचा विचार करा. त्याच्या कोनांची बेरीज काढण्यासाठी आपण पायाला सामांतर रेषा काढण्याची हीच पद्धत वापरू शकतो A मधून BC ला समांतर असलेली रेषा काढा.

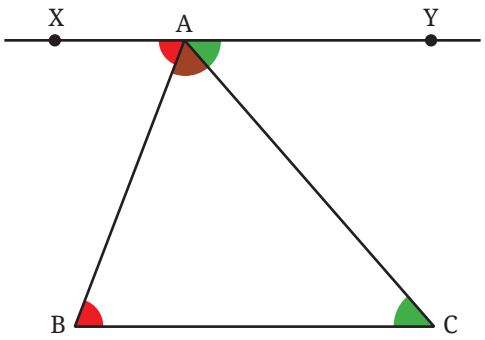
आपल्याला $\angle A + \angle B + \angle C$ शोधायचे आहे.

आपल्याला माहित आहे की $\angle B = \angle XAB$, $\angle C = \angle YAC$.

तर $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle XAB + \angle YAC$

$= 180^0$ (कारण ते एकत्र येऊन एक सरळ कोन तयार करतात.)

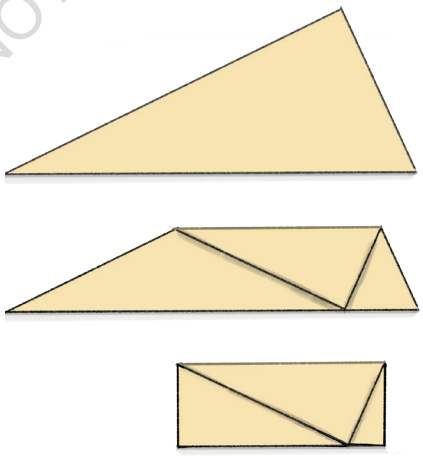
अशाप्रकारे आपण सिद्ध केले आहे की कोणत्याही त्रिकोणातील तीन कोनांची बेरीज 180^0 असते. यालाच त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म म्हणतात.



आकृती 7.7

कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म आपण कसा शोधला यावर विचार करण्यासाठी थोडा वेळ घ्या. सुरूवातीला तिसरा कोन आणि इतर दोन कोनांमधील संबंध अजिबात स्पष्ट नव्हता. तरीपण वरच्या शिरोबिंदूमधून (आकृती 7.7 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे) पायाला समांतर रेषा काढण्याच्या एका साध्या कल्पनेमुळे अचानक संबंध स्पष्ट झाला. ही कल्पक कल्पना गणिताच्या इतिहासातील ''द **एलिमेंट्स**'' या एका अतिशय प्रभावी पुस्तकात आढळून येते. हे पुस्तक ग्रीक गणित तज्ञ **युक्लिड** यांनी लिहीले आहे, जे सुमारे 300 इ.स.पूर्व मध्ये हयात होते.

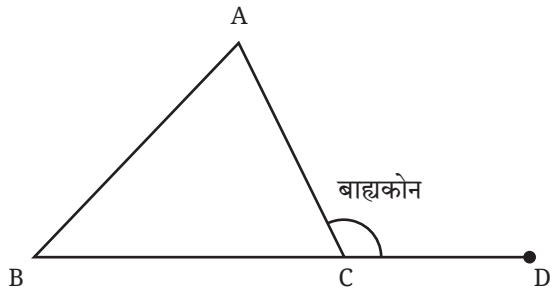
गणितात सर्जनशील विचारसरणी कशी महत्वाची भूमिका बजावित याचे आणखी एक उदाहरण खालील प्रमाणे आहे! एक त्रिकोणी आकाराचा कागद घ्या. तो घडी करून कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म पडताळण्याचा एक सोयीस्कर मार्ग आहे. या त्रिकोणातील कोनांची बेरीज 180^0 आहे हे यावरून कसे दिसून येते ते तुम्ही पाहा?



@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

बाह्यकोन

त्रिकोणाची एक बाजू वाढविल्यास, वाढविलेली रेषा व त्रिकोणाची सलग्न बाजू यांच्या दरम्यान तयार होणाऱ्या कोनाला त्रिकोणाचा बाह्यकोन असे म्हणतात. आकृतीमध्ये ∠ACD हा बाह्यकोन आहे.



जर $\angle A = 50^0$ आणि $\angle B = 60^0$ असेल तर ∠ACD शोधा. कोनांची बेरीज गुणधर्मावरून आपल्याला माहित आहे की जर,

$50^0 + 60^0 + \angle ACB = 180°$

$110° + \angle ACB = 180°$

म्हणून $(\therefore)\ \angle ACB = 70°$

म्हणून $(\therefore)\ \angle ACD = 180° - 70° = 110°$ कारण

∠ACB आणि ∠ACD मिळून एक सरळ कोन तयार करतात. ∠A आणि ∠B च्या वेगवेगळ्या मांपांसाठी बाह्यकोन शोधा. तुम्हाला बाह्यकोन आणि या दोन कोनांमध्ये काही संबंध दिसतो का?

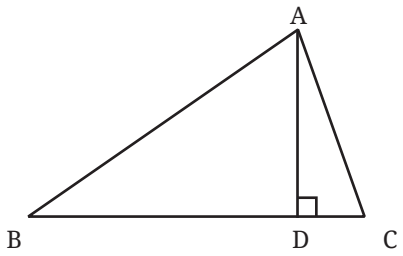
(**सूचना :** कोनांच्या बेरीज गुणधर्मावरून, $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^0$.) आपल्याकडे ∠ACD + ∠ACB = 180° देखील आहे, कारण ते एक सरळ कोन तयार करतात.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

7.4 त्रिकोणांच्या उंचीशी संबंधित रचना

त्रिकोणाच्या संदर्भात उपयुक्त मोजमापांचा आणखी एक संच आहे. त्याच्या विरूध्द बाजूंच्या संदर्भात त्याच्या प्रत्येक शिरोबिंदूची उंची असते.

आपल्या सभोवतालच्या जगात, आपण विविध वस्तूंच्या उंचीबद्दल बोलतो एखाद्या व्यक्तीची उंची झाडाची उंची, इमारतीची उंची इ. 'उंची' या शब्दाचा अर्थ काय आहे?

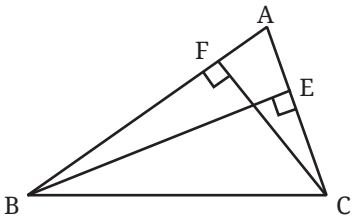


आकृती 7.8

त्रिकोण ABC चा विचार करा. शिरोबिंदू A ची त्याच्या विरूद्ध बाजू BC पासूनची उंची किती आहे आणि ती कशी मोजता येईल?

समजा AD हा A पासून BC ला काढलेला लंब आहे. AD ची लांबी ही BC पासून A शिरोबिंदूची उंची आहे. AD हा रेषाखंड त्रिकोणाच्या ''उंची'' पैकी एक असल्याचे म्हटले जाते.

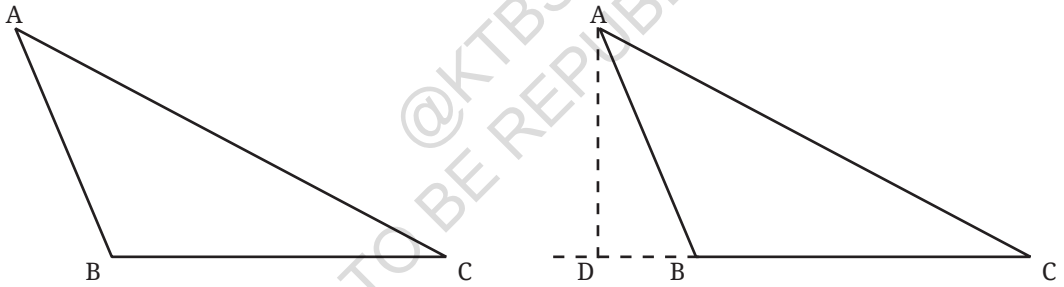
खालील आकृतीमध्ये इतर उंची BE आणि CF आहेत. ते इतर शिरोबिंदूपासून त्यांच्या विरुद्ध बाजूंना काढलेले लंब आहेत.



जेव्हा जेव्हा आपण त्रिकोणाची उंची हा शब्द वापरतो तेव्हा सामान्यत: पाया म्हणून घेतलेल्या कोणत्याही बाजूच्या उंचीच्या लांबीचा संदर्भ घेतो (आकृती 7.8 च्या बाबतीत ही उंची AD आहे).

या त्रिकोणात A ते BC पर्यंतची उंची किती असेल?

आपण BC वाढवितो आणि नंतर A पासून या रेषेवर लंब काढतो.



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कागदाच्या घडीचा वापर करून उंची काढणे

? एक कागद त्रिकोणी आकारात कापून घ्या. एका बाजूला पाया म्हणून ठरवा. तो पायावर अशाप्रकारे घडी करा की परिणामी घडी वरच्या शिरोबिंदूपासून पायापर्यंत उंचीवर असेल. तयार होणारी घडी पायाला लंब का असावी याचे समर्थन करा.

त्रिकोणाच्या उंचीची रचना

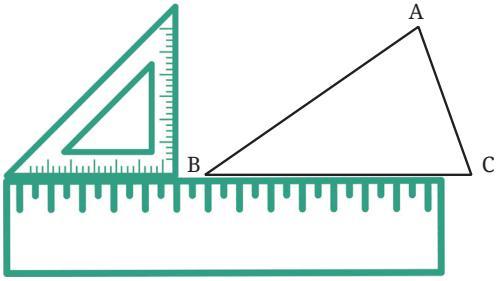
एक विषमभूज (अनियमित) त्रिकोण तयार करा. त्याच्या शिरोबिंदूंना A,B,C अशी नांवे द्या आणि BC हा पाया घ्या.

? A ते BC पर्यंतची उंची काढा.

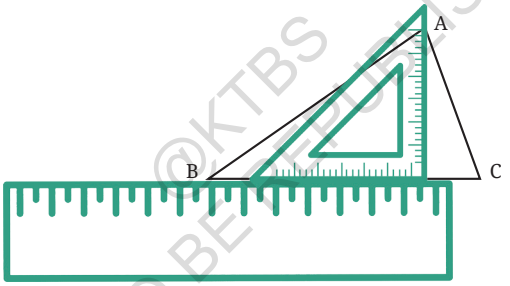
फक्त मोजपट्टी वापरून उंची तयार करणे अचूक नाही. 90^0 चा अचूक कोन काढण्यासाठी आपण मोजपट्टी सह त्रिकोणी गुण्याचा वापर करतो.

? हे कसे करायचे ते तुम्ही पाहू शकता का?

पायरी 1: मोजपट्टी पायाशी सरळ रेषत ठेवा. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे त्रिकोणी गुण्या मोजपट्टीवर ठेवा, जेणेकरून काटकोनाची एक कडा मोजपट्टीला स्पर्श करेल.



पायरी 2: जोपर्यंत त्रिकोणी गुण्याची उभी कडा किंवा बाजू शिरोबिंदू A ला स्पर्श करत नाही तो पर्यंत. त्रिकोणी गुण्या पट्टीच्या बाजूवर सरकवा.



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

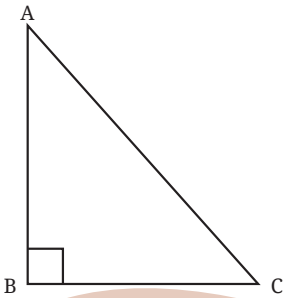
पायरी 3: त्रिकोणी गुण्याच्या उभ्या कडेवरून A पासून BC पर्यंतची उंची काढा.

? असा त्रिकोण आहे का ज्यामध्ये बाजू ही देखील उंची असते? अशा त्रिकोणाची कल्पना करा आणि एक कच्ची आकृती काढा.

आपण पाहतो की हे त्रिकोणामध्ये दिसून येथे जेथे एक कोन काटकोन असतो.

ज्या त्रिकोणात एक कोन काटकोन असतो त्या त्रिकोणाला काटकोन त्रिकोण असे म्हणतात.

A ची BC पर्यंतची उंची AB आहे.



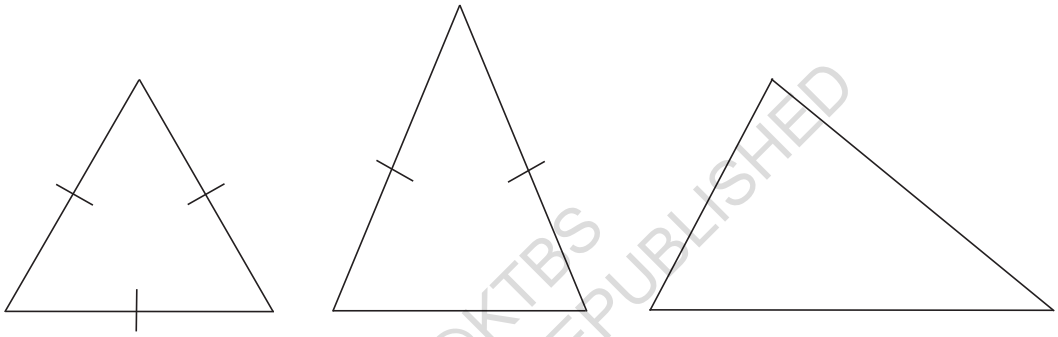
7.5 त्रिकोणांचे प्रकार

त्रिकोणांच्या अभ्यासात आपल्याला खालील प्रकारचे त्रिकोण आढळले आहेत; समभूज, समद्विभूज, विषमभूज आणि काटकोन त्रिकोण.

? तुम्हाला इतर कोणत्याही प्रकारचा त्रिकोण दिसला का?

त्रिकोणांचे समभूज आणि समद्विभूज असे वर्गीकरण बाजूंच्या समानतेवर आधारीत होते.

समभूज त्रिकोणांच्या तिन्ही बाजू समान लांबीच्या असतात, समद्विभूज त्रिकोणांच्या दोन बाजू समान लांबीच्या असतात. विषमभूज त्रिकोणांच्या तिन्ही बाजू वेगवेगळ्या लांबीच्या असतात.



समभूज त्रिकोण | समद्विभूज त्रिकोण | विषमभूज त्रिकोण

©KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

कोनांच्या समानतेच्या आधारावर समान वर्गीकरण करता येईल का? या दोन्ही वर्गीकरणांमध्ये कांही संबंध आहे का? या प्रश्नांची उत्तरे आपण नंतरच्या प्रकरणात देऊ.

त्रिकोणाचे काटकोन त्रिकोण म्हणून वर्गीकरण करताना आम्ही कोनमापकाचा वापर केला आहे.

? कोनांवर आधारीत इतर कोणते त्रिकोण आहेत?

कोनांच्या मापांच्या आधारे त्रिकोणांचे वर्गीकरण लघुकोन त्रिकोण, काटकोन त्रिकोण आणि विशालकोन त्रिकोण असे केले जाते. काटकोन त्रिकोण म्हणजे काय हे आपण आधीच पाहिले आहे. हा एक कोन काटकोन असलेला त्रिकोण आहे.

त्याचप्रमाणे एका विशालकोन त्रिकोणामध्ये एक कोन विशालकोन असतो.

? लघुकोन त्रिकोण काय असू शकतो? आपण त्याला एक लघुकोन असलेला त्रिकोण म्हणून परिभाषित करू शकतो का? का नाही?
लघुकोन त्रिकोणामध्ये, तिन्ही कोन लघुकोन असतात.



? आकृती काढा.

1. BC = 5cm, AB=6cm, CA=5cm असा त्रिकोण ABC रचा व A ते BC पर्यंतची उंची काढा.
2. RY= 4cm, TR =7cm, $\angle R = 140^0$ असा त्रिकोण TRY रचा व T पासून RY पर्यंतची उंची काढा.
3. $\angle B = 90°$, AC = 5cm. असलेला ΔABC हा काटकोन त्रिकोण रचा. या मोजमापांमध्ये किती वेगवेगळे त्रिकोण आहेत?

   हे प्रयत्न करा

   (सूचना: लक्षात घ्या की इतर मापे कोणतीही मूल्ये घेऊ शकतात. AC हा पाया घ्या. $\angle A$ आणि $\angle C$ कोणती मूल्ये घेऊ शकतात जेणेकरून दुसरा कोन 90^0 असेल?)
4. रचनेच्या सहाय्याने पुढिल, रचना करणे शक्य आहे का ते शोधा. समभुज त्रिकोण जो i) काटकोन ii) विशालकोन आहे. तसेच समद्विभुज त्रिकोण जो i) काटकोन ii) विशालकोन आहे.

सारांश

- बाजूंची लांबी दिल्यास कंपासचा वापर करून त्रिकोणांची रचना सुलभपणे करता येते.
- तीन लांबीचा संच जिथे प्रत्येकाची लांबी इतर दोघांच्या बेरजेपेक्षा लहान असेल तर, तो त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पूर्तता करतो असे म्हटले जाते.
- त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांबी त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पूर्तता करतात आणि जर दिलेल्या लांबीच्या संचाने त्रिकोणाच्या अस्तित्वाची पूर्तता केली तर त्या बाजूंच्या लांबीने त्रिकोण तयार करता येतो.
- खालील मोजमापे दिली असता त्रिकोण तयार करता येतात.
  a) दोन बाजू आणि समाविष्ट असलेला कोन.
  b) दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू
- त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज नेहमीच 180^0 असते.
- त्रिकोणाची उंची म्हणजे शिरोबिंदूपासून त्याच्या विरूद्ध बाजूपर्यंतचा लंब रेषाखंड आहे.
- समभूज त्रिकोणांच्या तीन बाजू समान लांबीच्या असतात. समद्विभूज त्रिकोणांच्या दोन बाजू समान लांबीच्या असतात. विषमभूज त्रिकोणांच्या तिन्ही बाजू वेगवेगळ्या लांबीच्या असतात.
- त्रिकोणांचे वर्गीकरण त्यांच्या कोनांच्या मापनानुसार लघुकोन त्रिकोण, काटकोन त्रिकोण आणि विशालकोन त्रिकोण असे केले जाते.

© MKTBS NOT TO BE REPUBLISHED



कोड्याची वेळ !

एका पेटीमधील सर्वात लहान मार्ग

एका पेटीच्या कोपऱ्यात एक कोळी आहे. त्याला सर्वात दूरपर्यंत विरुद्ध कोपऱ्यात पोहोचायचे आहे. (आकृतीत दर्शविलेला) तो उडू शकत नसल्यामुळे, तो पेटीच्या पृष्ठभागावर चालत जाऊनच विरुद्ध बिंदूपर्यंत पोहोचू शकतो. तो सर्वात लहान कोणता मार्ग निवडेल?



एक पुठ्ठ्याची पेटी घ्या आणि कोपऱ्यापासून त्याच्या विरुद्ध कोपऱ्यापर्यंतचा सर्वात लहान मार्ग चिन्हांकित करा. या मार्गाची लांबी तुमच्या मित्रांनी बनविलेल्या मार्गाशी तुलना करा.





@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

8 अपूर्णांकांवरील क्रिया

(WORKING WITH FRACTIONS)

I7G2V5

8.1 अपूर्णांकांचा गुणाकार

आरोन 1 तासात 3 किलोमीटर चालतो. तर तो 5 तासांत किती अंतर चालू शकेल? हा एक सोपा प्रश्न आहे. आपल्याला माहित आहे की अंतर शोधण्यासाठी आपल्याला 5 आणि 3 यांचा गुणाकार शोधणे आवश्यक आहे, म्हणजेच आपण 5 आणि 3 यांचा गुणाकार करतो.



1 तासात कापलेले अंतर = 3 km

म्हणून, 5 तासांत कापलेले अंतर

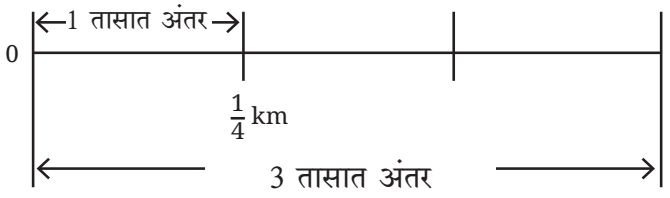
= 5×3 km

= 3+3+3+3+3 km

= 15 km

? आरोनचा पाळीव कासव खूपच कमी वेगाने चालतो. तो 1 तासात फक्त $\frac{1}{4}$ किलोमीटर चालतो. तर तो 3 तासात किती अंतर चालू शकेल?

येथे, एका तासात कापलेले अंतर अपूर्णांकात आहे. हे महत्वाचे नाही. कापलेले एकूण अंतर गुणाकाराच्या पध्दतीने मोजले जाते.



1 तासात कापलेले अंतर = $\frac{1}{4}$ km

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

म्हणून, 3 तासात कापलेले अंतर = $3 \times \frac{1}{4}$ km

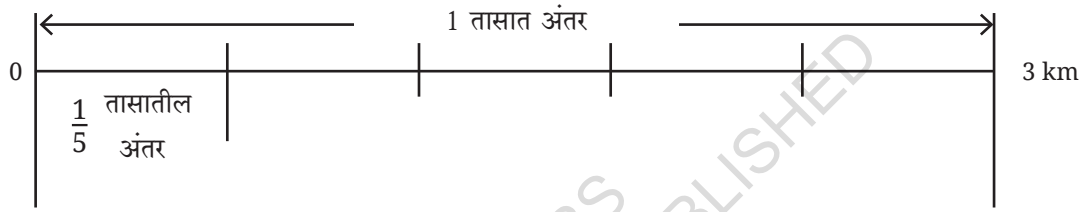
$= 3 \times \frac{1}{4}$ km

3 तासात कासव $\frac{3}{4}$ km चालू शकतो.

? चालण्यात घालविलेला वेळ एका तासापेक्षा अगदी कमी आहे, अशा एका प्रकरणाचा विचार करूया.

आपण पाहिले की आरोन 1 तासात 3 किलोमीटर चालू शकतो. तर तो $\frac{1}{5}$ तासात किती अंतर चालू शकतो ?

आपण गुणाकाराने कापलेले एकूण अंतर मोजू शकतो.



$\frac{1}{5}$ तासामध्ये कपलेले अंतर = $\frac{1}{5} \times 3$ km.

? **शोधा पाहू. (Figure it out)**

1 तासात कापलेले अंतर = 3km

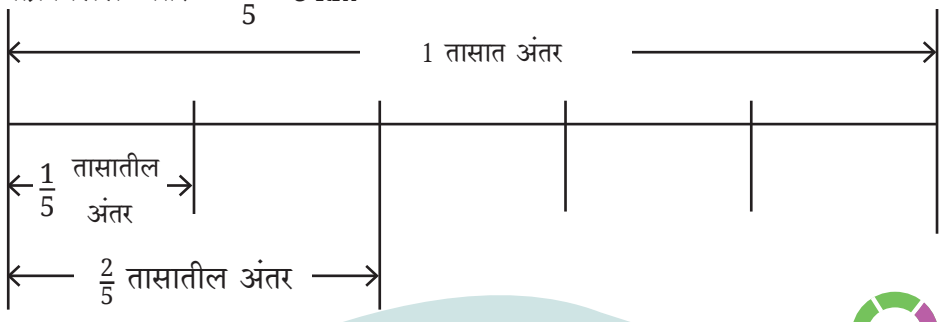
3 किलोमीटरचे 5 समान भाग केल्यास, ते अंतर $\frac{3}{5}$ km आहे, ते आपल्याला मिळणाऱ्या लांबी इतकेच अंतर $\frac{1}{5}$ तासात अक्रमिले जाते.

हे आपल्याला सांगते की $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$

? आरोन $\frac{2}{5}$ तासात किती अंतर चालू शकतो ?

पुन्हा एकदा, आपल्याकडे आहे,

आक्रमिलेले अंतर = $\frac{2}{5} \times 3$ km



@KEBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. आपण प्रथम तासामध्ये कापलेले अंतर शोधू शकतो.

2. ज्याअर्थी, $\frac{2}{5}$ हा कालावधी $\frac{1}{5}$ पेक्षा दुप्पट आहे, म्हणून एकूण अंतर काढण्यासाठी या अंतराला 3ने गुणू.

येथे गणना आहे.

1 तासात कापलेले अंतर = 3km.

1. $\frac{1}{5}$ तासात कापलेले अंतर

   = 3 किलोमीटरचे 5 समान भागांमध्ये विभागल्याने मिळणारी लांबी आहे.

2. हे अंतर 2 ने गुणाकार केल्यास, आपल्याला मिळते,

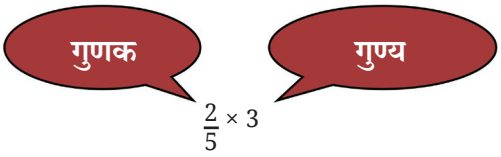
   $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ km.

   यावरून आपण पाहू शकतो की

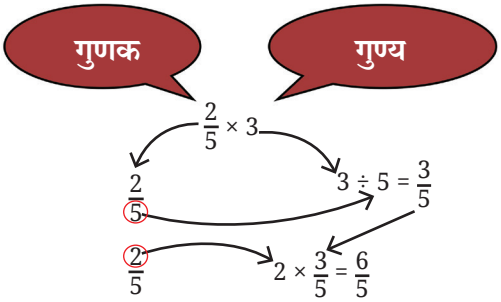
   $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$ km.

चर्चा

आम्ही हा गुणाकार खालीलप्रमाणे केला आहे. सर्वप्रथम, आपण गुण्य 3ला गुणकाचा, छेद 5 ने भागतो, आणि आपल्याला $\frac{3}{5}$ मिळतात.



नंतर आपण उत्तराला गुणकाच्या अंशाने, म्हणजेच 2 ने गुणाकार करून $\frac{6}{5}$ मिळविले आहे.



अशा प्रकारे जेव्हा जेव्हा आपल्याला अपूर्णांक आणि पूर्णांक यांचा गुणाकार करायचा असतो तेव्हा आपण वरील पायऱ्याचे अनुकरण करतो.

उदाहरण 1: एका शेतकऱ्याला 5 नातवंडे आहेत. त्याने त्याच्या प्रत्येक नातवंडांना $\frac{2}{3}$ एकर जमीन दिली. तर त्याने त्याच्या नातवंडांना एकूण किती जमीन दिली ?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

उदाहरण 2 : 1 तास इंटरनेट वापराची किंमत ₹8 आहे. तर $1\frac{1}{4}$ इंटरनेट वापराची किंमत किती?

$1\frac{1}{4}$ तास म्हणजे $\frac{5}{4}$ तास (मिश्र अपूर्णांकाचे साध्या अपूर्णांकात रूपांतर करणे).

$\frac{5}{4}$ तासाची इंटरनेट वेळेची किंमत $= \frac{5}{4} \times 8$

$= 5 \times \frac{8}{4}$

$= 5 \times 2$

$= ₹10.$

$1\frac{1}{4}$ तास इंटरनेट वापराची किंमत ₹10 आहे.

(?) शोधा पाहू. (Figure it out)

1. तेन्झिन दररोज $\frac{1}{2}$ ग्लास दूध पितो. तर तो आठवड्यातून किती ग्लास दूध पितो? त्याने जानेवारी महिन्यात किती ग्लास दूध पिले असेल?
2. कामगारांचा एक संघ 8 दिवसांत 1km कालवा बांधू शकते. म्हणजे, एका दिवसात, तो संघ पाण्याच्या कालव्याचा ___ km भाग बांधू शकते. जर ते आठवड्यातून 5 दिवस काम करत असतील तर ते आठवड्यातून ___ km कालवा बांधू शकतात?
3. मंजू आणि तिच्या दोन शेजारी दर आठवड्याला 5 लिटर तेल खरेदी करतात आणि ते 3 कुटुंबांमध्ये समान प्रमाणात वाटून घेतात. प्रत्येक कुटुंबाला आठवड्यातून किती तेल मिळते? एका कुटुंबाला 4 आठवड्यासाठी किती तेल लागेल?
4. सोमवारी रात्री 10 वाजता साफियाने चंद्र मावळताना पाहिले. तिची आई, जी एक शास्त्रज्ञ आहे. तिने तिला सांगितले की दररोज चंद्र मागिल दिवसापेक्षा $\frac{5}{6}$ तास उशिरा मावळतो. तर गुरूवारी रात्री 10 वाजल्यानंतर किती तासांनी चंद्र मावळेल?
5. गुणाकार करा आणि नंतर त्याचे मिश्र अपूर्णांकात रूपांतर करा.

   (a) $7 \times \frac{3}{5}$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

(b) $4 \times \frac{1}{3}$

(c) $\frac{9}{7} \times 6$

(d) $\frac{13}{11} \times 6$

आतापर्यंत, आपण पूर्ण संख्येला अपूर्णांकाने गुणने आणि अपूर्णांकाला पूर्णांकाने गुणने शिकलो आहोत, गुणाकारातील दोन्ही संख्या अपूर्णांक असतील तर काय होते?

दोन अपूर्णांकाचा गुणाकार

? आपल्याला माहिती आहे की, आरोनचा पाळीव कासव 1 तासात फक्त $\frac{1}{4}$ km चालू शकतो. तर ते कासव अर्ध्या तासात किती अंतर चालेल?

तास	अंतर
1	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	?

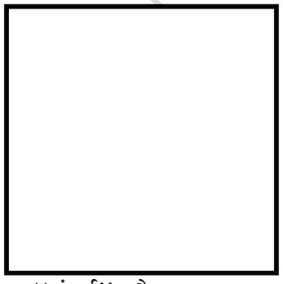
अशा प्रकारचे उदाहरणे सोडविण्यासाठी गुणाकाराचा वापर करू.

$\frac{1}{2}$ तासात कापलेले अंतर = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ km.

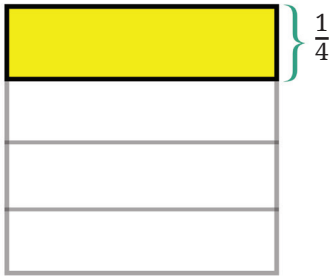
? गुणाकार करणे

1 तासात कापलेले अंतर = $\frac{1}{4}$ km.

म्हणून, $\frac{1}{4}$ ला 2 समान भागांमध्ये विभागून आपल्याला मिळणारी लांबी म्हणजे $\frac{1}{2}$ तासात कापलेले अंतर. हे शोधण्यासाठी, ''संपूर्ण'' एकक चौरस वापरून अपूर्णांक दर्शविणे उपयुक्त ठरेल.



''संपूर्ण'' चौरस एकक

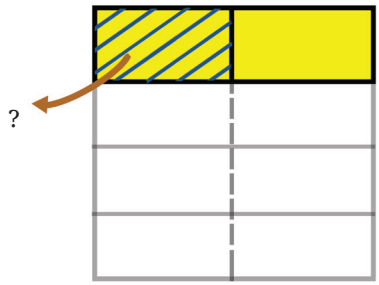


संपूर्ण भागाचा $\frac{1}{4}$ भाग

@NCERT NOT TO BE REPUBLISHED

आता आपण $\frac{1}{4}$ ची 2 समान भागांमध्ये विभागणी करू.

आपल्याला काय मिळेल ?



$\frac{1}{4}$ चे 2 समान भाग

संपूर्ण भागाचा किती भाग रंगविलेला आहे ?

संपूर्ण भाग 8 समान भागांमध्ये विभागलेला आहे आणि त्यातील एक भाग रंगविलेला किंवा छायांकित असल्याने, आपण $\frac{1}{8}$. असे म्हणू म्हणून कासवाने अर्ध्या तासात आक्रमिलेले अंतर $\frac{1}{8}$ km आहे.

हे आपल्याला सांगते की $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

? जर कासव वेगाने चालत असेल आणि तो 1 तासात $\frac{2}{5}$ km अंतर चालू शकतो, तर तो एका तासाच्या $\frac{3}{4}$ मध्ये किती अंतर चालेल?

कापलेले अंतर = $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

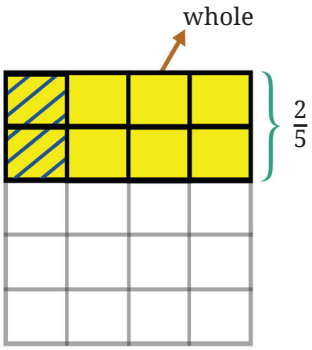
? शोधा पाहू. (Figure it out)

(i) प्रथम $\frac{1}{4}$ तासात कापलेले अंतर शोधा.

(ii) उत्तराला 3 ने गुणा, अंतर $\frac{3}{4}$ तासात पूर्ण करण्यासाठी,

(i) $\frac{1}{4}$ तासात आक्रमिलेले अंतर कि.मी. मध्ये

= $\frac{2}{5}$ ला 4 समान भागांमध्ये विभागणी केल्यास मिळणारे प्रमाण



आकृती 8.1

संपूर्ण चौरस एकक घेतल्यास, छायांकित केलेला (आकृती 8.1 मध्ये) हा एक भाग आहे. जो आपण 4 समान भागांमध्ये विभागतो तेव्हा आपल्याला $\frac{2}{5}$ मिळतो.

ते संपूर्ण किती आहे?

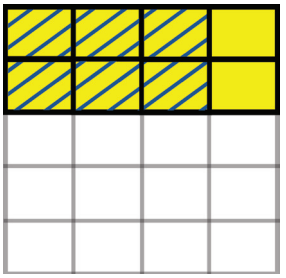
संपूर्ण भाग 5 ओळी आणि 4 स्तंभांमध्ये विभागलेला आहे.

ज्यामुळे 5 × 4=20 समान भाग तयार होतात.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

छायांकित केलेल्या या भागांची संख्या = 2.

तर, $\frac{1}{4}$ तासात आक्रमिलेले केलेले अंतर = $\frac{2}{20}$



(ii) आता, आपल्याला $\frac{2}{20}$ ला 3 ने गुणावे लागेल.

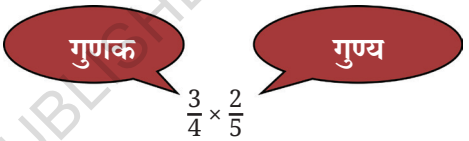
$\frac{3}{4}$ तासात कापलेले अंतर = $3 \times \frac{2}{20}$

$= \frac{6}{20}$.

तर, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

चर्चा

एखाद्या अपूर्णांकांचा दुसऱ्या अपूर्णांकाशी गुणाकार करताना, आपण वापरलेल्या पद्धतीप्रमाणेच एक पद्धत वापरतो, जेव्हा आपण एका अपूर्णांकाचा पूर्ण संख्येने खालीलप्रमाणे गुणाकार करतो.



$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{20}$ गुणाकाराला 4 ने भागा.

$\frac{3}{4}$ $3 \times \frac{2}{20} = \frac{6}{20}$ = गुणाकाराला 3 ने भागा.

या समजुतीचा वापर करून, $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}$ गुणाकार करा.



प्रथम आपण $\frac{3}{2}$ दर्शवूया, संपूर्ण एककाचा चौरस घेऊन. अपूर्णांक $\frac{3}{2}$ हा पूर्णांक दीड असल्याने, तो खालील प्रमाणे पाहता येईल.

गुणाकाराच्या पायऱ्यांनुसार, आपल्याला आवश्यक आहे. प्रथम $\frac{3}{2}$ या अपूर्णांकाचे 4 समान भाग करा. आकृती 8.2 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, पिवळा छायांकित भाग $\frac{3}{2}$ ला 4 समान भागांमध्ये विभाजित करून मिळविलेल्या अपूर्णांकाचे प्रतिनिधित्व करते. त्याचे मूल्य किती आहे ?

आपण पाहतो की संपूर्ण भाग 2 ओळी आणि 4 स्तंभांमध्ये विभागलेला आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

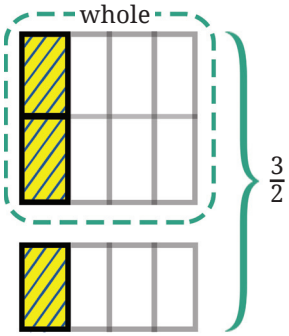
म्हणून, $2\times4=8$ समान भाग तयार होतात.

छायांकित भागांची संख्या = 3

तर पिवळा छायांकित असलेला भाग = $\frac{3}{2}$

आता, पुढची पायरी म्हणजे, या उत्तराला 5 ने गुणू. यामुळे $\frac{5}{4}$ आणि $\frac{3}{2}$ चे गुणाकार :

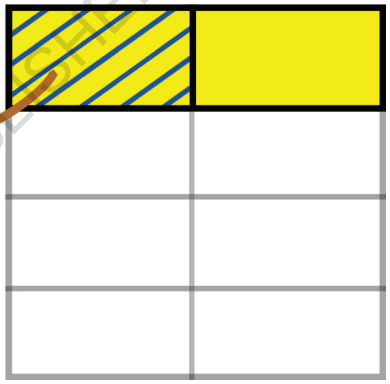
$$\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=5\times\frac{3}{8}=\frac{15}{8}.$$



आकृती 8.2

आयताचे क्षेत्रफळ आणि अपूर्णांकांचा गुणाकार यांच्यातील संबंध

आकृती 8.3 मध्ये, छायांकित आयताची लांबी आणि रूंदी किती आहे? आपण एका एकक चौरसाने (बाजू 1 एकक) सुरूवात केल्यामुळे लांबी आणि रूंदी $\frac{1}{2}$ एकक आणि $\frac{1}{4}$ एकक.



आकृती 8.3

या आयताचे क्षेत्रफळ किती आहे ? आपल्याला असे 8 आयत दिसतात की त्यांचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक आहे. तर, प्रत्येक आयताचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{8}$ चौरस एकक आहे.

? तुम्हाला क्षेत्रफळ आणि लांबी व रूंदीच्या गुणाकारात काही संबंध दिसतो का ?

अपूर्णांक असणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या गुणाकारा इतके असते.

सर्वसाधारणपणे, जर आपल्याला दोन अपूर्णांकांचा गुणाकार शोधायचा असेल, तर आपण त्या दोन्ही अपूर्णकांच्या बाजू असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ शोधू शकतो.

? शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील गुणाकार करा. अपूर्णांक दर्शविण्यासाठी संपूर्ण चौरस एकक वापरा.

(a) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$

@KTES NOT TO BE REPUBLISHED

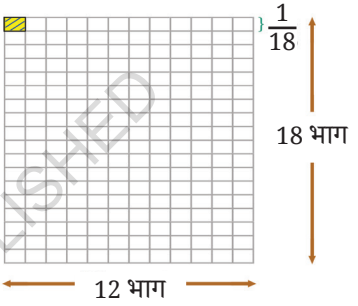
(b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$

आता, शोधा $\frac{1}{12} \times \frac{1}{18}$.

चौरस एकक वापरून अपूर्णांकांचे प्रतिनिधित्व करून असे करणे कठीण आहे. वरील उदाहरणामध्ये आपण काय केले ते पाहून गुणाकार करूया.



प्रत्येक बाबतीत, संपूर्ण भाग पंक्ती आणि स्तंभांमध्ये विभागलेला आहे. पंक्तींची संख्या ही गुणाकाराचा छेद आहे, जो या उदाहरणात 18 आहे.

स्तंभांची संख्या ही गुणकाचा भाजक आहे, जो या उदाहरणात 12 आहे.

अशा प्रकारे, संपूर्ण भाग 18×12 समान भागांमध्ये विभागला जातो.

तर, $\frac{1}{18} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{(18 \times 12)} = \frac{1}{216}$.

अशा प्रकारे, जेव्हा दोन अपूर्णांक एककांचा गुणाकार केला जातो तेव्हा त्यांच्या गुणाकार होतो.

$$\frac{1}{\text{(भाजकांचा गुणाकार)}}$$

आम्ही हे असे व्यक्त करतो.

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{(b \times d)}$$

2. खालील गुणाकार करा. अपूर्णांकांचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी आणि क्रिया करण्यासाठी संपूर्ण चौरस एकक वापरा.

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

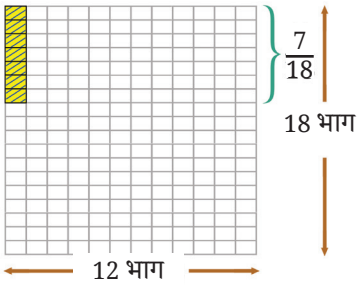
(c) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ (d) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अंश आणि छेद यांचा गुणाकार

आता, $\frac{5}{12} \times \frac{7}{18}$ शोधा.

मागील उदाहरणाप्रमाणे, टप्याटप्याने किंवा क्रमशः पद्धतीने गुणाकार करून गुणाकार शोधूया.



प्रथम, संपूर्ण भाग 18 पंक्ती आणि 12 स्तंभामध्ये विभागाला जातो ज्यामुळे 12 × 18 समान भाग तयार होतात.

$\frac{7}{18}$ ला 12 समान भागांमध्ये विभाजित केल्याने आपल्याला मिळणारे मूल्य $\frac{7}{(12 \times 18)}$ आहे.

नंतर, आपण या उत्तराला 5 ने गुणू हे आहे. $\frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)}$

तर, $\frac{5}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)} = \frac{35}{216}$.

यावरून आपण पाहू शकतो की, सर्वसाधारपणे,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(a \times c)}{(b \times d)}$$

हे सूत्र प्रथम ब्रम्हगुप्ताने इ.स. 628 मध्ये त्यांच्या ब्रम्हस्फुटसिध्दांत या सामान्य स्वरूपात सांगितले होते.

वरील सूत्र गुणक किंवा गुणाकार पूर्णांक संख्या असताना देखील कार्य करते. आपण संपूर्ण संख्या भाजक 1 सह अपूर्णांक म्हणून पुन्हा लिहू शकतो. उदाहरणार्थ.

$3 \times \frac{3}{4}$ हे असे लिहीता येते $\frac{3}{1} \times \frac{3}{4}$

$$= \frac{3 \times 3}{1 \times 4} = \frac{9}{4}$$

आणि

$\frac{3}{5} \times 4$ हे असे लिहीता येते $\frac{3}{5} \times \frac{4}{1}$

$$= \frac{3 \times 4}{5 \times 1} = \frac{12}{5}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

अपूर्णांकांचा गुणाकार करून सर्वात संक्षिप्त स्वरूपात मांडणे.

? खालील अपूर्णांकांचा गुणाकार करा आणि उदाहरण त्याच्या संक्षिप्त रूपात व्यक्त करा :

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24}$$

प्रथम अंश (12 आणि 5) आणि छेद (7 अणि 24) यांचा गुणाकार करण्याऐवजी ते सोपे पुढिल प्रमाणे केले जाऊ शकते.

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24} = \frac{12 \times 5}{7 \times 24}$$

आपल्याला दिसते की दोन्ही गोल केलेल्या संख्यांचा 12 हा सामाईक घटक आहे. आपल्याला माहित आहे की जेव्हा अंश आणि छेद सामान्य अवयवाने भागले जातात तेव्हा अपूर्णांक समान राहतो. या घटनेत, आपण त्यांना 12 ने भागू शकतो.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{12}} \times 5}{7 \times \underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{1 \times 5}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$$

चला आणखी एक गुणाकार करण्यासाठी याच तंत्राचा वापर करूया.

$$\frac{14}{15} \times \frac{25}{42}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{14}} \times \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{3}{\cancel{42}}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}$$

अपूर्णांकांचा गुणाकार करताना, आपण अंश आणि छेद यांना त्यांच्या सामाईक घटकांनी भागू शकतो आणि नंतर अंश आणि छेद यांचा गुणाकार करू शकतो. याला सामाईक घटक रद्द करणे म्हणतात.

ऐतिहासीक संदर्भ

भारतात, अपावर्तना म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या अपूर्णांकाला त्याच्या सर्वात कमी पदांपर्यंत कमी करण्याची प्रक्रिया इतकी प्रसिद्ध आहे की गणितीय नसलेल्या ग्रंथातही त्याचा उल्लेख आढळतो. जैन विद्वान उमास्वती (c. 150 CE) यांनी एका तात्विक ग्रंथात त्याचा उपमा म्हणून वापर केला.

@KSBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. एका नळाने पाण्याची टाकी भरली जाते. जर नळ 1 तास चालू (open) असेल तर टाकीचा $\frac{7}{10}$ भाग भरला जातो. तर नळ खालील तास चालू (open) असेल तर टाकीचा किती भाग भरेल ?

   a) $\frac{1}{3}$ तास _____

   b) $\frac{2}{3}$ तास _____

   c) $\frac{3}{4}$ तास _____

   d) $\frac{7}{10}$ तास _____

   e) टाकी पूर्ण भरण्यासाठी, नळ किती वेळ चालू असावा?



2. सरकारने सोमूची जमीन रस्ता बांधण्यासाठी $\frac{1}{6}$ घेतली आहे. आता सोमूकडे किती जमीन शिल्लक आहे? ती उर्वरित जमिनीचा अर्धा भाग तिची मुलगी कृष्णाला आणि $\frac{1}{3}$ भाग तिचा मुलगा बोराला देते. त्यांना त्यांचे भाग दिल्यानंतर, ती उर्वरित जमीन स्वतःसाठी ठेवते.

   a) कृष्णाला मूळ भूमीचा किती भाग मिळाला?

   b) बोराला मूळ जमिनीचा किती भाग मिळाला?

   c) सोमूने मूळ जमिनीचा किती भाग स्वतः साठी ठेवला?

3. $3\frac{3}{4}$ फूट आणि $9\frac{3}{5}$ फूट बाजू असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.

4. त्सेवांग त्याच्या बागेत सलग चार रोपे लावतो. दोन रोपांमधील अंतर $\frac{3}{4}$ आहे. पहिल्या आणि शेवटच्या रोपांमधील अंतर काढा. (सूचना : दोन रोपांमधील $\frac{3}{4}$ अंतर असलेली चार रोपांची कच्ची आकृती काढा.)

5. कोणते वजन जास्त आहे : 500 ग्रॅम पैकी $\frac{12}{15}$ किंवा 4 kg पैकी $\frac{3}{20}$?

© KTRS NOT TO BE REPUBLISHED

गुणाकार हा नेहमी गुणाकार केलेल्या संख्यांपेक्षा मोठा असतो का?

आपल्याला माहित आहे की जेव्हा एखाद्या संख्येला 1 ने गुणले जाते तेव्हा गुणाकार अपरिवर्तित राहतो, आपण संख्यांच्या जोड्यांचा गुणाकार करू जिथे एकही संख्या त्यापैकी 1 नसेल.

जेव्हा आपण, पेक्षा मोठ्या असलेल्या दोन संख्यांचा गुणाकार करतो, समजा 3 आणि 5 यांचा गुणाकार हा गुणाकार केलेल्या दोन्ही संख्यांपेक्षा मोठा आहे.

$$3 \times 5 = 15$$

15 हा गुणाकार 3 आणि 5 या दोन्ही पेक्षा जास्त आहेत. पण जेव्हा आपण $\frac{1}{4}$ आणि 8 चा गुणाकार करतो तेव्हा काय होते ?

$$\frac{1}{4} \times 8 = 2$$

वरील गुणाकारात, 2 हा गुणाकार $\frac{1}{4}$ पेक्षा मोठा आहे, परंतु 8 पेक्षा लहान आहे.

जेव्हा आपण $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{2}{5}$ यांचा गुणाकार करतो तेव्हा काय होते ?

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

चला या गुणाकाराची तुलना $\frac{6}{20}$ चा संख्या $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{2}{5}$ शी करूया.

यासाठी, आपण व्यक्त करूया $\frac{15}{20}$ म्हणून $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{8}{20}$ म्हणून $\frac{2}{5}$.

यावरून आपण पाहू शकतो की गुणाकार दोन्ही संख्यांपेक्षा कमी आहेत. तुम्हाला कधी वाटते की गुणाकार दोन्ही संख्याच्या गुणाकारापेक्षा मोठा आहे, तो केव्हा दोन संख्यांच्या मध्ये आहे आणि तो केव्हा दोन्हीपेक्षा लहान आहे?

(**सूचना :** गुणाकार केलेल्या संख्या आणि गुणाकार केलेल्या संख्यामधील संबंध हे 0 आणि 1 च्या दरम्यान आहेत की 1 पेक्षा जास्त आहेत यावर अवलंबून आहे. वेगवेगळ्या संख्यांच्या जोड्या घ्या आणि त्यांचा गुणाकार पहा. प्रत्येक गुणाकारासाठी खालील प्रश्न विचारात घ्या.)

परिस्थिती	गुणाकार	संबंध
परिस्थिती 1	दोन्ही संख्या 1 पेक्षा मोठ्या आहेत. (उदा., $\frac{4}{3} \times 4$)	गुणाकार ($\frac{16}{3}$) दोन्ही संख्यांपेक्षा मोठा आहे.
परिस्थिती 2	दोन्ही संख्या 0 आणि 1 च्या दरम्यान आहेत. (उदा., $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$)	गुणाकार ($\frac{3}{10}$) दोन्ही संख्यांपेक्षा कमी आहे.

@KEBS NOT TO BE REPUBLISHED

परिस्थिती 3	एक संख्या 0 आणि 1 च्या दरम्यान आहे आणि एक संख्या 1 पेक्षा मोठी आहे. (उदा., $\frac{3}{4} \times 5$)	गुणाकार ($\frac{15}{4}$) हा त्या संख्येपेक्षा लहान आणि 1 पेक्षा मोठा तसेच 0 ते 1 मधील संख्येपेक्षाही मोठा असतो.

प्रत्येक परिस्थिती साठी अशी आणखी उदाहरणे तयार करा आणि गुणाकार होणाऱ्या संख्यांमधील संबंध पहा.

? गुणाकार केलेल्या संख्या आणि गुणाकार यांच्यातील संबंधाबद्दल तुम्ही काय निष्कर्ष काढू शकता ? रिकाम्या जागा भरा.

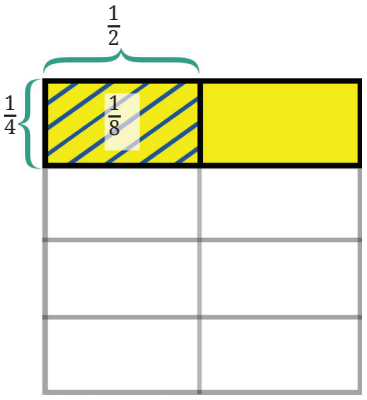
- जेव्हा गुणाकार केल्या जाणाऱ्या संख्येपैकी एक संख्या 0 आणि 1 च्या दरम्यान असते, तेव्हा गुणाकार दुसऱ्या संख्येपेक्षा_____(जास्त/ कमी) असतो.
- जेव्हा गुणाकार केल्या जाणाऱ्या संख्येपैकी एक संख्या, पेक्षा मोठी असते, तेव्हा गुणाकार दुसऱ्या संख्येपेक्षा_____(जास्त/ कमी) असतो.

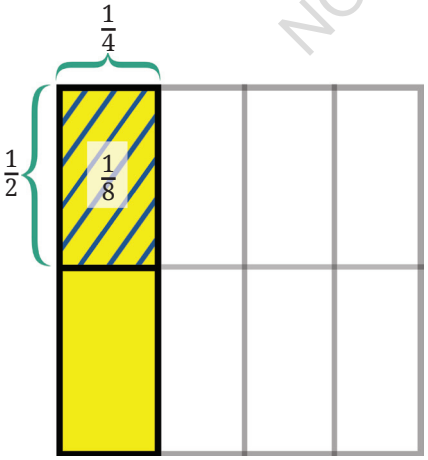
@KYBS NOT TO BE REPUBLISHED

गुणाकाराचा क्रम

आपल्याला माहित आहे की,

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$





आता, $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ हे किती आहे?

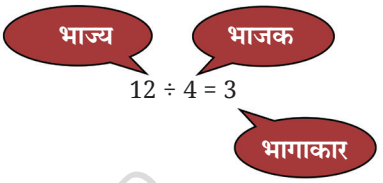
ते $\frac{1}{8}$ देखील आहे.

सर्वसाधारणपणे, लक्षात घ्या की लांबी आणि रूंदी बदलली तरीही आयताचे क्षेत्रफळ समान राहते. गुणाकारामध्ये क्रम महत्वाचा नाही. म्हणून

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

ब्रम्हगुप्ताच्या अपूर्णांकांच्या गुणाकाराचे सुत्रावरूनही हे दिसून येते.

8.2 अपूर्णांकांचा भागाकार



$12 \div 4$ म्हणजे काय ? तुम्हाला हे आधीच माहित आहे. पण हे उदाहरण गुणाकार स्वरूपात पून्हा मांडता येईल का?

12 मिळविण्यासाठी 4 ला किती ने गुणावे ?

म्हणजेच

$$4 \times ? = 12$$

भागाकाराचे गुणाकारात रूपांतर करून अपूर्णांकांचा भागाकार करण्यासाठी आपण या तंत्राचा वापर करू शकतो.

$1 \div \frac{2}{3}$ म्हणजे किती?

चला हे गुणाकाराच्या रूपात पुन्हा लिहूया.

$$\frac{2}{3} \times ? = 1$$

1 मिळविण्यासाठी $\frac{2}{3}$ ला किती ने गुणावे?

जर आपण 2 आणि 3 कोणतीही संख्या घेऊन रद्द केले तर आपल्याकडे 1 राहते.

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}} = 1$$

↓

उत्तर

तर, $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

चला दुसरे उदाहरण पाहुया

$$3 \div \frac{2}{3}$$

हे सारखेच आहे,

$$\frac{2}{3} \times ? = 3$$

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तुम्ही उत्तर शोधाल का?

1 मिळविण्यासाठी $\frac{2}{3}$ ला कितीने गुणायचे हे आपल्याला माहित आहे. 3 मिळविण्यासाठी आपल्याला फक्त 3 ने गुणावे लागेल.

म्हणून, $\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times 3} = 3$

उत्तर

म्हणून, $3 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$

$\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$ म्हणजे काय?

गुणाकाराच्या रूपात पुन्हा लिहीताना, आपल्याला माहित आहे की,

$\frac{1}{2} \times ? = \frac{1}{5}$

आपण हे कसे सोडवू?

$\frac{1}{\cancel{2}} \times \boxed{\cancel{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

उत्तर

म्हणून, $\frac{1}{5} \div \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ म्हणजे काय?

गुणाकाराच्या रूपात पुन्हा लिहीताना,

$\frac{3}{5} \times ? = \frac{2}{3}$

आपण हे कसे सोडवू?

$\frac{3}{\cancel{5}} \times \boxed{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

उत्तर

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

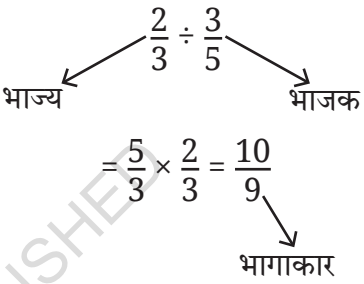
म्हणून,

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

चर्चा

वरील प्रत्येक भागाकाराच्या प्रश्नामध्ये, आपल्याला उत्तर कसे सापडले ते पहा. दोन अपूर्णांक कसे भागायचे हे सांगणारा नियम आपण तयार करू शकतो का?

आपण मागील प्रश्नांचा विचार करूया. प्रत्येक भागाकार उदाहरणामध्ये आपल्याकडे भाज्य, भाजक आणि भागाकार असतो. भागाकार मिळविण्यासाठी आपण वापरत असलेली तंत्रे अशी आहेत :



1. प्रथम, भाजकाने गुणाकार केल्यावर 1 मिळणारी संख्या शोधा. आपल्याला दिसेल की परिणामी संख्या ही एक अपूर्णांक आहे. ज्याचा अंश हा भाजकाचा छेद आहे आणि छेद हा भाजकाचा अंश आहे.

   भाजक $\frac{3}{5}$ साठी $\frac{5}{3}$ हा अपूर्णांक आहे. आपण $\frac{3}{5}$ च्यासाठी $\frac{5}{3}$ **परस्परसंबंध** म्हणतो.

   जेव्हा आपण एखाद्या अपूर्णांकाला त्याच्या परस्परसंबंधाने गुणतो तेव्हा आपत्याला 1 मिळतो. म्हणून आपल्या तंत्रातील पहिले पाऊल म्हणजे भाजकाचा परस्परसंबंध शोधणे.

2. नंतर आपण भागाकार मिळविण्यासाठी या परस्परसंबंधाने भाज्यांचा गुणाकार करतो.

   सारांश, दोन अपूर्णांकांना भागणे :

   - भाजकाचा परस्पर संबंध शोधा.
   - भागाकार मिळविण्यासाठी याला भाज्यकाने गुणाकार करा.

   म्हणून,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{c \times b}.$$

   हे असे पुन्हा लिहिले जाऊ शकते:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

तुम्ही आधी शिकलेल्या अपूर्णांकांच्या बेरीज, वजाबाकी आणि गुणाकाराच्या पध्दती आणि सूत्रा प्रमाणेच, अपूर्णांकांच्या भागाकाराची ही पध्दत आणि हे सूत्र, या सामान्य स्वरूपात प्रथम ब्रम्हगुप्ताने त्यांच्या ब्रम्हस्फुट सिद्धांत (इ.स. 628) मध्ये स्पष्टपणे सांगितले होते.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

तर उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ ब्रम्हगुप्ताच्या सूत्राचा वापर करा.

आम्ही लिहतो :

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}.$$

भाज्य, भाजक आणि भागाकार

जेव्हा आपण दोन पूर्ण संख्यांना, समजा $6 \div 3$ भागतो तेव्हा आपल्याला भागाकार 2 मिळतो. येथे भागाकार भाज्यापेक्षा लहान आहे.

$$6 \div 3 = 2, 2 < 6$$

पण, जेव्हा आपण 6ने $\frac{1}{4}$ ला भागतो तेव्हा काय होते?

$$6 \div \frac{1}{4} = 24.$$

येथे भागाकार भाज्यापेक्षा मोठा आहे.

जेव्हा आपण $\frac{1}{8}$ ला $\frac{1}{4}$ ने भागतो तेव्हा काय होते?

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

येथे हा भागाकार भाज्यापेक्षा मोठा आहे.

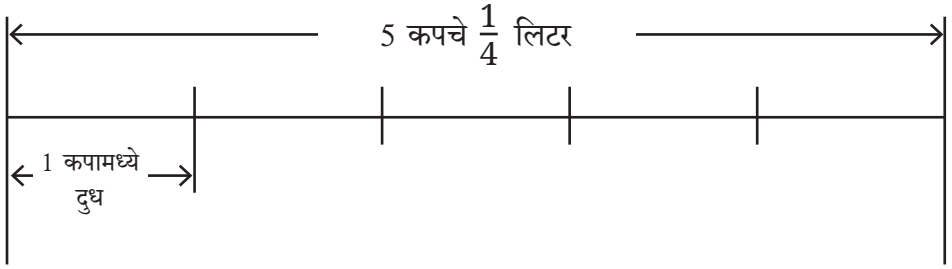
तुम्हाला कधी वाटते की भागाकार भाजकापेक्षा लहान आहे आणि कधी तो भाजकापेक्षा मोठा आहे का?

भाजक आणि भागाकार यांच्यातही असाच संबंध आहे का?

वरील प्रश्नांची उत्तरे देण्यासाठी गुणाकारातील अशा संबंधांबद्दलची तुमची समज वापरा.

8.3 अपूर्णांकाशी संबंधीत काही उदाहरणे :

? **उदाहरण 3:** लीनाने 5 कप चहा बनविला. त्यासाठी तिने $\frac{1}{4}$ लिटर दूध वापरले. तर प्रत्येक चहाच्या कपामध्ये किती दुध असेल?



© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

लीनाने 5 कप चहामध्ये $\frac{1}{4}$ लीटर दूध वापरले, तर, कप चहामध्ये दुधाचे प्रमाण किती असावे ?

$$\frac{1}{4} \div 5$$

हे गुणाकार स्वरुपात लिहीताना,

$$5 \times (\text{प्रति कप दूध}) = \frac{1}{4}$$

ब्रम्हगुप्ताच्या पद्धतीनुसार आपण खालीलप्रमाणे विभागणी करू:

5 (भाजक) चा परस्परसंबंध $\frac{1}{5}$ आहे.

या परस्परांना भाजकांने ($\frac{1}{4}$) ने गुणू

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

तर, प्रत्येक चहाच्या कपामध्ये $\frac{1}{20}$ लीटर दुध असेल.

उदाहरण 4: एकक नसलेल्या अपूर्णांकांसोबत कार्य करण्याची काही जुनी उदाहरणे मानवजातीच्या सर्वात जुना भूमिती ग्रंथ 'सुलभसुत्रे' यामध्ये आढळतात. येथे बोधायनाच्या सुलभसूत्रातील (सुमारे 800 ई.पू.) एक उदाहरण आहे.

ज्यांच्या प्रत्येक बाजू $\frac{1}{5}$ एकके आहेत अशा चौरस विटांनी $7\frac{1}{2}$ चौरस क्षेत्र व्यापतील. अशा किती चौकोनी विटा लागतील?

प्रत्येक चौरस विटांचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ चौ. एकक आहे,

एकूण क्षेत्रफळ $7\frac{1}{2}$ चौ एकक = $\frac{15}{2}$ चौ. एकक.

जसे (विटांची संख्या)× (एका विटेचे क्षेत्रफळ) = एकूण क्षेत्रफळ,

$$\text{विटांची संख्या} = \frac{15}{2} \div \frac{1}{25}$$

भाजकाचा परस्पर संबंध 25 आहे.

परस्परांना भाजकाने गुणले असता आपल्याला मिळते.

$$25 \times \frac{25}{2} = \frac{25 \times 15}{2} = \frac{375}{2}$$

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

उदाहरण 5: हे उदाहरण चतुर्वेद पृथुदकस्वामी (सुमारे 860 इ.स.) यांनी ब्रम्हगुप्ताच्या ब्रम्हस्फुटसिद्धांत या पुस्तकात त्यांच्या भाषेत उपस्थित केले आहे.

चार कारंज्यानी एक टाकी भरते. पहिल्या कारंज्यात ती टाकी एका दिवसात भरू शकते. दुसऱ्या कारंज्यात ती टाकी अर्ध्या दिवसात भरू शकते. तिसऱ्या कारंज्यात दिवसाच्या एक चतुर्थांश मध्ये भरू शकते. चौथा कारंज्यात दिवसाच्या पाचव्या भागामध्ये (पंचमांश) टाकी भरू शकते. जर ते सर्व कारंजे एकत्र वाहत असतील तर ती टाकी किती वेळात भरेल?

चला हे उदाहरण टप्याटप्याने सोडवूया.

एका दिवसात, किती वेळामध्ये,

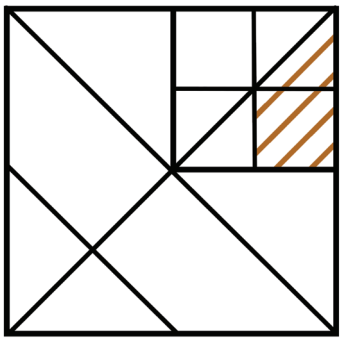
- टाकी भरणारा पहिला कारंजा $1 \div 1 = 1$
- टाकी भरणारा दुसरा कारंजा म्हणजे $1 \div \frac{1}{2} =$ _____
- टाकी भरणारा तिसरा कारंजा म्हणजे $1 \div \frac{1}{4} =$ _____
- टाकी भरणारा चौथा कारंजा म्हणजे $1 \div \frac{1}{5} =$ _____

एका दिवसात चार कारंजे मिळून टाकी किती वेळेत भरतील यांची संख्या ___ + ____ + ___ + ____ = 12.

अशाप्रकारे, चार कारंज्यांनी टाकी भरण्यासाठी लागणारा एकूण वेळ $\frac{1}{12}$ दिवस.

अपूर्णांक संबंध:

येथे एक चौकोन आहे ज्याच्या आत काही रेषा काढल्या आहेत.



आकृती 8.4

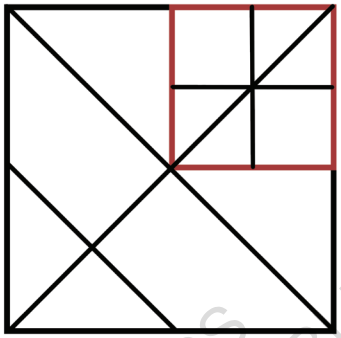
@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

छायांकित भाग संपूर्ण चौरसाच्या क्षेत्रफळाचा किती अंश व्यापतो ?

या समस्येचे निराकरण करण्याचे वेगवेगळे मार्ग आहेत., त्यापैकी एक येथे आहे.

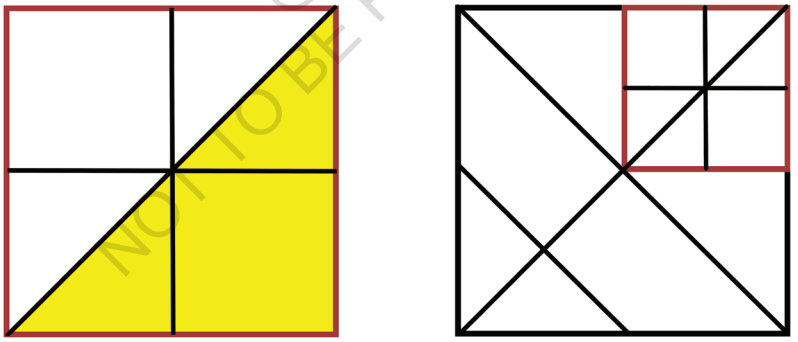
गणिती बोल

संपूर्ण चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक समजा, आपण पाहू शकतो की वरचा उजवा चौरस (आकृती 8.5 मध्ये) संपूर्ण चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या $\frac{1}{4}$ भाग व्यापतो,



आकृती 8.5

लाल चौरसाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{4}$ चौरस एकक.



आकृती 8.6

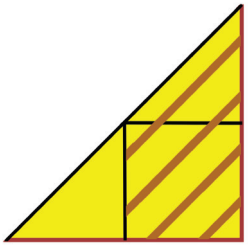
चला या लाल चौरसाकडे पाहूया. त्याच्या आतील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (पिवळ्या रंगाचे) लाल चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे आहे. तर,

पिवळ्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{4}$ चौरस एकक

या पिवळ्या त्रिकोणाचा कोणता भाग छायांकित आहे?

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

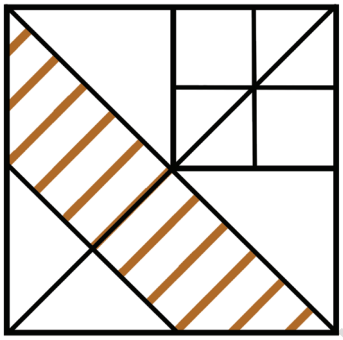
पिवळ्या त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या $\frac{3}{4}$ भागावर छायांकित भाग आहे. ते तुम्हाला समजते का?

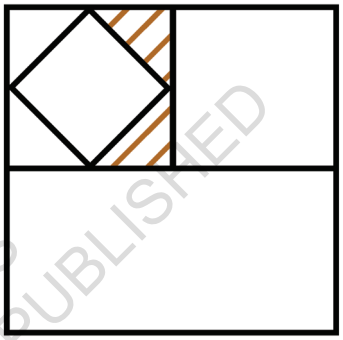


छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$ चौ. एकक

छायांकित भाग संपूर्ण चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या $\frac{3}{32}$ भाग व्यापतो.

? खाली दिलेल्या प्रत्येक आकृतीमध्ये, छायांकित भागाने व्यापलेल्या मोठ्या चौरसाचे अपूर्णांक शोधा.





NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

आपण पुढील प्रकरणात या प्रकारची उदाहरणे अधिक मनोरंजक पध्दतीने सोडवू.

एक नाट्यमय देणगी (A Dramma-tic Donation)

खालील उदाहरण भास्कराचार्य (दुसरे भास्कर) यांनी लिहीलेल्या पुस्तकातून अनुवादित आहे, जे 1150 मध्ये लिहिले गेले होते.

''अरे शहाण्या ! भिकाऱ्याला द्रामाच्या $\frac{3}{4}$ पैकी $\frac{2}{3}$ पैकी $\frac{1}{2}$ पैकी $\frac{1}{4}$ पैकी $\frac{1}{10}$ पैकी $\frac{1}{5}$ दिले. जर तुम्हाला अपूर्णांकांचे गणित चांगले माहित असेल तर मला सांगा, मुलांनो, कंजूषाने भिकाऱ्याला किती कौरी दिले होते.''

द्रामा म्हणजे त्या काळात वापरल्या जाणाऱ्या चांदीच्या नाण्यांचा संदर्भ, कथेत असे म्हटले आहे की 1 द्रामा 1280 कौरीच्या शंखांच्या बरोबरीचा होता. त्या व्यक्तीने द्रामाचा किती भाग दिला ते पाहूया.

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4}\right)$ एका द्रामाचा भाग.

त्यांचा गुणाकार केल्यास $\frac{6}{7680}$ मिळते.

त्यांचे सर्वात कमी स्वरूपात म्हणजे सोपे केल्यावर,

$\frac{6}{7680} = \frac{1}{1280}$ मिळते.

तर, भिकाऱ्याला एवढ्या कौरीचा शंख देण्यात आला.

उत्तरात तुम्हाला भास्कराचार्यांचा विनोद दिसेल ! कंजूषाने भिकाऱ्याला सर्वात कमी किमतीचे फक्त एक नाणे (कौरी) दिले.

12 व्या शतकाच्या आसपास, भारतीय उपखंडातील वेगवेगळ्या राज्यांमध्ये अनेक प्रकारची नाणी वापरत होते. सर्वात जास्त वापरात येणारी नाणी म्हणजे सोन्याची नाणी (ज्यांना दिनार/गज्ञान आणि हुन म्हणतात), चांदीची नाणी (ज्यांना द्रामा/टंकास म्हणतात), तांब्यांची नाणी (ज्यांना कासुस/पनस आणि मशाकस म्हणतात) आणि कौरी शंख या नाण्यांमधील अचूक रूपांतर दर प्रदेश, कालावधी, आर्थिक परिस्थिती, नाण्यांचे वजन आणि त्यांची शुद्धता यावर अवलंबून असे.

सोन्याच्या नाण्यांचे मूल्य जास्त होते आणि ते मोठ्या व्यवहारात आणि संपत्ती साठविण्यासाठी वापरले जात होते. चांदीची नाणी सामान्यत: दैनंदिन व्यवहारात वापरली जात होती. तांब्याच्या नाण्यांचे मूल्य कमी होते आणि ते लहान व्यवहारात वापरले जात होते. कौरी शंख हे सर्वात कमी मूल्य असलेले होते आणि ते खूप लहान व्यवहारात वापरले जात होते.

जर आपण गृहीत धरले की 1 सोन्याचा दिनार = 12 चांदीचे द्रामा, 1 चांदीचा द्रामा = 4 तांब्याचे पनस, 1 तांब्याचे पनस= 6 मशका आणि 1 पनस = 30 कौरी शंख

1 तांब्यांचे पाना = $\frac{1}{48}$ सोनेरी दिनार $\left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{4}\right)$

1 कौरीचे शंख = ... तांब्याचे पनस

1 कौरीचे शंख = ... सोन्याचे दिनार.

© KSBSTE NOT TO BE REPUBLISHED

ऐतिहासीक संदर्भ

तुम्ही पाहिले असेल की अपूर्णांक ही संख्यांचा एक महत्वाचा प्रकार आहे, जो विविध दैनंदिन समस्यांमध्ये महत्वाची भूमिका बजावितो ज्यामध्ये प्रमाणांचे समान वाटप आणि भागाकार करणे समाविष्ट आहे. आज आपण वापरत असलेल्या अपूर्णांकांची सामान्य कल्पना – बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकाराच्या अंकगणितीय क्रियांनी सुसज्ज पद्धत भारतात मोठ्या प्रमाणात विकसित झाली. प्राचीन

भारतीय भूमिती ग्रंथांना सुलभसूत्र म्हणतात. जे 800 इ.स. पूर्व पासून सुरू होते आणि विधीसाठी अग्निवेदी बांधण्याशी संबंधीत होते. सामान्य अपूर्णांकाचा मोठ्या प्रमाणात वापर केला जात असे, ज्यामध्ये आपण उदाहरण 3 मध्ये पाहिलेल्या अपूर्णांकाचे विभाजन करणे समाविष्ट होते.

150 इ.स. पूर्व पासूनच भारताच्या लोकप्रिय संस्कृतीत अपूर्णांक सामान्य झाले होते, हे पूज्य जैन विद्वान उमास्वती यांच्या तत्वज्ञानाच्या कार्याशी अपूर्णांकांना सर्वात कमी शब्दांपर्यंत कमी करण्याच्या एका अप्रत्यक्ष संदर्भावरून दिसून येते.

अपूर्णांकांवर अंकगणितीय क्रिया करण्यासाठी सामान्य नियम आज आपण ज्या आधुनिक स्वरूपात करतो ते प्रथम ब्रम्हगुप्त यांनी त्यांच्या ब्रम्हस्फुटसिद्धांतात इ.स. सन 628 मध्ये संहिताबध्द केले होते. सामान्य अपूर्णांकांची बेरीज आणि वजाबाकी करण्याच्या त्यांच्या पध्दती आपण आधीच पाहिल्या आहेत. सामान्य अपूर्णांकांचा गुणाकार करण्यासाठी, ब्रम्हगुप्तानी लिहिले.

''दोन किंवा अधिक अपूर्णांकाचा गुणाकार अंशाच्या गुणाकाराने भागल्यास त्यांचा छेद मिळतो.''

(ब्रम्हस्फुट सिद्धांत श्लोक 12.1.3)

म्हणजेच, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

सामान्य अपूर्णांकांच्या भागाकारासाठी, ब्रम्हगुप्त यांनी लिहिले: ''अपूर्णांकांने, भागाकार भाजकाच्या अंश आणि छेदाची अदलाबदल करून केले जाते; नंतर भाज्यकांच्या अंशाला (नवीन) अंशाने आणि छेदाला (नवीन) छेदाने गुणाकार केला जातो''.

1150 मध्ये दुसरे भास्कर यांनी त्यांच्या लीलावती या पुस्तकात ब्रम्हगुप्ताच्या विधानाचे परस्परसंबंधाच्या कल्पनेच्या संदर्भात अधिक स्पष्टीकरण दिले आहे? ''एका अपूर्णांकाला दुसऱ्या अपूर्णांकाने भागाकार करणे हे पहिल्या अपूर्णांकाचा दुसऱ्या अपूर्णांकच्या परस्परसंबंधाने गुणाकार करण्याइतकेच आहे.'' (लीलावती, श्लोक 2.3.40)

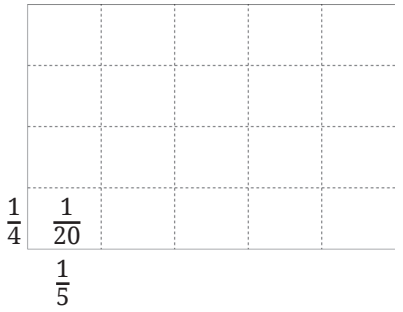
हे दोन्ही श्लोक सुत्राच्या समतुल्य आहेत.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

भास्कर पहिला, यांनी आर्यभट्टांच्या 499 इ.स. ग्रंथावरील त्याच्या 629 इ.स.च्या आर्यभटियाभाष्य या भाष्यात, अपूर्णांकांच्या गुणाकाराचे भौमितीक स्पष्टीकरण जे आपण आधी पाहिले होते) लांबी आणि रूंदीच्या समान भागाद्वारे चौरसाचे आयतामध्ये विभाजन करण्याच्या दृष्टीने वर्णन केले आहे.

© SCERT NOT TO BE REPUBLISHED

श्रीधराचार्य (सुमारे इ.स. 750) महावीराचार्य (सुमारे इ.स. 860), चतुर्वेद पृयुदकस्वामी (सुमारे इ.स. 860) आणि भास्कर दुसरे (सुमारे इ.स 1150) यांसारख्या इतर अनेक भारतीय गणितज्ञांनी अपूर्णांकांच्या अंकगणिताचा वापर लक्षणीयरीत्या विकसित केला.



भास्कर 1 चे स्पष्टीकरण की $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

भारतीय अपूर्णांकांचा आणि त्यावरील अंकगणितीय क्रियांचा सिध्दांत मोरोक्कोच्या अल-हयार (सुमारे 1192 इ.स.) सारख्या अरब आणि आफ्रिकन गणितज्ञांनी प्रसारित केला आणि त्याचा वापर पुढे विकसित केला. त्यांनंतर पुढील काही काळात अरबांद्वारे हा सिद्धांत युरोपमध्ये प्रसारित झाला.

शतकानुशतके, 17 व्या शतकाच्या आसपास युरोपमध्ये सामान्य वापरात आला, त्यानंतर तो जगभर पसरला. आधुनिक गणितात आज हा सिध्दांत खरोखरच अपरिहार्य आहे.

@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

शोधा पाहू. (Figure it out)

1. खालील उदाहरण सोडवा.

$3 \div \frac{7}{9}$	$\frac{14}{4} \div 2$	$\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$	$\frac{14}{6} \div \frac{7}{3}$
$\frac{4}{3} \div \frac{3}{4}$	$\frac{7}{4} \div \frac{1}{7}$	$\frac{8}{2} \div \frac{4}{15}$	
$\frac{1}{5} \div \frac{1}{9}$	$\frac{1}{6} \div \frac{11}{12}$	$3\frac{2}{3} \div 1\frac{3}{8}$	

2. खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी, उपायाचे वर्णन करणारी कृती निवडा आणि ते संक्षिप्त रुपात लिहा.

a) मारियाने शाळेसाठी बनवलेल्या बॅग सजविण्यासाठी 8 मीटर लेस विकत घेतली. तिने प्रत्येक बॅगसाठी $\frac{1}{4}$ मीटर वापरली आणि लेस संपवली तर तिने किती बॅग सजविल्या?

(i) $8 \times \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

(iii) $8 \div \frac{1}{4}$ (iv) $\frac{1}{4} \div 8$

b) $\frac{1}{2}$ मीटर रिबन वापरून 8 बिल्ले बनविले जातात. प्रत्येक बिल्ल्यासाठी किती लांबीची रिबन वापरली गेली ?

(i) $8 \times \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$

(iii) $8 \div \frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{2} \div 8$

c) एक पाव (Bread) बनविण्यासाठी एका बेकरला $\frac{1}{6}$ किलो पीठ लागते. त्याच्याकडे 5 किलो पीठ आहे. तो किती पाव (Bread) बनवू शकतो ?

(i) $5 \times \frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6} \div 5$

(iii) $5 \div \frac{1}{6}$ (iv) 5×6

3. 12 पोळ्या बनविण्यासाठी $\frac{1}{4}$ किलो पीठ वापरले जात असेल, तर 6 पोळ्या बनविण्यासाठी किती पीठ लागेल?

4. श्रीधराचार्य यांनी 9व्या शतकात लिहिलेला पाटीगणित हा ग्रंथ, यामध्ये या उदाहरणाचा उल्लेख आहे. ''मित्रा, $1 \div \frac{1}{6}$, $1 \div \frac{1}{10}$, $1 \div \frac{1}{13}$, $1 \div \frac{1}{9}$, आणि $1 \div \frac{1}{2}$''. या संख्यांचा विचार करून यांना एकत्र जोडल्यास किती बेरीज मिळेल''. मित्र काय बोलेल ?

5. मीरा 400 पानांची कादंबरी वाचत आहे. तिने काल एकूण पानांच्या पैकी $\frac{1}{5}$ भाग आणि आज एकूण पानांच्या पैकी $\frac{3}{10}$ भाग वाचला. तिला कादंबरी वाचून पूर्ण करण्यासाठी अजून किती पाने वाचावी लागतील ?

6. एक कार 1 लिटर पेट्रोलमध्ये 16km धावते. तर ती कार $2\frac{3}{4}$ लिटर पेट्रोलमध्ये किती (km) किलोमीटर जाईल?

7. अमृतपालने त्याच्या सुट्टीसाठी एका ठिकाणी जाण्याचे ठरविले. त्या ठिकाणाला जर तो ट्रेनने गेला तर त्याला $5\frac{1}{6}$ तास लागतील. जर तो विमानाने गेला तर त्याला $\frac{1}{2}$ तास लागतील. तर विमानाने प्रवास केल्यावर त्याचे किती तास वाचतील?

NOT TO BE REPUBLISHED @KTBS

8. मरियमच्या आजीने एक केक बनविला. मरियम आणि तिच्या भावंडांनी त्या केकचा $\frac{4}{5}$ भाग संपविला. उरलेला केक मरियमच्या तीन मित्रांमध्ये समान वाटला गेला. तर प्रत्येक मित्राला केकचा किती भाग मिळाला ?

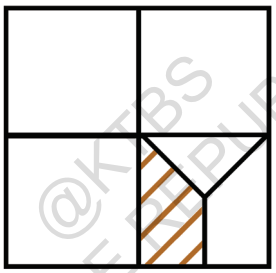
9. दिलेल्या पर्यायांमधून $\left(\frac{565}{465} \times \frac{707}{676}\right)$ या गुणाकाराचे वर्णन करणारे पर्याय निवडा.

(a) $> \frac{565}{465}$ (b) $< \frac{565}{465}$

(c) $> \frac{707}{676}$ (d) $< \frac{707}{676}$

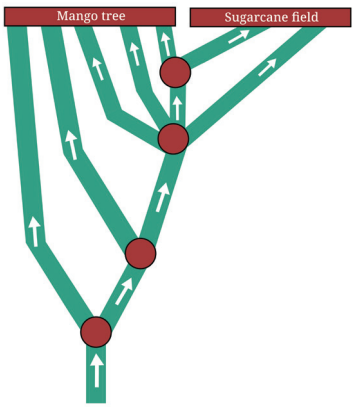
(e) > 1 (f) < 1

10. संपूर्ण चौरसाचा किती भाग छायांकित आहे?



@KTBS NOT TO BE REPUBLISHED

11. मुंग्यांची एक वसाहत अन्नाच्या शोधात निघाली. त्या शोधत असताना, त्या प्रत्येक ठिकाणी समान रीतीने विभाजित होत राहतात (आकृती 8.7 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे) आणि दोन स्त्रोतांपर्यंत पोहचतात, एक आंब्याच्या झाडाजवळ आणि दुसरे उसाच्या शेताजवळ. तर मूळ गटाचा किती भाग प्रत्येक अन्न स्त्रोतापर्यंत पोहोचला?



12. $1-\frac{1}{2}$? म्हणजे काय ?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$?

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)$?

एक सामान्य विधान करा आणि स्पष्टीकरण द्या.

सारांश

- ब्रम्ह गुप्ताचे अपूर्णांकांच्या गुणाकारासाठी सूत्रः

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

- अपूर्णांकांचा गुणाकार करताना, जर अंश आणि छेद यांचे काही सामान्य घटक असतील, तर आपण अंश आणि छेद यांचा गुणाकार करण्यापूर्वी ते रद्द करू शकतो.
- गुणाकारात जेव्हा गुणाकार केल्या जाणाऱ्या संख्येपैकी एक संख्या 0 आणि 1 च्या दरम्यान असते, तेव्हा गुणाकार दुसऱ्या संख्येपेक्षा कमी असतो. जर गुणाकार केल्या जाणाऱ्या संख्ये पैकी एक संख्या 1 पेक्षा मोठी असेल, तर गुणाकार दुसऱ्या संख्येपेक्षा मोठा असतो.
- अपूर्णांकाचा परस्परसंबंध (व्यस्त)

  $\frac{a}{b}$ या अपूर्णांकाचा व्यस्त $\frac{b}{a}$ आहे. जेव्हा आपण एका अपूर्णांकाला त्यांच्या व्यस्तांकाने गुणतो, तेव्हा गुणाकार 1 येतो.

- अपूर्णांकांच्या भागाकारासाठी ब्रम्हगुप्ताचे सूत्र :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

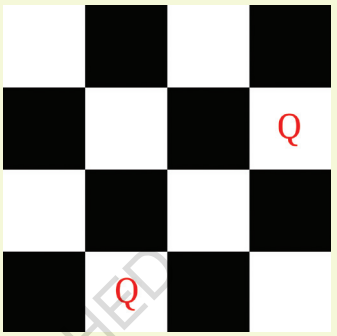
- भागाकारात जेव्हा भाजक 0 ते 1 च्या दरम्यान असतो, तेव्हा भागाकार भाज्यपेक्षा मोठा असतो. जेव्हा भाजक 1 पेक्षा मोठा असतो तेव्हा भागाकार भाज्य पेक्षा लहान असतो.

© KTBS NOT TO BE REPUBLISHED



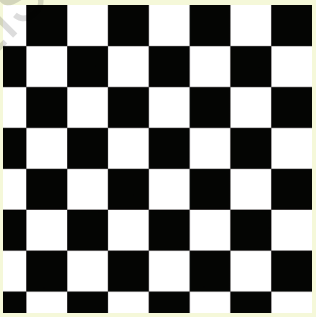
कोड्याची वेळ !

बुद्धिबळ कोडी
हल्ला न करणाऱ्या राण्या



बुध्दिबळ (chess) हा 2 खेळाडूंचा एक लोकप्रिय रणनीती खेळ आहे. हा खेळ भारतात उगम पावला आहे. तो एका 8 × 8 चौरसाकृती खाच्यांच्या पटावर खेळला जातो, ज्यावर काळ्या आणि पांढऱ्या रंगांचे दोन संच असतात. प्रत्येक मोहर कशा प्रकारे चालवायची याचे नियम आहेत.

येथे एक प्रसिद्ध बुध्दिबळावर आधारित कोडे आहे. एक राणीची मोहर तिच्या सध्याच्या स्थानावरून आडवी, उभी किंवा तिरकी चालू शकते. 4 राण्या अशा पध्दतीने ठेवा की. कोणत्याही 2 राण्या एकमेंकीवर हल्ला करू शकणार नाहीत. उदाहरणार्थ, खालील मांडणी योग्य नाही कारण राण्या एकमेकांच्या हल्यांच्या रांगेत आहेत.



आता, 8 × 8 पटावर 8 राण्या अशा ठेवा की, कोणत्याही 2 राण्या एकमेकींवर हल्ला करू शकणार नाहीत!



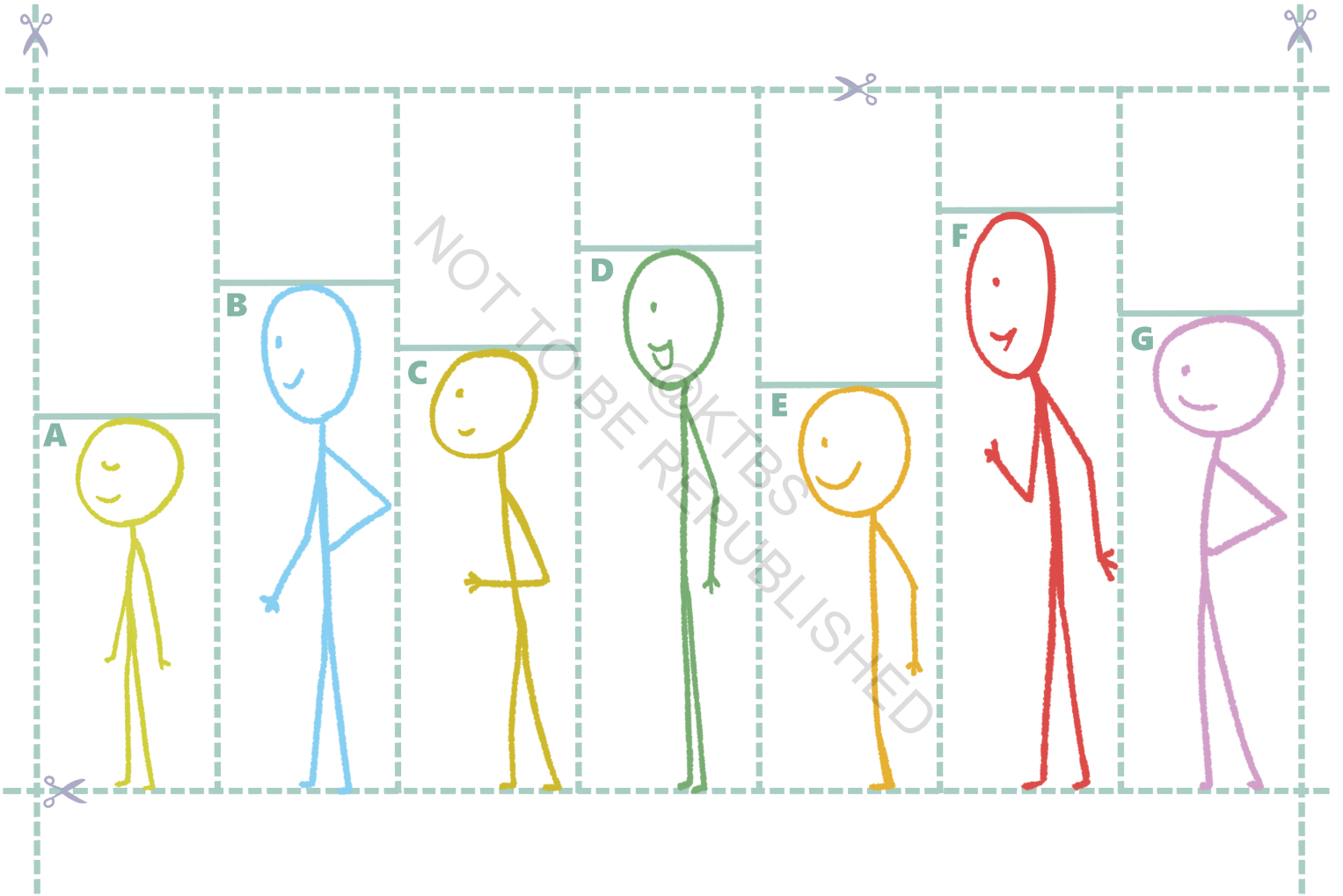
© KEBC NOT TO BE REPUBLISHED



अध्ययन साहित्य पत्रके

Learning Material Sheets

@ICTBS
NOT TO BE REPUBLISHED



NOT TO BE REPUBLISHED ©KTBS